МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Соликамский государственный педагогический институт»

Б. А. Абремский

Преобразования евклидовой плоскости в упражнениях

Учебно-методическое пособие

Соликамск

СГПИ

2011

УДК 514
ББК 22.151я73
А 16

Рецензенты:
Н. Л. Бушуева, *доцент кафедры математики и физики СГПИ;*
С. Д. Ханин, *доктор физ.-мат. наук, профессор РГПУ им. А. И. Герцена;*
А. Л. Вернер, *доктор физ.-мат. наук, профессор РГПУ им. А. И. Герцена.*

А 16 Абремский Б. А. Преобразования евклидовой плоскости в упражнениях [Текст] : учебно-методическое пособие / Б. А. Абремский, – Соликамск : СГПИ, 2011. – 346 с. – ISBN 978-5-89469-072-8.

В пособии представлен теоретический и задачный материал по преобразованиям евклидовой плоскости. Пособие направлено на развитие навыков самостоятельной работы с геометрическим содержанием, может быть использовании для организации практических занятий по геометрии, индивидуальной работы со студентами, подготовки курсовых исследований.

Рассчитано на студентов педагогических вузов, обучающихся по математическим специальностям. Будет интересно учителям математики.

УДК 514
ББК 22.151я73

Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образования Министерства образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 - "Физико-математическое образование".

Протокол № 2 от 3 февраля 2011 года
заседания Президиума Учебно-методического объединения
по направлениям педагогического образования

Издается при поддержке Министерства промышленности, инноваций и науки Пермского края совместно с Пермским научным центром Уральского отделения РАН

ISBN 978-5-89469-072-8

Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие предназначено для студентов математических факультетов педагогических вузов. Предполагается, что читатель имеет лишь самые поверхностные представления о преобразованиях плоскости; этим обусловлены стиль изложения и подбор задач. Основная цель пособия состоит в развитии навыков самостоятельной работы с математическим материалом. Вот почему значительное место отводится упражнениям (задачам) – от самых простых до достаточно сложных.

Упражнения, приведенные в пособии, максимально приближены к соответствующим теоретическим фрагментам и условно разбиты на несколько групп:

– простейшие упражнения, предназначенные для первичного усвоения какого-либо понятия или теоретического положения; номера этих упражнений снабжены значком (^{o});

– типовые задачи, являющиеся, в известной мере, тренировочными для курса геометрии; номера таких задач подчеркнуты;

– задачи, содержащие новый теоретически значимый факт; номера таких задач снабжены звездочкой (*).

Задачи последней группы вместе с приведенными теоретическими сведениями образуют единый теоретический каркас данного пособия.

Другая особенность пособия состоит в повышенном внимании к тем приемам, правилам, методам, которые облегчают поиск решения задачи. Делается попытка выявить и по возможности систематизировать указанные приемы. Сводка наиболее важных из них дана в приложении. Таким образом, цель – «изучить определенный теоретический материал» – мы дополняем другой, не менее важной, целью – «овладеть определенной системой приемов решения задач определенного раздела геометрии».

Теоретическое содержание данного пособия определено книгой Л. С. Атанасяна и В. Т. Базылева [3] и, в основном, является традиционным для ныне действующей программы курса геометрии в педвузах, хотя местами и выходит за пределы этой программы. Мы стараемся по возможности усилить профессиональную направленность изложения, «спускаясь» порой до типичных школьных задач или пытаясь осветить известные школьные вопросы с позиций вузовского курса геометрии. Ряд задач в пособии заимствован из источников, указанных в списке литературы.

Предлагаемое пособие многофункционально. Его можно использовать как в рамках основного курса геометрии (например, в качестве сборника задач), так и в дисциплинах по выбору. Наконец, оно содержит богатый материал и для курсовых работ по геометрии.

Разумеется, преподаватель, использующий данное пособие, может выбирать различные траектории прохождения изучаемого материала. Так, например, некоторые задачи из § 43 (группы геометрических преобразований) могут рассматриваться (если позволяет алгебраическая подготовка студентов) гораздо раньше, уже в главах, посвященных движениям и преобразованиям подобия.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность за ценные советы и замечания профессору кафедры геометрии Российского государственного педагогического университета им. А. И. Герцена А. Л. Вернеру, профессорам кафедры геометрии Уральского государственного педагогического университета Ю. Н. Мухину и В. П. Толстопятову и доценту этой кафедры Т. А. Унеговой.

Введение

Изложим вначале те общие рекомендации и принципы, которыми полезно руководствоваться, изучая данное пособие.

А. Как работать с определением?

Большинство математических определений имеют следующую структуру. "Объект x из множества M называется $\boxed{a}$, если он удовлетворяет условиям α, β, …". Здесь $\boxed{a}$ есть тот термин, который присваивается определенному понятию, а α, β, … – существенные признаки определяемого понятия. Определение указанного типа позволяет ответить на два вопроса.

А$_1$. Известно, что объект x из множества M является $\boxed{a}$. Что отсюда следует? Что это значит?

Ответ. Отсюда следует (это означает), что объект x удовлетворяет условиям α, β, ….

А$_2$. Как доказать, что объект x из множества M является $\boxed{a}$?

Ответ. Чтобы доказать, что объект x из множества M является $\boxed{a}$, достаточно установить, что он удовлетворяет условиям α, β, … .

Итак, совет первый. Изучая определение, имеющее указанную выше структуру, ставьте перед собой вопросы типа A_1 или A_2 и находите ответы на эти вопросы, используя данное определение. Такая тренировка поможет Вам при решении задач.

Упражнение

1°. Как известно, базисом векторного пространства V называется упорядоченная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, которая удовлетворяет двум условиям:

а) система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно независима;

б) любой вектор пространства V можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Сформулируйте для данного определения вопросы типа A_1 и A_2 и ответьте на эти вопросы.

В. Как работать с теоремой?

Большинство теорем имеет следующую структуру. «Если объект x из множества M удовлетворяет условию α, то он удовлетворяет и условию β». Такая теорема позволяет ответить на два вопроса.

В₁. Известно, что объект x из множества M удовлетворяет условию α. Что отсюда следует?

Ответ. Отсюда следует, что объект x удовлетворяет условию β.

В₂. Как доказать, что объект x из множества M удовлетворяет условию β?

Ответ. Чтобы доказать, что объект x удовлетворяет условию β, достаточно установить, что x удовлетворяет условию α.

Итак, <u>совет второй</u>. Изучив какую-либо теорему, сформулируйте вопросы типа B_1 и B_2 и ответьте на них, используя данную теорему. Такая тренировка принесет Вам большую пользу.

Упражнение

2°. Как известно, имеет место следующая теорема: «Если определитель, составленный из координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в двумерном векторном пространстве, равен нулю, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы».

Сформулируйте для данной теоремы вопросы типа B_1 и B_2 и ответьте на эти вопросы.

С. Как решать задачи?

Процесс решения любой достаточно сложной задачи состоит обычно из следующих этапов.

1. Ознакомление с задачей, осмысление ее условий (что дано?) и цели (что требуется доказать? найти? и т. п.), уточнение смысла терминов в тексте задачи.

2. Поиск решения (отыскание плана, идеи, способа решения).

3. Реализация плана; иначе говоря, оформление решения в устной или письменной форме.

4. Подведение итогов.

Наиболее трудным этапом процесса решения является поиск решения задачи. Раскроем три основных действия, которые чаще других осуществляются на этой стадии.

1. Выведение следствий. Осуществляя это действие, мы рассуждаем примерно так: "Нам известно, что … . Что отсюда следует? Что можно найти, располагая этими условиями? Отсюда следует, что … . Располагая этими условиями, можно найти, узнать … ". Чаще всего такие выводы осуществляются на основе некоторого определения (ответ на вопрос типа A_1) или на основе какой-либо теоремы (ответ на вопрос типа B_1).

2. Анализ цели. Осуществляя это действие, мы рассуждаем примерно так: "Требуется … . Как это сделать? Что для этого надо доказать, найти, установить?". Отвечая на эти вопросы, мы либо сводим одну задачу к другой (например, "Чтобы доказать α, достаточно доказать β"), либо разбиваем задачу на несколько подзадач (например, "Чтобы доказать α, достаточно доказать β_1, β_2, β_3"). Довольно часто, но не всегда, ответы на указанные вопросы основаны либо на некотором определении, либо на некоторой теореме (ответы на вопросы типа A_2 или B_2).

3. Сопоставление достигнутого с требуемым. Осуществляя (чаще всего – попеременно) выведение следствий и анализ цели, мы сравниваем то, чего мы уже достигли на пути движения к цели, с тем, чего мы должны достичь. В результате такого сравнения мы вносим в процесс решения необходимые коррективы: выводим новые следствия, ставим новые цели и т. п. Указанный метод (назовем его методом попеременного движения) особенно успешно используется в задачах на доказательство.

Итак, совет третий.

Решая задачу, чаще ставьте себе следующие вопросы:

а) Что известно? Что отсюда следует? Что можно узнать, найти, доказать, располагая этими данными?

б) Что требуется? Как этого достичь? Что для этого надо сделать, узнать, найти, доказать?

Отвечая на эти вопросы, постоянно сопоставляйте достигнутое с требуемым.

Упражнение

3°. Дана задача: "Точки A (x_1, y_1), B (x_2, y_2), C (x_3, y_3) лежат на одной прямой, причем простое отношение (AB, C) равно λ. Доказать, что $x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}$. "

Выведите следствия из условий задачи, заполняя пропуски в предложениях:

а) т. к. $(AB,C) = \lambda$, то $\overrightarrow{AC} = \ldots$;

б) т. к. $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, то $\overrightarrow{AC}(\ldots), \overrightarrow{CB}(\ldots)$.

Сопоставьте полученные выводы с целью задачи и завершите решение.

Поиск решения задачи значительно облегчается, если мы владеем определенными приемами, правилами, методами. Некоторые такие приемы общего характера были перечислены выше: выведение следствий, анализ цели, метод попеременного движения. Следует помнить, однако, что задача может потребовать от нас и других действий, например выдвижения гипотез, мысленного эксперимента и т. п.

Значительную помощь при решении задач могут оказать и приемы более частного плана, основанные на определениях и теоремах. По существу эти приемы представляют собой ответы на вопросы типа A_2 для определений или на вопросы типа B_2 для теорем. Чтобы помочь читателю научиться решать задачи, в приложении приведена «Сводка основных правил, приемов и методов решения задач». Часть из них сообщается в готовом виде, другие предлагается сформулировать самому читателю. В случае затруднений следует обратиться к «Ответам и указаниям», где можно найти ссылку на соответствующие приемы.

ГЛАВА I. Общие вопросы теории геометрических преобразований

§ 1. Отображения и преобразования

Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что задано отображение f множества A в множество B, если *каждому* элементу множества A по некоторому закону или правилу поставлен в соответствие *определенный* (единственный) элемент множества B.

Символически это записывается так: f: $A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$ (читается: "отображение f множества A в множество B"). Множество A называется областью определения отображения f, а множество B – областью прибытия.

Если при отображении f элементу x множества A ставится в соответствие элемент y множества B, то пишут: $f(x) = y$, или $x \xrightarrow{f} y$, или $x \to y$, опуская символ f, если это не вызывает недоразумений. При этом элемент y называется образом элемента x (говорят также, что x переходит в y или x отображается на y). Элемент x, в свою очередь, называется прообразом элемента y.

На рис. 1 задано отображение f множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в множество $\{a, b, c, d\}$. Здесь: $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = d$, $f(5) = d$. Прообразами элемента a являются числа 1 и 3; прообразом элемента c является число 2; элемент b не имеет прообраза.

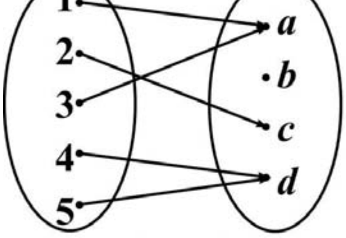


Рис. 1

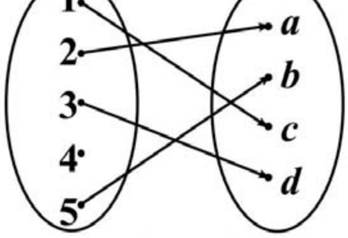


Рис. 2

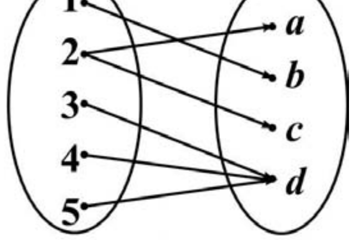


Рис. 3

ГЛАВА I. Общие вопросы теории геометрических преобразований

§ 1. Отображения и преобразования

Пусть A и B – некоторые множества. Говорят, что задано отображение f множества A в множество B, если *каждому* элементу множества A по некоторому закону или правилу поставлен в соответствие *определенный* (единственный) элемент множества B.

Символически это записывается так: f: $A \to B$ или $A \xrightarrow{f} B$ (читается: "отображение f множества A в множество B"). Множество A называется областью определения отображения f, а множество B – областью прибытия.

Если при отображении f элементу x множества A ставится в соответствие элемент y множества B, то пишут: $f(x) = y$, или $x \xrightarrow{f} y$, или $x \to y$, опуская символ f, если это не вызывает недоразумений. При этом элемент y называется образом элемента x (говорят также, что x переходит в y или x отображается на y). Элемент x, в свою очередь, называется прообразом элемента y.

На рис. 1 задано отображение f множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в множество $\{a, b, c, d\}$. Здесь: $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = a$, $f(4) = d$, $f(5) = d$. Прообразами элемента a являются числа 1 и 3; прообразом элемента c является число 2; элемент b не имеет прообраза.

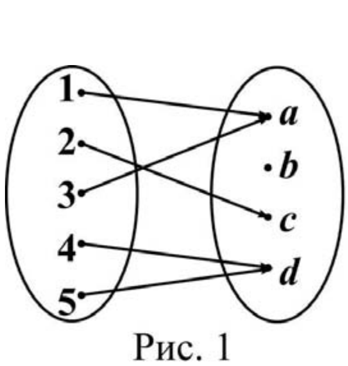


Рис. 1

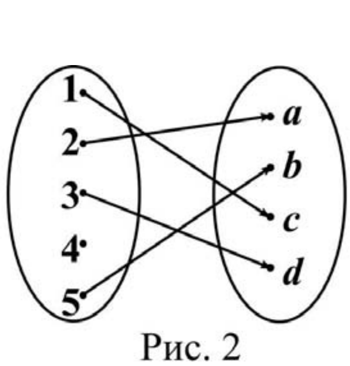


Рис. 2

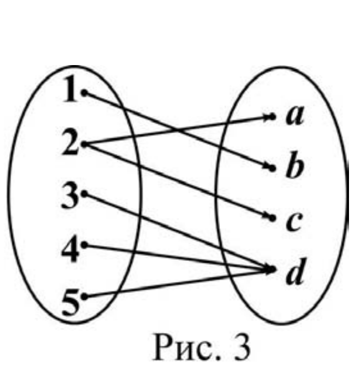


Рис. 3

Упражнения

4°. Объясните, почему можно считать, что на рис. 1 задано отображение множества A в множество B.

5°. Объясните, почему нельзя считать, что на рис. 2 и рис. 3 заданы отображения A в B.

Понятие отображения является центральным понятием математики, с которым мы встречаемся едва ли не в каждом ее разделе.

Например, функции $y=x^2$, $y=e^x$, $y=\sin x$ можно рассматривать как отображения множества всех действительных чисел R в множество R: каждому числу x первая функция ставит в соответствие число x^2, вторая функция – число e^x, третья функция – число $\sin x$.

Формула $z= x^2+y^2$ каждой упорядоченной паре (x, y) действительных чисел ставит в соответствие число z, равное x^2+y^2. Таким образом, эта формула задает отображение множества $R\times R$ в множество R (иначе функцию двух переменных).

Числовую последовательность (x_n) можно рассматривать как отображение множества N всех натуральных чисел в множество R: каждому натуральному числу n ставится в соответствие определенное число x_n, которое называется n-ым членом последовательности.

Пусть V – множество всех векторов трехмерного пространства. Сложение векторов есть отображение, которое любой упорядоченной паре векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. каждому элементу множества $V\times V$) ставит в соответствие по определенному закону (а именно по правилу треугольника) вектор, обозначаемый $\vec{a}+\vec{b}$ и называемый суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Таким образом, сложение векторов можно рассматривать как отображение множества $V\times V$ в множество V.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – некоторые фиксированные векторы, а t – переменная, пробегающая множество всех действительных чисел R. Векторное равенство $\vec{v} = t \cdot \vec{a} + t^2 \cdot \vec{b}$ каждому действительному числу t ставит в соответствие вектор $t \cdot \vec{a} + t^2 \cdot \vec{b}$. Таким образом, это равенство задает отображение множества R в множество V (иначе векторную функцию скалярного аргумента).

Процесс измерения длин отрезков можно трактовать как отображение множества всех отрезков в множество положительных действительных чисел: каждому отрезку ставится в соответствие определенное число – длина этого отрезка при выбранной единице измерения.

Упражнения

6°. Какие из приведенных ниже высказываний верны, а какие – нет?

а) функция $y=lg\ x$ есть отображение множества всех действительных чисел R в множество R;

б) функция $y = \sqrt{x}$ есть отображение множества всех неотрицательных действительных чисел R_O^+ в множество R;

в) вычитание натуральных чисел есть отображение множества $N \times N$ в множество целых чисел.

7°. На плоскости задана аффинная система координат $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Каждой точке M (x, y) ставится в соответствие точка M' (x', y'), где $x' = x+y$, $y' = x-y$. Тем самым задано отображение плоскости в себя. Найти образы и прообразы точек A (1; 2), B (–1; 3), C (0; 0). Сделать рисунок.

Примечание. Из последнего примера видно, что отображение плоскости в себя может быть задано (при наличии некоторой декартовой системы координат) формулами вида $x' = f(x, y)$, $y' = \varphi(x, y)$, которые позволяют, зная координаты x и y любой точки плоскости, найти координаты x', y' ее образа. Такие формулы мы будем называть формулами отображения плоскости (в данной системе координат).

Пусть f – отображение множества A в множество B, а C – некоторое подмножество множества A. Множество образов всех элементов множества C называется образом множества C и обозначается через $f(C)$. В частности, образ области определения A отображения f называется множеством значений этого отображения.

Например, для отображения на рис. 1 образом множества $\{1; 2\}$ является множество $\{a; c\}$ (говорят также, что при данном отображении множество $\{1; 2\}$ переходит в множество $\{a; c\}$ или отображается на множество $\{a; c\}$).

Пусть задано отображение f: $A \to B$ и D – некоторое подмножество области прибытия B. Полным прообразом множества D называется множество всех элементов из A, образы которых принадлежат D. Полный прообраз множества D обозначается через $f^{-1}(D)$. В частности, если D состоит из одного элемента y, то $f^{-1}(D)$ называется полным прообразом элемента y и обозначается $f^{-1}(y)$.

Например, для отображения на рис. 1 полным прообразом множеств $\{a\}$, $\{a; b\}$ и $\{a; b; c\}$ являются соответственно множества $\{1; 3\}$, $\{1; 3\}$ и $\{1; 2; 3\}$.

Упражнения

8°. Для отображения на рис. 1 найти:

а) образы множеств $\{1; 2; 3\}$, $\{2; 3\}$, $\{3; 4; 5\}$, $\{5\}$;

б) полные прообразы множеств $\{b; c\}$, $\{a; c; d\}$, $\{a; b; c; d\}$;

в) полный прообраз каждого элемента множества B;

г) множество значений данного отображения.

9°. Рассматривая функцию $y=x^2$ как отображение множества R в себя (т.е. в R), найти:

а) образ отрезка $[0; 2]$;

б) полный прообраз отрезка $[0; 1]$;

в) множество значений данного отображения.

10°. Рассматривая функцию $y = sin\ x$ как отображение множества R в себя, найти:

а) образ отрезка $[0; \pi]$;

б) полный прообраз числа 0;

в) множество значений данного отображения.

Отображение f: $A \to B$ называется инъекцией, если образы любых двух различных элементов множества A различны.

Отображение f: $A \to B$ называется сюръекцией (или отображением множества A на множество B), если всякий элемент множества B является образом хотя бы одного элемента из A. Иначе, отображение f: $A \to B$ называется сюръекцией, если всякий элемент из множества B имеет хотя бы один прообраз; иначе, отображение f: $A \to B$ называется сюръекцией, если $f(A) = B$, т.е. если множество значений данного отображения совпадает с его областью прибытия.

Отображение, показанное на рис. 1, не является инъекцией, т.к., например, образы элементов 1 и 3 совпадают. Это отображение не является и сюръекцией, т.к. элемент b не имеет ни одного прообраза.

Отображение f: $A \to B$, которое является одновременно инъекцией и сюръекцией, называется биекцией (биективным отображением). Биективное отображение называют иначе взаимно однозначным отображением множества A на множество B. В этом случае говорят также, что между элементами множеств A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

Упражнения

11°. Пусть $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B=\{a; b; c; d; e\}$. Задать какое-нибудь отображение f: $A \to B$, которое было бы инъективным, но не сюръективным.

12°. Пусть $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$, $B=\{a; b; c; d\}$. Задать какое-нибудь отображение f: $A \to B$, которое было бы сюръективным, но не инъективным.

13°. Пусть $A=\{1; 2; 3; 4\}$, $B=\{a; b; c; d\}$. Задать какое-нибудь отображение f: $A \to B$, которое было бы инъекцией и сюръекцией, т.е. биекцией.

14°. Используя определения инъекции, сюръекции, биекции, ответить на следующие вопросы:

а) известно, что отображение f: $A \to B$ является инъекцией (сюръекцией, биекцией). Что это означает?

б) как доказать, что отображение f: $A \to B$ является инъекцией? сюръекцией? биекцией?

15°. Рассматривая функцию $y=sin\ x$ как отображение множества R в отрезок $[-1; 1]$, выяснить, является ли это отображение инъекцией? сюръекцией? биекцией?

16°. Рассматривая функцию $y=sin\ x$ как отображение отрезка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ в отрезок $[-1; 1]$, выяснить, является ли это отображение инъекцией? сюръекцией? биекцией?

17°. Рассматривая функцию $y=sin\ x$ как отображение отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ в отрезок $[-1; 1]$, выяснить, является ли это отображение инъекцией? сюръекцией? биекцией?

18*. Доказать, что если отображение f: $A \to B$ является биекцией, то всякий элемент множества B имеет ровно один прообраз.

19*. Дано отображение f: $A \to B$. Доказать, что если всякий элемент множества B имеет ровно один прообраз, то f – биекция (признак биективности).

20°. Как доказать, используя полученный результат, что отображение f: $A \to B$ является биекцией?

Говоря об отображении $f\colon A \to B$, мы не исключаем и такой ситуации, когда область определения A совпадает с областью прибытия B. В этом случае имеем отображение множества A в себя – $f\colon A \to A$. Например, в упр. 7 рассматривалось отображение плоскости в себя, заданное формулами $x' = x+y$, $y' = x-y$.

Может оказаться, что отображение $f\colon A \to A$ является биекцией. Тогда говорят, что f есть преобразование множества A. Итак, преобразованием множества A называется взаимно однозначное отображение множества A на себя.

Примером преобразования множества (в частности, плоскости) является тождественное преобразование; так называют отображение, при котором всякий элемент множества (всякая точка плоскости) отображается на себя.

Упражнения

21°. Задать какое-нибудь преобразование:

а) множества $A = \{1; 2; 3\}$;

б) множества $B = \{a; b; c; d\}$.

22°. Как доказать, что отображение $f\colon A \to A$ является преобразованием?

23. Отображение f плоскости в себя в некотором аффинном репере задано формулами $x' = x+y+1$, $y' = x-y+2$. Доказать, что f – преобразование плоскости.

24*. Отображение f плоскости в себя в некотором аффинном репере задано формулами

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \qquad (1).$$

Доказать, что отображение f является преобразованием тогда и только тогда, когда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Указание. Воспользуйтесь следующим алгебраическим фактом:

система $\begin{cases} mx + ny = a \\ px + qy = b \end{cases}$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \neq 0$.

25°. Как доказать, используя полученный выше результат, что отображение плоскости в себя, заданное в аффинном репере линейными формулами, т.е. формулами (1), является преобразованием плоскости?

26. Являются ли преобразованиями плоскости отображения, заданные следующими формулами:

а) $x' = x - 2y + 5$, $y' = 3x - 6y + 1$;

б) $x' = x - 2y + 5$, $y' = 3x - 5y + 1$;

в) $x' = x + 1$, $y' = x + y$.

§ 2. Примеры преобразований плоскости

2.1. Параллельный перенос

Определение. Пусть $\vec{p}$ – фиксированный вектор. Параллельным переносом на вектор $\vec{p}$ называется отображение плоскости в себя, при котором каждая точка M переходит в такую точку M', что $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$ [1]. Перенос на вектор $\vec{p}$ обозначается $T_{\vec{p}}$.

Упражнения

27°. При переносе на вектор $\vec{m}$ точка A переходит в точку B.

---

[1] Аналогично определяется параллельный перенос в трехмерном пространстве; достаточно в приведенном определении заменить слово «плоскость» словом «пространство».

Что это означает?

28°. Как доказать, что при переносе на вектор $\vec{a}$ точка M переходит в точку P?

29°. Задайте на плоскости вектор $\vec{p}$ и постройте образы нескольких произвольно выбранных точек при переносе на вектор $\vec{p}$.

30°. Дан параллелограмм $ABCD$. Укажите образ точки A при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ (образ точки D при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$).

31°. При переносе на вектор $\vec{p}$ точка A переходит в точку B, а при переносе на вектор $\vec{q}$ точка B переходит в точку C. Найти: а) образ точки B при переносе на вектор $-\vec{p}$;

б) образ точки A при переносе на вектор $\vec{p}+\vec{q}$.

Пример 1. Найдем формулы параллельного переноса на вектор $\vec{p}\,(a, b)$.

Решение. Пусть при переносе на вектор $\vec{p}\,(a, b)$ произвольная точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x', y')$, тогда по определению переноса $\overrightarrow{MM'}=\vec{p}$. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\overrightarrow{MM'}$ и $\vec{p}$, получаем $x'-x=a$, $y'-y=b$, откуда $x' = x+a$, $y' = y+b$ (*). Это и есть искомые формулы.

Примечание. Обобщая это решение, можно сформулировать общий прием отыскания формул отображения плоскости в себя; он приведен в п. 4.1. «Сводки».

Упражнения

32*. Доказать, что параллельный перенос является преобразованием плоскости.

<u>33</u>. Составить формулы параллельного переноса на вектор $\vec{p}$, если известно, что при этом переносе точка A (1; 2)

переходит в точку A_1, принадлежащую прямой

$x + 2y - 6 = 0$ и $|\vec{p}| = \sqrt{10}$.

Пример 2. Докажем, что всякое преобразование плоскости, заданное в некотором аффинном репере формулами (*), является параллельным переносом на вектор $\vec{p}\,(a, b)$.

Решение. Пусть f – преобразование, заданное формулами (*), а φ – перенос на вектор $\vec{p}\,(a, b)$. По доказанному выше преобразование φ задается формулами $x' = x+a$, $y' = y+b$. Как видим, преобразования f и φ задаются в данном аффинном репере одинаковыми формулами и, следовательно, совпадают. Поэтому f есть перенос на вектор $\vec{p}\,(a, b)$.

Примечание. Приведенное решение основано на очевидной идее совпадения двух преобразований плоскости, заданных одинаковыми формулами в некотором аффинном репере (см. п. 6.1. в «Сводке»).

2.2. Поворот (вращение)

Определение. Пусть на ориентированной плоскости заданы точка O и направленный (ориентированный) угол, величина которого равна α. Поворотом (вращением) вокруг точки O на угол α называется отображение плоскости в себя, при котором точка O отображается на себя, а всякая точка M, отличная от точки O, переходит в такую точку M', что $OM' = OM$ и угол MOM' равен α.

Поворот вокруг точки O (центр поворота) на угол α (угол поворота) обозначается R_O^{α}. Очевидно, что если $\alpha = \beta + 2k\pi$, где $k \in Z$, то $R_O^{\alpha} = R_O^{\beta}$ и обратно.

Примечание. В трехмерном пространстве аналогом поворота вокруг точки является поворот вокруг прямой; его можно определить так.

Пусть в пространстве даны прямая a и направленный (ориентированный) угол, лежащий в некоторой плоскости, перпендикулярной прямой a, причем величина этого угла равна α. Поворотом вокруг прямой a на угол α называется отображение пространства в себя, при котором всякая точка прямой a отображается на себя, а всякая точка M, не принадлежащая прямой a, переходит в такую точку M', что:

1) точки M и M' равноудалены от прямой a;

2) точки M и M' лежат в некоторой плоскости σ, перпендикулярной прямой a; при этом $\sigma \cap a = O$;

3) угол MOM' равен α.

Упражнения

34°. При повороте R_A^{α} точка B переходит в точку C. Что это означает?

35°. Как доказать, что при повороте R_O^{φ} точка A переходит в точку B?

36°. Отметьте на плоскости точки O, A, B. Постройте образы точек A и B при повороте $R_O^{45^\circ}$ (при повороте $R_O^{-30^\circ}$).

37°. Дан правильный треугольник ABC (буквы A, B, C расставлены в порядке обхода вершин по часовой стрелке); точка O – центр треугольника. Укажите:

а) образ точки B при повороте $R_A^{-60^\circ}$;

б) образ точки B при повороте $R_C^{60^\circ}$;

в) образы точек A, B, C при повороте $R_O^{120^\circ}$;

г) образы точек A, B, C при повороте $R_O^{240^\circ}$.

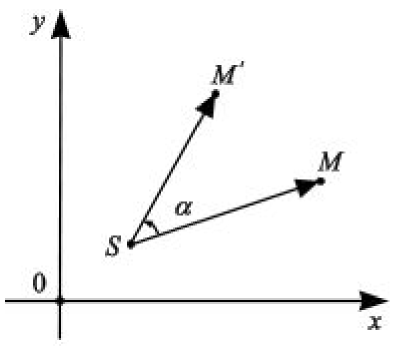


Рис. 4

Пример 3. Составим формулы поворота вокруг точки S (x_0, y_0) на угол α

(система координат – прямоугольная).

Решение. Пусть при повороте R_S^{α} произвольная точка $M(x, y)$, отличная от точки S, переходит в точку $M'(x', y')$ (рис. 4).

По определению поворота $SM = SM'$ и ориентированный угол MSM' равен α, т. е. $\angle(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SM'}) = \alpha$. Т. к. $\overrightarrow{SM}(x - x_0; y - y_0)$, $\overrightarrow{SM'}(x' - x_0; y' - y_0)$, то, используя известные формулы, получаем:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{SM'}}{\left|\overrightarrow{SM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SM'}\right|} = \frac{(x - x_0)\cdot(x' - x_0) + (y - y_0)\cdot(y' - y_0)}{\left|\overrightarrow{SM}\right|^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x' - x_0 & y' - y_0 \end{vmatrix}}{\left|\overrightarrow{SM}\right| \cdot \left|\overrightarrow{SM'}\right|} = \frac{-(y - y_0)\cdot(x' - x_0) + (x - x_0)\cdot(y' - y_0)}{\left|\overrightarrow{SM}\right|^2},$$

отсюда:

$$\begin{cases} (x - x_0)\cdot(x' - x_0) + (y - y_0)\cdot(y' - y_0) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\cdot\cos\alpha \\ -(y - y_0)\cdot(x' - x_0) + (x - x_0)\cdot(y' - y_0) = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)\cdot\sin\alpha \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно x' и y', получаем:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha - x_0\cdot\cos\alpha + y_0\cdot\sin\alpha + x_0, \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha - x_0\cdot\sin\alpha - y_0\cdot\cos\alpha + y_0 \end{cases} \quad (*).$$

Формулы (*) составлены для всех точек M, отличных от центра поворота S_0. Однако, как легко видеть, они годятся и для точки S. Действительно, в соответствии с формулами (*) $S(x_0; y_0) \to S(x_0; y_0)$, что и требуется определением поворота.

В частности, если центр поворота совпадает с началом координат, то формулы (*) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{cases}$$

(формулы поворота вокруг начала координат на угол α).

Упражнения

38°. Составить формулы поворота вокруг начала координат на угол 30º (–60º; 45º).

39*. Доказать, что поворот является преобразованием плоскости.

40*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в ортонормированном репере формулами (*), является поворотом вокруг точки S (x_0; y_0) на угол α.

41. При повороте R_S^α точка A (2; 3) переходит в точку B (5; 0). Составить формулы поворота, если известно, что его центр принадлежит прямой $2x + y - 1 = 0$. Найти образ начала координат при этом повороте.

2.3. Центральная симметрия

Определение. Центральной симметрией с центром O называется отображение плоскости в себя, при котором всякая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно точки O[1]. Центральная симметрия с центром O обозначается Z_O.

Напомним, что точки M и M' называются симметричными относительно точки O, если отрезок MM' делится точкой O пополам. При этом считается, что точка O симметрична сама себе относительно O.

Упражнения

42°. При центральной симметрии Z_A точка M переходит в точку P. Что это означает?

---

[1] Аналогично определяется центральная симметрия (отражение относительно точки) в трехмерном пространстве; достаточно в приведенном определении заменить слово «плоскость» словом «пространство».

43°. Как доказать, что при центральной симметрии Z_O точка A переходит в точку B.

44°. Отметьте на плоскости точки O, A, B. Постройте образы точек O и A при центральной симметрии Z_B.

45°. Диагонали параллелограмма пересекаются в точке O. Указать образы точек A, B, C, D, O при центральной симметрии Z_O.

46°. При центральной симметрии Z_A точка M переходит в точку K, а при центральной симметрии Z_B точка K переходит в точку P. Доказать, что при переносе на вектор $2\overrightarrow{AB}$ точка M переходит в точку P.

47*. Сравните определения поворота и центральной симметрии. Как соотносятся эти понятия?

48*. Составьте формулы центральной симметрии с центром в начале координат.

49*. Составьте формулы центральной симметрии с центром в точке $S\,(x_0; y_0)$.

50*. Доказать, что центральная симметрия является преобразованием плоскости.

51*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в аффинном репере формулами $x' = -x + 2x_0$, $y' = -y + 2y_0$, является центральной симметрией с центром в точке $S\,(x_0; y_0)$.

<u>52</u>. На прямой $2x + y + 3 = 0$ найти точку, которая при центральной симметрии с центром в начале координат переходит в точку, принадлежащую прямой $x - y - 3 = 0$.

<u>53</u>. Составить формулы центральной симметрии Z_S, при которой точка $A(0; 1)$ переходит в точку, принадлежащую прямой $x - y + 7 = 0$, если известно, что центр S принадлежит прямой $x + y - 5 = 0$.

2.4. Осевая симметрия

Определение. Пусть на плоскости даны прямая a и точка $M \notin a$. Как известно, точка M' называется симметричной точке M относительно прямой a, если отрезок MM' перпендикулярен прямой a и делится ею пополам. При этом считается, что всякая точка прямой a симметрична сама себе относительно этой прямой.

Определение. Осевой симметрией с осью a называется отображение плоскости в себя, при котором каждая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно прямой a. Осевая симметрия с осью a обозначается S_a.

Примечание. В трехмерном пространстве для осевой симметрии существует два аналога.

1) Отражение относительно прямой определяется аналогично осевой симметрии; достаточно в приведенном определении заменить слово «плоскость» словом «пространство».

2) Отражение относительно плоскости σ – отображение пространства в себя, при котором всякая точка M переходит в точку M', симметричную точке M относительно плоскости σ.

Упражнения

54°. При осевой симметрии с осью a точка B переходит в точку C. Что это означает?

55°. Как доказать, что при осевой симметрии с осью a точка A переходит в точку B?

56°. На плоскости даны прямая a и несколько точек. Постройте образы этих точек при осевой симметрии S_a.

57°. Дан ромб $ABCD$. Укажите образы его вершин при осевой симметрии с осью AC (с осью BD).

58°. Точка M лежит внутри прямого угла AOB. При осевой симметрии S_{OA} точка M переходит в точку P, а при осевой симметрии S_{OB} точка P переходит в точку K. Доказать, что при центральной симметрии Z_O точка M переходит в точку K.

59. При осевой симметрии, осью которой является прямая $2x - y = 0$, точка A оси Ox переходит в точку B, принадлежащую прямой $3x + y + 1 = 0$. Найти точки A и B.

Пример 4. Составим формулы осевой симметрии, осью которой является прямая a, заданная в ортонормированном репере уравнением $Ax+By+C=0$.

Решение. Пусть при осевой симметрии S_a произвольная точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M'(x';\ y')$. Тогда, во-первых, отрезок MM' перпендикулярен прямой a и, стало быть, $\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{p} = 0$, где $\vec{p}$ – направляющий вектор прямой a. Во-вторых, середина отрезка MM' – точка M_0 – принадлежит прямой a. Имеем:

$$\overrightarrow{MM'}(x'-x; y'-y),\ \vec{p}(B;-A),\ M_0\left(\frac{x'+x}{2}; \frac{y'+y}{2}\right).$$

Отсюда получаем:

$$\overrightarrow{MM'} \cdot \vec{p} = 0 \Rightarrow B\cdot(x'-x) - A(y'-y) = 0,$$
$$M_0 \in a \Rightarrow \frac{A(x'+x)}{2} + \frac{B(y'+y)}{2} + C = 0.$$

Решая эту систему относительно x' и y', находим:

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\cdot x - \dfrac{2AB}{A^2 + B^2}\cdot y - \dfrac{2AC}{A^2 + B^2}, \\ y' = -\dfrac{2AB}{A^2 + B^2}\cdot x + \dfrac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2}\cdot y - \dfrac{2BC}{A^2 + B^2} \end{cases} (*).$$

Упражнения

60*. Доказать, что осевая симметрия является преобразованием плоскости.

61. Составить формулы осевой симметрии, при которой точка $M(2; 5)$ переходит в точку $M'(0; 1)$.

62*. Составить формулы осевой симметрии с осью Ox (с осью Oy), используя определение осевой симметрии, а затем убедиться, что полученные формулы являются частным случаем формул (*) из примера 4.

63*. Доказать, что преобразование плоскости, заданное в ортонормированном репере формулами $x'=x$, $y'=-y$ ($x'=-x$, $y'=y$), является осевой симметрией с осью Ox (с осью Oy).

2.5. Гомотетия

Определение. Пусть даны некоторая точка O и число $k \neq 0$. Гомотетией с центром O и коэффициентом k называется отображение плоскости в себя, при котором каждая точка M плоскости переходит в такую точку M′, что $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$. Гомотетия с центром O и коэффициентом k обозначается H_O^k[1].

Упражнения

64°. При гомотетии H_A^k точка B переходит в точку C. Что это означает?

65°. Как доказать, что при гомотетии H_O^k точка A переходит в точку B?

66°. Отметьте точки O, A, B. Постройте образы этих точек при гомотетии с центром в точке O и коэффициентом k,

---

[1] Аналогично определяется гомотетия в трехмерном пространстве; достаточно в приведенном определении заменить слово «плоскость» словом «пространство».

равным $2; -\frac{1}{2}; -2; \frac{1}{3}$.

67°. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как 1:3. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон – в точке S. Укажите образы: а) точек B и C при гомотетии H_O^{-3}; б) точек A и D при гомотетии $H_O^{-\frac{1}{3}}$; в) точек B и C при гомотетии H_S^3; г) точек A и D при гомотетии $H_S^{\frac{1}{3}}$.

68*. Что представляет собой гомотетия H_O^{-1}? H_O^1?

69*. При гомотетии H_O^k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1. Доказать, что $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (основное свойство гомотетии).

70*. Составить формулы гомотетии:

а) с центром в начале координат и коэффициентом, равным k;

б) с центром в точке S $(x_0; y_0)$ и коэффициентом, равным k.

71*. Доказать, что гомотетия является преобразованием плоскости.

72*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в аффинном репере формулами вида $x'=kx$, $y'=ky$, является гомотетией с центром в точке O (0; 0) и коэффициентом, равным k.

73. При гомотетии H_S^k, где $k = 2$, точка $A(5; 2)$ переходит в точку $B(-3; -4)$. Найти центр S и составить формулы гомотетии.

74. На прямой $3x - y - 8 = 0$ найти точку A, которая при гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом, равным $\frac{1}{2}$, переходит в точку, принадлежащую

прямой $x + y - 2 = 0$.

§ 3. Отыскание образа фигуры при заданном преобразовании

Пусть f – некоторое преобразование плоскости, а Φ – некоторая фигура. В соответствии с определением, данным в §1, образ фигуры Φ при преобразовании f есть такая фигура Φ', которая состоит из всех тех и только тех точек плоскости, каждая из которых является образом некоторой точки фигуры Φ. Отсюда, опираясь на понятие равенства двух множеств, получаем следующее правило отыскания образа фигуры.

Чтобы доказать, что при преобразовании f фигура Φ переходит в фигуру Φ' (отображается на фигуру Φ', преобразуется в фигуру Φ'), достаточно:

– взять произвольную точку M фигуры Φ и доказать, что ее образ принадлежит фигуре Φ';

– взять произвольную точку M' фигуры Φ' и доказать, что ее прообраз принадлежит фигуре Φ (см. п. 5.1. в «Сводке»).

Пример 1. Дан параллелограмм $ABCD$. Докажем, что при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ отрезок AB отображается на отрезок DC (рис. 5).

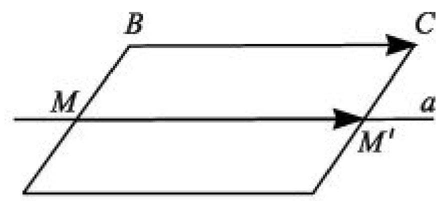


Рис. 5

Решение. Через произвольную точку M отрезка AB проведем прямую a, параллельную BC. Пусть $M' = a \cap CD$. Очевидно, точка M' принадлежит отрезку DC. Так как $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$, то при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ точка M переходит в точку M'.

Обратно, возьмем произвольную точку M' на отрезке DC и проведем через нее прямую a, параллельную BC. Обозначим $a \cap AB = M$.

Ясно, что точка M принадлежит отрезку AB. Так как $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$, то M прообраз точки M' при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

Итак, образ M' любой точки M отрезка AB принадлежит отрезку DC и, обратно, прообраз M любой точки M' отрезка DC принадлежит отрезку AB.

В соответствии с приведенным выше правилом заключаем, что при переносе $T_{\overrightarrow{BC}}$ отрезок AB отображается на отрезок DC.

В ряде случаев правило 5.1. допускает более простую форму; она применяется для так называемых инволютивных преобразований.

Преобразование f называется инволютивным, когда для любой точки M выполняется условие: если $f(M) = M'$, то $f(M') = M$. Легко видеть, что центральная и осевая симметрии являются инволютивными преобразованиями.

Пусть требуется доказать, что при инволютивном преобразовании f фигура Φ отображается на себя. Оказывается, что в этом случае достаточно ограничиться лишь первым действием правила 5.1., а именно доказать, что образ произвольной точки фигуры Φ принадлежит фигуре Φ. Утверждение же второго пункта правила 5.1. следует при этом из утверждения первого. В самом деле, возьмем произвольную точку M' фигуры Φ и пусть $f(M')= M$. В силу первого пункта правила 5.1. $M\in\Phi$.

Так как f инволютивно, то $f(M) = M'$, т.е. M – прообраз точки M' и, таким образом, требование второго пункта правила 5.1. оказалось выполненным. Указанная модификация правила 5.1. приведена в п. 5.2. в «Сводке».

Пример 2. Прямая a проходит через центр окружности ω. Докажем, что при осевой симметрии S_a окружность ω отображается на себя (рис. 6).

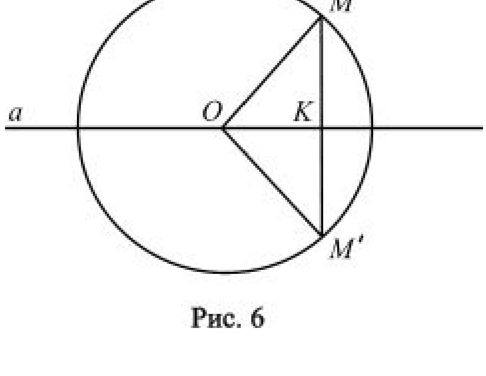


Рис. 6

Решение. Пусть $M\in\omega$ и $S_a(M) = M'$, а $MM' \cap a = K$. По определению осевой симметрии $MM' \perp a$ и $MK = M'K$, поэтому $\Delta OMK = \Delta OM'K$ и, следовательно, $OM' = OM$. Т. к. $M \in \omega$ и $OM = OM'$, то $M' \in \omega$, что и требовалось доказать.

Определение. Прямая a (точка O) называется осью симметрии (центром симметрии) фигуры Φ, если при осевой симметрии S_a (при центральной симметрии Z_O) фигура Φ отображается на себя.

В силу этого определения полученному выше результату можно придать следующую форму: «Всякая прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии этой окружности».

Упражнения

75*. Доказать, что центр окружности является центром симметрии этой окружности.

76*. Прямая c содержит биссектрису угла, образованного лучами a и b. Доказать, что при осевой симметрии S_c луч a отображается на луч b.

77*. Доказать, что прямая, содержащая биссектрису угла, является осью симметрии этого угла.

78*. Доказать, что при повороте вокруг точки O окружность с центром в точке O отображается на себя.

Отыскание образа фигуры в соответствии с правилом 5.1. оказывается порой весьма громоздким. Более удобным является иногда другой способ – координатный. Он основан на следующем утверждении.

Пусть фигура Φ в некоторой системе координат задана уравнением

$$F(x, y) = 0 \qquad (1),$$

а преобразование f задано формулами $x' = \varphi\,(x; y)$, $y' = \psi(x; y)$ (2).
Выразим из формул (2) переменные x и y через x' и y':

$$x = \varphi_1(x'; y'),\ \ y = \psi_1(x'; y') \qquad (3).$$

Заметим, что, по крайней мере, теоретически это сделать возможно, так как f – преобразование. Поэтому система (2) при любых x' и y' имеет единственное решение $(x; y)$. Докажем, что образ фигуры Φ –

фигура Φ' - задается уравнением $F(\varphi_1(x'; y'), \psi_1(x'; y')) = 0$ (4).

Действительно, пусть точка $M'(x'; y') \in \Phi'$, тогда эта точка является образом некоторой точки $M(x; y)$, принадлежащей фигуре Φ. Поэтому верно равенство $F(x, y)=0$. Заменяя в этом равенстве x и y на $\varphi_1(x'; y')$ и $\psi_1(x'; y')$ из (3), получаем верное равенство $F(\varphi_1(x'; y'), \psi_1(x'; y')) = 0$. Таким образом, координаты любой точки фигуры Φ' удовлетворяют уравнению (4).

Обратно, пусть координаты точки $M'(x'; y')$ удовлетворяют уравнению (4). Точка M' является образом некоторой точки $M(x; y)$, причем x и y связаны с x' и y' формулами (3). Тогда из (4) получаем $F(x; y)=0$. Это означает, что точка M принадлежит фигуре Φ и, следовательно, точка M' принадлежит фигуре Φ'.

Итак, (4) есть уравнение образа фигуры Φ (см. п. 5.3. в «Сводке»).

Пример 3. Прямая c проходит через точку пересечения прямых a и b и делит пополам вертикальные углы, образованные этими прямыми. Докажем, что при осевой симметрии S_c прямая a отображается на прямую b.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат, направив ось Ox по прямой c (рис. 7). Пусть ориентированный угол от оси Ox до прямой a равен α, тогда ориентированный угол от оси Ox до прямой b равен $-\alpha$. Прямую a можно задать уравнением $y = kx$, тогда прямая b окажется заданной уравнением $y = -kx$.

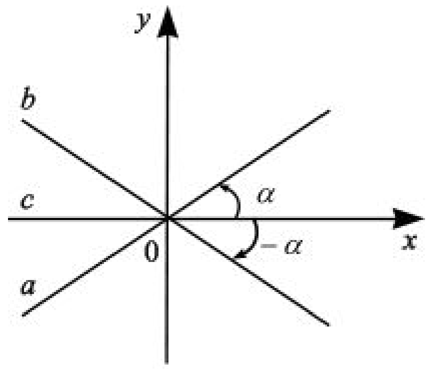


Рис. 7

Формулы осевой симметрии относительно прямой c (оси Ox) имеют вид $x' = x$, $y' = -y$ (упр. 62). Выражая x, y через x', y', получим: $x = x'$ $y = -y'$. Подставляя эти выражения в уравнение прямой a, получаем уравнение ее образа: $y' = -kx'$ или, в привычных обозначениях: $y = -kx$. Как видим, получилось уравнение прямой b. Это и означает, что $S_c(a) = b$.

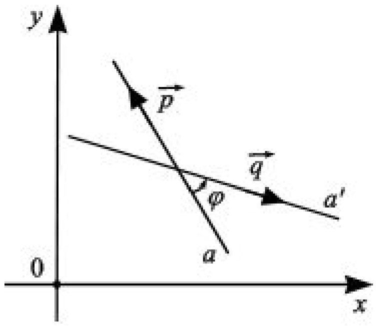


Рис. 8

Пример 4. Докажем, что при повороте R_O^α, где $0<|\alpha|\le\dfrac{\pi}{2}$, всякая прямая a переходит в такую прямую a', что угол между прямыми a и a' равен $|\alpha|$.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O (рис. 8).

Пусть прямая a задается в этой системе уравнением $Ax+By+C=0$. Чтобы найти образ прямой a, воспользуемся формулами поворота R_O^α:

$$\begin{cases} x' = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \\ y' = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно x и y, получаем:

$$\begin{cases} x = x'\cdot\cos\alpha + y'\cdot\sin\alpha \\ y = -x'\cdot\sin\alpha + y'\cdot\cos\alpha \end{cases}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение прямой a, находим уравнение прямой a':

$$(A\cdot\cos\alpha - B\cdot\sin\alpha)\cdot x' + (A\cdot\sin\alpha + B\cdot\cos\alpha)\cdot y' + C = 0.$$

Найдем косинус угла φ между прямыми a и a'; он равен модулю косинуса угла между направляющими векторами $\vec{p}$ и $\vec{q}$ прямых a и a'. Так как $\vec{p}(-B;A)$, $\vec{q}(-A\cdot\sin\alpha - B\cdot\cos\alpha; A\cdot\cos\alpha - B\cdot\sin\alpha)$, то

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{q}|}{|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|} = \frac{(A^2+B^2)|\cos\alpha|}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A^2+B^2}} = |\cos\alpha| \left(\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]!\right).$$

Очевидно, что $|\cos\alpha| = \cos|\alpha|$. Таким образом, $\cos\varphi = \cos|\alpha|$. Учитывая, что $|\alpha|, \varphi \in \left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, заключаем, что $\varphi = |\alpha|$.

Примечание. Аналогично можно доказать, что если $\dfrac{\pi}{2}<|\alpha|<\pi$, то $\varphi = \pi - |\alpha|$.

Упражнения

79*. Используя координатный способ отыскания образа фигуры, доказать следующие предложения:

а) прямая, проходящая через центр окружности, является осью симметрии этой окружности;

б) центр окружности является центром симметрии этой окружности;

в) при параллельном переносе всякая прямая, параллельная вектору переноса, отображается на себя, а прямая, не параллельная вектору переноса, переходит в параллельную ей прямую;

г) при центральной симметрии Z_O всякая прямая, проходящая через центр O, отображается на себя, а прямая, не проходящая через центр O, переходит в параллельную ей прямую;

д) при осевой симметрии с осью a прямая a отображается на себя; всякая прямая, параллельная оси a, переходит в параллельную ей прямую; всякая прямая, перпендикулярная оси a, отображается на себя;

е) при гомотетии H_O^k, где $k \neq 1$, всякая прямая, проходящая через центр O, отображается на себя, а прямая, не проходящая через центр O, переходит в параллельную ей прямую.

§ 4. Композиция отображений

Композицией отображений f: $A \to B$ и φ: $B \to C$ называется отображение g: $A \to C$, которое каждому элементу x из множества A ставит в соответствие элемент $\varphi(f(x))$ из множества C (рис. 9)

Композиция отображений f и φ обозначается $\varphi \circ f$ (справа пишется то отображение, которое выполняется первым!). Таким образом, по определению композиции для любого элемента x из множества A выполняется равенство $(\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$.

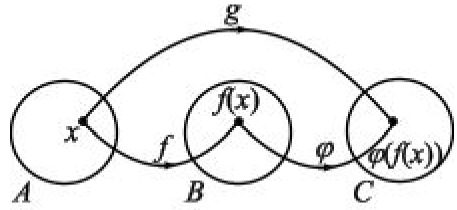


Рис. 9

Рассмотрим примеры отыскания композиции преобразований плоскости.

Пример 1. Преобразования f и φ в некотором аффинном репере заданы формулами:

$$\begin{cases} x' = x + 5 \\ y' = x - y \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - 1 \end{cases} \text{ соответственно.}$$

Найдем формулы отображений $\varphi \circ f$ и $f \circ \varphi$.

Решение.

а) Пусть $M(x; y) \xrightarrow{f} M_1(x_1; y_1)$, тогда $x_1=x+5$, $y_1=x-y$ (1).

Пусть далее $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{\varphi} M'(x'; y')$, тогда $x'=x_1+y_1$, $y'= x_1-1$ (2).

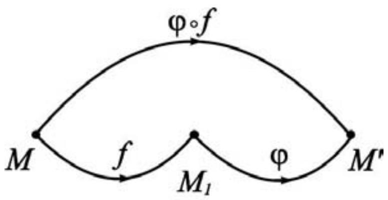


Рис. 10

При отображении $\varphi \circ f$: $M(x; y) \to M'(x'; y')$. Пользуясь формулами (1) и (2), выражаем x' и y' через x и y: $x'=2x-y+5$, $y'=x+4$. Это и есть формулы отображения $\varphi \circ f$ (рис. 10).

б) Пусть $M(x; y) \xrightarrow{\varphi} M_1(x_1; y_1)$, а $M_1(x_1; y_1) \xrightarrow{f} M'(x'; y')$,

тогда: $\begin{cases} x_1 = x + y \\ y_1 = x - 1 \end{cases}$ (3) и $\begin{cases} x' = x_1 + 5 \\ y' = x_1 - y_1 \end{cases}$ (4).

При отображении $f \circ \varphi$ $M(x; y) \to M'(x'; y')$. Из (3) и (4) получаем формулы отображения $f \circ \varphi$: $\begin{cases} x' = x + y + 5 \\ y' = y + 1 \end{cases}$.

Примечание. Сравнивая формулы отображений $f \circ \varphi$ и $\varphi \circ f$, видим, что $f \circ \varphi \neq \varphi \circ f$.

Пример 2. Найдем композицию $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ двух поворотов с одним и тем же центром.

Решение. Первый способ. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат с началом в точке O. В этой системе координат повороты R_O^α и R_O^β задаются формулами:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases} \text{и} \begin{cases} x' = x \cdot \cos\beta - y \cdot \sin\beta \\ y' = x \cdot \sin\beta + y \cdot \cos\beta \end{cases} \text{соответственно.}$$

Находя формулы композиции $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ (как в примере 1), получаем:

$$\begin{cases} x' = (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \cdot \cos\beta - (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \cdot \sin\beta \\ y' = (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \cdot \sin\beta + (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \cdot \cos\beta \end{cases} \quad \text{или,}$$

после очевидных преобразований, $\begin{cases} x' = x \cdot \cos(\alpha+\beta) - y \cdot \sin(\alpha+\beta) \\ y' = x \cdot \sin(\alpha+\beta) + y \cdot \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$.

Отсюда следует, что композиция $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ есть поворот $R_O^{\alpha+\beta}$.

Второй способ. Возьмем произвольную точку M. Пусть $R_O^\alpha(M) = M_1$, $R_O^\beta(M_1) = M'$ (рис. 11).

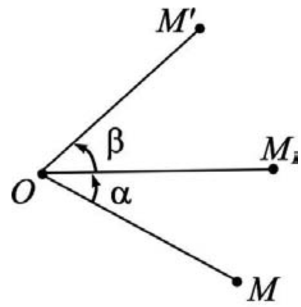


Рис. 11

Тогда по определению поворота имеем: $OM=OM_1$, $\angle MOM_1 = \alpha$, $OM_1=OM'$, $\angle M_1OM' = \beta$. Отсюда следует, что $OM=OM'$, $\angle MOM' = \alpha + \beta$. Таким образом, отображение $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ переводит произвольную точку M в такую точку M', что $OM=OM'$ и $\angle MOM' = \alpha + \beta$. Это означает, что композиция $R_O^\beta \circ R_O^\alpha$ есть поворот $R_O^{\alpha+\beta}$.

Подведем итоги. Анализируя процесс решения первой задачи (пример 1), можно сформулировать общее правило отыскания формул композиции преобразований плоскости. Это правило приведено в п. 4.2.«Сводки».

Во второй задаче (пример 2) требовалось определить вид некоторого преобразования плоскости (а именно композиции $R_O^{\beta} \circ R_O^{\alpha}$). Первое решение основано на отыскании формул этого преобразования с последующим распознаванием его вида. Второе решение «укладывается» в правило, сформулированное в п. 2.6. «Сводки».

Упражнения

80*. Доказать, что композиция двух преобразований плоскости есть преобразование плоскости.

81. Преобразования плоскости f и φ заданы формулами:

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + y + 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = x + 2y \end{cases} \text{ соответственно.}$$

Найти формулы преобразований $f \circ \varphi$, $\varphi \circ f$, $f \circ f$.

82. Найти формулы композиции $H_B^{\frac{1}{3}} \circ H_A^{3}$, если A (–1; 1), B (2; –1). Определить вид этой композиции.

83*. Доказать следующие соотношения:

а) $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$;

б) $H_O^{k_2} \circ H_O^{k_1} = H_O^{k_1 \cdot k_2}$.

Решить задачу двумя способами.

84*. Доказать, что композиция центральных симметрий Z_A и Z_B есть параллельный перенос на вектор $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.

85*. Доказать следующие соотношения:

а) $T_{\vec{p}} \circ Z_O = Z_{O_1}$, где точка O_1 определяется равенством $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\vec{p}$;

б) $Z_O \circ T_{\vec{p}} = Z_{O_1}$, где точка O_1 определяется равенством $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{2}\vec{p}$.

К преобразованиям плоскости, рассмотренным в § 2, добавим еще одно – скользящую симметрию.

Скользящей симметрией называется композиция осевой симметрии S_c и переноса на ненулевой вектор $\vec{p}$, параллельный оси c[1].

Пример 3. Найдем формулы скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_c$.

Решение. Выберем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, направив ось Ox по прямой c (рис. 12), тогда $\vec{p}(a;0)$.

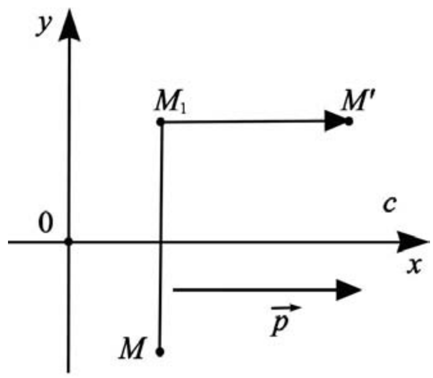


Рис. 12

Возьмем произвольную точку $M(x; y)$.
При осевой симметрии S_c:
$M(x;y) \to M_1(x_1;y_1)$,

поэтому $x_1 = x,\ y_1 = -y$ (1).

Перенос на вектор $\vec{p}$ переводит точку $M_1(x_1; y_1)$ в точку $M'(x'; y')$, поэтому $x' = x_1 + a,\ y' = y_1$ (2).

Из (1) и (2) получаем: $x' = x + a,\ y' = -y$. Это и есть искомые формулы скользящей симметрии в выбранной системе координат.

Упражнения

86*. Доказать, что скользящая симметрия является преобразованием плоскости.

87*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в ортонормированном репере формулами вида $x' = x + a$,

[1] В трехмерном пространстве аналогом скользящей симметрии является композиция отражения относительно плоскости и переноса на ненулевой вектор, параллельный этой плоскости

$y' = -y$, где $a \neq 0$, является скользящей симметрией $T_{\vec{p}} \circ S_c$, где c – ось Ox, а $\vec{p}(a;0)$.

88*. Доказать, что если при скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_a$ точка M переходит в точку M', то середина отрезка MM' принадлежит оси a.

<u>89</u>. Составить формулы скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_a$, если $\vec{p}(2;-1)$, а ось a задана уравнением $x+2y-1=0$.

<u>90</u>. Найти ось скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_a$, при которой точка $M(1;5)$ переходит в точку $M'(5; 3)$, а $\vec{p}(1;1)$.

<u>91</u>. Найти ось a и вектор $\vec{p}$ скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_a$, при которой точка $A(1; 2)$ переходит в точку $B(-1; 0)$, а точка B переходит в точку $C(1; -2)$. Составить формулы этой скользящей симметрии.

92*. Доказать, что если $\vec{p} \| a$, то $T_{\vec{p}} \circ S_a = S_a \circ T_{\vec{p}}$.

Пример 4. Докажем, что для любых преобразований f, φ и g одного и того же множества M имеет место соотношение $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$ (ассоциативный закон).

Решение. Чтобы доказать, что два преобразования p и q одного и того же множества M совпадают, достаточно установить, что для любого элемента x этого множества выполняется равенство $p(x)=q(x)$ (преобразования p и q одинаково действуют на любой элемент множества M). Применим эту очевидную идею для решения поставленной задачи (п. 6.2. в «Сводке»).

Возьмем произвольный элемент множества M и найдем его образ при отображениях $g \circ (\varphi \circ f)$ и $(g \circ \varphi) \circ f$.

По определению композиции отображений имеем:

$$(g \circ (\varphi \circ f))(x) = g((\varphi \circ f)(x)) = g(\varphi(f(x))) \qquad (1),$$

$$((g \circ \varphi) \circ f)(x) = (g \circ \varphi)(f(x)) = g(\varphi(f(x))) \qquad (2).$$

Сравнивая (1) и (2) и учитывая, что элемент x был выбран произвольно, заключаем, что $g \circ (\varphi \circ f) = (g \circ \varphi) \circ f$ (рис. 13).

Примечание. Как известно из курса алгебры, из ассоциативности некоторой операции следует, что результат композиции трех и более элементов (в частности, преобразований плоскости) не зависит от способа расстановки скобок в этой композиции. Например, $(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = (a \cdot (b \cdot c)) \cdot d = ((a \cdot b) \cdot c) \cdot d$ и т. д.

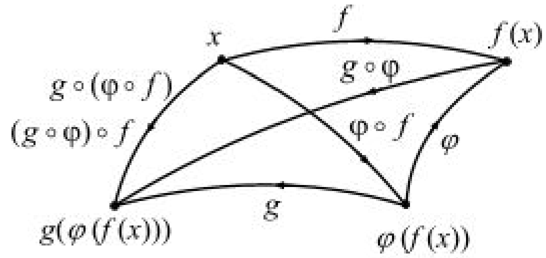


Рис. 13

Упражнения

93*. Доказать, что для любого преобразования f и тождественного преобразования e выполняется соотношение $f \circ e = e \circ f = f$.

94*. Доказать, что преобразование f инволютивно тогда и только тогда, когда $f \circ f = e$ (или $f^2 = e$).

95*. Доказать соотношения: а) $S_l \circ S_l = e$; б) $Z_O \circ Z_O = e$.

<u>96</u>. Доказать, что композиция $Z_C \circ Z_B \circ Z_A \circ Z_C \circ Z_B \circ Z_A$ есть тождественное преобразование плоскости.

<u>97</u>. Определить вид следующих композиций:

а) $T_{\overline{BA}} \circ Z_B \circ Z_A$;

б) $T_{\overline{BC}} \circ T_{\overline{AB}} \circ S_{AC}$ $(A \neq C)$;

в) $Z_B \circ R_A^{90^\circ} \circ R_A^{90^\circ}$;

г) $Z_B \circ Z_A \circ S_{AB}$ $(A \neq B)$;

д) $T_{\vec{p}} \circ H_A^{-\frac{1}{k}} \circ H_A^k$;

е) $Z_C \circ Z_B \circ Z_A$.

98*. Доказать, что если $\vec{a} \parallel c$, $\vec{b} \parallel c$, то $(T_{\vec{a}} \circ S_c) \circ (T_{\vec{b}} \circ S_c) = T_{\vec{a}+\vec{b}}$.

§ 5. Обратное преобразование

Определение. Пусть f – преобразование плоскости, тогда для каждой точки M существует единственная точка M', такая, что $f(M') = M$. Отображение плоскости в себя, при котором всякая точка M переходит в такую точку M', что $f(M') = M$, называется обратным отображению f. Обозначается: f^{-1}.

Легко видеть, что если f – преобразование плоскости, то обратное ему отображение f^{-1} также является преобразованием плоскости.

Из данного определения непосредственно вытекает, что:

а) если $f(M) = M'$, то $f^{-1}(M') = M$;

б) если $f^{-1}(M) = M'$, то $f(M') = M$;

в) если при преобразовании f фигура Φ отображается на фигуру Φ', то при обратном преобразовании фигура Φ' отображается на фигуру Φ.

Пример 1. Докажем, что для любых преобразований f и φ имеет место соотношение $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Решение. Воспользуемся приемом 6.2. «Сводки».

Возьмем произвольную точку M и найдем ее образ при преобразовании $f^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Пусть $\varphi^{-1}(M)=M_1$, $f^{-1}(M_1)= M'$, тогда по определению композиции $(f^{-1} \circ \varphi^{-1})(M) = M'$ (1).

Найдем образ точки M при преобразовании $(\varphi \circ f)^{-1}$.

Так как $f^{-1}(M_1) = M'$, то $f(M') = M_1$. Так как $\varphi^{-1}(M) =M_1$, то $\varphi(M_1) = M$.

Так как $f(M') = M_1$, а $\varphi(M_1) = M$, то $(\varphi \circ f)(M') = M$. Отсюда получаем $(\varphi \circ f)^{-1}(M) = M'$ (2). Равенства (1) и (2) означают, что преобразования $f^{-1} \circ \varphi^{-1}$ и $(\varphi \circ f)^{-1}$ одинаково действуют на любую точку M, следовательно, $(\varphi \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ \varphi^{-1}$.

Пример 2. Докажем, что преобразование, обратное переносу на вектор $\vec{p}$, есть перенос на вектор $-\vec{p}$, т. е. $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$.

Решение. Воспользуемся приемом 6.2. «Сводки».

Возьмем произвольную точку *M,* и пусть $(T_{\vec{p}})^{-1}(M) = M'$, тогда $T_{\vec{p}}(M') = M$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{M'M} = \vec{p}$ и, стало быть, $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$. Последнее означает, что $T_{-\vec{p}}(M) = M'$.

Таким образом, преобразования $(T_{\vec{p}})^{-1}$ и $T_{-\vec{p}}$ одинаково действуют на любую точку: $(T_{\vec{p}})^{-1}(M) = T_{-\vec{p}}(M)$. Это и означает, что $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$.

Примечание. Приведенному решению можно придать несколько иное логическое оформление.

«Пусть преобразование $(T_{\vec{p}})^{-1}$ переводит произвольную точку *M* в точку *M'*, тогда $T_{\vec{p}}(M') = M$ и, следовательно, $\overrightarrow{M'M} = \vec{p}$, откуда $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$. Последнее означает, что преобразование $(T_{\vec{p}})^{-1}$ переводит произвольную точку *M* в такую точку *M'*, что $\overrightarrow{MM'} = -\vec{p}$. Отсюда по определению переноса следует, что $(T_{\vec{p}})^{-1}$ есть перенос на вектор $-\vec{p}$ ».

Логика приведенного решения соответствует общему приему распознавания вида преобразования плоскости (п. 2.5.2. в «Сводке»). Применительно к задачам на распознавание вида преобразования f^{-1} этому приему можно придать и более специфическую форму (см. п. 2.7. в «Сводке»).

Упражнения

99*. Доказать, что для любого преобразования *f* имеет место соотношение: $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = e$.

100*. Доказать следующие соотношения:

а) $(R_O^{\alpha})^{-1} = R_O^{-\alpha}$; б) $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$.

101*. Доказать, что если f – инволютивное преобразование, то $f^{-1}=f$.

102*. Используя результат упр. 101, определить вид преобразований $(S_a)^{-1}$ и $(Z_O)^{-1}$.

Пример 3. Докажем, что если $f \circ \varphi = g$, то $f = g \circ \varphi^{-1}$ и $\varphi = f^{-1} \circ g$.

Решение. Умножим обе части равенства $f \circ \varphi = g$ на φ^{-1} справа:

$$(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = g \circ \varphi^{-1}.$$

Далее, используя ассоциативный закон композиции преобразований и результат упр. 99, получаем: $g \circ \varphi^{-1} = f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) = f \circ e = f$, что и требовалось доказать.

Аналогично устанавливается, что $\varphi = f^{-1} \circ g$, только теперь обе части исходного равенства умножаются на f^{-1} слева.

Упражнения

103. Доказать, что если $f_1 \circ f_2 \circ f_3 = \varphi$, то:

а) $f_1 = \varphi \circ f_3^{-1} \circ f_2^{-1}$; б) $f_2 = f_1^{-1} \circ \varphi \circ f_3^{-1}$;

в) $f_3 = f_2^{-1} \circ f_1^{-1} \circ \varphi$; г) $\varphi^{-1} = f_3^{-1} \circ f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$.

104*. Доказать, что если $f \circ \varphi = e$, то $\varphi = f^{-1}$ и $f = \varphi^{-1}$.

105*. Используя результат упр. 104, доказать, что $(f^{-1})^{-1}=f$.

106*. Используя результат упр. 104, доказать соотношения:

а) $(T_{\vec{p}})^{-1} = T_{-\vec{p}}$;

б) $(R_O^{\alpha})^{-1} = R_O^{-\alpha}$;

в) $(Z_O)^{-1} = Z_O$;

г) $(S_a)^{-1} = S_a$;

д) $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$.

107. Доказать соотношение: $(T_{\vec{p}} \circ Z_O)^{-1} = Z_O \circ T_{-\vec{p}}$.

108*. Доказать, что если $\vec{p} \parallel a$, то $(T_{\vec{p}} \circ S_a)^{-1} = T_{-\vec{p}} \circ S_a$. Используя доказанное равенство, охарактеризовать преобразование, обратное скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_a$.

Пример 4. Преобразование f задано формулами: $x' = x+y+1$, $y' = x-y-2$. Найдем формулы обратного преобразования.

Решение. Пусть при преобразовании f^{-1} точка M $(x; y)$ переходит в точку $M'(x'; y')$, тогда $f(M') = M$ и, следовательно, $\begin{cases} x = x' + y' + 1 \\ y = x' - y' - 2 \end{cases}$.

Решая эту систему относительно x' и y', получим:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Это и есть формулы преобразования f^{-1}.

Примечание. Обобщая процесс решения данной задачи, приходим к соответствующему приему отыскания формул обратного преобразования (см. п. 4.3. в «Сводке»).

Упражнения

109. Найти формулы преобразования, обратного преобразованию, заданному в аффинном репере формулами: $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 2$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 1$.

