И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос, З.Я.Шапиро

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ И ГРУППЫ ЛОРЕНЦА, ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Книга посвящена описанию и детальному изучению представлений группы вращений трехмерного пространства и группы Лоренца.

Эти группы играют фундаментальную роль в теоретической физике. Рассчитывая на читателей-физиков, авторы собрали в своей книге весь основной материал теории представлений, который применяется в квантовой механике.

Книга рассчитана также на читателей-математиков, изучающих представления групп Ли. Для них она может служить введением в общую теорию представлений.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена изучению представлений группы вращений трехмерного пространства и группы Лоренца. У читателя предполагается лишь знакомство с основами линейной алгебры, например, в объеме первых двух глав книги И. М. Гельфанда «Лекции по линейной алгебре».

Теория представлений, в частности представления трехмерной группы вращений и группы Лоренца, широко используется в квантовой механике. В этой книге собран тот основной, на наш взгляд, материал, который необходим для квантовомеханических приложений.

С другой стороны, изучение представлений трехмерной группы вращений и группы Лоренца может служить хорошим введением в общую теорию представлений групп Ли; оба эти примера тем более удачны, что на них отчетливо видна разница между представлениями компактных групп (группа вращений) и локально компактных групп Ли (группа Лоренца). Кроме того, из приведенного в книге материала достаточно ясно обнаруживаются связи теории представлений с другими разделами математики (сферические функции, тензоры, дифференциальные уравнения и т. п.); в общем случае эти связи еще не всегда хорошо изучены.

Первой частью книги, посвященной группе вращений, служит статья, опубликованная двумя из авторов — И. М. Гельфандом и З. Я. Шапиро — в «Успехах математических наук» за 1952 г. (т. VII, вып. 1) под заголовком «Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения».

К этой статье добавлены пп. 6 и 7 § 9 и заново написанный § 10, в котором вычисляются коэффициенты Клебша — Гордона.

Вторая часть книги, где изучаются представления группы Лоренца и релятивистски-инвариантные уравнения, написана Р. А. Минлосом. При этом, однако, выбор материала, а также план и стиль изложения детально обсуждались всеми авторами. При написании последней главы — о релятивистски-инвариантных уравнениях — в основу была положена работа И. М. Гельфанда и А. М. Яглома «Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца» (ЖЭТФ, т. 18, № 8, 1948 г.); таким образом, эту главу можно рассматривать как подробное и несколько более полное изложение упомянутой статьи.

Включение в книгу релятивистски-инвариантных уравнений, помимо их самостоятельного интереса, оправдано еще и тем, что применяемые здесь методы широко используются в предыдущей главе при изучении самих представлений группы Лоренца; таким образом, по своим методам обе главы второй части составляют единое целое. Отметим еще, что во второй части упор в изложении сделан на конечномерные представления, поскольку до настоящего времени главным образом они были существенны в физических применениях.

Читателю, желающему глубже и более подробно изучить представления группы Лоренца, мы рекомендуем обратиться к книге М. А. Наймарка «Представления группы Лоренца», в которой последние изложены с исчерпывающей полнотой.

Авторы считают непременным долгом отметить большую работу, проделанную редактором книги Ф. А. Березиным, далеко выходящую за пределы обычных редакторских обязанностей. Его многочисленные требования, советы и замечания значительно повысили качество книги. Мы благодарны ему.

И. Гельфанд, Р. Минлос, З. Шапиро

ЧАСТЬ I

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ГЛАВА 1

ГРУППА ВРАЩЕНИЙ И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Группа вращений трехмерного пространства

1. Определение группы вращений. Рассмотрим все вращения трехмерного пространства вокруг фиксированной точки (начала координат). Под произведением двух вращений g_1 и g_2 мы понимаем вращение g, состоящее в последовательном применении сначала g_2 и затем g_1 *). Запишем это так: $g = g_1 g_2$. Нетрудно проверить, что совокупность G всех вращений образует группу, т. е. что при таком определении умножения выполнены все групповые аксиомы. Единицей группы e, или, как мы будем говорить, единичным вращением, является при этом поворот на нулевой угол.

Если x — некоторый вектор, выходящий из начала координат, то вращение g переводит его в вектор x'. Мы будем обозначать это так:

$$x' = gx. \tag{1}$$

Выясним, как аналитически записать вращения. Выберем в трехмерном пространстве фиксированную ортогональную систему координат. В ней вращение задается формулами

$$x'_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ik} x_k, \tag{2}$$

где x_k — координаты вектора x, а x'_i — координаты вектора x'. Матрица $\|g_{ik}\|$ определяет данное вращение. Мы будем эту матрицу обозначать той же буквой g, что и вращение. Найдем, каким условиям должны удовлетворять числа g_{ik}. Так как вращение не меняет длин и углов, то оно не меняет скалярных произведений. Таким образом, если $x' = gx$ и $y' = gy$, то

$$\sum_{i=1}^{3} x'_i y'_i = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k. \tag{3}$$

*) Такой порядок принят обычно при перемножении линейных преобразований.

Подставим в левую часть равенства вместо x'_i и y'_i их выражения по формуле (2):

$$\sum_{i, k, l} g_{ik} g_{il} x_k y_l = \sum_{k=1}^{3} x_k y_k.$$

Сравнивая коэффициенты при $x_k y_l$ в левой и правой частях, мы получим:

$$\sum_{i=1}^{3} g_{ik} g_{il} = \delta_{kl}, \tag{4}$$

где под символом δ_{kl} понимается число, равное 1, если $k = l$, и равное 0, если $k \neq l$. Равенство (4) можно записать в матричной форме. А именно, в правой части равенства стоят элементы единичной матрицы e, слева же — элементы произведения $g'g$ матрицы g', транспонированной к g, на саму матрицу g, т. е.

$$g'g = e \tag{5}$$

или

$$g' = g^{-1}. \tag{5'}$$

Матрицы, удовлетворяющие равенству (5), называются *ортогональными матрицами*. Если взять детерминант обеих частей равенства (5), то мы получим $\operatorname{Det}(g') \cdot \operatorname{Det}(g) = 1$, т. е. $[\operatorname{Det}(g)]^2 = 1$ и, значит,

$$\operatorname{Det}(g) = \pm 1. \tag{6}$$

Всякое вращение есть вращение вокруг некоторой оси на угол φ. Если выбрать ось вращения за ось z, то матрица этого вращения будеть иметь вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Так как детерминат матрицы (7) равен 1, то для вращений $\operatorname{Det}(g) = 1$. Ортогональные преобразования, для которых $\operatorname{Det}(g) = -1$, называются *несобственными* ортогональными преобразованиями. Примером несобственного ортогонального преобразования является отражение относительно начала координат, матрица которого имеет вид

$$g_- = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Если g — какое-нибудь несобственное ортогональное преобразование, т. е. $\operatorname{Det}(g) = -1$, то gg_- есть преобразование, для которого $\operatorname{Det}(gg_-) = \operatorname{Det}(g) \cdot \operatorname{Det}(g_-) = 1$ и, значит, gg_- есть вращение, а $g = (gg_-)g_-$ — произведение вращения на отражение относительно начала.

2. Введение параметров в группу вращений. Для дальнейшего нам понадобится несколько способов задавать вращение параметрами.

Так как каждое вращение есть вращение вокруг некоторой оси, то мы полностью определим его, задав ось вращения и угол поворота вокруг нее. Мы часто будем задавать вращение вектором $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, направленным вдоль оси вращения и равным по величине углу поворота. Направление вектора будем выбирать так, чтобы, если смотреть из его конца, угол поворота не превосходил π. Таким образом, координаты векторов, описывающих всевозможные вращения, будут удовлетворять условию $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqslant \pi^2$ и, значит, заполнять шар радиуса π. Ясно, что различные внутренние точки шара описывают различные вращения, а две диаметрально противоположные точки на поверхности сферы — одно и то же вращение на угол π (так как поворот на угол π в двух противоположных направлениях приводит к одному и тому же результату).