110*. Используя формулы преобразований $T_{\vec{p}}$, R_O^{α}, Z_O, S_a, H_O^K, найти формулы обратных преобразований и установить вид последних.

§ 6. Инвариантные точки и инвариантные прямые

Определение. Точка M (фигура Φ) называется инвариантной точкой (инвариантной фигурой) преобразования f, если $f(M) = M$ ($f(\Phi) = \Phi$).

Например, инвариантной точкой поворота R_O^α является точка O, а инвариантной фигурой – всякая окружность с центром в точке O (упр. 78).

Инвариантными точками симметрии S_a являются все точки оси a, а инвариантными прямыми – ось a и всякая прямая, перпендикулярная оси a (упр. 79).

Рассмотрим примеры отыскания инвариантных точек и прямых преобразований плоскости.

Пример 1. Найдем все инвариантные точки и инвариантные прямые поворота R_O^α.

Решение. В качестве начала прямоугольной декартовой системы координат выберем центр поворота. Пусть M $(x; y)$ – инвариантная точка, тогда, используя формулы поворота R_O^α, получаем:

$$\begin{cases} x = x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha \\ y = x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (1-\cos\alpha)\cdot x + y\cdot\sin\alpha = 0 \\ -x\cdot\sin\alpha + (1-\cos\alpha)\cdot y = 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Число решений системы (1), а значит, и число инвариантных точек зависит от определителя этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = 2(1-\cos\alpha).$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha \in [-\pi;\pi]$, поэтому если $\alpha \neq 0$, то $\Delta \neq 0$ и система (1) имеет единственное решение: (0; 0).

Следовательно, в этом случае имеется единственная инвариантная точка – центр поворота. Если же α=0, то R_O^α представляет собой тождественное преобразование *e* и все точки плоскости являются инвариантными.

Переходим к отысканию инвариантных прямых. Пусть прямая *a* задается уравнением $Ax+By+C=0$, тогда ее образ – прямая a' – задается уравнением $(A\cdot\cos\alpha - B\cdot\sin\alpha)\cdot x + (A\cdot\sin\alpha + B\cdot\cos\alpha)\cdot y + C = 0$ (см. пример 4, § 3). Чтобы прямая a' совпадала с прямой *a*, необходимо (но не достаточно), чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т.е. $\begin{vmatrix} -B & A \\ -A\sin\alpha - B\cos\alpha & A\cos\alpha - B\sin\alpha \end{vmatrix} = 0$, откуда $(A^2+B^2)\cdot\sin\alpha = 0$ и, следовательно, $\sin\alpha = 0$. Последнее возможно только при $\alpha = 0$ ($R_O^\alpha=e$) и $\alpha = \pm\pi$ $(R_O^\alpha = Z_O)$.

В первом случае все прямые плоскости являются инвариантными. Во втором случае уравнение прямой a' принимает вид $Ax+By-C=0$. Отсюда становится понятным, что если $C=0$, то $a'=a$; если же $C\neq 0$, то $a'\neq a$ (но зато $a'\parallel a$). Таким образом, если $\alpha = \pm\pi$, т.е. $R_O^\alpha = Z_O$, то инвариантными являются все прямые, проходящие через центр *O*, и только они.

Если, наконец, поворот R_O^α отличен от тождественного преобразования и центральной симметрии ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm\pi$), то инвариантных прямых, как явствует из вышеизложенного, нет.

Итоги данного исследования приведены в табл. 1.

Таблица 1

Вид преобразования плоскости	**Инвариантные точки**	**Инвариантные прямые**
1. Тождественное преобразование e (перенос $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p}$=0; поворот R_O^α, где $\alpha = 0$)	Все точки	Все прямые
2. Параллельный перенос $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} \neq 0$	Нет	Все прямые, параллельные вектору $\vec{p}$
3. Поворот R_O^α, где $\alpha \in [-\pi;\pi]$ и $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq \pm\pi$	Точка O	Нет
4. Центральная симметрия Z_O (поворот R_O^α, где $\alpha \neq \pm\pi$)	Точка O	Все прямые, проходящие через точку O
5. Осевая симметрии S_a	Все точки оси a	Ось a и все прямые, перпендикулярные оси a
6. Скользящая симметрия, заданная осью b и вектором $\vec{p}$	Нет	Ось b

Пример 2. Найдем все инвариантные точки и инвариантные прямые осевой симметрии S_a.

Решение. Введем прямоугольную декартову систему координат, направив ось Ox по прямой a. В этой системе координат формулы осевой симметрии имеют вид: $x' = x$, $y' = -y$ (упр. 62).

Пусть $M\,(x; y)$ – инвариантная точка, тогда $x = x$, $y = -y$. Решая эту систему, получаем $y = 0$, $x0\ R$. Это означает, что инвариантными являются все точки оси a, и только они.

Переходим к отысканию инвариантных прямых. Пусть прямая b задается уравнением $Ax+By+C=0$ (1), тогда ее образ – прямая b' – задается уравнением $Ax-By+C=0$ (2). Выясним, при каких A, B и C прямая b' совпадает с прямой b.

Чтобы прямые b и b' совпадали, необходимо (но не достаточно), чтобы направляющие векторы $\vec{p}\,(B;\ -A)$ и $\vec{q}\,(B;\ A)$ этих прямых были коллинеарными, т. е. $\begin{vmatrix} B & -A \\ B & A \end{vmatrix} = 0$, откуда $A \cdot B = 0$.

1. Если A=0, B≠0, то уравнения прямых b и b' принимают вид $By+C$=0 и $-By+C$=0. Отсюда становится понятным, что если C≠0, то b≠b'; если же C=0, то b=b'. В последнем случае прямая b совпадает с осью a.

2. Если B=0, A≠0, то уравнения прямых b и b' одинаковы: $Ax+C$=0 и, следовательно, b – инвариантная прямая. В этом случае прямая b перпендикулярна оси a.

Итак, инвариантными прямыми осевой симметрии S_a являются ось a и все прямые, перпендикулярные оси a. Полученные результаты отражены в табл. 1.

Подчеркнем, что эти результаты были получены выше в упр. 79 (д); приведенное здесь исследование показывает лишь, что других инвариантных прямых осевая симметрия не имеет.

Пример 3. Найдем инвариантные точки и прямые скользящей симметрии, заданной осью b и вектором $\vec{p}$.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, направив ось Ox по прямой b. В этой системе координат формулы скользящей симметрии имеют вид: $x' = x + a$, $y' = y$ (пример 3, § 4).

Для отыскания инвариантных точек получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x = x + a \\ y = -y \end{cases};$$

она не имеет решений, т. к. $a \neq 0$. Поэтому инвариантных точек нет.

Переходим к отысканию инвариантных прямых. Пусть прямая l задается уравнением $Ax+By+C$=0, тогда ее образ – прямая l' – задается уравнением $Ax–By+C–Aa=0$. Рассуждая, как в предыдущем примере, приходим к выводу: чтобы прямая l' совпадала с прямой l, необходимо, чтобы один из коэффициентов A или B был равен 0.

1. Если $A=0$, $B\neq0$, то уравнения прямых l и l' принимают вид $By+C=0$ и $–By+C=0$. Отсюда ясно, что если $C=0$, то $l'=l=b$ и, следовательно, b – инвариантная прямая. Если же $C \neq 0$, то $l'\neq l$.

2. Если $B=0$, $A\neq0$, то уравнения прямых l и l' принимают вид $Ax+C=0$ и $Ax+C–Aa=0$. Т.к. $C \neq C–Aa$, то в этом случае $l'\neq l$.

Итак, скользящая симметрия с осью b имеет лишь одну инвариантную прямую – ось b. Полученные результаты отражены в таблице 1.

Упражнения

111. Найти инвариантные точки следующих преобразований:

а) $\begin{cases} x' = 3x + y - 3 \\ y' = x - y + 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -2x - y + 2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x' = -y + 1 \\ y' = -2x - y \end{cases}$; г) $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y \end{cases}$.

112*. Найти все инвариантные точки и инвариантные прямые параллельного переноса.

ГЛАВА II. Движения плоскости

§ 7. Движения (перемещения) плоскости и их свойства

Определение. Преобразование плоскости называется движением (перемещением), если для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется условие $A'B' = AB$. Иначе говоря, движением называется преобразование плоскости, сохраняющее расстояние между любыми двумя точками[1].

Примером движения является, очевидно, тождественное преобразование плоскости.

Пример 1. Докажем, что параллельный перенос есть движение.

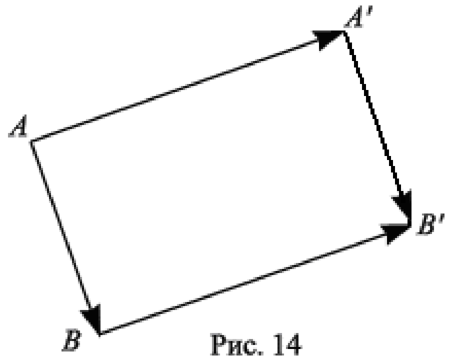


Рис. 14

Решение. Первый способ. Пусть при переносе на вектор $\vec{p}$ точки A и B переходят соответственно в точки A' и B' (рис. 14).

Имеем: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} - \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$,

т. к. $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{p}$.

Отсюда получаем: $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right|$, т. е. $A'B' = AB$ (1). Так как равенство (1) выполняется для любых точек A и B, то параллельный перенос есть движение.

---

[1] Совершенно аналогично определяется движение пространства.

Второй способ. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. В этой системе перенос задается формулами:

$x' = x + a,\ y' = y+b.$

Пусть при переносе произвольные точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ переходят соответственно в точки $A'(x_1'; y_1')$ и $B'(x_2'; y_2')$, тогда $x_1'= x_1+a$, $y_1'= y_1+b$, $x_2'= x_2+a$, $y_2'= y_2+b$ (2). Вычисляя расстояния AB и $A'B'$ и учитывая равенства (2), приходим к выводу: $A'B'=AB$. Отсюда следует, что перенос есть движение.

Примечание. Приведенные решения укладываются в общую схему, приведенную в п. 2.9.1. «Сводки».

Дальнейшим примерам предпошлем определение ортогональной матрицы.

Определение. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ называется ортогональной, если

$a_1^2 + a_2^2 = 1$, $b_1^2 + b_2^2 = 1$, $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ (*).

Докажем, что определитель ортогональной матрицы равен либо +1, либо –1. Действительно, из условий (*) получаем:

$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = 1$, откуда $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = 1$ и, следовательно, либо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1$, либо $a_1 b_2 - a_2 b_1 = -1$, что и требовалось доказать.

Упражнения

113*. Отображение f плоскости в себя задано в ортонормированном репере формулами $x'=a_1x+b_1y + c_1$, $y = a_2x+b_2y+c_2$, причем матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ является ортогональной.

Доказать, что: а) f – преобразование плоскости;

б) f – движение.

См. п. 2.9.2. «Сводки», основанный на этих результатах.

114*. Используя результаты упр. 113, доказать, что перенос, поворот, центральная симметрия, осевая симметрия и скользящая симметрия являются движениями.

115*. На плоскости даны два ортонормированных репера R и R'. Каждой точке M с координатами x, y в репере R ставится в соответствие точка M' с теми же координатами в репере R'. Доказать, что:

а) заданное таким образом отображение f является преобразованием плоскости;

б) f – движение.

116*. Доказать, что композиция двух движений есть движение.

117*. Доказать, что преобразование, обратное движению, есть движение.

118*. Доказать, что если $|k| \neq 1$, то гомотетия H_O^k не является движением.

Рассмотрим свойства движений.

1°. При движении коллинеарные точки переходят в коллинеарные точки.

Доказательство. Допустим, что при некотором движении коллинеарные точки A, B, C переходят в неколлинеарные точки A', B', C' (рис.15).

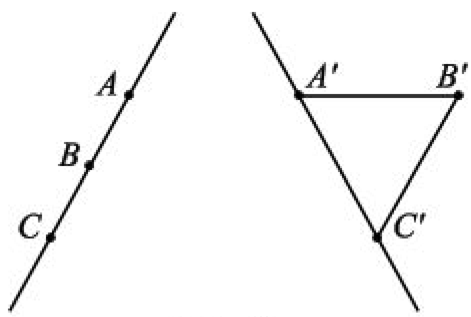


Рис. 15

Среди точек A, B и C одна и только одна лежит между двумя другими. Пусть, например, $A – B – C$, тогда $AB + BC = AC$. По определению движения $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $AC = A'C'$ и, стало быть, $A'B' + B'C' = A'C'$. С другой стороны, т. к. точки A', B', C' не лежат на одной прямой, то $A'B' + B'C' > A'C'$. Противоречие. Следовательно, точки A', B', C' коллинеарны.

2°. При движении сохраняется простое отношение трех точек.

Доказательство. Пусть при некотором движении f коллинеарные точки A, B, C переходят в точки A', B', C' (коллинеарные). Обозначим $(AB, C) = \lambda$, $(A'B', C') = \lambda'$ и докажем, что $\lambda = \lambda'$.

По определению простого отношения $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{A'C'} = \lambda' \cdot \overrightarrow{C'B'}$ откуда $\left|\overrightarrow{AC}\right| = |\lambda| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|$, $\left|\overrightarrow{A'C'}\right| = |\lambda'| \cdot \left|\overrightarrow{C'B'}\right|$ (1). Так как f – движение, то из (1) следует, что $|\lambda| = |\lambda'|$.

Если $\lambda = 0$, то $C = A$, $C' = A'$ и, следовательно, $\lambda' = 0$.

Если $\lambda > 0$, то $A – C – B$ и $AC + CB = AB$. Отсюда, учитывая, что f – движение, получаем $A'C' + C'B' = A'B'$ и, следовательно, $A' – C' – B'$, т. е. $\lambda' > 0$.

Если $\lambda < 0$, то точка C не лежит между A и B. Пусть, например, $B – A – C$, тогда $BA + AC = BC$, откуда $B'A' + A'C' = B'C'$. Это означает, что $B' – A' – C'$ и, следовательно, точка C' не лежит между A' и B', т. е. $\lambda' < 0$.

Итак, $|\lambda| = |\lambda'|$, причем числа λ и λ' имеют одинаковые знаки, следовательно, $\lambda = \lambda'$.

3°. При движении неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные точки.

Доказательство. Допустим, что при движении f неколлинеарные точки A, B, C переходят в точки A', B', C', принадлежащие прямой a. Возьмем произвольную точку M и докажем, что ее образ M' принадлежит прямой a. Рассмотрим несколько случаев.

а) Если точка M принадлежит прямой AB, то ее образ M' принадлежит прямой a (свойство 1°).

б) Пусть точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB (рис. 16). Обозначим: $O = MC \cap AB$, $f(O)=O'$. В силу свойства 1º $O' \in a$ и, следовательно, в силу того же свойства $M' \in a$.

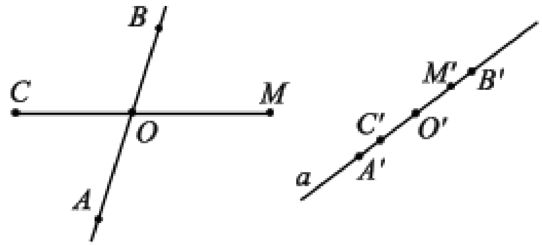


Рис. 16

в) Пусть точки M и C лежат по одну сторону от прямой AB. Зафиксируем некоторую точку D, расположенную по другую сторону от прямой AB; ее образ – точка D' – принадлежит прямой a по доказанному выше. Проводя для точек M и D те же рассуждения, что для точек M и C в предыдущем случае, убеждаемся, что $M' \in a$.

Таким образом, всякая точка плоскости переходит в точку, принадлежащую прямой a. Следовательно, точки, не принадлежащие прямой a, не имеют прообразов и поэтому отображение f не является преобразованием плоскости. Это противоречит определению движения. Свойство доказано.

Следствие. При движении аффинный репер переходит в аффинный репер.

4º. При движении сохраняется отношение «лежать между» для любых трех точек прямой.

Данное свойство непосредственно следует из свойства 2º.

5º. При движении: а) прямая отображается на прямую; б) отрезок отображается на отрезок; в) луч отображается на луч; г) полуплоскость отображается на полуплоскость; д) угол отображается на угол.

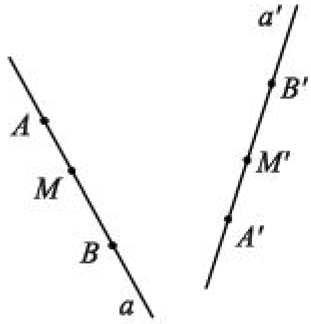


Рис. 17

Доказательство. а) Пусть при движении f точки A и B прямой a переходят в точки A' и B' (рис. 17). Докажем, что тогда прямая AB переходит в прямую $A'B'$. В соответствии с приемом 5.1. доказательство проведем в два этапа.

Возьмем произвольную точку M на прямой AB; пусть $M \to M'$. Тогда $M' \in A'B'$ (свойство 1°).

Обратно, возьмем произвольную точку $M' \in A'B'$ и пусть точка M – ее прообраз. Если бы $M \notin AB$, то и $M' \notin A'B'$ (свойство 3°). Противоречие. Поэтому $M \in AB$, что и требовалось доказать.

Примечание. Нетрудно видеть, что приведенное доказательство осуществлялось по схеме, приведенной в п. 5.1–*а.* «Сводки». Эта схема является модификацией приема 5.1.

Свойства 5° (б) и 5° (в) доказываются аналогично в соответствии с приведенной схемой; предлагаем читателю провести доказательство этих свойств самостоятельно.

г) Пусть открытая полуплоскость σ определяется прямой AB и точкой C и при движении f: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$ (рис. 18). Обозначим через σ' открытую полуплоскость, определяемую прямой $A'B'$ и точкой C', и докажем, что $\sigma \to \sigma'$.

Возьмем произвольную точку $M \in \sigma$, тогда отрезок CM не пересекается с прямой AB. Следовательно, их образы – отрезок $C'M'$ и прямая $A'B'$ – также не пересекаются, т. е. $M' \in \sigma'$.

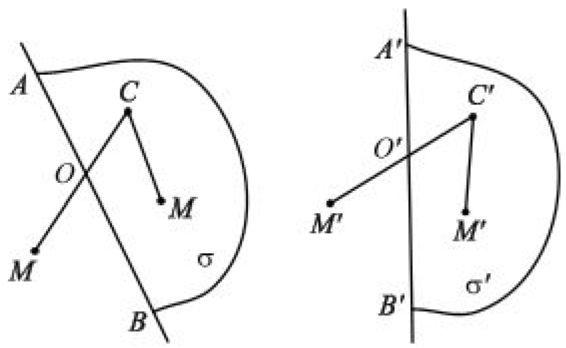


Рис. 18

Обратно, возьмем $M' \in \sigma'$ и пусть M – прообраз точки M'. Допустим, что $M \notin \sigma$, тогда отрезок CM пересекается с прямой

AB в некоторой точке O. Следовательно, отрезок $C'M'$ пересекается с прямой $A'B'$ в точке O' и поэтому $M' \notin \sigma'$. Получили противоречие. Следовательно, $M \in \sigma$. Итак, $\sigma \to \sigma'$.

Т. к., кроме того, прямая AB отображается на прямую $A'B'$, то свойство 5° (г) полностью доказано.

д) Приступая к доказательству этого свойства, заметим, что угол, как геометрическую фигуру можно определить по-разному. Остановимся на двух трактовках:

– углом AOB называется объединение лучей OA и OB;

– углом AOB (если точки A, B, O не коллинеарны) называется пересечение полуплоскостей p_1 и p_2, где p_1 – та полуплоскость, определяемая прямой OA, которая содержит точку B, а p_2 – та полуплоскость, определяемая прямой OB, которая содержит точку A; если же точки A, B, O лежат на прямой a (причем точка O лежит между A и B), то углом AOB называется любая из полуплоскостей с границей a.

В случае первой трактовки свойство 5° (д) есть очевидное следствие свойства 5° (в). Докажем данное свойство для второго определения.

Итак, пусть дан угол AOB, причем точки A, B, O не коллинеарны (в противном случае доказательство очевидно). Пусть при движении f: $A \to A'$, $B \to B'$, $O \to O'$ (рис. 19). Докажем, что тогда угол AOB отображается на угол $A'O'B'$.

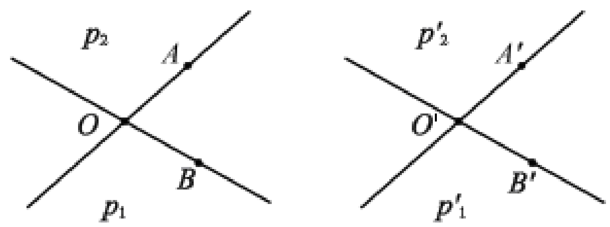


Рис. 19

Угол AOB есть пересечение полуплоскостей p_1 и p_2 (см. вышеприведенное определение); угол $A'O'B'$ есть пересечение полуплоскостей p'_1 и p'_2, где p'_1 есть полуплоскость, определяемая прямой $O'A'$ и точкой B', а p'_2 есть полуплоскость, определяемая прямой $O'B'$ и точкой A'. Так как при движении f: $A \to A'$, $B \to B'$, $O \to O'$, то $p_1 \to p_1'$, $p_2 \to p_2'$ и, следовательно, пересечение полуплоскостей p_1 и p_2 отображается на пересечение полуплоскостей p'_1 и p'_2, т.е. угол AOB переходит в угол $A'O'B'$, что и требовалось доказать.

Примечание. Легко видеть, что при движении f внутренняя область угла AOB отображается на внутреннюю область угла $A'O'B'$, а граница угла AOB – на границу угла $A'O'B'$.

Определение. Флагом (O, h, p) называется совокупность, состоящая из точки O, луча h с началом в точке O и полуплоскости p, определяемой той прямой, которая содержит луч h.

Следствие. При движении флаг переходит во флаг.

6°. При движении параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Доказательство. Если бы параллельные прямые a и b отображались на прямые, пересекающиеся в точке O', то точка O – единственный прообраз точки O' – принадлежала бы прямым a и b, что противоречит условию.

Примечание. Заметим, что приведенные выше доказательства свойств 3°, 4°, 5°, 6° остаются в силе для любых преобразований плоскости, которые обладают свойствами 1°–2°. Иначе говоря, установлено следующее: **если некоторое преобразование плоскости сохраняет коллинеарность точек и простое отношение коллинеарных точек, то оно обладает также упомянутыми выше свойствами 3° – 6°.**

Приступая к рассмотрению следующих свойств, напомним, что два отрезка равны (конгруэнтны) тогда и только тогда, когда их длины равны; два угла равны (конгруэнтны) тогда и только тогда, когда равны их градусные (радианные) меры; треугольники ABC и $A'B'C'$ равны (конгруэнтны), если равны их соответствующие стороны и соответствующие углы.

7°. При движении отрезок переходит в равный ему отрезок; угол – в равный ему угол; треугольник – в равный ему треугольник.

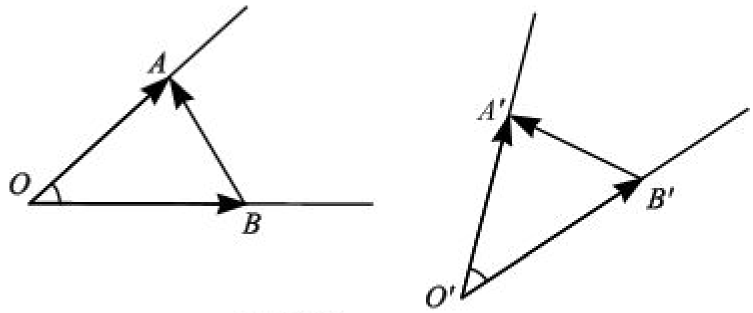


Рис. 20

Доказательство. а) Первое очевидно.

б) Пусть при некотором движении точки A, B, O переходят в точки A', B', O', так что угол AOB отображается на угол $A'O'B'$ (рис. 20).

По определению движения

$$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{O'A'}\right|,\ \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{O'B'}\right|,\ \left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{B'A'}\right| \qquad (1).$$

Воспользуемся далее очевидным тождеством: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2)$. Применяя его к скалярным произведениям $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}$ и учитывая равенства (1), заключаем, что

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'} \qquad (2).$$

Из (1) и (2) получаем $\cos(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = \cos(\widehat{\overrightarrow{O'A'},\overrightarrow{O'B'}})$, откуда и следует равенство углов AOB и $A'O'B'$.

в) Пусть при движении f вершины A, B, C треугольника ABC переходят соответственно в точки A', B', C' (неколлинеарные!), тогда отрезки AB, BC, CA отображаются на отрезки $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ соответственно. Таким образом, треугольник ABC переходит в треугольник $A'B'C'$. По доказанному выше соответствующие стороны и соответствующие углы этих треугольников равны, поэтому треугольники равны.

Следствие. Дан флаг (O, h, p). Пусть при движении f: $O \to O'$, $h \to h'$, $p \to p'$.

а) Если $A \in h$, $A' \in h'$ и $OA=O'A'$, то $f(A)=A'$.

б) Если луч q с началом в точке O расположен в полуплоскости p, а луч q' с началом в точке O' – в полуплоскости p' и $\cdot\,(h, q)= \cdot\,(h', q')$, то $f(q)= q'$.

Доказательство. а) Пусть $f(A)=A_1$, тогда $A_1 \in h'$ и $O'A_1=OA$. По условию $O'A'=OA$, следовательно, $O'A_1= O'A'$. Так как на данном луче от его начальной точки можно отложить единственный отрезок заданной длины, то точки A' и A_1 совпадают, т.е. $f(A)=A'$.

Следствие (б) предлагаем читателю доказать самостоятельно.

8º. При движении взаимно перпендикулярные прямые переходят во взаимно перпендикулярные прямые.

Это следствие непосредственно следует из 7º.

Следствие. При движении ортонормированный репер переходит в ортонормированный репер.

9º. Если при некотором движении точка O переходит в точку O', то окружность с центром в точке O переходит в окружность того же радиуса с центром в точке O'.

Предлагаем читателю доказать это свойство самостоятельно, используя прием 5.1. «Сводки».

Упражнения

119*. Доказать, что при движении параллелограмм переходит в параллелограмм, прямоугольник – в прямоугольник, ромб – в ромб, квадрат – в квадрат.

120*. Доказать, что если при движении лучи a и b с общим началом переходят соответственно в лучи a' и b', то биссектриса угла (a, b) переходит в биссектрису угла (a', b').

121*. Систематизируйте все известные Вам сведения о параллельном переносе, повороте, центральной симметрии, осевой симметрии, скользящей симметрии по следующему плану:

– определение данного преобразования;

– формулы данного преобразования;

– общие свойства данного преобразования как преобразования, являющегося движением;

– специфические свойства данного преобразования (образ прямой, инвариантные точки, инвариантные прямые).

122°. Построить циркулем и линейкой образ данного треугольника и данной окружности при следующий движениях:

а) параллельный перенос на данный вектор $\overrightarrow{MM'}$;

б) поворот вокруг данной точки O, переводящий данную точку M в другую данную точку M';

в) центральная симметрия с данным центром O;

г) осевая симметрия, заданная осью a;

д) скользящая симметрия, заданная осью a и вектором $\vec{p}$.

§ 8. Отыскание образа фигуры при заданном движении

8.1. Задачи на отыскание образа фигуры

В § 3 были рассмотрены два способа отыскания образа фигуры (см. п.п. 5.1., 5.2., 5.3. в «Сводке»). При решении многих задач удобнее использовать способы, в основе которых лежат свойства движений. Например, чтобы найти образ прямой, достаточно найти образы каких-либо двух ее точек (свойство 5º, § 7); чтобы найти образ окружности, достаточно найти образ ее центра (свойство 9º, § 7) и т.п. Соображения такого рода естественно объединить следующим общим правилом: «Чтобы найти образ *Ф'* фигуры *Ф*, выявляют «опорные» точки фигуры *Ф*, находят их образы и делают вывод о фигуре *Ф'*» (см. п. 5.4. в «Сводке»). «Опорными» точками служат, например, концы отрезка, вершины многоугольника, центр окружности и т.п.

В ряде случаев для отыскания образа фигуры, достаточно выявить ее связь с другими фигурами, образы которых уже известны. Например, чтобы найти образ прямой, которая проходит через точку *O* и параллельна прямой *a*, достаточно найти образ точки *O*, образ прямой *a* и воспользоваться свойством 6º из § 7.

Пример 1. Дан параллелограмм *ABCD*, диагонали которого пересекаются в точке *O*. Найдем образы следующих фигур при центральной симметрии Z_O:

а) прямая *CD*;

б) отрезок *BC*;

в) луч *AB*;

г) полуплоскость *p*, определяемая прямой *AB* и не содержащая точку *O*;

д) луч *AM*, лежащий в полуплоскости *p* и образующий с лучом *AB* угол, равный 30°.

Решение. При центральной симметрии Z_O:

а) $C \to A$, $D \to B$, следовательно, прямая *CD* переходит в прямую *AB*;

б) $B \to D$, $C \to A$, следовательно, отрезок *BC* переходит в отрезок *DA*;

в) $A \to C$, $B \to D$, следовательно, луч *AB* переходит в луч *CD*;

г) так как $A \to C$, $B \to D$, то прямая AB переходит в прямую CD; так как, кроме того $O \to O$, то полуплоскость p, определяемая прямой AB и не содержащая точку O, переходит в полуплоскость p', определяемую прямой CD и не содержащую точку O;

д) $A \to C$, луч AB переходит в луч CD, а полуплоскость p переходит в полуплоскость p', следовательно, луч AM переходит в луч CM', лежащий в полуплоскости p' и образующий с лучом CD угол, равный 30°.

Упражнения

123°. Дан параллелограмм $ABCD$; ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 – окружности радиуса R с центрами в точках A, B, C, D соответственно. Найти:

а) образы окружностей ω_1 и ω_4 при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$;

б) образы окружностей ω_2 и ω_1 при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$;

в) образ прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой BC, при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

124°. Дан квадрат $ABCD$ с центром O. Найти образы следующих фигур при повороте $R_O^{90^\circ}$:

а) луч AB;

б) прямая, проходящая через точку B и параллельная прямой AC;

в) полуплоскость, определяемая прямой BC и содержащая точку O.

125°. Дан правильный треугольник ABC с центром O. Найти образы следующих фигур при повороте $R_O^{120^\circ}$:

а) отрезок BC;

б) луч CA;

в) полуплоскость, определяемая прямой AB и не содержащая точку O.

126°. Дан ромб $ABCD$. Найти образ полуплоскости, определяемой прямой AB и не содержащей точку C, при осевой симметрии с осью AC.

127*. Доказать, что если при некотором движении прямая a, касающаяся окружности ω, переходит в прямую a', а окружность ω – в окружность ω', то прямая a' – касательная к окружности ω'.

128*. Доказать, что если при некотором движении многоугольник $ABC\ldots$, описанный около окружности ω, переходит в многоугольник $A'B'C'\ldots$, а окружность ω – в окружность ω', то многоугольник $A'B'C'\ldots$ описан около окружности ω'.

<u>129</u>. Даны параллельные прямые a и b и пересекающая их прямая c. Доказать, что существует параллельный перенос, при котором прямая a отображается на прямую b, а прямая c отображается на себя.

<u>130</u>. Даны параллельные прямые a и b и пересекающая их прямая c. Доказать, что существует центральная симметрия, при которой прямая a отображается на прямую b, а прямая c отображается на себя.

<u>131</u>. Точка O равноудалена от прямых a и b. Доказать, что существует поворот с центром в точке O, при котором прямая a переходит в прямую b.

<u>132</u>. Даны пересекающиеся прямые a и b и точка A, не принадлежащая этим прямым. Доказать, что существует осевая симметрия, при которой прямая a отображается на себя, а точка A переходит в точку, принадлежащую прямой b.

133. Даны окружности $\omega_1(O_1, R)$, $\omega_2(O_2, R)$ и прямая a, не параллельная и не перпендикулярная прямой O_1O_2. Доказать, что существует такая скользящая симметрия с осью, параллельной прямой a, при которой окружность ω_1 отображается на окружность ω_2.

8.2. Задачи на отыскание образа точки

Первый способ отыскания образа точки был рассмотрен в § 2 (см. п. 3.1. в «Сводке»). Другие способы отыскания образа точки основаны на свойствах движений и состоят в следующем:

а) если точка C делит отрезок AB в отношении $m{:}n$ и при некотором движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, то при этом точка C переходит в такую точку C_1, которая делит отрезок A_1B_1 в том же отношении (см. п. 3.2. в «Сводке»);

б) если точка A принадлежит лучу h с началом O, точка A_1 – лучу h_1 с началом O_1, $OA=O_1A_1$ и при некотором движении $O \to O_1$, $h \to h_1$, то при этом точка A переходит в точку A_1 (см. п. 3.3. в «Сводке»).

Пример 2. Квадрат $ABCD$ расположен в полуплоскости p относительно прямой AD, а квадрат $A_1B_1C_1D_1$ – в полуплоскости p_1 относительно прямой A_1D_1. Докажем, что если при некотором движении $A \to A_1$, $D \to D_1$, $p \to p_1$, то при этом $B \to B_1$, $C \to C_1$.

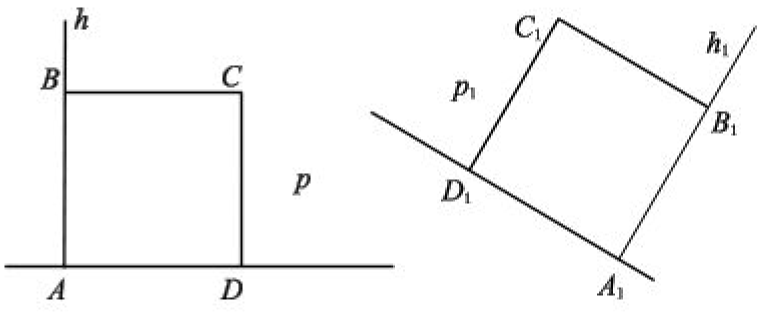


Рис. 21

Решение. Заметим, что $AD= A_1D_1$ и, значит $AB=A_1B_1$

(рис. 21).

Так как по условию $A \to A_1$, $D \to D_1$, $p \to p_1$, то луч h, выходящий из точки A, перпендикулярный прямой AD и лежащий в полуплоскости p, переходит в луч h_1, выходящий из точки A_1, перпендикулярный прямой A_1D_1 и лежащий в полуплоскости p_1, т.е. луч AB переходит в луч A_1B_1. Так как, кроме того, $AB=A_1B_1$, то точка B переходит в точку B_1. Аналогично доказывается, что точка C переходит в точку C_1.

Упражнения

134°. Прямая a содержит высоту AO, проведенную к основанию BC равнобедренного треугольника ABC. На стороне AB взяты точки M и P так, что $AM=MP=PB$, а на стороне AC – точки N и K так, что $AN=NK=KC$. Найти образы отрезка BN и луча MK при осевой симметрии S_a.

135°. Точки M, P, K, N делят, соответственно, стороны AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ в отношении 3:1. Найти образы отрезка MP, луча PK и угла MPN при повороте $R_O^{90^\circ}$, где O – центр квадрата.

В ряде случаев удобно применять следующий способ отыскания образа точки: «Если при некотором преобразовании плоскости фигуры Φ_1 и Φ_2 переходят в фигуры Φ'_1 и Φ'_2, то общие точки фигур Φ_1 и Φ_2 переходят в общие точки фигур Φ'_1 и Φ'_2» (см. п. 3.4. в «Сводке»).

Пример 3. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Докажем, что если при некотором движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, то при этом ортоцентр треугольника ABC переходит в ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. Пусть a_1 и a_2 – прямые, содержащие высоты треугольника ABC, a'_1 и a'_2 – прямые, содержащие высоты треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 22).

Так как при данном движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, то прямая BC переходит в прямую B_1C_1 и, следовательно,

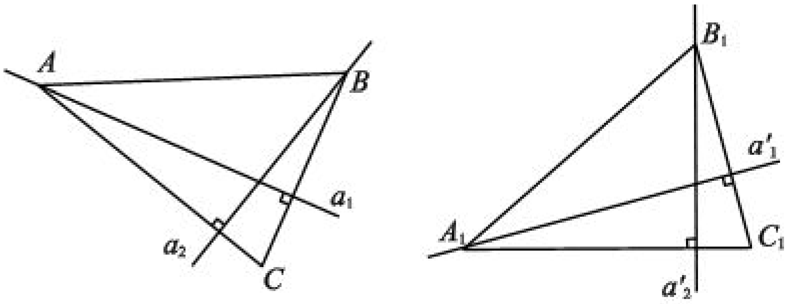


Рис. 22

прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная прямой BC, переходит в прямую, проходящую через точку A_1 и перпендикулярную прямой B_1C_1, т.е. $a_1 \to a'_1$.

Аналогично устанавливается, что $a_2 \to a'_2$.

Так как $a_1 \to a'_1$, $a_2 \to a'_2$, то точка пересечения прямых a_1 и a_2 переходит в точку пересечения прямых a'_1 и a'_2, т.е. ортоцентр треугольника ABC переходит в ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$.

Пример 4. При осевой симметрии с осью a прямая b переходит в прямую b_1. Доказать, что если прямые b и b_1 пересекаются в точке M, то M принадлежит оси a.

Решение. Т.к. при осевой симметрии S_a $b \to b_1$, то $b_1 \to b$. Следовательно, точка пересечения прямых b и b_1 переходит в точку пересечения прямых b_1 и b, т.е. $M \to M$.

Таким образом, M – инвариантная точка, следовательно, $M \in a$.

Упражнения

136*. Правильный треугольник ABC расположен в полуплоскости p относительно прямой AC, а правильный треугольник $A_1B_1C_1$ – в полуплоскости p_1 относительно прямой A_1C_1. Доказать, что если при некотором движении $A \to A_1$, $C \to C_1$, $p \to p_1$, то при этом $B \to B_1$.

137*. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что если при некотором движении $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, то при этом:

а) центроид треугольника ABC переходит в центроид треугольника $A_1B_1C_1$;

б) центр окружности, вписанной в треугольник ABC, переходит в центр окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$;

в) центр окружности, описанной около треугольника ABC, переходит в центр окружности, описанной около треугольника $A_1B_1C_1$.

<u>138</u>. Даны окружности $\omega_1(O_1; R)$ и $\omega_2(O_2; R)$. Прямая, параллельная прямой O_1O_2, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую окружность – в точках C и D. Доказать, что при переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ отрезок AB отображается на отрезок CD.

<u>139</u>. Окружность с центром на биссектрисе c угла, образованного лучами a и b, пересекает луч a в точках A и B, а луч b – в точках C и D. Доказать, что при осевой симметрии с осью c отрезок AB отображается на отрезок CD.

<u>140</u>. Точка O – центр правильного треугольника ABC. Точки M,K,P делят стороны AB, BC, CA в отношении 2:1 соответственно. Отрезки AK и BP пересекаются в точке A_1; отрезки BP и CM – в точке B_1; отрезки CM и AK – в точке C_1. Доказать, что при повороте вокруг точки O на угол 120° треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на себя.

§ 9. Теорема о подвижности плоскости

Теорема 1. Каковы бы ни были два ортонормированных репера $R = \{O, E_1, E_2\}$ и $R' = \{O', E_1', E_2'\}$, существует, и притом единственное, движение, при котором репер R переходит в репер R', т.е. $O \to O'$, $E_1 \to E_1'$, $E_2 \to E_2'$.

Доказательство. Существование. Рассмотрим отображение f плоскости в себя, при котором каждой точке M с координатами x, y в репере R ставится в соответствие точка с теми же координатами в репере R'. Нетрудно установить (см. упр. 115), что, во-первых, f есть преобразование плоскости; во-вторых, отображение f сохраняет расстояние между любыми двумя точками, т.е. является движением; в-третьих, отображение f переводит точки O, E_1, E_2 в точки O', E'_1, E'_2 соответственно, т.е. переводит репер R в репер R'.

Единственность.

Допустим, что наряду с движением f существует еще одно движение φ, отображающее репер R на репер R' (рис. 23). Допустим, что для некоторой точки M $f(M) \neq \varphi(M)$. Обозначим $f(M)= M'$, $\varphi(M)= =M_1$.

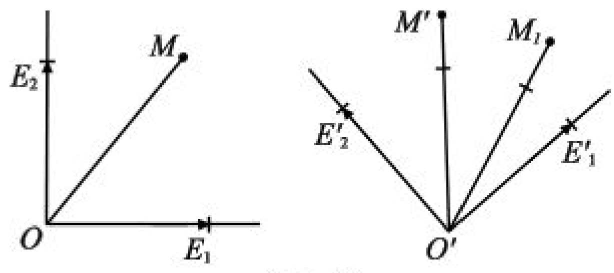


Рис. 23

Так как $f(O)= O'$, $f(M)= M'$ и f – движение, то $O'M'=OM$ (1).

Для движения φ аналогично получаем: $O'M_1=OM$ (2).

Из (1) и (2) следует, что $O'M'=O'M_1$. Это означает, что точка O' принадлежит серединному перпендикуляру отрезка $M'M_1$.

Проводя аналогичные рассуждения для точек E_1, M, E'_1, M', M_1, а затем – для точек E_2, M, E'_2, M', M_1, приходим к выводу, что точки E'_1

и E'_2 также принадлежат серединному перпендикуляру отрезка $M'M_1$.

Получили противоречие: точки O', E'_1, E'_2 принадлежат одной прямой. Следовательно, для любой точки M $f(M)=\varphi(M)$ и, стало быть, движения f и φ совпадают (см. п. 6.2. в «Сводке»).

Упражнения

141°. Объясните, почему в вышеприведенном доказательстве утверждается, что:

а) «…отображение f переводит точки O, E_1, E_2 в точки O', E'_1, E'_2 соответственно…»;

б) «Для движения φ аналогично получаем: $O'M_1=OM$».

142°. В рамках вышеприведенного доказательства покажите (по аналогии), что $E'_1M'= E_1M$, $E'_1M_1 = E_1M$ и $E'_1M'= E'_1M_1$.

Следствия.

1°. Если при движении ортонормированный репер R переходит в ортонормированный репер R', а точка M – в точку M', то координаты точки M' в репере R' совпадают с координатами точки M в репере R.

2°. Если при движении ортонормированный репер R переходит в ортонормированный репер R', то фигура Φ, заданная в репере R уравнением $F(x; y)=0$ (неравенством $F(x; y)>0$; $F(x; y)\geq 0$ и т. д.), переходит в такую фигуру Φ', которая задается в репере R' уравнением $F(x; y)=0$ (неравенством $F(x; y)>0$; $F(x; y)\geq 0$ и т. д.).

3°. Каковы бы ни были два флага (O, h, σ) и (O', h', σ'), существует, и притом единственное, движение, при котором $O \to O'$, $h \to h'$, $\sigma \to \sigma'$.

Доказательство. Существование. Рассмотрим ортонормированные реперы $R=\{O, E_1, E_2\}$ и $R'=\{O', E'_1, E'_2\}$, такие, что $E_1 \in h$, $E_2 \in \sigma$, $E'_1 \in h'$, $E'_2 \in \sigma'$ (рис. 24). По доказанной теореме существует движение f, при котором $O \to O'$, $E_1 \to E'_1$, $E_2 \to E'_2$.

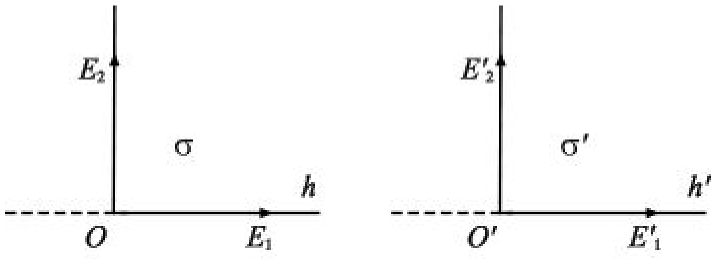


Рис. 24

Легко видеть, что при этом движении $O \to O'$, $h \to h'$, $\sigma \to \sigma'$.

Единственность. Допустим, что существует еще одно движение g, при котором $O \to O'$, $h \to h'$, $\sigma \to \sigma'$. Так как $E_1 \in h$, $E_1' \in h'$, $g(O)=O'$ и $OE_1=O'E'_1$, то $g(E_1)=E'_1$ (следствие свойства 7°, § 7). Далее, в силу того же следствия при движении g луч OE_2 переходит в луч $O'E'_2$, а т.к. $OE_2=O'E'_2$, то $g(E_2)=E'_2$. Таким образом, движение g переводит репер R в репер R' и, следовательно, совпадает с движением f.

Следствие 2° нередко применяется для отыскания образа данной фигуры при движении.

Пример 1. Докажем, что при движении полуплоскость переходит в полуплоскость.

Решение. Введем на плоскости ортонормированный репер R. Пусть данная полуплоскость σ задается в этом репере неравенством $Ax+By+C \geq 0$. При движении репер R переходит в ортонормированный репер R', а полуплоскость σ отображается на такую фигуру σ', которая в репере R' задается тем же неравенством. Следовательно, σ' – полуплоскость.

Пример 2. Докажем, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$ и $\cdot A=\cdot A_1$, то существует, и притом единственное, движение, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

Решение. 1. Рассмотрим два флага: (A, h, σ) и (A_1, h_1, σ_1), где h – луч AB, h_1 – луч A_1B_1, σ – полуплоскость, определяемая прямой AB и точкой C, а σ_1 – полуплоскость, определяемая прямой A_1B_1 и точкой

C_1. В силу следствия 3° существует движение f, при котором $A \to A_1$, $h \to h_1$, $\sigma \to \sigma_1$. Так как $AB=A_1B_1$, то при этом движении $B \to B_1$. Далее, так как $\angle BAC=\angle B_1A_1C_1$, то луч AC переходит в луч A_1C_1, а так как $AC=A_1C_1$, то $C \to C_1$. Таким образом, искомое движение существует.

2. Допустим, что существует еще одно движение φ, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Нетрудно видеть, что при этом движении $h \to h_1$, $\sigma \to \sigma_1$ и, стало быть, в силу следствия 3° движения f и φ совпадают.

Полученный результат (наряду с теоремой о подвижности плоскости и следствием 3°) можно использовать для доказательства совпадения (равенства) двух движений (см. п.п. 6.3.1. и 6.4. в «Сводке»).

Упражнения

143*. Доказать, что при движении эллипс переходит в эллипс, гипербола – в гиперболу, парабола – в параболу.

144°. При некотором движении ортонормированный репер $R=\{O,E_1,E_2\}$ переходит в одинаково ориентированный с ним репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, такой, что $O'(2;-3)$ и $(\overrightarrow{OE_1},\widehat{\ }\overrightarrow{O'E_1'})=45°$. В какую фигуру переходит при этом движении синусоида $y=\sin x$? Сделайте эскиз.

145*. Дан треугольник ABC. При некотором движении f $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$. Доказать, что f – тождественное преобразование.

<u>146</u>. Дан ромб $ABCD$. При некотором движении f $A \to A$, $B \to D$, $C \to C$. Доказать, что f – осевая симметрия.

<u>147</u>. Дан ромб $ABCD$, в котором $\angle ABC=60°$. При некотором движении f $A \to A$, $B \to C$, $C \to D$. Доказать, что f – поворот.

§ 10. Аналитическое выражение движений

Теорема 2. Всякое движение задается в ортонормированном репере формулами вида $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$ (*)

с ортогональной матрицей $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть на плоскости задан ортонормированный репер R и движение f переводит точку M (x; y) в точку M' (x'; y') (все координаты берутся в репере R). Движение f переводит репер R в ортонормированный репер R'. В репере R' точка M' имеет координаты x, y (следствие 1°, § 9). Составляя формулы перехода от репера R к реперу R' и применяя эти формулы к точке M', получаем:

$$x' = x \cdot \cos\alpha - \varepsilon \cdot y \cdot \sin\alpha + x_0,\ y' = x \cdot \sin\alpha + \varepsilon \cdot y \cdot \cos\alpha + y_0 \qquad (**)$$

(напомним, что в данном случае x', y' – старые координаты точки M', а x, y – новые).

Так как формулы (**) выражают координаты точки M' в репере R через координаты точки M в том же репере, то эти формулы и задают движение f в репере R. Обозначая $\cos\alpha = a_1$, $-\varepsilon\sin\alpha = b_1$, $x_0 = c_1$, $\sin\alpha = b_2$, $\varepsilon\cos\alpha = b_2$, $y_0 = c_2$, получаем формулы вида (*). Как легко проверить, матрица, составленная из коэффициентов при x и y в полученных формулах (**), является ортогональной, так что теорема доказана.

Примечания. 1. Сопоставляя теорему 2 с упр. 113, приходим к выводу: отображение плоскости в себя является движением тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном репере оно задается линейными формулами (*) с ортогональной матрицей, составленной из коэффициентов при x и y.

2. Теорему 2 можно использовать для отыскания формул некоторого движения, заданного тремя парами соответствующих точек $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (см. п. 4.4. в «Сводке»).

3. Из доказательства теоремы 2 явствует, что если движение переводит ортонормированный репер R в ортонормированный репер R', то в репере R это движение задается такими формулами, которые получаются из формул перехода от репера R к реперу R' путем замены x на x', y на y' и наоборот.

Этот факт служит основой соответствующего приема (см. п. 4.5. в «Сводке»).

4. Формулы (*) в матричной форме можно записать так: $X'=A\cdot X+X_0$, где $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, $X_0=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

Будем называть это равенство матричным уравнением преобразования в репере R. Из вышеизложенного следует, что матрица A есть матрица перехода от репера R к реперу R' (образу репера R).

Заметим, что матричные уравнения можно применять для любых преобразований, заданных в аффинном репере формулами вида (*).

Упражнения

148. Составить формулы движения f в ортонормированном репере $R=\{O,E_1,E_2\}$, если известно, что:

а) f переводит репер R в одинаково ориентированный с ним репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, такой, что O' (1; –2) и $(\widehat{\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{O'E_1'}})=30°$;

б) f переводит репер R в противоположно ориентированный с ним репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, такой, что O' (–2; 1) и $(\widehat{\overrightarrow{OE_1},\overrightarrow{O'E_1'}})=-45°$.

Для каждого случая сделайте рисунки.

149. Существует ли движение, переводящее ортонормированный репер $R=\{O,E_1,E_2\}$ в репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, если известно, что:

а) $O'(0;-1)$, $E'_1(-1;-1)$, $E'_2\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

б) $O'(0;-1)$, $E'_1(-1;-1)$, $E'_2(0;1)$?

в) $O'(0;-1)$, $E'_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $E'_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

(Координаты точек O', E'_1, E'_2 даны в репере R!)

Если такое движение существует, найдите его формулы в репере R.

150. Существует ли движение, при котором:

а) $A(1;2)\to A'(4;0)$, $B(2;1)\to B'(3;-1)$, $C(2;3)\to C'(5;-1)$?

б) $A(1;2)\to A'(5;0)$, $B(2;1)\to B'(5;-1)$, $C(2;3)\to C'(7;-1)$?

(Координаты точек даны в ортонормированном репере).

Если такое движение существует, найдите его формулы в данном репере.

§ 11. Движения первого и второго рода

Теорема 3. Если преобразование f задано в аффинном репере $R=\{O,E_1,E_2\}$ формулами $x'=a_1x+b_1y+c_1$, $y'=a_2x+b_2y+c_2$ (*) (или, что то же самое, матричным уравнением $X'=A\cdot X+X_0$), то:

а) преобразование f переводит репер R в некоторый аффинный репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$;

б) формулы (*) могут быть получены из формул перехода от репера R к реперу R' путем замены x на x', y на y' и наоборот;

в) в матричном уравнении преобразования f матрица A есть матрица перехода от репера R к реперу R';

г) преобразование f переводит произвольную точку M с координатами x, y в репере R в точку M' с теми же координатами в репере R'.

Доказательство. а) Используя формулы (*), находим образы точек O, E_1, E_2: $f(O) = O'(c_1;\ c_2)$, $f(E_1) = E'_1(a_1 + c_1;\ a_2 + c_2)$, $f(E_2) =$ $= E'_2(b_1 + c_1;\ b_2+c_2)$.

Таким образом, $\overrightarrow{O'E'_1}(a_1;a_2)$, $\overrightarrow{O'E'_2}(b_1;b_2)$.

Т.к. f – преобразование плоскости, то $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, а это означает, что векторы $\overrightarrow{O'E'_1}$ и $\overrightarrow{O'E'_2}$ не коллинеарны. Следовательно, тройка $\{O', E'_1, E'_2\}$ представляет собой некоторый аффинный репер R' – образ репера R.

б) Т.к. $O'(c_1;\ c_2)$, $\overrightarrow{O'E'_1}(a_1;a_2)$, $\overrightarrow{O'E'_2}(b_1;b_2)$, то формулы перехода от репера R к реперу R' имеют вид: $x=a_1x'+b_1y'+c_1$, $y=a_2x'+b_2y'+c_2$ (1). Сравнивая формулы (1) с формулами (*) преобразования f, приходим к нужному выводу.

в) Из формул (1) видим, что матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ есть матрица перехода от R к R'.

г) Пусть $M(x;y)_R \xrightarrow{f} M'(x';y')_R$, тогда в силу формул (*):

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases} \qquad (2).$$

Обозначим координаты точки M' в репере R' через $\bar{x}$, $\bar{y}$. Запишем формулы перехода (1) для точки M': $\begin{cases} x' = a_1\bar{x} + b_1\bar{y} + c_1 \\ y' = a_2\bar{x} + b_2\bar{y} + c_2 \end{cases}$ (3).

Вычитая из уравнений (3) уравнения (2), получаем:

$$\begin{cases} a_1(\overline{x}-x)+b_1(\overline{y}-y)=0 \\ a_2(\overline{x}-x)+b_2(\overline{y}-y)=0 \end{cases} \qquad (4).$$

Т. к. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то система (4) имеет единственное, а именно нулевое решение: $\overline{x}-x=0$, $\overline{y}-y=0$, откуда $\overline{x}=x$, $\overline{y}=y$, что и требовалось доказать.

Как видим, теорема 3 утверждает, что свойствами а), б), в), г), перечисленными в формулировке этой теоремы, обладают не только движения, но и <u>любые преобразования</u>, которые в аффинном репере (не обязательно ортонормированном!) задаются линейными формулами вида (*).

Теорема 4. Если преобразование *f* в аффинном репере *R* задается матричным уравнением $X' = A \cdot X + X_0$, то в любом другом аффинном репере $\overline{R}$ преобразование f задается матричным уравнением $\overline{X}' = \left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) \cdot \overline{X} + C^{-1} \cdot \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0 - \overline{X}_0\right)$, где $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$, $\overline{X}' = \begin{pmatrix} \overline{x}' \\ \overline{y}' \end{pmatrix}$ – координатные столбцы точек *M* и *f*(*M*) в репере $\overline{R}$, *C* – матрица перехода от репера *R* к реперу $\overline{R}$, $\overline{X}_0$ – столбец из свободных членов в формулах перехода от *R* к $\overline{R}$.

Доказательство. Пусть преобразование f переводит произвольную точку *M* в точку *M′*. Обозначим координаты этих точек: $M(x;y)_R$, $M(\overline{x};\overline{y})_{\overline{R}}$, $M'(x';y')_R$, $M'(\overline{x}';\overline{y}')_{\overline{R}}$.

Составим формулы преобразования координат при переходе от репера *R* к реперу $\overline{R}$: $\begin{cases} x = c_{11}\overline{x} + c_{12}\overline{y} + x_0 \\ y = c_{21}\overline{x} + c_{22}\overline{y} + y_0 \end{cases}$ (для точки *M*) и

$\begin{cases} x' = c_{11}\overline{x}' + c_{12}\overline{y}' + x_0 \\ y' = c_{21}\overline{x}' + c_{22}\overline{y}' + y_0 \end{cases}$ (для точки *M′*).

Запишем эти равенства в матричной форме:

$$X = C \cdot \overline{X} + \overline{X}_0 \qquad (1),$$

$$X' = C \cdot \overline{X}' + \overline{X}_0 \qquad (2),$$

где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$, $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$, $\overline{X}' = \begin{pmatrix} \overline{x}' \\ \overline{y}' \end{pmatrix}$, $\overline{X}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

По условию теоремы $X'=A\cdot X+X_0$. Отсюда, учитывая (1) и (2), получаем:

$$C \cdot \overline{X}' + \overline{X}_0 = X' = A \cdot X + X_0 =$$
$$= A \cdot \left(C \cdot \overline{X} + \overline{X}_0\right) + X_0 = A \cdot C \cdot \overline{X} + \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0\right).$$

Умножим обе части этого равенства на C^{-1} слева:

$$\left(C^{-1} \cdot C\right) \cdot \overline{X}' + C^{-1} \cdot \overline{X}_0 = \left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) \cdot \overline{X} + C^{-1} \cdot \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0\right),$$

откуда $\overline{X}' = \left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) \cdot \overline{X} + C^{-1} \cdot \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0 - \overline{X}_0\right)$, что и требовалось доказать.

Следствия. 1°. Если преобразование f в некотором аффинном репере задано линейными формулами вида

$$x' = a_1x + b_1y + c_1, \;\; y' = a_2x + b_2y + c_2 \qquad (*),$$

то в любом другом аффинном репере оно задается линейными формулами того же вида.

2°. Всякое движение в <u>любом</u> аффинном репере задается линейными формулами вида (*).

Теорема 5. Если преобразование f, заданное в репере R линейными формулами вида (*), переводит репер R в одинаково (противоположно) ориентированный с ним репер R', то оно переводит любой другой репер R_1 также в одинаково (противоположно) ориентированный с ним репер R'_1.

Доказательство. Запишем преобразование f в репере R в матричной форме: $X'=A\cdot X+X_0$, где A – матрица перехода от репера R к реперу R' – образу репера R.

В репере R_1 преобразование f задается матричным уравнением

$\overline{X}' = \left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) \cdot \overline{X} + C^{-1} \cdot \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0 - \overline{X}_0\right)$, где C – матрица перехода от репера R к реперу R_1, а $C^{-1} \cdot A \cdot C$ – матрица перехода от репера R_1 к реперу R'_1 – образу репера R_1.

Легко видеть, что $\det\left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) = \det A \neq 0$. Если реперы R' и R одинаково ориентированы, то $\det A > 0$, но тогда $\det\left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) > 0$ и, следовательно, реперы R'_1 и R_1 также одинаково ориентированы.

Если же реперы R' и R противоположно ориентированы, то $\det A < 0$, но тогда $\det\left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) < 0$ и, следовательно, реперы R'_1 и R_1 также противоположно ориентированы, что и требовалось доказать.

Теорема 5 имеет место, в частности, и для движений; она делает корректным следующее определение. Движение f называется движением первого (второго) рода, если оно сохраняет (изменяет) ориентацию какого-либо репера (и, следовательно, любого репера).

Следствия. 3°. Пусть в ортонормированном репере движение f задано формулами (*) (см. § 10). Если определитель, составленный из коэффициентов при x и y, равен 1, то f – движение первого рода; если этот определитель равен –1, то f – движение второго рода.

4°. Если движение задано в ортонормированном репере формулами (**) (см. § 10), то f является движением первого рода тогда и только тогда, когда $\varepsilon = 1$, и движением второго рода тогда и только тогда, когда $\varepsilon = -1$.

Упражнения

151*. Доказать, что параллельный перенос, поворот и центральная симметрия являются движениями первого рода, а осевая и скользящая симметрии – движениями второго рода.

152*. Доказать, что: а) композиция двух движений первого (второго) рода есть движение первого рода; б) композиция движения первого рода и движения второго рода есть движение второго рода.

153*. Доказать, что преобразование, обратное движению первого (второго) рода, есть движение первого (второго) рода.

154. В прямоугольной декартовой системе координат $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ преобразование f задано формулами: $x'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y$, $y'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y$.

а) Доказать, что f – движение и определить его род.

б) Записать формулы движения в матричной форме.

155. Даны два одинаково ориентированных ортонормированных репера $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ и $R'=\{O,\vec{i}\,',\vec{j}\,'\}$. Движение f задано в репере R формулами: $x'=y+1$, $y'=x+1$. Составить формулы f в репере R' в матричной и координатной формах, если известно, что $(\widehat{\vec{i},\vec{i}\,'})=45°$. Определить род и вид движения f.

§ 12. Классификация движений

Как известно, перенос, поворот, центральная, осевая и скользящая симметрии являются движениями. Возникает вопрос: существуют ли движения другого вида, отличные от перечисленных? Ответ на этот вопрос дают теоремы о классификации движений.

Теорема 6. Всякое движение первого рода есть либо поворот, либо параллельный перенос.

Доказательство. Пусть f – произвольное движение первого рода, заданное в некотором ортонормированном репере $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ формулами (**) (см. § 10):

$$x'=x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha+x_0,\ y'=x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha+y_0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha\in[-\pi;\pi]$.

Выясним, имеет ли f инвариантные точки. Для этого решим систему:

$$\begin{cases}x=x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha+x_0\\ y=x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha+y_0\end{cases}\text{ или }\begin{cases}(1-\cos\alpha)x+y\cdot\sin\alpha=x_0\\ -x\cdot\sin\alpha+(1-\cos\alpha)\cdot y=y_0\end{cases}\quad(1).$$

Определитель системы: $\Delta=2(1-\cos\alpha)$. Если $\alpha\neq 0$, то $\Delta\neq 0$. В этом случае движение f имеет единственную инвариантную точку $O_1(x_1;\,y_1)$. Перенесем начало координат в точку O_1 и найдем формулы движения f в репере $R_1=\{O_1,\vec{i},\vec{j}\}$. В матричной форме искомые формулы имеют вид:

$$\overline{X}'=\left(C^{-1}\cdot A\cdot C\right)\cdot\overline{X}+C^{-1}\cdot\left(A\cdot\overline{X}_0+X_0-\overline{X}_0\right)\ (*)\ (\text{теорема } 4),$$

где $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}$ и $\overline{X}'=\begin{pmatrix}\overline{x}'\\ \overline{y}'\end{pmatrix}$ – координатные столбцы в репере R_1 произвольной точки M и ее образа M'; $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ – матрица преобразования f в репере R; C – матрица перехода от R к R_1 (в нашем случае $C=C^{-1}=E$); $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$, $\overline{X}_0=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$.

Так как $(x_1;\,y_1)$ – решение системы (1), то $\overline{X}_0=A\cdot\overline{X}_0+X_0$ и равенство (*) принимает вид: $\overline{X}'=A\cdot\overline{X}$. Записывая полученное равенство в координатной форме, находим формулы f в репере R_1: $\overline{x}'=\overline{x}\cdot\cos\alpha-\overline{y}\cdot\sin\alpha$, $\overline{y}'=\overline{x}\cdot\sin\alpha+\overline{y}\cdot\cos\alpha$. Как видим, движение f

представляет собой поворот вокруг точки O_1 на угол α.

Если же $\alpha = 0$, то формулы (**) принимают вид $x'=x+x_0$, $y'=y+y_0$. В этом случае f есть перенос на вектор $\vec{p}(x_0; y_0)$. Теорема доказана.

Теорема 7. Всякое движение второго рода есть либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия.

Доказательство. Пусть f – произвольное движение второго рода, заданное в некотором ортонормированном репере $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ формулами (**) (см. § 10):

$$x' = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha + x_0,\ y' = x \cdot \sin\alpha - y \cdot \cos\alpha + y_0.$$

Найдем формулы этого движения в репере $R_1 = \{O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1\}$, который одинаково ориентирован с репером R и удовлетворяет условиям: $O_1\left(\frac{x_0}{2}; \frac{y_0}{2}\right)$, $(\widehat{\vec{i}, \vec{i}_1}) = \frac{\alpha}{2}$.

В матричной форме искомые формулы имеют вид:

$$\overline{X}' = \left(C^{-1} \cdot A \cdot C\right) \cdot \overline{X} + C^{-1} \cdot \left(A \cdot \overline{X}_0 + X_0 - \overline{X}_0\right),$$

где $\overline{X}, \overline{X}'$ – координатные столбцы в репере R_1 точки M и ее образа M';

$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица движения f в репере R;

$C = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -\sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от R к R_1;

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},\ \overline{X}_0 = \begin{pmatrix} \frac{x_0}{2} \\ \frac{y_0}{2} \end{pmatrix}.$$

Находим последовательно: $C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$,

$$C^{-1}\cdot A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ C^{-1}\cdot\left(A\cdot\overline{X}_0+X_0-\overline{X}_0\right)=\begin{pmatrix}x_0\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}+y_0\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\\ 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, в репере R_1 движение f задается формулами:

$$\overline{x}'=\overline{x}+\left(x_0\cdot\cos\frac{\alpha}{2}+y_0\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right),\ \overline{y}'=-\overline{y}.$$

Теперь становится понятным, что если $x_0\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}+y_0\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}=0$, то f – осевая симметрия; если же $x_0\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}+y_0\cdot\sin\dfrac{\alpha}{2}\neq 0$, то f – скользящая симметрия. Теорема доказана.

Результаты проведенного исследования показаны на схеме 1.

Схема 1.

Примечание. Сопоставляя эти результаты с таблицей 1, приходим к следующим выводам.

1. Движение первого рода, не имеющее инвариантных точек, является параллельным переносом.

2. Движение первого рода с единственной инвариантной точкой является поворотом.

3. Движение второго рода, не имеющее инвариантных точек, является скользящей симметрией.

4. Движение второго рода, имеющее прямую инвариантных точек, является осевой симметрией.

Таким образом, зная род и количество инвариантных точек некоторого движения, можно определить его вид (см. п. 2.10. «Сводки»).

Пример 1. Преобразование f задано в ортонормированном репере формулами $x' = -x + 5$, $y' = y + 1$. Докажем, что f – движение, и определим его род и вид.

Решение. Матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, составленная из коэффициентов при x и y, является ортогональной, следовательно, f – движение. Так как определитель этой матрицы равен -1, то f – движение второго рода.

Найдем инвариантные точки: $\begin{cases} x = -x + 5 \\ y = y + 1 \end{cases}$. Система решений не имеет, следовательно, инвариантных точек нет и поэтому f – скользящая симметрия.

Упражнения

156. Преобразования f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 заданы в ортонормированном репере следующими формулами:

$$f_1 : x' = \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2,\ \ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y;$$

$$f_2 : x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 2,\ \ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y;$$

$$f_3 : x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 3,\ \ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 2;$$

$$f_4 : x' = -x + 2,\ \ y' = -y + 6;$$

$$f_5 : x' = x + 2,\ \ y' = y + 6.$$

Доказать, что эти преобразования являются движениями. Определить род и вид каждого из них.

§ 13. Равенство (конгруэнтность) фигур

Определение. Фигура Φ называется равной (конгруэнтной) фигуре Φ', если существует такое движение, при котором фигура Φ отображается на фигуру Φ'.

Обозначается: $\Phi = \Phi'$ ($\Phi \cong \Phi'$).

В частности, если Φ и Φ' – треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, то, говоря о равенстве этих треугольников, обычно считают (согласно сложившейся традиции), что существует такое движение, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (и, следовательно, $\Delta\, ABC \to \Delta\, A_1B_1C_1$).

Упражнения

157°. Как доказать, что фигура Φ равна (конгруэнтна) фигуре Φ'?

158*. Доказать, что любые две окружности одинаковых радиусов равны.

159*. Доказать, что два отрезка равны (в смысле приведенного выше определения!) тогда и только тогда, когда равны их длины.

160*. Доказать, что два угла равны (в смысле приведенного выше определения!) тогда и только тогда, когда равны их градусные (радианные) меры.

161*. Доказать, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (в смысле приведенного выше определения!), то равны их соответствующие медианы AD и A_1D_1, соответствующие высоты BE и B_1E_1, соответствующие биссектрисы CF и C_1F_1.

162°. Доказать следующие общие свойства равенства фигур:

а) $\Phi=\Phi$ для любой фигуры Φ;

б) если $Ф=Ф_1$, то $Ф_1=Ф$;

в) если $Ф_1=Ф_2$, $Ф_2=Ф_3$, то $Ф_1=Ф_3$.

Пример 1. Как известно, в школьных учебниках иногда принимают следующее (частное) определение равенства треугольников: треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются равными, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $·A=·A_1$, $·B=·B_1$, $·C=·C_1$. Докажем, что применительно к треугольникам общее и частное определения равенства эквивалентны.

Решение. Пусть треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны в смысле общего определения, т.е. существует движение f, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Тогда (в силу известных свойств движений) $AB=A_1B_1$, $BC=B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, $·A=·A_1$, $·B=·B_1$, $·C=·C_1$. Это означает, что данные треугольники равны и в смысле частного определения.

Обратно, если $\Delta\, ABC = \Delta\, A_1B_1C_1$ в смысле частного определения, то $AB=A_1B_1$, $AC= A_1C_1$, $·A=·A_1$ и, в силу результата, полученного в примере 2 § 9, существует такое движение, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Это означает, что данные треугольники равны и в смысле общего определения, что и требовалось доказать.

Для доказательства того, что существует движение, при котором фигура $Ф$ отображается на фигуру $Ф_1$ (и, стало быть, $Ф=Ф_1$), могут использоваться способы отыскания образа фигуры, в частности, прием 5.3. Другая группа приемов основана на теореме о подвижности плоскости и ее следствиях (см. следствия 2°, 3° и пример 2 § 9). Соответствующие приемы приведены в п. 7.2. «Сводки».

Пример 2. Докажем, что если смежные стороны и угол между ними одного параллелограмма равны соответственно смежным сторонам и углу между ними другого параллелограмма, то эти параллелограммы равны.

Решение. Первый способ. Пусть в параллелограммах $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\cdot A=\cdot A_1$ (рис. 25). Обозначим через a луч AD, a_1 – луч A_1D_1, b – луч AB, b_1 – луч A_1B_1, σ – полуплоскость, определяемую прямой AD и точкой B, σ_1 – полуплоскость, определяемую прямой A_1D_1 и точкой B_1.

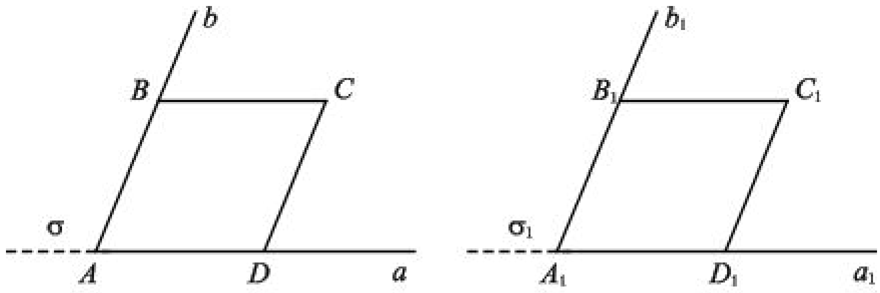


Рис. 25

Существует движение f, при котором флаг (A, a, σ) переходит в флаг (A_1, a_1, σ_1). Так как $AD=A_1D_1$, то при этом $D \to D_1$. Далее, т.к. $\cdot A=\cdot A_1$, то $b \to b_1$, а т.к. $AB=A_1B_1$, то $B \to B_1$. Наконец, при движении f прямые BC и DC переходят соответственно в прямые B_1C_1 и D_1C_1 (свойства движений). Следовательно, точка пересечения прямых BC и DC переходит в точку пересечения B_1C_1 и D_1C_1, т.е. $C \to C_1$. Таким образом, движение f переводит $ABCD$ в $A_1B_1C_1D_1$, следовательно, $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

Второй способ. Так как $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $\cdot A=\cdot A_1$, то $\Delta\, ABD = \Delta\, A_1B_1D_1$. Следовательно, существует движение f, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $D \to D_1$ (см. пример 2, § 9). При этом движении $C \to C_1$ (см. первый способ). Таким образом, движение f переводит $ABCD$ в $A_1B_1C_1D_1$, следовательно, $ABCD=A_1B_1C_1D_1$.

Заметим, что изложенные решения укладываются в схемы, приведенные в п. 7.2. «Сводки»: в первом решении данные параллелограммы «привязывались» к флагам (A, a, σ) и (A_1, a_1, $σ_1$), а во втором – к треугольникам ABD и $A_1B_1D_1$.

Пример 3. Докажем, что если полуоси a и b эллипса ω равны полуосям эллипса ω_1, то эти эллипсы равны.

Решение. Так как полуоси данных эллипсов равны a и b, то существует ортонормированный репер R, в котором эллипс ω задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1), и существует ортонормированный репер R_1, в котором эллипс ω_1 задается уравнением (1).

Существует движение f, при котором репер R переходит в репер R_1. При этом движении эллипс ω преобразуется в фигуру ω', которая задается в репере R_1 уравнением (1). Это означает, что фигура ω' совпадает с эллипсом ω_1. Следовательно, $f(\omega)= \omega_1$ и поэтому эллипсы ω и ω_1 равны.

Приведенное решение соответствует одной из трех схем, приведенных в п. 7.2. «Сводки».

Определение. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются одинаково ориентированными (противоположно ориентированными), если одинаково ориентированы (противоположно ориентированы) реперы $R=\{A,B,C\}$ и $R_1=\{A_1,B_1,C_1\}$.

Легко видеть, что равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ одинаково ориентированы (противоположно ориентированы) тогда и только тогда, когда существует движение первого рода (второго рода), при котором $A\to A_1$, $B\to B_1$, $C\to C_1$.

Пример 4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и противоположно ориентированы. Докажем, что середины отрезков, соединяющих середины соответствующих сторон этих треугольников, лежат на одной прямой.

Решение. Так как треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и противоположно ориентированы, то существует движение f второго рода, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. При этом стороны AB, BC, CA преобразуются в отрезки A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1 соответственно. Следовательно, середины M, N, P сторон AB, BC, CA переходят в середины M_1, N_1, P_1 сторон A_1B_1, B_1C_1, C_1A_1.

Т. к. f – движение <u>второго рода</u>, то f есть либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия. В первом случае середины отрезков MM_1, NN_1, PP_1 принадлежат оси симметрии. Во втором случае середины указанных отрезков принадлежат оси скользящей симметрии в силу известного ее свойства (см. упр. 88).

Упражнения

<u>163</u>. Доказать, что если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

<u>164</u>. В выпуклых четырехугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $AB=A_1B_1$, $AD=A_1D_1$, $BC=B_1C_1$, $\cdot A=\cdot A_1$, $\cdot B=\cdot B_1$. Доказать, что четырехугольники равны.

<u>165</u>. В трапециях $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $BC \| AD$, $B_1C_1 \| A_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $\cdot CAD = \cdot C_1A_1D_1$, $\cdot CDA = \cdot C_1D_1A_1$, $\cdot BDA = \cdot B_1D_1A_1$. Доказать, что трапеции равны.

166*. Доказать, что если действительные и мнимые полуоси двух гипербол соответственно равны, то гиперболы равны.

167*. Доказать, что если фокальные параметры двух парабол равны, то параболы равны.

<u>168</u>. В окружность вписаны равные противоположно ориентированные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что

точки пересечения прямых AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 принадлежат прямой, проходящей через центр окружности.

169. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны и одинаково ориентированы, причем прямые AA_1, BB_1 и CC_1 не параллельны. Доказать, что серединные перпендикуляры к отрезкам AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

§ 14. Применение движений к решению задач на вычисление и доказательство. Вспомогательные построения

Вспомогательные (дополнительные) построения являются ключевым звеном процесса решения многих геометрических задач. Средством осуществления удачного вспомогательного построения служат нередко преобразования плоскости, в частности движения. Основная идея применения в этом плане преобразований плоскости состоит в следующем: отдельные фрагменты исходной геометрической ситуации подвергаются некоторому преобразованию, в результате чего получается некоторая вспомогательная фигура, более удобная для решения поставленной задачи.

Пример 1. Сумма оснований трапеции равна 10 см. Найдем ее диагонали, если известно, что они перпендикулярны и относятся как 3:4.

Решение. При переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$ $B \to C$, $D \to D_1$, поэтому отрезок BD переходит в равный и параллельный ему отрезок CD_1 , причем $DD_1 = BC$, $D_1 \in AD$ (рис. 26). Имеем $\angle ACD_1 = \angle AOD = 90°$, $AD_1 = AD+DD_1 = AD+BC = 10$ *см*.

Обозначим $AC = 3x$, тогда $CD_1 = 4x$. Получаем уравнение: $9x^2+16x^2 = 100$, откуда $x = 2$ и, следовательно, $AC = 6$ *см*, $BD = 8$*см*.

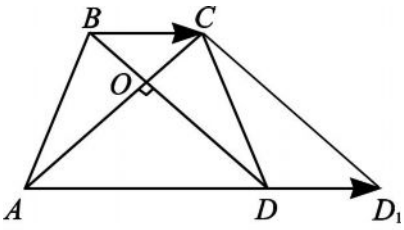


Рис. 26

Пример 2. На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M. Докажем, что $AC+CB<AM+MB$.

Решение. При осевой симметрии, осью которой служит биссектриса внешнего угла BCD треугольника ABC, $M \to M$, $C \to C$, $B \to B_1$, причем $B_1 \in CD$ (рис. 27).

Поэтому $BC \to B_1C$, $BM \to B_1M$ и, следовательно, $CB_1=CB$, $MB_1=MB$.

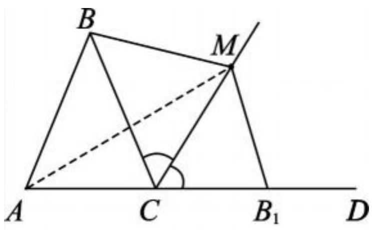


Рис. 27

В треугольнике AMB_1: $AB_1<AM+MB_1$, отсюда $AC+CB_1<AM+MB_1$ и, наконец, $AC+CB<AM+MB$, что и требовалось доказать.

Пример 3. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причем $\angle BAM=\angle MAK$. Докажем, что $BM+KD=AK$.

Решение. При повороте вокруг точки A на угол –90° (рис. 28) квадрат $ABCD$ отображается на квадрат ADC_1D_1, так что точки C, D, C_1 лежат на одной прямой.

Далее, $M \to M_1$ ($M_1 \in DC_1$, $\angle MAM_1 = 90°$), отрезок BM переходит в равный ему отрезок DM_1, а угол BAM – в равный ему угол DAM_1. Имеем:
$\angle AM_1K = 90° - \angle DAM_1$, $\angle M_1AK = 90° - \angle MAK$.

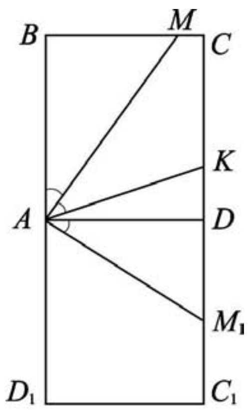


Рис. 28

Так как $\angle DAM_1 = \angle BAM = \angle MAK$, то $\angle AM_1K = \angle M_1AK$ и, следовательно, $AK=KM_1$. Таким образом, $BM+KD=M_1D+KD=KM_1=AK$, что и требовалось доказать.

Упражнения

170. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, причем $\angle AOD = \varphi$. Найти BC, если $AB = a$, $CD = b$, $AD = c$, $AD > BC$.

171. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\cdot A = 90°$, $\cdot B = 120°$, $AB = BC = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Найти CD.

172. На сторонах AB и AC треугольника ABC построены вне треугольника квадраты $ABMN$ и $ACPK$. Доказать, что медиана AE треугольника ABC равна половине отрезка NK и перпендикулярна ему.

173. Даны правильный треугольник ABC и произвольная точка M. Доказать, что больший из отрезков MA, MB и MC не превосходит суммы двух других отрезков.

174. На катетах CA и CB равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $CD = CE$. Прямые, проведенные через точки D и C и перпендикулярные AE, пересекают гипотенузу AB в точках K и P соответственно. Доказать, что $KP = PB$.

175. Доказать, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.

176. На прямой a даны точки A, B, C, D, расположенные в указанном порядке, причем $AB = CD$. Доказать, что для любой точки M, не принадлежащей прямой a, выполняется неравенство $MA + MD > MB + MC$.

177. Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей на основании равнобедренного треугольника, до его боковых сторон равна длине высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

178. Точка M лежит на диаметре AB окружности. Хорда CD проходит через точку M и пересекает AB под углом 45°. Доказать, что значение выражения $CM^2 + DM^2$ не зависит от выбора точки M.

179. Доказать, что из всех равновеликих треугольников с общим основанием наименьший периметр имеет равнобедренный треугольник.

§ 15. Применение движений к решению задач на доказательство. Переформулирование цели задачи

Процесс решения достаточно сложной задачи с помощью преобразований нередко начинается с переформулирования ее цели на языке геометрических преобразований или, иначе говоря, сведения данной задачи к такой задаче, которая сформулирована в терминах преобразований. Тем самым задача сводится чаще всего либо к отысканию образа фигуры, либо к отысканию образа точки. Приведем примеры и упражнения, предназначенные для овладения этим важным умением.

***Пример* 1.** а) Чтобы доказать, что отрезок AB равен отрезку CD, достаточно установить, что при некотором движении отрезок AB отображается на отрезок CD (свойство движений, § 7).

б) Чтобы доказать, что угол между прямыми a и b равен φ, где $0° < \varphi \le 90°$, достаточно показать, что при некотором повороте на угол φ или на угол 180°–φ прямая a отображается на прямую b. В частности, чтобы доказать, что прямые a и b взаимно перпендикулярны, достаточно установить, что при повороте на угол 90° или –90° прямая a отображается на прямую b (пример 4 в § 3).

в) Чтобы доказать, что треугольник ABC правильный, достаточно установить, что при повороте вокруг некоторой точки O на угол 120° (или –120°) треугольник ABC отображается на себя.

Действительно, пусть при повороте $R_O^{120°}$ $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Тогда отрезок AB переходит в отрезок BC, а отрезок BC – в отрезок CA и, следовательно, $AB=BC=CA$, т.е. треугольник ABC – правильный. Так как по определению поворота $OA=OB=OC$, то точка O – его центр.

г) Чтобы доказать, что точка пересечения прямых a и b принадлежит прямой c, достаточно показать, что при осевой симметрии с осью c прямая a отображается на прямую b (пример 4 в § 8).

д) Чтобы доказать, что линии L_1, L_2, L_3, … пересекаются в одной точке, достаточно установить, что они являются образами некоторых линий L'_1, L'_2, L'_3, …, пересекающихся в одной точке (определение образа фигуры).

Упражнения

180°. Переформулируйте следующие требования (задания) на языке геометрических преобразований или сведите указанные требования к таким заданиям, которые сформулированы в терминах преобразований (после каждого задания в скобках указано то преобразование, которое желательно использовать):

а) доказать, что угол ABC равен углу $A_1B_1C_1$ (движение);

б) доказать, что треугольник ABC равен треугольнику $A_1B_1C_1$ (движение);

в) доказать, что отрезок AB равен и параллелен отрезку CD (перенос, центральная симметрия);

г) доказать, что угол AOB равен данному углу φ (поворот);

д) доказать, что отрезок AB проходит через точку O и делится ею пополам (центральная симметрия);

е) доказать, что отрезок AB перпендикулярен прямой a и делится ею пополам (осевая симметрия);

ж) доказать, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм, а данная точка O – его центр (центральная симметрия);

з) доказать, что четырехугольник $ABCD$ – квадрат, а данная точка O – его центр (поворот).

Разумеется, перечень подобных примеров может быть продолжен.

Приведем примеры задач, в процессе решения которых осуществляется переформулирование цели в плане геометрических преобразований.

***Пример* 2.** Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. На сторонах AB и CD вне параллелограмма построены правильные треугольники ABM и CDP; точки O_1 и O_2 – их центры. Точки O_3 и O_4 – центры окружностей, описанных около треугольников O_1CD и O_2AB. Докажем, что четырехугольник $O_1O_3O_2O_4$ – параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O.

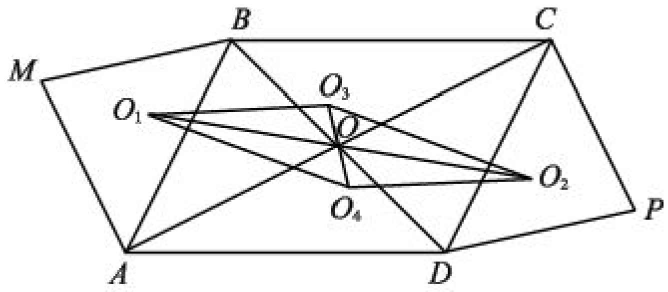


Рис. 29

Опишем вначале поиск решения; он происходит обычно скрытно, в умственном плане, и почти не находит отражения в чистовом решении.

Чтобы доказать, что $O_1O_3O_2O_4$ – параллелограмм (рис. 29), достаточно установить, что при центральной симметрии Z_O $O_1 \to O_2$ и $O_3 \to O_4$ (переформулирование цели задачи). В свою очередь, чтобы доказать, что $O_1 \to O_2$, достаточно установить, что треугольник *ABM* переходит в треугольник *CDP* (упр. 137); для этого достаточно показать, что $AB \to CD$ и полуплоскость, содержащая треугольник *ABM*, переходит в полуплоскость, содержащую треугольник *CDP* (упр. 136). Далее, чтобы доказать, что $O_3 \to O_4$, достаточно установить, что треугольник O_1CD переходит в треугольник O_2AB (упр. 137); для этого достаточно найти образы точек O_1, *C* и *D*.

Решение. При центральной симметрии Z_O $A \to C$ и $B \to D$, а полуплоскость, содержащая треугольник *ABM*, переходит в полуплоскость, содержащую треугольник *CDP* (поскольку полуплоскость, определяемая прямой *AB* и точкой *O*, переходит в полуплоскость, определяемую прямой *CD* и точкой *O*). Отсюда следует (упр. 136), что $M \to P$, и поэтому $O_1 \to O_2$ (упр. 137).

Далее, при центральной симметрии Z_O $C \to A$ и $D \to B$, $O_1 \to O_2$, следовательно, треугольник O_1CD переходит в треугольник O_2AB и поэтому $O_3 \to O_4$ (упр. 137).

Окончательно получаем: $O_1 \to O_2$, $O_3 \to O_4$, следовательно, отрезки O_1O_2 и O_3O_4 делятся точкой *O* пополам и поэтому $O_1O_3O_2O_4$ – параллелограмм, а точка *O* – его центр (см. прием 8.2.4).

***Пример* 3.** Даны квадрат $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C, D проведены прямые a_1, a_2, a_3, a_4 перпендикулярные прямым MD, MA, MB и MC соответственно. Докажем, что прямые a_1, a_2, a_3, a_4 пересекаются в одной точке.

Поиск решения. Чтобы доказать, что прямые a_1, a_2, a_3, a_4, пересекаются в одной точке, достаточно установить, что они являются образами (при некотором движении) прямых, пересекающихся в одной точке. Такими прямыми являются, по-видимому, прямые MD, MA, MB, MC, а искомым движением – поворот вокруг центра квадрата на угол 90° (рис. 30).

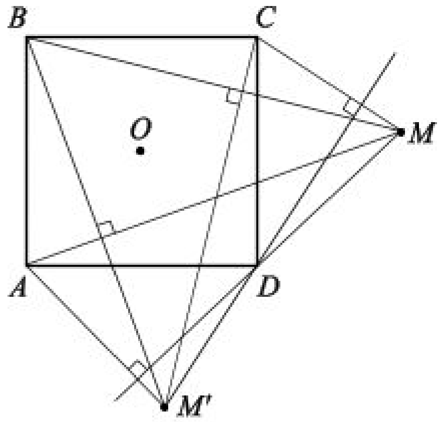


Рис. 30

Решение. При повороте $R_O^{90^\circ}$ $D \to A$, следовательно, прямая DM переходит в перпендикулярную ей прямую, проходящую через точку A, т. е. в прямую a_1.

Аналогично устанавливается, что при указанном повороте прямые AM, BM, CM переходят соответственно в прямые a_2, a_3, a_4.

Отсюда следует, что образ точки M – точка M' – принадлежит прямым a_1, a_2, a_3, a_4, что и требовалось доказать (см. прием 8.2.16.).

***Пример* 4.** На окружностях ω_1 (O_1; R) и ω_2 (O_2; R), касающихся в точке C, взяты точки A и B соответственно, такие, что $\cdot ACB=90^\circ$. Докажем, что $AB=2R$.

Поиск решения. Чтобы доказать, что $AB=2R$, достаточно установить, что при переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ $A \to B$. Точка A есть точка пересечения окружности ω_1 и прямой CA (обозначим ее через a_1).

Поэтому, чтобы найти образ точки A, достаточно найти образы окружности ω_1 и прямой a_1, а для этого, в свою очередь, достаточно найти образы точек O_1 и C (рис. 31).

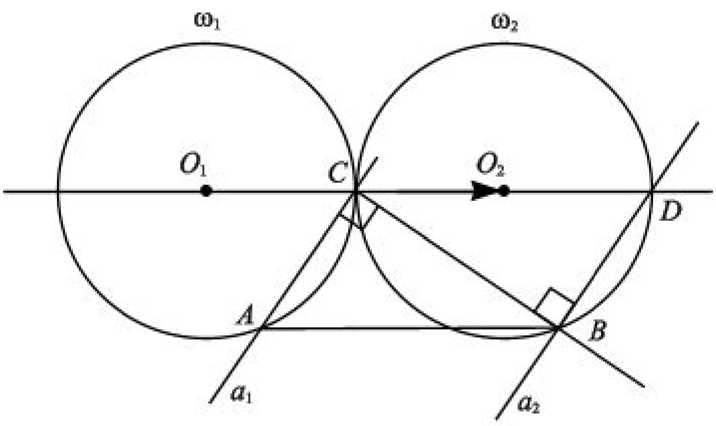


Рис. 31

Решение. Обозначим через D вторую точку пересечения прямой O_1O_2 и окружности ω_2. Так как $\angle CBD$=90°, то $a_2 \parallel a_1$, где a_2 – прямая BD.

При переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$ $O_1 \to O_2$, поэтому $\omega_1 \to \omega_2$.Так как $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{O_1O_2}$, то $C \to D$. Следовательно, прямая a_1, проходящая через точку C, переходит в параллельную ей прямую, проходящую через точку D, т.е. $a_1 \to a_2$. Т.к. $a_1 \to a_2$, $\omega_1 \to \omega_2$, то точки пересечения a_1 и ω_1 переходят в точки пересечения a_2 и ω_2. Но $C \to D$, а значит, $A \to B$. Следовательно, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O_1O_2}$ и поэтому AB=2R, что и требовалось доказать (см. прием 8. 2.9.2).

Пример 5. Докажем, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей равнобочной трапеции и точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

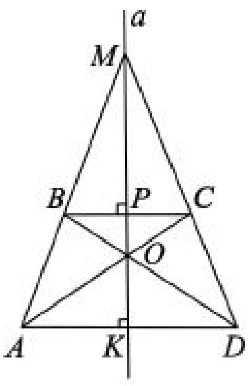


Рис. 32

Решение. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон AB и CD – в точке M (рис. 32). Проведем через точку M прямую a, перпендикулярную AD (а значит, перпендикулярную и BC). Так как треугольники AMD и BMC –

равнобедренные, то эта прямая делит основания трапеции пополам (рис. 32). Остается доказать, что точка пересечения диагоналей принадлежит прямой a.

При осевой симметрии с осью a $A \to D$, $C \to B$, поэтому диагональ AC переходит в DB, а DB – в AC. Следовательно, точка пересечения AC и DB переходит в точку пересечения DB и AC, т.е. $O \to O$. Таким образом, точка O является инвариантной и, следовательно, принадлежит прямой a, что и требовалось доказать (см. прием 8.2.6).

***Пример* 6.** На сторонах AC и BC треугольника ABC построены вне треугольника квадраты $AMHC$ и $BPKC$. Точки O_1 и O_2 – центры этих квадратов, а точка O – середина AB. Докажем, что отрезки OO_1 и OO_2 равны и перпендикулярны.

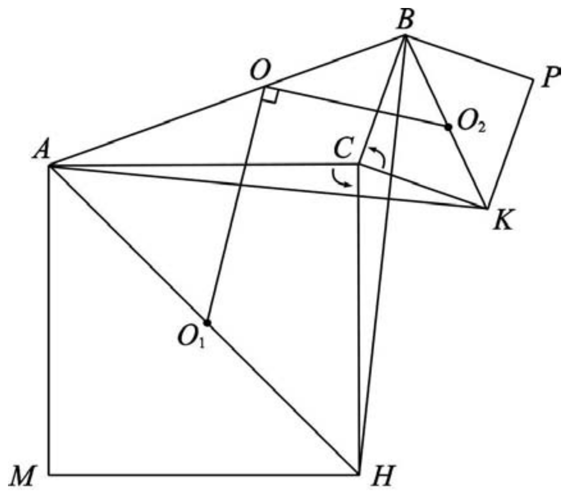


Рис. 33

Решение. Заметим, что отрезок OO_1 параллелен отрезку BH и равен его половине, а отрезок OO_2 параллелен отрезку AK и равен его половине. Поэтому достаточно доказать, что отрезки BH и AK равны и перпендикулярны (рис. 33).

Рассмотрим поворот $R_C^{90°}$. При этом $A \to H$, $K \to B$, $AK \to HB$ и поэтому отрезки AK и BH равны и перпендикулярны, откуда и следует требуемое (см. приемы 8.2.1 и 8.2.2).

Некоторые из приведенных ниже задач можно решить не только при помощи движений, но и используя традиционные геометрические методы, например равенство треугольников. Рекомендуем читателю там, где это возможно, рассмотреть и сравнить оба подхода.

181. Дан параллелограмм $ABCD$. Точки O_1 и O_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ACD. Доказать, что отрезок O_1O_2 проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и делится этой точкой пополам.

182. Доказать, что хорды, отсекаемые на данном круге прямыми, равноудаленными от его центра, равны.

183. Доказать, что две хорды окружности, образующие равные углы с ее диаметром в одной точке, равны.

184. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ построены вне квадрата правильные треугольники с центрами O_1 и O_2 соответственно. Доказать, что отрезки O_1C и O_2D равны и перпендикулярны.

185. На сторонах AB и BC правильного треугольника ABC построены вне треугольника квадраты $ABMN$ и $BCPK$. Точки B_1 и C_1 делят стороны AC и BA в отношении 2:1. Доказать, что отрезки MB_1 и PC_1 равны и пересекаются под углом 60°.

186. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке O. Точки M, P, K – середины отрезков AO, BO, CO. Через точки M, P, K проведены прямые, параллельные соответственно прямым BC, AC, AB. Эти прямые, пересекаясь, образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

187. На сторонах AB и CD параллелограмма $ABCD$ построены вне параллелограмма правильные треугольники с центрами O_1 и O_2, а на сторонах BC и AD построены, также вне параллелограмма, квадраты с центрами O_3 и O_4. Доказать, что отрезки O_1O_3 и O_2O_4 равны и параллельны.

188. Доказать, что если противоположные стороны шестиугольника, описанного около окружности, параллельны, то они попарно равны.

189. Окружность, центр которой лежит на биссектрисе угла, пересекает одну сторону угла в точках A и B, а другую – в точках C и D. Доказать, что: а) $AB=CD$; б) отрезок, соединяющий середины хорд AB и CD, перпендикулярен биссектрисе угла и делится ею пополам.

190. В равные окружности с центрами O и O_1 вписаны трапеции, основания которых лежат на прямых a и b, параллельных прямой OO_1. Доказать, что отрезок, соединяющий точки пересечения диагоналей этих трапеций, равен и параллелен отрезку OO_1.

191. Две равные окружности касаются в точке О. Прямые a, b, c, проходящие через точку O, пересекают одну из этих окружностей в точках A, B, C соответственно, а другую – в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Доказать, что: а) отрезки AB и A_1B_1 равны и параллельны; б) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны; в) отрезок, соединяющий ортоцентры этих треугольников, проходит через точку O и делится ею пополам.

192. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB=AC$). Окружность с центром на биссектрисе угла A пересекает стороны AB и AC в точках M, K и M_1, K_1 соответственно, а прямую BC – в точках P и P_1. Доказать, что: а) углы MPK и $M_1P_1K_1$ равны; б) отрезок, соединяющий центры окружностей, вписанных в треугольники MPK и $M_1P_1K_1$, перпендикулярен биссектрисе угла A и делится ею пополам.

193. Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем точка B лежит между A и C. Правильные треугольники ABM и BCN расположены в одной полуплоскости относительно прямой AC. Точки P и K делят отрезки AN и MC соответственно в отношении 1:2. Доказать, что: а) $AN=MC$; б) прямые AN и MC пересекаются под углом в 60°; в) $\angle PBK = 60°$.

194. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Точки H_1, H_2, H_3 – ортоцентры треугольников AB_1C_1, BA_1C_1, CB_1A_1, а точки O_1, O_2, O_3 – центры окружностей, вписанных в эти треугольники соответственно. Доказать, что: а) $H_2H_3 = O_2O_3 = \frac{1}{2}BC$; б) треугольники $H_1H_2H_3$ и $O_1O_2O_3$ равны.

195. Окружности ω_1 $(O; R)$ и ω_2 $(O; R')$ разделены на n равных частей точками $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно, так, что каждая из точек B_i принадлежит лучу OA_i. Доказать, что каждый из углов между прямыми A_1B_k и A_2B_{k+1}, где $k=2, 3, \ldots, n-1$, равен $\frac{\pi}{3}$, если $n=3$, и $\frac{2\pi}{n}$, если $n \geq 4$.

196. На боковых сторонах равнобочной трапеции $ABCD$ построены вне трапеции правильные треугольники ABM и CDP с центрами O_1 и O_2. Доказать, что: а) отрезки AP и DM равны и пересекаются в точке, принадлежащей прямой, соединяющей середины оснований трапеции; б) отрезок O_1O_2 параллелен основаниям трапеции.

197. Прямая c содержит биссектрису угла, образованного лучами a и b. Прямые $c_1, c_2, \ldots, c_n$, перпендикулярные прямой c, пересекают луч a в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$, а луч

b – в точках $B_1, B_2, \ldots, B_n$ соответственно. Доказать, что все точки $A_iB_j \cap A_jB_i$ $(i \neq j)$ принадлежат прямой c.

198. Окружность пересекает две концентрические окружности: одну – в точках A и B, другую – в точках C и D. Доказать, что хорды AB и CD параллельны и $AC = BD$, $AD = BC$.

199. Даны равносторонние треугольники ABC и AB_1C_1, в которых ориентированные углы BAC и B_1AC_1 равны по $+60°$. Доказать, что: а) отрезки BB_1 и CC_1 равны; б) угол между прямыми BB_1 и CC_1 равен $60°$.

200. В остроугольном треугольнике ABC с углом A, равным $45°$, на высоте BB_1 взята точка O так, что $B_1O = B_1C$. Доказать, что точка O – ортоцентр треугольника ABC.

201. Две равные окружности, расположенные вне угла с вершиной O, касаются сторон этого угла в точках A и B, таких, что $OA = OB$. Точка M диаметрально противоположна точке A, а точка P – точке B. Доказать, что четырехугольник $ABPM$ – трапеция.

202. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Доказать, что их точки пересечения со сторонами квадрата являются вершинами квадрата.

203. На сторонах квадрата построены правильные треугольники вне квадрата. Доказать, что их центры являются вершинами квадрата.

204. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ построены вне квадрата правильные треугольники с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 соответственно. Точки H_1, H_2, H_3, H_4 – ортоцентры треугольников AO_1C, BO_2D, CO_3A, DO_4B соответственно. Доказать, что $H_1H_2H_3H_4$ – квадрат, центр которого совпадает с центром квадрата $ABCD$.

205. На сторонах правильного треугольника построены квадраты вне треугольника. Доказать, что их центры являются вершинами правильного треугольника.

206. Точки M, N, P делят стороны AB, BC, CA правильного треугольника ABC в отношении 1:2 соответственно. Отрезки AN, BP, CM, пересекаясь, образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ – правильный, а его центр совпадает с центром треугольника ABC.

207. Точки M и N делят стороны AD и CB параллелограмма $ABCD$ в отношении 1:2, а точки P и L делят в таком же отношении отрезки BM и DN. Лучи AP, BM, CL, DN, пересекаясь, образуют четырехугольник $PKLQ$. Доказать, что $PKLQ$ – параллелограмм, центр которого совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

208. Даны параллелограмм $ABCD$ и точка M. Через точки A, B, C, D проведены прямые, параллельные прямым MC, MD, MA, MB соответственно. Доказать, что эти прямые пересекаются в одной точке.

§ 16. Применение движений к решению задач на построение

Если в процессе решения задачи на построение используется какое-либо преобразование плоскости, то говорят, что задача решена методом геометрических преобразований. Охарактеризуем наиболее употребительные приемы, которые в своей совокупности составляют упомянутый метод.

16.1. Сближение элементов искомой фигуры

Этот прием используется в задачах на построение многоугольников и состоит в следующем. В процессе анализа отдельные линейные элементы искомой фигуры подвергаются какому-либо преобразованию (чаще всего – параллельному переносу) с целью получить такой вспомогательный треугольник, который можно было бы построить, и, располагая которым, можно построить искомую фигуру.

***Пример* 1.** Построим трапецию, зная ее основания, одну из боковых сторон и угол между продолжениями боковых сторон.

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция: $AD=a$, $BC=b$, $CD=c$, $\cdot AOD=\varphi$ (рис. 34).

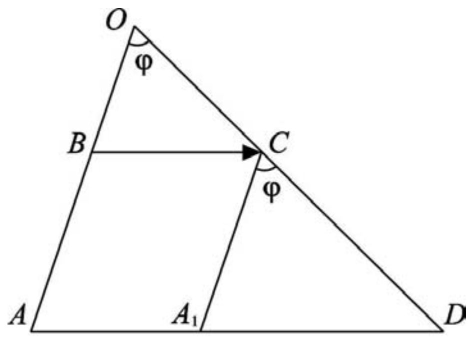


Рис. 34

При переносе на вектор $\overrightarrow{BC}: B \to C, A \to A_1$ и $AB \to A_1C$, причем $A_1 \in AD$, $A_1C \parallel AB$, $AA_1=BC$ и, стало быть, в треугольнике A_1CD: $A_1D = a–b$, $\cdot A_1CD=\varphi$, $CD=c$. По этим данным треугольник A_1CD можно построить. Располагая треугольником A_1CD, можно легко построить и искомую трапецию.

План построения. Строим треугольник A_1CD по указанным выше данным; на луче DA_1 откладываем отрезок $DA=a$; строим точку B.

Доказательство и исследование предоставляем читателю.

***Пример* 2.** Построим трапецию, зная сумму ее оснований, диагонали и одну из боковых сторон.

Анализ. Пусть $ABCD$ – искомая трапеция: $AD+BC=p$, $AC=e$, $BD=f$, $CD=c$ (рис. 35).

Подвергнем переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$ диагональ $BD: B \to C, D \to D_1, BD \to CD_1$, причем $CD_1=BD$, $D_1 \in AD$, $DD_1=BC$.

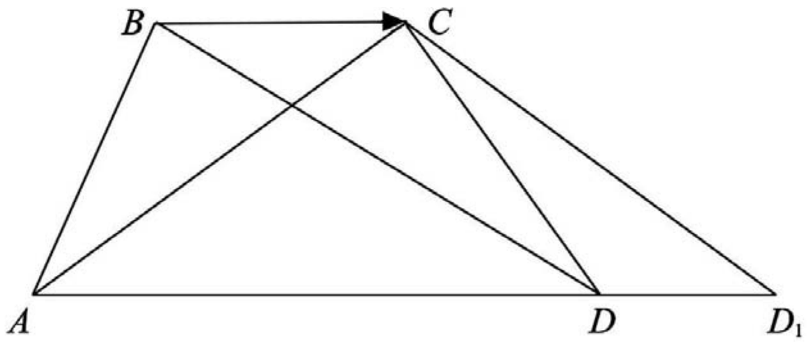


Рис. 35

В треугольнике ACD_1: $AD_1=p$, $AC=e$, $CD_1=f$. По этим данным треугольник ACD_1 можно построить; располагая этим треугольником, легко построить и искомую трапецию.

План построения. Строим треугольник ACD_1 по указанным выше данным; строим точку D – точку пересечения отрезка AD_1 и окружности ω (C; c); строим точку B.

Доказательство и исследование предоставляем читателю.

Как видно из этих примеров, в зависимости от специфики задачи «сближать» приходится различные линейные элементы искомой фигуры.

Упражнения

209. Построить трапецию, зная все ее стороны.
210. Построить трапецию, зная ее основания и углы при большем основании.
211. Построить трапецию, зная разность ее оснований, высоту, угол между продолжениями боковых сторон и одну из диагоналей.

212. Построить трапецию, зная разность ее оснований, боковые стороны и одну из диагоналей.

213. Построить трапецию, зная разность ее оснований, высоту, одну из боковых сторон и одну из диагоналей.

214. Построить трапецию, зная ее диагонали, угол между ними и одну из боковых сторон.

215. Построить трапецию, зная ее основания и диагонали.

216. Построить трапецию, зная сумму ее оснований, угол между диагоналями, высоту и одну из боковых сторон.

217. Построить трапецию, зная сумму ее оснований, угол между диагоналями, одну из диагоналей и одну из боковых сторон.

218. Построить трапецию, зная ее диагонали, угол между ними и одно из оснований.

219. Построить четырехугольник ABCD, зная все его стороны и угол между продолжениями сторон AB и CD.

220. Построить четырехугольник *ABCD*, зная стороны *AB*, *BC*, *CD*, диагональ *BD* (диагональ *AC*) и угол между продолжениями сторон *AB* и *CD*.

221. Построить четырехугольник *ABCD*, зная стороны *AB*, *BC*, *CD*, угол *A* и угол между продолжениями сторон *AD* и *BC*.

222. Построить четырехугольник *ABCD*, зная стороны *AB*, *CD*, диагональ *AC*, угол между продолжениями сторон *AB* и *CD* и угол между диагоналями, обращенный к стороне *CD*.

223. Построить четырехугольник *ABCD*, зная все его стороны так, чтобы диагональ *AC* была биссектрисой угла *A*.

16.2. Построение точки пересечения фигуры и образа фигуры

Этот прием используется в тех задачах, где требуется построить точки X и Y, принадлежащие соответственно известным фигурам (линиям) Φ_1 и Φ_2. Сущность данного приема состоит в следующем:

– подбирают преобразование f, при котором точка X переходит в точку Y;

– подвергают этому преобразованию фигуру Φ_1 и доказывают, что точка Y (вторая искомая точка) принадлежит пересечению второй известной фигуры Φ_2 и образа Φ_1' первой фигуры; тем самым выявляется способ построения точки Y;

– в процессе построения точка X получается из точки Y применением преобразования f^{-1}.

***Пример* 3.** Построим отрезок XY, концы которого принадлежат данной прямой a и данной окружности ω (соответственно) так, чтобы этот отрезок был перпендикулярен другой данной прямой b и делился ею пополам.

Анализ. Допустим, что искомый отрезок XY построен (рис. 36).

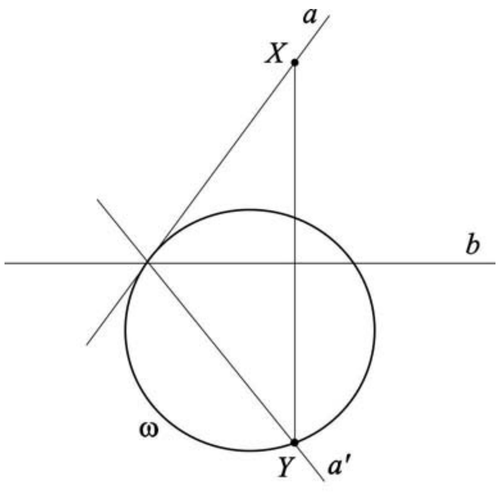


Рис. 36

Рассмотрим осевую симметрию S_b (т.к. именно при этом преобразовании точка X переходит в точку Y). При этом: $X \to Y, a \to a'$, следовательно, $Y \in a' \cap \omega$ (1); здесь a – первая известная фигура Φ_1, а ω – вторая. Соотношение (1) позволяет построить точку Y. Имея точку Y, легко построить точку X: $X=S_b(Y)$.

План построения. Строим последовательно: $a' = S_b(a)$, $Y \in a' \cap \omega$, $X = S_b(Y)$. Отрезок XY – искомый.

Доказательство. Из построения непосредственно вытекает, что отрезок XY перпендикулярен прямой b и делится ею пополам. $Y \in \omega$ по построению. Докажем, что $X \in a$. Действительно, при осевой симметрии S_b: $a' \to a, Y \to X$, значит, $X \in a$ (т.к. $Y \in a'$).

Исследование. Задача может иметь 0, 1 или 2 решения в зависимости от числа тех общих точек прямой a' и окружности ω, которые не принадлежат прямой b. На рис. 36 показан случай одного решения; на рис. 37-а имеем два решения; на рис. 37-б решений нет.

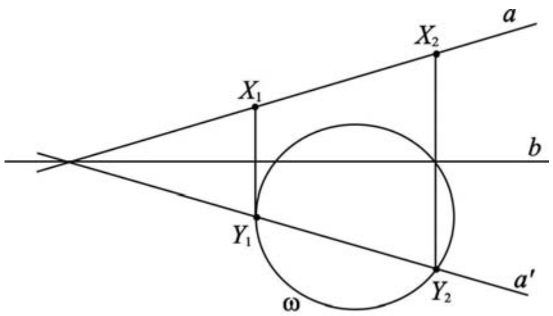


Рис. 37-а

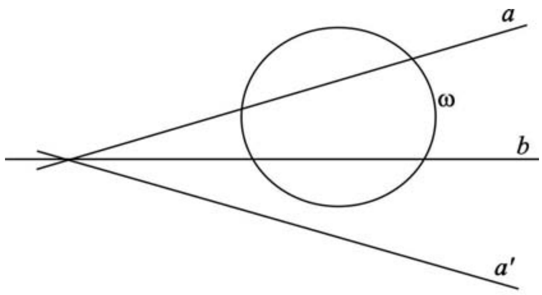


Рис. 37-б

Упражнения

224. Построить отрезок XY, равный и параллельный данному отрезку AB, так, чтобы его концы X и Y принадлежали соответственно данным прямым a и b (данным окружностям ω_1 и ω_2).

225. Построить отрезок XY, который делится данной точкой O пополам, так, чтобы его концы X и Y принадлежали соответственно данным прямым a и b (данным окружностям ω_1 и ω_2).

226. Построить равнобедренный треугольник, так, чтобы вершина его прямого угла совпадала с данной точкой C, а вершины острых углов принадлежали соответственно данной прямой a и данной окружности ω.

227. Построить квадрат, одна диагональ которого принадлежит данной прямой a, а концы другой диагонали принадлежат соответственно данным окружностям ω_1 и ω_2 (данным прямым b и c).

228. Даны точка O и окружности ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Построить параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O, а вершины A, B, C, D принадлежат соответственно окружностям ω_1, ω_2, ω_3, ω_4.

229. В данный четырехугольник $ABCD$ вписать равносторонний треугольник, одна из вершин которого совпадает с данной точкой M на стороне AB.

230. Даны две концентрические окружности и точка A, принадлежащая меньшей окружности. Провести через точку A такую прямую, на которой эти окружности высекают равные хорды.

16.3. Пополнение множества известных точек

Этот прием используется в тех задачах, где искомая фигура изначально задается некоторыми точками A, B, C, …, которых, на первый взгляд, недостаточно, чтобы построить эту фигуру. В подобных случаях подбирают такое преобразование, при котором прямая, содержащая известную точку A и некоторый линейный элемент искомой фигуры, отображается на прямую, содержащую другую известную точку B и другой линейный элемент искомой фигуры. При этом точка A переходит в некоторую точку A', которая пополняет набор данных точек A, B, C, …, что и позволяет начать построение искомой фигуры.

***Пример* 4.** Построим квадрат $ABCD$, если известны его центр O и точки M и P, принадлежащие прямым AB и BC соответственно.

Анализ. Допустим, что искомый квадрат $ABCD$ построен (рис. 38). Здесь прямые AB и BC содержат, с одной стороны, линейные элементы – стороны AB и BC – искомого квадрата, а с другой стороны – известные точки M и P. Преобразованием, переводящим AB в BC, является поворот $R_O^{-90°}$. Итак, при повороте $R_O^{-90°}$ прямая AB переходит в прямую BC, а точка M – в точку M', принадлежащую прямой BC. Это дает возможность построить прямую BC (по точкам P и M'). Располагая последней, легко построить искомый квадрат.

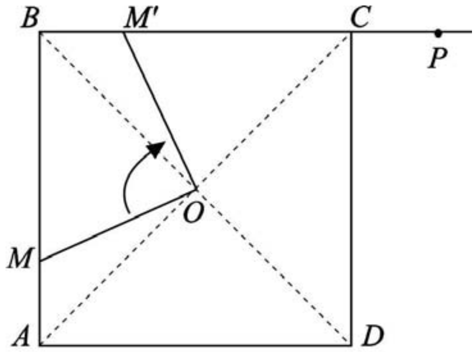


Рис. 38

План построения. Строим последовательно: $M' = R_O^{-90°}(M)$; прямую $M'P$; образы прямой $M'P$ при поворотах $R_O^{-90°}$, $R_O^{90°}$, $R_O^{180°}$; точки A, B, C, D и, наконец, искомый квадрат.

Доказательство и исследование предоставляем читателю.

Упражнения

231. Построить квадрат $ABCD$, если известны его центр O и точки M и P, принадлежащие прямым AB и CD соответственно.

232. Построить равносторонний треугольник ABC, если известны его центр O и точки M и P, принадлежащие прямым AB и BC соответственно.

233. Построить параллелограмм $ABCD$, если известны его центр O и точки M, N, P, K, принадлежащие прямым AB, BC, CD и DA соответственно.

234. Построить равнобедренный треугольник ABC , если известны его высота h, проведенная к основанию BC, прямая a, содержащая эту высоту, и точки M и P, принадлежащие прямым AB и AC соответственно.

235. Построить треугольник ABC, если известны прямая a, содержащая биссектрису угла A, прямая b, содержащая сторону BC, и точки M и K, принадлежащие прямым AB и AC соответственно.

236. Построить треугольник ABC, если известны прямые a и b, содержащие биссектрисы углов A и B, и точки M и P, принадлежащие прямым AB и AC соответственно.

16.4. Построение прообраза искомой фигуры

Этот прием состоит в следующем. Пусть требуется построить фигуру Φ, обладающую некоторыми свойствами α и β. Вначале строят вспомогательную фигуру Φ_1, обладающую свойством α. Затем подбирают преобразование f, при котором фигура Φ_1 переходит в искомую фигуру Φ. Это преобразование f должно быть таким, чтобы свойство α, присущее фигуре Φ_1, наследовалось фигурой Φ, а свойство β приобреталось ею. Наличие множества Γ таких преобразований f, сохраняющих свойство α, и служит предпосылкой для применения указанного способа.

***Пример* 5.** Построим правильный треугольник, вершины которого принадлежат данным параллельным прямым a, b и c, а центр принадлежит данной окружности ω.

Анализ. Искомый треугольник ABC должен обладать двумя свойствами: α) треугольник ABC – правильный, и вершины A, B, C принадлежат прямым a, b, c соответственно; β) центр O треугольника принадлежит окружности ω (рис. 39). При любом переносе, вектор которого параллелен данным прямым, свойство α сохраняется. Поэтому прообраз искомого треугольника – треугольник $A_1B_1C_1$ – ищем среди правильных треугольников с вершинами на прямых a, b, c. Одну из вершин этого треугольника можно выбрать произвольно на соответствующей прямой (например, A_1 на прямой a), тогда построение двух других вершин осуществляется путем отыскания пересечения фигуры и образа фигуры (см. п. 16.2): строим $b' = R_{A_1}^{60^\circ}(b)$; находим точку $C_1 \in c \cap b'$; строим точку $B_1 = R_{A_1}^{-60^\circ}(C_1)$.

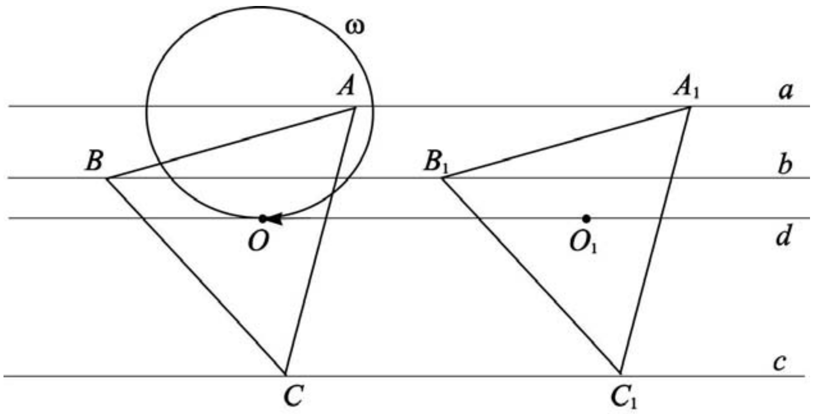


Рис. 39

Заметим, что для данной точки A_1 существует еще один вспомогательный треугольник $A_1B_2C_2$; он получается путем изменения направления обоих поворотов в приведенном выше построении.

Располагая треугольником $A_1B_1C_1$, подберем параллельный перенос, при котором вспомогательный треугольник переходит в искомый. Для этого достаточно через центр треугольника $A_1B_1C_1$ – точку O_1 – провести прямую d, параллельную a. Пусть $O \in d \cap \omega$. Тогда перенос на вектор $\overrightarrow{O_1O}$ и является искомым.

План построения. Фиксируем на прямой a точку A_1; строим правильный треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы $B_1 \in b$, $C_1 \in c$; находим точку O ($O \in d \cap \omega$, где $d \parallel a$); строим треугольник ABC – образ треугольника $A_1B_1C_1$ при переносе на вектор $\overrightarrow{O_1O}$; треугольник ABC – искомый.

Доказательство очевидно.

Исследование. Как было отмечено выше, для данной точки A_1 существуют два вспомогательных треугольника: $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ (последний на рис. 39 не показан). Легко видеть, что эти треугольники симметричны относительно прямой, проходящей через точку A_1 и перпендикулярной прямой a. Поэтому их центры O_1 и O_2 лежат на одной прямой d. Исходя из этого, приходим к следующим выводам.

Если $d \cap \omega = \varnothing$, то задача решений не имеет.

Если $d \cap \omega = \{O\}$, то получаем два решения: $\Delta\, ABC$, $\Delta\, A'B'C'$ – образы треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$ при переносах на векторы $\overrightarrow{O_1O}$ и $\overrightarrow{O_2O}$.

Если $d \cap \omega = \{O, O'\}$, то задача имеет четыре решения: образы треугольника $A_1B_1C_1$ при переносах на векторы $\overrightarrow{O_1O}$ и $\overrightarrow{O_1O'}$ и образы треугольника $A_1B_2C_2$ при переносах на векторы $\overrightarrow{O_2O}$ и $\overrightarrow{O_2O'}$.

Упражнения

<u>237</u>. Построить правильный треугольник, вершины которого принадлежат данным параллельным прямым a, b и c, так, чтобы прямая, содержащая вершины, принадлежащие прямым a и b, проходила через данную точку M.

<u>238</u>. Построить правильный треугольник со стороной, равной данному отрезку p, так, чтобы две вершины треугольника принадлежали данным параллельным прямым a и b, а третья вершина принадлежала данной прямой c, пересекающей прямые a и b.

239. Прямая d пересекает параллельные прямые a, b, c. Построить равнобедренный прямоугольный треугольник ABC так, чтобы вершина прямого угла C принадлежала прямой c, вершины A и B – прямым a и b, а точка пересечения биссектрис – прямой d.

240. Построить правильный треугольник, одна вершина которого совпадает с центром данной окружности, другая – принадлежит данной прямой, а центроид принадлежит этой окружности.

241. В данную окружность вписать равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным 45°, так, чтобы прямая, содержащая основание треугольника, проходила через данную точку M.

242. Даны две концентрические окружности и пересекающая их прямая. Построить правильный треугольник со стороной, равной данному отрезку p, так, чтобы вершины этого треугольника принадлежали данным окружностям и прямой (по одной на каждой).

16.5. Прием спрямления в задачах на оптимизацию

Указанный прием используется в задачах, где требуется построить ломаную, обладающую неким экстремальным свойством (например, найти ломаную наименьшей длины). Из числа преобразований в этих задачах чаще всего применяется осевая симметрия (иногда в сочетании с параллельным переносом), а основная идея состоит в таком «распрямлении» искомой ломаной, которое позволило бы ответить на вопрос задачи.

***Пример* 6.** Внутри данного острого угла дана точка A. На сторонах a и b данного угла найдем такие точки X и Y, чтобы периметр треугольника AXY был наименьшим.

Анализ. Пусть X и Y – произвольно взятые точки на сторонах a и b (рис. 40). Построим точки $A_1=S_a(A)$ и $A_2=S_b(A)$. Ясно, что периметр треугольника AXY равен длине ломаной A_1XYA_2. Последняя будет иметь наименьшую длину тогда и только тогда, когда ломаная A_1XYA_2 является отрезком. Отсюда вытекает следующее построение.

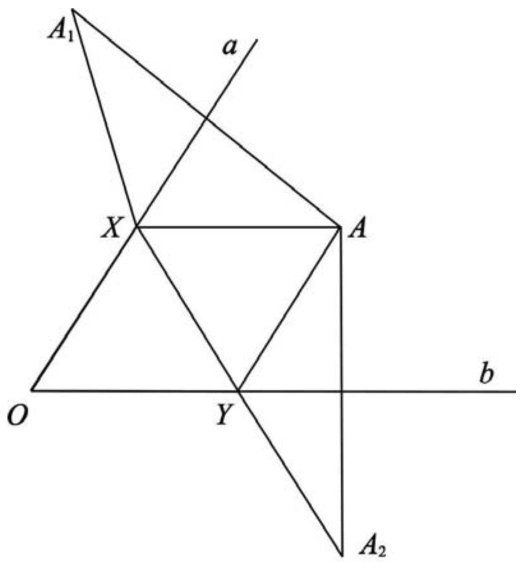


Рис. 40

Строим указанным выше образом точки A_1 и A_2 и находим искомые точки: $X = A_1A_2 \cap a$ и

$$Y = A_1A_2 \cap b.$$

Доказательство очевидно.

Исследование. Заметим, что угол A_1OA_2 меньше развернутого, а лучи a и b лежат внутри угла A_1OA_2, так что задача имеет единственное решение при любом расположении точки A внутри данного угла.

Упражнения

243. Точки A и B расположены по одну сторону от прямой a. Найти на этой прямой такую точку X, чтобы длина ломаной AXB была наименьшей.

244. Точки A и B расположены по одну сторону от прямой a. Построить на прямой a такой отрезок XY, равный данному отрезку p, чтобы длина ломаной $AXYB$ была наименьшей.

245. Точки A и B расположены по разные стороны от полосы, ограниченной параллельными прямыми a и b. На прямых a и b построить такие точки X и Y, чтобы отрезок XY был перпендикулярен прямым a и b, а длина ломаной $AXYB$ была наименьшей.

246. Точка M принадлежит стороне AB квадрата $ABCD$. На остальных сторонах квадрата найти по одной точке так, чтобы периметр образовавшегося при этом выпуклого четырехугольника был наименьшим.

247. Точка O лежит внутри треугольника ABC. На сторонах AB, BC, CA найти точки X, Y, Z соответственно, так, чтобы длина ломаной $OXYZO$ была наименьшей.

248. Точки A и B расположены по разные стороны от прямой a. Найти на прямой a такую точку X, чтобы модуль разности $AX–BX$ имел наибольшее значение.

§ 17. Применение движений к построению графиков

Результаты, полученные в §§ 2 – 3, позволяют обосновать те элементарные приемы, которые используются при построении графиков функций и уравнений и известны читателю из школьного курса математики.

Представим себе, что нам известен график функции $y = f(x)$ – некая линия Φ. Найдем образ этой линии при параллельном переносе на вектор $\vec{p}(0;b)$. Для этого поступим в соответствии с координатным способом отыскания образа фигуры (см. п. 5.3. в «Сводке»):

– составляем формулы переноса: $x' = x$, $y' = y+b$;

– выражаем переменные x и y через x' и y': $x = x'$, $y = y' - b$;

– подставляем полученные выражения в уравнение $y=f(x)$ и находим тем самым уравнение искомого образа Φ': $y'=f(x')+b$ или, в привычных обозначениях, $y = f(x)+b$.

Таким образом, приходим к следующему правилу.

1°. График функции $y = f(x)+b$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи параллельного переноса на вектор $\vec{p}(0;b)$.

Иначе говоря, график функции $y = f(x)+b$ получается путем переноса графика $y=f(x)$ вдоль оси Oy на $|b|$ единиц в сторону положительных y, если $b>0$, и в сторону отрицательных y, если $b<0$.

Предлагаем читателю, используя координатный способ отыскания образа фигуры, обосновать приведенные ниже правила (приемы) 2°, 3°, 4°, 5°.

2°. График функции $y=f(x-a)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи параллельного переноса на вектор $\vec{p}(a;0)$.

Иначе, график функции $y=f(x-a)$ получается путем переноса графика функции $y=f(x)$ вдоль оси Ox на $|a|$ единиц в сторону положительных x, если $a>0$, и в сторону отрицательных x, если $a<0$.

3°. График уравнения $F(x-a, y-b)=0$ получается из графика уравнения $F(x; y)=0$ при помощи параллельного переноса на вектор $\vec{p}(a;b)$.

Заметим, что перенос на вектор $\vec{p}(a;b)$ является композицией переноса на вектор $\overrightarrow{p_1}(a;0)$ и переноса на вектор $\overrightarrow{p_2}(0;b)$.

Добавим, что на практике вместо переноса графика вдоль оси Ox (оси Oy) нередко осуществляют перенос оси Oy (оси Ox) на нужное число единиц в направлении, противоположном направлению исходного переноса.

4°. График функции $y=-f(x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи осевой симметрии с осью Ox.

Иначе, график функции $y=-f(x)$ получается путем отражения графика функции $y=f(x)$ относительно оси Ox.

5°. График функции $y=f(-x)$ получается из графика функции $y=f(x)$ при помощи осевой симметрии с осью Oy.

Иначе, график функции $y=f(-x)$ получается путем отражения графика функции $y=f(x)$ относительно оси Oy.

Упражнения

249. Используя правила 1° – 5°, построить графики следующих уравнений:

а) $y=1+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; б) $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-1$;

в) $y=-\log_2(-x)$; г) $y=-\sqrt{2-x}$;

д) $4\cdot(x-1)^2+9\cdot(y+1)^2=36$; е) $9x^2-4y^2+36x+8y-4=0$;

ж) $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$; з) $y^2-x+2y+4=0$;

и) $y=1-\dfrac{4}{x-2}$; к) $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

250. Доказать, что парабола $y=ax^2+bx+c$ является образом параболы $y=ax^2$ при некотором параллельном переносе.

251. Доказать, что график любой дробно-линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $ad-bc\neq 0$, является образом некоторой гиперболы $y=\dfrac{k}{x}$ при некотором параллельном переносе.

252. Доказать, что если в уравнении некоторой линии переменная x содержится только в четной степени, то эта линия симметрична относительно оси Oy.

253. Доказать, что если в уравнении некоторой линии переменная y содержится только в четной степени, то эта линия симметрична относительно оси Ox.

254. Доказать, что если в уравнении некоторой линии переменные x и y содержатся только в четных степенях, то эта линия симметрична относительно начала координат.

255. Используя формулы осевой симметрии, доказать, что график четной функции симметричен относительно оси Oy.

256. Используя формулы центральной симметрии, доказать, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

257. Доказать, что прямая $x=x_0$ является осью симметрии кривой, заданной уравнением $F(x, y)+F(2x_0-x, y)=0$.

258. Доказать, что прямая $y=y_0$ является осью симметрии кривой, заданной уравнением $F(x, y)+F(x, 2y_0-y)=0$.

259. Доказать, что график функции $y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{6-x}\right)$ имеет ось симметрии, параллельную оси Oy.

260. Доказать, что кривая $2x^3+y^3+(2-y)^3-4=0$ имеет ось симметрии, параллельную оси Ox.

§ 18. Исследование композиции движений

Задачи на отыскание композиции движений рассматривались в § 4. Напомним некоторые из полученных там результатов.

1. $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$;

2. $R_O^{\beta} \circ R_O^{\alpha} = R_O^{\alpha+\beta}$;

3. $Z_B \circ Z_A = T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} = 2 \cdot \overrightarrow{AB}$;

4. $T_{\vec{p}} \circ Z_O = Z_{O_1}$, где точка O_1 определяется равенством $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}\vec{p}$;

5. $Z_O \circ T_{\vec{p}} = Z_{O_1}$, где точка O_1 определяется равенством $\overrightarrow{OO_1} = -\frac{1}{2}\vec{p}$.

В данном параграфе рассматриваются задачи, в которых, наряду с указанными соотношениями и изученными ранее приемами, используются теоремы о композиции симметрий и теоремы о разложении движений в композицию осевых симметрий (см. ниже примеры 1 – 4).

***Пример* 1.** Докажем, что композиция двух осевых симметрий, оси которых пересекаются в точке O, есть поворот вокруг точки O.

Решение. Обозначим $S_b \circ S_a = f$, где $a \cap b = O$. Так как S_a и S_b – движения второго рода, то f – движение первого рода, т.е. либо f – поворот, либо – перенос. Легко видеть, что f имеет инвариантную точку (точка O), но не является тождественным преобразованием. Следовательно, f – поворот вокруг точки O на некоторый угол α.

Примечание. Докажем, что $\alpha = 2\varphi$, где φ – ориентированный угол от прямой a до прямой b. Действительно, пусть $M \neq O$, $S_a(M)=M_1$, $S_b(M_1)=M'$ (рис. 41).

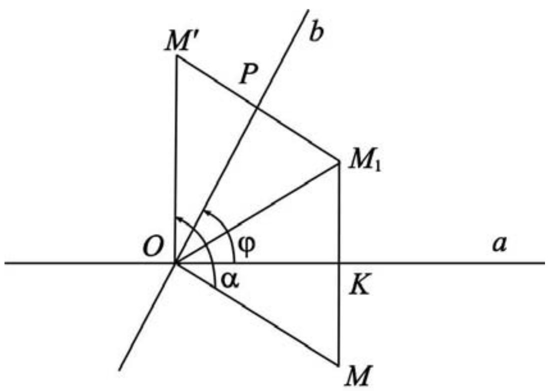


Рис. 41

Имеем:

$$\alpha = \angle MOM' = \angle MOM_1 + \angle M_1OM' = 2 \cdot \angle KOM_1 + 2 \cdot \angle M_1OP = 2\varphi$$

(здесь все углы – ориентированные).

***Пример* 2.** Докажем, что всякий поворот R_O^α можно представить в виде композиции двух осевых симметрий с пересекающимися осями.

Решение. Проведем через точку O прямые a и b, ориентированный угол между которыми равен $\frac{\alpha}{2}$ (рис. 41). По доказанному выше композиция осевых симметрий S_a и S_b есть поворот вокруг точки O на угол α, т.е. $S_b \circ S_a = R_O^\alpha$, что и требовалось доказать.

***Пример* 3.** Докажем, что композиция двух осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

Решение. Введем на плоскости декартову систему координат, направив ось Ox по прямой a (рис. 42). Прямая b в этой системе задается уравнением $y–y_0=0$. Пусть $M(x;y) \xrightarrow{S_a} M_1(x_1;y_1)$, тогда $x_1=x$, $y_1= - y$ (1). Далее, $M_1(x_1;y_1) \xrightarrow{S_b} M'(x';y')$, поэтому $\overrightarrow{MM_1'} \cdot \vec{i} = 0$ и середина отрезка M_1M' принадлежит прямой b, т.е. $x'–x_1=0$, $\frac{y'+y_1}{2} = y_0$, откуда $x'=x_1$, $y'=2y_0–y_1$ (2). Из (1) и (2) получаем искомые формулы: $x'=x$, $y'= y+2y_0$. Как видим, композиция $S_b \circ S_a$ есть перенос на вектор $\vec{p}(0;2y_0)$.

Примечание. Докажем, что $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB}$, где A и B – точки пересечения осей a и b с прямой, перпендикулярной этим осям.

Действительно, $\vec{p} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M'} = 2\overrightarrow{PM_1} + 2\overrightarrow{M_1K} = 2\overrightarrow{PK} = 2\overrightarrow{AB}$.

***Пример* 4.** Докажем, что всякий параллельный перенос можно представить в виде композиции осевых симметрий с параллельными осями.

Решение. Пусть $\overrightarrow{MM'} = \vec{p}$. Выберем на отрезке MM' точки P и K так, чтобы $\overrightarrow{PK} = \frac{1}{2}\vec{p}$ (рис. 42). Проведем через эти точки прямые a и b, перпендикулярные MM'. Тогда по доказанному выше $S_b \circ S_a = T_{\vec{p}}$, что и требовалось доказать.

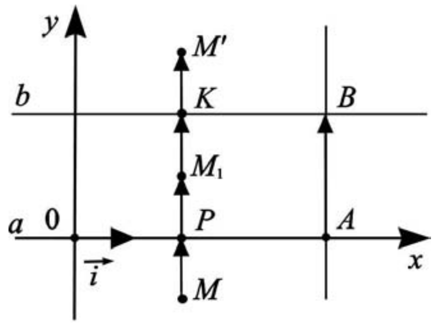


Рис. 42

Рассмотренные примеры делают очевидным следующий вывод: всякое движение плоскости можно представить в виде композиции не более трех осевых симметрий.

***Пример* 5.** Исследуем композицию осевой симметрии S_c и переноса $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} \neq 0$.

Решение. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат, направив ось Ox по прямой c. Составим формулы композиции $T_{\vec{p}} \circ S_c$ в этой системе координат.

Пусть $M(x;y) \xrightarrow{S_c} M_1(x_1;y_1)$, тогда $x_1=x$, $y_1=-y$ (1).

Пусть, далее, $\vec{p}(a;b)$ и $M_1(x_1;y_1) \xrightarrow{T_{\vec{p}}} M'(x';y')$, тогда $x'=x_1+a$, $y'=y_1+b$ (2). Из (1) и (2) получаем искомые формулы: $x'=x+a$, $y'=-y+b$ (3).

Композиция $f = T_{\vec{p}} \circ S_c$ есть движение второго рода, т.е. либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия (в зависимости от наличия инвариантных точек; см. табл. 1).

Инвариантные точки ищем из системы: $\begin{cases} x = x + a \\ y = -y + b \end{cases}$.

Отсюда заключаем, что если a=0 (т.е. $\vec{p} \perp c$), то имеем прямую инвариантных точек: $y = \frac{b}{2}$. В этом случае f есть осевая симметрия. Ее осью является прямая, параллельная оси c и проходящая через середину отрезка OP, где $O \in c$ и $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$.

Если $a \neq 0$ (т.е. вектор $\vec{p}$ не перпендикулярен оси c), то инвариантных точек нет и f – скользящая симметрия.

Найдем ось d и вектор $\vec{q}$ скользящей симметрии f.

Имеем: $O(0;0) \xrightarrow{f} O'(a;b)$, $P(1;0) \xrightarrow{f} P'(1+a;b)$.

Середины отрезков OO' и PP' – точки $O_1\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ и $P_1\left(\frac{a}{2}+1;\frac{b}{2}\right)$ – принадлежат, как известно, искомой оси (упр. 88). Как легко видеть, она задается уравнением $y = \frac{b}{2}$, т.е. параллельна прямой c и проходит через середину отрезка OO', где $O \in c$ и $\overrightarrow{OO'} = \vec{p}$.

Далее, возьмем на найденной оси произвольную точку, например $C\left(0;\frac{b}{2}\right)$. Ясно, что вектор $\overrightarrow{CC'}$ и есть искомый вектор $\vec{q}$. Так как $C\left(0;\frac{b}{2}\right) \xrightarrow{f} C'\left(a;\frac{b}{2}\right)$, то $\vec{q}(a;0)$.

Примечание. Исследуя аналогичным образом композицию $S_c \circ T_{\vec{p}}$, приходим к следующим выводам:

а) если $\vec{p} \perp c$, то $S_c \circ T_{\vec{p}}$ есть осевая симметрия с осью d; при этом ось d проходит через середину отрезка OP, где $O \in c$ и $\overrightarrow{OP} = -\vec{p}$;

б) если вектор $\vec{p}$ не перпендикулярен оси c, то $S_c \circ T_{\vec{p}}$ есть скользящая симметрия, определяемая осью d и вектором $\vec{q}$.

Предлагаем читателю выяснить, как построить ось d и вектор $\vec{q}$ в случае (б).

Пример 6. Исследуем композицию двух поворотов R_A^{α} и R_B^{β}, где

$A \neq B$.

Решение. Пусть для определенности 0°<α<360°, 0°<β<360°. Представим данные повороты в виде композиции осевых симметрий: $R_A^\alpha = S_b \circ S_a$, $R_B^\beta = S_c \circ S_b$, где в качестве прямой b выбрана прямая AB; угол от прямой a до прямой b равен $\frac{\alpha}{2}$, а угол от прямой b до прямой c равен $\frac{\beta}{2}$ (рис. 43).

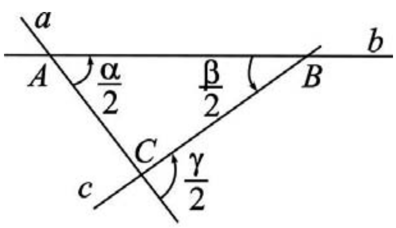


Рис. 43-а

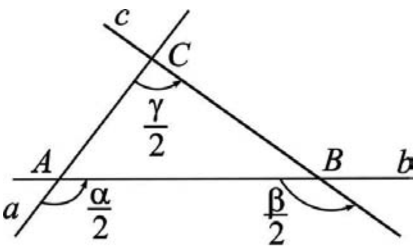


Рис. 43-б

Получаем:

$$R_B^\beta \circ R_A^\alpha = (S_c \circ S_b) \circ (S_b \circ S_c) = S_c \circ (S_b \circ S_b) \circ S_a = S_c \circ e \circ S_a = S_c \circ S_a.$$

Отсюда заключаем, что если $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 180°$, т.е. α+$\beta$=360°, то $a \| c$ и, следовательно, искомая композиция есть параллельный перенос.

Если же α+β≠360°, то оси a и c пересекаются в точке C и искомая композиция есть поворот на угол γ, вдвое больший угла от прямой a до прямой c. Нетрудно убедиться, что если α+β<360° (т.е. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180°$), то γ=α+β (рис. 43-а). Если же α+β>360° (т.е. $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} > 180°$), то γ=(α+β)– 360° (рис. 43-б). В любом случае искомая композиция $R_B^\beta \circ R_A^\alpha$ есть поворот $R_C^{\alpha+\beta}$.

***Пример* 7.** Исследуем композицию $R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}}$, где поворот R_O^α отличен от тождественного преобразования и $\vec{p} \neq 0$.

Решение. Представим поворот R_O^α в виде композиции осевых симметрий: $R_O^\alpha = S_b \circ S_a$, причем ось a выберем перпендикулярной вектору $\vec{p}$ (рис. 44).

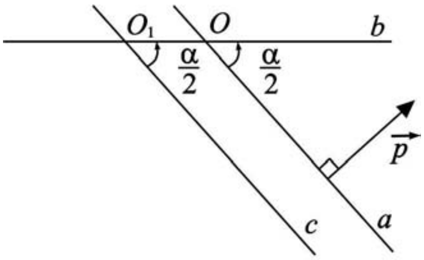


Рис. 44

Получаем:

$$R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}} = (S_b \circ S_a) \circ T_{\vec{p}} = S_b \circ (S_a \circ T_{\vec{p}}).$$

Композиция $S_a \circ T_{\vec{p}}$ есть осевая симметрия S_c (см. примечание к примеру 5), причем $c \| a$. Поэтому $c \cap b = O_1$ и угол от прямой c до прямой b равен $\dfrac{\alpha}{2}$. Следовательно, $R_O^\alpha \circ T_{\vec{p}} = S_b \circ S_c = R_{O_1}^\alpha$, что и требовалось доказать.

Подводя итоги, отметим, что в последних двух примерах была применена идея разложения движения в композицию осевых симметрий, оси которых выбирались подходящим образом (см. п. 2.11. в «Сводке»).

Упражнения

261. Доказать, что композиция $Z_A \circ Z_C \circ Z_B \circ Z_A$ есть параллельный перенос. Указать вектор этого переноса.

262. Точки O_1, O_2, O_3, O_4 – середины сторон AB, BC, CD, DA четырехугольника $ABCD$. Доказать, что композиция $Z_{O_4} \circ Z_{O_3} \circ Z_{O_2} \circ Z_{O_1}$ есть тождественное преобразование.

263. Доказать, что композиция четного числа центральных симметрий есть параллельный перенос. Указать вектор этого переноса.

264. Доказать, что композиция нечетного числа центральных

симметрий есть центральная симметрия. Охарактеризовать ее центр.

265. Прямые a и b проходят через вершины A и B параллелограмма $ABCD$ и перпендикулярны AB. Доказать, что композиция $Z_D \circ Z_C \circ S_b \circ S_a$ есть тождественное преобразование.

266. Дан параллелограмм $ABCD$. S_1, S_2, S_3, S_4 – осевые симметрии с осями AD, AB, BC, CD соответственно. Исследовать композицию $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$.

267. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. S_1, S_2, S_3, S_4 – осевые симметрии, осями которых являются прямые, содержащие биссектрисы углов A, B, C, D соответственно. Доказать, что композиция $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$ есть тождественное преобразование.

268. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. S_1, S_2, S_3, S_4 – осевые симметрии, осями которых служат прямые AB, BC, CD, DA соответственно. Доказать, что композиция $S_4 \circ S_3 \circ S_2 \circ S_1$ есть параллельный перенос.

269. Доказать, что если оси осевых симметрий S_a, S_b, S_c параллельны или проходят через одну точку, то композиция $S_c \circ S_b \circ S_a$ есть осевая симметрия.

270. Доказать, что композиция $T_{\bar{p}} \circ R_O^{\alpha}$, где $0° < \alpha < 360°$, есть поворот.

271. Доказать, что каждая из композиций $S_a \circ Z_O$ и $Z_O \circ S_a$, где $O \in a$, есть осевая симметрия, ось которой проходит через точку O и перпендикулярна оси a.