Указанный способ описания вращений выявляет топологическую структуру группы вращений, а именно, эта группа топологически эквивалентна шару, у которого отождествлены диаметрально противоположные точки границы.

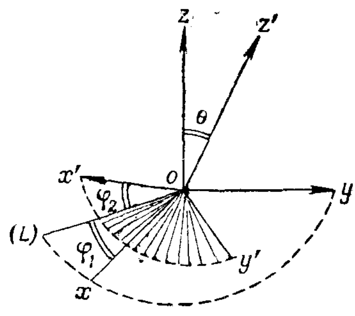

Рис. 1.

Важным видом параметров в группе вращений являются так называемые углы Эйлера. Пусть координатные оси Ox, Oy и Oz перейдут в результате вращения g в прямые Ox', Oy' и Oz'. Обозначим через (L) прямую, по которой пересекаются плоскости xOy и $x'Oy'$, через φ_1 — угол Ox и (L), через φ_2 — угол (L) и Ox' и через θ — угол между положительными направлениями осей Oz и Oz'. Очевидно, что вращение g может быть представлено как произведение трех последовательных вращений; а именно: вращения g_{φ_1} в положительном направлении на угол φ_1 вокруг оси Oz, в результате которого ось Ox совпадет с прямой (L), затем вращения g_θ на угол θ вокруг Ox (после которого ось Oz перейдет в ось Oz') и, наконец, вращения g_{φ_2} на угол φ_2 вокруг оси Oz':

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = g_{\varphi_2} g_\theta g_{\varphi_1}. \tag{8}$$

Найдем элементы g_{ik} матрицы вращения $g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, задаваемого углами Эйлера φ_1, θ, φ_2. Матрицы поворотов g_{φ_1}, g_θ, g_{φ_2} вокруг осей Oz, Ox, Oz' имеют вид

$$g_{\varphi_1} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}; \quad g_\theta = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix};$$

$$g_{\varphi_2} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi_2 & -\sin\varphi_2 & 0 \\ \sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

При последовательном выполнении вращений их матрицы перемножаются в обратном порядке, поэтому

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = g_{\varphi_1} g_\theta g_{\varphi_2} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2, & -\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 & \sin\varphi_1 \sin\theta \\ \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \sin\varphi_2, & -\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 & -\cos\varphi_1 \sin\theta \\ \sin\varphi_2 \sin\theta, & \cos\varphi_2 \sin\theta & \cos\theta \end{Vmatrix}. \quad (9)$$

При этом углы φ_1 и φ_2 могут изменяться от 0 до 2π, а угол θ — от 0 до π. Различным тройкам чисел, изменяющимся в этих пределах, соответствуют различные вращения, кроме случая $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. При $\theta = 0$ вращение есть поворот вокруг Oz на угол $\varphi_1 + \varphi_2$, а при $\theta = \pi$ — на угол $\varphi_1 - \varphi_2$, так что в этих случаях различным парам φ_1 и φ_2 может отвечать одно и то же вращение.

Рассмотрим вращение $g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$. Его матрица задается формулой (9). Проверим, что обратное преобразование задается углами $\pi - \varphi_2$, θ, $\pi - \varphi_1$. Действительно, если в матрицу (9) подставить $\pi - \varphi_2$ вместо φ_1 и $\pi - \varphi_1$ вместо φ_2, то она заменится транспонированной, а мы знаем (формула (5)), что обратная к ортогональной матрице совпадает с транспонированной. Итак, *если вращение g задается углами φ_1, θ, φ_2, то вращение g^{-1} задается углами $\pi - \varphi_2$, θ, $\pi - \varphi_1$.*

3. Инвариантное интегрирование. При исследовании функций от элемента группы G (т. е. функций от φ_1, θ, φ_2) нам придется рассматривать интегралы от этих функций по группе (т. е. по всем допустимым значениям φ_1, θ, φ_2: $0 \leqslant \varphi_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi_2 < 2\pi$). Наиболее приспособленным для теории представлений является так называемое инвариантное интегрирование. Инвариантный интеграл для функции $f(g) \equiv f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ есть интеграл *)

$$\int f(g)\, dg = \int f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\, I(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2$$

по φ_1, θ, φ_2 с «весовым множителем» $I(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, выбранным так, чтобы выполнялось равенство

$$\int f(gg_0)\, dg = \int f(g)\, dg. \quad (10)$$

Таким образом, инвариантный интеграл функции $f(g)$ не изменится, если заменить аргумент g на gg_0, т. е. «сдвинуть» функцию $f(g)$.

---

*) Мы будем иногда писать:

$$dg \equiv I\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2.$$

Можно было бы доказать, что весовой множитель определяется условием инвариантности (10) однозначно с точностью до постоянного множителя. Этот множитель мы выберем из условия, чтобы интеграл функции $f(g)\equiv 1$ равнялся 1, т. е.

$$\int dg = 1.$$

Вместо углов Эйлера мы могли бы при определении инвариантного интегрирования рассмотреть любые параметры, определяющие вращение. Однако углы Эйлера удобнее всего для определения инвариантного интегрирования, т. е. «весового множителя».

Рассмотрим вращение g, задаваемое углами φ_1, θ, φ_2. Обозначим через P точку на единичной сфере, которая в результате этого вращения переходит в северный полюс сферы (т. е. в точку пересечения с осью Oz). Через Q обозначим точку на этой же сфере, которая после вращения g попадает на ось Ox. Ясно, что вращение g полностью определяется заданием точек P и Q. При этом точка P может быть произвольной, а точка Q лежит на большом круге, плоскость которого перпендикулярна к радиусу OP.

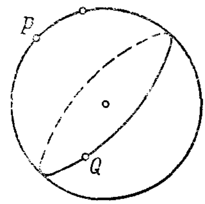

Рис. 2.

Элементы третьей строки матрицы (9) представляют собой декартовы координаты точки P. Отсюда видно, что ее сферические координаты равны $\frac{\pi}{2}-\varphi_1$ и θ.

Если g_0 — какое-нибудь другое вращение и $\tilde{g}=gg_0$, то точки $\tilde{P}$ и $\tilde{Q}$, отвечающие вращению $\tilde{g}$, получаются из точек P и Q поворотом g_0^{-1}.

Покажем, что инвариантное интегрирование задается формулой

$$\int f(g)\,dg = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\sin\theta\,d\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_2,$$

т. е. покажем, что при таком определении интеграла

$$\int f(g)\,dg = \int f(gg_0)\,dg.$$

Обозначим через $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}_2$ эйлеровы углы вращения $\tilde{g}$. Покажем, что имеет место формула

$$\sin\theta\,d\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_2 = \sin\tilde{\theta}\,d\tilde{\varphi}_1\,d\tilde{\theta}\,d\tilde{\varphi}_2,$$

или символически

$$dg = d\tilde{g}.$$

Выражение $\sin\theta\,d\varphi_1\,d\theta\,d\varphi_2$ имеет простой геометрический смысл. Действительно, $\sin\theta\,d\varphi_1\,d\theta$ есть элемент площади поверхности единичной сферы в точке P. Что касается $d\varphi_2$, то это есть элемент дуги большого круга, на котором лежит Q. В самом деле, если изменить угол φ_2 на $d\varphi_2$ при неизменных φ_1 и θ (т. е. фиксированном положении точки P), то это сведется к дополнительному повороту на $d\varphi_2$ вокруг точки P, т. е. сдвигу точки Q на $d\varphi_2$. Как было указано выше, замена g на $\tilde{g}=gg_0$ сводится к повороту пары P, Q с помощью g_0. Но при вращении ни элемент площади, ни элемент дуги не меняются, поэтому мы имеем:

$$\sin\theta\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2=\sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\varphi}_1\, d\tilde{\theta}\, d\tilde{\varphi}_2.$$

Нам надо доказать равенство

$$\int f(\tilde{g})\, dg=\int f(g)\, dg,$$

или, что все равно, равенство

$$\int f(\tilde{g})\, dg=\int f(\tilde{g})\, d\tilde{g}.$$

Но последнее вытекает из того, что по доказанному $d\tilde{g}=dg$.