272. Исследовать композицию $S_a \circ R_O^{\alpha}$ ($0° < \alpha < 360°$).

273. Доказать, что композиция трех осевых симметрий, оси

которых не параллельны и не проходят через одну точку, есть скользящая симметрия.

274. Доказать, что композиция двух скользящих симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос.

275. Доказать, что композиция двух скользящих симметрий с перпендикулярными осями есть центральная симметрия.

276. Доказать, что композиция двух скользящих симметрий с пересекающимися осями есть поворот.

§ 19. Разные задачи

277. Три равные окружности $\omega_1(O_1; R)$, $\omega_2(O_2; R)$, $\omega_3(O_3; R)$ попарно касаются друг друга: ω_1 и ω_2 – в точке A; ω_2 и ω_3 – в точке B; ω_3 и ω_1 – в точке C. Точка M принадлежит окружности ω_1; точка M_1 симметрична точке M относительно A; M_2 симметрична точке M_1 относительно B; M_3 симметрична точке M_2 относительно C. Доказать, что точки M и M_3 симметричны относительно точки O_1.

278. Доказать, что ограниченная фигура не может иметь более одного центра симметрии.

Примечание. Фигура на плоскости называется ограниченной, если она содержится целиком в некотором круге (или прямоугольнике).

279. Двое игроков поочередно выкладывают на прямоугольный лист бумаги монеты одинакового диаметра. Мо-

нету можно класть только на свободное место листа. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Доказать, что первый игрок всегда может выиграть.

280. Даны два отрезка – AB и A_1B_1. При повороте вокруг точки C $A \to A_1$, $B \to B_1$, а при повороте вокруг точки D $A \to B_1$, $B \to A_1$. Доказать, что прямая CD делит пополам отрезок, соединяющий середины отрезков AB и A_1B_1.

281. Две равные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Точка M_1 принадлежит окружности ω_1, а прямая M_1B пересекает окружность ω_2 в точке M_2. При повороте R_A^α окружность ω_1 отображается на окружность ω_2. Доказать, что при этом $M_1 \to M_2$.

282. На плоскости даны точка A и окружность ω, причем $A \notin \omega$. Найти множество (геометрическое место) третьих вершин правильных треугольников, у которых первая вершина совпадает с точкой A, а вторая – принадлежит окружности ω.

283. Внутри прямоугольника $ABCD$ взята точка M. Доказать, что существует четырехугольник с перпендикулярными диагоналями, равными отрезкам AB и BC, и сторонами, равными отрезкам MA, MB, MC и MD.

284. На общем перпендикуляре AB параллельных прямых a и b взяты точки M и P так, что $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PB}$. На прямой a взята точка K, а на прямой b – точка N так, что $\cdot KMN=90°$. Доказать, что $\cdot KPN=90°$.

285. Вершины выпуклого четырехугольника лежат на сторонах прямоугольника (по одной на каждой стороне).

Доказать, что периметр этого четырехугольника не меньше суммы длин диагоналей прямоугольника.

286. Найти угол между пересекающимися осями a и b осевых симметрий S_a и S_b, если известно, что $S_a \circ S_b \circ S_a = S_b \circ S_a \circ S_b$.

287. Доказать, что точки, симметричные ортоцентру треугольника ABC относительно прямых AB, BC и CA, принадлежат окружности, описанной около треугольника ABC.

288. Точка H – ортоцентр треугольника ABC. Доказать, что окружности, описанные около треугольников ABH, BCH, CAH и ABC, равны.

ГЛАВА III. Преобразования подобия

§ 20. Гомотетия

Напомним **определение**. Пусть даны точка O и число $k \neq 0$. Гомотетией с центром O и коэффициентом k называется отображение плоскости в себя, при котором всякая точка M переходит в такую точку M', что $\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$.

Обозначается: H_O^k.

Упражнения

289°. 1. При гомотетии $H_O^{\frac{5}{3}}$ точка A переходит в точку B. Что отсюда следует? В каком отношении точка A делит отрезок OB?

2. При гомотетии $H_O^{-\frac{5}{3}}$ точка A переходит в точку B. Что отсюда следует? В каком отношении точка O делит отрезок AB?

290. Даны точка O и неравные отрезки m и n. Построить образ данной точки M при гомотетии H_O^k, если:

а) $k = \dfrac{m}{n}$; б) $k = -\dfrac{m}{n}$.

291°. Основания BC и AD трапеции $ABCD$ относятся как 3:5. Диагонали трапеции пересекаются в точке O, а продолжения боковых сторон – в точке S. Найти:

а) коэффициент k такой гомотетии H_S^k, при которой $B \to A, C \to D$;

б) коэффициент k такой гомотетии H_O^k, при которой $B \to D, C \to A$.

292°. Точка C лежит между точками A и B, $AC = a$, $CB = b$. Найти такое число k, чтобы:

а) при гомотетии H_C^k $B \to A$;

б) при гомотетии H_A^k $C \to B$;

в) при гомотетии H_B^k $A \to C$.

293°. Даны точки A и B. Построить такую точку O, чтобы:

а) при гомотетии H_O^2 $A \to B$;

б) при гомотетии $H_O^{-\frac{1}{2}}$ $A \to B$.

<u>294</u>. Даны треугольник ABC и точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 такие, что $(AB; C_1) = (BC; A_1) = (CA; B_1) = \frac{m}{n}$, $(A_1B_1; C_2) = (B_1C_1; A_2) = (C_1A_1; B_2) = \frac{n}{m}$.

Доказать, что при некоторой гомотетии H_M^k, где M – центроид треугольника ABC, точки A, B, C переходят в точки A_2, B_2, C_2 соответственно. Найти коэффициент k этой гомотетии.

Указание. Т.к. M – центроид треугольника ABC, то $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

<u>295</u>. Точка M – центроид четырехугольника $ABCD$, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 – центроиды треугольников BCD, ACD, ABD, ABC соответственно. Доказать, что при некоторой гомотетии H_M^k точки A, B, C, D переходят в точки A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Найти коэффициент k этой гомотетии.

Указание. Т. к. M – центроид четырехугольника $ABCD$, то $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

296. При гомотетии H_S^{-3}, где S (1; 2), точка A, принадлежащая прямой $2x+y+1 = 0$, переходит в точку B, принадлежащую прямой $x+y+6 = 0$. Найти точки A и B.

297. При гомотетии H_S^k, где S (2; 1), точка A (1; 0) переходит в точку B, принадлежащую прямой $x+y-7 = 0$. Найти коэффициент k и точку B.

Напомним читателю некоторые свойства гомотетии, которые рассматривались в первой главе.

а) Гомотетия H_O^1 есть тождественное преобразование e; гомотетия H_O^{-1} есть центральная симметрия (упр. 68).

б) Если при гомотетии H_O^k $A \to A_1, B \to B_1$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = k\cdot\overrightarrow{AB}$ (упр. 69).

в) Гомотетия с центром в точке S (x_0; y_0) и коэффициентом, равным k, задается формулами $x' = kx+x_0-kx_0$, $y' = ky+y_0-ky_0$. В частности, если центр гомотетии – начало координат, то $x' = kx$, $y' = ky$ (упр. 70).

г) Гомотетия является преобразованием плоскости (упр. 71).

д) При гомотетии H_O^k, где $k\neq1$, всякая прямая, проходящая через центр O, отображается на себя, а прямая, не проходящая через центр O, переходит в параллельную ей прямую (упр. 79).

е) $H_O^{k_2}\circ H_O^{k_1} = H_O^{k_1\cdot k_2}$; $(H_O^k)^{-1} = H_O^{\frac{1}{k}}$ (упр. 83, 100).

Упражнения

298. Доказать, что преобразование, заданное в аффинном репере формулами $\begin{cases} x' = 3x+4 \\ y' = 3y-2 \end{cases}$, является гомотетией. Указать ее центр и коэффициент.

299*. Доказать, что всякое преобразование, заданное в аффинном репере формулами $\begin{cases} x' = kx + a \\ y' = ky + b \end{cases}$, где $k \neq 0$, $k \neq 1$, является гомотетией. Определить ее центр и коэффициент.

300. При гомотетии H_S^2 прямая $x+y+2 = 0$ отображается на прямую $x+y-5 = 0$. Найти точку S, если известно, что она принадлежит прямой $x-y-1 = 0$. Составить формулы этой гомотетии.

301*. Используя координатный способ отыскания образа фигуры, доказать, что при гомотетии H_O^k всякая окружность $\omega(C;\ R)$ переходит в окружность $\omega'\ (C',\ R')$, где C' – образ центра C, а $R' = |k|\cdot R$.

302. Составить формулы гомотетии с коэффициентом, равным –2, при которой окружность $x^2+y^2-2x-4y-5 = 0$ отображается на окружность ω' с центром $C_1(-5;-4)$. Составить уравнение окружности ω'.

303. Составить формулы гомотетии, при которой окружность $x^2+y^2- -2x+2y-2 = 0$ отображается на окружность $x^2+y^2-14x-10y+58 = 0$.

304*. Доказать следующие соотношения:

а) $T_{\vec{p}} \circ H_A^k = H_B^k$, где точка B определяется условием $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{1-k} \cdot \vec{p}\,(k \neq 1)$;

б) $H_A^k \circ T_{\vec{p}} = H_B^k$, где точка B определяется условием $\overrightarrow{AB} = \dfrac{k}{1-k} \cdot \vec{p}\,(k \neq 1)$.

305*. Доказать, что если $k_1 \cdot k_2 \neq$ □ 1, то $H_B^{k_2} \circ H_A^{k_1} = H_C^{k_1 \cdot k_2}$, где точка C определяется условием $\overrightarrow{AC} = \dfrac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot \overrightarrow{AB}$.

306*. Доказать, что если $k_1 \cdot k_2 = 1$, то композиция $H_B^{k_2} \circ H_A^{k_1}$ есть параллельный перенос. Определить вектор этого переноса.

307°. Охарактеризовать следующие композиции:

а) $T_{\vec{p}} \circ H_A^2$; б) $H_A^2 \circ T_{\vec{p}}$;

в) $H_B^3 \circ H_A^{\frac{1}{2}}$; г) $H_B^{-2} \circ H_A^{-\frac{1}{2}}$.

Рассмотрим дальнейшие свойства гомотетии

1°. При гомотетии коллинеарные точки переходят в коллинеарные точки.

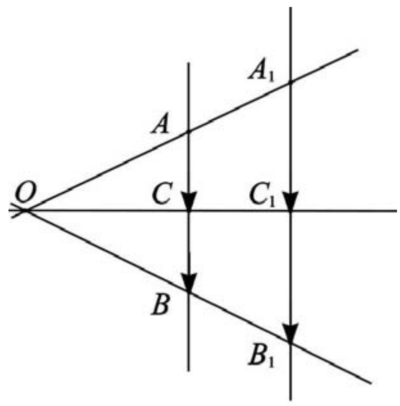


Рис. 45

Доказательство. Пусть при гомотетии H_O^k точки A, B, C переходят в точки A_1, B_1, C_1, тогда по основному свойству гомотетии $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A_1C_1} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ (рис. 45).

Так как точки A, B, C коллинеарны, то существует такое число λ, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{AB}$. Умножая обе части этого равенства на k и учитывая предыдущие равенства, получаем $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{A_1B_1}$. Последнее означает, что точки A_1, B_1, C_1 коллинеарны, что и требовалось доказать.

2°. При гомотетии сохраняется простое отношение трех точек.

Доказательство. Пусть при гомотетии H_O^k коллинеарные точки A, B, C переходят соответственно в точки A_1, B_1, C_1 (рис. 45).

Обозначим $(AB, C) = \lambda$ и докажем, что $(A_1B_1, C_1) = \lambda$.

По определению простого отношения из равенства $(AB, C) = \lambda$ следует, что $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$ (1).

В силу основного свойства гомотетии

$\overrightarrow{A_1C_1} = k \cdot \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{C_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{CB}$ (2).

Умножая обе части равенства (1) на k и учитывая равенства (2), получаем $\overrightarrow{A_1C_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{C_1B_1}$.

Это и означает, что $(A_1B_1, C_1) = \lambda$, что требовалось доказать.

Перечислим те свойства гомотетии, которые являются логическими следствиями свойств 1° – 2° (см. §7, примечание к свойству 6°).

3°. При гомотетии неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные точки.

Следствие. При гомотетии аффинный репер переходит в аффинный репер.

4°. При гомотетии сохраняется отношение «лежать между» для любых трех точек прямой.

5°. При гомотетии прямая отображается на прямую, отрезок – на отрезок, луч – на луч, полуплоскость – на полуплоскость, угол – на угол.

Примечание. В последнем случае, как и при движениях, внутренняя область угла отображается на внутреннюю область угла.

6°. При гомотетии параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Упражнения

308*. Используя свойства 1° – 6°, докажите следующие утверждения:

а) если при гомотетии отрезок AB переходит в отрезок A_1B_1, то середина отрезка AB переходит в середину отрезка A_1B_1;

б) при гомотетии треугольник отображается на треугольник;

в) если при гомотетии треугольник ABC преобразуется в треугольник $A_1B_1C_1$, то медианы и центроид первого треугольника переходят в медианы и центроид второго треугольника;

г) при гомотетии параллелограмм отображается на параллелограмм.

Рассмотрим далее те свойства гомотетии, которые не вытекают из свойств 1° – 2°.

7°. Если при гомотетии H_O^k точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то $A_1B_1 = |k| \cdot AB$.

Это предложение очевидным образом вытекает из основного свойства гомотетии (см. упр. 69).

8°. При гомотетии угол переходит в равный ему угол.

Доказательство. Дан угол ABC (рис. 46). Пусть при гомотетии H_O^k точки A, B, C переходят в точки A_1, B_1, C_1 и, значит, угол ABC переходит в угол $A_1B_1C_1$. Обозначим: $\angle ABC = \varphi$, $\angle A_1B_1C_1 = \varphi_1$. Имеем:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} \qquad (1),$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\overrightarrow{B_1A_1} \cdot \overrightarrow{B_1C_1}}{\left|\overrightarrow{B_1A_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{B_1C_1}\right|} \qquad (2).$$

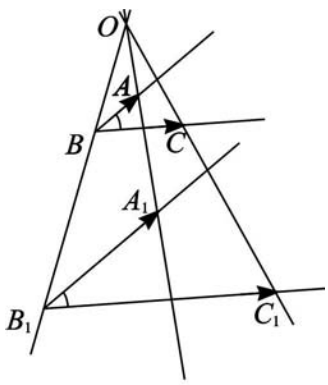


Рис. 46

По основному свойству гомотетии $\overrightarrow{B_1A_1} = k \cdot \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = k \cdot \overrightarrow{BC}$, следовательно,

$$\cos\varphi_1 = \frac{k^2 \cdot \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|k|^2 \cdot \left|\overrightarrow{BA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right|} = \cos\varphi .$$

Так как $\cos\varphi = \cos\varphi_1$ и φ, $\varphi_1 \in [0, \pi]$, то $\varphi = \varphi_1$ и, следовательно, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Следствие. При гомотетии перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые.

9°. При гомотетии окружность переходит в окружность (упр. 301).

10°. Если $k \neq 1$, то гомотетия H_O^k имеет единственную инвариантную точку.

Это свойство очевидным образом вытекает из определения гомотетии. Для доказательства можно воспользоваться также формулами гомотетии.

Упражнения

309*. Используя свойства 7° – 10°, докажите следующие утверждения:

а) при гомотетии сохраняется отношение отрезков;

б) если при гомотетии угол ABC переходит в угол $A_1B_1C_1$, то биссектриса угла ABC переходит в биссектрису угла $A_1B_1C_1$;

в) если при гомотетии окружность ω преобразуется в окружность ω', то касательная к окружности ω переходит в касательную к окружности ω'.

310*. В какие фигуры преобразуются при гомотетии: биссектрисы треугольника? высоты треугольника? серединные перпендикуляры к сторонам треугольника? окружность, вписанная в треугольник? окружность, описанная около треугольника? ортоцентр треугольника? центр вписанной окружности? центр описанной окружности?

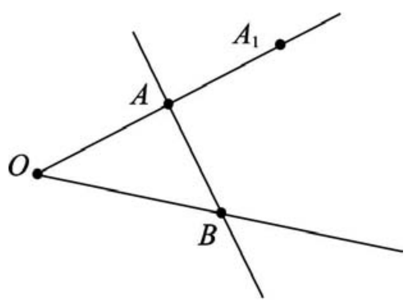


Рис. 47

311*. Даны коллинеарные точки O, A, A_1 и точка B, не принадлежащая прямой OA (рис. 47).

Известно, что при гомотетии H_O^k точка A переходит в точку A_1. Охарактеризуйте и постройте:

а) образ прямой AB;

б) образ прямой OB;

в) образ точки B.

312*. Даны коллинеарные точки O, A, A_1. Известно, что при некоторой гомотетии H_O^k $A \to A_1$. Построить образ произвольной точки M при этой гомотетии.

Рассмотреть два случая:

а) точки A и A_1 лежат по одну сторону от точки O;

б) точки A и A_1 лежат по разные стороны от точки O.

В каждом случае рассмотреть два варианта:

а) точка M не принадлежит прямой OA;

б) точка M принадлежит прямой OA.

Каков коэффициент гомотетии в каждом из этих случаев?

Примечание. Из рассмотренной задачи явствует, что гомотетия может быть задана своим центром и парой точек, одна из которых является образом другой при этой гомотетии. В таких случаях условимся говорить, что *гомотетия задана центром и парой соответствующих точек*.

313°. При гомотетии H_O^k точка A переходит в точку A_1. Построить образ треугольника ABC при этой гомотетии.

Рассмотреть два случая:

а) точки A и A_1 лежат по одну сторону от точки O;

б) точки A и A_1 лежат по разные стороны от точки O.

314°. Построить:

а) образ данного четырехугольника $ABCD$ при гомотетии $H_O^{-\frac{2}{3}}$;

б) образ данного треугольника ABC при гомотетии H_O^k, где $k = \dfrac{m}{n}$, а m, n – данные неравные отрезки.

315°. При гомотетии H_O^k точка C переходит в точку C_1. Построить образ данной окружности ω (C; R) при этой гомотетии.

316. Даны точка $S(-3;\ 0)$ и треугольник ABC, где $A(1;\ -1)$, $B(-2;\ 2)$, $C(0;\ -1)$. Составить формулы гомотетии с центром S, при которой треугольник ABC преобразуется в такой треугольник $A_1B_1C_1$, периметр которого вдвое больше периметра треугольника ABC. Найти вершины треугольника $A_1B_1C_1$.

317. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, где $A(1;\ 1)$, $B(-2;\ 2)$, $C(0;\ -1)$, $A_1(-2;\ -1)$, $B_1(7;\ -4)$, $C_1(1;\ 5)$.

а) Существует ли гомотетия, при которой $A \to A_1$, $B \to C_1$, $C \to B_1$?

б) Существует ли гомотетия, при которой $A \to B_1$, $B \to A_1$, $C \to C_1$?

в) Составить формулы гомотетии, при которой $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

Найти ее центр и коэффициент.

Пример. Даны точки A и B и произвольное число k, отличное от 0 и 1. Докажем, что существует единственная точка O, такая, что при гомотетии H_O^k точка A переходит в точку B.

Поиск решения. Допустим, что искомая точка O существует, тогда $\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. Выразим вектор $\overrightarrow{AO}$ через $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = -k \cdot \overrightarrow{AO}$, откуда $\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{1-k} \cdot \overrightarrow{AB}$ (1).

Итак, если искомая точка существует, то она задается условием (1).

Решение. Рассмотрим гомотетию H_O^k, где точка O определяется условием (1). Докажем, что при этой гомотетии $A \to B$. В самом деле из (1) получаем: $(k-1)\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, откуда $\overrightarrow{OB} = k\cdot\overrightarrow{OA}$.

Это означает, что $A \xrightarrow{H_O^k} B$, что и требовалось доказать.

Докажем единственность точки *O*. Допустим, что существует еще одна точка – точка *S*, такая, что при гомотетии H_S^k $A \to B$, тогда $\overrightarrow{SB} = k\cdot\overrightarrow{SA}$.

Отсюда получаем: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AS} = -k\cdot\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{AS} = \dfrac{1}{1-k}\cdot\overrightarrow{AB}$ (2).

Сравнивая (1) и (2), заключаем, что $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AO}$ и, следовательно, $S = 0$, что и требовалось доказать.

Примечание. Заметим, что поиск решения данной задачи был начат с предположения, что цель задачи достигнута («Допустим, что искомая точка *O* существует ...»). Далее, из этого допущения был сделан вывод $\left(\overrightarrow{AO} = \dfrac{1}{1-k}\cdot\overrightarrow{AB}\right)$, который послужил отправной точкой для решения.

Такой прием нередко используется на этапе поиска решения (см. прием несовершенного анализа в «Сводке»).

Упражнения

318°. Даны точки *A* и *B*. Построить такую точку *O*, чтобы при гомотетии H_O^k точка *A* переходила в точку *B*, если:

а) $k = -\dfrac{1}{2}$; б) $k = \dfrac{2}{3}$; в) $k = 5$.

Определение. Фигуры Φ и Φ' называются гомотетичными, если существует такая гомотетия, при которой первая фигура отображается на вторую.

В подобных случаях говорят также, что фигура Φ' гомотетична фигуре Φ.

Упражнения

319°. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC. Доказать, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

320°. Даны четырехугольник $ABCD$ и произвольная точка M. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 симметричны точке M относительно вершин A, B, C, D (соответственно). Доказать, что четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ гомотетичны.

321*. Даны неравные параллельные отрезки AB и CD. Доказать, что существует ровно две гомотетии, при которых отрезок AB отображается на отрезок CD. Каковы центры и коэффициенты этих гомотетий?

322*. Даны неравные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, соответствующие стороны которых параллельны ($AB \| A_1B_1$, $BC \| B_1C_1$, $CA \| C_1A_1$). Доказать, что эти треугольники гомотетичны.

323*. Доказать, что если центры неравных окружностей ω_1 и ω_2 различны, то существуют ровно две гомотетии, при которых первая окружность отображается на вторую.

324*. Доказать, что любые две окружности различных радиусов гомотетичны.

Рассмотреть два случая:

а) центры окружностей различны;

б) центры окружностей совпадают.

325*. Доказать, что если неравные окружности ω_1 и ω_2 имеют общие внешние (общие внутренние) касательные, то эти касательные пересекаются в центре той гомотетии, которая преобразует окружность ω_1 в окружность ω_2.

326*. Доказать, что если при гомотетии H_A^k, где $k \neq 1$, окружность ω_1 преобразуется в окружность ω_2 и AÎω_1, то окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке A.

327. При переносе $T_{\vec{p}}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Точки M, P, K – середины сторон B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Доказать, что треугольники ABC и MPK гомотетичны. Найти центр и коэффициент гомотетии, переводящей треугольник ABC в треугольник MPK.

328. A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, точка O – его ортоцентр, а точки A_2, B_2, C_2 – середины отрезков AO, BO, CO. Доказать, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны. Найти центр и коэффициент гомотетии, переводящей первый треугольник во второй.

§ 21. Преобразования подобия

Определение. Преобразование плоскости называется преобразованием подобия с коэффициентом k ($k > 0$), если для любых двух точек A и B и их образов A' и B' выполняется условие $A'B' = k \cdot AB$.

Говоря более вольным образом, преобразование подобия есть такое преобразование плоскости, при котором все расстояния изменяются в одном и том же отношении. Коэффициент k и характеризует как раз меру этого изменения[1].

Иногда преобразования подобия называют кратко подобиями.

Упражнения

[1] Совершенно аналогично определяется преобразование подобия в трехмерном пространстве.

329°. Как доказать, что некоторое преобразование плоскости является преобразованием подобия с коэффициентом k?

330*. Доказать, что гомотетия H_O^k является преобразованием подобия с коэффициентом, равным $|k|$.

331*. Как соотносятся понятия «движение» и «преобразование подобия»?

332. Преобразование f плоскости задано в ортонормированном репере формулами $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 1 \\ y' = 3x - 2y + 2 \end{cases}$. Доказать, что f – подобие. Найти его коэффициент.

333*. Преобразование плоскости задано в ортонормированном репере формулами $\begin{cases} x' = a_1 x + b_1 y + c_1 \\ y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \end{cases}$.

Доказать, что если $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$, $a_1^2 + a_2^2 = k^2$, $b_1^2 + b_2^2 = k^2$, где $k > 0$, то данное преобразование является подобием с коэффициентом, равным k. (Признак преобразования подобия).

Сравните данное утверждение с аналогичной теоремой для движений (упр. 113).

334°. Выполните упражнение 332, используя результат упражнения 333.

335*. а) Доказать, что композиция двух подобий есть подобие.

б) Доказать, что композиция гомотетии и движения (движения и гомотетии) есть подобие.

336*. Доказать, что преобразование, обратное подобию, есть подобие.

337. Преобразование f есть подобие с коэффициентом k. Доказать, что преобразование $f \circ H_O^{\frac{1}{k}}$ есть движение.

***Теорема 8.* Основная теорема о преобразованиях подобия**

Всякое преобразование подобия можно представить в виде композиции гомотетии и движения.

Доказательство. Пусть f – преобразование подобия с коэффициентом k. Рассмотрим композицию $\varphi = f \circ H_O^{\frac{1}{k}}$, где O – произвольная фиксированная точка. Легко установить, что φ – движение (см. упр. 337). Умножим обе части последнего равенства на H_O^k справа:

$$\varphi \circ H_O^k = \left(f \circ H_O^{\frac{1}{k}} \right) \circ H_O^k.$$

Преобразуя правую часть этого равенства, получаем:

$$\varphi \circ H_O^k = f \circ \left(H_O^{\frac{1}{k}} \circ H_O^k \right) = f \circ H_O^1 = f \circ e = f .$$

Итак, $f = \varphi \circ H_O^k$, где φ – движение, что требовалось доказать.

Упражнения

338°. Объясните, какие свойства преобразований используются в следующей цепочке равенств из приведенного выше доказательства:

$$\left(f \circ H_O^{\frac{1}{k}} \right) \circ H_O^k = f \circ \left(H_O^{\frac{1}{k}} \circ H_O^k \right) = f \circ H_O^1 = f \circ e = f .$$

339. Доказать, что всякое подобие с коэффициентом k можно представить в виде композиции движения и гомотетии H_O^k; при этом центр O может быть выбран произвольно.

340*. Используя основную теорему, докажите, что при любом преобразовании подобия:

а) коллинеарные точки переходят в коллинеарные точки;

б) сохраняется простое отношение трех точек;

в) неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные точки;

г) сохраняется отношение «лежать между» для трех точек прямой;

д) прямая переходит а прямую, отрезок – в отрезок, луч – в луч, полуплоскость – в полуплоскость, угол – в угол, треугольник – в треугольник;

е) параллельные прямые переходят в параллельные прямые;

ж) угол переходит в равный ему угол;

з) перпендикулярные прямые переходят в перпендикулярные прямые;

и) окружность радиуса R переходит в окружность радиуса $k \cdot R$, где k – коэффициент преобразования подобия.

341*. Используя определение и свойства подобий (упр. 340), докажите следующие утверждения:

а) преобразование подобия сохраняет отношение длин отрезков;

б) если преобразование подобия переводит угол ABC в угол $A_1B_1C_1$, то биссектриса угла ABC переходит при этом в биссектрису угла $A_1B_1C_1$;

в) если преобразование подобия преобразует окружность ω в окружность ω', то касательная к окружности ω переходит при этом в касательную к окружности ω'.

342*. В какие фигуры преобразуются преобразованием подобия: медианы треугольника? биссектрисы треугольника? высоты треугольника? серединные перпендикуляры к сторонам треугольника? центроид треугольника? ортоцентр треугольника? центр вписанной окружности? центр описанной окружности? окружность, вписанная в треугольник? окружность, описанная около треугольника?

343*. В какие фигуры преобразуются преобразованием подобия: параллелограмм? ромб? прямоугольник? квадрат?

Пример. Пусть даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$.

Докажем, что существует единственное преобразование подобия, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

Решение. 1. Обозначим: $\dfrac{A_1B_1}{AB} = k$, тогда $A_1B_1 = k \cdot AB$, $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Рассмотрим гомотетию H_S^k (рис. 48); точка S выбрана произвольно. При этом треугольник ABC переходит в треугольник $A_0B_0C_0$, в котором $\angle A_0 = \angle A = \angle A_1$,

$A_0B_0 = k \cdot AB = A_1B_1$,

$A_0C_0 = k \cdot AC = A_1C_1$.

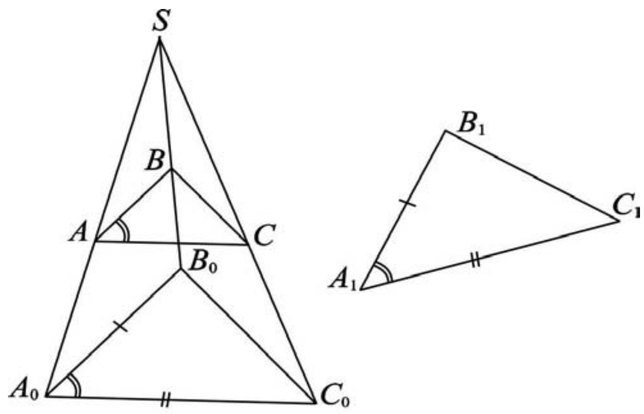


Рис. 48

Отсюда следует, что треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ равны и, значит, существует движение φ, при котором $A_0 \to A_1$, $B_0 \to B_1$, $C_0 \to C_1$ (см. пример 2 в § 9).

Композиция $\varphi \circ H_S^k$ (обозначим ее через f) является преобразованием подобия и переводит точки A, B, C в точки A_1, B_1, C_1 соответственно.

Итак, существование искомого преобразования подобия установлено. Докажем его единственность.

2. Допустим, что существует еще одно преобразование подобия g, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$. Ясно, что коэффициент этого

преобразования равен $\frac{A_1B_1}{AB}$, т.е. k.

Рассмотрим композицию $g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$. Это преобразование является, очевидно, движением и переводит точки A_0, B_0, C_0 в точки A_1, B_1, C_1 соответственно.

Так как в треугольниках $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ $\angle A_0 = \angle A_1$, $A_0B_0 = A_1B_1$, $A_0C_0 = A_1C_1$, то движение, переводящее точки A_0, B_0, C_0 в точки A_1, B_1, C_1, единственно (см. пример 2 в § 9).

Следовательно, движение $g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$ совпадает с движением φ: $\varphi = g \circ H_S^{\frac{1}{k}}$. Умножая обе части этого равенства на H_S^k, получаем: $\varphi \circ H_S^k = g$, откуда $f = g$, что и требовалось доказать.

Доказанное утверждение означает, говоря несколько иначе, что всякое преобразование подобия однозначно определяется парой треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, удовлетворяющих условиям: $\angle A_1 = \angle A$, $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$.

Упражнения

344°. Укажите те определения, свойства или теоремы, на основании которых в вышеприведенном доказательстве сделаны следующие умозаключения:

а) при гомотетии H_S^k треугольник АВС переходит в треугольник $A_0B_0C_0$, в котором $\angle A_0 = \angle A$, $A_0B_0 = k \cdot AB$, $A_0C_0 = k \cdot AC$;

б) композиция $\varphi \circ H_S^k$ является преобразованием подобия;

в) коэффициент этого преобразования (имеется в виду преобразование подобия g, переводящее точки *A, B, C* в точки A_1, B_1, C_1) равен $\dfrac{A_1B_1}{AB}$.

345*. Даны ортонормированный репер $R = \{O, E_1, E_2\}$ и аффинный репер $R' = \{O', E'_1, E'_2\}$. Доказать, что если $O'E'_1 \perp O'E'_2$, $O'E'_1 = k \cdot OE_1$, $O'E'_2 = k \cdot OE_2$, где $k>0$, то существует, и притом единственное, преобразование подобия, при котором репер *R* переходит в репер *R′*.

346. Даны параллелограммы *ABCD* и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что если $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{B_1D_1}{BD}$, то существует подобие, при котором первый параллелограмм отображается на второй.

347°. Завершите и сравните следующие два утверждения: «Всякое движение (подобие) однозначно задается парой треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$, которые удовлетворяют условиям: ...».

Объясните смысл высказываний «Движение (подобие) однозначно задается парой треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$».

348°. Теорема о подвижности плоскости (см. §9) означает, иначе говоря, что всякое движение однозначно задается парой ортонормированных реперов. Используя результат упр. 345, сформулируйте аналогичное утверждение для преобразований подобия. Объясните смысл этих высказываний.

349. Даны треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$, в которых $\angle A_1 = \angle A$, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$. Известно, что при некотором подобии точки *A, B, C* переходят (соответственно) в точки A_1, B_1, C_1. Построить образ произвольной точки M при этом преобразовании.

Рассмотреть два случая:

а) точка *M* принадлежит какой-либо прямой, содержащей сторону треугольника *ABC;*

б) точка М не принадлежит прямым *AB, BC, AC.*

350. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон *BC, CA* и *AB* треугольника *ABC.* При некотором преобразовании подобия *f* точки A_1, B_1, C_1 переходят в точки *A, B, C.* Доказать, что *f* – гомотетия.

351. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон *AB, BC, CA* правильного треугольника *ABC*. При некотором преобразовании подобия *f* точки *A, B, C* переходят в точки A_1, B_1, C_1. Доказать, что *f* – композиция некоторой гомотетии и поворота на угол в 120°.

352. Точки B_1, C_1 – середины сторон *AC, AB* правильного треугольника *ABC*. При некотором преобразовании подобия *f* точки *A, B, C* переходят в точки *A*, B_1, C_1 (соответственно). Доказать, что *f* – композиция некоторой гомотетии с центром А и осевой симметрии с осью AA_1, где A_1 – середина стороны *BC*.

§ 22. Виды преобразований подобия

Всякое движение является преобразованием подобия с коэффициентом $k = 1$. Поэтому к числу подобий относятся параллельный перенос, поворот (в частности, центральная симметрия), осевая симметрия, скользящая симметрия. К числу преобразований подобия относится также гомотетия (см. упр. 330). Рассмотрим новые примеры преобразований подобия.

22.1. Центрально-подобное вращение

Определение. Центрально-подобным вращением будем называть композицию гомотетии H_O^k и поворота R_O^α, который отличен от центральной симметрии и тождественного преобразования.

Ясно, что центрально-подобное вращение $R_O^\alpha \circ H_O^k$ есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $|k|$, поэтому центрально-подобное вращение обладает всеми свойствами преобразований подобия (см. упр. 340).

Если $k = 1$, то центрально-подобное вращение $R_O^\alpha \circ H_O^k$ есть поворот, отличный от центральной симметрии и тождественного преобразования.

Упражнения

353°. Построить образ данного треугольника при центрально-подобном вращении:

а) $R_O^{60°} \circ H_O^{-2}$; б) $R_O^{-45°} \circ H_O^{\frac{1}{2}}$.

354°. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середины сторон AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$. Указать центрально-подобное вращение, при котором квадрат $ABCD$ отображается на квадрат $A_1B_1C_1D_1$.

355*. Составить формулы центрально-подобного вращения $R_O^\alpha \circ H_O^k$ в ортонормированном репере $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$.

356*. Доказать, что $R_O^\alpha \circ H_O^k = H_O^k \circ R_O^\alpha$.

357*. Доказать, что всякое преобразование, заданное в ортонормированном репере формулами

$$\begin{cases} x' = k \cdot (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \\ y' = k \cdot (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \end{cases},$$

где $k \neq 0$, $-\pi < \alpha < \pi$, $\alpha \neq 0$, является центрально-подобным вращением.

358*. Доказать, что единственной инвариантной точкой центрально-подобного вращения $R_O^\alpha \circ H_O^k$ является точка O, а для любой точки M, отличной от точки O, векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ не коллинеарны.

359*. При центрально-подобном вращении $R_O^\alpha \circ H_O^k$, где $-\pi < \alpha < \pi$, $\alpha \neq 0$, прямая c переходит в прямую c'. Найти угол между прямыми c и c'. Рассмотреть два случая:

а) $|\alpha| \le \dfrac{\pi}{2}$; б) $|\alpha| > \dfrac{\pi}{2}$.

360. На прямой $2x+y-6 = 0$ найти точку M, которая при центрально-подобном вращении $R_O^{60^\circ} \circ H_O^2$ переходит в точку M', принадлежащую прямой $x+y-4 = 0$.

361. При центрально-подобном вращении $R_O^{45^\circ} \circ H_O^k$ точка $A(2;\ 4)$ переходит в точку A', принадлежащую прямой $x+y+6\sqrt{2} = 0$. Найти коэффициент k.

362. Исследовать композицию центрально-подобных вращений $R_O^\alpha \circ H_O^{k_1}$ и $R_O^\beta \circ H_O^{k_2}$.

363*. Что представляет собой композиция $R_O^\alpha \circ H_O^k$, если:

а) $\alpha = 2\pi n$, где ñ Z; б) $\alpha = \pi + 2\pi n$, где ñ Z.

22.2. Центрально-подобная симметрия

Определение. Центрально-подобной симметрией будем называть композицию осевой симметрии S_a и гомотетии H_O^k, где O Î a и $k \neq \pm 1$.

Ясно, что центрально-подобная симметрия $H_O^k \circ S_a$ есть преобразование подобия с коэффициентом, равным $|k|$, и поэтому она обладает всеми свойствами преобразований подобия (см. упр. 340).

364°. Построить образ данного треугольника при центрально-подобной симметрии:

а) $H_O^3 \circ S_a$; б) $H_O^{-\frac{1}{2}} \circ S_a$.

365°. Точки *M*, *N*, *P* – середины сторон правильного треугольника *ABC*. Указать центрально-подобную симметрию, при которой треугольник *ABC* отображается на треугольник *MNP*.

366*. Составить формулы центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$ в прямоугольной декартовой системе координат, в которой ось *Ox* направлена по прямой *a*.

367*. Доказать, что если *O*Î *a*, то $H_O^k \circ S_a = S_a \circ H_O^k$.

368*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в ортонормированном репере формулами *x'*=*kx*, *y'*= –*ky*, где $k \neq \pm 1$, является центрально-подобной симметрией.

369*. Доказать, что единственной инвариантной точкой центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$ является точка *O*.

370*. Доказать, что при центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$:

а) прямая, параллельная оси *a*, переходит в параллельную ей прямую;

б) прямая, перпендикулярная оси *a* и не проходящая через центр *O*, переходит в параллельную ей прямую.

371*. Доказать, что центрально-подобная симметрия имеет ровно две инвариантные прямые.

<u>372</u>. При центрально-подобной симметрии $H_O^3 \circ S_a$, где *O* –

начало прямоугольной декартовой системы координат и a – ось Ox, точка A, принадлежащая окружности $x^2+y^2-2y-1=0$, переходит в точку B, принадлежащую прямой $x+y+3=0$. Найти точки A и B.

373. Составить формулы центрально-подобной симметрии $H_A^2 \circ S_p$, если $A(1; 0)$, а ось p – прямая $x+y-1=0$.

374. Осью p центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_p$ является ось Oy прямоугольной декартовой системы координат. При этом преобразовании точка $A(-1; 1)$ переходит в точку B, принадлежащую прямой $2x+y-6=0$. Найти точку B и коэффициент k.

375. Исследовать следующие композиции:

а) $(H_B^{k_2} \circ S_p) \circ (H_A^{k_1} \circ S_p)$, где A, B Îp;

б) $(H_B^{k_2} \circ S_b) \circ (H_A^{k_1} \circ S_a)$, где $a||b$, A Îa, B Îb.

376*. Что представляет собой композиция $H_O^k \circ S_p$, если:

а) k=1; б) k= –1, OÎp.

§ 23. Аналитическое выражение преобразований подобия

Теорема 9. Всякое преобразование подобия с коэффициентом k задается в ортонормированном репере $R = \{O, E_1, E_2\}$ формулами вида

$$x' = a_1x + b_1y + c_1,\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \qquad (*),$$

которые удовлетворяют условиям $a_1{}^2 + a_2{}^2 = k^2$ (1),

$$b_1{}^2 + b_2{}^2 = k^2 \qquad (2),$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 = 0 \qquad (3).$$

Доказательство. Представим данное преобразование подобия f в виде композиции гомотетии H_O^k и движения φ: $f = \varphi \circ H_O^k$.

Составим формулы преобразований H_O^k и φ в репере R:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \left(H_O^k\right); \qquad \begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - \varepsilon \cdot y \cdot \sin\alpha + x_0 \\ y' = x \cdot \sin\alpha + \varepsilon \cdot y \cdot \cos\alpha + y_0 \end{cases} (\varphi).$$

Используя эти формулы, находим формулы преобразования f:

$$\begin{cases} x' = k(x \cdot \cos\alpha - \varepsilon \cdot y \cdot \sin\alpha) + x_0 \\ y' = k(x \cdot \sin\alpha + \varepsilon \cdot y \cdot \cos\alpha) + y_0 \end{cases} \qquad (**).$$

Обозначая $k \cdot \cos\alpha = a_1$, $-k \cdot \varepsilon \cdot \sin\alpha = b_1$, $x_0 = c_1$,

$k \cdot \sin\alpha = a_2$, $k \cdot \varepsilon \cdot \cos\alpha = b_2$, $y_0 = c_2$,

получаем формулы вида (*), причем коэффициенты при x и y, как легко видеть, удовлетворяют условиям (1), (2), (3), что требовалось доказать.

Сопоставляя эту теорему с результатом упр. 333, приходим к выводу: отображение плоскости в себя является преобразованием подобия с коэффициентом k тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном репере оно задается линейными формулами (*), которые удовлетворяют условиям (1), (2), (3).

Примечание 1. Формулы (*) можно записать в матричной форме следующим образом:

$$X' = A \cdot X + X_0, \text{ где } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix},\ X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Примечание 2. Из теоремы 9 следует, что к преобразованиям подобия применимы теоремы 3 – 5, которые, напомним, имеют место для любых преобразований плоскости, заданных в некотором аффинном репере линейными формулами, т. е. формулами вида (*). В частности, применяя к преобразованиям подобия следствие 1 теоремы 4, получаем следующее свойство.

Всякое подобие задается в любом аффинном репере линейными формулами вида (*).

Теорема 5, сформулированная для преобразований подобия, приобретает следующий вид.

Теорема 5'. Если подобие f переводит репер R в одинаково (противоположно) ориентированный с ним репер R', то оно переводит любой другой репер R_1 также в одинаково (противоположно) ориентированный с ним репер R_1'.

Предлагаем читателю аналогичным образом сформулировать (конкретизировать) теоремы 3-4 для преобразований подобия.

Упражнения

377. Составить формулы преобразования подобия f, при котором $A(1;0) \to A'(2;6)$, $B(0;1) \to B'(3;-1)$, $C(-1;-1) \to C'(-8;1)$, предварительно убедившись, что такое преобразование существует.

Определить коэффициент k данного преобразования.

Представить преобразование f в виде композиции гомотетии H_O^k, где O – начало координат, и движения φ. Определить вид движения. Сделать рисунок.

378. Составить формулы преобразования подобия f, при котором $A(1;0) \to A'(4;-5)$, $B(0;1) \to B'(5;2)$, $C(-1;-1) \to C'(-6;0)$, предварительно убедившись, что такое преобразование существует.

Определить коэффициент k данного преобразования.

Представить преобразование f в виде композиции гомотетии H_O^k, где O – начало координат, и движения φ. Определить вид движения. Сделать рисунок.

379. Доказать, что не существует преобразования подобия, при котором $A(1;0)\to A'(3;4)$, $B(0;1)\to B'(4;3)$, $C(1;-1)\to C'(-1;1)$.

380*. Используя формулы (**), доказать, что любое преобразование подобия, отличное от движения, имеет ровно одну инвариантную точку.

381*. Преобразование подобия переводит аффинный репер R в репер R'. Фигура Φ задается в репере R уравнением $F(x;\ y)=0$. Используя теорему 3, доказать, что образ Φ' фигуры Φ задается в репере R' тем же уравнением.

Пример. Докажем, что при любом преобразовании подобия эллипс переходит в эллипс.

Решение. Пусть эллипс ω задан в ортонормированном репере $R=\{O,E_1,E_2\}$ уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (рис. 49).

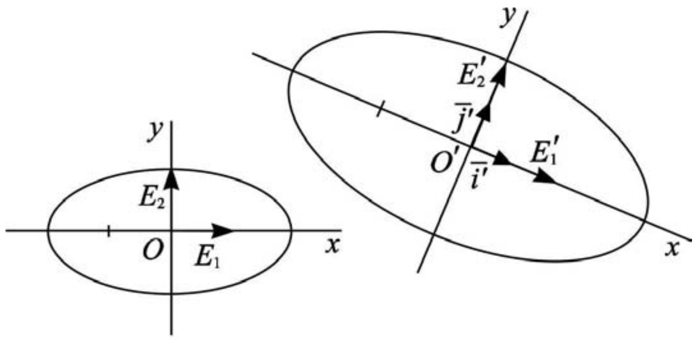


Рис. 49

Преобразование подобия f переводит репер R в репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, в котором $O'E_1'=k\cdot OE_1$, $O'E_2'=k\cdot OE_2$, $O'E_1'\perp O'E_2'$ (k – коэффициент преобразования f). В репере R' фигура $\omega'=f(\omega)$ задается тем же уравнением, что и фигура ω: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (упр. 381).

Рассмотрим репер $\vec{R}=\{O',\vec{i}\,',\vec{j}\,'\}$, где $\bar{i}'=\dfrac{1}{k}\cdot\overrightarrow{O'E_1'}$, $\bar{j}'=\dfrac{1}{k}\cdot\overrightarrow{O'E_2'}$. Этот репер является, очевидно, ортонормированным. Формулы перехода от R' к $\overline{R}$ имеют вид: $x=\dfrac{1}{k}\cdot x'$, $y=\dfrac{1}{k}\cdot y'$.

Используя эти формулы, находим уравнение фигуры ω' в репере

$$\bar{R}: \ \frac{x'^2}{(ka)^2} + \frac{y'^2}{(kb)^2} = 1.$$

Отсюда заключаем, что фигура ω' есть эллипс с полуосями, равными ka и kb.

Заметим, что эксцентриситеты ε и ε' эллипсов ω и ω' равны. Действительно, $\varepsilon' = \dfrac{\sqrt{(ka)^2 - (kb)^2}}{ka} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon$.

Примечание. Изложенное решение укладывается в схему, приведенную в п. 5.5 «Сводки».

Упражнения

382*. Доказать, что при любом преобразовании подобия гипербола переходит в гиперболу (с тем же эксцентриситетом), а парабола – в параболу.

383°. Подобие f в ортонормированном репере $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ задано формулами $\begin{cases} x' = 6x + 8y - 1 \\ y' = 8x - 6y + 2 \end{cases}$.

а) Составить матричное уравнение преобразования f в репере R.

б) Составить матричное уравнение преобразования f в репере $R' = \{O', \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$, где $O'(1;\, 1)$, $\bar{e}_1 = \vec{i} + \vec{j}$, $\bar{e}_2 = -\vec{i} + \vec{j}$.

в) Составить формулы преобразования f в репере R'.

§ 24. Подобия первого и второго рода

Из теоремы 5′ (§ 23) явствует, что всякое преобразование подобия либо сохраняет ориентацию любого репера, либо изменяет ее. Это обстоятельство делает корректным следующее **определение**.

Преобразование подобия называется подобием первого рода (второго рода), если оно сохраняет (изменяет) ориентацию какого-либо (а значит, любого) репера.

Пусть подобие f задано в некотором репере R формулами (*) из § 23. Как известно, матрица $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ есть матрица перехода от репера R к реперу R' – образу R. Отсюда, учитывая определение одинаково (противоположно) ориентированных реперов, приходим к *следствию*.

Подобие f, заданное формулами $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$, является подобием первого рода (второго рода) тогда и только тогда, когда $\det A > 0$ ($\det A < 0$). В частности, если преобразование f задано формулами (**) из § 23, то при $\varepsilon = 1$ f – подобие первого рода, а при $\varepsilon = -1$ f – подобие второго рода.

Упражнения

384*. Доказать, что параллельный перенос, гомотетия (в частности, центральная симметрия) и центрально-подобное вращение (в частности, поворот) являются подобиями первого рода.

385*. Доказать, что осевая симметрия, скользящая симметрия и центрально-подобная симметрия являются подобиями второго рода.

386*. Доказать, что если преобразование f представлено в виде композиции $\varphi \circ H_O^k$, где φ – движение, то род подобия f совпадает с родом движения φ.

387*. Доказать, что: а) композиция двух подобий первого рода (второго рода) есть подобие первого рода; б) композиция подобий первого рода и второго рода есть подобие второго рода.

388*. Доказать, что преобразование, обратное подобию первого рода (второго рода), есть подобие первого рода (второго рода).

§ 25. Классификация преобразований подобия

Как известно, к числу преобразований подобия относятся параллельный перенос, гомотетия, центрально-подобное вращение (в частности, поворот), осевая симметрия, скользящая симметрия, центрально-подобная симметрия. Возникает вопрос: существуют ли преобразования подобия, отличные от перечисленных выше? Ответ на этот вопрос дают приведенные ниже классификационные теоремы.

Теорема 10. Всякое подобие первого рода есть либо параллельный перенос, либо гомотетия, либо центрально-подобное вращение.

Доказательство. Пусть f – произвольное подобие первого рода с коэффициентом k (k>0), заданное в некотором ортонормированном репере $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ формулами

$$x' = k(x\cdot\cos\alpha - y\cdot\sin\alpha) + x_0,$$

$$y' = k(x\cdot\sin\alpha + y\cdot\cos\alpha) + y_0.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\alpha\in[-\pi;\pi]$.

1. Если k=1, то f есть движение первого рода и, стало быть, является либо переносом (при α=0), либо поворотом вокруг точки O на угол $\alpha\in[-\pi;\pi]$ и отличный от 0.

Если при этом (в случае поворота) $\alpha=\pm\pi$, то f есть центральная симметрия – частный случай гомотетии.

Если же $\alpha\neq\pm\pi$ и $\alpha\neq 0$, то f – поворот – частный случай центрально-подобного вращения.

2. Пусть теперь $k\neq 1$, тогда преобразование f отлично от движения и имеет единственную инвариантную точку $O_1(x_1; y_1)$ (упр. 380).

Перенесем начало координат в точку O_1 и составим формулы преобразования f в репере $R_1=\{O_1,\vec{i},\vec{j}\}$. В матричной форме искомые формулы имеют вид:

$$\overline{X}'=(C^{-1}\cdot A\cdot C)\cdot\overline{X}+C^{-1}\cdot(A\cdot\overline{X}_0+X_0-\overline{X}_0) \qquad (1),$$

где $\overline{X}=\begin{pmatrix}\overline{x}\\ \overline{y}\end{pmatrix}$ и $\overline{X}'=\begin{pmatrix}\overline{x}'\\ \overline{y}'\end{pmatrix}$ – координатные столбцы в репере R_1 произвольной точки M и ее образа M'; $A=\begin{pmatrix}k\cdot\cos\alpha & -k\cdot\sin\alpha\\ k\cdot\sin\alpha & k\cdot\cos\alpha\end{pmatrix}$ – матрица преобразования f в репере R; C – матрица перехода от репера R к реперу R_1 (в нашем случае $C=C^{-1}=E$); $X_0=\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$, $\overline{X}_0=\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$.

Т.к. $(x_1; y_1)$ – решение системы $\begin{cases}x=k(x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha)+x_0\\ y=k(x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha)+y_0\end{cases}$, то $\overline{X}_0=A\cdot\overline{X}_0+X_0$, и поэтому матричное равенство (1) принимает вид: $\overline{X}'=AX$. Записывая его в координатной форме, получаем формулы преобразования f в репере R_1: $\begin{cases}\overline{x}'=k(\overline{x}\cdot\cos\alpha-\overline{y}\cdot\sin\alpha)\\ \overline{y}'=k(\overline{x}\cdot\sin\alpha+\overline{y}\cdot\cos\alpha)\end{cases}$.

Отсюда видно, что преобразование f есть композиция гомотетии $H_{O_1}^k$ и поворота $R_{O_1}^{\alpha}$.

Если поворот $R_{O_1}^{\alpha}$ есть тождественное преобразование (при $\alpha=0$), или центральная симметрия (при $\alpha=\pm\pi$), то f есть гомотетия; в противном случае (т.е. при $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\pm\pi$) f есть центрально-подобное вращение. Теорема доказана.

Теорема 11. Всякое подобие второго рода есть либо осевая симметрия, либо скользящая симметрия, либо центрально-подобная симметрия.

Доказательство. Пусть f – произвольное подобие второго рода, заданное в ортонормированном репере $R=\{O,\vec{i},\vec{j}\}$ формулами

$$\begin{cases} x' = k\cdot(x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha) + x_0 \\ y' = k\cdot(x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha) + y_0 \end{cases}, \text{ где } \alpha\in[-\pi;\pi].$$

Если k=1, то f движение второго рода и, следовательно, является либо осевой симметрией, либо скользящей симметрией.

Пусть $k\neq 1$, тогда f имеет единственную инвариантную точку $O_1(x_1; y_1)$ (упр. 380).

Рассмотрим ортонормированный репер $R_1=\{O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1\}$, который одинаково ориентирован с репером R и удовлетворяет условию $\left(\widehat{\bar{i},\bar{i}_1}\right)=\dfrac{\alpha}{2}$.

Формулы преобразования f в репере R_1 имеют вид $\overline{X}'=(C^{-1}\cdot A\cdot C)\cdot\overline{X}+C^{-1}\cdot(A\cdot\overline{X}_0+X_0-\overline{X}_0)$ (1), где, как и в теореме 5, $\overline{X}$, $\overline{X}'$ – координатные столбцы в репере R_1 произвольной точки M и ее образа M';

$A=\begin{pmatrix} k\cdot\cos\alpha & k\cdot\sin\alpha \\ k\cdot\sin\alpha & -k\cdot\cos\alpha \end{pmatrix}$ – матрица преобразования f в репере R;

$C=\begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & -\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ \sin\dfrac{\alpha}{2} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от R к R_1;

$X_0=\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, $\overline{X}_0=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$.

Так как $(x_1; y_1)$ – решение системы $\begin{cases} x = k(x\cdot\cos\alpha + y\cdot\sin\alpha) + x_0 \\ y = k(x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha) + y_0 \end{cases}$,

то $\overline{X}_0 = A\cdot\overline{X}_0 + X_0$.

Поэтому равенство (1) принимает вид:

$$\overline{X}'=(C^{-1}\cdot A\cdot C)\cdot\overline{X} \qquad (2).$$

Далее находим: $C^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\alpha}{2} & \sin\dfrac{\alpha}{2} \\ -\sin\dfrac{\alpha}{2} & \cos\dfrac{\alpha}{2} \end{pmatrix}$, $C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$.

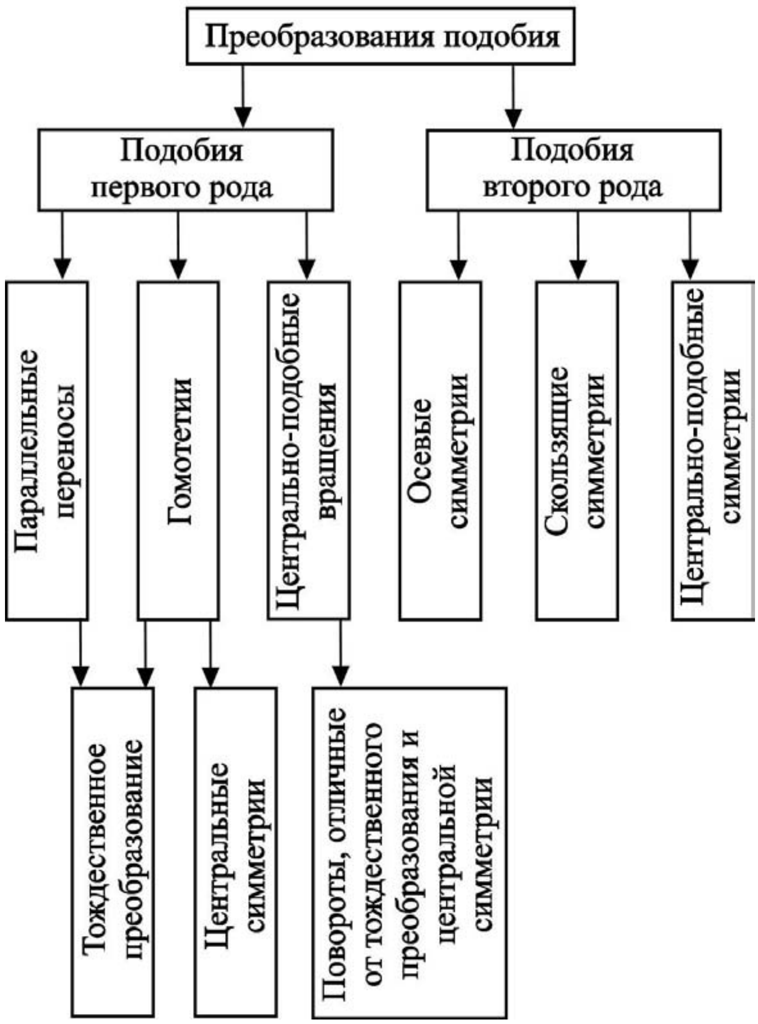
Таким образом, равенство (2) в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \overline{x}' = k\overline{x} \\ \overline{y}' = -k\overline{x} \end{cases}.$$

Отсюда, учитывая, что $k \neq \pm 1$ (иначе *f* есть движение), заключаем, что *f* есть центрально-подобная симметрия. Теорема доказана.

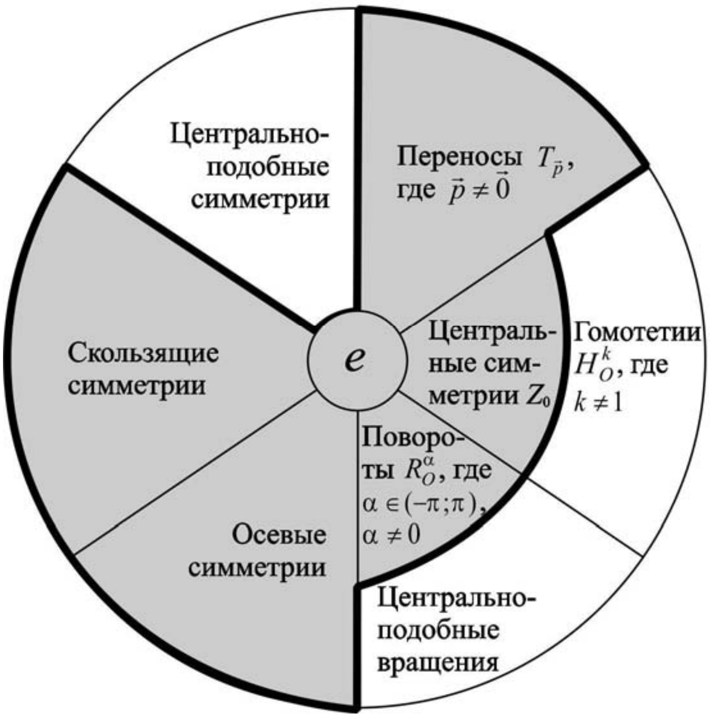
Полученные в теоремах 1 – 2 результаты показаны на приведенной ниже *схеме 2*.

Схема 2



Совместную классификацию движений и преобразований подобия можно иллюстрировать при помощи диаграммы 1. Затемненная часть круга – это множество всех движений как подмножество множества преобразований подобия.

Диаграмма 1



Упражнение

389*. Систематизируйте известные Вам сведения о следующих преобразованиях подобия:

а) параллельный перенос $T_{\vec{p}}$, где $\overline{p} \neq \overline{0}$;

б) гомотетия H_O^k, где $k \neq 1$;

в) центрально-подобное вращение;

г) осевая симметрия;

д) скользящая симметрия;

е) центрально-подобная симметрия.

Указанную систематизацию предлагается осуществить по следующему плану:

– определение данного преобразования и его частные случаи;

– формулы данного преобразования;

– общие свойства данного преобразования как преобразования, являющегося движением или подобием;

– специфические свойства данного преобразования (инвариантные точки, образ прямой и т.п.).

Пример. Преобразование f задано в ортонормированном репере формулами $\begin{cases} x' = 3x + 7y - 1 \\ y' = 7x - 3y + 2 \end{cases}$.

Докажем, что f – преобразование подобия и определим его вид.

Решение. Матрица, составленная из коэффициентов при x и y, имеет вид $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$ и удовлетворяет следующим условиям:

$3^2 + 7^2 = 7^2 + (-3)^2 = 21$, $3\cdot 7 + 7\cdot(-3) = 0$.

Следовательно, в силу признака преобразования подобия (см. упр. 333) f – преобразование подобия с коэффициентом $k = \sqrt{21}$.
Т. к. $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -21 < 0$, то f подобие второго рода, а т. к. $k \neq 1$, то f – центрально-подобная симметрия.

Упражнения

390°. Пусть f – преобразование подобия, отличное от движения и заданное своими формулами в некотором ортонормированном репере. Как определить вид этого подобия? Составьте соответствующий алгоритм (соответствующее правило).

391. Преобразования f_1, f_2, f_3, f_4 заданы в ортонормированном репере формулами:

$$f_1 : \begin{cases} x' = 5x + y - 2 \\ y' = x - 5y + 1 \end{cases}; \qquad f_2 : \begin{cases} x' = 5x - y - 2 \\ y' = x + 5y + 1 \end{cases};$$

$$f_3 : \begin{cases} x' = 5x - 1 \\ y' = 5y + 1 \end{cases}; \qquad f_4 : \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}.$$

Доказать, что каждое из этих преобразований является преобразованием подобия. Определить их род и вид. Найти инвариантные точки.

392. Составить формулы всех преобразований подобия, при которых $A(1;0) \to A'(2;1)$, $B(0;1) \to B'(-2;3)$. Определить род и вид каждого из найденных преобразований.

393. Составить формулы всех преобразований подобия, при которых отрезок с концами $A(1;\ 0)$ и $B(0;\ 1)$ отображается на отрезок с концами $A'(1;\ 1)$ и $B'(3;\ 3)$. Охарактеризовать каждое из этих преобразований.

394. Доказать, что композиция гомотетии H_O^k, где $|k| \neq 1$, и движения второго рода есть центрально-подобная симметрия.

395. Доказать, что композиция центрально-подобного вращения $H_O^k \circ R_O^\alpha$, где $|k| \neq 1$, и движения второго рода есть центрально-подобная симметрия.

396. Доказать, что композиция центрально-подобной симметрии и движения первого рода есть центрально-подобная симметрия.

397. Доказать, что квадрат центрально-подобной симметрии есть гомотетия.

398. Исследовать композицию центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$ и осевой симметрии S_b в следующих случаях: а) $a=b$; б) $a||b$; в) $a \cap b = 0$.

399. Исследовать композицию центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$ и скользящей симметрии $T_{\vec{p}} \circ S_b$ в следующих случаях: а) $a=b$; б) $a||b$; в) $a \perp b$.

400. Доказать, что всякое подобие, отличное от движения, есть либо композиция гомотетии H_O^k и поворота R_0^α, либо композиция гомотетии H_O^k и осевой симметрии S_a, где $O \in a$.

§ 26. Подобие фигур

Определение. Фигура Φ называется подобной фигуре Φ', если существует такое преобразование подобия, при котором Φ отображается на фигуру Φ'. Коэффициент k этого преобразования подобия называется коэффициентом подобия данных фигур.

Обозначается: $\Phi \sim \Phi'$.

В частности, если Φ и Φ' – треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, то говоря о подобии этих треугольников, обычно считают (согласно сложившейся традиции), что существует преобразование подобия, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (и, следовательно, $\Delta\, ABC \to \Delta\, A_1B_1C_1$).

Упражнения

401*. Доказать, что если $\Delta\, ABC \sim \Delta\, A_1B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$. (Иначе говоря, если треугольники подобны, то их соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны).

402*. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Отрезки AD и A_1D_1 – их соответствующие высоты; BE и B_1E_1 – соответствующие медианы; CF и C_1F_1 – соответствующие биссектрисы. Доказать, что:

а) $\dfrac{A_1D_1}{AD}=\dfrac{B_1E_1}{BE}=\dfrac{C_1F_1}{CF}=\dfrac{A_1B_1}{AB}$ (в подобных треугольниках соответствующие высоты (медианы, биссектрисы) пропорциональны соответствующим сторонам);

б) $\dfrac{S_{\Delta A_1B_1C_1}}{S_{\Delta ABC}}=\dfrac{A_1B_1^{\ 2}}{AB^2}$ (площади подобных треугольников относятся как квадраты соответствующих сторон).

403*. Доказать следующие свойства подобных фигур:

а) $\Phi \sim \Phi$ для любой фигуры Φ;

б) если $\Phi \sim \Phi'$, то $\Phi' \sim \Phi$;

в) если $\Phi_1 \sim \Phi_2$, $\Phi_2 \sim \Phi_3$, то $\Phi_1 \sim \Phi_3$.

404°. Как соотносятся понятия «фигуры Φ и Φ' равны» и «фигуры Φ и Φ' подобны»?

405°. Как соотносятся понятия «фигуры Φ и Φ' гомотетичны» и «фигуры Φ и Φ' подобны»? Используя полученный вывод, завершите следующее утверждение: «Чтобы доказать, что фигуры Φ и Φ' подобны, достаточно установить, что ...».

406*. Используя сформулированный выше прием, докажите, что:

а) любые две окружности подобны;

б) прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.

***Пример* 1.** Докажем, что если смежные стороны одного прямоугольника пропорциональны смежным сторонам другого, то прямоугольники подобны.

Решение. Пусть в прямоугольниках $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{AD}{A_1D_1}$. Так как, кроме того, $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1$, то существует преобразование подобия, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $D \to D_1$ (см. пример в § 21). При этом преобразовании прямая BC (параллельная AD) преобразуется в прямую B_1C_1 (параллельную A_1D_1), а прямая DC – в прямую D_1C_1. Следовательно, точка пересечения прямых BC и DC, т.е. точка C, переходит в точку пересечения прямых B_1C_1 и D_1C_1, т.е. в точку C_1.

Итак, существует преобразование подобия, при котором точки A, B, C, D переходят в точки A_1, B_1, C_1, D_1 и, стало быть, прямоугольник $ABCD$ отображается на прямоугольник $A_1B_1C_1D_1$. Следовательно, эти прямоугольники подобны.

Упражнения

407*. Докажите, что:

а) любые два квадрата подобны;

б) если угол одного ромба равен углу другого ромба, то эти ромбы подобны;

в) если смежные стороны одного параллелограмма пропорциональны смежным сторонам другого параллелограмма, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то параллелограммы подобны.

408*. Доказать, что если фигуры Φ и Φ_1 гомотетичны, а фигуры Φ_1 и Φ' равны, то фигуры Φ и Φ' подобны.

Используя этот вывод, завершите следующее утверждение: «Чтобы доказать, что фигуры Φ и Φ' подобны, достаточно установить, что ...». Сравните свой ответ с приемом, приведенным в «Сводке».

<u>409</u>. Доказать, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$ и $\angle A = \angle A_1$, то треугольники подобны.

<u>410</u>. Доказать, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то треугольники подобны.

411. Доказать, что если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$, то треугольники подобны.

***Пример* 2.** Докажем, что любые две параболы подобны.

Решение. Пусть Π и Π' – данные параболы. Существуют ортонормированные реперы R и R', в которых эти параболы задаются уравнениями $y^2 = 2px$ и $y^2 = 2qx$ соответственно (рис. 50).

Рассмотрим гомотетию H_O^k, где $k=\frac{q}{p}$. Формулы гомотетии:

$$x'=\frac{q}{p}x,\ y'=\frac{q}{p}y.$$

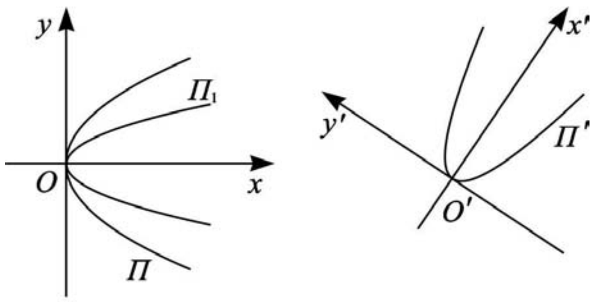


Рис. 50

При этой гомотетии парабола Π преобразуется в параболу Π_1, заданную в репере R уравнением $y'^2=2qx'$.

Рассмотрим далее движение φ, при котором репер R переходит в репер R' (такое движение существует по теореме о подвижности плоскости, § 9).

При движении φ парабола Π_1 переходит в фигуру, которая задается тем же уравнением в репере R', т.е. Π_1 отображается на Π', значит Π_1 и Π' равны.

Итак, Π и Π_1 гомотетичны, а Π_1 и Π' равны, следовательно, Π и Π' подобны, что и требовалось доказать.

Упражнения

412°. Объясните, почему в приведенном решении утверждается, что «При этой гомотетии парабола Π преобразуется в параболу Π_1, заданную в репере R уравнением $y'^2=2qx'$».

413*. Доказать, что если эксцентриситеты двух эллипсов (гипербол) равны, то эллипсы (гиперболы) подобны.

§ 27. Применение преобразований подобия к решению задач на доказательство

Как отмечалось ранее (см. § 15), приложение геометрических преобразований к задачам на доказательство основано чаще всего на идее *переформулирования цели (требования) задачи на языке геометрических преобразований.* Возможности для такого переформулирования доставляют свойства или определение того или иного преобразования. Приведем некоторые основанные на этой идее приемы решения задач на доказательство; в скобках после каждого приема указывается его теоретическая база.

1. Чтобы доказать, что точки A, B, C коллинеарны, достаточно установить, что при некоторой гомотетии H_A^k точка B переходит в точку C, или установить, что при некоторой гомотетии H_B^k точка Aпереходит в точку C и т.п. (определение гомотетии).

2. Чтобы доказать, что точки A, B, C, ... коллинеарны, достаточно установить, что они являются образами коллинеарных точек A_1, B_1, C_1, ... при некотором преобразовании подобия (свойства преобразований подобия).

3. Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны, достаточно установить, что при некоторой гомотетии H_O^k, где $O \notin a$, прямая a переходит в прямую b (свойство гомотетии).

4. Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны (перпендикулярны), достаточно установить, что они являются образами некоторых параллельных (перпендикулярных) прямых при некотором преобразовании подобия (свойство преобразований подобия).

5. Чтобы доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, ... проходят через точку O, достаточно установить, что при гомотетии H_O^k: $A \to A_1$,

$B \to B_1$, $C \to C_1$, ... (определение гомотетии).

6. Чтобы доказать, что линии L_1, L_2, L_3 ... пересекаются в одной точке, достаточно установить, что они являются образами или прообразами некоторых линий L'_1, L'_2, L'_3, ... , пересекающихся в одной точке (определение образа фигуры).

7. Чтобы доказать, что окружности ω_1 и ω_2 касаются в точке A, где $A \in \omega_1$, достаточно установить, что при гомотетии $H_A^k (k \neq 1)$ $\omega_1 \to \omega_2$ (свойство гомотетии, см. упр. 326).

8. Чтобы доказать, что фигура F является параллелограммом (ромбом, прямоугольником и т.п.), достаточно установить, что F есть образ некоторого параллелограмма (ромба, прямоугольника и т.п.) при некотором преобразовании подобия (свойства преобразований подобия, см. упр. 343).

9. Чтобы доказать, что прямые a и b перпендикулярны, достаточно установить, что при центрально-подобном вращении вокруг некоторого центра на угол $\pm 90°$ прямая a отображается на прямую b (свойство центрально-подобного вращения, см. упр. 359).

10. Чтобы доказать, что точки A, B, C, ... принадлежат некоторой окружности ω, достаточно установить, что при некотором преобразовании подобия точки A_1, B_1, C_1, ... , принадлежащие некоторой окружности ω_1, переходят в точки A, B, C, ... , а окружность ω_1 переходит в окружность ω (свойство преобразований подобия, см. упр. 340).

Разумеется, рассмотренные приемы не исчерпывают всех ситуаций, допускающих применение преобразований подобия в задачах на доказательство.

***Пример* 1.** Докажем, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Поиск решения. Пусть M, N – середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$, O – точка пересечения диагоналей, а S – точка пересечения продолжений боковых сторон (рис. 51).

Данная задача распадается на две подзадачи:

– доказать, что точки S, M, N коллинеарны;

– доказать, что точки O, M, N коллинеарны.

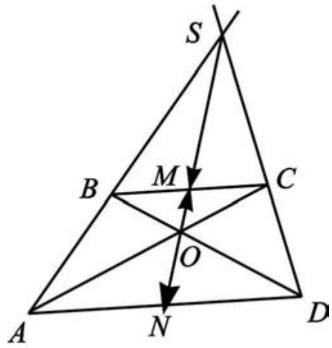


Рис. 51

На язык геометрических преобразований эти подзадачи переводятся следующим образом:

– доказать, что при некоторой гомотетии H_S^k $M \to N$, для чего надо установить, что при этой гомотетии отрезок BC переходит в отрезок AD;

– доказать, что при некоторой гомотетии H_O^k $M \to N$, для чего надо установить, что при этой гомотетии отрезок BC отображается на отрезок AD.

Для решения первой подзадачи необходимо подобрать коэффициент k так, чтобы при гомотетии H_S^k точка B переходила в точку A. Очевидно, что $B \xrightarrow{H_S^k} A$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{SA} = k \cdot \overrightarrow{SB}$. Отсюда, учитывая, что точки A и B лежат на одну сторону от точки S (и, значит, $k>0$), находим: $k = \dfrac{SA}{SB}$.

Для решения второй подзадачи необходимо подобрать коэффициент k так, чтобы при гомотетии H_O^k точка B переходила в точку D. Очевидно, что $B \xrightarrow{H_O^k} D$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OD} = k \cdot \overrightarrow{OB}$. Отсюда, учитывая, что точки B и D лежат по разные стороны от точки O (и, значит, $k<0$), находим $k = -\dfrac{OD}{OB}$.

Вышесказанное делает естественным следующее *решение*. Рассмотрим гомотетию H_S^k, где $k=\dfrac{SA}{SB}$. При этой гомотетии $B\to A$, значит, прямая BC переходит в прямую AD. Так как, кроме того, прямая SD отображается на себя, то точка $BC\cap SD$ переходит в точку $AD\cap SD$, т.е. $C\to D$. Так как $B\to A$, $C\to D$, то отрезок BC переходит в отрезок AD и, следовательно, середина отрезка BC – точка M – переходит в середину отрезка AD – точку N. Т.к. при гомотетии H_S^k $M\to N$, то по определению гомотетии $\overrightarrow{SN}=k\cdot\overrightarrow{SM}$ и поэтому точки S, M, N коллинеарны.

Рассмотрим теперь гомотетию H_O^k, где $k=-\dfrac{OD}{OB}$. При этой гомотетии $B\to D$. Далее, т.к. прямая BC переходит в прямую DA, а прямая AC отображается на себя, то точка $BC\cap AC$ переходит в точку $DA\cap AC$, т.е. $C\to A$. Так как $B\to D$, $C\to A$, то отрезок BC переходит в отрезок DA и, следовательно, середина отрезка BC переходит в середину отрезка DA, т.е. $M\to N$. Отсюда, по определению гомотетии, следует, что $\overrightarrow{ON}=k\cdot\overrightarrow{OM}$ и поэтому точки O, M, N коллинеарны.

Из вышеизложенного следует, что точки O, S, M, N коллинеарны, что и требовалось доказать.

Упражнение

414°. Объясните, почему (на каком основании) в приведенном решении утверждается, что:

а) «При этой гомотетии ... прямая BC переходит в прямую AD»;

б) «... кроме того, прямая SD отображается на себя»;

в) «... середина отрезка BC ... переходит в середину отрезка AD ...».

***Пример* 2.** Окружности $\omega_1(O_1;\,R_1)$ и $\omega_2(O_2;\,R_2)$ касаются внешним образом в точке O. Через точку O проведена прямая c, которая пересекает эти окружности в точках A и B. Докажем, что касательные к окружностям, проведенные в точках A и B, параллельны.

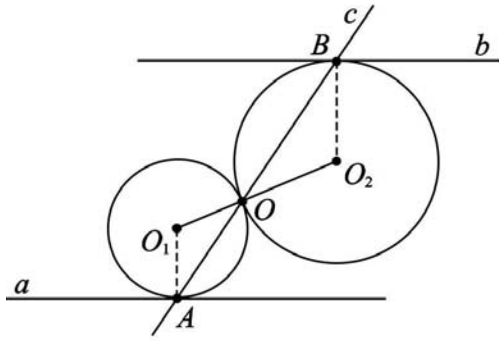


Рис. 52

Поиск решения. Для решения задачи достаточно установить, что при гомотетии H_O^k касательная a переходит в касательную b (рис. 52). Для этого, в свою очередь, необходимо доказать, что при гомотетии H_O^k $\omega_1 \to \omega_2$ и $A \to B$. Чтобы установить, что при гомотетии H_O^k окружность ω_1 переходит в окружность ω_2, необходимо показать, что $O_1 \to O_2$. Так как точка O делит отрезок O_1O_2 в отношении R_1**:**R_2, то добиться этого (т.е. чтобы $O_1 \to O_2$) можно, выбирая коэффициент k равным $-\frac{R_2}{R_1}$. Сказанное приводит к следующему решению.

Решение. Рассмотрим гомотетию H_O^k, где $k = -\frac{R_2}{R_1}$. При этой гомотетии $O_1 \to O_2$, следовательно, окружность ω_1 переходит в такую окружность с центром O_2, радиус которой равен $R = |k| \cdot R_1 = R_2$, т.е. $\omega_1 \to \omega_2$. Так как $\omega_1 \to \omega_2$, $c \to c$, то точка $\omega_1 \cap c$ (отличная от точки O) переходит в точку $\omega_2 \cap c$ (также отличную от точки O), т.е. $A \to B$. Отсюда следует, что касательная к окружности ω_1 в точке A переходит в касательную к окружности ω_2 в точке B. Следовательно, указанные касательные параллельны, что и требовалось доказать.

Упражнение

415°. Объясните, почему (на каком основании) в приведенном решении утверждается, что:

а) «... касательная к окружности ω_1 в точке A переходит в касательную к окружности ω_2 в точке B»;

б) «Следовательно, указанные касательные параллельны».

***Пример* 3.** Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. При переносе $T_{\bar{p}}$ треугольник $A_1B_1C_1$ отображается на треугольник $A_2B_2C_2$. Докажем, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

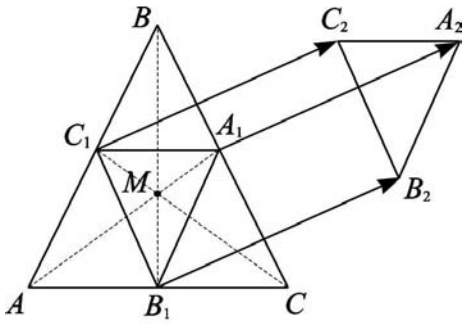


Рис. 53

Решение. При гомотетии $H_M^{-\frac{1}{2}}$, где M – центроид треугольника ABC, точки A, B, C переходят соответственно в A_1, B_1, C_1. При переносе $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$ (рис. 53).

Таким образом, преобразование $T_{\bar{p}} \circ H_M^{-\frac{1}{2}}$ переводит точки A, B, C в точки A_2, B_2, C_2.

С другой стороны, преобразование $T_{\bar{p}} \circ H_M^{-\frac{1}{2}}$ есть гомотетия $H_N^{-\frac{1}{2}}$ (см. упр. 304), где точка N определяется условием $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\bar{p}$. Отсюда следует, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 проходят через точку N, что и требовалось доказать.

Примечание. Так как при гомотетии $H_N^{-\frac{1}{2}}$ $A \to A_2$, то $\overrightarrow{NA_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{NA}$. Следовательно, точка N делит отрезок AA_2 в отношении 2**:**1.

Аналогично устанавливается, что отрезки BB_2 и CC_2 делятся точкой N в том же отношении.

***Пример* 4.** Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке O. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середины отрезков AO, BO, CO, DO соответственно; M – произвольная точка. Через точки B_1, C_1, D_1, A_1 проведены прямые a, b, c, d, перпендикулярные прямым MA, MB, MC, MD соответственно. Докажем, что прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке.

Решение. Рассмотрим центрально-подобное вращение $R_O^{-90^\circ} \circ H_O^{\frac{1}{2}}$ (рис. 54). При этом $A \to B_1$, следовательно, прямая MA переходит в перпендикулярную ей прямую, проходящую через точку B_1, т.е. в прямую a. Отсюда следует, что прямая a проходит через точку M_1 – образ точки M при указанном преобразовании.

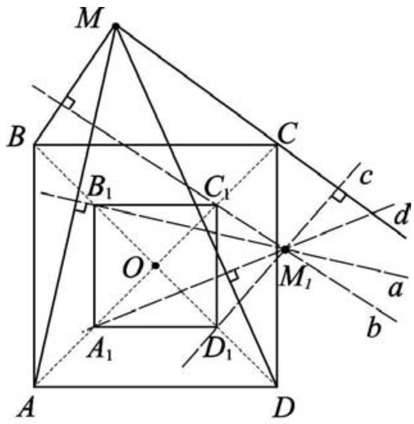


Рис. 54

Аналогично доказывается, что прямые b, c, d также проходят через точку M_1, что и требовалось доказать.

Упражнение

416°. Объясните, почему (на каком основании) в приведенном решении утверждается, что «... прямая MA переходит в перпендикулярную ей прямую, проходящую через точку B_1 ...».

***Пример* 5.** На плоскости даны точки A, B и окружность ω, которая не пересекается с прямой AB. Точка C движется по окружности ω. Докажем, что геометрическое место (множество) центроидов треугольников ABC есть окружность.

Решение. Пусть точка M – центроид треугольника ABC, где $C \in \omega$, а O – середина отрезка AB (рис. 55).

При гомотетии $H_O^{\frac{1}{3}}$ точка C переходит в точку M, а окружность ω – в окружность ω'. Так как $C \in \omega$, то $M \in \omega'$.

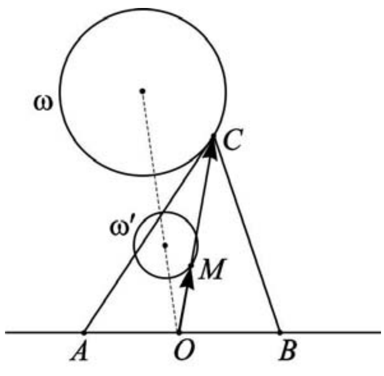


Рис. 55

Обратно, пусть M – произвольная точка окружности ω'. При гомотетии H_O^3 $\omega' \to \omega$ и, следовательно, точка M, принадлежащая окружности ω', переходит в некоторую точку C, принадлежащую ω. Так как $H_O^3(M) = C$, то $\overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OM}$. Это означает, что точка M – центроид треугольника ABC. Отсюда следует, что M принадлежит искомому геометрическому месту точек (сокращенно г.м.т.).

Итак, всякая точка M искомого г.м.т. принадлежит окружности $\omega' = H_O^{\frac{1}{3}}(\omega)$ и, обратно, всякая точка окружности ω' принадлежит искомому г.м.т. Таким образом, искомое г.м.т. есть окружность $\omega' = H_O^{\frac{1}{3}}(\omega)$, где O – середина отрезка AB.

Упражнения

417°. Объясните, из чего следует в приведенном решении, что:

а) «При гомотетии $H_O^{\frac{1}{3}}$ точка C переходит в точку M ...»;

б) «При гомотетии H_O^3 $\omega' \to \omega$ ...».

418. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S, а M – произвольная точка плоскости, отличная от точек B и C. Через точки A и D проведены прямые a и b, параллельные прямым BM и CM соответственно. Доказать, что точка пересечения прямых a и b принадлежит прямой SM.

419. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке S. Прямые a и b проходят через точки A и B и перпендикулярны стороне AB; прямые c и d проходят через точки C и D и перпендикулярны стороне CD. Доказать, что точки S, $M=a\cap d$ и $N=b\cap c$ коллинеарны.

420. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) пересекаются в точке O. Доказать, что точка O и центры окружностей, описанных около треугольников AOD и BOC, лежат на одной прямой.

421. Даны окружности $\omega_1(O_1;\ R_1)$ и $\omega_2(O_2;\ R_2)$, причем $R_1{:}R_2=2{:}3$. Точка O делит отрезок O_1O_2 в отношении 2:3. Прямая, проходящая через точку O, пересекает первую окружность в точках A и B, а вторую окружность – в точках C и D. Доказать, что отрезок, соединяющий центры окружностей, вписанных в треугольники AO_1B и CO_2D, проходит через точку O и делится этой точкой в отношении 2:3.

422. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Доказать, что отрезок, соединяющий центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, проходит через центроид M треугольника ABC. В каком отношении этот отрезок делится точкой M?

423*. Доказать, что в любом треугольнике центр O описанной окружности, центроид M и ортоцентр H принадлежат одной прямой. В каком отношении точка M делит отрезок HO?

424. Диагонали трапеции $ABCD$ ($BC||AD$) пересекаются в точке O. Точки O_1, O_2 – центры окружностей, описанных около треугольников AOD и BOC соответственно. Доказать, что четырехугольник, образованный прямыми AO_1, BO_2, CO_2, DO_1, является параллелограммом.

425. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC. Прямая, проходящая через центроид треугольника, пересекает отрезок AC в точке M, а отрезок A_1C_1 – в точке N. Доказать, что $BM||B_1N$.

426. Две окружности касаются внутренним образом в точке O. Две прямые, проходящие через точку O, пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую окружность – в точках C и D. Доказать, что $AB||CD$.

427. Точки M и M_1 – центроиды треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, в которых $AB||A_1B_1$, $BC||B_1C_1$, $CA||C_1A_1$ и $AB\neq A_1B_1$. Доказать, что $BM||B_1M_1$.

428. Окружности $\omega(O; R)$ и $\omega_1(O_1; R_1)$, где $R\neq R_1$, касаются внешним образом в точке S. Прямые a, b, c проходят через точку S и пересекают окружность ω в точках A, B, C, а окружность ω_1 – в точках A_1, B_1, C_1. Точки H и M – ортоцентр и центроид треугольника ABC, а точки H_1 и M_1 – ортоцентр и центроид треугольника $A_1B_1C_1$. Доказать, что прямые HH_1 и MM_1 проходят через точку S.

429. При переносе $T_{\vec{p}}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Прямая, параллельная стороне A_1B_1, пересекает стороны A_1C_1 и B_1C_1 в точках M и N. Доказать, что прямые CC_1, AM и BN пересекаются в одной точке.

430. Даны треугольник ABC и точка M. Точки A_2, B_2, C_2 симметричны точке M относительно середин A_1, B_1, C_1 сторон BC, CA, AB данного треугольника. Доказать, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.

431. В четырехугольник $ABCD$ вписана трапеция $MNPQ$ так, что ее основания MN и PQ параллельны диагонали AC. Доказать, что прямые MQ и PN пересекаются в точке, принадлежащей прямой BD.

432. Точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон BC, CA, AB треугольника ABC, а M – произвольная точка. Через вершины A, B, C проведены прямые a, b, c, параллельные

прямым MA_1, MB_1, MC_1 соответственно. Доказать, что прямые a, b, c пересекаются в некоторой точке N. Доказать, что точки M, N и центроид O треугольника ABC лежат на одной прямой. В каком отношении точка O делит отрезок MN?

433. Две неравные окружности касаются внешним образом в точке O. Через эту точку проведены прямые a, b, c, которые пересекают первую окружность в точках A, B, C, а вторую – в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. M – произвольная точка плоскости. Через точки A_1, B_1, C_1 проведены прямые c_1, c_2, c_3, параллельные соответственно прямым MA, MB, MC. Доказать, что прямые c_1, c_2, c_3 пересекаются в некоторой точке N. Доказать, что точки M, N, O коллинеарны.

434. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O, а M_1, M_2, M_3, M_4 – центроиды треугольников AOB, BOC, COD, DOA соответственно. Доказать, что четырехугольник $M_1M_2M_3M_4$ – параллелограмм.

435. Диагонали выпуклого многоугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны. Доказать, что точки M_1, M_2, M_3, M_4, симметричные данной точке M относительно середин сторон AB, BC, CD, DA, являются вершинами прямоугольника.

436. Точки A_1, B_1, C_1 делят стороны BC, CA, AB правильного треугольника ABC в отношении 2:1. Доказать, что точки, симметричные данной точке M относительно A_1, B_1, C_1, являются вершинами правильного треугольника.

437. Точка A принадлежит окружности ω. Найти геометрическое место точек, делящих в отношении 1:2 всевозможные хорды AX данной окружности.

438. На плоскости даны точки A, B и прямая c, пересекающая прямую AB. Точка M движется по прямой c. Найти геометрическое место вершин C треугольников ABC, для каждого из которых одна из точек M является центроидом.

439. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота CD ($\square C=90^\circ$). Доказать, что:

а) медиана AA_1 треугольника ADC перпендикулярна медиане CC_1 треугольника CDB;

б) биссектриса CC_2 треугольника ADC перпендикулярна биссектрисе BB_2 треугольника CDB.

440. Вершина B_1 квадрата $AB_1C_1D_1$ принадлежит стороне AD квадрата $ABCD$, а вершины C_1 и D_1 лежат вне квадрата $ABCD$. Точки M и N делят стороны BC и B_1C_1 (соответственно) в одинаковых отношениях. Доказать, что прямая MD перпендикулярна прямой D_1N.

441. Точка M – середина основания AB равнобедренного треугольника ABC. Точка N – середина перпендикуляра MP, проведенного к стороне BC. Доказать, что $CN \square AP$.

§ 28. Применение преобразований подобия к решению задач на построение

Как отмечалось ранее (§ 16), метод геометрических преобразований в задачах на построение конкретизируется различными приемами. Рассмотрим те из них, которые являются наиболее употребительными для преобразований подобия, отличных от движения.

28.1. Построение точки пересечения данной фигуры и образа другой данной фигуры

Этот прием используется в задачах, где требуется построить точки X и Y, принадлежащие соответственно известным (данным) фигурам Φ_1 и Φ_2 (см. п. 9.2 «Сводки», а также § 16, п. 16.2).

***Пример* 1.** Построим отрезок XY, концы которого принадлежали бы данной прямой a и данной окружности ω соответственно, так, чтобы этот отрезок делился данной точкой O в отношении 3:1, считая от прямой a.

Анализ. Допустим, что искомый отрезок XY построен (рис. 56). Рассмотрим гомотетию $H_O^{-\frac{1}{3}}$ (так как именно это преобразование переводит точку X в точку Y). При этом: $X \to Y$, $a \to a'$. Так как XÎ а, то YÎ a' и, следовательно, $Y \in a' \cap \omega$.

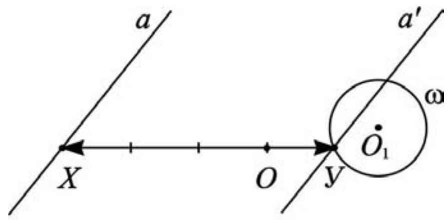


Рис. 56

Полученное соотношение позволяет построить точку Y. Имея точку Y, можно построить точку X: $X = H_O^{-3}(Y)$.

Построение. Строим:

1) прямую a' – образ прямой a при гомотетии $H_O^{-\frac{1}{3}}$;

2) точку $Y \in a' \cap \omega$ (или точки Y_1, $Y_2 \in a' \cap \omega$, если прямая a' пересекается с окружностью ω в двух точках);

3) точку X – образ точки Y при гомотетии H_O^3 (соответственно – точки X_1, X_2, гомотетичные точкам Y_1, Y_2);

4) искомый отрезок XY (соответственно – искомые отрезки X_1Y_1, X_2Y_2).

Доказательство (проведем для отрезка XY).

1. $Y \in \omega$ по построению.

2. При гомотетии H_O^{-3} $a' \to a$, $Y \to X$. Т.к. $Y \in a'$, то $X \in a$.

3. Так как $X = H_O^{-3}(Y)$, то $\overrightarrow{OX} = -3\overrightarrow{OY}$ и, следовательно, точка O принадлежит отрезку XY и делит его в отношении 3:1, считая от точки X.

Исследование. Задача может иметь одно, два или ни одного решения в зависимости от взаимного расположения данных фигур (точка O, прямая a, окружность ω).

Упражнения

442. Даны точка O и прямые a и b. Построить отрезок AB, концы A и B которого принадлежали бы прямым a и b соответственно так, чтобы точка A делила отрезок OB в отношении 2:1.

443. Точка A расположена вне окружности ω. На окружности ω построить такие точки B и C, чтобы диаметр CD был медианой треугольника ABC.

444. Даны две концентрические окружности и на одной из них – точка A. Провести через точку A прямую, на которой эти окружности высекают три равные хорды.

Указание. Рассмотреть два случая: а) точка A принадлежит внешней окружности; б) точка A принадлежит внутренней окружности.

445. Даны точка A и окружности ω_1 и ω_2. Построить треугольник ABC так, чтобы $\angle BAC$=60°, AB:AC=1:3, а вершины B и C принадлежали окружностям ω_1 и ω_2 соответственно.

446. Точка M принадлежит стороне AB данного треугольника ABC. Построить прямоугольный треугольник MXY, ка-

теты MX и MY которого относятся как 1:2, так, чтобы вершина X принадлежала стороне AC, а вершина Y – стороне BC.

447. Даны точка A и окружности ω_1 и ω_2. Построить правильный треугольник ABC так, чтобы вершина B принадлежала окружности ω_1, а середина стороны AC – окружности ω_2.

448. Даны прямые a, b, c и точка AÎ c. Построить ромб $ABCD$ так, чтобы вершина B принадлежала прямой a, вершина C – прямой c, а середина стороны AD – прямой b.

28.2. Пополнение множества известных точек

Этот прием используется в задачах, где искомая фигура изначально задается некоторыми точками, которых, на первый взгляд, недостаточно, чтобы построить эту фигуру (см. п. 9.3. «Сводки», а также § 16, п. 16.3).

***Пример* 2.** Построим ромб $ABCD$, если известны вершина A, прямая b, содержащая диагональ AC, точка M, принадлежащая прямой BC, и точка N, принадлежащая прямой, проходящей через середины сторон BC и AD.

Анализ. Допустим, что искомый ромб построен (рис. 57). Рассмотрим центрально-подобную симметрию $S_b \circ H_A^2$. При этом прямая, проходящая через середины сторон BC и AD, переходит в прямую BC, а точка N – в точку N', принадлежащую прямой BC. Это дает возможность построить прямую BC; располагая последней, можно построить искомый ромб.

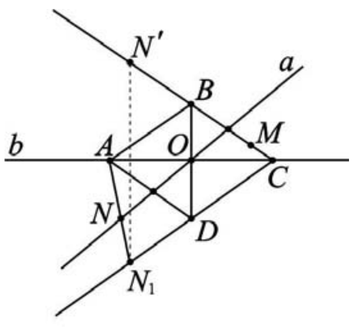


Рис. 57

План построения. Строим последовательно:

– точку N' – образ точки N при центрально-подобной симметрии $S_b \circ H_A^2$;

– прямую MN';

– точку $C = MN' \cap b$;

– прямую CN_1, где $N_1 = H_A^2(N)$;

– середину отрезка AC – точку O;

– вершины B и D;

– $ABCD$ – искомый ромб.

Доказательство и исследование предоставляем читателю.

Упражнения

449. Построить правильный треугольник ABC, зная его вершину A, точку M, принадлежащую прямой BC, и точку N, принадлежащую прямой, которая параллельна BC и делит стороны AB и AC в отношении 3:1.

450. Построить квадрат $ABCD$, зная его вершину A, точку M, принадлежащую прямой BD, и точку N, принадлежащую прямой, проходящей через середины сторон BC и CD.

451. Построить правильный треугольник ABC, зная его центр O, точку M, принадлежащую прямой BC, и точку N, принадлежащую прямой, проходящей через середины сторон AC и BC.

452. Построить квадрат $ABCD$, зная его центр O, точку M, принадлежащую прямой AB, и точку N, принадлежащую прямой, которая параллельна BC и делит отрезки OB и OC в отношении 1:2.

28.3. Приём подобия

Этот приём (по сложившейся традиции его называют методом подобия) является частным проявлением приема построения прообраза искомой фигуры (см. § 16, п. 16.4., а также п. 9.4. «Сводки»). Он используется в задачах, условия которых можно разбить на две группы, одна из которых определяет искомую фигуру с точностью до подобия.

Итак, пусть требуется построить фигуру Φ, обладающую определенными свойствами. Вначале строят вспомогательную фигуру Φ_1, которая обладает лишь некоторыми из этих свойств и подобна искомой фигуре. Затем подбирают такое преобразование подобия f, при котором фигура Φ_1 переходит в искомую фигуру Φ. Чаще всего в качестве преобразования f применяют гомотетию (см. п. 9.4-а. «Сводки»).

***Пример* 3.** Построим треугольник ABC, зная отношение $m{:}n$ двух его сторон, угол φ, заключенный между ними, и сумму p всех его медиан (здесь m, n, p – данные отрезки, φ – данный угол).

Анализ. Используя условия $AB{:}AC = m{:}n$ и $\angle BAC = \varphi$, можно построить вспомогательный треугольник AB_1C_1, подобный искомому треугольнику ABC. Для этого достаточно на сторонах угла, равного углу φ, отложить отрезки $AB_1 = m$, $AC_1 = n$ или отрезки, пропорциональные m и n (рис.58).

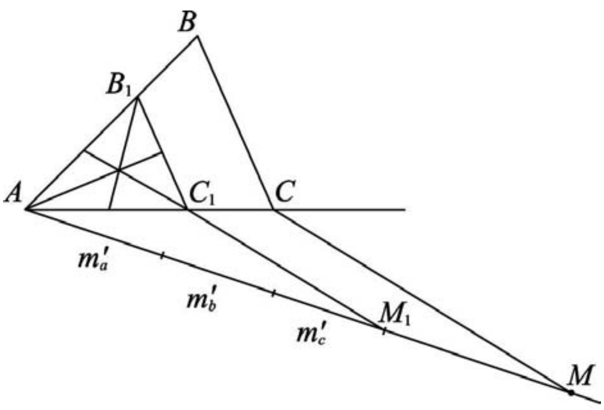


Рис. 58

Подберем теперь коэффициент k такой гомотетии H_A^k, при которой треугольник AB_1C_1 переходит в искомый треугольник ABC с заданной суммой p всех его медиан. Пусть m'_a, m'_b, m'_c – длины медиан вспомогательного треугольника AB_1C_1, а m_a, m_b, m_c – длины медиан искомого треугольника ABC. Так как при гомотетии H_A^k $\Delta AB_1C_1 \to \Delta ABC$, то медианы первого треугольника переходят в соответствующие медианы треугольника ABC и, следовательно, $m_a=k\cdot m'_a$, $m_b=k\cdot m'_b$, $m_c=k\cdot m'_c$. Складывая эти равенства, находим искомый коэффициент:

$k = \dfrac{m_a + m_b + m_c}{m'_a + m'_b + m'_c} = \dfrac{p}{p_1}$, где p_1 – сумма медиан треугольника AB_1C_1, а p – данный отрезок.

Построение. Строим последовательно (рис. 58):

1) ΔAB_1C_1, в котором $\angle B_1AC_1=\varphi$, $AB_1=m$, $AC_1=n$;

2) ΔABC – образ треугольника AB_1C_1 при гомотетии H_A^k, где $k = \dfrac{p}{p_1}$, для чего:

– на луче, выходящем из точки A, откладываем $AM = p$,

$AM_1 = p_1 = m'_a + m'_b + m'_c$;

– строим точку C – точку пересечения луча AC_1 и прямой, которая проходит через точку M и параллельна M_1C_1 (иначе говоря, $C = H_A^k\ (C_1)$);

– строим на луче AB_1 точку B так, чтобы $BC||B_1C_1$; иначе говоря, $B= H_A^k\ (B_1)$.

Доказательство. В треугольнике ABC Ð$BAC=\varphi$ по построению. Так как $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AB_1}{AC_1} = \dfrac{m}{n}$.

При гомотетии H_A^k медианы треугольника AB_1C_1 переходят в медианы треугольника ABC, поэтому $m_a=k\cdot m'_a$, $m_b=k\cdot m'_b$, $m_c=k\cdot m'_c$, откуда

$$m_a + m_b + m_c = k\cdot(m'_a + m'_b + m'_c) = \frac{p}{p_1} \cdot p_1 = p,$$

что и требовалось доказать.

Исследование. Легко видеть, что данная задача имеет решение при любом выборе исходных данных.

Упражнения

453. Построить треугольник ABC, зная два его угла A и B и периметр $2p$.

454. Построить треугольник ABC, стороны которого пропорциональны данным отрезкам m, n, p, а сумма биссектрис углов A и B равна данному отрезку q.

Примечание. Обратим внимание на коэффициенты тех гомотетий, которые применялись в примере 3 и упр. 453 – 454:

а) *в примере 3*: $k = \dfrac{p}{p_1}$, где p – сумма медиан искомого треугольника (она известна), а p_1 – сумма медиан вспомогательного треугольника;

б) *в упражнении 453*: $k = \dfrac{2p}{2p_1}$, где $2p$ – периметр искомого треугольника (он известен), а $2p_1$ – периметр вспомогательного треугольника.

в) *в упражнении 454*: $k = \dfrac{q}{q_1}$, где q – сумма биссектрис искомого треугольника (она известна), а q_1 – сумма соответствующих биссектрис вспомогательного треугольника.

Как видим, во всех трех задачах коэффициент гомотетии оказался равным отношению ***известного*** «линейного элемента» ***искомой фигуры*** к ***соответствующему (одноименному)*** «линейному элементу» ***вспомогательной фигуры***. Это наблюдение позволяет в аналогичных задачах начинать решение сразу с построения, опуская анализ в силу его очевидности.

Решение приведенной ниже задачи осуществляется (в соответствии с вышесказанным) по упрощенному сценарию.

***Пример* 4.** Построим ромб, зная его угол φ и сумму диагоналей p.

Поиск решения. В данной задаче первое условие (угол ромба равен данному углу φ) позволяет построить вспомогательный ромб, подобный искомому. «Линейный элемент» искомого ромба – сумма диагоналей p, значит, коэффициент необходимой гомотетии $k=\dfrac{p}{p_1}$, где p_1 – сумма диагоналей вспомогательного ромба. Отсюда вытекает следующее *построение.*

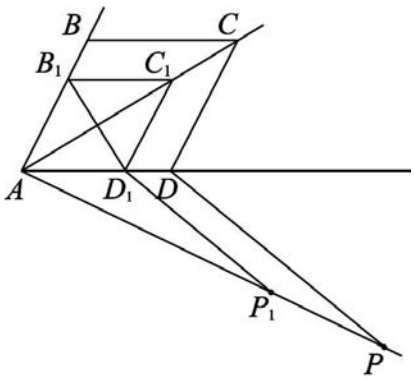


Рис. 59

Строим: 1) ромб $AB_1C_1D_1$, в котором Ð $B_1AD_1=\varphi$ (рис. 59);

2) ромб $ABCD$ – образ ромба $AB_1C_1D_1$ при гомотетии H_A^k, где $k=\dfrac{p}{p_1}$, $p_1=AC_1+B_1D_1$.

Доказательство. При гомотетии ромб переходит в ромб, следовательно, построенный четырехугольник $ABCD$ является ромбом.

Далее Ð$BAD=\varphi$ по построению.

При гомотетии H_A^k диагонали AC_1 и B_1D_1 переходят в диагонали AC и BD, следовательно, $AC=k\cdot AC_1$, $BD=k\cdot B_1D_1$. Складывая эти равенства, получаем: $AC+BD=k\cdot(AC_1+B_1D_1)=\dfrac{p}{p_1}\cdot p_1=p$, что и требовалось доказать.

Исследование. Задача имеет единственное решение при любом выборе исходных данных.

Упражнения

455. Построить параллелограмм, зная его сторону, отношение диагоналей и угол между ними.

456. Построить треугольник ABC, зная отношение высот, проведенных к сторонам AB и AC, угол, заключенный между этими сторонами, и радиус вписанной окружности.

457. Построить равнобочную трапецию $ABCD$, зная ее углы при большем основании AD, отношение боковой стороны к этому основанию и диагональ.

458. Построить треугольник ABC, зная угол A, биссектрису этого угла и отношение высоты h_b к медиане m_a.

459. Построить треугольник ABC, медианы m_a, m_b, m_c которого пропорциональны данным отрезкам m, n, p, а сумма высот h_a и h_b равна данному отрезку d.

Рассмотрим примеры задач, в которых выбор центра гомотетии (в отличие от рассмотренных выше задач) имеет принципиальное значение. К их числу относятся такие задачи, в которых требуется построить фигуру, расположенную определенным образом относительно данных фигур; иногда такие задачи называют позиционными.

***Пример* 5.** Даны острый угол MPK и прямая a, пересекающая стороны угла.

Построим квадрат $ABCD$, центр которого принадлежит прямой a, вершина A – лучу PM, а вершины B и C – лучу PK.

Анализ. Нетрудно построить вспомогательный квадрат $A_1B_1C_1D_1$, такой, что A_1Î PM, B_1Î PK, C_1Î PK (рис. 60).

Подберем гомотетию, при которой квадрат $A_1B_1C_1D_1$ переходит в искомый квадрат.

Центром такой гомотетии может служить только вершина данного угла – точка P. При этой гомотетии центр O_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ переходит в точку O – центр искомого квадрата. С одной стороны, точка O должна принадлежать прямой a, с другой стороны, точка O принадлежит лучу PO_1. Таким образом, искомая гомотетия определяется точкой P и парой соответствующих точек O_1 и O, где $O_1 \to O$. Отсюда вытекает следующее *построение*.

Строим:

1) квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис. 60);

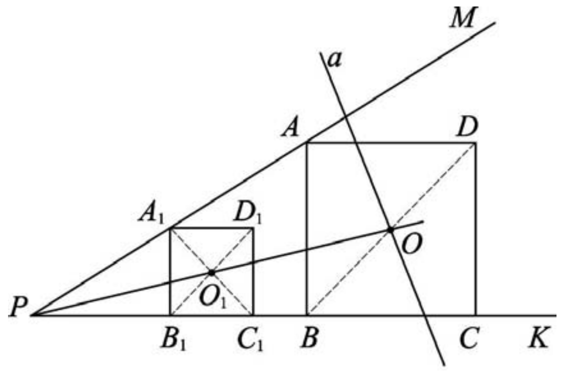


Рис. 60

2) точку $O = a \cap PO_1$, где O_1 – центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$;

3) квадрат $ABCD$ – образ квадрата $A_1B_1C_1D_1$ при гомотетии, определяемой центром P и точками O_1 и O.

Доказательство и исследование опускаем в силу их очевидности.

Изложим общие соображения по поводу задания гомотетии в задачах, аналогичных рассмотренной, сопоставляя это изложение с вышеприведенным решением.

Искомая фигура Φ (квадрат $ABCD$) должна обладать рядом свойств α, β, γ... (AÎ PM; B, CÎ PK; OÎ a). Фигура Φ_1 (квадрат $A_1B_1C_1D_1$) обладает первыми двумя свойствами. Гомотетия, переводящая Φ_1 в Φ, подбирается так, чтобы эти свойства передавались от фигуры Φ_1 фигуре Φ, а третье свойство (O□a) приобреталось фигурой Φ. В рассмотренной выше задаче выбор точки P в качестве центра гомотетии и обеспечил как раз передачу первых двух свойств фигуре Φ; выбор точек O_1 и O в качестве соответствующих позволил фигуре Φ приобрести третье свойство, которым фигура Φ_1 не обладала.

Отметим также, что и в задачах позиционного типа решение нередко начинается сразу с построения.

Упражнения

460. В данный треугольник ABC вписать квадрат $MNPK$ так, чтобы вершины M и K принадлежали стороне AB, вер-

шина N – стороне AC, а вершина P – стороне BC.

461. В данный треугольник вписать прямоугольник, подобный данному.

462. Построить окружность, которая касается сторон данного угла и проходит через данную точку M, лежащую внутри этого угла.

463. В треугольник ABC вписать треугольник MNP так, чтобы стороны MN, NP, PM были параллельны данным прямым a, b, c соответственно, а точки M, N, P принадлежали сторонам AB, BC, CA соответственно.

464. Построить две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон данного треугольника и другой окружности.

465. В данный сектор вписать квадрат. Рассмотреть два случая: а) дуга сектора содержит одну вершину квадрата; б) дуга сектора содержит две вершины квадрата.

466. Даны угол MPK и окружность ω. Построить квадрат $ABCD$ так, чтобы вершины A и B принадлежали лучу PK, вершина C – лучу PM, а вершина D – окружности ω.

467. Даны треугольник ABC и прямая a, пересекающая стороны AB и AC. Построить правильный треугольник MPK так, чтобы вершины M, P, K принадлежали соответственно сторонам AB, BC и AC, а сторона MK была параллельна прямой a.

468. Дан треугольник ABC. Построить трапецию $BMNP$, в которой $BM=MN=NP$ и вершина M принадлежит стороне AB, а вершины N и P – прямой AC.

469. Дан треугольник ABC. На прямой BC построить такую точку, чтобы отрезок, соединяющий основания перпендикуляров, опущенных из этой точки на прямые AB и

AC, был параллелен биссектрисе угла B.

§ 29. Разные задачи

470. Исследовать композицию трех гомотетий: $H_C^{k_3} \circ H_B^{k_2} \circ H_A^{k_1}$.

471. Даны окружности ω_1, ω_2, ω_3, центры и радиусы которых попарно различны. Точки A, B, C – центры гомотетий с коэффициентами k_1, k_2, k_3, при которых $\omega_1 \to \omega_2$, $\omega_2 \to \omega_3$, $\omega_3 \to \omega_1$ соответственно. Доказать, что если $k_1>0$, $k_2>0$, $k_3>0$, то точки A, B, C коллинеарны.

472. Две неравные окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Доказать, что если M и N – центры гомотетий, переводящих ω_1 в ω_2, то $\angle MAN=\angle MBN=90°$.

473. Даны гомотетии $H_A^{k_1}$ и $H_B^{k_2}$, где $k_1 \neq k_2$ и точка C, определяемая условием $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1-k_2}{k_1-k_2} \cdot \overrightarrow{AB}$. Доказать, что точка C имеет один и тот же образ при этих гомотетиях.

474. Даны гомотетии $H_A^{k_1}$ и $H_B^{k_2}$, где $k_1 \neq k_2$. Доказать, что существует бесконечное множество прямых, которые имеют при этих гомотетиях один и тот же образ.

475. Даны три гомотетии с попарно различными коэффициентами. Доказать, что существует по крайней мере одна прямая, которая имеет один и тот же образ в этих гомотетиях.

476. Какому необходимому и достаточному условию должны удовлетворять коэффициенты гомотетий $H_A^{k_1}$ и $H_B^{k_2}$, где $A \neq B$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, чтобы существовала хотя бы одна окружность, которая имеет один и тот же образ в

этих гомотетиях?

477. На прямой даны точки A, B, A_1, B_1, причем $AB \neq A_1B_1$. Доказать, что существует единственная точка O, такая, что при некоторой гомотетии с центром O $A \to A_1$, $B \to B_1$.

478. а) При центрально-подобной симметрии $H_O^k \circ S_a$ треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что если точка O – ортоцентр треугольника ABC, то точка O является ортоцентром и треугольника $A_1B_1C_1$.

б) При центрально-подобном вращении $R_O^\alpha \circ H_O^k$ трапеция $ABCD$, вписанная в окружность с центром O, переходит в трапецию $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что точка O является центром окружности, описанной и около трапеции $A_1B_1C_1D_1$.

479. Даны различные точки A, A_1 и положительное число k. Рассматривается множество всех преобразований подобия с коэффициентом k, переводящих точку A в точку A_1. Доказать, что множество инвариантных точек этих подобий совпадает с множеством точек, отношение расстояний каждой из которых до точек A_1 и A постоянно и равно k.

Что представляет собой указанное множество точек, если $k=1$?

480. Охарактеризовать множество всех инвариантных точек гомотетий, переводящих данную точку A в другую данную точку B.

481. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 имеют одинаковые радиусы и касаются сторон углов A, B, C треугольника ABC соответственно. Окружность ω касается внешним образом

всех трех окружностей ω_1, ω_2, ω_3. Доказать, что центр окружности ω и центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC лежат на одной прямой.

482. Даны окружность ω, вписанная в треугольник ABC, и окружность ω', касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. M и N – точки касания этих окружностей со стороной BC, а точка P – конец диаметра NP окружности ω'. Доказать, что точки A, M, P лежат на одной прямой.

ГЛАВА IV. Аффинные преобразования

§ 30. Аффинные преобразования и их свойства

Определение. Преобразование плоскости называется аффинным, если оно переводит коллинеарные точки в коллинеарные точки и сохраняет простое отношение любых трех коллинеарных точек[1].

Упражнения

483°. Как доказать, что некоторое преобразование плоскости является аффинным?

484*. Как соотносятся понятия:

– «движение» и «аффинное преобразование»?

– «преобразование подобия» и «аффинное преобразование»?

Изобразите при помощи круговой диаграммы (диаграммы Эйлера-Венна) соотношение между указанными понятиями.

485°. Преобразование плоскости задано в аффинном репере формулами $x' = x,\ y' = ky$, где $k \neq 0$. Доказать, что данное преобразование является аффинным.

486°. Аффинное преобразование f задано в ортонормированном репере формулами $x' = x,\ y' = ky$, где $k \neq 0$. Доказать, что если $k \neq \pm 1$, то преобразование f не является подобием (и, следовательно, не является движением).

487*. Всякое аффинное преобразование обладает по определению двумя свойствами; назовем их характеристиче-

[1] Совершенно аналогично определяется аффинное преобразование в трехмерном пространстве.

скими. (Они содержатся в приведенном выше определении). Прочитайте примечание к п. 6° в § 7. Используя это утверждение, сформулируйте те свойства аффинных преобразований, которые являются логическими следствиями вышеупомянутых характеристических свойств.

488*. Доказать, что при аффинном преобразовании треугольник отображается на треугольник и при этом медианы переходят в медианы, а центроид – в центроид.

489*. Доказать, что при аффинном преобразовании параллелограмм переходит в параллелограмм.

490*. Доказать, что при аффинном преобразовании трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD переходит в такую трапецию $A'B'C'D'$, в которой $B'C'$: $A'D' = BC$:AD.

491*. Доказать, что композиция двух аффинных преобразований есть аффинное преобразование.

492*. Доказать, что преобразование, обратное аффинному, есть аффинное преобразование.

493*. Доказать, что если две точки некоторой прямой являются инвариантными точками аффинного преобразования, то все точки этой прямой являются инвариантными.

494*. Доказать, что если три неколлинеарные точки являются инвариантными точками аффинного преобразования f, то все точки плоскости являются инвариантными (и, следовательно, $f = e$).

495*. Доказать, что для аффинных преобразований возможны только четыре случая:

– преобразование не имеет инвариантных точек;

– преобразование имеет единственную инвариантную точку;

– множество всех инвариантных точек данного преобразования – прямая;

– все точки плоскости являются инвариантными.

Используя диаграмму 1 (классификация преобразований подобия), приведите примеры аффинных преобразований каждого типа.

Примечание. В случае (б) аффинное преобразование называется центро-аффинным, а в случае (в) – перспективно-аффинным; прямая инвариантных точек называется при этом осью перспективно-аффинного преобразования.

496*. Доказать, что если точка A не принадлежит оси перспективно-аффинного преобразования, то ее образ A' также не принадлежит этой оси.

497*. При перспективно-аффинном преобразовании f с осью s точка A, где $A \notin s$, переходит в точку A', причем прямые AA' и s пересекаются. Доказать, что:

– прямая AA' является инвариантной;

– всякая прямая, параллельная прямой AA', является инвариантной;

– все прямые MM', где $M \notin s$, $M' = f(M)$, образуют пучок параллельных (инвариантных) прямых.

Приведите пример такого перспективно-аффинного преобразования.

498*. Даны аффинные преобразования f и φ. Доказать, что если для некоторых точек A и B $f(A) = \varphi(A)$ и $f(B) = \varphi(B)$, то для любой точки C прямой AB $f(C) = \varphi(C)$.

(Иначе говоря, если аффинные преобразования f и φ одинаково действуют на две точки некоторой прямой, то f и φ одинаково действуют на любую точку этой прямой).

499*. Доказать, что если аффинные преобразования f и φ одинаково действуют на какие-либо три неколлинеарные точки, то f и φ одинаково действуют на любую точку плоскости и, следовательно, $f = \varphi$.

§ 31. Теорема об аффинной подвижности плоскости
(основная теорема об аффинных преобразованиях)

Теорема 12. Каковы бы ни были два аффинных репера $R = \{O, E_1, E_2\}$ и $R' = \{O', E_1', E_2'\}$, существует, и притом единственное, аффинное преобразование, при котором репер R переходит в репер R', т.е. $O \to O'$, $E_1 \to E_1'$, $E_2 \to E_2'$.

Доказательство. Существование. Рассмотрим отображение f плоскости в себя, при котором каждой точке с координатами x, y в репере R ставится в соответствие точка с теми же координатами в репере R'.

Очевидно, что, во-первых, f – преобразование плоскости; во-вторых, отображение f переводит точки O, E_1, E_2 в точки O', E'_1, E'_2 соответственно.

Докажем, что f – аффинное преобразование. Действительно, рассмотрим произвольные коллинеарные точки $A(x_1; y_1)_R$, $B(x_2; y_2)_R$, $C(x_3, y_3)_R$ (рис. 61).

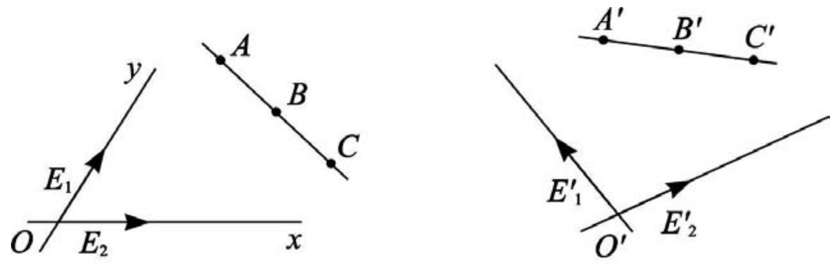


Рис. 61

Преобразование f переводит их соответственно в точки $A'(x_1; y_1)_{R'}$, $B'(x_2; y_2)_{R'}$, $C'(x_3, y_3)_{R'}$. Т.к. точки A, B, C коллинеарны, то их координаты удовлетворяют уравнению $ax + by + c = 0$ той прямой, которой эти точки принадлежат. Но тогда и координаты точек A', B', C' также удовлетворяют этому уравнению и, следовательно, точки A', B', C' коллинеарны.

Далее, обозначим $(AB,C) = \lambda$, $(A'B',C') = \lambda'$.

Применяя к точкам A, B, C известные формулы, получаем $x_3 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}$, $y_3 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}$, откуда $\lambda = \dfrac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$, если $x_2 \neq x_3$, и $\lambda = \dfrac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2}$, если $y_2 \neq y_3$.

Рассуждая аналогично, получаем для точек A', B', C' формулы $\lambda' = \dfrac{x_1 - x_3}{x_3 - x_2}$, если $x_2 \neq x_3$, и $\lambda' = \dfrac{y_1 - y_3}{y_3 - y_2}$, если $y_2 \neq y_3$.

Сравнивая эти формулы, получаем $\lambda = \lambda'$.

Таким образом, отображение f сохраняет коллинеарность точек и простое отношение точек и, следовательно, является аффинным.

Единственность. Допустим, что существует еще одно аффинное преобразование φ, при котором $O \to O'$, $E_1 \to E_1'$, $E_2 \to E_2'$. Т.к. преобразования f и φ одинаково действуют на три неколлинеарные точки O, E_1, E_2, то $f = \varphi$ (упр.499). Теорема полностью доказана.

Следствие. 1°. Если при аффинном преобразовании аффинный репер R переходит в аффинный репер R', а точка M – в точку M', то координаты точки M' в репере R' совпадают с координатами точки M в репере R.

2°. Если при аффинном преобразовании аффинный репер R переходит в аффинный репер R', то фигура Φ, заданная в репере R уравнением $F(x; y) = 0$ (неравенством $F(x; y) > 0$ и т.д.), переходит в фигуру Φ', которая в репере R' задается тем же уравнением (неравенством).

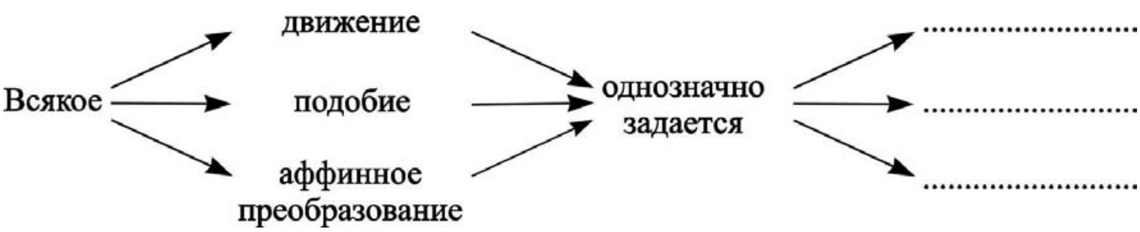
Пример. Докажем, что при аффинном преобразовании окружность переходит в эллипс.

Решение. Пусть R – ортонормированный репер, в котором данная окружность задается уравнением $x^2 + y^2 = a^2$. При аффинном преобразовании репер R переходит в аффинный репер R'. В репере R' образ окружности ω задается тем же уравнением: $x^2 + y^2 = a^2$.

Как известно, это уравнение в аффинном репере задает эллипс.

Упражнения

500°. Сравните теорему 12 с теоремой 1 (§9) и упражнениями 345, 348. Основываясь на этом сравнении, завершите следующее составное утверждение.



501*. Доказать, что каковы бы ни были два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, существует, и притом единственное, аффинное преобразование, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (и, следовательно, треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$).

Это утверждение можно, несколько вольным образом, сформулировать так: «Аффинное преобразование однозначно задается двумя произвольными треугольниками».

502°. Сравните результаты упр. 501, примера в §21 и примера 2 в §9. Объедините эти результаты в одно составное утверждение по образцу упр. 500.

503*. Доказать, что каковы бы ни были две тройки неколлинеарных точек A, B, C и A_1, B_1, C_1, существует, и притом единственное, аффинное преобразование, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

Это утверждение (будучи, по существу, перефразировкой утверждения из упр. 501) нередко формулируют так: «Аффинное преобразование однозначно задается тремя парами соответствующих точек».

504. Дан квадрат $ABCD$. Точки B_1 и D_1 – середины сторон AB и AD. При некотором аффинном преобразовании f точки A, B, D переходят в точки A, D_1, B_1 соответственно. Доказать, что f – центрально-подобная симметрия. Найти точку $f(C)$.

505. Точка O – центр квадрата $ABCD$, а точки B_1 и C_1 – середины отрезков OB и OC. При некотором аффинном преобразовании f точки O, A, B переходят в точки O, B_1, C_1 соответственно. Доказать, что f – центрально-подобное вращение. Найти точки $f(C)$ и $f(D)$.

506*. Доказать, что при аффинном преобразовании:

– отрезок переходит в отрезок, вообще говоря, не равный данному;

– угол переходит в угол, вообще говоря, не равный данному;

– перпендикулярность прямых, вообще говоря, не сохраняется.

507*. Сравните свойства движений (§7, свойства 1 – 8), подобий (упр. 340, свойства а – и) и аффинных преобразований. Найдите отличия.

508. Даны треугольники ABC и $A'B'C'$. Аффинное преобразование f задано тремя парами соответствующих точек: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Построить образ произвольной точки M.

Указание. Рассмотрите случаи:

а) точка M принадлежит прямой AB (прямой BC; прямой AC);

б) точка M лежит внутри треугольника ABC;

в) точки M и A лежат по разные стороны от прямой BC (точки M и B лежат по разные стороны от прямой AC;

точки M и C лежат по разные стороны от прямой AB).

509*. Даны прямая s и точки A и A', не принадлежащие этой прямой. Доказать, что существует единственное аффинное преобразование, при котором $A \to A'$ и все точки прямой s являются инвариантными. Доказать, что это преобразование является перспективно-аффинным.

Примечание. Доказанное утверждение означает, что перспективно-аффинное преобразование однозначно задается своей осью и парой соответствующих точек, не принадлежащих оси.

510. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой соответствующих точек A и A', причем прямые AA' и s пересекаются.

Построить образы точек M_1, M_2, M_3, M_4, расположенных так, как показано на рис. 62, где $AM_3 \| s$.

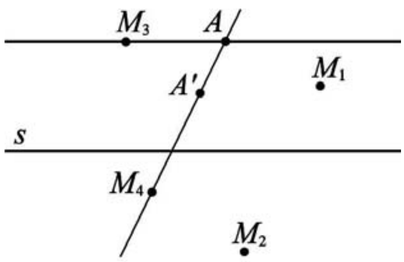


Рис. 62

Указание. Для отыскания образа точки M_1 постройте вначале образ прямой AM_1, а затем примените свойства, рассмотренные в упр. 497.

511*. Перспективно-аффинное преобразование f задано осью s и парой соответствующих точек A и A', где $A \notin s$, $AA' \| s$. Доказать, что:

а) прямая AA' является инвариантной;

б) всякая прямая, параллельная оси s, является инвариантной;

в) все прямые MM', где $M \notin s$ и $M' = f(M)$, образуют (вместе с прямой s) пучок параллельных инвариантных прямых.

512. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой соответствующих точек A и A', причем $AA' \parallel s$. Построить образы точек M_1, M_2, M_3, расположенных так, как показано на рис. 63.

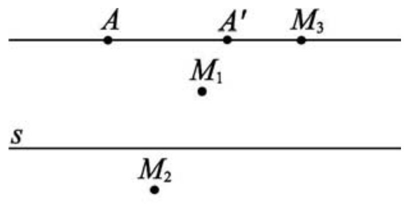


Рис. 63

Примечание. Пусть f – перспективно-аффинное преобразование с осью s. Из упр. 497 и 511 явствует, что возможны только два случая: а) все прямые MM', где $M \notin s$, $M' = f(M)$, параллельны друг другу и пересекают ось s; б) все прямые MM', где $M \notin s$ и $M' = f(M)$, параллельны оси s.

В первом случае преобразование f будем называть перспективно-аффинным преобразованием первого типа; во втором случае – перспективно-аффинным преобразованием второго типа.

Отсюда вытекают приемы распознавания перспективно-аффинных преобразований первого и второго типов (см. п. 2.16 – 2.17. в «Сводке»).

§ 32. Аналитическое выражение аффинных преобразований

Теорема 13. Всякое аффинное преобразование задается в любом аффинном репере формулами вида $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$ (*), которые удовлетворяют условию $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (1).

Доказательство. Пусть $R = \{O, E_1, E_2\}$ – аффинный репер и аффинное преобразование f переводит произвольную точку M $(x;\ y)$ в точку M' $(x';\ y')$ (все координаты берутся в репере R).

Преобразование f переводит данный репер R в некоторый репер $R' = \{O', E_1', E_2'\}$. В репере R' точка M' имеет координаты x и y.

Пусть в репере R: O' $(c_1;\ c_2)$, $\overrightarrow{O'E_1'}(a_1; a_2)$, $\overrightarrow{O'E_2'}(b_1; b_2)$. Составим формулы перехода от репера R к реперу

R': $x = a_1x' + b_1y' + c_1$, $y = a_2x' + b_2y' + c_2$ (2).

Применяя эти формулы к точке M', получим формулы (*). Они выражают координаты точки M' в репере R через координаты точки M в том же репере, следовательно, эти формулы и являются искомыми. Заметим, наконец, что в формулах (2), а значит, и в формулах (*) выполняется условие (1). Теорема доказана.

Следствия. 1°. Формулы (*) можно записать в матричной форме так: $X' = A \cdot X + X_0$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, $X_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от репера R к реперу R'.

2°. Формулы (*) могут быть получены из формул перехода от репера R к реперу R' путем замены x на x', y на y' и наоборот (см. п. 4.5. в «Сводке»).

Примечание. Из теоремы 13 следует, что к аффинным преобразованиям применимы теоремы 4 – 5 (§ 11). Предлагаем читателю сформулировать (конкретизировать) эти теоремы для аффинных преобразований.

В частности, теорема 5 делает возможным следующее **определение**. Аффинное преобразование называется преобразованием первого рода (второго рода), если оно сохраняет (изменяет) ориентацию какого-либо (а значит, любого) репера.

Отсюда, учитывая теорему 13, следствие 1 и определение одинаково (противоположно) ориентированных реперов, приходим к **выводу:** аффинное преобразование, заданное формулами (*), является преобразованием первого рода (второго рода) тогда и только тогда, когда $\det A > 0$ ($\det A < 0$).

513°. Объясните, почему (на каком основании) в доказательстве теоремы 13 утверждается, что:

а) «… Преобразование f переводит данный репер R в некоторый репер R'…»;

б) «… В репере R' точка M' имеет координаты x и y».

514°. Даны два аффинных репера $R=\{O,E_1,E_2\}$ и $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, причем в репере R: O' (3; 1), $\overrightarrow{O'E_1'}(2;1)$, $\overrightarrow{O'E_2'}(-1;2)$. Составить формулы аффинного преобразования f, переводящего репер R в репер R′.

515°. Доказать, что существует аффинное преобразование, которое в репере $R=\{O,E_1,E_2\}$ задается формулами $x'=x+2y+1$, $y'=x+4y-2$. Охарактеризуйте образ репера R в этом преобразовании.

516°. Отображение f плоскости в себя задано в аффинном репере $R=\{O,E_1,E_2\}$ формулами $x'=-x+y+3$, $y'=4x-y-7$. Доказать, что:

а) f – преобразование плоскости;

б) преобразование f совпадает с некоторым аффинным преобразованием (и, следовательно, является аффинным).

517*. Доказать, что всякое отображение плоскости в себя, заданное в аффинном репере формулами (*), которые удовлетворяют условию (1), является аффинным преобразованием.

Примечание. Объединяя это утверждение с теоремой 13, приходим к выводу: отображение плоскости в себя является аффинным преобразованием тогда и только тогда, когда в некотором аффинном репере оно задается линейными формулами (*), которые удовлетворяют условию (1) (см. п. 2.14.2. в «Сводке»).

518. Доказать, что существует такое аффинное преобразование, при котором $A(1;1) \to A'(2;3)$, $B(2;2) \to B'(2;6)$, $C(3;0) \to C'(5;3)$. Составить формулы этого преобразования, определить его род и найти его инвариантные точки.

519. Доказать, что не существует такого аффинного преобразования, при котором:

а) $A(2;1) \to A'(3;0)$, $B(4;2) \to B'(-1;3)$, $C(6;3) \to C'(-1;-2)$;

б) $A(1;1) \to A'(-1;0)$, $B(2;2) \to B'(0;2)$, $C(3;0) \to C'(1;4)$;

в) $A(-1;-1) \to A'(4;0)$, $B(3;3) \to B'(4;1)$, $C(1;1) \to C'(4;2)$.

520. Даны аффинные реперы $R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ и $R'=\{O',\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$, где $O'(2;1)_R$, $\vec{e}_1'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_2'=\vec{e}_1-\vec{e}_2$.

Аффинное преобразование f задано в репере R формулами: $x' = 2x + 3y-5$, $y' = 3x + 2y-7$. Составить формулы преобразования f в репере R′ в матричной и координатной формах.

521*. В репере $R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ аффинное преобразование f задано формулами $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$. Точка M_0 $(x_0;\ y_0)$ – инвариантная точка преобразования f. Доказать, что в репере $R'=\{M_0,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ преобразование f задается формулами $x' = a_1x + b_1y$, $y' = a_2x + b_2y$.

Указание. Предварительно составьте формулы преобразования f в репере R′ в матричной форме.

522*. Аффинное преобразование в репере $R=\{O,\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ задано матричным уравнением $X' = A\cdot X + X_0$. Доказать, что для данного преобразования число $\det A$ не зависит от выбора репера R.

Определение. Аффинное преобразование, заданное в репере R матричным уравнением $X' = A \cdot X + X_0$, называется унимодулярным, если $\det A = 1$.

К числу унимодулярных преобразований относятся все движения первого рода.

§ 33. Примеры аффинных преобразований плоскости

Всякое подобие (в частности, всякое движение) является аффинным преобразованием. Поэтому к числу последних относятся параллельный перенос, гомотетия (в частности, центральная симметрия), центрально-подобная симметрия и т.д. (см. диаграмму 1). Рассмотрим новые примеры аффинных преобразований.

33.1. Косое сжатие

Определение. Пусть даны пересекающиеся прямые a и b и число k, отличное от 0 и 1. Косым сжатием называется отображение плоскости в себя, при котором всякая точка M переходит в такую точку M', что $\overrightarrow{M_0M'} = k \cdot \overrightarrow{M_0M}$, где M_0 – точка пересечения прямой a с прямой, проходящей через точку M и параллельной прямой b (рис. 64). При этом прямую a называют осью косого сжатия; о прямой b говорят, что она задает его направление; число k называют коэффициентом косого сжатия.

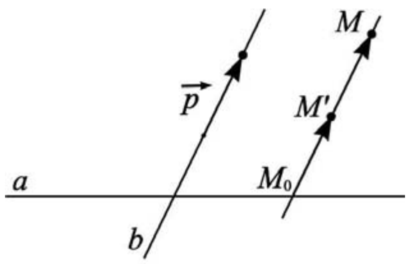


Рис. 64

Если $b \perp a$ и $k > 0$, то слово «косое» в данном названии часто опускается.

При $k = -1$ косое сжатие является инволютивным преобразованием и называется косой симметрией.

Если $b \perp a$ и $k = -1$, то косое сжатие есть осевая симметрия.

Нетрудно видеть, что если $k>1$, то косое сжатие фактически представляет собой растяжение плоскости вдоль прямой b, однако общий термин сохраняют и для этого случая.

Если $\vec{p}$ – направляющий вектор прямой b, то говорят также, что направление косого сжатия задается вектором $\vec{p}$.

Примечание. В трехмерном пространстве аналогом косого сжатия (сжатия к прямой!) является сжатие к плоскости.

Сжатием, определяемым плоскостью σ, прямой a и коэффициентом k, называется отображение пространства в себя, при котором всякая точка M переходит в такую точку M', что $\overrightarrow{M_0M'} = k\overrightarrow{M_0M}$, где M_0 – точка пересечения плоскости σ и прямой, которая проходит через точку M и параллельна прямой a.

Упражнения

523°. Косое сжатие задано осью a, направлением b и коэффициентом k. Постройте образы нескольких точек, если $k = \frac{1}{2}$; 3; –2.

524*. Составить формулы косого сжатия, заданного осью a, направлением b и коэффициентом k, если:

а) ось Ox направлена по прямой a, а ось Oy – по прямой b;

б) ось Ox направлена по прямой b, а ось Oy – по прямой a.

525*. Доказать, что косое сжатие является аффинным преобразованием.

526*. Доказать, что всякое преобразование плоскости, заданное в аффинном репере формулами $x' = x$, $y' = ky$ ($x' = kx$, $y' = y$), где $k \neq 0$, $k \neq 1$, является косым сжатием.

527*. Перспективно-аффинное преобразование первого типа задано осью a и парой соответствующих точек A и A'. Составить формулы этого преобразования в репере $R=\{O, E_1, E_2\}$, где O – точка пересечения прямых a и AA', точка E_1 принадлежит оси a, а точка E_2 совпадает с точкой A.

528*. Доказать, что всякое косое сжатие является перспективно-аффинным преобразованием первого типа и, обратно, всякое перспективно-аффинное преобразование первого типа есть косое сжатие.

529°. Доказать, что преобразование, заданное формулами $\begin{cases} x' = 2x + 2y - 1 \\ y' = x + 3y - 1 \end{cases}$, является перспективно-аффинным преобразованием первого типа, т.е. косым сжатием. Определить его ось, направление и коэффициент.

530*. Охарактеризовать все инвариантные точки и прямые косого сжатия, используя его формулы в подходящей системе координат (см. упр. 524).

531*. Доказать, что при косом сжатии всякая прямая, параллельная оси, переходит в параллельную ей прямую.

***Пример* 1.** При косом сжатии с осью a прямая b отображается на прямую b_1. Докажем, что если прямые b и b_1 пересекаются в некоторой точке, то эта точка принадлежит прямой a.

Решение. Прямая b не параллельна оси a (см. упр. 531). Пусть $a \cap b = M$. При косом сжатии $a \to a$, $b \to b_1$, следовательно, точка пересечения прямых a и b (точка M) переходит в точку пересечения прямых a и b_1. Но точка M является инвариантной, значит, $a \cap b_1 = M$. Итак, все три прямые a, b и b_1 пересекаются в одной точке, что требовалось доказать.

Упражнения

532*. Систематизируйте свойства косого сжатия по следующему плану:

– общие свойства (т.е. свойства преобразования, являющегося аффинным);

– специфические свойства (инвариантные точки, прямые и т. п.).

533°. Косое сжатие задано осью и парой соответствующих точек M и M'. Построить образ данного треугольника ABC.

534. Составить формулы косого сжатия, осью которого является прямая $x + y – 3 = 0$, направление задано вектором $\vec{p}(2;1)$, а коэффициент $k = -2$.

535*. Составить формулы косого сжатия, осью которого является прямая $Ax + By + C = 0$, направление задано вектором $\vec{p}(m;n)$, где $Am + Bn \neq 0$, а коэффициент равен k.

Рассмотрите следующие частные случаи полученных формул:

а) ось сжатия – ось Ox, направление задано вектором $\vec{p}(m;n)$, где $n \neq 0$;

б) ось сжатия – прямая $y = y_0$, направление задано осью Oy;

в) ось сжатия – прямая $y = y_0$, направление задано вектором $\vec{p}(m;n)$, где $n \neq 0$.

33.2. Сдвиг

Определение. Сдвигом называется перспективно-аффинное преобразование второго типа.

Таким образом, класс всех перспективно-аффинных преобразований распадается на два подмножества: множество всех косых сжатий и множество всех сдвигов.

Примечание. Аналогично определяется сдвиг в трехмерном пространстве.

Пусть f – аффинное преобразование, множество всех инвариантных точек которого есть некоторая плоскость σ. Преобразование f называется сдвигом, если для некоторой точки A, не принадлежащей плоскости σ, и ее образа A' выполняется условие: $AA' \parallel \sigma$.

Упражнения

536°. Доказать, что преобразование, заданное формулами $\begin{cases} x' = -x - 4y + 2 \\ y' = x + 3y - 1 \end{cases}$, является перспективно-аффинным преобразованием второго типа, т.е. сдвигом. Определить его ось и какую-либо пару соответствующих точек.

537*. Составить формулы сдвига в репере $R = \{O, E_1, E_2\}$, если известно, что ось абсцисс направлена по оси сдвига. Доказать, что сдвиг является унимодулярным преобразованием.

538*. Доказать, что всякое аффинное преобразование, заданное формулами $x' = x + ky$, $y' = y$, где $k \neq 0$, является сдвигом.

539*. Охарактеризовать все инвариантные точки и прямые сдвига, используя его формулы.

540*. Доказать, что если прямая a, не параллельная оси сдвига, отображается этим сдвигом на прямую b, то точка пересечения прямых a и b принадлежит оси сдвига.

541*. Систематизируйте свойства сдвига по плану, изложенному в упр. 532.

542°. Сдвиг задан осью и парой соответствующих точек M и M'. Построить образ данного треугольника ABC.

543*. Составить формулы сдвига, осью которого является:

а) прямая $y = y_0$, где $y_0 \neq 0$;

б) ось Oy;

в) прямая $x = x_0$, где $x_0 \neq 0$;

г) прямая $y = px$, где $p \neq 0$.

33.3. Каноническая композиция косых сжатий

Определение. Пусть a и b – пересекающиеся прямые. Канонической композицией косых сжатий будем называть преобразование вида $f_2 \circ f_1$, где f_1 – косое сжатие, заданное осью a, направлением b и коэффициентом k_2, а f_2 – косое сжатие, заданное осью b, направлением a и коэффициентом k_1, причем $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, $k_1 \neq k_2$.

Разумеется, данное преобразование, будучи композицией двух аффинных преобразований, является аффинным преобразованием (упр. 491).

Упражнения

544*. Составить формулы канонической композиции косых сжатий f_1 и f_2, заданной осями a и b и коэффициентами k_2 и k_1, в репере $R = \{O, E_1, E_2\}$, если $O = a \cap b$, $E_1 \in a$, $E_2 \in b$.

545*. Доказать, что преобразование, заданное в аффинном репере формулами $x'=k_1x$, $y'=k_2y$, где $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, $k_1 \neq k_2$, есть каноническая композиция косых сжатий.

Что представляет собой преобразование, заданное указанными формулами, если $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, $k_1 = k_2$?

546*. Доказать, что центрально-подобная симметрия является канонической композицией косых сжатий.

547*. Доказать следующие свойства канонической композиции $f_2 \circ f_1$ косых сжатий, заданной осями a и b:

– преобразование $f_2 \circ f_1$ имеет единственную инвариантную точку;

– прямые a и b – инвариантные прямые преобразования $f_2 \circ f_1$, других инвариантных прямых нет;

– при отображении $f_2 \circ f_1$, всякая прямая, параллельная оси a (оси b), переходит в прямую, параллельную этой оси.

548*. Систематизируйте свойства канонической композиции косых сжатий по плану, изложенному в упр. 532.

33.4. Композиция косого сжатия и параллельного переноса

Пример 2. Косое сжатие f задано осью a, направлением b и коэффициентом k. Докажем, что если ненулевой вектор $\vec{p}$ переноса $T_{\vec{p}}$ параллелен направлению косого сжатия, то композиция $T_{\vec{p}} \circ f$ есть косое сжатие.

Решение. Введем аффинную систему координат, направив ось Ox по прямой a, а ось Oy – по прямой b (рис. 65).