Если мы введем дополнительное требование нормировки, т. е потребуем, чтобы $\int 1\, dg=1$, то, так как $\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\sin\theta\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2=$ $=8\pi^2$, нужно положить:

$$\int f(g)\, dg=\frac{1}{8\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)\sin\theta\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2. \qquad (11)$$

4. Связь группы вращений с группой унитарных матриц второго порядка. В этом пункте мы покажем, что вращения трехмерного пространства можно описывать комплексными матрицами второго порядка. Для этого рассмотрим стереографическую проекцию сферы на плоскость, состоящую, как известно, в том, что каждой точке P сферы относится точка M в плоскости, лежащая на луче $O'P$ (O' — северный полюс). Каждое вращение трехмерного пространства вокруг центра сферы переводит друг в друга точки сферы и порождает тем самым некоторое преобразование в плоскости. Нашей задачей сейчас будет более подробное рассмотрение таких преобразований.

Будем рассматривать сферу диаметра 1. Из сравнения подобных треугольников (рис. 3) легко получается связь между координатами x, y, z точки P сферы и координатами ξ, η точки M плоскости: $\xi=\dfrac{x}{\frac{1}{2}-z}$, $\quad\eta=\dfrac{y}{\frac{1}{2}-z}$. Удобно ввести комплексное переменное $\zeta=\xi+i\eta$. Тогда

$$\zeta=\xi+i\eta=\frac{x+iy}{\frac{1}{2}-z}. \tag{12}$$

Так как на сфере $x^2+y^2=\frac{1}{4}-z^2$, то можно также написать:

$$\zeta=\frac{x^2+y^2}{\left(\frac{1}{2}-z\right)(x-iy)}=\frac{\frac{1}{2}+z}{x-iy}. \tag{12'}$$

Найдем преобразование плоскости, отвечающее вращению на угол φ вокруг оси Oz. Мы имеем:

$$x'=x\cos\varphi-y\sin\varphi,$$
$$y'=x\sin\varphi+y\cos\varphi,$$
$$z'=z.$$

Отсюда

$$\zeta'=\frac{x'+iy'}{\frac{1}{2}-z}=\frac{e^{i\varphi}(x+iy)}{\frac{1}{2}-z}=e^{i\varphi}\zeta,$$

т. е. такому вращению отвечает преобразование плоскости

$$\zeta'=e^{i\varphi}\zeta. \tag{13}$$

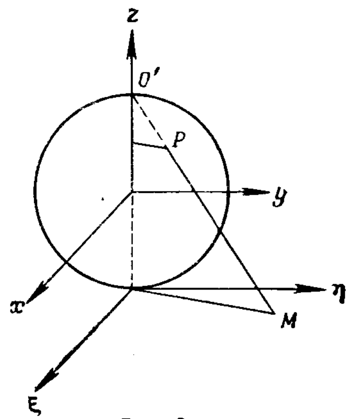

Рис. 3.

Рассмотрим теперь вращение на угол θ вокруг оси Ox. Аналогично предыдущему при таком вращении выражение

$$w=\frac{y+iz}{\frac{1}{2}-x}$$

умножается на $e^{i\theta}$, т. е.

$$w'=e^{i\theta}w. \tag{14}$$

Нам осталось выразить w через ζ (и соответственно w' через ζ'). Рассмотрим выражение

$$\frac{w+i}{w-1}=\frac{\dfrac{y+iz}{\frac{1}{2}-x}+i}{\dfrac{y+iz}{\frac{1}{2}-x}-i}=\frac{-(x+iy)+\left(\frac{1}{2}+z\right)}{(x-iy)-\left(\frac{1}{2}-z\right)}.$$

Воспользовавшись формулами (12) и (12′), получим

$$\frac{w+i}{w-i}=\frac{-\zeta\left(\frac{1}{2}-z\right)+\left(\frac{1}{2}+z\right)}{\frac{1}{\zeta}\left(\frac{1}{2}+z\right)-\left(\frac{1}{2}-z\right)}=\zeta$$

и аналогично

$$\frac{w'+i}{w'-i}=\zeta'.$$

Отсюда, выражая w и w' через ζ и ζ' и подставляя в формулу (14), находим, что

$$\frac{\zeta'+1}{\zeta'-1}=e^{i\theta}\frac{\zeta+1}{\zeta-1}.$$

Решая это уравнение относительно ζ', мы получаем преобразование, отвечающее вращению на угол θ вокруг оси Ox:

$$\zeta'=\frac{\zeta(e^{i\theta}+1)+(e^{i\theta}-1)}{\zeta(e^{i\theta}-1)+(e^{i\theta}+1)}=\frac{\zeta\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{i\zeta\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}}. \tag{15}$$

Мы видим, таким образом, что вращениям вокруг осей Ox и Oz отвечают дробно-линейные преобразования в плоскости ζ. Ясно, кроме того, что произведению вращений отвечает произведение преобразований в плоскости. Так как всякое вращение можно получить как произведение вращений вокруг Oz и Ox (см. п. 2), то и всякому вращению отвечает произведение преобразований вида (13) и (15), т. е. дробно-линейное преобразование

$$\zeta'=\frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}. \tag{16}$$

Дробно-линейное преобразование (16) однозначно определяется комплексной матрицей второго порядка

$$\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Так как ζ' из формулы (16) не меняется при умножении числителя и знаменателя правой части на одно и то же число, то, умножив α, β, γ, δ на $\pm\frac{1}{\sqrt{\alpha\delta-\beta\gamma}}$, мы можем считать определитель матрицы (17) равным 1 *).

Таким образом, каждому вращению отвечает определенная с точностью до знака матрица вида (17), для которой $\alpha\delta-\beta\gamma=1$. Напи-

*) Этим условием коэффициенты дробно-линейного преобразования определены с точностью до знака. О знаке более подробно см. ниже.

шем, в частности, матрицы, отвечающие вращениям g_φ и g_θ вокруг осей Oz и Ox. Вращению g_θ отвечает матрица

$$g_\theta \sim \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Вращению g_φ отвечает преобразование $\zeta' = e^{i\varphi}\zeta$. Записав его в виде $\zeta' = \dfrac{e^{i\frac{\varphi}{2}}\zeta}{e^{-i\frac{\varphi}{2}}}$, мы получим матрицу преобразования

$$g_\varphi \sim \begin{Vmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{Vmatrix} \tag{19}$$

с определителем, равным единице.

Вращение g с эйлеровскими углами φ_1, θ, φ_2 может быть записано как произведение вращений $g = g_{\varphi_2} g_\theta g_{\varphi_1}$. Так как при последовательном осуществлении дробно-линейных преобразований их матрицы перемножаются в обратном порядке, то преобразованию g отвечает матрица

$$g \sim \begin{Vmatrix} e^{i\frac{\varphi_1}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_1}{2}} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} e^{i\frac{\varphi_2}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi_2}{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} & i\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} \\ i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \end{Vmatrix}. \tag{20}$$

Матрицы (18) и (19) являются унитарными матрицами с детерминантом 1. Поэтому и их произведение — матрица (20), отвечающая произвольному вращению, также унитарна и имеет детерминант, равный 1.

Покажем теперь, что, обратно, всякой унитарной матрице с детерминантом, равным 1, отвечает некоторое вращение. Из условий унитарности

$$\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta} = 0, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1, \quad \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} = 1$$

и равенства $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$ легко вывести, что $\delta = \bar{\alpha}$, $\gamma = -\bar{\beta}$. Поэтому произвольная матрица рассматриваемого типа может быть представлена в виде

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{Vmatrix}, \tag{21}$$

где

$$|\alpha|^2+|\beta|^2=1. \tag{21'}$$

Ясно, что матрицу (21) при условии (21′) можно представить в виде (20), если положить

$$\cos\frac{\theta}{2}=|\alpha|, \quad \sin\frac{\theta}{2}=|\beta|\ ^{*)},$$

а углы φ_1 и φ_2 определить из уравнений

$$\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}=\arg\alpha,$$

$$-\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}+\frac{\pi}{2}=\arg\beta.$$

Таким образом, каждое вращение можно задавать двумя комплексными числами, удовлетворяющими условию (21′), или, что то же, четырьмя вещественными числами, сумма квадратов которых равна 1.