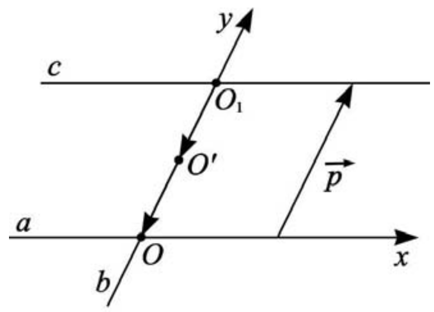


Рис. 65

Т. к. $\vec{p} \parallel b$, то в этом репере перенос $T_{\vec{p}}$ задается формулами: $x' = x$, $y' = y + m$ ($m \neq 0$). Формулы косого сжатия f имеют вид: $x' = x$, $y' = ky$ (упр. 524), где $k \neq 0$, $k \neq 1$.

Формулы композиции $T_{\vec{p}} \circ f$: $x' = x$, $y' = ky + m$. Инвариантные точки этой композиции ищем из системы $\begin{cases} x = x \\ y = ky + m \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{m}{1-k}$ (1).

Как видим, преобразование $T_{\vec{p}} \circ f$, будучи аффинным, имеет прямую инвариантных точек и, следовательно, является перспективно-аффинным. Его ось – прямая c, заданная уравнением (1).

Определим тип этого преобразования.

Имеем: $O(0;0) \xrightarrow{T_{\vec{p}} \circ f} O'(0;m)$. Т. к. $\overrightarrow{OO'}(0;m) \parallel b$, то $T_{\vec{p}} \circ f$ – перспективно-аффинное преобразование первого типа, т.е. косое сжатие φ; его ось – прямая c, а направление задается прямой b.

Определим коэффициент косого сжатия φ.

Пусть $b \cap c = O_1$, тогда $O_1\left(0; \dfrac{m}{1-k}\right)$, откуда $\overrightarrow{O_1O}\left(0; \dfrac{m}{k-1}\right)$, $\overrightarrow{O_1O'}\left(0; \dfrac{mk}{k-1}\right)$. Сравнивая координаты этих векторов, заключаем, что $\overrightarrow{O_1O'} = k \cdot \overrightarrow{O_1O}$. Следовательно, коэффициент косого сжатия φ равен k.

Определение. Композицию $T_{\vec{p}} \circ f$ косого сжатия f и переноса $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} \neq \vec{0}$, будем называть канонической, если вектор $\vec{p}$ не параллелен направлению косого сжатия f.

Разумеется, указанное преобразование, будучи композицией двух аффинных преобразований, является аффинным.

Упражнения

549°. Доказать, что преобразование, заданное формулами $\begin{cases} x' = 4x + y + 1 \\ y' = 3x + 2y \end{cases}$, является канонической композицией косого сжатия f и переноса $T_{\vec{p}}$. Определить ось и направление косого сжатия, а также вектор переноса.

550*. Доказать, что скользящая симметрия является канонической композицией косого сжатия и переноса.

551°. Составить формулы канонической композиции косого сжатия f и переноса $T_{\vec{p}}$ в аффинной системе координат, введенной в примере 2.

552*. Доказать, что каноническая композиция косого сжатия и переноса не имеет инвариантных точек, но имеет единственную инвариантную прямую.

33.5. Композиция сдвига и параллельного переноса

Упражнения

553°. Составить формулы композиции сдвига и переноса, направив ось Ox аффинной системы координат вдоль оси сдвига. Убедиться, что указанное преобразование является унимодулярным.

554*. Доказать, что если вектор $\vec{p}$ ($\vec{p} \neq \vec{0}$) параллельного переноса $T_{\vec{p}}$ параллелен оси сдвига *f*, то композиция $T_{\vec{p}} \circ f$ есть сдвиг.

Определение. Композицию $T_{\vec{p}} \circ f$ сдвига *f* и переноса $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} \neq \vec{0}$, будем называть канонической, если вектор $\vec{p}$ не параллелен оси сдвига.

Разумеется, указанное преобразование является аффинным.

Упражнение

555°. Доказать, что преобразование, заданное формулами $\begin{cases} x' = 4x - 3y \\ y' = 3x - 2y + 1 \end{cases}$, является канонической композицией сдвига и переноса. Найти ось сдвига и вектор переноса.

***Пример* 3.** Докажем, что каноническая композиция $T_{\vec{p}} \circ f$ сдвига и переноса не имеет инвариантных точек и инвариантных прямых.

Решение. Введем аффинную систему координат, направив ось Ox

по оси сдвига. В этой системе координат преобразование $T_{\vec{p}} \circ f$ задается формулами: $x' = x + ky + m$, $y' = y + n$, где $k \neq 0$, m, n – координаты вектора $\vec{p}$ и $n \neq 0$, т.к. вектор $\vec{p}$ не параллелен оси Ox.

Т. к. $n \neq 0$, то из приведенных формул ясно, что инвариантных точек нет.

Переходим к отысканию инвариантных прямых.

Пусть прямая a задается уравнением $Ax + By + C = 0$ (1).

Решая формулы преобразования относительно x и y, получаем:

$x = x' - ky' + kn - m$, $y = y' - n$ (2).

Используя (2) и (1), составляем уравнение прямой a' – образа прямой a: $Ax' + (B - kA)y' + (C + Akn - Am - Bn) = 0$. Чтобы прямая a' совпадала с прямой a, необходимо (но не достаточно), чтобы направляющие векторы этих прямых были коллинеарны, т. е. $\begin{vmatrix} kA - B & A \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$.

Это равенство эквивалентно условию $A^2 \cdot k = 0$, откуда $A = 0$.

Итак, инвариантные прямые могут находиться лишь среди прямых $By + C = 0$. В этом случае уравнение прямой a' принимает вид $By + (C - Bn) = 0$.

Сравнивая уравнения прямых a и a', приходим к выводу: прямая a' совпадает с прямой a тогда и только тогда, когда $Bn = 0$, а это невозможно, т.к. $B \neq 0$, $n \neq 0$. Следовательно, инвариантных прямых нет.

33.6. Композиция сдвига и гомотетии

Всякая композиция сдвига и гомотетии является аффинным преобразованием (упр. 491).

Определение. Композицию $H_S^{k_0} \circ f$ сдвига f и гомотетии $H_S^{k_0}$ будем называть канонической, если центр гомотетии принадлежит оси сдвига и $k_0 \neq 1$.

***Пример* 4.** Прямая, параллельная боковой стороне CD трапеции $ABCD$, пересекает диагональ AC в точке B_1, а основание AD – в точке D_1. При аффинном преобразовании f $A \to A$, $B \to B_1$, $D \to D_1$. Докажем, что преобразование f есть каноническая композиция сдвига и гомотетии (рис. 66).

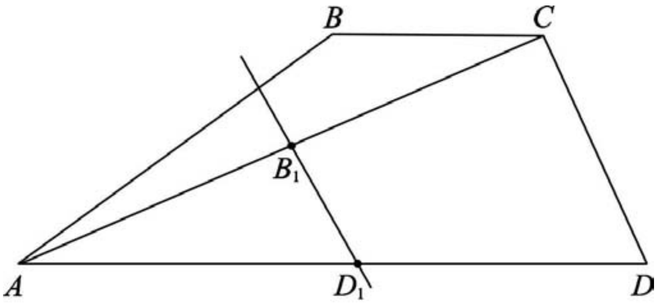


Рис. 66

Решение. Воспользуемся приемом 2.15.2. или 6.4.

Очевидно, что $\dfrac{AB_1}{AC} = \dfrac{AD_1}{AD} = k \neq 1$. Рассмотрим преобразование $H_A^k \circ \varphi$, где φ – сдвиг, заданный осью AD и парой соответствующих точек $B \to C$.

При этом аффинном преобразовании $A \to A$, $B \to B_1$, $D \to D_1$, следовательно, $f = H_A^k \circ \varphi$, что требовалось доказать.

Упражнения

556*. Составить формулы канонической композиции сдвига f и гомотетии $H_O^{k_0}$, выбирая в качестве начала координат центр гомотетии, а в качестве оси Ox – ось сдвига.

557*. Доказать, что всякое преобразование, заданное в аффинном репере формулами $x' = k_0x + ky$, $y' = k_0y$, где $k_0 \neq 1$, $k_0 \neq 0$, $k \neq 0$, является канонической композицией сдвига и гомотетии.

558*. Даны сдвиг f с осью a и гомотетия $H_S^{k_0}$, где $k_0 \neq 1$, $S \notin a$. Составить формулы преобразования $H_S^{k_0} \circ f$ в аффинной системе координат $R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, направив ось Ox по прямой a.

Доказать, что преобразование $H_S^{k_0} \circ f$ имеет единственную инвариантную точку O_1.

Составить формулы преобразования $H_S^{k_0} \circ f$ в системе координат $R' = \{O_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

Доказать, что преобразование $H_S^{k_0} \circ f$ является канонической композицией сдвига и гомотетии.

559*. Доказать, что каноническая композиция сдвига и гомотетии имеет единственную инвариантную точку и единственную инвариантную прямую.

560*. Систематизируйте специфические свойства аффинных преобразований, рассмотренных в § 33, заполняя приведенную ниже таблицу.

№ п/п	**Аффинное преобразование**	**Инвариантные точки**	**Инвариантные прямые (их число и расположение)**
1.	Косое сжатие		
2.	Сдвиг		
3.	Каноническая композиция косых сжатий		
4.	Каноническая композиция косого сжатия и переноса		
5.	Каноническая композиция сдвига и переноса		
6.	Каноническая композиция сдвига и гомотетии		

Каковы общие свойства этих преобразований?

561°. Точка O – центроид треугольника ABC. При аффинном преобразовании f $A \to A$, $B \to B$, $C \to O$. Доказать, что f – косое сжатие.

562°. В треугольнике ABC точка O – середина медианы CD. При аффинном преобразовании f $A \to B$, $C \to O$,

$D \to D$. Доказать, что f – каноническая композиция двух косых сжатий.

563. Даны треугольник ABC и прямая a, которая не пересекает его стороны и не параллельна ни одной из его сторон. Косое сжатие f_1 задано осью a и парой соответствующих точек: $A \to B$. Косое сжатие f_2 задано осью a и парой соответствующих точек: $B \to C$. Доказать, что композиция $f_2 \circ f_1$ есть косое сжатие.

Как изменится результат, если прямая a параллельна стороне AC?

564. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Сдвиг f_1 задан осью AD и парой соответствующих точек: $B \to C$. Косое сжатие f_2 задано осью AD и парой соответствующих точек: $C \to O$. Доказать, что композиция $f_2 \circ f_1$ есть косое сжатие.

565°. Составить формулы такого аффинного преобразования, при котором:

– окружность $x^2 + y^2 = a^2$ отображается на эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } 0<b<a;$$

– окружность $x^2 + y^2 = b^2$ отображается на эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } b>a;$$

– окружность $x^2 + y^2 = r^2$ отображается на эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

– кривая $y = \sin x$ отображается на кривую

$$y = \frac{1}{2} \sin \frac{x}{3}.$$

Система координат прямоугольная.

§ 34. Аффинно-эквивалентные фигуры

Определение. Фигуры Φ и Φ' называются аффинно-эквивалентными, если существует такое аффинное преобразование, при котором Φ отображается на Φ'.

Обозначается: $\Phi \overset{A}{\sim} \Phi'$.

Упражнения

566°. Как доказать, что фигуры Φ и Φ' аффинно-эквивалентны?

567*. Доказать, что любые два треугольника аффинно-эквивалентны.

568*. Доказать, что любые два параллелограмма аффинно-эквивалентны (в частности, любой параллелограмм аффинно-эквивалентен квадрату).

569*. Доказать, что для любой трапеции существует аффинно-эквивалентная ей равнобедренная трапеция.

570°. Как соотносятся понятия: «фигуры Φ и Φ' равны (конгруэнтны)», «фигуры Φ и Φ' подобны», «фигуры Φ и Φ' аффинно-эквивалентны»?

571*.Доказать следующие свойства аффинно-эквивалентных фигур: а) $\Phi \overset{A}{\sim} \Phi$ для любой фигуры Φ;

б) если $\Phi \overset{A}{\sim} \Phi'$, то $\Phi' \overset{A}{\sim} \Phi$;

в) если $\Phi_1 \overset{A}{\sim} \Phi_2$, $\Phi_2 \overset{A}{\sim} \Phi_3$, то $\Phi_1 \overset{A}{\sim} \Phi_3$.

***Пример* 1.** Докажем, что окружность аффинно-эквивалентна любому эллипсу.

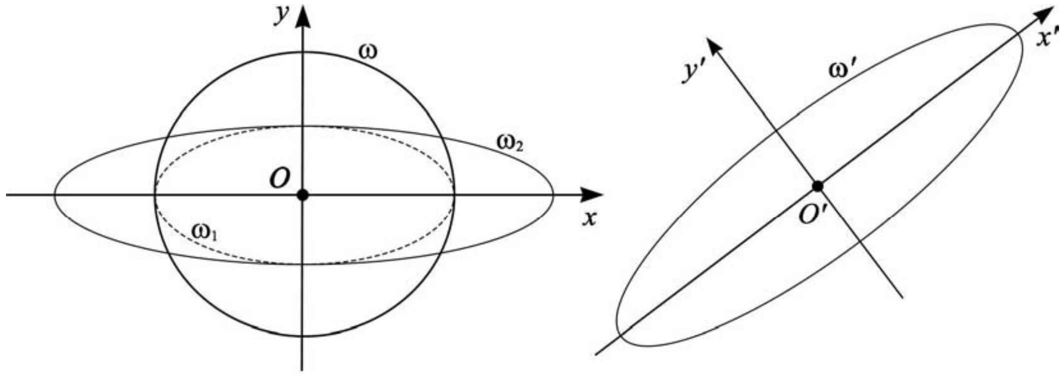


Рис. 67

Решение. Пусть ω – данная окружность, а ω' – данный эллипс. Существуют ортонормированные реперы R и R', в которых окружность ω задается уравнением $x^2 + y^2 = r^2$, а эллипс ω' – уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Рассмотрим аффинные преобразования: $\begin{cases} x' = x \\ y' = \frac{b}{r}\cdot y \end{cases}$ (f_1) и $\begin{cases} x' = \frac{a}{r}\cdot x \\ y' = y \end{cases}$ (f_2).

Используя прием 5.3., нетрудно установить, что преобразование f_1 переводит окружность ω в эллипс ω_1, заданный в репере R уравнением $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. В свою очередь, преобразование f_2 переводит эллипс ω_1 в эллипс ω_2, заданный в репере R уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Существует движение f_3, при котором репер R переходит в репер R' (§9) . При этом движении эллипс ω_2 переходит в фигуру, которая задается в репере R' уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (следствие 2, §9). Как видим, движение f_3 переводит эллипс ω_2 в эллипс ω'.

Наконец, композиция $f_3\circ f_2\circ f_1$ есть аффинное преобразование, переводящее окружность ω в эллипс ω'. Это означает, что фигуры ω и ω' аффинно-эквивалентны.

Следствия. 1°. Для любого эллипса существует аффинное преобразование, переводящее данный эллипс в некоторую (произвольно выбранную!) окружность.

2°. Любые два эллипса аффинно-эквивалентны.

Доказательство. Пусть ω_1 и ω_2 – данные эллипсы, а ω – произвольная окружность. По доказанному выше: $\omega_1 \overset{A}{\sim} \omega,\ \ \omega \overset{A}{\sim} \omega_2$. Отсюда следует, что $\omega_1 \overset{A}{\sim} \omega_2$ (упр. 571).

3°. При аффинном преобразовании эллипс переходит в эллипс (в частности, в окружность).

Доказательство. Пусть при аффинном преобразовании f эллипс ω отображается на некоторую фигуру ω'. Существует аффинное преобразование φ, переводящее произвольную выбранную окружность ω_1 в эллипс ω. Аффинное преобразование $f \cdot \varphi$ отображает окружность ω_1 на фигуру ω'. Но, как известно, аффинное преобразование переводит окружность в эллипс (пример в §31). Следовательно, фигура ω' – эллипс.

***Пример* 2.** При аффинном преобразовании f эллипс ω переходит в окружность ω'. Докажем, что при этом:

а) центр эллипса переходит в центр окружности;

б) сопряженные диаметры эллипса переходят во взаимно перпендикулярные диаметры окружности;

в) касательная к эллипсу переходит в касательную к окружности.

Решение. а) Пусть O – центр эллипса ω и $f(O) = O'$. Докажем, что O' – центр окружности ω'.

Возьмем в окружности произвольную хорду $A'B'$, проходящую через точку O'. Ее прообраз – хорда AB, проходящая через точку O (рис. 68).

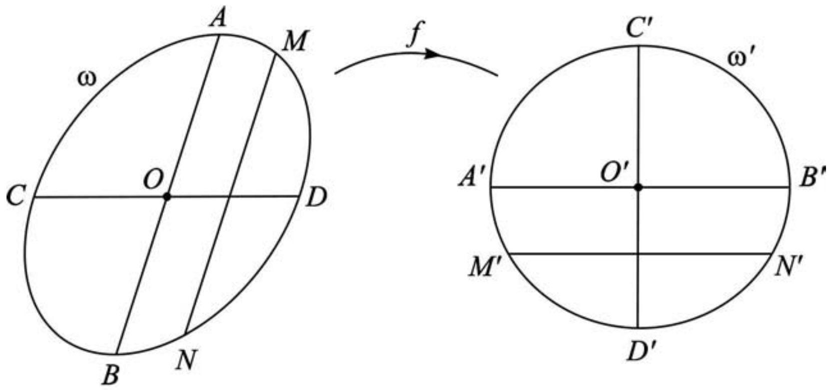


Рис. 68

Т. к. O – центр симметрии эллипса, то точка O – середина хорды AB. Следовательно, точка O' – середина хорды $A'B'$. Таким образом, в окружности ω' <u>любая</u> хорда, проходящая через точку O', делится этой точкой пополам. Следовательно, O' – центр окружности ω'.

б) Пусть AB и CD – сопряженные диаметры эллипса ω и хорда MN параллельна AB (рис. 68). При отображении f хорда MN переходит в хорду $M'N'$, параллельную диаметру $A'B'$ окружности, а диаметр CD – в диаметр $C'D'$. Т.к. диаметр CD делит хорду MN пополам (по определению сопряженных диаметров), то диаметр $C'D'$ делит пополам хорду $M'N'$. Отсюда следует, что $C'D'\surd M'N'$, а значит $C'D'\surd A'B'$.

в) Будем исходить из следующей трактовки понятия касательной (для случая окружности и эллипса): касательная к окружности (эллипсу) – прямая, которая имеет с окружностью (эллипсом) единственную общую точку (называемую точкой касания).

Итак, пусть прямая a касается эллипса ω в точке M и при отображении f $a \to a'$, $\omega \to \omega'$, $M \to M'$. Очевидно, что M' есть <u>единственная</u> общая точка прямой a' и окружности ω', т.е. a' – касательная к окружности ω'.

Упражнения

572°. Объясните, на каком основании в приведенном решении утверждается, что:

а) «Следовательно, точка O' – середина хорды $A'B'$»;

б) «…хорда MN переходит в хорду $M'N'$, параллельную диаметру $A'B'$»;

в) «…то диаметр $C'D'$ делит пополам хорду $M'N'$».

573*. При аффинном преобразовании f окружность ω переходит в эллипс ω′. Доказать, что при этом:

а) центр окружности переходит в центр эллипса;

б) взаимно перпендикулярные диаметры окружности переходят в сопряженные диаметры эллипса;

в) касательная к окружности переходит в касательную к эллипсу.

574*. Доказать, что любые две гиперболы (параболы) аффинно-эквивалентны.

§ 35. Дальнейшие свойства аффинных преобразований

Перечислим основные, уже известные читателю, свойства аффинных преобразований. При аффинных преобразованиях:

1°. Коллинеарные точки переходят в коллинеарные точки;

2°. Сохраняется простое отношение трех точек;

3°. Неколлинеарные точки переходят в неколлинеарные точки;

4°. Сохраняется отношение «лежать между» для трех точек прямой;

5°. Прямая отображается на прямую, отрезок – на отрезок, луч – на луч, полуплоскость – на полуплоскость, угол – на угол;

6°. Параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

Напомним, что свойства 1° – 2° имеют место по определению аффинных преобразований, а свойства 3° – 6° являются логическими следствиями свойств 1° – 2° (см. примечание к п. 6° в § 7).

Рассмотрим дальнейшие свойства аффинных преобразований.

7°. При аффинном преобразовании сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Доказательство. Пусть при аффинном преобразовании f отрезки AB и CD, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, переходят в отрезки $A'B'$ и $C'D'$, также лежащие на одной прямой или на параллельных прямых. Поэтому

$$\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{CD} \qquad (1),$$

$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda' \cdot \overrightarrow{C'D'} \qquad (2),$$

откуда

$$\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|} = |\lambda| \qquad (3),$$

$$\frac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{C'D'}\right|} = |\lambda'| \qquad (4).$$

Докажем, что $\lambda = \lambda'$. Введем на плоскости аффинный репер R и рассмотрим его образ – репер R'. В силу следствия 1 из теоремы 12 координаты точек A', B', C', D' в репере R' совпадают с координатами точек A, B, C, D (соответственно) в репере R. Поэтому, если в репере R $\overrightarrow{AB}(m;n)$, $\overrightarrow{CD}(p;q)$, то в репере R' $\overrightarrow{A'B'}(m;n)$, $\overrightarrow{C'D'}(p;q)$. Отсюда и из равенств (1) и (2) следует, что $m = \lambda\, p$, $n = \lambda\, q$ (5) и $m = \lambda' p$, $n = \lambda' q$ (6).

Из равенств (5), (6), (3), (4) получаем $\dfrac{\left|\overrightarrow{A'B'}\right|}{\left|\overrightarrow{C'D'}\right|} = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{CD}\right|}$, что требовалось доказать.

Упражнения

575*. Доказать, что при аффинных преобразованиях отношение длин произвольных отрезков, вообще говоря, не сохраняется. Сравните этот вывод с упр. 341 (а).

576°. Аффинное преобразование задано тремя парами соответствующих точек: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Известно, что в треугольнике ABC $AB:AC = 1:3$. Построить образ биссектрисы AD треугольника ABC.

577°. Даны правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O и произвольный треугольник $A'O'B'$. При аффинном преобразовании f: $A \to A'$, $O \to O'$, $B \to B'$. Построить образ шестиугольника $ABCDEF$.

578°. В пятиугольнике $ABCDE$ $AE \| BD$, $DE \| AC$, а диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся этой точкой в отношениях 2:1 и 3:2 соответственно. При аффинном преобразовании f параллелограмм $AODE$ переходит в квадрат $A'O'D'E'$. Построить образ данного пятиугольника.

579°. Основания BC и AD равнобедренной трапеции $ABCD$ относятся как 3:5. При аффинном преобразовании f треугольник ABC переходит в правильный треугольник $A'B'C'$. Построить образы трапеции $ABCD$ и ее высоты BE при отображении f.

8°. При аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей многоугольников.

Доказательству этого утверждения предпошлем две леммы.

Лемма 1. Если при аффинном преобразовании f треугольник ABC отображается на треугольник $A'B'C'$, то $S(\Delta\, A'B'C') = k \cdot S(\Delta\, ABC)$, где k – число, зависящее лишь от преобразования f.

Доказательство. Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в точке A. Пусть в этой системе координат $B(x_1; y_1)$, $C(x_2, y_2)$, а преобразование f задается формулами: $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$. Используя эти формулы, находим: $A'(c_1;c_2)$, $B'(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1; a_2x_1 + b_2y_1 + c_2)$, $C'(a_1x_2 + b_1y_2 + c_1; a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)$.

Находим площади треугольников.

$$S(\Delta\, ABC) = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right\| \qquad (1);$$

$$S(\Delta\, A'B'C') = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} a_1x_1 + b_1y_1 & a_2x_1 + b_2y_1 \\ a_1x_2 + b_1y_2 & a_2x_2 + b_2y_2 \end{matrix}\right\|.$$

Преобразуем последнее выражение, используя свойства определителей:

$$S(\Delta\, A'B'C') = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a_1x_1 & a_2x_1 \\ a_1x_2 & a_2x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1x_1 & b_2y_1 \\ a_1x_2 & b_2y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y_1 & a_2x_1 \\ b_1y_2 & a_2x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1y_1 & b_2y_1 \\ b_1y_2 & b_2y_2 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} \cdot x_1x_2 + a_1b_2 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} - a_2b_1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot y_1y_2\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(a_1b_2 - a_2b_1) \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2} \cdot \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix}\right\| \qquad (2).$$

Обозначая $\left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\| = k$ и сравнивая (1) и (2), приходим к выводу: $S(\Delta\, A'B'C') = k \cdot S(\Delta\, ABC)$, где $k = \left\|\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}\right\|$ и не зависит (для данного преобразования *f*) от выбора системы координат (см. упр. 522).

Примечание. Число *k* в полученном равенстве называется коэффициентом искажения площадей (для преобразования *f*). Чтобы найти этот коэффициент, достаточно располагать формулами преобразования *f* в каком-либо аффинном репере (в каком именно – не существенно).

Лемма 2. Если при аффинном преобразовании *f* многоугольник *Φ* отображается на многоугольник *Φ'*, то $S(\Phi') = k \cdot S(\Phi)$, где *k* – коэффициент искажения площадей для данного преобразования *f*.

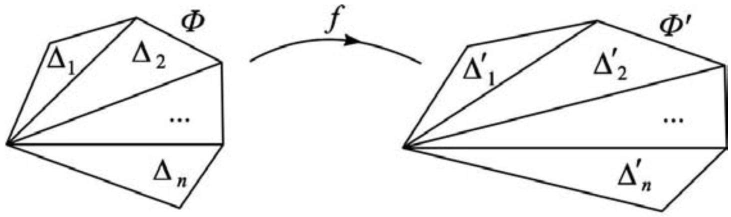


Рис. 69

Для доказательства достаточно разбить многоугольник $\varPhi$ на треугольники Δ_1, Δ_2, …, Δ_n и воспользоваться леммой 1 (рис. 69).

Лемма 2 является основанием приема 8.2.18. в «Сводке».

Доказательство свойства 8. Пусть при аффинном преобразовании f многоугольники $\varPhi_1$ и $\varPhi_2$ переходят (соответственно) в многоугольники $\varPhi'_1$ и $\varPhi'_2$. По лемме 2 $S(\varPhi'_1) = k \cdot S(\varPhi_1)$, $S(\varPhi'_2) = k \cdot S(\varPhi_2)$, где k – коэффициент искажения площадей для преобразования f.

Получаем: $\dfrac{S(\varPhi'_1)}{S(\varPhi'_2)} = \dfrac{S(\varPhi_1)}{S(\varPhi_2)}$, что требовалось доказать.

Лемму 2 можно распространить на класс квадрируемых фигур.

Теорема 14*. Если при аффинном преобразовании f квадрируемая фигура $\varPhi$ отображается на фигуру $\varPhi'$, то:

1) фигура $\varPhi'$ квадрируема;
2) $S(\varPhi') = k \cdot S(\varPhi)$, где k – коэффициент искажения площадей для преобразования f.

Доказательство.

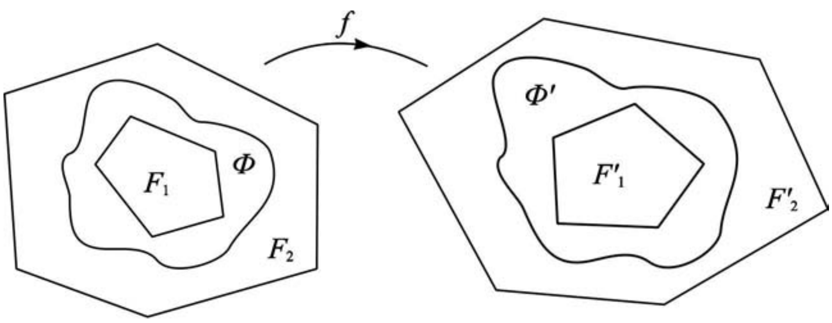


Рис. 70

* Читатель, который незнаком с понятием квадрируемой фигуры, может пропустить доказательство этой теоремы.

1) Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Т.к. фигура Φ квадрируема, то по признаку квадрируемости для числа $\dfrac{\varepsilon}{k}$ найдутся такие многоугольники F_1 и F_2, что $F_1 \subset \Phi \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \dfrac{\varepsilon}{k}$.

При отображении f $F_1 \to F_1'$, $F_2 \to F_2'$ и по лемме 2 $S(F_2') - S(F_1') = k \cdot [S(F_2) - S(F_1)] < \varepsilon$, причем, очевидно, $F_1' \subset \Phi' \subset F_2'$. Это означает в силу признака квадрируемости, что фигура Φ' квадрируема.

2) По определению площади квадрируемой фигуры имеем: $S(F_1) \leq S(\Phi) \leq S(F_2)$, где F_1, F_2 – многоугольники, удовлетворяющие условиям $F_1 \subset \Phi \subset F_2$ и $S(F_2) - S(F_1) < \dfrac{\varepsilon}{k}$.

Отсюда получаем: $k \cdot S(F_1) \leq k \cdot S(\Phi) \leq k \cdot S(F_2)$ и, следовательно,

$$S(F_1') \leq k \cdot S(\Phi) \leq S(F_2') \qquad (1),$$

где многоугольники F'_1, F'_2 – образы многоугольников F_1, F_2.

С другой стороны, для квадрируемой фигуры Φ' имеем:

$$S(F_1') \leq S(\Phi') \leq S(F_2') \qquad (2).$$

Т. к. в неравенствах (1) и (2) $S(F_2') - S(F_1') = k \cdot [S(F_2) - S(F_1)] < \varepsilon$, то в силу произвольности числа ε $S(\Phi') = k \cdot S(\Phi)$, что требовалось доказать.

Теорема 14 позволяет распространить свойство 8° на произвольные квадрируемые фигуры.

9°. При аффинном преобразовании сохраняется отношение площадей квадрируемых фигур.

Доказательство этого свойства почти дословно повторяет доказательство свойства 8°. Предоставляем его читателю.

Определение. Аффинное преобразование, сохраняющее площадь любой квадрируемой фигуры, называется эквиаффинным.

Таким образом, для эквиаффинных преобразований коэффициент искажения площадей равен единице.

580*. Найти коэффициенты искажения площадей для движений, подобий и аффинных преобразований, рассмотренных в §33.

581°. При аффинном преобразовании f фигура Φ переходит в фигуру Φ'. Площадь фигуры Φ равна S. Найти площадь фигуры Φ', если:

а) f – косое сжатие с коэффициентом, равным $-\frac{1}{3}$;

б) f – сдвиг;

в) f – композиция косого сжатия с коэффициентом, равным 2, и параллельного переноса.

582°. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны и пересекают прямую a в точках A_0, B_0, C_0 соответственно, причем $(AA_0, A_1) = (BB_0, B_1) = (CC_0, C_1) = 3$. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна S.

583°. Составить формулы какого-либо аффинного преобразования, при котором окружность $x^2 + y^2 = 16$ отображается на эллипс $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$.

Найти площадь фигуры, ограниченной этим эллипсом.

<u>584</u>. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

<u>585</u>. Фигура F ограничена осью Ox и полуволной синусоиды $y = \sin x$ ($0 \le x \le \pi$), а фигура Φ – осью Ox и полуволной синусоиды $y=\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$ ($0 \le x \le 2\pi$). Доказать, что фигуры F и Φ равновелики.

§ 36. Применение аффинных преобразований к решению задач на доказательство. Переформулирование цели задачи

Указанная идея – переформулирование цели задачи на языке геометрических преобразований – использовалась ранее для движений и подобий (§§ 15, 27). Приведем некоторые частные приемы, реализующие ее для аффинных преобразований, отличных от движений и подобий.

1. Чтобы доказать, что отрезок AB параллелен прямой b и делится прямой a в отношении $m:n$, достаточно установить, что точка A переходит в точку B при косом сжатии, заданном осью a, направлением b и коэффициентом, равным $-\frac{n}{m}$ (этот прием вытекает из определения косого сжатия).

2. Чтобы доказать, что точка пересечения прямых a и b принадлежит прямой c, достаточно установить, что при некотором косом сжатии или сдвиге с осью c прямая a отображается на прямую b (см. пример 1в §33 и упр. 540).

3. Чтобы доказать, что площади фигур Φ' и Φ относятся как $m:n$, достаточно установить, что при некотором аффинном преобразовании, для которого коэффициент искажения площадей равен $\frac{m}{n}$, фигура Φ отображается на фигуру Φ' (см. теорему 14).

Заметим, что этот прием (в несколько измененной форме) использовался в упр. 581 – 584, где задача на вычисление площади сводилась к задаче на отыскание отношения площадей.

4. Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны, достаточно установить, что при некотором косом сжатии с осью c прямая a, параллельная c, отображается на прямую b (см. упр. 531).

5. Чтобы доказать, что отрезок AB параллелен прямой c, достаточно установить, что при некотором сдвиге с осью c точка A переходит в точку B (определение сдвига).

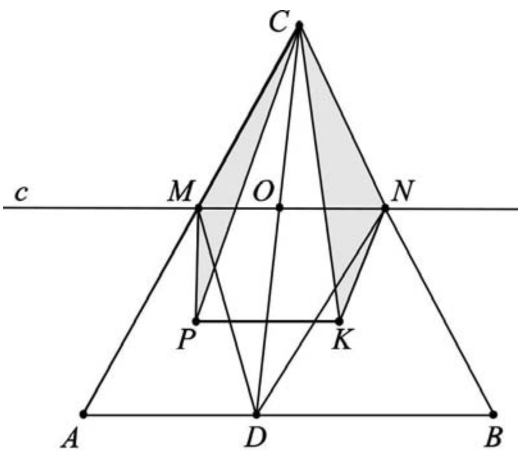


Рис. 71

Разумеется, перечень таких приемов можно продолжать, используя определения и свойства различных аффинных преобразований.

Пример. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении $m:n$. Прямая c, параллельная стороне AB, пересекается с отрезками AC, BC и CD в точках M, N, O соответственно (рис. 71). Докажем, что:

а) $MO:ON = m:n$;

б) отрезок, соединяющий центроиды P и K треугольников AMD и BND, параллелен стороне AB;

в) $S_{\Delta CMP} : S_{\Delta CNK} = m:n$.

Решение. Рассмотрим косое сжатие f, заданное осью CD и парой соответствующих точек A и B ($A \to B$). Коэффициент этого косого сжатия равен $k = -\dfrac{n}{m}$.

а) При этом преобразовании прямая CA переходит в прямую CB, а прямая c отображается на себя. Следовательно, точка $CA \cap c$ переходит в точку $CB \cap c$, т. е. $M \to N$. По определению косого сжатия $\overrightarrow{ON} = -\dfrac{n}{m} \cdot \overrightarrow{OM}$, откуда $MO:ON = m:n$.

б) Т. к. $A \xrightarrow{f} B$, $M \xrightarrow{f} N$, $D \xrightarrow{f} D$, то $\Delta AMD \xrightarrow{f} \Delta BND$. Следовательно, центроид треугольника AMD переходит в центроид треугольника BND, т.е. $P \xrightarrow{f} K$. Отсюда следует, что $PK||AB$.

в) Т. к. $C \xrightarrow{f} C$, $M \xrightarrow{f} N$, $P \xrightarrow{f} K$, то $\Delta CMP \xrightarrow{f} \Delta CNK$, следовательно, в силу известного свойства (лемма 1, §35)

$S_{\Delta CNK} = \frac{n}{m} \cdot S_{\Delta CMP}$, откуда $S_{\Delta CMP}: S_{\Delta CNK} = m:n$, что требовалось доказать.

Заметим, что эта задача могла бы быть решена и сугубо школьными методами.

Упражнения

586. Параллельные прямые a, b, c, … пересекают одну сторону угла в точках A, B, C, …, а другую его сторону – в точках A_1, B_1, C_1, ….

а) Доказать, что середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 … принадлежат одной прямой, проходящей через вершину угла.

б) Доказать, что отрезок, соединяющий середины отрезков AB_1 и A_1B, параллелен прямым a, b, c, ….

587. Доказать, что в любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

588. В четырехугольник $ABCD$ вписан четырехугольник $MNPQ$ так, что $MN||PQ||AC$. Доказать, что прямые MQ и NP либо параллельны диагонали BD, либо пересекаются в точке, принадлежащей прямой BD.

589. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $AB \cap A_1B_1 = M$, $BC \cap B_1C_1 = N$, $AC \cap A_1C_1 = P$. Доказать, что если прямые AA_1, BB_1, CC_1, MN параллельны, то:

а) точка P принадлежит прямой MN;

б) треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равновелики;

в) отрезок, соединяющий центроиды этих треугольников, параллелен прямой MN.

§ 37. Применение аффинных преобразований к решению задач на доказательство и вычисление. Перенос аффинных свойств с одной фигуры на другую

Аффинными называют такие свойства фигуры F, которые сохраняются при <u>всех</u> аффинных преобразованиях.

Упражнения

590°. Какие из перечисленных ниже свойств являются аффинными?

а) свойство фигуры быть треугольником;

б) свойство фигуры быть квадратом;

в) свойство фигуры быть окружностью;

г) свойство фигуры быть эллипсом.

591°. Ниже перечислены некоторые свойства фигуры, изображенной на рис. 72.

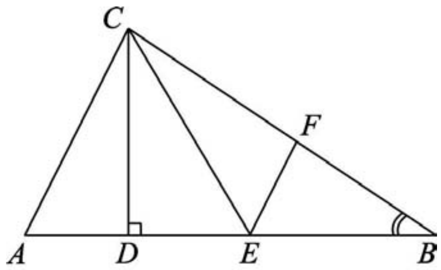


Рис. 72

а) $\pi ABC = 30^\circ$;

б) $AD:DB = 1:3$;

в) $AC:AB = 1:2$;

г) $EF \| AC$;

д) CD – высота треугольника ABC;

е) CE – медиана треугольника ABC.

Какие из этих свойств являются аффинными?

592*. Доказать, что аффинно-эквивалентные фигуры обладают одинаковыми аффинными свойствами.

Пусть дана задача, в которой требуется установить, что некоторая фигура F обладает некоторым аффинным свойством α. В подобных случаях рассматривают такую вспомогательную фигуру F_0, аффинно-эквивалентную фигуре F, которая в контексте поставленной задачи более удобна, более проста, нежели фигура F. Говоря иначе, рассматривают образ F_0 фигуры F при некотором аффинном преобразовании φ.

Далее устанавливают, что фигура F_0 обладает свойством α. При обратном преобразовании φ^{-1} (а оно является аффинным) фигура F_0 переходит в фигуру F. Так как α – аффинное свойство, то оно «передается» от фигуры F_0 фигуре F. Тем самым задача оказывается решенной.

Разумеется, начиная решение таких задач, необходимо убедиться, что вышеупомянутое свойство α действительно является аффинным. В противном случае приходится (если это вообще возможно) переформулировать задачу так, чтобы ее цель приобрела «аффинный характер».

***Пример* 1.** Стороны AB, BC и CA треугольника ABC делятся точками D, E, F (соответственно) в отношении 1:2. Отрезки AE, BF и CD, пересекаясь, образуют треугольник MNP. Найдем площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ABC равна S.

Решение. Задача сводится к отысканию отношения площадей $S_{\Delta MNP}$:$S_{\Delta ABC}$, а это свойство является аффинным (§35, свойства 8 – 9). Рассмотрим аффинное преобразование φ, при котором данный треугольник ABC переходит в правильный треугольник $A_1B_1C_1$ (рис.73). Такое аффинное преобразование существует (см. упр. 567).

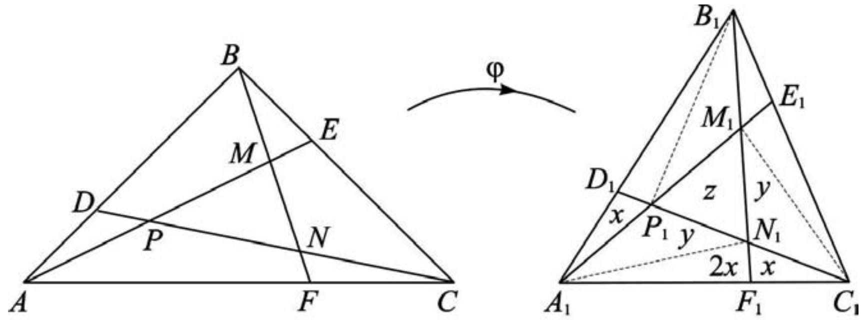


Рис. 73

При этом точки D, E, F переходят в точки D_1, E_1, F_1, которые делят стороны A_1B_1 ,B_1C_1, C_1A_1 в отношении 1:2. Точки M, N, P переходят в точки пересечения отрезков A_1E_1, B_1F_1, C_1D_1 – точки M_1, N_1, P_1, а треугольник MNP – в треугольник $M_1N_1P_1$.

В силу известного свойства аффинных преобразований

$$S_{\Delta MNP} : S_{\Delta ABC} = S_{\Delta M_1N_1P_1} : S_{\Delta A_1B_1C_1} \qquad (1).$$

Поэтому будем решать поставленную задачу для треугольника $A_1B_1C_1$.

Используя поворот вокруг центра треугольника $A_1B_1C_1$ на угол 120°, нетрудно установить, что $\Delta A_1P_1N_1 = \Delta C_1N_1M_1$, $\Delta A_1P_1D_1 = \Delta C_1F_1N_1$.

Обозначим: $S_{\Delta C_1F_1N_1} = x$, $S_{\Delta A_1P_1N_1} = y$, $S_{\Delta M_1P_1N_1} = z$, тогда $S_{\Delta A_1N_1F_1} = 2x$.

Имеем: $\dfrac{S_{\Delta A_1M_1N_1}}{S_{\Delta A_1N_1F_1}} = \dfrac{M_1N_1}{N_1F_1} = \dfrac{S_{\Delta C_1N_1M_1}}{S_{\Delta C_1F_1N_1}}$, откуда $\dfrac{y+z}{2x} = \dfrac{y}{x}$ и,

следовательно, $y = z$ (2).

Далее получаем: $\dfrac{S_{\Delta A_1P_1N_1}}{S_{\Delta A_1C_1N_1}} = \dfrac{P_1N_1}{N_1C_1} = \dfrac{S_{\Delta M_1N_1P_1}}{S_{\Delta M_1N_1C_1}}$, откуда $\dfrac{y}{3x} = \dfrac{z}{y}$. Отсюда, учитывая (2), находим: $x = \dfrac{1}{3}y$.

Т.к. $S_{\Delta A_1C_1D_1} = 4x + y = \dfrac{7y}{3} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta A_1B_1C_1}$, то $y = \dfrac{1}{7}S_{\Delta A_1B_1C_1}$.

Следовательно, $S_{\Delta M_1N_1P_1} = \dfrac{1}{7}S_{\Delta A_1B_1C_1}$,

откуда $S_{\Delta M_1N_1P_1} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = 1:7$ (3).

Окончательно из (1) и (3) получаем $S_{\Delta MNP} = \dfrac{1}{7}S$.

Пример 2. Каждая сторона параллелограмма разделена на три части в отношении 1:2:1. Докажем, что существует эллипс, который проходит через все восемь точек деления.

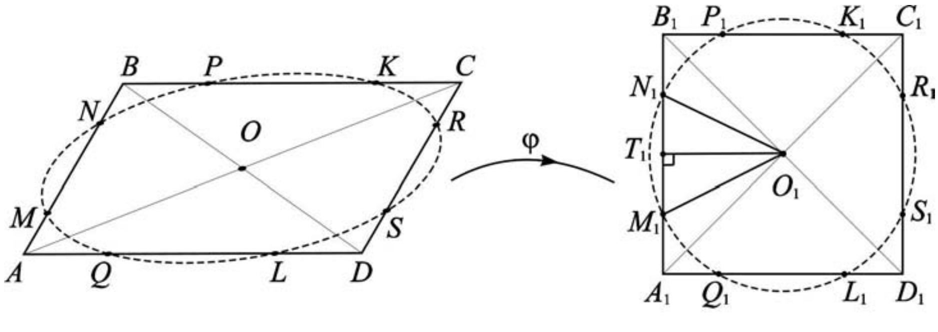


Рис. 74

Решение. Рассмотрим аффинное преобразование φ, при котором данный параллелограмм $ABCD$ переходит в квадрат $A_1B_1C_1D_1$ (рис.74). Такое аффинное преобразование существует (см. упр. 568). Точки, которые делят стороны параллелограмма в отношении 1:2:1, переходят при этом в точки, которые делят стороны квадрата в таком же отношении.

Пусть O_1 – центр квадрата. Обозначим $A_1B_1 = a$ и проведем $O_1T_1 \surd A_1B_1$. Учитывая, что $A_1M_1 = M_1T_1 = T_1N_1 = N_1B_1 = \dfrac{a}{4}$, $O_1T_1 = \dfrac{a}{2}$, находим из треугольников $O_1M_1T_1$ и $O_1N_1T_1$: $O_1M_1 = O_1N_1 = \dfrac{a\sqrt{5}}{4}$.

Точно так же получаем:

$$O_1P_1 = O_1K_1 = O_1R_1 = O_1S_1 = O_1L_1 = O_1Q_1 = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

Таким образом, точки M_1, N_1, P_1, K_1, R_1, S_1, L_1, Q_1 принадлежат окружности ω_1 радиуса $\dfrac{a\sqrt{5}}{4}$ с центром в точке O_1.

При аффинном преобразовании φ^{-1} окружность ω_1, проходящая через точки M_1, N_1, P_1, … , отображается на некоторый эллипс ω, проходящий через точки M, N, P, …, что и требовалось доказать.

Упражнения

593. На сторонах CA и CB треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $CM = m \cdot CA$, $CN = n \cdot CB$. Медиана CD пересекает отрезок MN в точке P. Найти отношение MP:PN.

594. Стороны BC, CD, DA, AB параллелограмма $ABCD$ делятся точками A_1, B_1, C_1, D_1 (соответственно) в отношении 1:3. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, пересекаясь, образуют четырехугольник $MNPK$. Доказать, что четырехугольник $MNPK$ – параллелограмм, центр которого совпадает с центром параллелограмма $ABCD$. Найти отношение площадей этих параллелограммов.

595. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Отрезки, соединяющие точки деления с противоположными вершинами треугольника, пересекаясь, образуют шестиугольник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$. Доказать, что прямые M_1M_4, M_2M_5 и M_3M_6 пересекаются в одной точке, которая является центроидом данного треугольника.

596. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через точку B проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая диагональ AC в точке P, а через точку C проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая диагональ BD в точке Q. Доказать, что прямая PQ параллельна основаниям трапеции.

597. В параллелограмме $ABCD$ точки M и N делят стороны BC и CD в отношении 3:4 и 5:2 соответственно. Прямая MN пересекается с прямыми AB и AD в точках B_1 и D_1, а с диагональю AC – в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок MN? отрезок B_1D_1?

598. Стороны треугольника ABC разделены на три равные части. Доказать, что существует эллипс, который проходит через все шесть точек деления.

599. Доказать, что сопряженные диаметры эллипса делят ограниченную им фигуру на четыре равновеликие части.

600. Доказать, что все параллелограммы, построенные на сопряженных полудиаметрах эллипса, равновелики. Найти их площадь, если полуоси эллипса равны a и b.

601. Около эллипса с центром O описан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что $S_{\Delta AOB} + S_{\Delta COD} = S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOD}$.

602. Доказать, что если две касательные к эллипсу параллельны, то отрезок, соединяющий точки касания, проходит через центр эллипса и делится этой точкой пополам.

603. Доказать, что для любого треугольника существуют три эллипса, каждый из которых касается двух сторон треугольника и двух других эллипсов.

§ 38. Применение аффинных преобразований к решению задач на построение

Аффинные преобразования, рассмотренные в § 33, могут применяться и в задачах на построение.

38.1. Построение точки пересечения данной фигуры и образа другой данной фигуры

Как известно, этот прием используется в задачах, где требуется построить такие точки X и Y, которые принадлежали бы данным фигурам Φ_1 и Φ_2 соответственно (см. п. 9.2. в «Сводке», а также § 16, §28).

***Пример* 1.** Даны четыре прямые – a, b, c, d; прямые c и d пересекаются. Построим треугольник ABC, в котором вершины A и B принадлежат прямым a и b соответственно, стороны AC и BC параллельны прямым c и d соответственно, причем прямая d делит сторону AC в отношении 2:1, а прямая c делит сторону BC пополам.

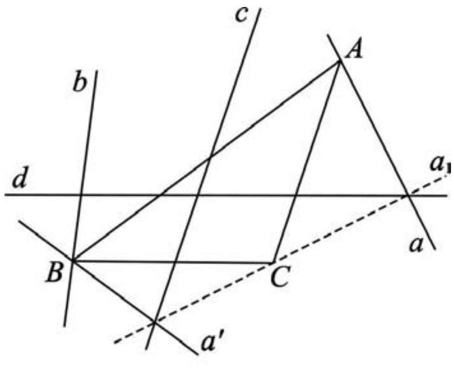


Рис. 75

Решение. *Анализ*. Допустим, что искомый треугольник ABC построен (рис. 75). Рассмотрим аффинное преобразование $f = f_2 \circ f_1$, где f_1 – косое сжатие, заданное осью d, направлением c и коэффициентом $k_1 = -\dfrac{1}{2}$, а f_2 – косое сжатие, заданное осью c, направлением d и коэффициентом $k_2 = -1$ (в соответствии с п.33.3 f есть каноническая композиция косых сжатий f_1 и f_2).

При отображении f прямая a переходит в некоторую прямую a', а точка A – в точку B. Т.к. $A \in a$, то $B \in a'$. Таким образом, $B \in a' \cap b$. Это соотношение позволяет построить точку B. Имея точку B, легко построить точки C и A.

Построение. Строим последовательно: $a' = f(a)$, $B \in a' \cap b$, $C = f_2^{-1}(B)$, $A = f_1^{-1}(C)$. Треугольник ABC – искомый.

Доказательство. Из построения непосредственно вытекает, что $B \in b$, отрезок BC параллелен прямой d и делится прямой c пополам, а отрезок AC параллелен прямой c и делится прямой d в отношении 2:1.

Докажем, что $A \in a$. Действительно, $f^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1}$, поэтому $B \xrightarrow{f^{-1}} A$, $a' \xrightarrow{f^{-1}} a$. Т. к. $B \in a'$, то $A \in a$, что требовалось доказать.

Исследование. Задача может иметь 0, 1 или бесконечное множество решений в зависимости от числа общих точек прямых a' и b.

Упражнения

604. Даны прямые a, b, c и окружность ω; прямые a и b пересекаются. Построить отрезок XY, который параллелен прямой a, делится прямой b в отношении 3:1, так, чтобы $X \in c$, $Y \in \omega$.
605. Даны прямые a, b, c, d и отрезок p. Построить треугольник ABC так, чтобы вершина A принадлежала прямой a, центроид O принадлежал прямой b, медиана AD была параллельна прямой c, а сторона BC лежала на прямой d и была равна отрезку p.
606. Даны прямые a, b, c и отрезок h. Построить треугольник ABC так, чтобы вершины B и C принадлежали прямым b и c соответственно, а высота AD была равна отрезку h, принадлежала прямой a и делила сторону BC в отношении 1:3.
607. Даны прямые a, b, c, d и отрезок MN; прямые c и d пересекаются. Построить треугольник ABC так, чтобы вершины A и C принадлежали прямым a и b соответственно, сторона AB была параллельна прямой d и делилась прямой c пополам, а сторона BC была равна и параллельна отрезку MN.

38.2. Пополнение множества известных точек

Напомним, что этот прием используется в задачах, где искомая фигура задается, в частности, некоторыми точками, которых, на первый взгляд, недостаточно, чтобы построить эту фигуру (см. п. 9.3. в «Сводке», а также § 16, § 28).

***Пример* 2.** Построим треугольник ABC, в котором медиана AD равна данному отрезку m и лежит на данной прямой a, сторона BC параллельна данной прямой b, а прямые AB и AC проходят через данные точки M и N соответственно.

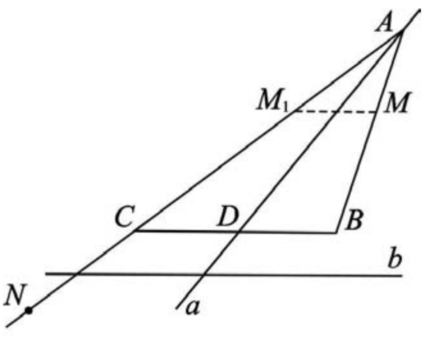


Рис. 76

Решение. *Анализ*. Допустим, что искомый треугольник построен (рис. 76). Рассмотрим косое сжатие f, заданное осью a, направлением b и коэффициентом $k = –1$. При этом $A \to A$, $B \to C$, $M \to M_1$. Следовательно, прямая AB переходит в прямую AC, и т. к. $M \in AB$, то $M_1 \in AC$.

Это дает возможность построить прямую AC, а затем искомый треугольник.

План построения. Строим последовательно:

– точку M_1 – образ точки M при косом сжатии f;

– прямую M_1N и точку $A = a \cap M_1N$;

– прямую AM;

– отрезок AD, равный отрезку m и лежащий на прямой a;

– отрезок BC, проходящий через точку D и параллельный прямой b.

Доказательство и исследование предоставляем читателю.

Упражнения

608. Построить треугольник ABC так, чтобы его высота AD была равна данному отрезку h, принадлежала данной прямой a и делила сторону BC в отношении 2:1, а прямые AB и AC проходили через данные точки M и N соответственно.

609. Даны прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и точки M и N. Построить четырехугольник $ABCD$ так, чтобы диагонали AC и BD принадлежали прямым a и b и делились точкой O в отношении 4:1 и 3:1 соответственно, а прямые AB и CD проходили через данные точки M и N соответственно.

610. Даны прямые a, b, c и точки M и N. Построить треугольник ABC, в котором сторона BC параллельна прямой a, медианы AA_1 и BB_1 принадлежат прямым b и c соответственно, а прямые AB и AC проходят через точки M и N соответственно.

§ 39. Применение аффинных преобразований к построению графиков функций

Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задан график функции $y = f(x)$ – некоторая линия Φ. Найдем образ этой линии при косом сжатии, осью которого является ось Ox, направление задано осью Oy, а коэффициент равен k, где $k>0$.

Для краткости такое преобразование будем называть сжатием к оси Ox (вдоль оси Oy).

В соответствии с приемом 5.3.:

– составляем формулы этого сжатия: $x' = x$, $y' = ky$;

– выражаем x и y через x' и y': $x = x'$, $y = \dfrac{y'}{k}$;

– подставляем полученные выражения в уравнение $y = f(x)$ и тем самым находим уравнение образа Φ' линии Φ: $y' = k{\cdot}f(x')$ или, в привычных обозначениях, $y = k{\cdot}f(x)$.

Таким образом, приходим к следующему правилу. График функции $y = k \cdot f(x)$, где $k>0$, получается из графика функции $y = f(x)$ при помощи сжатия к оси Ox с коэффициентом, равным k (см. п. 10.6. в «Сводке»).

Напомним, что термин «сжатие» употребляется лишь для единообразия терминологии, т.к. при $k>1$ указанное преобразование фактически представляет собой растяжение плоскости вдоль оси Oy.

Предлагаем читателю обосновать следующее правило. График функции $y = f\left(\frac{x}{k}\right)$, где $k>0$, получается из графика функции $y = f(x)$ при помощи сжатия к оси Oy (вдоль оси Ox) с коэффициентом, равным k (см. п. 10.7. в «Сводке»).

Упражнения

611. Дан график функции $y = f(x)$. Охарактеризовать последовательность тех преобразований, которые необходимо осуществить, чтобы получить графики следующих функции:

а) $y = f\left(-\frac{x}{2}\right)$; б) $y = 3f(x+1)$;

в) $y = 2f(3x) - 1$; г) $y = -\frac{1}{3}f(2x-8)$.

612. Используя преобразования плоскости, построить графики следующих функций:

а) $y = 3\sqrt{x}$; б) $y = \cos\frac{x}{2}$;

в) $y = \frac{1}{2}\arcsin(x-1)$; г) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

д) $y = 1 + 2\cos 2x$; е) $y = 3\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$;

ж) $y = -\frac{1}{2}\log_2(6-3x)$.

613. Дан график функции $y = f(x)$. Последовательно осуществили следующие преобразования плоскости: осевая симметрия с осью Oy, сжатие к оси Oy (вдоль оси Ox) с коэффициентом, равным 2, перенос на вектор $\vec{p}(5;0)$, осевая симметрия с осью Ox, сжатие к оси Ox (вдоль оси Oy) с коэффициентом, равным $\frac{1}{3}$.

График какой функции получился в результате?

§ 40. Инвариантные направления аффинных преобразований

Пусть при аффинном преобразовании f прямая a (с направляющим вектором $\vec{p}$) переходит в прямую b (с направляющим вектором $\vec{q}$). Тогда в силу свойства 6° (§35) все прямые, параллельные прямой a, переходят в прямые, параллельные прямой b. В таких случаях говорят, что преобразование f переводит направление, определяемое прямой a (вектором $\vec{p}$), в направление, определяемое прямой b (вектором $\vec{q}$) (рис. 77).

В частности, если прямая a отображается на прямую a', параллельную a, то (в силу вышеупомянутого свойства) преобразование f не изменяет (сохраняет) направление, заданное прямой a (рис. 77).

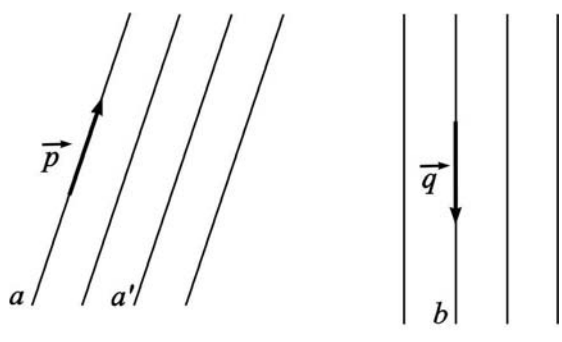


Рис. 77

Определение. Направление, определяемое прямой a, называется инвариантным направлением аффинного преобразования f, если это преобразование отображает прямую a на себя или на параллельную ей прямую.

Например, для тождественного преобразования, параллельного переноса, гомотетии (в частности, для центральной симметрии) любое направление плоскости является инвариантным.

Поставим следующую задачу: найти все инвариантные направления аффинного преобразования f, заданного в аффинном репере формулами $x' = a_1x + b_1y + c_1$, $y' = a_2x + b_2y + c_2$ (1).

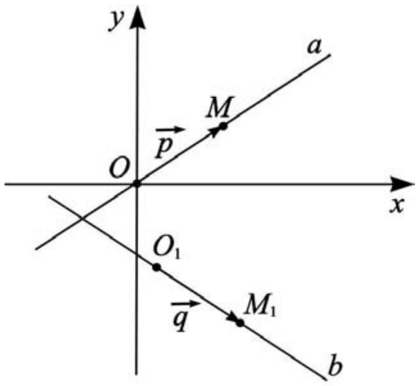


Рис. 78

Лемма 1. Преобразование (1) переводит направление, заданное вектором $\vec{p}(x_0; y_0)$, в направление, заданное вектором $\vec{q}(a_1x_0 + b_1y_0; a_2x_0 + b_2y_0)$.

Доказательство. Отложим вектор $\vec{p}(x_0; y_0)$ от начала координат: $\overrightarrow{OM} = \vec{p}$, где M (x_0; y_0) (рис. 78). При отображении f: $O \to O_1(c_1; c_2)$, $M(x_0; y_0) \to M_1(a_1x_0 + b_1y_0 + c_1; a_2x_0 + b_2y_0 + c_2)$, поэтому преобразование f переводит прямую a с направляющим вектором $\vec{p}(x_0; y_0)$ в прямую b с направляющим вектором $\vec{q} = \overrightarrow{O_1M_1}(a_1x_0 + b_1y_0; a_2x_0 + b_2y_0)$, что требовалось доказать.

Теорема 15. Если направление, определяемое вектором $\vec{p}(x_0; y_0)$, является инвариантным направлением преобразования (1), то (x_0; y_0) – ненулевое решение системы $\begin{cases} (a_1 - \lambda_0) \cdot x + b_1y = 0 \\ a_2x + (b_2 - \lambda_0) \cdot y = 0 \end{cases}$ (*), где λ_0 – действительный корень уравнения $\begin{vmatrix} a_1 - \lambda & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (**).

Доказательство. В силу леммы 1 направление, заданное вектором $\vec{p}$, переводится преобразованием f в направление, заданное вектором $\vec{q}(a_1x_0 + b_1y_0; a_2x_0 + b_2y_0)$. Т.к. исходное направление является инвариантным, то существует такое λ_0, что $\vec{q} = \lambda_0\vec{p}$. Запишем последнее равенство в координатной форме $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = \lambda_0 x_0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = \lambda_0 y_0 \end{cases}$ или, иначе, $\begin{cases} (a_1 - \lambda_0)\cdot x_0 + b_1y_0 = 0 \\ a_2x_0 + (b_2 - \lambda_0)\cdot y_0 = 0 \end{cases}$. Полученное равенство означает, что $(x_0;\, y_0)$ – решение системы (*) (причем ненулевое решение, т.к. $\vec{p} \neq \vec{0}$).

Т. к. система (*) линейных однородных уравнений имеет в силу вышесказанного ненулевое решение, то ее определитель равен нулю: $\begin{vmatrix} a_1 - \lambda_0 & b_1 \\ a_2 & b_2 - \lambda_0 \end{vmatrix} = 0$. Это и означает, что λ_0 – корень уравнения (**).

Теорема доказана.

Следствие. Если уравнение (**) не имеет действительных корней, то данное аффинное преобразование не имеет инвариантных направлений.

Определение. Ненулевой вектор $\vec{p}$, которым определяется инвариантное направление аффинного преобразования, будем называть собственным вектором этого преобразования.

Из теоремы 15 явствует, что для любого собственного вектора $\vec{p}(x_0; y_0)$ преобразования (1) имеют место соотношения $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = \lambda_0 x_0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = \lambda_0 y_0 \end{cases}$, где λ_0 – некоторый действительный корень уравнения (**). Этот корень будем называть собственным значением, соответствующим собственному вектору $\vec{p}$, а уравнение (**) – характеристическим уравнением.

Лемма 2. Если λ_0 – корень характеристического уравнения (**), составленного для преобразования (1), то:

1) $\lambda_0 \neq 0$;

2) при $\lambda = \lambda_0$ система $\begin{cases} (a_1 - \lambda)\cdot x + b_1y = 0 \\ a_2x + (b_2 - \lambda)\cdot y = 0 \end{cases}$ (2)

имеет ненулевое решение.

Доказательство. Преобразуем уравнение (**):

$$\lambda^2-(a_1+b_2)\cdot\lambda+(a_1b_2-a_2b_1)=0 \qquad (3).$$

Т. к. f – <u>преобразование</u> плоскости, то $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$ (см. упр. 24).

Т. к. в уравнении (3) $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то $\lambda_0\neq 0$.

Т. к. λ_0 – корень уравнения (**), то при $\lambda=\lambda_0$ определитель системы (2) равен нулю. Отсюда следует, что система (2) имеет при $\lambda=\lambda_0$ ненулевое решение, что требовалось доказать.

Теорема 16. Если $(x_0;\, y_0)$ – ненулевое решение системы (*), где λ_0 – действительный корень уравнения (**), то направление, определяемое вектором $\vec{p}(x_0;y_0)$, является инвариантным направлением преобразования (1).

Доказательство. Рассмотрим наряду с вектором $\vec{p}(x_0;y_0)$ вектор $\vec{q}(a_1x_0+b_1y_0;a_2x_0+b_2y_0)$.

Т. к. $(x_0;\, y_0)$ – решение системы (*), то $\begin{cases} a_1x_0+b_1y_0=\lambda_0x_0 \\ a_2x_0+b_2y_0=\lambda_0y_0 \end{cases}$.

Это означает, что $\vec{q}=\lambda_0\vec{p}$ (4).

В силу леммы (2) $\lambda_0\neq 0$ и, следовательно, $\vec{q}\neq\vec{0}$, т.е. вектор $\vec{q}$ задает на плоскости некоторое направление.

В силу леммы 1 преобразование f переводит исходное направление в направление, определяемое вектором $\vec{q}$. Равенство (4) означает, что эти направления совпадают. Следовательно, направление, заданное вектором $\vec{p}$, является инвариантным, что требовалось доказать.

Из вышеизложенного вытекает следующий план отыскания инвариантных направлений преобразования (1):

– составить характеристическое уравнение (**);

– найти действительные корни этого уравнения (собственные значения преобразования); если таковых нет, то инвариантные направления отсутствуют;

– для каждого собственного значения λ_0 составить систему (*);

– найти ненулевые решения $(x_0; y_0)$ этих систем.

Каждый из векторов $\vec{p}(x_0; y_0)$ и задает искомое направление, причем коллинеарные векторы задают одно и то же направление.

***Пример* 1.** Найдем инвариантные направления преобразования $\begin{cases} x' = x + 2y - 2 \\ y' = 2x + y + 3 \end{cases}$.

Решение. Характеристическое уравнение:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$, откуда $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$.

Находим инвариантные направления.

Составляем систему (*) для собственного значения $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y = 0, \text{ откуда } \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases},$$

где t – произвольное действительное число, отличное от 0.

Все векторы $\vec{p}_1(t; -t)$ коллинеарны вектору $\vec{u}_1(1; -1)$ и задают одно и то же инвариантное направление.

Составляем систему (*) для собственного значения $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x - y = 0, \text{ откуда } \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}, \text{ где } t \neq 0.$$

Все векторы $\vec{p}_2(t; t)$ коллинеарны вектору $\vec{u}_2(1; 1)$ и задают одно и то же инвариантное направление.

Итак, данное преобразование имеет ровно два инвариантных направления: $\vec{u}_1(1; -1)$ и $\vec{u}_2(1; 1)$.

***Пример* 2.** Найдем инвариантные направления преобразования $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y - 5 \end{cases}$.

Решение. Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

откуда $\lambda = 2$.

Составим систему для отыскания инвариантных направлений:

$$\begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}, \text{ откуда } x, y \text{ – любые.}$$

Как видим, любой ненулевой вектор задает инвариантное направление.

Итак, все направления плоскости являются инвариантными для данного преобразования, что вполне объяснимо, т.к. данное преобразование есть гомотетия (см. упр. 299).

Упражнения

614*. Доказать, что если формулы двух аффинных преобразований имеют (в некотором аффинном репере) одинаковую матрицу $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$, составленную из коэффициентов при x и y, то инвариантные направления этих преобразований либо совпадают, либо одновременно отсутствуют.

615*. Найти инвариантные направления следующих преобразований:

а) центрально-подобное вращение (в частности, поворот, отличный от центральной симметрии и тождественного преобразования): $\begin{cases} x' = k \cdot (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \\ y' = k \cdot (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \end{cases}$,

где $k \neq 0,\ -\pi < \alpha < \pi,\ \alpha \neq 0$;

б) косое сжатие (в частности, осевая симметрия): $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases}$, где $k \neq 0,\ k \neq 1$;

в) сдвиг: $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, где $k \neq 0$;

г) каноническая композиция косых сжатий (в частности, центрально-подобная симметрия): $\begin{cases} x' = k_1 x \\ y' = k_2 y \end{cases}$, где $k_1 \cdot k_2 \neq 0$, $k_1 \neq 1$, $k_2 \neq 1$, $k_1 \neq k_2$;

д) каноническая композиция косого сжатия и переноса (в частности, скользящая симметрия): $\begin{cases} x' = x + m \\ y' = ky + n \end{cases}$, где $m \neq 0$;

е) каноническая композиция сдвига и переноса: $\begin{cases} x' = x + ky + m \\ y' = y + n \end{cases}$, где $n \neq 0$;

ж) каноническая композиция сдвига и гомотетии: $\begin{cases} x' = k_0 x + ky \\ y' = k_0 y \end{cases}$, где $k_0 \neq 0$, $k_0 \neq 1$, $k \neq 0$.

616*. Аффинное преобразование f задано в аффинном репере R формулами (1). Доказать, что при переходе к новому аффинному реперу R' характеристическое уравнение (3) не изменится, и, следовательно, собственные значения аффинного преобразования не зависят от выбора репера.

Выясним, сколько инвариантных направлений могут иметь аффинные преобразования.

Теорема 17. Если характеристическое уравнение аффинного преобразования имеет два различных действительных корня, то:

1) собственные векторы, соответствующие этим корням, не коллинеарны;

2) данное преобразование имеет ровно два инвариантных направления.

Доказательство. 1) Пусть λ_1, λ_2 – различные действительные корни характеристического уравнения (**), а $\vec{u}_1(x_1; y_1)$, $\vec{u}_2(x_2; y_2)$ – соответствующие собственные векторы. Каждый из них задает инвариантное направление, поэтому имеют место равенства:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 = \lambda_1x_1 \\ a_2x_1 + b_2y_1 = \lambda_1y_1 \end{cases} \qquad (5);$$

$$\begin{cases} a_1x_2 + b_1y_2 = \lambda_2x_2 \\ a_2x_2 + b_2y_2 = \lambda_2y_2 \end{cases} \qquad (6).$$

Допустим, что векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ коллинеарны, тогда $\vec{u}_2 = t\vec{u}_1$, где $t \neq 0$, откуда $x_2 = tx_1$, $y_2 = ty_1$ (7).

Из (6) и (7) следует $\begin{cases} t(a_1x_1 + b_1y_1) = \lambda_2tx_1 \\ t(a_2x_1 + b_2y_1) = \lambda_2ty_1 \end{cases}$, откуда, учитывая (5), получаем $\begin{cases} \lambda_1x_1 = \lambda_2x_1 \\ \lambda_1y_1 = \lambda_2y_1 \end{cases}$.

Т. к. $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$, то $x_1 \neq 0$ или $y_1 \neq 0$ и поэтому $\lambda_1 = \lambda_2$. Получили противоречие. Следовательно, векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ не коллинеарны и, значит, им соответствуют различные инвариантные направления.

2) Докажем, что других инвариантных направлений нет. Допустим, что существует еще одно инвариантное направление, заданное вектором $\vec{u}$ и отличное от первых двух.

Т. к. векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ не коллинеарны, то $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$, где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ (если бы, например, $\alpha = 0$, то направления, заданные векторами u è $\vec{u}_2$ совпадали бы).

Вектор $\vec{u}$, будучи собственным вектором данного аффинного преобразования, соответствует какому-либо корню характеристического уравнения λ_1 или λ_2.

Пусть, для определенности, он соответствует корню λ_1. Тогда, учитывая, что $\vec{u}(\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$, по теореме 15, получаем:

$$\begin{cases} a_1 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) + b_1 \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) = \lambda_1 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) \\ a_2 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) + b_2 \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) = \lambda_1 \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) \end{cases}, \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} \alpha \cdot (a_1 x_1 + b_1 y_1) + \beta \cdot (a_1 x_2 + b_1 y_2) = \lambda_1 \cdot (\alpha x_1 + \beta x_2) \\ \alpha \cdot (a_2 x_1 + b_2 y_1) + \beta \cdot (a_2 x_2 + b_2 y_2) = \lambda_1 \cdot (\alpha y_1 + \beta y_2) \end{cases} \quad (7).$$

Из соотношений (7), учитывая (5) и (6), после несложных преобразований, получаем:

$$\beta \cdot \lambda_2 \cdot x_2 = \beta \cdot \lambda_1 \cdot x_2,\ \beta \cdot \lambda_2 \cdot y_2 = \beta \cdot \lambda_1 \cdot y_2.$$

Т.к. $\beta \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ или $y_2 \neq 0$, то $\lambda_2 = \lambda_1$. Противоречие.