Итак, мы показали, что *всякой унитарной матрице второго порядка с детерминантом* 1 *отвечает вращение в трехмерном пространстве. Обратно*, как было показано раньше, *всякому вращению отвечают две такие матрицы, отличающиеся знаком.*

Установленное ранее соответствие между вращениями и дробно-линейными преобразованиями однозначно. С другой стороны, мы видели, что каждое дробно-линейное преобразование может быть записано с помощью двух матриц с детерминантом, равным 1. Таким образом, каждому вращению отвечают две матрицы вида (21). Не следует думать, что мы можем сколько-нибудь естественно избавиться от двузначности этого соответствия, выбрав определенным образом знак. Рассмотрим, например, вращение на угол φ вокруг оси Oz. Ему отвечает матрица

$$\begin{Vmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{Vmatrix}.$$

В частности, единичному вращению ($\varphi=2k\pi$) отвечают две матрицы

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Если бы мы сопоставили этому вращению лишь матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*) Напомним, что $0\leqslant\theta\leqslant\pi$.

то, изменяя угол φ непрерывно от 0 до 2π, мы пришли бы при $\varphi = 2\pi$ к матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если мы не хотим нарушать непрерывности, мы должны считать, что единичному вращению отвечают обе матрицы (22).

Выпишем мартицу вращения g через комплексные параметры α, β.

$$\|g_{ik}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + \bar{\alpha}^2 - \bar{\beta}^2) & \frac{i}{2}(-\alpha^2 - \beta^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) & -\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta} \\ \frac{i}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) & \frac{i}{2}(\alpha^2 + \beta^2 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2) & -i(\alpha\beta - \bar{\alpha}\bar{\beta}) \\ \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta & i(-\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta) & \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} \end{matrix} \right\|. \tag{23}$$

Для доказательства этой формулы подставим сюда вместо α и β элементы матрицы (20). После несложных преобразований мы придем к выражению (9) матрицы вращения через углы Эйлера.

Если положить $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\beta = \beta_1 + i\beta_2$, то в силу условия $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ мы можем также считать, что на группу вращений трехмерного пространства отображена сфера

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1 \tag{24}$$

четырехмерного пространства. При этом двум диаметрально противоположным точкам сферы отвечает одно и то же вращение.

5. Определение представлений группы вращений. В этом пункте будут даны основные определения, используемые дальше. Мы будем говорить, что нам задано конечномерное представление $g \to T_g$ группы, если каждому элементу g группы отвечает линейное преобразование T_g в некотором линейном пространстве R *) так, что при этом произведению элементов группы отвечает произведение преобразований и единице группы e — единичное преобразование, т. е.

$$T_{g_1} T_{g_2} = T_{g_1 g_2} \tag{25}$$

и

$$T_e = E. \tag{26}$$

Так как в конечномерном пространстве каждое линейное преобразование можно задать матрицей, то конечномерные представления можно также определить, ставя в соответствие каждому элементу g матрицу T_g так, что при этом выполнены соотношения (25) и (26).

Представление $g \to T_g$ группы вращений называется непрерывным, если элементы матрицы T_g зависят от g непрерывно. В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные представления. Тривиальным примером представления группы является соответствие, при

*) Элементы пространства R мы будем в дальнейшем называть также величинами, преобразующимися при представлении $g \to T_g$.

котором каждому элементу отвечает единичная матрица. Такое представление группы вращений называется *единичным*. Другим примером представления группы вращений является так называемое *основное* представление группы. Оно состоит в том, что каждому вращению g ставится в соответствие его матрица в каком-нибудь базисе.

Подпространство R_1 пространства R (в котором действуют линейные преобразования T_g) называется *инвариантным относительно представления* $g \to T_g$, если R_1 инвариантно относительно всех преобразований T_g.

Если в пространстве R не существует подпространств*), инвариантных относительно представления $g \to T_g$, то представление называется *неприводимым*. Мы увидим несколько позже, что изучение любого представления группы вращений сводится к изучению неприводимых представлений. Эти последние будут классифицированы в § 2, а сами матрицы T_g неприводимых представлений будут выписаны в § 7. Различные реализации представлений группы вращений (т. е. различные реализации пространства R и преобразований T_g) будут изучены в §§ 3, 5, 6, 8.

Представление $g \to T_g$ называется *унитарным*, если в комплексном пространстве R определено скалярное произведение и все преобразования T_g унитарны относительно этого скалярного произведения. Докажем, что *каждое представление группы вращений можно считать унитарным, т. е. можно так ввести скалярное произведение, что T_g будут унитарными линейными преобразованиями*. Для этого рассмотрим в R какое-либо скалярное произведение (ξ, η), где ξ, η — элементы из R. Вообще говоря, T_g не будут унитарными относительно этого скалярного произведения, т. е. $(T_g\xi, T_g\eta)$ может быть отлично от (ξ, η). «Усредним» функцию $(T_g\xi, T_g\eta)$ по группе, т. е. рассмотрим выражение

$$\int (T_g\xi, T_g\eta)\, dg,$$

где под интегрированием понимается инвариантное интегрирование, определенное в п. 3.

Зададим теперь новое скалярное произведение формулой

$$(\xi, \eta)_1 = \int (T_g\xi, T_g\eta)\, dg.$$

Покажем, что $(\xi, \eta)_1$ обладает всеми свойствами скалярного произведения. Действительно,

$$(\xi_1 + \xi_2, \eta)_1 = \int (T_g(\xi_1 + \xi_2), T_g\eta)\, dg =$$
$$= \int (T_g\xi_1, T_g\eta)\, dg + \int (T_g\xi_2, T_g\eta)\, dg = (\xi_1, \eta)_1 + (\xi_2, \eta)_1.$$

*) Исключая, конечно, все пространство R и нулевое подпространство, являющиеся формально инвариантными подпространствами при любом представлении.

Аналогично показывается, что $(\xi, \eta)_1 = (\eta, \xi)_1$ и что $(\lambda\xi, \eta)_1 = \lambda(\xi, \eta)_1$. Далее, $(\xi, \xi)_1 = \int (T_g\xi, T_g\xi)\, dg > 0$, так как $(T_g\xi, T_g\xi) > 0$, если $\xi \neq 0$. Покажем, что относительно скалярного произведения (ξ, η) преобразования T_g унитарны, т. е. что $(T_{g_0}\xi, T_{g_0}\eta)_1 = (\xi, \eta)_1$. Пусть $T_{g_0}\xi = \xi'$ и $T_{g_0}\eta = \eta'$,

$$(T_{g_0}\xi, T_{g_0}\eta)_1 = (\xi', \eta')_1 = \int (T_g\xi', T_g\eta')\, dg =$$

$$= \int (T_g T_{g_0}\xi, T_g T_{g_0}\eta)\, dg = \int (T_{gg_0}\xi, T_{gg_0}\eta)\, dg.$$

Далее, в силу инвариантности интегрирования $\left(\text{равенства} \int f(gg_0)\, dg = \right.$ $\left. = \int f(g)\, dg\right)$ имеем:

$$\int (T_{gg_0}\xi, T_{gg_0}\eta)\, dg = \int (T_g\xi, T_g\eta)\, dg = (\xi, \eta)_1,$$

и, значит, окончательно

$$(T_{g_0}\xi, T_{g_0}\eta)_1 = (\xi, \eta)_1.$$

Итак, мы показали, что относительно скалярного произведения $(\xi, \eta)_1$ представление $g \to T_g$ унитарно.

Изучение унитарных представлений группы можно свести к изучению неприводимых унитарных представлений. Действительно, рассмотрим унитарное представление $g \to T_g$. Если в R не существует инвариантных подпространств, то представление неприводимо. Если же в R имеется инвариантное подпространство R_1, то совокупность векторов, ортогональных ко всем векторам R_1, образует также инвариантное подпространство. Все пространство R разлагается таким образом в прямую сумму двух взаимно ортогональных подпространств R_1 и R_2. Если в R_1 или в R_2 представление приводимо, то мы проводим разложение дальше, пока мы не придем к неприводимым представлениям.