Следовательно, кроме направлений, заданных векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$, других инвариантных направлений нет. Теорема доказана.

Теорема 18. Если характеристическое уравнение аффинного преобразования имеет единственный корень λ_0, то либо данное преобразование имеет единственное инвариантное направление, либо все направления плоскости являются инвариантными.

Доказательство. Пусть $\vec{u}_1(x_1; y_1)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0, тогда $\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 y_1 = \lambda_0 x_1 \\ a_2 x_1 + b_2 y_1 = \lambda_0 y_1 \end{cases}$ (8).

Если все остальные собственные векторы данного преобразования коллинеарны вектору $\vec{u}_1$, то инвариантное направление единственно.

Допустим, что существует собственный вектор $\vec{u}_2(x_2; y_2)$, не коллинеарный вектору $\vec{u}_1$, тогда имеют место соотношения:

$$\begin{cases} a_1 x_2 + b_1 y_2 = \lambda_0 x_2 \\ a_2 x_2 + b_2 y_2 = \lambda_0 y_2 \end{cases} \quad (9).$$

Докажем, что в этом случае любое направление плоскости является инвариантным.

Рассмотрим произвольное направление, заданное вектором $\vec{u}$, и докажем, что это направление является инвариантным.

Разложим вектор $\vec{u}$ по $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$: $\vec{u} = \alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$, тогда $\vec{u}(\alpha x_1 + \beta x_2; \alpha y_1 + \beta y_2)$.

Имеем (используя соотношения (8) и (9)):

$$(a_1 - \lambda_0)\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) + b_1\cdot(\alpha y_1 + \beta y_2) =$$
$$= \alpha\cdot(a_1 x_1 + b_1 y_1) + \beta\cdot(a_1 x_2 + b_1 y_2) - \lambda_0\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) =$$
$$= \alpha\cdot\lambda_0\cdot x_1 + \beta\cdot\lambda_0\cdot x_2 - \lambda_0\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$a_2\cdot(\alpha x_1 + \beta x_2) + (b_2 - \lambda_0)\cdot(\alpha y_1 + \beta y_2) = 0.$$

На основании теоремы 16 заключаем, что направление, заданное вектором $\vec{u}$, является инвариантным. Теорема доказана.

Упражнения

617°. Составить формулы аффинного преобразования *f* в репере $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, если известно, что *O* – инвариантная точка, а векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ задают инвариантные направления, причем числа $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$ – собственные значения, соответствующие этим векторам. Определить вид преобразования *f*.

618°. Составить формулы аффинного преобразования *f* в репере $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, если известно, что $O \xrightarrow{f} O$, $A(0;1) \xrightarrow{f} A'(k;1)$, где $k \neq 0$, а вектор $\vec{u}_1$ задает инвариантное направление, причем соответствующее ему собственное значение λ_0 равно 1.

619*. Характеристическое уравнение аффинного преобразования *f* не имеет действительных корней. Доказать, что преобразование *f* имеет единственную инвариантную точку.

620*. Доказать, что если все собственные значения аффинного преобразования отличны от 1, то оно имеет единственную инвариантную точку.

621*. Доказать, что если хотя бы одно из собственных значений аффинного преобразования, отличного от тождественного, равно 1, то либо это преобразование не имеет инвариантных точек, либо множество всех инвариантных точек есть прямая.

§ 41. Классификация аффинных преобразований

Как известно, к числу аффинных преобразований относятся все подобия (в частности, все движения), а также преобразования, рассмотренные в § 33. Существуют ли другие аффинные преобразования?

Ответ на этот вопрос дают приведенные ниже теоремы. Классификация аффинных преобразований осуществляется в этих теоремах по двум основаниям:

а) число инвариантных направлений;

б) число (множество) инвариантных точек.

Теорема 19. Пусть f – аффинное преобразование, имеющее различные собственные значения λ_1 и λ_2.

Если $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$, то преобразование f имеет единственную инвариантную точку и является канонической композицией двух косых сжатий.

Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ и преобразование f имеет хотя бы одну инвариантную точку, то оно является косым сжатием.

Если $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ и преобразование f не имеет инвариантных точек, то оно является канонической композицией косого сжатия и переноса.

Доказательство. Пусть $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1 и λ_2. Эти векторы не коллинеарны и задают инвариантные направления.

Составим формулы $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$ преобразования f в репере $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, где O – произвольно выбранная точка.

Т. к. в репере R $\vec{u}_1(1;0)$, $\vec{u}_2(0;1)$, то, применяя к ним теорему 15, получаем: $\begin{cases} a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = \lambda_1 \cdot 1 \\ a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = \lambda_1 \cdot 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = \lambda_2 \cdot 0 \\ a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = \lambda_2 \cdot 1 \end{cases}$, откуда $a_1 = \lambda_1$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = \lambda_2$.

Итак, в репере R преобразование f задается формулами:

$$\begin{cases} x' = \lambda_1 x + c_1 \\ y' = \lambda_2 y + c_2 \end{cases} \qquad (1).$$

1) Пусть $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$. В этом случае преобразование f имеет единственную инвариантную точку (упр. 620). Возьмем в качестве начала координат инвариантную точку, тогда в формулах (1) $c_1 = c_2 = 0$.

Итак, формулы преобразования f принимают вид: $\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$. Легко видеть, что преобразование f есть композиция $f_2 \circ f_1$ преобразований $\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} (f_1)$ и $\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = y \end{cases} (f_2)$. Преобразование f_1 есть косое сжатие, заданное осью Ox, направлением Oy (вектором $\vec{u}_2$) и коэффициентом λ_2, а преобразование f_2 – косое сжатие, заданное осью Oy, направлением Ox (вектором $\vec{u}_1$) и коэффициентом λ_1. Т.к., кроме того, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \neq 1$, $\lambda_2 \neq 1$, $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то f – каноническая композиция косых сжатий.

2) Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ и преобразование f имеет хотя бы одну инвариантную точку. Выбирая в качестве начала координат эту точку, по-

лучаем формулы преобразования *f*: $\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$. Как видим, преобразование *f* есть косое сжатие, заданное осью *Ox*, направлением *Oy* (вектором $\vec{u}_2$) и коэффициентом λ_2.

3) Пусть $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 \neq 1$ и преобразование *f* не имеет инвариантных точек. Формулы (1) принимают вид: $\begin{cases} x' = x + c_1 \\ y' = \lambda_2 y + c_2 \end{cases}$ (2).

Легко видеть, что преобразование *f* есть композиция косого сжатия $\begin{cases} x' = x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$ и переноса $\begin{cases} x' = x + c_1 \\ y' = y + c_2 \end{cases}$ на вектор $\vec{p}(c_1; c_2)$. Ось косого сжатия – ось *Ox*; направление – ось *Oy*, а коэффициент равен λ_2. Далее, в формулах (2) $c_1 \neq 0$, т.к. в противном случае преобразование *f* имело бы прямую инвариантных точек. Следовательно, вектор переноса не параллелен направлению *Oy* косого сжатия.

Таким образом, в данном случае преобразование *f* есть каноническая композиция косого сжатия и переноса.

Теорема доказана.

Теорема 20. Пусть *f* – аффинное преобразование, имеющее единственное собственное значение λ_0.

Если все направления плоскости являются инвариантными, то преобразование *f* есть либо тождественное преобразование ($\lambda_0 = 1$, все точки плоскости – инвариантные), либо перенос на ненулевой вектор ($\lambda_0 = 1$, инвариантных точек нет), либо гомотетия $H_O^{\lambda_0}$ ($\lambda_0 \neq 1$, инвариантная точка единственна).

Если инвариантное направление единственно, то преобразование *f* есть либо сдвиг ($\lambda_0 = 1$, множество инвариантных точек – прямая), либо каноническая композиция сдвига и переноса ($\lambda_0 = 1$, инвариантных точек нет), либо каноническая композиция сдвига и гомотетии ($\lambda_0 \neq 1$, инвариантная точка единственна).

Доказательство. Случай 1. Пусть все направления плоскости являются инвариантными (иначе говоря, все ненулевые векторы – собственные). Составим формулы $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$ преобразования f в репере $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$, где O – произвольно выбранная точка, а $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – произвольно выбранные неколлинеарные векторы.

Т. к. $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – собственные векторы, а λ_0 – единственное собственное значение, то применяя теорему 15, получаем: $\begin{cases} a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = \lambda_0 \cdot 1 \\ a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = \lambda_0 \cdot 0 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1 = \lambda_0 \cdot 0 \\ a_2 \cdot 0 + b_2 \cdot 1 = \lambda_0 \cdot 1 \end{cases}$, откуда $a_1 = \lambda_0$, $a_2 = 0$, $b_1 = 0$, $b_2 = \lambda_0$.

Итак, формулы преобразования f принимают вид: $\begin{cases} x' = \lambda_0x + c_1 \\ y' = \lambda_0y + c_2 \end{cases}$ (3).

1.1. Пусть $\lambda_0 = 1$.

1.1.1. Если при этом $c_1 = c_2 = 0$, то формулы (3) принимают вид $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$ и преобразование f есть тождественное преобразование (все точки плоскости – инвариантные).

1.1.2. Если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, то формулы (3) принимают вид $\begin{cases} x' = x + c_1 \\ y' = y + c_2 \end{cases}$ и преобразование f есть перенос на нулевой вектор $\vec{p}(c_1; c_2)$; инвариантных точек нет.

1.2. Пусть $\lambda_0 \neq 1$. В этом случае преобразование f имеет единственную инвариантную точку (см. упр. 620). Выбирая в качестве начала координат эту точку, приходим к формулам $\begin{cases} x' = \lambda_0x \\ y' = \lambda_0y \end{cases}$. Как видим, преобразование f есть гомотетия $H_O^{\lambda_0}$.

Случай 2. Пусть инвариантное направление единственно и задается вектором $\vec{u}_1$.

Составим формулы преобразования *f* в репере $R = \{O, \vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ (точка *O* и вектор $\vec{u}_2$ выбраны произвольно).

Применяя к собственному вектору $\vec{u}_1$ теорему 15, получаем: $\begin{cases} a_1 \cdot 1 + b_1 \cdot 0 = \lambda_0 \cdot 1 \\ a_2 \cdot 1 + b_2 \cdot 0 = \lambda_0 \cdot 0 \end{cases}$, откуда $a_1 = \lambda_0$, $a_2 = 0$.

Итак, формулы *f*: $\begin{cases} x' = \lambda_0 x + b_1 y + c_1 \\ y' = b_2 y + c_2 \end{cases}$ (4).

Характеристическое уравнение имеет вид: $(\lambda_0 - \lambda) \cdot (b_2 - \lambda) = 0$, откуда $\lambda_1 = \lambda_0$, $\lambda_2 = b_2$.

Т.к. по условию теоремы собственное значение единственно, то $b_2 = \lambda_0$.

2.1. Пусть $\lambda_0 = 1$, тогда формулы (4) принимают вид:

$$\begin{cases} x' = x + b_1 y + c_1 \\ y' = y + c_2 \end{cases} \quad (5).$$

В этих формулах $b_1 \neq 0$; в противном случае, как легко проверить, все направления плоскости были бы инвариантными.

2.1.1. Если в формулах (5) $c_2 = 0$, то преобразование *f* имеет прямую инвариантных точек $\left(y = -\dfrac{c_1}{b_1} \right)$. Выбирая в качестве начала координат одну из этих точек, получаем формулы $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, где $k = b_1 \neq 0$. Как видим, преобразование *f* есть сдвиг.

2.1.2. Если в формулах (5) $c_2 \neq 0$, то инвариантных точек нет и преобразование *f* есть композиция сдвига $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$, где $k = b_1$, и переноса

$\begin{cases} x' = x + c_1 \\ y' = y + c_2 \end{cases}$ на вектор $\vec{p}(c_1; c_2)$. Ось сдвига – ось Ox, а вектор переноса не параллелен оси сдвига, т.к. $c_2 \neq 0$. Таким образом, в этом случае преобразование f есть каноническая композиция сдвига и переноса.

2.2. Пусть в формулах (4) $\lambda_0 \neq 1$ и, как и прежде, $b_2 = \lambda_0$. Формулы (4) принимают вид:

$$\begin{cases} x' = \lambda_0 x + b_1 y + c_1 \\ y' = \lambda_0 y + c_2 \end{cases} \qquad (6).$$

Как и в случае 2.1., нетрудно установить, что в формулах (6) $b_1 \neq 0$.

Т. к. $\lambda_0 \neq 1$, то преобразование f имеет единственную инвариантную точку. Выбирая ее в качестве начала координат, получаем: $\begin{cases} x' = \lambda_0 x + b_1 y \\ y' = \lambda_0 y \end{cases}$. Обозначим $\frac{b_1}{\lambda_0} = k$, тогда полученные формулы примут вид: $\begin{cases} x' = \lambda_0 \cdot (x + ky) \\ y' = \lambda_0 y \end{cases}$.

Как видим, преобразование f есть композиция сдвига $\begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$ и гомотетии $\begin{cases} x' = \lambda_0 x \\ y' = \lambda_0 y \end{cases}$. Теорема полностью доказана.

Теоремы 19 – 20 позволяют осуществить классификацию аффинных преобразований, имеющих одно, два или бесконечное множество инвариантных направлений. С другой стороны, эти теоремы дают возможность определить вид аффинного преобразования в случае, когда его характеристическое уравнение имеет действительные корни.

Завершая начатую классификацию, рассмотрим еще класс аффинных преобразований, не имеющих инвариантных направлений (случай, когда характеристическое уравнение не имеет действительных корней). Аффинные преобразования, не имеющие инвариантных направлений, будем называть аффинными поворотами. К ним относятся, например, центрально-подобные вращения, в частности, повороты, отличные от тождественного преобразования и центральной симметрии (см. упр. 615).

Всякий аффинный поворот имеет единственную инвариантную точку (см. упр. 619) – центр поворота. Следовательно, аффинные повороты относятся к более широкому классу – классу центро-аффинных преобразований (см. упр. 495).

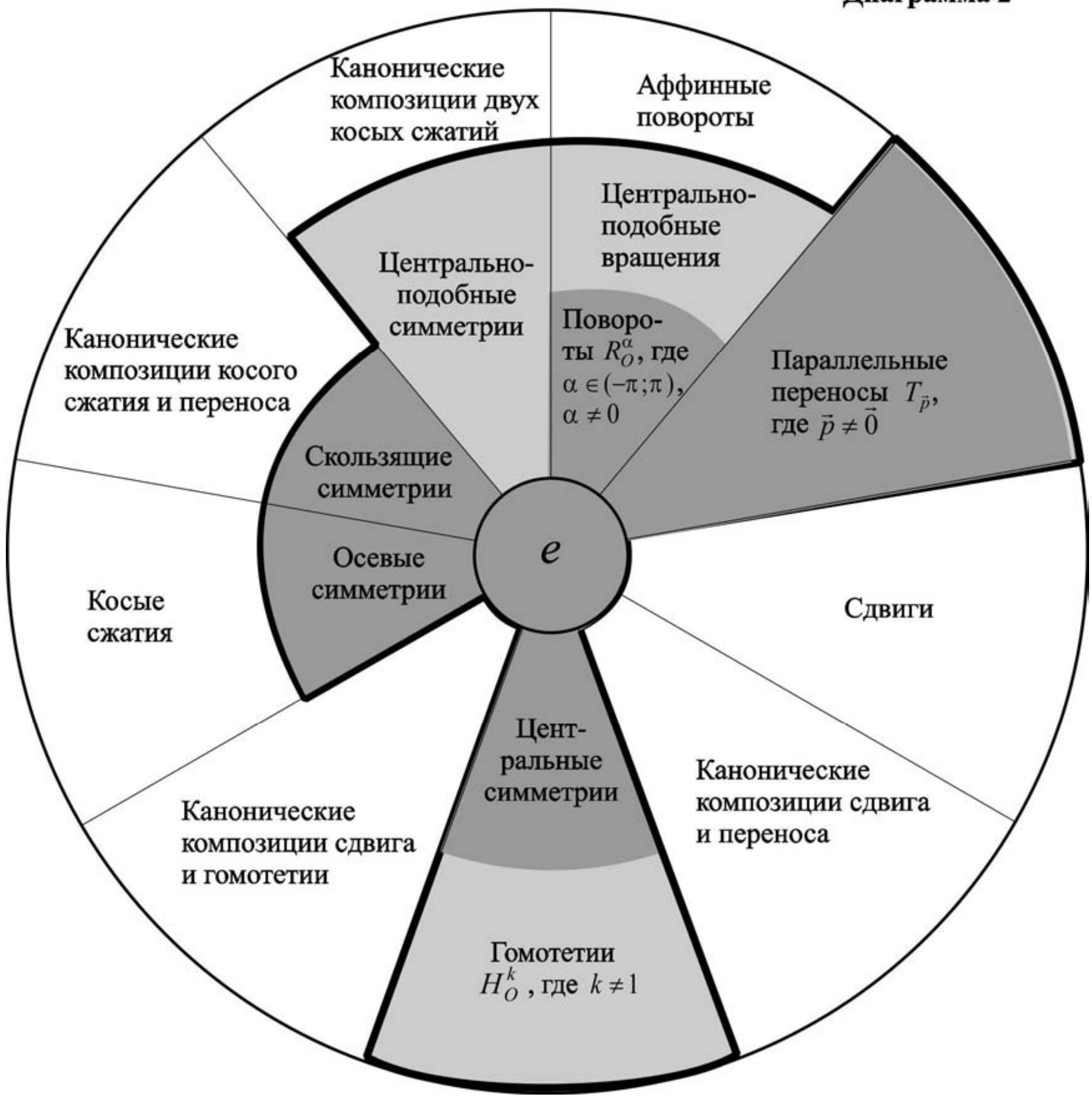
Результаты проведенного исследования отражены в таблице 2.

Таблица 2

№ п/п	Действительные корни характеристического уравнения	Инвариантные направления	Инвариантные точки	Вид аффинного преобразования
1.	Нет	Нет	1	Аффинный поворот
2.	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	Все направления	Все точки плоскости	Тождественное преобразование (e)
3.	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	Все направления	Нет	Параллельный перенос на ненулевой вектор
4.	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	1	Прямая	Сдвиг
5.	$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$	1	Нет	Каноническая композиция сдвига и переноса
6.	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	Все направления	1	Гомотетия H_O^λ, где $\lambda \neq 1$
7.	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	1	1	Каноническая композиция сдвига и гомотетии
8.	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 \neq 1$	2	Прямая	Косое сжатие
9.	$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 \neq 1$	2	Нет	Каноническая композиция косого сжатия и переноса
10.	$\lambda_1 \neq \lambda_2,\ \lambda_1 \neq 1,\ \lambda_2 \neq 1$	2	1	Каноническая композиция двух косых сжатий

Совмещенная классификация движений, подобий и аффинных преобразований показана на диаграмме 2.

Диаграмма 2



Из таблицы 2 видно, что для распознавания вида аффинного преобразования достаточно определить лишь два параметра – инвариантные направления и инвариантные точки, а затем сделать вывод в зависимости от значений этих параметров (см. п. 2.15.1. в «Сводке»).

На диаграмме 2 затемненная часть круга – это множество всех преобразований подобия; при этом более темным цветом выделено множество всех движений.

Упражнения

В приведенных ниже задачах система координат – аффинная.

622. Найти инвариантные направления и инвариантные точки приведенных ниже аффинных преобразований и охарактеризовать каждое из них:

а) $\begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x + 2y + 3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x' = 2x + y + 3 \\ y' = x + 2y \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x' = 2x + 3y - 7 \\ y' = 3x + 2y - 5 \end{cases}$; г) $\begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = x + 3y - 1 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y - 4 \end{cases}$; е) $\begin{cases} x' = x - 2y - 3 \\ y' = y + 1 \end{cases}$;

ж) $\begin{cases} x' = 2x - y + 1 \\ y' = x + 4y - 7 \end{cases}$.

623. Найти композицию преобразований (е) и (ж) из упр. 622. Определить вид полученного преобразования.

624. Определить вид аффинных преобразований в зависимости от значений параметров a, b, c:

$\begin{cases} x' = x + ay \\ y' = x \end{cases} \quad (a \neq 0)$;

$\begin{cases} x' = ax + y + b \\ y' = x - y + c \end{cases} \quad (a \neq -1)$.

625. Определить вид всех аффинных преобразований, при которых $O(0;0) \to O_1(3;1)$, $A(1;0) \to A_1(5;-2)$.

626. Дан произвольный треугольник ABC. При аффинном преобразовании f $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$. Составить формулы преобразования f в репере $R = \{A, B, C\}$. Доказать, что f – аффинный поворот, центром которого является центроид данного треугольника.

§ 42. Исследование композиции аффинных преобразований

Теоремы 19 – 20 позволяют исследовать композиции аффинных преобразований (в частности, подобий и движений) аналитическими методами, т.е. используя формулы данных преобразований в подходящей системе координат (п. 2.5.1. в «Сводке»). Однако иногда более предпочтительным оказывается синтетический подход (см., например, п.п. 2.5.2., 2.6, 2.15.2., 6.4. в «Сводке»).

***Пример* 1.** Исследуем композицию двух косых сжатий, имеющих общую ось.

Решение. Первый способ. Пусть косое сжатие f_1 задано осью a, направлением b_1 и коэффициентом k_1, а косое сжатие f_2 – осью a, направлением b_2 и коэффициентом k_2.

Введем на плоскости аффинную систему координат, направив ось Ox по прямой a, а ось Oy по прямой b_1. Составим формулы f_1: $\begin{cases} x' = x \\ y' = k_1 y \end{cases}$ (упр. 524). Далее, выберем направляющий вектор $\vec{p}(m;n)$ прямой b_2 и составим формулы преобразования f_2: $\begin{cases} x' = x + \dfrac{m}{n}(k_2 - 1)y \\ y' = k_2 y \end{cases}$ (упр. 535).

Составим формулы композиции $f_2 \circ f_1$:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{mk_1 \cdot (k_2 - 1)}{n} y \\ y' = k_1 k_2 \cdot y \end{cases} \qquad (1).$$

Находим собственные значения преобразования $f_2 \circ f_1$.

Характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & \dfrac{mk_1 \cdot (k_2 - 1)}{n} \\ 0 & k_1 \cdot k_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$, откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = k_1 \cdot k_2$. Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть $k_1 \cdot k_2 = 1$, тогда $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.

1.1. Если при этом $m = 0$, то формулы (1) принимают вид $x' = x$, $y' = y$ и, значит, $f_2 \circ f_1$ есть тождественное преобразование.

1.2. Пусть $m \neq 0$. Ищем инвариантные направления из системы: $\begin{cases} 0 \cdot x + \dfrac{mk_1 \cdot (k_2 - 1)}{n} y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$, откуда получаем единственное инвариантное направление: $\vec{u}(1;0)$ – направление оси Ox, т.е. прямой a.

Далее, используя (1), находим множество инвариантных точек: $y = 0$ (прямая инвариантных точек – ось Ox).

В соответствии с таблицей 1 заключаем, что композиция $f_2 \circ f_1$ есть сдвиг с осью a.

2. Пусть $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, тогда $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и преобразование $f_2 \circ f_1$ имеет два инвариантных направления (теорема 17).

Используя формулы (1), находим множество инвариантных точек: $y = 0$ (ось Ox – прямая a).

В соответствии с таблицей 1 заключаем, что композиция $f_2 \circ f_1$ – косое сжатие с осью a.

Второй способ. Пусть косое сжатие f_1 задается осью a и парой соответствующих точек: $A \to B$, а косое сжатие f_2 – осью a и парой соответствующих точек: $B \to C$.

Легко видеть, что для композиции $f_2 \circ f_1$ все точки прямой a являются инвариантными.

Рассмотрим несколько случаев.

1. Пусть точка C принадлежит прямой AB, т.е. направления косых сжатий совпадают.

1.1. Если при этом точка C совпадает с точкой A, то композиция $f_2 \circ f_1$ имеет три неколлинеарные инвариантные точки: A и любые две точки прямой a. В этом случае композиция $f_2 \circ f_1$ есть тождественное преобразование (упр. 494).

1.2. Если $C \neq A$, то композиция $f_2 \circ f_1$ задается прямой инвариантных точек (прямая a) и парой соответствующих точек: $A \to C$. Т.к. прямая AC не параллельна прямой a, то $f_2 \circ f_1$ – косое сжатие (рис. 79-а). Его ось – прямая a; направление совпадает с направлением косых сжатий f_1 и f_2.

2. Пусть точка C не принадлежит прямой AB, т.е. направления косых сжатий различны. Как и в случае 1.2, преобразование $f_2 \circ f_1$ задается прямой инвариантных точек и парой соответствующих точек: $A \to C$.

2.1. Если при этом $AC \| a$ (рис. 79-б), то $f_2 \circ f_1$ – перспективно-аффинное преобразование второго типа, т. е. сдвиг с осью a.

2.2. Если прямые AC и a не параллельны, то $f_2 \circ f_1$ – косое сжатие с осью a; направление задается прямой AC (рис.79-в).

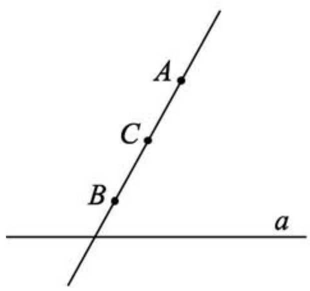


Рис. 79-а

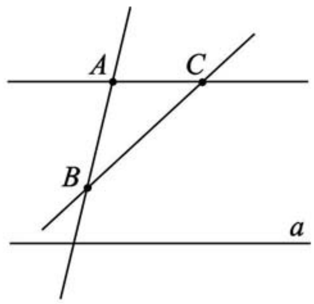


Рис. 79-б

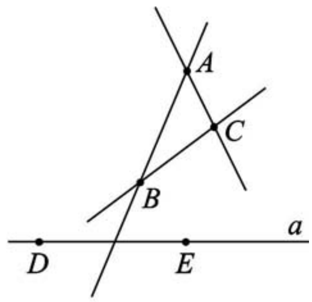


Рис. 79-в

Пример **2.** Исследуем композицию $R_O^{\alpha} \circ T_{\vec{p}}$, в которой поворот отличен от тождественного преобразования.

Решение. Можно считать, что $-\pi \le \alpha \le \pi$, $\alpha \neq 0$. Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат; в качестве начала координат выберем центр поворота. Пусть $\vec{p}(x_0; y_0)$.

Составим формулы исследуемой композиции:

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha + x_1 \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha + y_1 \end{cases}, \text{ где } \begin{array}{l} x_1 = x_0 \cdot \cos\alpha - y_0 \cdot \sin\alpha \\ y_1 = x_0 \cdot \sin\alpha + y_0 \cdot \cos\alpha \end{array}.$$

Характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-\lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-\lambda \end{vmatrix}=0 \text{ или } \lambda^2-2\lambda\cdot\cos\alpha+1=0.$$

Дискриминант: $\dfrac{D}{4}=\cos^2\alpha-1=-\sin^2\alpha$.

Если $-\pi<\alpha<\pi$, $\alpha\neq 0$, то $\dfrac{D}{4}<0$. В этом случае инвариантных направлений нет, но есть единственная инвариантная точка O_1 (упр. 619). В соответствии с таблицей 2 и диаграммой 2 заключаем, что преобразование $R_O^\alpha\circ T_{\vec{p}}$, будучи движением, есть поворот вокруг точки O_1.

Если $\alpha=\pm\pi$, то формулы искомой композиции принимают вид:

$$\begin{cases} x'=-x+x_1 \\ y'=-y+y_1 \end{cases} \qquad (2).$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае характеристическое уравнение имеет единственный корень $\lambda=-1$ и все направления плоскости являются инвариантными. Т. к., кроме того, преобразование имеет единственную инвариантную точку O_1, то композиция $R_O^\alpha\circ T_{\vec{p}}$ есть гомотетия $H_{O_1}^{-1}$, т. е. центральная симметрия. Впрочем, этот результат непосредственно усматривается из формул (2).

Предлагаем читателю сравнить приведенное решение с примером 7 из § 18 и оценить его преимущества и недостатки.

***Пример* 3.** Докажем, что всякое косое сжатие можно представить в виде композиции двух косых сжатий с той же осью, но различными направлениями.

Решение. Пусть косое сжатие f задано осью a и парой соответствующих точек ($A\to B$). Выберем вне прямых a и AB точку C так, чтобы прямые AC и BC не были параллельными прямой a (рис. 79-в). Пусть, кроме того, точки D и E принадлежат прямой a.

Рассмотрим: а) косое сжатие f_1, заданное осью a и парой соответствующих точек $A \to C$;

б) косое сжатие f_2, заданное осью a и парой соответствующих точек $C \to B$.

При отображении $f_2 \circ f_1$ точки A, D, E переходят в точки B, D, E. Косое сжатие f действует на точки A, D, E точно так же. Следовательно, $f = f_2 \circ f_1$ (см. упр. 501), что требовалось доказать.

Упражнения

627. Исследовать композицию двух сдвигов, которые имеют общую ось.
628. Доказать, что всякий сдвиг с осью а можно представить в виде композиции двух сдвигов с той же осью.
629. Доказать, что композиция сдвига и косого сжатия, имеющих общую ось, есть косое сжатие с той же осью.
630. Доказать, что всякое косое сжатие с осью а можно представить в виде композиции сдвига и косого сжатия с той же осью.
631. Исследовать композицию двух косых сжатий с параллельными осями, если:

    а) направления косых сжатий совпадают;

    б) направления косых сжатий различны.
632. Исследовать композицию двух сдвигов, оси которые параллельны.
633. Исследовать композицию косого сжатия и сдвига, если их оси параллельны.
634. Исследовать композицию двух косых сжатий с пересекающимися осями, одинаковыми направлениями и одинаковыми коэффициентами.
635. Исследовать композицию косого сжатия и гомотетии.

§ 43. Группы геометрических преобразований

Определение. Говорят, что на множестве G задана алгебраическая операция $\circ$ (кратко *операция*), если любой упорядоченной паре элементов a и b из множества G по некоторому закону (правилу) поставлен в соответствие определенный элемент из этого множества, обозначаемый $a \circ b$.

Определение. Множество G вместе с заданной на нем операцией $\circ$ называется группой, если выполняются следующие условия (аксиомы группы):

1°. Для любых элементов a, b, c из множества G имеет место равенство $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

2°. В множестве G существует такой элемент e, что для любого a из G имеет место равенство $a \circ e = e \circ a = a$;

3°. Для любого элемента a из G существует элемент, обозначаемый символом a^{-1}, такой, что $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.

Элемент e называется единицей группы G.

Элемент a^{-1} называется обратным к a.

Пусть G – множество всех преобразований плоскости. Любым двум преобразованиям f и φ плоскости поставим в соответствие их композицию $\varphi \circ f$. Как известно, композиция двух преобразований плоскости есть преобразование (упр. 80). Следовательно, тем самым на множестве G оказалась заданной алгебраическая операция $\circ$ (назовем ее умножением). Является ли множество G группой?

Теорема 21. Множество G всех преобразований плоскости вместе с заданной на этом множестве операцией умножения является группой (иначе, множество G является группой относительно операции умножения).

Доказательство. 1. Как известно, для любых преобразований f, φ и g имеет место соотношение $(g \circ \varphi) \circ f = g \circ (\varphi \circ f)$ (пример 4 в § 4).

2. Пусть e – тождественное преобразование плоскости, тогда для любого преобразования f имеет место соотношение $f \circ e = e \circ f = f$ (упр. 93).

3. Как известно, для любого преобразования f существует обратное ему преобразование f^{-1}, такое, что $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$ (упр. 99).

В соответствии с вышеприведенным определением множество G является группой относительно операции умножения. Теорема доказана.

Определение. Пусть H – подмножество группы G. Если множество H само является группой относительно операции, заданной в группе G, то оно называется подгруппой G.

Пусть M – множество некоторых преобразований плоскости, т.е. подмножество множества всех преобразований плоскости. Является ли M группой относительно операции умножения преобразований?

Теорема 22. Множество M некоторых преобразований плоскости является группой относительно операции умножения, если:

1) для любых преобразований f и φ, взятых из множества M, их композиция $\varphi \circ f$ также принадлежит множеству M;

2) для любого преобразования f из множества M обратное ему преобразование f^{-1} также принадлежит множеству M.

Доказательство. Условие (1) означает, что операция $\circ$, заданная на множестве G всех преобразований плоскости, является операцией и на множестве M.

Проверим аксиомы группы.

1°. Соотношение $(g \circ \varphi) \circ f = g \circ (\varphi \circ f)$ выполняется для всех преобразований, в частности и для преобразований из множества M.

2°. Пусть $f \in M$, тогда в силу условия (2) $f^{-1} \in M$, и, следовательно, по условию (1) $f \circ f^{-1} \in M$, т.е. $e \in M$ (тождественное преобразование принадлежит множеству M). Соотношение $f \circ e = e \circ f = f$ выполняется для любых преобразований плоскости, в частности и для преобразований из множества M.

3°. Если преобразование f принадлежит M, то по условию (2) f^{-1} также принадлежит M и $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e$.

Итак, все аксиомы группы выполняются, следовательно, множество M есть группа (подгруппа группы всех преобразований плоскости). Теорема доказана.

Условия 1 – 2 теоремы 22 будем называть групповыми условиями.

Легко видеть, что если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то множество M (множество некоторых преобразований плоскости) не является группой. Например, если не выполняется первое условие, то умножение преобразований не является алгебраической операцией на множестве M (см. п. 12. в «Сводке»).

***Пример* 1.** Пусть D – множество всех движений плоскости. Проверим групповые условия.

1. Как известно, композиция двух движений есть движение (упр. 116).

2. Преобразование, обратное движению, есть движение (упр. 117).

Следовательно, множество всех движений есть группа – группа движений.

***Пример* 2.** Пусть M – множество, включающее тождественное преобразование e и всевозможные перспективно-аффинные преобразования с одной и той же осью a, т.е. всевозможные косые сжатия и сдвиги с осью a. Докажем, что M – группа, для чего проверим групповые условия.

1. Пусть f, $\varphi \in M$. Если одно из этих преобразований – тождественное, то $\varphi \circ f \in M$.

Если f и φ– косые сжатия с осью a, то $\varphi \circ f$ есть либо косое сжатие с осью a, либо сдвиг с осью a, либо тождественное преобразование (см. пример 1 в § 42).

Если f и φ– сдвиги с осью a, то $\varphi \circ f$ есть либо сдвиг с осью a, либо тождественное преобразование (см. упр. 627).

Если f – сдвиг с осью a, а φ–косое сжатие с осью a (или наоборот), то $\varphi \circ f$ – косое сжатие с осью a (упр. 629).

Как видим, в любом случае $\varphi \circ f \in M$.

2. Пусть $f\in M$. Если $f = e$, то $f^{-1} = e \in M$. Если f – косое сжатие или сдвиг, заданные осью a и парой соответствующих точек $A \to A'$, то как легко видеть, f^{-1} – косое сжатие или, соответственно, сдвиг, заданные осью a и парой соответствующих точек.

Итак, если $f\in M$, то $f^{-1} \in M$.

В силу теоремы 22 множество M – группа.

***Пример* 3.** Пусть D_2 – множество всех движений второго рода и преобразования f и φ принадлежат этому множеству. Т.к. композиция двух движений второго рода есть движение первого рода (упр. 152), то $\varphi \circ f \notin D_2$. Таким образом, умножение преобразований не является алгебраической операцией на множестве D_2. Следовательно, это множество не является группой (относительно указанной операции).

Упражнения

636*. Доказать, что каждое из перечисленных ниже множеств является группой преобразований:

1) множество всех движений первого рода;

2) множество всех параллельных переносов;

3) множество всех поворотов с одним и тем же центром O;

4) множество всех гомотетий с одним и тем же центром O;

5) множество всех преобразований подобия

(группа подобий);

6) множество всех подобий первого рода;

7) множество всех аффинных преобразований

(аффинная группа);

8) множество всех аффинных преобразований, имеющих своей инвариантной точкой фиксированную точку O;

9) множество всех эквиаффинных преобразований;

10) множество всех унимодулярных преобразований.

Какие из этих групп являются:

а) подгруппами группы движений?

б) подгруппами группы подобий?

в) подгруппами аффинной группы?

637°. Какие из перечисленных ниже множеств преобразований являются группами?

1) Множество всех скользящих симметрий.

2) Множество всех центральных симметрий.

3) Множество всех центральных симметрий и всех параллельных переносов.

4) Множество всех гомотетий.

5) Множество всех гомотетий и всех переносов.

6) Множество всех подобий второго рода.

7) Множество всех сдвигов с параллельными осями и всех переносов на векторы, параллельные осям этих сдвигов (к числу таких переносов отнесем и тождественное преобразование).

8) Множество всех косых сжатий, заданных в фиксированной системе координат формулами вида $x' = x$, $y' = ky$, где $k > 1$.

§ 44. Разные задачи

638*. Доказать, что прямая a является инвариантной прямой аффинного преобразования тогда и только тогда, когда эта прямая имеет инвариантное направление и образ хотя бы одной точки прямой a принадлежит прямой a.

639. Аффинное преобразование задано тремя парами соответствующих точек: $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$ (точки A, B, C не лежат на одной прямой). На данной прямой c построить такую точку D, образ которой принадлежит прямой c.

Указание. Рассмотрите следующие случаи:

а) данная прямая совпадает с прямой AB (прямой BC, прямой AC);

б) прямая c проходит через точку A (точку B, точку C);

в) прямая c – произвольная.

640. Доказать, что всякое аффинное преобразование, отличное от подобия и имеющее хотя бы одну инвариантную точку, можно представить в виде композиции вида $\varphi \circ H_O^k \circ R_O^\alpha$, где φ – перспективно-аффинное преобразование.

641. Доказать, что всякое аффинное преобразование, отличное от подобия, можно представить в виде композиции подобия и перспективно-аффинного преобразования.

642*. а) При аффинном преобразовании f окружность ω отображается на эллипс ω'. Что представляют собой образы осей эллипса при преобразовании f^{-1}?

б) Доказать, что для любого аффинного преобразования существует хотя бы одна пара взаимно перпендикулярных прямых a и b, образы которых взаимно перпендикулярны.

Примечание. Направления, определяемые упомянутыми прямыми a и b, называются главными направлениями данного аффинного преобразования.

Например, для преобразования подобия (в частности, для движения) любая пара перпендикулярных прямых задает главные направления.

643. Аффинное преобразование задано в ортонормированном репере формулами $\begin{cases} x' = x - \frac{7}{3}y \\ y' = -\frac{4}{3}y \end{cases}$. Найти главные направления этого преобразования.

Указание. Задайте искомые направления ортогональными векторами $\vec{p}(m;n)$ и $\vec{q}(n;-m)$.

644. Перспективно-аффинное преобразование задано осью s и парой соответствующих точек: $A \to A'$. Построить такие прямые, проходящие через точку A, которыми задаются главные направления данного преобразования.

645*. Доказать, что всякое аффинное преобразование, отличное от движения, можно представить в виде композиции $\varphi \circ f$, где f – движение, а φ – либо сжатие, либо композиция двух сжатий, оси которых взаимно перпендикулярны, причем направление каждого из этих сжатий перпендикулярно его оси.

Примечание. Если в определении косого сжатия (§33) положить коэффициент k равным 1, то получим, как легко видеть, тождественное преобразование. Считая, таким образом, тождественное преобразование частным случаем сжатия, полученный результат можно сформулировать так: **всякое аффинное преобразование есть композиция некоторого движения и двух сжатий к взаимно перпенди-**

кулярным прямым (причем направление каждого сжатия перпендикулярно его оси).

646*. Доказать, что всякое аффинное преобразование, отличное от подобия, можно представить в виде композиции подобия и сжатия, направление которого перпендикулярно его оси.

Примечание. Учитывая сказанное выше, полученный результат можно сформулировать так: **всякое аффинное преобразование есть композиция некоторого подобия и сжатия (направление которого перпендикулярно его оси).** Сравните этот вывод с результатом упр. 641.

647*. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся ею пополам. Доказать, что существует окружность, образом которой при некотором косом сжатии является эллипс, сопряженными диаметрами которого являются отрезки AB и CD.

<u>648.</u> Отрезки AB и CD, пересекающиеся в точке O, являются сопряженными диаметрами некоторого эллипса. Построить несколько точек этого эллипса.

<u>649.</u> Отрезки AB и CD, пересекающиеся в точке O, являются сопряженными диаметрами некоторого эллипса. Построить точки пересечения этого эллипса с данной прямой a.

<u>650.</u> Отрезки AB и CD, пересекающиеся в точке O, являются сопряженными диаметрами некоторого эллипса. Через данную точку M провести касательную к этому эллипсу.

Приложение

Сводка основных правил, приемов и методов решения задач

§ 1. Общие приемы

1.1. Выведение следствий

В процессе решения задачи полезно ставить себе вопросы: «Что в задаче дано? Что известно? Что отсюда следует? Что можно найти, установить, доказать, располагая условиями задачи или полученными ранее следствиями?». В частности, возможно переформулирование условий задачи на векторном языке, на координатном языке или на языке геометрических преобразований.

1.2. Анализ цели задачи

В процессе решения задачи полезно ставить себе вопросы: «Какова цель задачи? Что требуется найти, вычислить, доказать? Как это сделать? Что для этого надо доказать, найти, установить?». В частности, возможно *переформулирование цели задачи* на векторном языке, на координатном языке или на языке геометрических преобразований. Возможно также разбиение задачи на вспомогательные задачи (подзадачи).

1.3. Сравнение достигнутого с требуемым

Осуществляя, с одной стороны, выведение следствий и, с другой стороны, анализ цели задачи, полезно периодически *сопоставлять, сравнивать полученные выводы (результаты) с намеченными ранее целями* и вносить в свои действия соответствующие коррективы.

1.4. Несовершенный анализ

В начале решения делается предположение, что цель задачи достигнута. Из этого допущения выводятся следствия до тех пор, пока не будет получен такой результат, истинность которого не вызывает сомнений. «Чистовое» решение выполняется в обратном направлении: от полученного ранее очевидного результата к цели задачи.

§ 2. Приемы распознавания вида отображения или преобразования

2.1.

Чтобы доказать, что отображение $f : A \to B$ является инъекцией, достаточно взять (рассмотреть) произвольные различные элементы множества A и установить, что их образы различны.

2.2.

Чтобы доказать, что отображение $f : A \to B$ является сюръекцией, достаточно взять произвольный элемент b множества B и установить, что он имеет хотя бы один прообраз a (иначе говоря, установить, что существует элемент $a \in A$, такой, что $f(a)=b$).

2.3.1.

Чтобы доказать, что отображение $f : A \to B$ является биекцией, достаточно:

– доказать, что f – инъекция;

– доказать, что f – сюръекция.

2.3.2.

Чтобы доказать, что отображение $f : A \to B$ является биекцией, достаточно установить, что каждый элемент множества B имеет единственный прообраз.

2.4.

Чтобы доказать, что отображение плоскости в себя, заданное в аффинном репере формулами $x'=a_1x+b_1y+c_1$, $y'=a_2x+b_2y+c_2$, является преобразованием плоскости, достаточно установить, что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

2.5.1.

Чтобы определить вид преобразования плоскости, достаточно:

– выбрать систему координат;

– составить формулы данного преобразования в этой системе координат;

– сравнить полученные формулы с формулами известных преобразований и сделать соответствующий вывод или применить к полученным формулам известные приемы распознавания.

2.5.2.

Чтобы определить вид преобразования плоскости, достаточно:

– рассмотреть произвольную точку M и ее образ M';

– выявить условия, связывающие точки M и M';

– сравнить эти условия с определениями известных преобразований;

– сделать вывод о характере данного преобразования.

2.6.

Чтобы определить вид композиции $\varphi \circ f$, достаточно:

– выявить условия, связывающие произвольную точку M и ее образ M_1 при отображении f;

– выявить условия, связывающие точку M_1 и ее образ M' при отображении φ;

– используя полученные выше результаты, выявить те условия, которые связывают точку M' с точкой M;

– анализируя условия, связывающие M' и M, сделать вывод о характере преобразования $\varphi \circ f$.

2.7.

Чтобы определить вид преобразования f^{-1}, достаточно:

– рассмотреть произвольную точку M и ее образ M' при отображении f^{-1};

– используя определение или свойства преобразования f, выявить условия, связывающие точки M' и M;

– учитывая полученные условия, сделать вывод о характере преобразования f^{-1}.

2.8.

Чтобы доказать, что $f^{-1} = \varphi$, где φ – известное преобразование, достаточно установить, что $\varphi \circ f = e$ или $f \circ \varphi = e$, где e – тождественное преобразование.

2.9.1.

Чтобы доказать, что некоторое преобразование плоскости является движением, достаточно взять произвольные точки A и B, найти их образы A' и B' и установить, что $A'B'=AB$ (расстояние $A'B'$ равно расстоянию AB).

2.9.2.

Чтобы доказать, что преобразование плоскости, заданное в ортонормированном репере формулами $x'= a_1x+ b_1y+ c_1$, $y'= a_2x+ b_2y+ c_2$, есть движение, достаточно доказать, что матрица $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ является ортогональной.

2.10.

Чтобы определить вид некоторого движения, достаточно:

– определить его род;

– выявить его инвариантные точки;

– сопоставляя род движения с количеством его инвариантных точек, сделать соответствующий вывод.

2.11.

Чтобы определить вид композиции $\varphi \circ f$ движений f и φ, достаточно:

– представить эти движения в виде композиции осевых симметрий, оси которых следует выбрать подходящим образом;

– представить преобразование $\varphi \circ f$ в виде композиции осевых симметрий;

– выявляя характер отдельных фрагментов в полученной композиции осевых симметрий, определить вид преобразования $\varphi \circ f$.

2.12.1.

Чтобы доказать, что преобразование плоскости является подобием с коэффициентом k, достаточно взять произвольные точки A и B, найти их образы A' и B' и установить, что $A'B' = k \cdot AB$.

2.12.2.

Чтобы доказать, что преобразование, заданное в ортонормированном репере формулами $x'=a_1x+b_1y+c_1$, $y'=a_2x+b_2y+c_2$, есть подобие с коэффициентом k, достаточно установить, что выполняются условия $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = k^2$, $a_1b_1+a_2b_2=0$.

2.13.

Чтобы определить вид преобразования подобия, отличного от движения, надо определить род данного преобразования f.

Если f – подобие второго рода, то f – центрально-подобная симметрия.

Если f – подобие первого рода, то необходимо:

– найти инвариантную точку M_0;

– найти образ M' какой-либо точки M, отличной от M_0;

– выяснить, коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\overrightarrow{M_0M'}$.

Если эти векторы не коллинеарны, то f – центрально-подобное вращение; в противном случае f – гомотетия.

2.14.1.

Чтобы доказать, что некоторое преобразование плоскости является аффинным, достаточно:

– взять произвольные коллинеарные точки и доказать, что их образы – коллинеарные точки;

– взять произвольные коллинеарные точки A, B, C, найти их образы A', B', C' и установить, что $(A'B', C') = (AB, C)$.

2.14.2.

Чтобы доказать, что некоторое преобразование плоскости является аффинным, достаточно установить, что оно в некотором аффинном репере задается формулами вида $x'=a_1x+b_1y+c_1$, $y'=a_2x+b_2y+c_2$.

2.15.1.

Чтобы определить вид некоторого аффинного преобразования, достаточно:

– найти его инвариантные направления;

– найти инвариантные точки;

– сопоставляя полученные результаты, сделать вывод.

2.15.2.

Чтобы определить вид некоторого движения f (подобия f, аффинного преобразования f), достаточно подобрать такое движение φ (подобие φ, аффинное преобразование φ) известного вида, которое вместе с f одинаково действует на вершины некоторого треугольника (см. также п. 6.4).

2.16.

Чтобы доказать, что аффинное преобразование f является перспективно-аффинным преобразованием первого типа (т.е. косым сжатием), достаточно установить, что:

– преобразование f имеет прямую a инвариантных точек;

– для некоторой точки M, не принадлежащей прямой a, прямые MM' и a не параллельны, где $M' = f(M)$.

2.17.

Чтобы доказать, что аффинное преобразование f является перспективно-аффинным преобразованием второго типа (т.е. сдвигом), достаточно установить, что:

– преобразование f имеет прямую a инвариантных точек;

– для некоторой точки M, не принадлежащей прямой a, прямые MM' и a параллельны, где $M' = f(M)$.

§ 3. Приемы отыскания образа точки

3.1.

Чтобы доказать, что

- при переносе $T_{\vec{p}}$
- при повороте R_O^α
- при центральной симметрии Z_O
- при осевой симметрии S_a
- при гомотетии H_O^k

точка M переходит в точку M',

достаточно доказать, что

- $\overrightarrow{MM'}=\vec{p}$
- $OM=OM'$ и ориентированный угол MOM' равен α
- точка O – середина отрезка MM'
- отрезок MM' перпендикулярен прямой a и делится ею пополам
- $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$

3.2.

Если точка C делит отрезок AB в отношении $m{:}n$ и при некотором движении (подобии, аффинном преобразовании) точки A и B переходят в точки A_1 и B_1, то точка C переходит при этом в такую точку C_1, которая делит отрезок A_1B_1 в отношении $m{:}n$.

В частности, середина C отрезка AB переходит при каждом из этих отображений в середину C_1 отрезка A_1B_1.

3.3.

Если точка A принадлежит лучу h с началом O, точка A_1 – лучу h_1 с началом O_1, $AO=A_1O_1$ и при некотором движении $O \to O_1$, $h \to h_1$, то при этом точка A переходит в точку A_1.

3.4.

Если при некотором преобразовании плоскости фигуры Φ_1 и Φ_2 переходят соответственно в фигуры Φ'_1 и Φ'_2, то общие точки фигур Φ_1 и Φ_2 переходят в общие точки фигур Φ'_1 и Φ'_2.

§ 4. Приемы отыскания формул преобразования плоскости

4.1.

Чтобы найти формулы некоторого отображения плоскости в себя (в данной системе координат), достаточно:

– взять произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотреть ее образ – точку $M'(x'; y')$;

– используя определение данного отображения или его свойства, установить связь между координатами точек M и M';

– из полученных соотношений выразить x' и y' через x и y.

4.2.

Чтобы найти формулы композиции $\varphi \circ f$, достаточно:

– взять произвольную точку $M(x; y)$, рассмотреть ее образ при отображении f – точку $M_1(x_1; y_1)$ – и установить связь между координатами этих точек;

– рассмотреть образ точки M_1 при отображении φ – точку $M'(x'; y')$ – и установить связь между координатами этих точек;

– выразить координаты точки M' через координаты точки M.

4.3.

Чтобы найти формулы преобразования f^{-1}, достаточно:

– взять произвольную точку $M(x; y)$ и рассмотреть ее образ при отображении f^{-1} – точку $M'(x'; y')$;

– используя формулы, определение или свойства отображения f, установить связь между координатами этих точек;

– выразить координаты точки M' через координаты точки M.

4.4.

Чтобы составить формулы аффинного преобразования (в частности, движения или подобия), заданного тремя парами соответствующих точек ($A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$), достаточно:

– подставить (поочередно) в формулы $x'= a_1x+b_1y+c_1$, $y'=a_2x+b_2y+c_2$ координаты точек A и A', B и B', C и C';

– найти из полученных равенств коэффициенты a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 и записать искомые формулы.

4.5.

Чтобы составить формулы движения (подобия, аффинного преобразования), переводящего репер R в репер R', достаточно:

– составить формулы перехода от репера R к реперу R';

– заменить в этих формулах x на x', y на y' и наоборот.

§ 5. Приемы отыскания образа фигуры при заданном преобразовании

5.1.

Чтобы доказать, что при некотором преобразовании фигура Φ переходит в фигуру Φ' (фигура Φ отображается на фигуру Φ', фигура Ф преобразуется в фигуру Φ'), достаточно:

– взять произвольную точку M фигуры Φ и доказать, что ее образ принадлежит фигуре Φ';

– взять произвольную точку M' фигуры Φ' и доказать, что ее прообраз принадлежит фигуре Φ.

5.1-а.

Чтобы найти образ фигуры Φ при некотором преобразовании, достаточно:

– наметить предполагаемый искомый образ Φ' фигуры Φ;

– взять произвольную точку M фигуры Φ и доказать, что ее образ принадлежит фигуре Φ';

– взять произвольную точку M' фигуры Φ', допустить, что ее прообраз M не принадлежит фигуре Φ, и вывести из этого предположения противоречие.

5.2.

Пусть f – инволютивное преобразование плоскости. Чтобы доказать, что преобразование f отображает фигуру Φ на себя, достаточно взять произвольную точку M фигуры Φ и установить, что ее образ принадлежит этой фигуре .

5.3.

Чтобы найти образ фигуры Φ при некотором преобразовании плоскости f, достаточно:

– ввести на плоскости систему координат;

– составить уравнение фигуры Φ;

– найти формулы преобразования f;

– используя эти формулы, выразить x, y через x', y';

– подставить полученные выражения в уравнение фигуры Φ и тем самым получить уравнение ее образа Φ';

– сделать вывод о фигуре Φ' по ее уравнению.

5.4.

Чтобы найти образ Φ' фигуры Φ при некотором преобразовании, достаточно:

– выявить «опорные» точки фигуры Φ;

– найти их образы при данном преобразовании (т.е. найти «опорные» точки фигуры Φ');

– сделать вывод о фигуре Φ'.

5.5.

Пусть фигура Φ задана в репере R уравнением $F(x; y)=0$.

Чтобы найти образ Φ' фигуры Φ при аффинном преобразовании f (преобразовании, заданном в репере R линейными формулами), достаточно:

– найти репер R' – образ репера R при отображении f;

– составить уравнение $F(x; y)=0$ фигуры Φ' в репере R',

– сделать вывод о фигуре Φ'; в случае затруднений перейти от репера R' к более удобному реперу R_1 и составить уравнение фигуры Φ' в репере R_1.

§ 6. Приемы доказательства равенства (совпадения) двух преобразований

6.1.

Чтобы доказать, что преобразования f и φ плоскости совпадают, достаточно убедиться, что они в некотором аффинном репере задаются одинаковыми формулами.

6.2.

Чтобы доказать, что преобразования f и φ плоскости (некоторого множества) совпадают, достаточно установить, что для любой точки M (для любого элемента M) выполняется равенство $f(M)= \varphi (M)$.

6.3.1.

Чтобы доказать, что движения f и φ совпадают, достаточно установить, что они одинаково действуют на один и тот же ортонормированный репер (на один и тот же флаг).

6.3.2.

Чтобы доказать, что подобия f и φ совпадают, достаточно установить, что они одинаково действуют на один и тот же ортонормированный репер.

6.3.3.

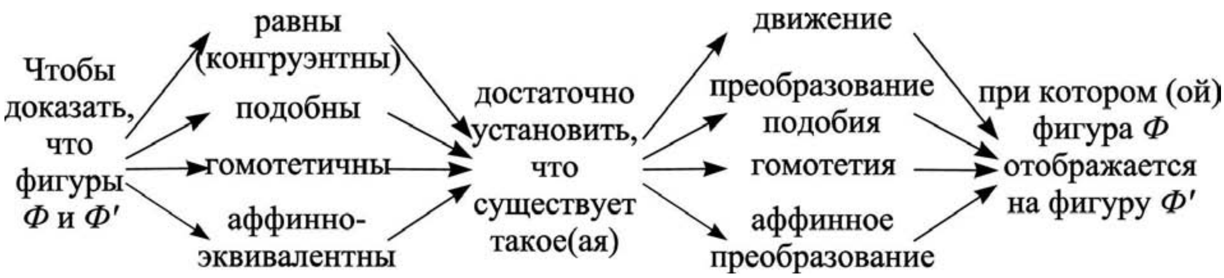
Чтобы доказать, что аффинные преобразования f и φ совпадают, достаточно установить, что они одинаково действуют на один и тот же аффинный репер.

6.4.

Чтобы доказать, что движения f и φ (подобия f и φ; аффинные преобразования f и φ) совпадают, достаточно установить, что они переводят вершины A, B, C треугольника ABC соответственно в вершины A_1, B_1, C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ (одинаково действуют на вершины одного и того же треугольника).

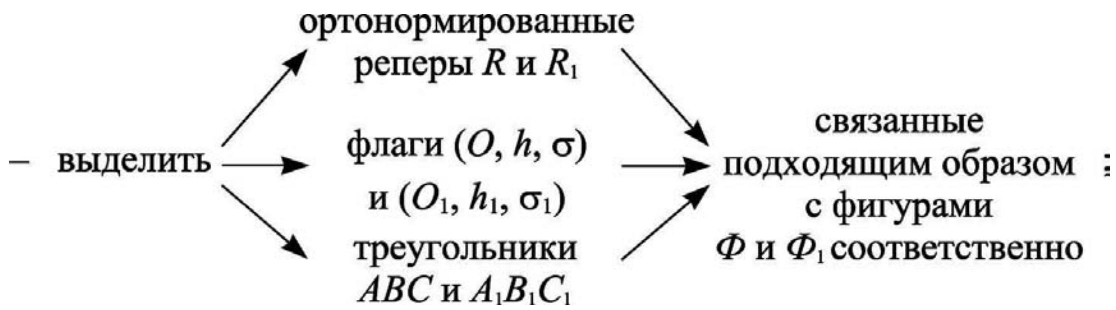
§ 7. Приемы доказательства равенства (подобия, аффинной эквивалентности) двух фигур

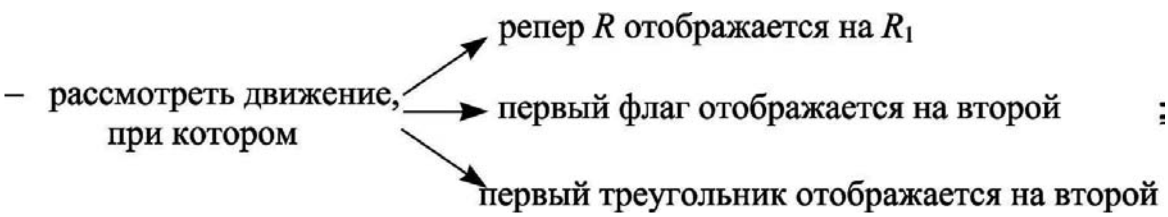
7.1.



7.2.

Чтобы доказать, что фигура $Ф$ равна (конгруэнтна) фигуре $Ф_1$, достаточно:





– установить, что при этом движении фигура $Ф$ отображается на фигуру $Ф_1$.

7.3.

Чтобы доказать, что фигуры Φ и Φ' подобны (аффинно-эквивалентны), достаточно установить, что фигура Φ гомотетична (аффинно-эквивалентна) некоторой фигуре Φ_1, а фигура Φ_1 равна фигуре Φ'.

В частности, чтобы доказать, что фигуры Φ и Φ' подобны, достаточно установить, что они гомотетичны.

7.4.

Чтобы доказать, что фигуры Φ и Φ' аффинно-эквивалентны, достаточно:

– выделить аффинные реперы R и R' (треугольники ABC и $A'B'C'$), связанные подходящим образом с фигурами Φ и Φ';

– рассмотреть аффинное преобразование, переводящее репер R в репер R' (треугольник ABC в треугольник $A'B'C'$);

– установить, что при этом аффинном преобразовании фигура Φ отображается на фигуру Φ'.

§ 8. Метод геометрических преобразований решения задач на вычисление и доказательство

8.1. Вспомогательные построения

Отдельные фрагменты исходной геометрической ситуации подвергаются некоторому преобразованию, в результате чего получается вспомогательная фигура, более удобная для решения поставленной задачи.

8.2. Переформулирование цели задачи

Цель задачи переформулируется на языке геометрических преобразований, в результате чего исходная задача сводится, в конечном счете, к отысканию образа фигуры или образа точки при заданном преобразовании.

8.2.1.

Чтобы доказать, что отрезок AB равен отрезку CD, достаточно установить, что при некотором движении отрезок AB отображается на отрезок CD.

8.2.2.

Чтобы доказать, что угол между прямыми a и b равен φ, где $0° < \varphi \leq 90°$, достаточно установить, что при повороте (центрально-подобном вращении) вокруг некоторого центра на угол φ или $180° - \varphi$ прямая a отображается на прямую b.

В частности, чтобы доказать, что прямые a и b взаимно перпендикулярны, достаточно установить, что $a \to b$ при повороте (центрально-подобном вращении) вокруг некоторого центра на угол 90° или –90°.

8.2.3.

Чтобы доказать, что треугольник ABC – правильный, достаточно установить, что при повороте $R_O^{120°}$ или $R_O^{-120°}$ $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$.

8.2.4.

Чтобы доказать, что четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм с центром O, достаточно установить, что при центральной симметрии Z_O $A \to C$, $B \to D$.

8.2.5.

Чтобы доказать, что четырехугольник $ABCD$ – квадрат с центром O, достаточно установить, что при повороте $R_O^{90°}$ или $R_O^{-90°}$ $A \to B$,

$B \to C$, $C \to D$, $D \to A$.

8.2.6.

Чтобы доказать, что точка пересечения прямых a и b принадлежит прямой c, достаточно показать, что при осевой симметрии с осью c (при косом сжатии с осью c; при сдвиге с осью c) прямая a отображается на прямую b.

8.2.7.

Чтобы доказать, что угол ABC (треугольник ABC) равен углу $A_1B_1C_1$ (треугольнику $A_1B_1C_1$), достаточно установить, что существует движение, при котором первый угол (треугольник) отображается на второй.

8.2.8.

Чтобы доказать, что угол AOB равен φ, где $0° < \varphi < 180°$, достаточно установить, что при повороте R_O^{φ} или $R_O^{-\varphi}$ $A \to B$.

8.2.9.1.

Чтобы доказать, что отрезок AB равен и параллелен отрезку CD, достаточно доказать, что при переносе $T_{\vec{p}}$ или при центральной симметрии Z_O первый отрезок отображается на второй (предполагается, что векторы $\vec{p}$ и $\overrightarrow{AB}$ не коллинеарны, а точка O не принадлежит прямой AB).

8.2.9.2.

Чтобы доказать, что отрезок AB равен и параллелен отрезку CD, достаточно установить, что при переносе на вектор $\overrightarrow{CD}$ точка A переходит в точку B (предполагается, что точки A, B, C, D не лежат на одной прямой).

8.2.10.

Чтобы доказать, что отрезок AB делится точкой O пополам, достаточно показать, что при центральной симметрии Z_O $A \to B$.

8.2.11.

Чтобы доказать, что отрезок AB перпендикулярен прямой a и делится ею пополам, достаточно показать, что при осевой симметрии S_a $A \to B$.

8.2.12.

Чтобы доказать, что точки A, B, C коллинеарны, достаточно установить, что при гомотетии H_A^k $B \to C$ (или при гомотетии H_B^k $A \to C$ и т. п.).

8.2.13.1.

Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны, достаточно установить, что при некоторой гомотетии H_O^k (при центральной симметрии Z_O, при переносе $T_{\vec{p}}$) прямая a отображается на прямую b (предполагается, что $O \notin a$, вектор $\vec{p}$ не параллелен прямой a).

8.2.13.2.

Чтобы доказать, что прямые a и b параллельны, достаточно установить, что при некотором косом сжатии с осью c прямая a, параллельная прямой c, отображается на прямую b.

8.2.14.

Чтобы доказать, что прямые AA_1, BB_1, CC_1, … проходят через точку O, достаточно установить, что при гомотетии H_O^k $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$, ….

8.2.15.

Чтобы доказать, что фигура F является параллелограммом (ромбом, прямоугольником), достаточно установить, что F есть образ некоторого параллелограмма (ромба, прямоугольника) при некотором преобразовании подобия.

8.2.16.

Чтобы доказать, что линии L_1, L_2, L_3, … пересекаются в одной точке, достаточно установить, что они являются образами или прообразами некоторых линий L'_1, L'_2, L'_3, … , пересекающихся в одной точке.

8.2.17.

Чтобы доказать, что отрезок AB параллелен прямой b и делится прямой a в отношении m:n, достаточно установить, что точка A переходит в точку B при косом сжатии, которое задано осью a, направлением b и коэффициентом, равным $-\frac{n}{m}$.

8.2.18.

Чтобы доказать, что площади фигур Φ' и Φ относятся как m:n, достаточно установить, что фигура Φ отображается на фигуру Φ' при некотором аффинном преобразовании, для которого коэффициент искажения площадей равен $\frac{m}{n}$.

8.2.19.

Чтобы доказать, что отрезок AB параллелен прямой c, достаточно установить, что при некотором сдвиге с осью c точка A переходит в точку B.

8.3. Перенос на данную фигуру свойств аффинно-эквивалентной ей фигуры

Чтобы доказать, что фигура F обладает некоторым аффинным свойством α, достаточно:

– рассмотреть вспомогательную (более удобную) фигуру F_0, аффинно-эквивалентную фигуре F;

– установить, что фигура F_0 обладает свойством α;

– перенести свойство α на фигуру F, учитывая свойства аффинных преобразований.

§ 9. Метод геометрических преобразований решения задач на построение

9.1. Сближение элементов искомой фигуры

В процессе анализа отдельные линейные элементы искомой фигуры подвергаются некоторому преобразованию с целью получить такой вспомогательный треугольник, который можно было бы легко построить и располагая которым можно построить искомую фигуру.

9.2. Построение точки пересечения фигуры

и образа фигуры

Прием используется в задачах, где требуется построить такие точки X и Y, которые принадлежат данным линиям Φ_1 и Φ_2 соответственно.

В процессе анализа одна из данных линий, например Φ_1, подвергается такому преобразованию, при котором точка X переходит в точку Y. После этого устанавливается, что вторая искомая точка – точка Y – является общей точкой линии Φ_2 и образа линии Φ_1 при вышеупомянутом преобразовании. Это обстоятельство позволяет построить точку Y, а затем – точку X.

9.3. Пополнение множества известных точек

В процессе анализа некоторые из данных точек вместе с содержащими их линейными элементами искомой фигуры подвергаются некоторому преобразованию, в результате чего набор известных точек пополняется, что и позволяет построить искомую фигуру.

9.4. Построение прообраза искомой фигуры

Вначале строится вспомогательная фигура, которая обладает <u>некоторыми</u> свойствами из числа требуемых (т.е. из числа тех свойств, которыми должна обладать искомая фигура); затем вспомогательная фигура переводится в искомую фигуру посредством некоторого преобразования.

9.4-а. Прием (метод) подобия

Вначале строится вспомогательная фигура Φ_1, которая <u>подобна</u> искомой фигуре Φ и обладает <u>некоторыми</u> свойствами из числа требуемых. Затем фигура Φ_1 подвергается такому преобразованию подобия, при котором $\Phi_1 \to \Phi$.

9.5. Прием спрямления

Используется в задачах, где требуется построить ломаную, обладающую неким экстремальным свойством. В процессе анализа отдельные звенья этой ломаной подвергаются некоторому преобразованию (чаще – осевой симметрии); в результате происходит «распрямление» этой ломаной, что и позволяет отыскать способ ее построения.

§ 10. Приемы построения графиков функций и уравнений

10.1.

Чтобы построить график функции $y=f(x)+b$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график параллельному переносу на вектор $\vec{p}(0;b)$.

10.2.

Чтобы построить график функции $y=f(x–a)$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график параллельному переносу на вектор $\vec{p}(a;0)$.

10.3.

Чтобы построить график уравнения $F(x–a;\ y–b)=0$, достаточно построить график уравнения $F(x;\ y)=0$ и подвергнуть этот график параллельному переносу на вектор $\vec{p}(a;b)$.

10.4.

Чтобы построить график функции $y = –f(x)$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график осевой симметрии с осью Ox.

10.5.

Чтобы построить график функции $y=f(-x)$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график осевой симметрии с осью Oy.

10.6.

Чтобы построить график функции $y=k\cdot f(x)$, где $k>0$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график сжатию к оси Ox (вдоль оси Oy) с коэффициентом, равным k.

10.7.

Чтобы построить график функции $y = f\left(\dfrac{x}{k}\right)$, где $k>0$, достаточно построить график функции $y=f(x)$ и подвергнуть этот график сжатию к оси Oy (вдоль оси Ox) с коэффициентом, равным k.

§ 11. Прием отыскания инвариантных направлений аффинного преобразования

Чтобы найти инвариантные направления преобразования $\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$, достаточно:

– составить характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} a_1-\lambda & b_1 \\ a_2 & b_2-\lambda \end{vmatrix} = 0$;

– найти действительные корни этого уравнения (собственные значения преобразования), если таковых нет, то инвариантные направления отсутствуют;

– для каждого собственного значения λ_0 составить систему вида
$$\begin{cases}(a_1-\lambda_0)\cdot x+b_1y=0\\ a_2x+(b_2-\lambda_0)\cdot y=0\end{cases};$$
– найти ненулевые решения (x_0; y_0) этой системы.

Каждый вектор $\vec{p}(x_0;y_0)$ задает инвариантное направление данного преобразования.

§ 12. Прием распознавания группы преобразований

Чтобы доказать, что множество M некоторых преобразований плоскости является группой (подгруппой группы всех преобразований плоскости), достаточно:

– взять произвольные преобразования f и φ из M и доказать, что их композиция $\varphi\circ f$ также принадлежит множеству M;

– взять произвольное преобразование f из M и доказать, что преобразование f^{-1} также принадлежит множеству M.

Если хотя бы одно из этих требований не выполняется, то множество M не является группой.

Ответы и указания

4. Каждому элементу множества A поставлен в соответствие определенный (единственный) элемент множества B.

5. На рис. 2 не каждому элементу множества A поставлен в соответствие элемент множества B. На рис. 3 элементу 2 множества A поставлены в соответствие два элемента множества B.

6. а) не верно; б) верно; в) верно.

7. Образы точек A, B, C: $A'(3; -1)$, $B'(2; -4)$, $C'(0; 0)$.

Прообразы точек A, B, C: $A_1(1{,}5; -0{,}5)$, $B_1(1; -2)$, $C_1(0; 0)$.

8. а) $\{a;c\}$; $\{a;c\}$; $\{a;d\}$, $\{d\}$;

б) $\{2\}$, $\{1,2,3,4,5\}$, $\{1,2,3,4,5\}$;

в) $\{1;3\}$, $\varnothing$, $\{2\}$, $\{4;5\}$;

г) $\{a;c;d\}$.

9. а) $[0; 4]$; б) $[-1; 1]$; в) $[0; +\infty)$.

10. а) $[0; 1]$; б) $\{\pi n / n \in Z\}$; в) $[-1; 1]$.

14. б) См. ответы в п.п. 2.1., 2.2., 2.3.1. «Сводки».

15. Сюръекция, но не инъекция.

16. Инъекция, но не сюръекция.

17. Биекция.

19. Примените приемы 2.3.1., 2.1., 2.2.

20. См. прием 2.3.2.

22. См. приемы 2.3.1. и 2.3.2.

23. Возьмите произвольную точку $M(a; b)$ и докажите, что она имеет единственный прообраз.