До сих пор мы рассматривали конечномерные представления группы вращений. Однако уже в первой части этой книги мы встретимся (например, в § 3, п. 5, § 7, п. 2) также с бесконечномерными унитарными представлениями. Мы говорим, что нам задано бесконечномерное унитарное представление, если каждому элементу g отвечает унитарное преобразование T_g в гильбертовом (бесконечномерном евклидовом) пространстве так, что при этом выполнены условия (25) и (26). Представление называется непрерывным, если для всяких векторов ξ и η $(T_g\xi, \eta)$ есть непрерывная функция от g.

Теорема о разложении представления на неприводимые имеет место и для бесконечномерных представлений группы вращений. Мы сформулируем ее без доказательства. *Пусть задано унитарное* *представление $g \to T_g$ группы вращений в гильбертовом пространстве R. Тогда существуют конечномерные подпространства $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$, инвариантные относительно T_g, в каждом из которых представление T_g неприводимо. Эти подпространства R_i попарно ортогональны, и сумма R_i есть все пространство R. Это значит, что каждый вектор ξ из R можно разложить в сходящийся ряд* *)

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots,$$

где векторы ξ_i принадлежат инвариантным подпространствам R_i.

§ 2. Бесконечно малые повороты и отыскание неприводимых представлений группы вращений

В этом параграфе мы опишем все представления группы вращений. Мы уже знаем, что для группы вращений всякое представление эквивалентно унитарному, и поэтому мы можем ограничиться определением унитарных представлений этой группы.

Сначала будет найден вид всех неприводимых представлений, а затем показано, как произвольное представление разлагается на неприводимые.

1. Определение матриц A_k, отвечающих бесконечно малым поворотам. Пусть нам задано унитарное представление группы вращений G. Это, как мы знаем, означает, что каждому вращению g отвечает некоторая унитарная матрица $T_g = \|a_{ik}(g)\|$ так, что при этом произведению вращений g_1 и g_2 отвечает произведение матриц T_{g_1} и T_{g_2}, т. е.

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}. \qquad (1)$$

В частности, единичному вращению $g = e$ отвечает единичная матрица E.

В качестве параметров, определяющих вращение g, возьмем координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3 вектора, направленного вдоль оси вращения, длина которого равна углу поворота (эти параметры были введены в п. 2 предыдущего параграфа). Тогда матрица T_g будет функцией этих же параметров, т. е. $T_g = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Можно доказать, что T_g имеет производные любого порядка по ξ_1, ξ_2, ξ_3 **). Так как вектору

---

*) Ряд $\xi_1 + \ldots + \xi_n \ldots$ называется сходящимся к ξ, если $S_n = \xi_1 + \ldots \ldots + \xi_n$ стремится к ξ, т. е.

$$(\xi - S_n, \xi - S_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

**) Доказательство см. в добавлении к этому параграфу. Напомним, что зависимость матрицы от каких-либо переменных и дифференцируемость ее по этим переменным означает, что элементы этой матрицы являются функциями соответствующих переменных и дифференцируемы по ним.

$\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ отвечает вращение на нулевой угол, т. е. единичное вращение, то

$$T(0, 0, 0)=E. \tag{2}$$

Разложим $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ около значений $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ по формуле Тэйлора. Тогда

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)=E+A_1\xi_1+A_2\xi_2+A_3\xi_3+\ldots, \tag{3}$$

где E — единичная матрица, а A_1, A_2, A_3 — постоянные матрицы, являющиеся частными производными матрицы $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ при $\xi_1=\xi_2=\xi_3=0$ по ξ_1, ξ_2, ξ_3 соответственно. Многоточие означает, что мы не написали остаточного члена формулы Тэйлора, который является малой выше первого порядка по сравнению с $\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$.

Мы покажем, что матрицами A_1, A_2, A_3 представление, т. е. функция $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, вполне определяется, а затем найдем возможные тройки A_1, A_2, A_3.

Матрицы A_1, A_2, A_3 имеют простой смысл. Чтобы выяснить это, рассмотрим поворот на угол ξ_1 вокруг оси Ox. В представлении ему отвечает матрица

$$T(\xi_1, 0, 0)=E+A_1\xi_1+\ldots$$

Из этой формулы видно, что матрица $T(\xi_1, 0, 0)$, отвечающая повороту на бесконечно малый угол ξ_1 вокруг оси Ox, определяется с точностью до малых высшего порядка матрицей A_1. Матрицы A_1, A_2, A_3 мы назовем *матрицами, отвечающими бесконечно малым поворотам вокруг осей координат.*

Покажем теперь, что матрицы A_k определяют представление, т. е. что, зная лишь эти три матрицы, мы можем найти $T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ для произвольных ξ_1, ξ_2, ξ_3. Для этого возьмем произвольный вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) и рассмотрим два вращения вокруг этого вектора: $g(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$ и $g(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3)$ *). Произведение этих двух вращений есть, очевидно, поворот вокруг той же оси, определяемый параметрами $(t+s)\xi_1$, $(t+s)\xi_2$, $(t+s)\xi_3$:

$$g((t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3)=g(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)\,g(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3). \tag{4}$$

Так как при представлении произведение переходит в произведение, то мы имеем также

$$T((t+s)\xi_1, (t+s)\xi_2, (t+s)\xi_3)=T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)\,T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3). \tag{4'}$$

Продифференцируем обе части равенства (4′) по s и положим $s=0$. Мы получим:

$$\frac{d}{dt}T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)=\frac{d}{ds}T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3)\Big|_{s=0}\cdot T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3).$$

---

*) Они являются поворотами на углы $t\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$ и $s\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}$ соответственно.

Но в силу формулы (3)

$$\frac{d}{ds} T(s\xi_1, s\xi_2, s\xi_3)\Big|_{s=0} = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3.$$

Отсюда для матрицы $X(t) = T(t\xi_1, t\xi_2, t\xi_3)$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} X(t) = (A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)\, X(t)\ ^{*)}. \tag{5}$$

Кроме того, должно выполняться начальное условие

$$X(0) = T(0, 0, 0) = E. \tag{5'}$$

В силу теоремы единственности для системы дифференциальных уравнений уравнение (5) и начальное условие (5′) определяют $X(t)$ единственным образом. В частности, однозначно определена и $X(1) = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Мы доказали, таким образом, что *представление однозначно определяется заданием матриц A_1, A_2, A_3, отвечающих бесконечно малым поворотам.*

Уравнение (5) можно решить в явном виде. Его решение, удовлетворяющее начальному условию (5′), выглядит так:

$$X(t) = e^{t(A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3)}\ ^{**)}.$$

В частности,

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = e^{A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3}. \tag{6}$$

Таким образом, *если матрицы A_1, A_2 и A_3, соответствуют при представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, то матрицы $T_g = T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, дающие это представление, определяются по A_k формулой* (6).

2. Соотношения между матрицами A_k. Выясним теперь, какими можно задать матрицы A_1, A_2, A_3, чтобы матрицы T_g, определенные формулой (6), могли действительно давать унитарное представление группы вращений. С этой целью мы выведем уравнения, которым должны удовлетворять матрицы, соответствующие при представлении бесконечно малым поворотам, и затем в п. 3 решим эти уравнения.

Пусть g_0 — определенное вращение, а g — произвольное. Рассмотрим вращение

$$\tilde{g}_0 = g g_0 g^{-1}.$$

Матрицы вращений $\tilde{g}_0$ и g_0 получаются друг из друга подобным преобразованием. Это значит, что оба эти вращения представляют собой

---

*) Равенство (5) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений, которая получится, если приравнять соответствующие элементы матриц, стоящих в левой и правой частях.

**) См. добавление к § 2.

поворот на один и тот же угол φ каждый вокруг своей оси. Если вращение g_0 определяется вектором $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, то $\tilde{g}_0$ определяется вектором $\tilde{\eta}$, в который переходит η под действием g:

$$\tilde{\eta} = g\eta.$$

Действительно, вектор η не меняется при вращении g_0, т. е. $g_0\eta = \eta$. Отсюда $\tilde{g}_0\tilde{\eta} = gg_0g_{-1}\tilde{\eta} = \tilde{\eta}$. Последнее равенство означает, что $\tilde{\eta}$ не меняется при вращении $\tilde{g}_0$, т. е. лежит на оси вращения. Так как абсолютная величина вектора η, равная углу поворота, не меняется при вращении g, то $|\tilde{\eta}| = |\eta|$ и $\tilde{\eta}$ есть вектор, определяющий вращение $\tilde{g}_0$.

Так как при представлении произведению вращений отвечает произведение матриц T_g, то из равенства $\tilde{g}_0 = gg_0g^{-1}$ мы получаем:

$$T_g T_{g_0} T_{g^{-1}} = T_{\tilde{g}_0}. \tag{7}$$

Из этой формулы выведем теперь соотношения между матрицами A_1, A_2, и A_3. Для этого предположим, что вращение g_0, а следовательно, и $\tilde{g}_0$ мало, т. е. η и $\tilde{\eta}$ — малые векторы, и представим T_{g_0} и $T_{\tilde{g}_0}$ по формуле (3):

$$T_{g_0} = E + A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + \ldots,$$
$$T_{\tilde{g}_0} = E + A_1\tilde{\eta}_1 + A_2\tilde{\eta}_2 + A_3\tilde{\eta}_3 + \ldots$$

Подставив это соотношение в формулу (7), мы получим:

$$T_g(E + A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3 + \ldots)\,T_{g-1} = \\ = E + A_1\tilde{\eta}_1 + A_2\tilde{\eta}_2 + A_3\tilde{\eta}_3 + \ldots \tag{8}$$

Поставим каждому малому вектору η в соответствие преобразование $A_\eta = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3$, определяющее с точностью до малых высшего порядка поворот, задаваемый этим вектором. Тогда, сравнивая члены первого порядка в соотношении (8), мы получаем формулу

$$T_g A_\eta T_{g-1} = A_{\tilde{\eta}}, \tag{9}$$

где $\tilde{\eta} = g\eta$.

Так как при умножении вектора η на число матрицы A_η и $A_{\tilde{\eta}}$ умножаются на то же число, то очевидно, что после вывода формулы (9) мы можем отбросить предположение о малости вектора η.

Для того чтобы из (9) получить соотношения между A_1, A_2 и A_3, предположим теперь, что вращение g есть поворот на малый угол α вокруг оси Ox, а вектор η — единичный вектор, направленный вдоль оси Oy: $\eta = (0, 1, 0)$. Тогда $\tilde{\eta}$ — вектор, полученный из η вращением g, т. е. единичный вектор, лежащий в плоскости yOz под углом α к оси Oy. Компоненты вектора будут, следовательно, с точностью до малых выше первого порядка относительно α иметь вид

$$\tilde{\eta}_1 = 0,$$
$$\tilde{\eta}_2 = 1,$$
$$\tilde{\eta}_3 = \alpha.$$

Таким образом, подставляя T_g по формуле (3), где $\xi_1 = \alpha$, а $\xi_2 = \xi_3 = 0$, имеем:

$$T_g = E_1 + A_1\alpha + \ldots, \quad T_{g^{-1}} = E_1 - A_1\alpha + \ldots,$$
$$A_\eta = A_2,$$
$$A_{\tilde{\eta}} = A_2 + \alpha A_3.$$

Подставляя эти выражения в формулу (9) и сравнивая члены первой степени относительно α, получаем формулу

$$A_1A_2 - A_2A_1 = A_3.$$

Выражение $AB - BA$ называется *коммутатором* матриц A и B и обозначается $[A, B]$: $AB - BA = [A, B]$. Полученное соотношение можно, следовательно, записать в виде

$$[A_1, A_2] = A_3.$$

Аналогичным образом можно получить два других соотношения:

$$[A_2, A_3] = A_1, \quad [A_3, A_1] = A_2.$$

Тем самым показано, что *если $g \to T_g$ — произвольное представление группы вращений, то матрицы A_1, A_2 и A_3, отвечающие при этом представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, удовлетворяют соотношениям*

$$\left.\begin{aligned} [A_1, A_2] &= A_3, \\ [A_2, A_3] &= A_1, \\ [A_3, A_1] &= A_2. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Эти соотношения мы будем в дальнейшем называть *соотношениями коммутации.*

Формулы (10) показывают, что если заменить матрицы A_1, A_2 и A_3 координатными ортами трехмерного пространства, то соотношения коммутации для этих матриц в точности совпадут с формулами для векторного произведения базисных векторов. Определим по заданным A_1, A_2 и A_3 линейное пространство матриц A_ξ вида $A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$, где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — произвольный вектор. Тогда из формул легко вывести соотношение, выражающее коммутатор двух матриц из этого пространства снова как линейную комбинацию матриц A_k, т. е. как элемент того же пространства. В самом деле, из (10) следует, что

$$[A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3,\ A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3] =$$
$$= A_3(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + A_1(\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2) + A_2(\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3).$$

Введя вектор ζ, равный векторному произведению ξ и η: $\zeta = [\xi, \eta]$, мы можем, таким образом, сформулировать следующее утверждение: *если матрицы A_1, A_2 и A_3 отвечают при некотором представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, то для любых двух матриц вида $A_\xi = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3$ и $A_\eta = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3$ имеет место равенство*

$$[A_\xi,\ A_\eta] = A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + A_3\zeta_3 = A_\zeta,$$

где вектор $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ есть векторное произведение векторов ξ и η.

При выводе уравнений (10) мы не пользовались тем, что представление T_g унитарно. Выясним, какие требования на A_k накладывает унитарность представления. Полагая в формуле (3) $\xi_2 = \xi_3 = 0$, мы получим:

$$T(\xi_1,\ 0,\ 0) = E + \xi_1 A_1 + \ldots \tag{3'}$$

Так как матрицы T унитарны, то

$$T^*(\xi_1,\ 0,\ 0)\,T(\xi_1,\ 0,\ 0) = E.$$

Подставляя сюда вместо T его значение из (3′), мы получим:

$$(E + \xi_1 A_1^* + \ldots)\ (E + \xi_1 A_1 + \ldots) = E.$$

Сравнивая коэффициенты при первой степени ξ, мы видим, что $A_1 + A_1^* = 0$, т. е. $A_1^* = -A_1$ *).

Полагая $H_1 = iA_1$, имеем:

$$H_1^* = H_1,$$

т. е. H_1 — эрмитова матрица. Аналогично (полагая $H_k = iA_k$) вводим эрмитовы матрицы H_2 и H_1 **). Из соотношений коммутации (10) следуют аналогичные соотношения для H_1, H_2, H_3:

$$\left.\begin{aligned} [H_1,\ H_2] &= iH_3, \\ [H_2,\ H_3] &= iH_1, \\ [H_3,\ H_1] &= iH_2. \end{aligned}\right\} \tag{10'}$$

*) То обстоятельство, что операторы A_k задаются в некотором базисе косоэрмитовыми матрицами, является следствием соотношений коммутации между ними и может быть установлено непосредственно. Эту несколько громоздкую проверку мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

**) Заметим, что, обратно, из эрмитовости H_k в силу формулы (6)

$$T_g = e^{i(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3)}$$

следует унитарность T_g.