24. Примените прием 2.3.2.

25. См. прием 2.4.

26. а) нет; б) да; в) да.

28. См. прием 3.1.

30. D; C.

31. а) A; б) C.

32. Примените прием 2.4.

33. Два переноса: $x'=x+3$, $y'=y-1$ и $x' = x - \frac{13}{5}$, $y' = y + \frac{9}{5}$. Обозначьте $\vec{p}(a;b)$ и переведите условия задачи на координатный язык.

35. См. прием 3.1.

37. а) C; б) A; в) C, A, B; г) B, C, A.

39. Примените прием 2.4.

40. Примените прием 6.1.

41. $x' = \frac{8}{17}x + \frac{15}{17}y + \frac{24}{17}$, $y' = -\frac{15}{17}x + \frac{8}{17}y + \frac{6}{17}$; $O'\left(\frac{24}{17};\frac{6}{17}\right)$. Обозначьте $S(x_0; y_0)$ и переведите условия задачи на координатный язык.

43. См. прием 3.1.

46. Примените прием 3.1.

47. Центральная симметрия Z_O есть поворот $R_O^{180°}$ (или $R_O^{-180°}$).

48. $x'= -x$, $y'= -y$. Примените прием 4.1.

49. $x'= -x+2x_0$, $y'= -y+2y_0$. Примените прием 4.1.

50. Примените прием 2.4.

51. Примените прием 6.1.

52. $M(-2; 1)$. Обозначьте $M(x; y)$ и переведите условия задачи на координатный язык.

53. $x'= -x+1$, $y'= -y+9$. Обозначьте $S(x_0; y_0)$, $A'(x; y)$ и переведите условия задачи на координатный язык.

55. См. прием 3.1.

58. Примените прием 3.1.; докажите, что $OK=OM$ и $\pi MOK=180°$.

59. $A(1; 0)$, $B\left(-\frac{3}{5};\frac{4}{5}\right)$. Обозначьте $A(x; 0)$, $B\ (x'; y')$ и переведите условия задачи на координатный язык.

60. Примените прием 2.4.

61. Ось искомой осевой симметрии проходит через середину отрезка MM' и перпендикулярна ему. Искомые формулы: $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{14}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + \frac{28}{5}$.

62. $x'=x$, $y'=-y$ ($x'=-x$, $y'=y$). Примените прием 4.1.

63. Примените прием 6.1.

65. См. прием 3.1.

67. а) D, A; б) C, B; в) A, D; г) B, C. Примените прием 3.1.

68. Гомотетия H_O^{-1} есть центральная симметрия Z_O; гомотетия H_O^1 есть тождественное преобразование (e).

69. Воспользуйтесь формулой $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ и определением гомотетии.

70. а) $x'=kx$, $y'=ky$; б) $x'=kx+x_0-kx_0$, $y'=ky+y_0-ky_0$. Примените прием 4.1.

71. Примените прием 2.4.

72. Примените прием 6.1.

73. $S(13; 8)$, $x'=2x-13$, $y'=2y-8$. Обозначьте $S(x_0; y_0)$ и переведите условие задачи на координатный язык, используя определение гомотетии.

74. $A(3; 1)$. Обозначьте $A(x; y)$, $A'(x'; y')$ и переведите условия задачи на координатный язык.

75. Примените прием 5.2.

76. Примените прием 5.1.

77. Воспользуйтесь результатом упр. 76.

78. Примените прием 5.1.

79. Указания по выбору системы координат:

а) ось Ox – данная прямая;

б) начало координат – центр окружности;

в) система координат выбирается произвольно;

г) начало координат – точка O;

д) ось Ox – прямая a;

е) начало координат – точка O.

80. Примените приемы 2.3.1., 2.1., 2.2.

81. Примените прием 4.2. $f \circ \varphi : x' = 3x + 2,\ y' = 2x + y + 2$; $\varphi \circ f : x' = x,\ y' = 4x + 3y + 2$; $f \circ f : x' = 5x + 3y + 1,\ y' = 3x + 2y + 2$.

82. Составьте формулы гомотетий, а затем примените прием 4.2. $x' = x+2,\ y' = y - \frac{4}{3}$ (перенос на вектор $\vec{p}\left(2;-\frac{4}{3}\right)$).

83. Первый способ – прием 2.6.; второй способ – прием 4.2.

84 – 85. Примените прием 2.6.

86. Примените прием 2.4.

87. Примените прием 6.1.

88. Воспользуйтесь формулами скользящей симметрии.

89. $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{12}{5}$, $y' = -\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{1}{5}$. Предварительно составьте формулы преобразований S_a и $T_{\vec{p}}$.

90. $x–y+1=0$. Воспользуйтесь результатом упр. 88.

91. Ось a: $x=0$. $\vec{p}(0;-2)$.

Формулы: $x' = -x$, $y' = y-2$. Воспользуйтесь результатом упр. 88, определением скользящей симметрии и приемом 4.2.

92. Введите на плоскости систему координат и составьте формулы указанных композиций.

93 – 94. Примените прием 6.2.

95. Воспользуйтесь результатом упр. 94 или примените прием 6.2.

96. Воспользуйтесь результатами упр. 83 – 84.

97. а) $T_{\overrightarrow{AB}}$ (см. упр. 83 – 84); б) скользящая симметрия $T_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{AC}$; в) $T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB}$ (см. пример 2 в § 4 и упр. 84); г) скользящая симметрия $T_{\vec{p}} \circ S_{AB}$, где $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB}$; д) Z_B, где точка B определяется равенством $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\vec{p}$ (см. упр. 85); е) Z_D, где точка D определяется равенством $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$ (см. упр. 84 – 85).

98. Воспользуйтесь результатами упр. 92, 95, 93, 83.

99. Примените прием 6.2.

100. Примените прием 2.7. или прием 2.5.2.

101. Примените прием 6.2.

102. $(S_a)^{-1} = S_a$; $(Z_O)^{-1} = Z_O$.

103. а) Умножьте обе части исходного равенства на $f_3^{-1} \circ f_2^{-1}$ справа.

б) Умножьте обе части исходного равенства на f_3^{-1} справа, а затем – на f_1^{-1} слева.

в) Умножьте обе части исходного равенства на $f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$ слева.

г) Воспользуйтесь результатом примера 1 в § 5.

104. Умножьте обе части исходного равенства на f^{-1} слева (на φ^{-1} справа). Прием, основанный на этом результате, см. в п. 2.8 «Сводки».

105 – 106. Примените прием 2.8.

107. Воспользуйтесь результатом примера 1 (§ 5).

108. Воспользуйтесь результатом примера 1 (§ 5) и упр. 92.

109. $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{2}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - \frac{11}{5}$ (прием 4.3).

110. Примените прием 4.3.

111. а) $M(1;\ 1)$; б) прямая инвариантных точек: $x+y-1=0$; в) инвариантных точек нет; г) инвариантных точек нет.

112. См. табл. 1.

113. Примените приемы 2.4. и 2.9.1.

115 – 117. Примените прием 2.9.1. В упр. 115 см. также п. 2.3.2.

118. Используйте формулы гомотетии или ее основное свойство (упр. 69).

119 – 120. Используйте свойства движений.

122 – 126. Используйте свойства движений и прием 5.4.

127. Примените метод доказательства от противного или используйте свойства движений.

128. Воспользуйтесь результатом упр. 127.

129 – 130. Пусть O – середина отрезка AB, где $A = a \cap c$, $B = b \cap c$. Искомыми являются перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$ и центральная симметрия Z_O.

131. Пусть A и B – основания перпендикуляров, опущенных из точки O на прямые a и b. Искомым является поворот R_O^α, где $\alpha = \angle AOB$.

132. Пусть $AA_1 || a$, $A_1 \in b$ и O – середина отрезка AA_1. Искомой является осевая симметрия, ось которой проходит через точку O и перпендикулярна AA_1.

133. Пусть $O_1A \surd a$, $O_2A || a$, O – середина отрезка O_1O_2. Искомая скользящая симметрия определяется вектором $\overrightarrow{AO_2}$ и осью, которая проходит через точку O и параллельна прямой a.

134 – 135. Примените приемы 3.2. и 5.4.

136. Используйте свойства движений и прием 3.4. или 3.3.

137. Примените приемы 3.2. и 3.4. В п. б) используйте результат упр. 120.

138. Примените прием 3.4. и используйте результат упр. 112 (табл. 1).

139. Примените прием 3.4. и используйте результат упр. 76.

140. Примените приемы 3.2. и 3.4.

143-144. Воспользуйтесь следствием 2 теоремы о подвижности плоскости.

145-147. Примените прием 6.4.

148. Воспользуйтесь приемом 4.5.

149. В случаях а) и б) искомое движение не существует, т.к. репер R' не является ортонормированным. Формулы искомого движения в случае в): $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y$, $y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 1$.

150. В случае (*а*) воспользуйтесь результатом примера 2 в § 9 и приемом 4.4.

а) $x' = y+2$, $y' = -x+1$; б) не существует, т.к., например, $AB \neq A'B'$.

151. Воспользуйтесь следствием 3 в § 11.

152-153. Примените определения движений первого и второго рода.

154. Примените прием 2.9.2 и следствие 3 §11.

155. $\bar{x}' = \bar{x} + \sqrt{2}$, $\bar{y}' = -\bar{y}$. Воспользуйтесь теоремой 4.

156. f_1 – поворот; f_2 – скользящая симметрия; f_3 – осевая симметрия; f_4 – поворот (центральная симметрия); f_5 – перенос. Примените прием 2.10.

157. См. прием 7.1.

158. Если $\omega_1(O_1; R)$, $\omega_2(O_2; R)$ – данные окружности, то искомым движением является, например, перенос на вектор $\overrightarrow{O_1O_2}$.

159. Пусть AB и A_1B_1 – отрезки одинаковой длины. Рассмотрите флаги (A, h, σ) и (A_1, h_1, σ_1), где h – луч AB, h_1 – луч A_1B_1, и воспользуйтесь приемом 7.1., следствием 3 теоремы 1 и следствием свойства 7° из § 7.

160. Пусть AOB и $A_1O_1B_1$ – углы одинаковой градусной или радианной меры. Рассмотрите флаги (O, h, σ) и (O_1, h_1, σ_1), где h и h_1 – лучи OA и O_1A_1, σ и σ_1 – полуплоскости, определяемые прямыми AO, A_1O_1 и точками B, B_1 соответственно. Далее воспользуйтесь приемом 7.1., следствием 3 теоремы 1 и следствием свойства 7° из § 7.

161. Воспользуйтесь свойствами движений.

162. Примените прием 7.1. Воспользуйтесь результатами упр. 116 – 117.

163 – 167. Примените прием 7.2.

168. Пусть f – движение, переводящее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что f – осевая симметрия. Воспользуйтесь далее результатом примера 4 в § 8.

169. Пусть f – движение, переводящее треугольник ABC в треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что f – поворот.

170. $c-\sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\varphi}$. Подвергните сторону AB переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$.

171. $a\sqrt{3}$. Подвергните сторону AB переносу на вектор $\overrightarrow{BC}$.

172. Рассмотрите поворот вокруг точки A на угол 90°.

173. Пусть MA – наибольший отрезок. Рассмотрите поворот вокруг точки A, переводящий точку B в точку C.

174. Рассмотрите поворот вокруг точки C, переводящий точку A в точку B.

175. Рассмотрите центральную симметрию Z_O, где O – середина той стороны, к которой проведена медиана.

176. Предварительно докажите лемму: если точка X лежит внутри треугольника ABC, то $AC+BC>AX+BX$. Далее рассмотрите центральную симметрию Z_O, где O – середина отрезка BC.

177. Рассмотрите осевую симметрию S_a, где a – прямая, содержащая основание треугольника.

178. Докажите, что точки C_1 и D_1, симметричные точкам C и D относительно прямой AB, принадлежат окружности. Установите, что $\angle C_1OD$, где O – центр окружности, равен 90°.

179. Пусть AB – общее основание данных треугольников. Не нарушая общности, можно считать, что третьи вершины треугольников лежат по одну сторону от прямой AB на некоторой прямой a. Сравните периметры равнобедренного треугольника ABC и произвольного треугольника ABX с вершинами С и Х на прямой a, используя точку $A_1=S_a(A)$.

180. См. приемы 8.2.4. – 8.2.11.

181. Примените прием 8.2.10.

182 –183. Примените прием 8.2.1.

184 – 185. Примените приемы 8.2.1., 8.2.2.

186. Примените прием 8.2.7.

187. Примените прием 8.2.9.1.

188. Пусть данный шестиугольник *ABCDEF* описан около окружности с центром *O*. Докажите, что при центральной симметрии Z_O $A \to D$, $B \to E$, $C \to F$.

189. Примените приемы 8.2.1. и 8.2.11.

190. Примените прием 8.2.9.2.

191. Примените приемы 8.2.9.1., 8.2.7 и 8.2.10.

192. Примените приемы 8.2.7. и 8.2.11.

193. Примените приемы 8.2.1., 8.2.2. и 8.2.8.

194. Примените прием 8.2.9.2.

195. Примените прием 8.2.2.

196. Примените приемы 8.2.6. и 8.2.11.

197. Примените прием 8.2.6.

198. Примените приемы 8.2.11 и 8.2.1.

199. Примените приемы 8.2.1. и 8.2.2.

200. Докажите, что $AO\surd BC$; примените прием 8.2.2.

201. Докажите, что отрезки *AB* и *MP* перпендикулярны биссектрисе данного угла, используя прием 8.2.11.

202-204. Примените прием 8.2.5.

205-206. Примените прием 8.2.3.

207. Примените прием 8.2.4.

208. Примените прием 8.2.16.

209-218. Пусть *ABCD* – искомая трапеция (*BC* – меньшее ее основание). Рассмотрите образ стороны *AB* или диагонали *BD* при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

В задачах № **211, 216** используйте геометрическое место точек, из которых данный отрезок виден под данным (известным) углом – пара дуг, «вмещающих» данный угол.

219 – 221. Пусть $ABCD$ – искомый четырехугольник. Рассмотрите образ стороны AB при переносе на вектор $\overrightarrow{BC}$.

222. Перенесите сторону AB на вектор $\overrightarrow{BC}$, а затем – диагональ AC на вектор $\overrightarrow{AB}$.

Используйте геометрическое место точек (г.м.т.), из которых данный отрезок виден под данным (известным) углом.

223. Рассмотрите образы точки D и сторон AD и CD при осевой симметрии с осью AC.

224. Рассмотрите перенос на вектор $\overrightarrow{AB}$.

225. Рассмотрите центральную симметрию Z_O.

226. Рассмотрите поворот вокруг точки C на угол 90° (или –90°).

227. Рассмотрите осевую симметрию с осью a.

228. Рассмотрите центральную симметрию Z_O.

229. Рассмотрите поворот вокруг точки M на угол 60° (или –60°).

230. Рассмотрите центральную симметрию Z_A.

231. Рассмотрите центральную симметрию Z_O.

232. Рассмотрите поворот вокруг точки O на угол 120° (или –120°).

233. Рассмотрите центральную симметрию Z_O.

234 – 235. Рассмотрите осевую симметрию S_a.

236. Рассмотрите осевые симметрии S_a и S_b.

237. Постройте вспомогательный треугольник с вершинами на прямых a, b, c, используя прием 9.2., а затем примените перенос.

238. Постройте вспомогательный треугольник с двумя вершинами на прямых a и b и со стороной, равной p, а затем примените перенос.

239. См. указание к упр. 237.

240. Постройте вспомогательный треугольник с вершиной в центре окружности и центроидом на окружности, а затем примените поворот.

241. Постройте вспомогательный треугольник, вписанный в окружность, а затем примените поворот.

242. Постройте вспомогательный треугольник с двумя вершинами на данных окружностях и со стороной, равной p, а затем примените поворот.

243. Рассмотрите точку B_1, симметричную точке B относительно прямой a.

244 – 245. Рассмотрите образ точки A при переносе на вектор $\overrightarrow{XY}$, а затем сведите данную задачу к задаче 243.

246. Рассмотрите точки $M_1=S_{BC}(M)$, $M_2=S_{CD}(M_1)$, $M_3=S_{AD}(M_2)$.

247. Рассмотрите точки $O_1=S_{AB}(O)$, $O_2=S_{BC}(O_1)$, $O_3=S_{AC}(O_2)$.

248. См. указание к задаче 243.

249. П. п. е) и ж): выделите полные квадраты.

П. з): преобразуйте уравнение к виду $(y-y_0)^2=k\cdot(x-x_0)$.

П. к): выделите целую часть дроби.

250. Преобразуйте уравнение к виду $y=a(x-x_0)^2+y_0$.

251. Представьте дробь в виде $m+\dfrac{k}{x-n}$.

252 – 253. Найдите образ данной линии при осевой симметрии с осью Oy (с осью Ox), используя прием 5.3.

254. Найдите образ данной линии при центральной симметрии с центром в начале координат, используя прием 5.3.

255. Найдите образ данного графика при осевой симметрии с осью Oy.

256. Найдите образ данного графика при центральной симметрии с центром в начале координат.

257 – 258. Найдите образ данного графика при осевой симметрии с осью $x=x_0$ ($y=y_0$). Формулы указанных осевых симметрий см. в § 2.

259 – 260. Воспользуйтесь результатами упр. **257 – 258.** Искомые оси симметрии: $x = 3$ и $y = 1$.

261 – 264. Воспользуйтесь результатами упр. 83, 84, 85.

265. Воспользуйтесь результатами упр. 84, 83 и примера 3 в § 18.

266. Если $ABCD$ – прямоугольник, то искомая композиция f есть перенос, в противном случае f – поворот. Воспользуйтесь результатами примеров 1 и 6 в § 18.

267 – 268. Воспользуйтесь результатами примеров 1 и 6 в § 18.

269. Воспользуйтесь результатами примеров 1, 3, 5 в § 18; примените прием 2.10 или 2.11.

270 – 271. Примените прием 2.11.

272. Если $O \in a$, то искомая композиция f есть осевая симметрия; в противном случае f – скользящая симметрия.
Примените прием 2.11. и воспользуйтесь результатом примера 5 в § 18.

273. Воспользуйтесь результатами примера 1 в § 18 и упр. 272.

274. Воспользуйтесь результатами упр. 92 и примера 3 из § 18.

275. Воспользуйтесь результатами упр. 92, примера 1 в § 18 и упр. 85.

276. Воспользуйтесь результатами упр. 92, примеров 1, 7 в § 18.

277. Задача сводится к доказательству соотношения

$$Z_C \circ Z_B \circ Z_A = Z_{O_1}.$$

278. Допустите, что данная фигура имеет два центра симметрии – A и B. Воспользуйтесь соотношением $Z_B \circ Z_A = T_{\vec{p}}$, где $\vec{p} = 2\overrightarrow{AB}$.

279. Первым ходом следует положить монету в центр симметрии листа, а затем отвечать своему противнику «симметричным образом».

280. Заметьте, что при указанных поворотах середина отрезка AB переходит в середину отрезка A_1B_1.

281. Пусть касательная к окружности ω_2 в точке B пересекает окружность ω_1 в точке C. Точки A, B, C разбивают окружность ω_1 на три дуги: AB, BC, CA. Рассмотрите три случая: точка M_1 принадлежит дуге BC; дуге CA; дуге AB.

282. Искомое множество точек есть объединение окружностей ω_1 и ω_2, где $\omega_1 = R_A^{60^\circ}(\omega)$, $\omega_2 = R_A^{-60^\circ}(\omega)$.

283. Постройте образ точки M при переносе на вектор $\overrightarrow{AB}$.

284. Постройте окружность ω с диаметром KN и рассмотрите осевую симметрию, осью которой служит прямая, параллельная прямым a и b и проходящая через центр этой окружности. Докажите, что $P \in \omega$.

285. Пусть M – вершина данного четырехугольника, принадлежащая стороне AB прямоугольника $ABCD$. Постройте: точку M_1, симметричную точке M относительно прямой BC; точку M_2, симметричную точке M_1 относительно прямой CD; точку M_3, симметричную точке M_2 относительно прямой AD.

286. Умножьте обе части данного равенства на $S_b \circ S_a \circ S_b$ справа и воспользуйтесь результатом примера 1 из § 18.

287. Пусть точка A_1 симметрична ортоцентру H относительно прямой BC. Докажите, что $\angle BA_1C = 180^\circ - \angle BAC$.

288. Заметьте, что окружность, описанная около треугольника ABC, является окружностью, описанной около треугольника A_1BC (см. упр. 287).

289. 1. Отсюда следует, что $\overrightarrow{OB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$ и поэтому $OA:AB=3:2$.

2. Отсюда следует, что $\overrightarrow{OB} = -\frac{5}{3}\overrightarrow{OA}$ и поэтому $AO:OB=3:5$.

290. Заметьте, что в обоих случаях $OM' : OM = m : n$.

291. а) $k = \frac{5}{3}$; б) $k = -\frac{5}{3}$.

292. а) $k = -\frac{a}{b}$; б) $k = \frac{a+b}{a}$; с) $k = \frac{b}{a+b}$.

293. Искомая точка O удовлетворяет условию: а) $\overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

294. Достаточно установить, что $\overrightarrow{MA_2} = k \cdot \overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB_2} = k \cdot \overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC_2} = k \cdot \overrightarrow{MC}$. $k = \frac{m^2 - mn + n^2}{(m+n)^2}$.

295. $k = -\frac{1}{3}$.

296. $A(-7;\ 13) \to B(25;\ -31)$. Обозначьте: $A(x;\ y)$, $B(x';\ y')$, а затем переведите условия задачи на координатный язык.

297. $B(4;\ 3)$, $k = -2$. Обозначьте: $B(x;\ y)$, а затем переведите условия задачи на координатный язык.

298. $k=3$, $S(-2\ ;\ 1)$.

299. Коэффициент равен k; центр – $S\left(\frac{a}{1-k}; \frac{b}{1-k}\right)$. Для доказательства достаточно составить формулы гомотетии H_S^k и сравнить их с данными формулами (прием 6.1.).

300. $S(-4;\ -5)$; $x'=2x+4$, $y'=2y+5$. Обозначьте $S(x_0;\ y_0)$. Заметьте, что всякая точка первой прямой, например точка $A(-2;\ 0)$, переходит в точку, принадлежащую второй прямой.

301. Примените прием п. 5.3.

302. $x' = -2x-3$, $y' = -2y$; $(x+5)^2+(y+4)^2=40$. Обозначьте: $S(x_0;\ y_0)$ – центр гомотетии. Заметьте, что при гомотетии H_S^{-2} центр данной окружности переходит в точку C_1.

303. $\begin{cases} x' = 2x+5 \\ y' = 2y+7 \end{cases}$ или $\begin{cases} x' = -2x+9 \\ y' = -2y+3 \end{cases}$.

304 – 305. Примените прием 2.6.

306. $\overline{p} = (1-k_2) \cdot \overrightarrow{AB}$.

311. Образ прямой AB – прямая c, проходящая через точку A_1 и параллельная AB.

Образ прямой OB – прямая OB.

Образ точки B – точка пересечения прямых c и OB.

312. Если $M \notin OA$, то см. построение в упр. 311. Если $M \in OA$, то вначале строится образ вспомогательной точки B, не принадлежащей прямой OA. Если точки A и A_1 лежат по одну сторону от точки O, то $k = \frac{OA_1}{OA}$, в противном случае $k = -\frac{OA_1}{OA}$.

315. Отметьте на окружности ω точку A и постройте ее образ (см. упр. 312). Искомая окружность имеет своим центром точку C_1 и проходит через точку A_1.

316. Вначале надо установить, что коэффициент искомой гомотетии равен либо 2, либо –2.

Если k=2, то $\begin{cases} x' = 2x + 3 \\ y' = 2y \end{cases}$. Если k= –2, то $\begin{cases} x' = -2x - 9 \\ y' = -2y \end{cases}$.

317. Примените основное свойство гомотетии;

а) не существует; б) не существует;

в) $\begin{cases} x' = -3x + 1 \\ y' = -3y + 2 \end{cases}$, $k = -3$, $S\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

318. Искомая точка O определяется равенством:

а) $\overrightarrow{AO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AO} = 3\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{AO} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

319. Примените прием 7.1. Искомая гомотетия – $H_M^{-\frac{1}{2}}$, где M – центроид треугольника ABC.

320. Примените прием 7.1. Искомая гомотетия – H_M^2.

321. При первой гомотетии $A \to C$, $B \to D$; при второй – $A \to D$, $B \to C$. Коэффициенты гомотетий: $k = \pm \frac{CD}{AB}$.

Центры: $S=AC \cap BD$; $O=AD \cap BC$.

322. Используя упр. 321, найдите гомотетию, при которой $A \to A_1$, $B \to B_1$. Чтобы доказать, что $C \to C_1$, воспользуйтесь приемом 3.4.

323. Если при гомотетии H_O^k $\omega_1 \to \omega_2$, то либо $k = \frac{R_2}{R_1}$, либо $k = -\frac{R_2}{R_1}$. В каждом из этих случаев найдите центр гомотетии O, используя пример из § 20.

324. В случае (а) воспользуйтесь результатом упр. 323.

325. Докажите, что если O – точка пересечения общих внешних (внутренних) касательных, то $\overrightarrow{OO_2} = \frac{R_2}{R_1} \cdot \overrightarrow{OO_1}$ ($\overrightarrow{OO_2} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \overrightarrow{OO_1}$).

326. Применить метод доказательства от противного.

327. Треугольник ABC переходит в треугольник MPK при преобразовании $H_O^{-\frac{1}{2}} \circ T_{\vec{p}}$, где O – центроид треугольника $A_1B_1C_1$. Далее воспользуйтесь результатом упр. 304.

328. Треугольник $A_1B_1C_1$ переходит в треугольник $A_2B_2C_2$ при преобразовании $H_O^{\frac{1}{2}} \circ H_M^{-2}$, где M – центроид треугольника ABC. Далее воспользуйтесь результатом упр. 305.

329. См. прием 2.12.1.

330. Воспользуйтесь основным свойством гомотетии (упр. 69) и приемом 2.12.1.

332. Воспользуйтесь приемом 2.12.1. $k = \sqrt{13}$.

333, 335 – 336. Воспользуйтесь приемом 2.12.1.

337. Воспользуйтесь приемом 2.9.1.

339. Вначале докажите, что преобразование $H_O^{\frac{1}{k}} \circ f$, где f – данное подобие, является движением.

345. Воспользуйтесь результатом примера из § 21.

346. Искомое подобие есть композиция $\varphi \circ H_S^k$, где φ – движение, $k = \frac{A_1B_1}{AB}$, а центр S выбирается произвольно.

349. Если точка M принадлежит, например, прямой AB и $M \to M_1$, то $(A_1B_1, M_1)=(AB, M)$.

Если точка M не принадлежит прямым AB, BC, CA и, например, $AM \cap BC=N$, то вначале следует построить образ точки N (см. предыдущий случай), а затем – образ точки M.

350 – 352. Примените результат примера из § 21: если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ удовлетворяют указанным в этом примере условиям, то существует <u>единственное</u> подобие, при котором $A \to A_1$, $B \to B_1$, $C \to C_1$.

354. $R_O^{45^\circ} \circ H_O^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$, где O – центр квадрата.

355. $\begin{cases} x' = k \cdot (x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha) \\ y' = k \cdot (x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha) \end{cases}$.

356. Составьте формулы преобразования $H_O^k \circ R_O^\alpha$ и сравните их с формулами из упр. 355.

357. Примените прием 6.1.

359. Искомый угол равен $|\alpha|$, если $|\alpha| \le \frac{\pi}{2}$, и $180^\circ - |\alpha|$, если $|\alpha| > \frac{\pi}{2}$.

360. $M(2;\ 2)$. Воспользуйтесь формулами из упр. 355.

361. $k = -3$. Примените формулы из упр. 355.

362. Пусть для определенности $0 < \alpha < 2\pi$, $\alpha \neq \pi$, $0 < \beta < 2\pi$, $\beta \neq \pi$. Если $\alpha+\beta=2\pi$, то искомая композиция есть гомотетия $H_O^{k_2 \cdot k_1}$. Если $\alpha+\beta=\pi$ или $\alpha+\beta=3\pi$, то искомая композиция есть гомотетия $H_O^{-k_2 \cdot k_1}$. Во всех остальных случаях искомая композиция есть центрально-подобное вращение $R_O^{\alpha+\beta} \circ H_O^{k_1 \cdot k_2}$.

363. а) H_O^k; б) H_O^{-k}.

365. Одним из искомых преобразований является центрально-подобная симметрия $H_O^{-\frac{1}{2}} \circ S_a$, где a – прямая, проходящая через вершину A и перпендикулярная стороне BC, O – центр треугольника ABC.

366. $x'=kx$, $y'=-ky$.

367 – 368. Примените прием 6.1.

371. Пусть $Ax+By+C=0$ – уравнение искомой инвариантной прямой. Воспользуйтесь приемом 5.3. и рассмотрите случаи: а) $A \neq 0$, $B \neq 0$; б) $A=0$, $B \neq 0$; в) $A \neq 0$, $B=0$.

372. $A_1(1;2) \to B_1(3;-6)$; $A_2(-1;0) \to B_2(-3;0)$.

373. $x'=-2y+1$, $y'=-2x+2$.

374. $B(2; 2)$, $k=2$.

375. а) Если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, то искомая композиция есть гомотетия $H_C^{k_1 \cdot k_2}$, где $\overrightarrow{AC} = \dfrac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot \overrightarrow{AB}$. См. упр. **367, 305**.

Если $k_1 \cdot k_2 = 1$, то искомая композиция есть перенос на вектор $\vec{q} = (1 - k_2) \cdot \overrightarrow{AB}$. См. упр. **306.**

б) Если $k_1 \cdot k_2 = 1$, то искомая композиция есть перенос на вектор $\vec{q} = (1 - k_2) \cdot \overrightarrow{CB}$, а точка C определяется условием $\overrightarrow{AC} = \dfrac{2}{1 - k_1} \cdot \overrightarrow{MN}$, где MN – общий перпендикуляр к прямым a и b ($M \in a$, $N \in b$). См. упр. **304.**

Если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, то искомая композиция есть гомотетия $H_D^{k_1 \cdot k_2}$, где точка D определяется условием $\overrightarrow{CD} = \dfrac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot \overrightarrow{CB}$, а точка C – тем же условием, что и в предыдущем случае.

376. а) S_p; б) S_m, где m – прямая, проходящая через точку O и перпендикулярная прямой p.

377. $x'=3x+4y-1$, $y'=4x-3y+2$; $k=5$; $f = \varphi \circ H_O^k$, где движение φ задается формулами $x' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y - 1$, $y' = \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y + 2$ и является осевой симметрией.

378. $x'=3x+4y+1$, $y'= -4x+3y-1$; $k=5$; $f = \varphi \circ H_O^k$, где движение φ задается формулами $x' = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y + 1$, $y' = -\dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y - 1$ и является поворотом.

379. Сравните расстояния $A'B'$ и AB, а затем $A'C'$ и AC.

381. Докажите, что точка $M'(x; y)$ принадлежит фигуре Φ' тогда и только тогда, когда ее координаты x, y удовлетворяют уравнению $F(x; y)=0$.

382. Примените прием 5.5.

383. а) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{15}{12} \\ -\dfrac{9}{2} \end{pmatrix}$. Воспользуйтесь теоремой 4;

в) $\bar{x}' = 8\bar{x} - 6\bar{y} + \dfrac{15}{12}$, $\bar{y}' = -6\bar{x} - 8\bar{y} - \dfrac{9}{2}$.

384 – 385. Воспользуйтесь формулами указанных преобразований и следствием в § 24.

386 – 388. Воспользуйтесь определением подобия первого (второго) рода.

390. Искомый алгоритм таков.

1. Определить род преобразования f. Если f – подобие второго рода, то f – центрально-подобная симметрия.

2. Если f – подобие первого рода, то необходимо найти инвариантную точку S (она существует и единственна).

3. Далее, необходимо выбрать пробную точку M, отличную от точки S, и найти ее образ M'.

4. Выяснить, коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$. Если векторы $\overrightarrow{SM}$ и $\overrightarrow{SM'}$ коллинеарны, то f – гомотетия; в противном случае f – центрально-подобное вращение.

391. f_1 – центрально-подобная симметрия; f_2 – центрально-подобное вращение; f_3 – гомотетия; f_4 – центрально-подобная симметрия. Примените алгоритм из упр. 390.

392. $x' = x-3y+1$, $y' = -3x-y+4$ (центрально-подобная симметрия);

$x' = 3x-y-1$, $y'=x+3y$ (центрально-подобное вращение).

Используйте формулы (*) и условия (1), (2), (3) из § 23. Предварительно определите коэффициент искомого подобия.

393. При искомом преобразовании подобия либо $A \to A'$, $B \to B'$, либо $A \to B'$, $B \to A'$.

394 – 396. Докажите, что искомая композиция есть подобие второго рода, отличное от движения.

398. а) Гомотетия H_O^k.

б) Гомотетия H_A^k, где точка A определяется соотношением $\overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{1-k} \cdot \vec{p}$, $\vec{p} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$, а отрезок MN – общий перпендикуляр к прямым a и b, $M \in a$, $N \in b$.

в) Пусть $\left(\widehat{a,b}\right)=\alpha$, где 0<$\alpha$<$\pi$. Если $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, то искомая композиция есть гомотетия H_O^{-k}; если $\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}$, то искомая композиция есть центрально-подобное вращение $R_O^{2\alpha}\circ H_O^k$.

399. а) Гомотетия H_A^k, где точка A определяется условием $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{1+k}\cdot\vec{p}$.

б) Гомотетия H_A^k, где точка A определяется условием $\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{1-k}\cdot(\vec{p}+\vec{q})$, $\vec{q}=2\overrightarrow{MN}$, а MN – общий перпендикуляр к прямым a и b.

в) Пусть $a\cap b=A$, $\overrightarrow{OB}=\dfrac{2}{k+1}\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{1-k}\cdot\vec{p}$. Искомая композиция есть H_C^{-k}.

400. Воспользуйтесь классификационной схемой для преобразований подобия.

401 – 402. Используйте свойства преобразований подобия.

403. Примените прием 7.1. Используйте результаты упр. 335 – 336.

404. Если $\Phi=\Phi'$, то $\Phi\sim\Phi'$. Обратное, вообще говоря, не верно.

405. См. прием 7.3.

406. а) Используйте результат упр. **324.**

б) Докажите, что указанные треугольники гомотетичны (см. прием 7.3.).

407. Используйте результат примера из § 21.

408. См. прием 7.3.

409 – 411. Воспользуйтесь приемом 7.3.

413. Предварительно установите, что если эксцентриситеты эллипсов $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и $\dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}=1$ равны, то $A=\lambda a$, $B=\lambda b$. Далее рассмотрите гомотетию $x'=\lambda x$, $y'=\lambda y$.

418 – 419. Рассмотрите гомотетию H_S^k, при которой $B \to A$, и воспользуйтесь приемом 8.2.12.

420. Рассмотрите гомотетию H_O^k, при которой $A \to C$, и воспользуйтесь приемом 8.2.12.

421. Рассмотрите гомотетию $H_O^{-\frac{3}{2}}$ и воспользуйтесь приемом 8.2.12.

422 – 423. Рассмотрите гомотетию $H_M^{-\frac{1}{2}}$ и воспользуйтесь приемом 8.2.12.

424. Рассмотрите гомотетию H_O^k, при которой $A \to C$, и воспользуйтесь приемом 8.2.13.1.

425. Рассмотрите гомотетию $H_O^{-\frac{1}{2}}$, где O – центроид треугольника ABC, и воспользуйтесь приемом 8.2.13.1.

426. Рассмотрите гомотетию H_O^k, где $k = \frac{R_2}{R_1}$, а R_1, R_2 – радиусы данных окружностей. Воспользуйтесь приемом 8.2.13.1.

427. Рассмотрите гомотетию H_O^k, при которой $A \to A_1$, $B \to B_1$ (см. упр. 321, 322), и воспользуйтесь приемом 8.2.13.1.

428. Рассмотрите гомотетию H_S^k, где $k = -\frac{R_1}{R}$, и воспользуйтесь приемом 8.2.14.

429. Рассмотрите композицию переноса $T_{\vec{p}}$ и гомотетии $H_{C_1}^k$ при которой $A_1 \to M$. Воспользуйтесь упр. **304** и приемом 8.2.14.

430. Рассмотрите композицию $H_M^2 \circ H_O^{-\frac{1}{2}}$, где O – центроид треугольника ABC (см. упр. 305). Воспользуйтесь приемом 8.2.14.

431. Пусть для определенности $M \in AD$, $N \in CD$, $P \in BC$, $Q \in AB$. Рассмотрите композицию гомотетии $H_B^{k_1}$, при которой $QP \to AC$, и гомотетии $H_D^{k_2}$, при которой $AC \to MN$ (см. упр. 305). Воспользуйтесь приемом 8.2.14.

432. Рассмотрите гомотетию H_O^{-2} и воспользуйтесь приемом 8.2.16.

433. Рассмотрите гомотетию H_O^k, при которой одна окружность переходит в другую. Воспользуйтесь приемом 8.2.16.

434. Найдите образы середин сторон четырехугольника $ABCD$ при гомотетии $H_O^{\frac{2}{3}}$. Воспользуйтесь приемом 8.2.15.

435. Найдите образы середин сторон четырехугольника $ABCD$ при гомотетии H_M^2. Воспользуйтесь приемом 8.2.15.

436. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ – правильный, и найдите его образ при гомотетии H_M^2.

437. Искомое г.м.т. – образ окружности ω (без точки A), при гомотетии $H_A^{\frac{1}{3}}$.

438. Пусть прямая c пересекает прямую AB в точке D и O – середина отрезка AB. Искомое г.м.т. – образ прямой c (без точки D) при гомотетии H_O^3.

439. Рассмотрите такое центрально-подобное вращение $R_D^{90^\circ} \circ H_D^k$, при котором треугольник ACD переходит в треугольник CBD (или наоборот). Примените прием 8.2.2.

440. Рассмотрите такое центрально-подобное вращение $R_A^{90^\circ} \circ H_A^k$, при котором квадрат $ABCD$ отображается на квадрат $AB_1C_1D_1$. Воспользуйтесь приемом 8.2.2.

441. Пусть точка *K* – середина отрезка *BP*. Используя центрально-подобное вращение $R_P^{90^\circ} \circ H_P^k$, переводящее треугольник *MPB* в треугольник *CPM*, докажите, что *MK*√*CN* (прием 8.2.2).

442. Рассмотрите гомотетию $H_O^{\frac{3}{2}}$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

443. Рассмотрите образ данной окружности ω при гомотетии $H_A^{\frac{1}{2}}$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

444. Рассмотрите образ внутренней окружности при гомотетии H_A^2 и воспользуйтесь приемом 9.2. В случае б) можно применить также Z_A.

445. Рассмотрите центрально-подобное вращение $H_A^3 \circ R_A^{60^\circ}$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

446. Рассмотрите центрально-подобное вращение $H_M^2 \circ R_M^{90^\circ}$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

447. Рассмотрите центрально-подобное вращение $R_A^{60^\circ} \circ H_A^{\frac{1}{2}}$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

448. Рассмотрите центрально-подобную симметрию $H_A^{\frac{1}{2}} \circ S_C$ и воспользуйтесь приемом 9.2.

449. Рассмотрите гомотетию $H_A^{\frac{4}{3}}$ и воспользуйтесь приемом 9.3.

450. Рассмотрите гомотетию $H_A^{\frac{2}{3}}$ и воспользуйтесь приемом 9.3.

451. Рассмотрите центрально-подобное вращение $R_O^{120^\circ} \circ H_O^{-2}$ и воспользуйтесь приемом 9.3.

452. Рассмотрите центрально-подобное вращение $R_O^{90^\circ} \circ H_O^3$ и воспользуйтесь приемом 9.3.

453 – 459. Воспользуйтесь приемом 9.4-а.

460. Вначале постройте квадрат $M_1N_1P_1K_1$ так, чтобы точки M_1, K_1 принадлежали лучу AB, а точка N_1 – стороне AC.

461. Вначале постройте прямоугольник $M_1N_1P_1K_1$, подобный данному (и искомому), так, чтобы вершины M_1, K_1, N_1 принадлежали двум сторонам треугольника.

462. Вначале постройте окружность, которая касается сторон данного угла.

463. Вначале постройте вспомогательный треугольник $M_1N_1P_1$ так, чтобы вершины M_1 и P_1 принадлежали сторонам AB и AC, а стороны M_1N_1, N_1P_1, P_1M_1 были параллельны прямым a, b, c.

464. Вначале постройте окружность ω_1, касающуюся сторон AB и AC данного треугольника ABC, и равную ей окружность ω_2, касающуюся стороны AC и окружности ω_1.

465. Пусть OA, OB – радиусы данного сектора.

а) Вначале постройте вспомогательный квадрат $M_1N_1P_1K_1$ так, чтобы вершины M_1 и N_1 принадлежали радиусу OA, а вершина K_1 – радиусу OB.

б) Вначале постройте вспомогательный квадрат $M_1N_1P_1K_1$ так, чтобы вершины M_1 и N_1 принадлежали радиусам OA и OB соответственно и сторона P_1K_1 была параллельна хорде AB.

466. Вначале постройте вспомогательный квадрат $A_1B_1C_1D_1$, как в примере 5 из § 28.

467. Вначале постройте правильный треугольник $M_1P_1K_1$ так, чтобы вершины M_1 и K_1 принадлежали сторонам AB и AC, а сторона M_1K_1 была параллельна прямой a.

468. Вначале постройте вспомогательную трапецию $BM_1N_1P_1$, в которой $BM_1=M_1N_1=N_1P_1$, $N_1P_1 \| AC$, а точка M_1 принадлежит стороне AB.

469. Вначале постройте какую-нибудь точку M_1 (не обязательно на прямой BC!), которая удовлетворяла бы условию, указанному в задаче.

470. Пусть f – искомая композиция. Если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ и $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \neq 1$, то f – гомотетия $H_E^{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3}$, где точка E определяется условием $\overrightarrow{DE} = \frac{k_3 - 1}{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 - 1} \cdot \overrightarrow{DC}$, а точка D – условием $\overrightarrow{AD} = \frac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Если $k_1 \cdot k_2 \neq 1$ и $k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 = 1$, то f – перенос на вектор $(1 - k_3) \cdot \overrightarrow{DC}$, где точка D определяется условием $\overrightarrow{AD} = \frac{k_2 - 1}{k_1 \cdot k_2 - 1} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Если $k_1 \cdot k_2 = 1$, а $k_3 \neq 1$, то f – гомотетия $H_D^{k_3}$, где точка D определяется условием $\overrightarrow{CD} = \frac{k_3 \cdot (1 - k_2)}{1 - k_3} \cdot \overrightarrow{AB}$.

Если $k_1 \cdot k_2 = 1$ и $k_3 = 1$, то f – перенос на вектор $(1 - k_2) \cdot \overrightarrow{AB}$.

471. Имеем: $k_1 = \frac{R_2}{R_1}$, $k_2 = \frac{R_3}{R_2}$, $k_3 = \frac{R_1}{R_3}$. Далее воспользуйтесь результатом упр. **470**.

472. Пусть $\omega_1(O_1; R_1)$, $\omega_2(O_2; R_2)$, а прямая MA пересекает окружность ω_2 вторично в точке A_1. Покажите, что $H_N^{-\frac{R_2}{R_1}} \circ H_M^{\frac{R_1}{R_2}} = Z_{O_2}$, и найдите образ точки A_1 при этом отображении.

473. Пусть $H_A^{k_1}(C) = C'$, $H_B^{k_2}(C) = C_1$. Докажите, что $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC_1}$.

474. Пусть $H_A^{k_1}(C) = H_B^{k_2}(C) = C'$. Всякая прямая, проходящая через точку C, имеет один и тот же образ при этих гомотетиях.

475. Пусть $H_A^{k_1}(M_1) = H_B^{k_2}(M_1)$, $H_B^{k_2}(M_2) = H_C^{k_3}(M_2)$, тогда при гомотетиях $H_A^{k_1}$, $H_B^{k_2}$, $H_C^{k_3}$ прямая M_1M_2 имеет один и тот же образ.

476. $k_1 = -k_2$. Воспользуйтесь результатом упр. **473.**

477. Коэффициент k такой гомотетии удовлетворяет условию $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ (основное свойство гомотетии), а искомая точка O определяется условием $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{1 - k} \cdot \overrightarrow{AA_1}$.

478. Заметьте, что точка O является инвариантной, и воспользуйтесь результатами упр. **342.**

479. Если для некоторого преобразования подобия с коэффициентом k точка M является инвариантной, то $MA_1=kMA$. Остается доказать обратное.

Если $k=1$, то множество точек M есть серединный перпендикуляр к отрезку AA_1. Если $k\neq 1$, то множество точек M есть так называемая окружность Аполлония.

480. Искомое множество точек есть прямая AB, из которой удалены точки A и B. Воспользуйтесь результатом примера из § 20.

481. Пусть A_1, B_1, C_1, O_1 – центры окружностей ω_1, ω_2, ω_3, ω соответственно, O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, а G – центр окружности, вписанный в треугольник ABC. Докажите, что при гомотетии H_G^k, где $k=\dfrac{A_1B_1}{AB}$, $\Delta ABC \to \Delta A_1B_1C_1$.

482. Рассмотрите гомотетию H_A^k, при которой $\omega \to \omega'$, и примените прием 8.2.12.

483. См. прием 2.14.1.

484. Всякое движение (всякое подобие) является аффинным преобразованием. Обратное, вообще говоря, неверно (см. ниже упр. **486**).

485. Воспользуйтесь приемом 2.14.1.

486. Примените теорему 9.

487. Этими свойствами аффинных преобразований являются свойства 3° – 6° из § 7. См. также свойства 3° – 6° в § 35.

490. Воспользуйтесь свойством 6° (§ 7 или § 35), а также соотношениями $BC{:}AD=CO{:}OA$, $B'C'{:}A'D'=C'O'{:}O'A'$, где O и O' – точки пересечения диагоналей указанных трапеций.

491 – 492. Примените прием 2.14.1.

493. Пусть A и B – инвариантные точки, а точка C прямой AB переходит в точку C', тогда $(AB, C)=(AB, C')$, откуда и следует требуемое.

494. Пусть A, B, C – неколлинеарные инвариантные точки и M – произвольная точка плоскости. Рассмотрите случаи: а) точка M принадлежит прямым AB, BC или AC; б) точка M не принадлежит ни одной из этих прямых. В последнем случае проведем через точку M прямую, которая пересекается с прямыми AB и AC в точках N и P. Далее воспользуйтесь упр. 493.

495. Рассмотрите следующие случаи: либо преобразование не имеет инвариантных точек, либо имеет хотя бы одну инвариантную точку. В последнем случае – либо инвариантная точка A единственна, либо есть еще одна инвариантная точка и т.д.

496. Примените метод доказательства от противного и воспользуйтесь свойствами аффинных преобразований.

497. а) Пусть $AA'\cap s = X$, тогда прямая AX отображается на прямую $A'X$, т.е. на себя.

б) Пусть $b \parallel AA'$, $b \cap s = Y$ и $b \to b'$, тогда прямая b' проходит через точку Y и параллельна прямой AA'.

498. Пусть $f(C)=C'$, $\varphi(C)=C_1$. Воспользуйтесь определением аффинных преобразований.

499. См. указания к упр. 494.

501. Рассмотрите реперы $R=\{A,B,C\}$ и $R_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и примените теорему 12.

504 – 505. Воспользуйтесь приемами 6.4. или 2.15.2.

506. Воспользуйтесь результатом упр. 501.

508. Если точка M принадлежит прямой AB и $M'=f(M)$, то должно быть $(AB, M)=(A'B', M')$. В случаях (б) и (в) постройте точку пересечения прямых AM и BC.

509. Пусть точки B и C принадлежат прямой s. Воспользуйтесь результатом упр. **501.**

511. а) Прямая AA', параллельная прямой s, отображается на прямую, которая проходит через точку A' и параллельна прямой s.

б) Пусть $b \parallel AA'$, $B \in b$, $AB \cap s = X$ и $A'X \cap b = B'$. Заметьте, что $(AX,B)=(A'X,B')$, откуда следует, что $B \to B'$, и поэтому (на основании предыдущего пункта) $b \to b$.

514. $x'=2x-y+3$, $y'=x+2y+1$. Примените прием 4.5.

515. Искомое преобразование переводит репер $R=\{O,E_1,E_2\}$ в репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, где O' (1; –2), $E_1'(2;-1)$, $E_2'(3;2)$ (координаты даны в репере R).

516. а) Воспользуйтесь приемом 2.4.

б) f есть аффинное преобразование, которое переводит репер $R=\{O,E_1,E_2\}$ в такой репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, что O' (3; –7), $\overrightarrow{O'E_1'}(-1;4)$, $\overrightarrow{O'E_2'}(1;-1)$ и, следовательно, $E_1'(2;-3)$, $E_2'(4;-8)$ (координаты даны в репере R). Примените прием 4.5.

517. Формулами (*) задано аффинное преобразование, которое переводит репер $R=\{O,E_1,E_2\}$ в такой репер $R'=\{O',E_1',E_2'\}$, что $O'(c_1; c_2)$, $E_1'(a_1+c_1;a_2+c_2)$, $E_2'(b_1+c_1;b_2+c_2)$. Примените прием 4.5.

518. Воспользуйтесь формулами (*) и приемом 4.4.

519. Заметьте, что:

а) точки A, B, C коллинеарны, а A', B', C' – нет;

б) точки A', B', C' коллинеарны, а A, B, C – нет;

в) $(A'B',C') \neq (AB,C)$.

520. Воспользуйтесь теоремой 4.

521. Т. к. $M_0(x_0; y_0)$ – инвариантная точка, то $\overline{X}_0 = A\cdot\overline{X}_0 + X_0$ (обозначения в теореме 4).

522. Воспользуйтесь теоремой 4 и свойствами матриц: $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$, $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

524. а) $x'=x$, $y'=ky$; б) $x'=kx$, $y'=y$.

525. Воспользуйтесь приемом 2.14.1.

526. Воспользуйтесь приемом 6.1.

527. Точки O и E_1 – инвариантные, $E_2(0;1) \to A'(0;k)$, где $k \neq 0$, $k \neq 1$. Искомые формулы: $x'=x$, $y'=ky$. Воспользуйтесь приемом 4.4.

528. Воспользуйтесь определением перспективно-аффинного преобразования первого типа (примечание к упр. 512), а также результатами упр. **526 – 527.**

529. Примените прием 2.16. Ось: $x+2y-1=0$; направление: $\vec{p}(1;1)$; коэффициент: $k=4$.

530. Инвариантные прямые – ось косого сжатия и все прямые, параллельные направлению b.

534. $x' = -x-2y+6$, $y' = -x+3$. Воспользуйтесь определением косого сжатия.

535. $$\begin{cases} x' = \dfrac{Amk+Bn}{Am+Bn} \cdot x + \dfrac{Bm \cdot (k-1)}{Am+Bn} \cdot y + \dfrac{Cm \cdot (k-1)}{Am+Bn} \\ y' = \dfrac{An \cdot (k-1)}{Am+Bn} \cdot x + \dfrac{Am+Bnk}{Am+Bn} \cdot y + \dfrac{Cn \cdot (k-1)}{Am+Bn} \end{cases}.$$

Воспользуйтесь определением косого сжатия. Частные случаи:

а) $x' = x + \dfrac{m}{n}(k-1)y, \; y' = ky$;

б) $x' = x, \; y' = ky + (1-k)y_0$;

в) $$\begin{cases} x' = x + \dfrac{m(k-1)}{n} y - \dfrac{y_0 m(k-1)}{n} \\ y' = ky - y_0(k-1) \end{cases}.$$

536. Примените прием 2.17. Ось: $x+2y-1=0$. Пара соответствующих точек: $O(0;0) \to O'(2;-1)$.

537. $x'=x+ky$, $y'=y$. Заметьте, что точки O (0; 0) и E_1 (1; 0) – инвариантные, а $E_2(0;1) \to E_2'(k;1)$, где $k\neq0$. Воспользуйтесь приемом 4.4.

538. Примените прием 6.1.

539. Инвариантные прямые: ось сдвига и все прямые, параллельные оси.

540. Пусть прямая a пересекает ось s сдвига в точке M. Примените далее прием 3.4.

543. а) $x' = x - \frac{k}{y_0} \cdot y + k$, $y'=y$, где $k\neq0$;

б) $x'=x$, $y'=kx+y$, где $k\neq0$;

в) $x'=x$, $y' = -\frac{k}{x_0} \cdot x + y + k$, где $k\neq0$;

г) $x' = (1+k) \cdot x - \frac{k}{p} \cdot y$, $y' = kpx + (1-k) \cdot y$, где $k\neq0$.

Воспользуйтесь приемом 4.4.

544. $x'=k_1x$, $y'=k_2y$.

545. Воспользуйтесь приемом 6.1. Если $k_1=k_2$, то имеем гомотетию.

546. Формулы центрально-подобной симметрии: $x'=kx$, $y'= -ky$.

549. Косое сжатие f: $x'= 4x+y$, $y'= 3x+2y$; его ось – прямая $3x+y=0$; направление – $\vec{p}(1;1)$. Перенос $T_{\vec{p}}$: $x'= x+1$, $y'= y$.

551. $x'=x+n$, $y'=ky+m$, где $n\neq0$.

552. В системе координат из упр. **551** инвариантная прямая задается уравнением $y + \frac{m}{k-1} = 0$.

553. $x'=x+ ky+m$, $y'=y+n$.

554. Воспользуйтесь приемом 2.17.

555. Ось сдвига: $x-y=0$. Вектор переноса: $\vec{p}(0;1)$.

556. $x'=k_0x+ky$, $y'=k_0y$.

557. Воспользуйтесь приемом 6.1.

558. Формулы композиции $H_S^{k_0} \circ f : x' = k_0x + k_0ky + (1-k_0)x_0$,

$y' = k_0y + (1-k_0)y_0$, где $S(x_0; y_0)$. Инвариантная точка: $O_1\left(x_0 + \dfrac{k_0ky_0}{1-k_0}; y_0\right)$.

Формулы преобразования $H_S^{k_0} \circ f$ в репере R': $x' = k_0(x+ky)$, $y' = k_0y$. Воспользуйтесь результатами упр. 521 и упр. 557.

559. В системе координат из упр. 556 инвариантная прямая задается уравнением $y=0$ (ось сдвига); инвариантная точка – $O(0; 0)$.

560. См. упр. 530, 539, 547, 552, 559.

561 – 564. Воспользуйтесь приемом 2.15.2. или 6.4.

565. а) $x' = x, y' = \dfrac{b}{a}y$; б) $x' = \dfrac{a}{b}x, y' = y$;

в) $x' = \dfrac{a}{r}x, y' = \dfrac{b}{r}y$; г) $x' = 3x, y' = \dfrac{1}{2}y$.

566. См. прием 7.1. в «Сводке».

567. См. упр. 501.

568. Воспользуйтесь приемом 7.4.

569. Пусть $ABCD$ – произвольная трапеция и $AB \cap CD = 0$. Рассмотрите аффинное преобразование, при котором треугольник AOB переходит в равнобедренный треугольник $A'O'B'$.

570. Если фигуры равны, то они подобны; если фигуры подобны, то они аффинно-эквивалентны. Обратное, вообще говоря, неверно.

571. Воспользуйтесь приемом 7.1.

573. См. пример 2 (§ 34).

574. а) Пусть в ортонормированных реперах R и R' данные гиперболы заданы уравнениями $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и $\dfrac{x^2}{A^2} - \dfrac{y^2}{B^2} = 1$ соответственно. Аффинное преобразование, переводящее первую гиперболу во вторую, есть композиция $\varphi \circ f$, где f – преобразование, заданное в репере R формулами $x' = \dfrac{A}{a}x$ и $y' = \dfrac{B}{b}y$, а φ – движение, переводящее репер R в репер R'.

б) См. пример 2 в § 26.

575. Для доказательства достаточно рассмотреть, например, аффинное преобразование, при котором правильный треугольник переходит в прямоугольный треугольник с углом в 30°.

576. Заметьте, что $BD{:}DC = AB{:}AC$. Далее воспользуйтесь свойством 7° (§ 35).

577. Заметьте, что точка O – середина отрезков AD и BE. Кроме того, $BC\|AD$, $CD\|BE$.

578 – 579. Воспользуйтесь свойством 7° (§ 35).

581. Коэффициент искажения площадей равен: а) $\frac{1}{3}$; б) 1; в) 2. Далее воспользуйтесь приемом 8.2.18. (леммой 2).

582. Треугольник $A_1B_1C_1$ – образ треугольника ABC при косом сжатии с коэффициентом, равным $\frac{1}{4}$. Воспользуйтесь приемом 8.2.18. (леммой 2).

583. Искомое преобразование – сжатие к оси Ox; коэффициент $k=\frac{1}{2}$; направление – ось Oy.

584. πab. Фигура, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, есть образ фигуры, ограниченной окружностью $x^2+y^2=a^2$, при сжатии к оси Ox. Коэффициент сжатия $k=\frac{b}{a}$; направление – ось Oy.

585. Рассмотрите аффинное преобразование $x'=2x, y'=\frac{1}{2}y$ и примените прием 8.2.18.

586. Пусть m – прямая, которая проходит через вершину угла и середину отрезка AA_1. Рассмотрите косое сжатие с коэффициентом $k = -1$, определяемое осью m и направлением AA_1.

587. Рассмотрите косое сжатие, осью которого является прямая, проходящая через середину одного из оснований трапеции и точку пересечения продолжений боковых сторон.

588. Воспользуйтесь приемами 8.2.6. или 8.2.13.2.

589. Воспользуйтесь приемами 8.2.6., 8.2.18. или 8.2.19.

590. Свойства (а) и (г) – аффинные; остальные нет.

591. Свойства (б), (г), (е) – аффинные; остальные нет.

592. Сопоставьте определение аффинных свойств с определением аффинно-эквивалентных фигур.

593. При помощи аффинного преобразования переведите данный треугольник в равносторонний треугольник (прием 8.3). $MP:PN= m:n$.

594. Площади параллелограммов относятся как 9:17. При помощи аффинного преобразования переведите параллелограмм в квадрат (прием 8.3).

595. При помощи аффинного преобразования переведите данный треугольник в равносторонний треугольник и докажите, что точки M'_1, M'_2, …, M'_6 (образы точек M_1, M_2, ..., M_6) принадлежат медианам этого треугольника.

596. Пусть $AB \cap CD=O$. Переведите при помощи аффинного преобразования треугольник AOD в равнобедренный $A'O'D'$. Далее, используя прием 8.2.11., докажите, что отрезок $P'Q'$, где P', Q' – образы точек P и Q, перпендикулярен высоте (медиане) $O'E'$.

597. $MO:ON$ = 4:5; $B_1O:OD_1$=5:4. Воспользуйтесь приемом 8.3.

598. Воспользуйтесь приемом 8.3.

599. При помощи аффинного преобразования переведите эллипс в окружность. См. пример 2 из § 34.

600. Переведите аффинным преобразованием эллипс в окружность и воспользуйтесь результатом упр. 584.

601. Предварительно необходимо переформулировать цель задачи так: доказать, что $\frac{S_{\Delta AOB}}{S}+\frac{S_{\Delta COD}}{S}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S}+\frac{S_{\Delta AOD}}{S}$, где S – площадь четырехугольника $ABCD$.

602 – 603. Воспользуйтесь приемом 8.3.

604 – 607. Используйте прием 9.2.

608 – 610. Используйте прием 9.3.

611. а) осевая симметрия с осью Oy и сжатие к оси Oy с коэффициентом k=2;

б) сжатие к оси Ox с коэффициентом k=3 и перенос на вектор $\vec{p}(-1;0)$;

в) сжатие к оси Ox с коэффициентом k=2, сжатие к оси Oy с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$ и перенос на вектор $\vec{p}(0;-1)$;

г) сжатие к оси Oy с коэффициентом $k=\frac{1}{2}$, перенос на вектор $\vec{p}(4;0)$, сжатие к оси Ox с коэффициентом $k=\frac{1}{3}$, осевая симметрия с осью Ox.

612. Используйте приемы 10.1. – 10.2., 10.4. – 10.7.

613. $y=-\frac{1}{3}f\left(\frac{5}{2}-\frac{x}{2}\right)$.

614. Характеристические уравнения для таких преобразований одинаковы: $\lambda^2-(a_1+b_2)\cdot\lambda+(a_1b_2-a_2b_1)=0$.

615. а) инвариантных направлений нет;

б) два инвариантных направления: $\vec{e}_1(1;0)$, $\vec{e}_2(0;1)$;

в) одно инвариантное направление: $\vec{e}_1(1;0)$;

г) два инвариантных направления: $\vec{e}_1(1;0)$, $\vec{e}_2(0;1)$;

д) см. п. (б);

е) см. п. (в);

ж) одно инвариантное направление: $\vec{e}_1(1;0)$.

616. Характеристическое уравнение в репере R: $\lambda^2 - (a_1 + b_2)\cdot\lambda + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$.

Пусть в репере R' матрица преобразования такова: $A' = \begin{pmatrix} a_1' & b_1' \\ a_2' & b_2' \end{pmatrix}$.

Как известно, $A' = C^{-1}\cdot A\cdot C$, где $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ – матрица перехода от R к R'.

Характеристическое уравнение в репере R': $\lambda^2 - (a_1' + b_2')\cdot\lambda + (a_1'\cdot b_2' - a_2'\cdot b_1') = 0$.

Как известно, $\det A = \det A'$. Осталось доказать, что $a_1' + b_2' = a_1 + b_2$. Это можно установить путем непосредственных вычислений.

617. $x'=x$, $y'=3y$. Преобразование f – косое сжатие. Для отыскания коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 при x и y в искомых формулах воспользуйтесь соотношениями $\begin{cases} a_1x_0 + b_1y_0 = \lambda_0x_0 \\ a_2x_0 + b_2y_0 = \lambda_0y_0 \end{cases}$ из теоремы 15.

618. $x'=x+ky$, $y'=y$.

619 – 620. Из условий задачи следует, что определитель системы $\begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y = c_1 \\ a_2x + (b_2 - 1)y = c_2 \end{cases}$ отличен от нуля.

621. Из условия задачи следует, что определитель системы $\begin{cases} (a_1 - 1)x + b_1y = c_1 \\ a_2x + (b_2 - 1)y = c_2 \end{cases}$ равен нулю и, следовательно, эта система либо не имеет решений, либо имеет бесконечное множество решений.

622. а) Инвариантные направления: $\vec{u}_1(1;-1)$, $\vec{u}_2(1;1)$. Прямая a инвариантных точек: $x+y+3=0$. Косое сжатие с осью a; направление –

$\vec{u}_2(1;1)$; коэффициент – k=3.

б) Инвариантные направления: $\vec{u}_1(1;-1)$, $\vec{u}_2(1;1)$. Инвариантных точек нет. Данное преобразование – композиция косого сжатия и переноса на вектор $\vec{p}(3;0)$. Косое сжатие задается формулами $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$; его ось – прямая $x+y$=0; направление – $\vec{u}_2(1;1)$; коэффициент – k=3.

в) Инвариантные направления: $\vec{u}_1(1;-1)$, $\vec{u}_2(1;1)$. Инвариантная точка: M_0(1; 2). Данное преобразование – каноническая композиция $f_2 \circ f_1$ косых сжатий. Ось косого сжатия f_1 задается точкой M_0 и вектором $\vec{u}_1(1;-1)$; коэффициент – k=5. Ось косого сжатия f_2 задается точкой M_0 и вектором $\vec{u}_2(1;1)$; коэффициент – k= –1.

г) Инвариантных направлений нет. Инвариантная точка – $M_0\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$. Данное преобразование – аффинный поворот с центром в точке M_0.

д) Инвариантное направление – $\vec{u}(0;1)$. Прямая a инвариантных точек – x=2. Данное преобразование – сдвиг с осью a.

е) Инвариантное направление – $\vec{u}(1;0)$. Инвариантных точек нет. Данное преобразование – каноническая композиция сдвига $\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = y \end{cases}$ и переноса на вектор $\vec{p}(-3;1)$. Ось сдвига – y=0.

ж) Инвариантное направление – $\vec{u}(1;-1)$. Инвариантная точка – M_0(1;2). Данное преобразование – каноническая композиция сдвига и гомотетии $H_{M_0}^3$. Ось сдвига – прямая $x+y$–3=0.

623. x'= 2x–5y–6, y'= x+2y–6. Инвариантных направлений нет. Инвариантная точка – M_0(6; 0). Данное преобразование – аффинный поворот с центром $M_0(6;\,0)$.

624. а) Если $a > -\frac{1}{4}$ и $a \neq 0$, то данное преобразование есть каноническая композиция косых сжатий. Если $a < -\frac{1}{4}$, то данное преобразование – аффинный поворот. Если $a = -\frac{1}{4}$, то данное преобразование – каноническая композиция гомотетии $H_{M_0}^{\frac{1}{2}}$ и сдвига $\begin{cases} x' = 2x - \frac{1}{2}y \\ y' = 2x \end{cases}$.

б) Если $a \neq -1$ и $a \neq \frac{1}{2}$, то при любых b и c данное преобразование есть каноническая композиция косых сжатий.

Если $a = \frac{1}{2}$ и $b = -\frac{c}{2}$, то данное преобразование есть косое сжатие с осью $x-2y+c=0$. Направление этого косого сжатия – $\vec{u}(1;-2)$. Коэффициент – $k=-\frac{3}{2}$.

Если $a = \frac{1}{2}$ и $b \neq -\frac{c}{2}$, то данное преобразование есть каноническая композиция косого сжатия $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ и переноса на вектор $\vec{p}(b;c)$. Ось косого сжатия – прямая $x-2y=0$; направление – $\vec{u}(1;-2)$; коэффициент – $k=-\frac{3}{2}$.

625. Существует только пять видов аффинных преобразований, при которых $(0;0) \to (3;1)$, $(1;0) \to (5;-2)$: каноническая композиция косых сжатий, каноническая композиция косого сжатия и переноса, каноническая композиция сдвига и гомотетии, каноническая композиция сдвига и переноса, аффинный поворот. Составьте формулы указанных преобразований, используя прием 4.4., и исследуйте их.

626. Воспользуйтесь приемом 4.4.

627. Искомая композиция может быть сдвигом или тождественным преобразованием.

629. См. пример 1 из § 42 (второй способ).

631. Введите аффинную систему координат так, чтобы ось *Ox* совпадала с осью одного косого сжатия, а ось *Oy* задавала направление одного или обоих косых сжатий. Используйте формулы из упр. **535**.

а) Искомая композиция может быть либо переносом, либо косым сжатием.

б) Искомая композиция может быть либо канонической композицией сдвига и переноса, либо канонической композицией косого сжатия и переноса.

632. Искомая композиция может быть либо переносом, либо сдвигом. Используйте формулы из упр. **543**.

633. Искомая композиция есть каноническая композиция косого сжатия и переноса.

634. Искомая композиция может быть либо сдвигом, либо косым сжатием.

635. Искомая композиция может быть либо косым сжатием, либо канонической композицией косого сжатия и переноса, либо канонической композицией двух косых сжатий.

636. Воспользуйтесь приёмом 12.

637. Группами являются множества (3), (5), (7).

638. Т.к. прямая a имеет инвариантное направление, то либо $a \to a$, либо $a \to a'$, где $a \| a'$. Осталось, используя условия задачи, исключить вторую возможность ($a \to a'$).

639. Искомая точка является прообразом точки пересечения прямой c и ее образа – прямой c'.

640. Задайте данное преобразование тремя парами соответствующих точек: $A \to A$, $B \to B'$, $C \to C'$ (A – инвариантная точка). Рассмотрите:

а) преобразование $H_A^k \circ R_A^\alpha$, при котором $B \to B'$;

б) перспективно-аффинное преобразование с осью AB'.

641. Задайте данное преобразование тремя парами соответствующих точек: $A \to A'$, $B \to B'$, $C \to C'$. Рассмотрите: а) подобие, при котором $A \to A'$, $B \to B'$; б) перспективно-аффинное преобразование с осью $A'B'$.

642. Образами осей $A'B'$ и $C'D'$ эллипса при отображении f^{-1} являются взаимно перпендикулярные диаметры AB и CD окружности (см. пример 2 в § 34).

643. Одна пара главных направлений: $\vec{p}(3;1)$ и $\vec{q}(1;-3)$. Воспользуйтесь леммой 1 (§ 40).

644. Если $AA' \perp s$, то искомые направления задаются прямыми AA' и s. Пусть прямые AA' и s не перпендикулярны. Постройте окружность, проходящую через точки A и A', с центром на оси s. Искомые прямые – прямые AB и AC, где B и C – точки пересечения этой окружности с осью s.

645 – 646. Пусть прямые a и b, пересекающиеся в точке O, задают главные направления данного аффинного преобразования (см. упр. 642), а прямые a', b' – их образы. Рассмотрите ортонормированный репер $R = \{O, E_1, E_2\}$, где $E_1 \in a$, $E_2 \in b$, и его образ – репер $R' = \{O', E_1', E_2'\}$.

647. Рассмотрите окружность с диаметром AB и ее диаметр C_1D_1, перпендикулярный AB. Искомое косое сжатие задается осью AB и парой соответствующих точек: $C_1 \to C$.

648. Постройте образы нескольких точек окружности из упр. **647**.

649. Постройте прообраз a_1 прямой a при преобразовании из упр. 647. Далее постройте образы точек пересечения прямой a_1 и окружности из упр. **647**.

650. Постройте прообраз M_1 точки M при преобразовании из упр. 647. Искомые касательные к эллипсу – образы тех касательных к окружности, которые проходят через точку M_1.

Список литературы

1. Аргунов, Б. И. Элементарная геометрия [Текст] / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – М.: Просвещение, 1966.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия. Ч.1 [Текст] / Л. С. Атанасян. – М.: Просвещение, 1973.
3. Атанасян, Л. С. Геометрия. Ч.1 [Текст] / Л. С. Атанасян, В. Т. Базылев. – М.: Просвещение, 1986.
4. Атанасян, Л. С. Сборник задач по геометрии. Ч. 2 [Текст] / Л. С. Атанасян и др. – М.: Просвещение, 1975.
5. Базылев, В. Т. Сборник задач по геометрии [Текст] / В. Т. Базылев, К. И. Дуничев и др.; под ред. В. Т. Базылева. – М.: Просвещение, 1980.
6. Вересова, Е. Е. Практикум по решению математических задач [Текст] / Е. Е. Вересова, Н. С. Денисова, Т. Н. Полякова. – М.: Просвещение, 1979.
7. Вернер, А. Л. Геометрия [Текст]: учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов, Ч. 1 / А. Л. Вернер, Б. Е. Кантор, С. А. Франгулов. – СПб.: Специальная литература : университетская книга, 1997.
8. Егерев, В. К. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы [Текст] / В. К. Егерев, В. В. Зайцев и др.; под ред. М. И. Сканави. – 3-е изд., доп. – М.: Высшая школа, 1978.
9. Ефимов, Н. В. Линейная алгебра и многомерная геометрия [Текст] / Н. В. Ефимов, Э. Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970.
10. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии [Текст] : в 2 ч. / В. В. Прасолов. – 2-е изд. – М.: Наука, 1991.