Итак, задача отыскания всех возможных представлений группы вращений сведена нами к следующим двум задачам:

1) *найти всевозможные тройки эрмитовых матриц* H_k, *для которых имеют место перестановочные соотношения* (10′),

2) *отобрать среди этих троек те, которые действительно порождены некоторым представлением группы вращений.*

Вторая задача решается двумя различными способами в §§ 6 и 7. Из результатов этих параграфов следует, что *любые* три косоэрмитовы матрицы, удовлетворяющие соотношениям (10), являются матрицами бесконечно малых поворотов вокруг осей координат при некотором представлении группы вращений. *Таким образом, мы приходим к выводу, что по любым трем эрмитовым матрицам, удовлетворяющим соотношениям* (10′), *можно с помощью формулы*

$$T_g = e^{i\,(H_1\xi_1 + H_2\xi_2 + H_3\xi_3)}$$

построить представление группы вращений.

3. Вид неприводимого представления. Вместо определения матриц H_1, H_2, H_3 нам удобнее будет искать их линейные комбинации

$$H_+ = H_1 + iH_2,$$
$$H_- = H_1 - iH_2,$$
$$H_3 = H_3.$$

Легко подсчитать, чему должны равняться коммутаторы этих трех матриц:

$$[H_+,\ H_3] = [H_1 + iH_2,\ H_3] = [H_1,\ H_3] + i\,[H_2,\ H_3] = \\ = -\,iH_2 - H_1 = -\,H_+.$$

Аналогично вычислим $[H_-,\ H_3]$ и $[H_+,\ H_-]$. В результате получим формулы

$$\left.\begin{aligned} [H_+,\ H_3] &= -H_+, \\ [H_-,\ H_3] &= H_-, \\ [H_+,\ H_-] &= 2H_3. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Кроме того, имеем:

$$H_+^* = (H_1 + iH_2)^* = H_1 - iH_2 = H_-. \tag{12}$$

Итак, задача сведена к определению матриц H_+, H_- и H_3, удовлетворяющих условиям (11) и (12). Мы вычислим эти матрицы в базисе, состоящем из собственных векторов матрицы H_3. В этом базисе матрицы H_+, H_-, H_3 выглядят наиболее просто. Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма. *Пусть f — собственный вектор преобразования H_3, соответствующий собственному значению λ:*

$$H_3 f = \lambda f.$$

Тогда вектор $f_1 = H_+ f$ *либо равен нулю, либо также есть собственный вектор* H_3, *соответствующий собственному значению* $\lambda + 1$. *Аналогично вектор* $f_2 = H_- f$ — *или нуль, или собственный вектор* H_3, *соответствующий собственному значению* $\lambda - 1$.

В самом деле,

$$H_3 f_1 = H_3 H_+ f = [H_3, H_+] f + H_+ H_3 f = \\ = H_+ f + H_+ \lambda f = (\lambda + 1) H_+ f = (\lambda + 1) f_1.$$

Аналогично получим, что $H_3 f_2 = (\lambda - 1) f_2$.

Перейдем к определению матриц H_+, H_-, H_3.

Так как H_3 — эрмитова матрица, то ее собственные значения действительны. Обозначим через l наибольшее собственное значение матрицы H_3 и через f_l — какой-нибудь отвечающий ему нормированный собственный вектор:

$$H_3 f_l = l f_l, \quad (f_l, f_l) = 1.$$

Если $H_- f_l \neq 0$, то положим:

$$H_- f_l = \alpha_l f_{l-1},$$

где число $\alpha_l > 0$ подберем так, чтобы имело место равенство $(f_{l-1}, f_{l-1}) = 1$. В силу леммы f_{l-1} есть нормированный собственный вектор H_3, отвечающий собственному значению $l - 1$. Если $H_- f_{l-1} \neq 0$, то аналогично вводим f_{l-2}, положив

$$H_- f_{l-1} = \alpha_{l-1} f_{l-2}, \quad \text{где} \quad \alpha_{l-1} > 0 \text{ и } (f_{l-2}, f_{l-2}) = 1.$$

Продолжая этот процесс, вводим:

$$H_- f_{l-2} = \alpha_{l-2} f_{l-3}$$

и т. д.

Согласно лемме построенные векторы $f_l, f_{l-1}, \ldots$ являются собственными векторами матрицы H_3, отвечающими собственным значениям $l, l-1, \ldots$ Так как матрица H_3 имеет лишь конечное число различных собственных значений, то для некоторого k последовательность векторов $f_l, f_{l-1}, f_{l-2}, \ldots$ оборвется, т. е. для какого-то k мы получим $H_- f_k = 0$.

Мы получили, таким образом, систему попарно ортогональных нормированных собственных векторов преобразования H_3:

$$H_3 f_m = m f_m. \tag{13}$$

Кроме того, мы имеем:

$$H_- f_m = \alpha_m f_{m-1}. \tag{14}$$

Для того чтобы формула (14) имела место и для последнего из построенных векторов (при $m = k$), положим $\alpha_k = 0$.

Выясним теперь, как действует на векторы f_m преобразование H_+. Во-первых, в силу леммы $H_+ f_m$ есть либо нуль, либо собственный вектор H_3, отвечающий собственному значению $m + 1$. Так как

l — наибольшее собственное значение H_3, то

$$H_+f_l=0.$$

Найдем H_+f_{l-1}. Мы имеем:

$$H_+f_{l-1}=\frac{1}{\alpha_l}H_+H_-f_l=\frac{1}{\alpha_l}[H_+,\ H_-]f_l+\frac{1}{\alpha_l}H_-H_+f_l=\frac{2}{\alpha_l}H_3f_l=\frac{2l}{\alpha_l}f_l,$$

т. е. вектор H_+f_{l-1} пропорционален f_l:

$$H_+f_{l-1}=\beta_lf_l,\quad \beta_l>0.$$

Покажем, что H_+f_m пропорционален f_{m+1}, т. е. $H_+f_m=\beta_{m+1}f_{m+1}$. Пусть это соотношение справедливо для векторов $f_l, f_{l-1}, \ldots, f_{m+1}$. Докажем наше утверждение для вектора f_m:

$$H_+f_m=\frac{1}{\alpha_{m+1}}H_+H_-f_{m+1}=\frac{1}{\alpha_{m+1}}[H_+,\ H_-]f_{m+1}+$$
$$+\frac{1}{\alpha_{m+1}}H_-H_+f_{m+1}=\frac{2}{\alpha_{m+1}}H_3f_{m+1}+\frac{\beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}}H_-f_{m+2}.$$

Воспользовавшись теперь равенствами (13) и (14), получим:

$$H_+f_m=\frac{2(m+1)+\alpha_{m+2}\beta_{m+2}}{\alpha_{m+1}}f_{m+1}.$$

Положив

$$\frac{2(m+1)+\alpha_{m+2}\beta_{+2}}{\alpha_{m+1}}=\beta_{m+1}, \tag{15}$$

мы можем написать:

$$H_+f_m=\beta_{m+1}f_{m+1}. \tag{16}$$

Так как $H_+f_l=0$, то эта формула имеет смысл и при $m=l$, если положить $\beta_{l+1}=0$.

Для определения преобразований H_+ и H_- нам надо в первую очередь вычислить коэффициенты α_m и β_m. Из того, что $H_+^*=H_-$, следует:

$$(H_+f_{m-1},\ f_m)=(f_{m-1},\ H_-f_m).$$

Пользуясь (14) и (16), получаем:

$$\beta_m(f_m,\ f_m)=\alpha_m(f_{m-1},\ f_{m-1}),$$

и так как собственные векторы нормированы, то $\alpha_m=\beta_m$. Заменив β на α, а $m+1$ на m, запишем соотношение (15) в виде

$$\alpha_m^2-\alpha_{m+1}^2=2m.$$

Чтобы найти α_m^2, сложим такие соотношения от $m=l$ до произвольного значения m. Мы получим:

$$\alpha_m^2-\alpha_{l+1}^2=2l+2(l-1)+2(l-2)+\ldots+2m.$$

Пользуясь тем, что $\beta_{l+1}^2=0$ и, следовательно, $\alpha_{l+1}^2=0$, находим:

$$\alpha_m^2=(l+m)(l-m+1). \tag{17}$$

Полученная формула дает нам возможность найти число векторов f_m в построенной цепочке $f_l, \ldots, f_k$. Мы положили $\alpha_k=0$, если f_k — последний из построенных векторов ($H_- f_k=0$). Из формулы (17) мы получаем, что $k=-l$. Так как числа m в процессе нашего построения уменьшались каждый раз на единицу, то разность $l-(-l)=2l$ равна целому числу. Следовательно, само l может быть или целым числом или половиной целого нечетного числа (в дальнейшем мы для краткости будем называть такие числа полуцелыми). Число построенных векторов равно, очевидно, в обоих случаях $2l+1$.

До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на представление T_g, т. е. оно могло быть как неприводимым, так и приводимым. Ограничимся теперь неприводимыми представлениями. Это значит, что в пространстве R, в котором действует представление, не существует подпространства, инвариантного относительно всех преобразований T_g. Тогда в R не существует подпространства, инвариантного относительно матриц A_1, A_2, A_3, т. е. относительно H_+, H_-, H_3. Действительно, из формулы (6) вытекает, что такое подпространство было бы инвариантно и относительно T_g. Покажем, что в этом случае векторы $f_l, f_{l-1}, \ldots, f_{-l}$ образуют базис в пространстве R. Действительно, так как H_+, H_- и H_3 переводят векторы f_m снова в векторы этой же системы, то порожденное векторами f_m $(m=-l, \ldots, l)$ подпространство инвариантно относительно H_+, H_-, H_3 и, следовательно, в силу неприводимости представления совпадает со всем пространством R.

Мы нашли, таким образом, что для любого неприводимого представления преобразования H_+, H_- и H_3 записываются в ортогональном базисе, состоящем из нормированных собственных векторов H_3, формулами

$$\left.\begin{aligned} H_+ f_m &= \alpha_{m+1} f_{m+1}, \\ H_- f_m &= \alpha_m f_{m-1}, \\ H_3 f_m &= m f_m, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

здесь $m=-l, -l+1, \ldots, l$; l — целое или полуцелое число и $\alpha_m=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$.

Сам базис $f_l, f_{l-1}, \ldots, f_{-l}$, состоящий из нормированных собственных векторов преобразования H_3, в случае неприводимого представления мы будем называть *каноническим базисом* этого представления.

Возвращаясь к преобразованиям A_1, A_2 и A_3 получаем следующее утверждение: *всякое неприводимое представление группы вращений определяется некоторым целым или полуцелым числом l.*

Преобразования A_1, A_2 и A_3, отвечающие при этом представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, задаются в каноническом базисе f_m $(m=-l, -l+1, \ldots, l)$ формулами

$$\left.\begin{aligned} A_1f_m &= -iH_1f_m = \\ &= -\frac{l}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,f_{m+1} - \frac{l}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,f_{m-1}, \\ A_2f_m &= -iH_2f_m = \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,f_{m+1} + \frac{1}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,f_{m-1}, \\ A_3f_m &= -iH_3f_m = -imf_m. \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

Число l называют *весом* соответствующего неприводимого представления. Всякое неприводимое представление определяется своим весом однозначно. Напомним, что матрицы T_g, отвечающие при этом представлении произвольному вращению g, определяются по матрицам A_k с помощью формулы (6) настоящего параграфа.

Мы нашли вид представления T_g в предположении, что оно существует. Тот факт, что матрицы T_g, восстановленные формулой (6) по матрицам A_k, определенным формулами (19), действительно образуют представление, непосредственно проверить затруднительно. Мы покажем это впоследствии тем, что фактически построим для каждого l соответствующее ему неприводимое представление. А именно, в §§ 2, 3 такие представления будут построены для любого целого l, а в §§ 6, 7 — для всех целых и полуцелых значений l. Сейчас мы покажем только, что если существует представление, определенное формулой (6), где A_k имеют вид (19), то оно неприводимо. Действительно, допустим, что существует подпространство R_1, инвариантное относительно H_+, H_- и H_3 и не совпадающее со всем $2l+1$-мерным пространством. Рассмотрим преобразование H_3 в этом пространстве. У этого преобразования существует собственный вектор $h=\sum_{m=-l}^{l} c_mf_m$, отвечающий наибольшему собственному значению H_3 в подпространстве R_1. Из леммы на стр. 28 следует, что преобразование H_+ переводит вектор, отвечающий наибольшему собственному значению H_3, в нуль. По формулам (18) имеем, следовательно,

$$H_+h = \sum_{m=-l}^{l} c_mH_+f_m = \sum_{m=-l}^{l} c_m\alpha_{m+1}f_{m+1} = 0.$$

Так как векторы f_m линейно независимы, то коэффициенты при всех f_m должны быть равны нулю. При $m<l$ $\alpha_{m+1}\neq 0$ и, следовательно, $c_m=0$. Значит, $h=c_lf_l$, т. е. R_1 содержит f_l. Но если подпространство R_1 содержит вектор f_l, то оно содержит H_-f_l, $H^2_-f_l$ и т. д., т. е. $f_{l-1}, f_{l-2}, \ldots, f_{-l}$. Поэтому R_1 совпадает с R.

Мы доказали, что не существует отличного от нуля и R подпространства, инвариантного относительно H_+, H_- и H_3, т. е. относительно A_1, A_2 и A_3. Но отсюда следует, что не существует отличного от нуля и R подпространства, инвариантного относительно всех T_g, так как в противном случае оно было бы инвариантно и относительно всех $A_k = \left.\frac{\partial T(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi_k}\right|_{\xi_1=\xi_2=\xi_3=0}$. А это значит, что представление $g \to T_g$ неприводимо.

Заметим, что из нашего доказательства следует такое полезное для дальнейшего утверждение: *в пространстве R, в котором действует неприводимое представление T_g, существует с точностью до множителя только один вектор f, такой, что $H_+ f = 0$.*

4. Разложение представления на неприводимые. Рассмотрим теперь приводимое представление группы вращений. Почти все рассуждения, проведенные в предыдущем пункте, не основывались на неприводимости представления. Неприводимость была использована лишь в самом конце, а именно, когда мы доказывали, что построенная система векторов f_m ($m = -l, -l+1, \ldots, l$) является базисом в пространстве R. Если не предполагать, что представление неприводимо, то из наших рассуждений следует, что построенная система векторов будет базисом лишь некоторого инвариантного подпространства R_0. Рассмотрим ортогональное дополнение R' к этому подпространству, т. е. совокупность векторов, ортогональных к f_l, $f_{l-1}, \ldots, f_{-l}$. Так как преобразования H_k самосопряженны, то R, как подпространство, ортогональное к инвариантному подпространству R_0, также инвариантно относительно H_1, H_2, H_3. Мы можем теперь в инвариантном подпространстве R' повторить те же рассуждения, т. е. выбрать наибольшее собственное значение l_1 преобразования H_3 в этом подпространстве, затем по соответствующему собственному вектору f'_l, построить снова цепочку векторов f'_m $(-l_1 \leqslant m \leqslant l_1)$, потом снова взять ортогональное дополнение и т. д., пока не будет исчерпано все пространство R. Итак, окончательно мы приходим к следующему выводу.

Пусть задано некоторое унитарное представление группы вращений. Тогда существует ортогональный нормированный базис, в котором матрицы $A_k = iH_k$ имеют следующий вид:

$$A_k = \begin{Vmatrix} A_k^{(0)} & & & & & \\ & A_k^{(1)} & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ & & & & & A_k^{(s)} \end{Vmatrix}, \tag{20}$$

где $A_1^{(j)}$, $A_2^{(j)}$, $A_3^{(j)}$ — *матрицы, определенные по формулам* (19) *предыдущего пункта при* $l = l_j$, *а именно,*

$$\left.\begin{aligned}
A_1^{(j)} &= -\frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & \alpha_{-l_j+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{-l_j+1} & 0 & \alpha_{-l_j+2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{-l_j+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{l_j} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_{l_j} & 0 \end{Vmatrix}; \\
A_2^{(j)} &= \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & \alpha_{-l_j+1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\alpha_{-l_j+1} & 0 & \alpha_{-l_j+2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_{-l_j+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{l_j} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\alpha_{l_j} & 0 \end{Vmatrix}; \\
A_3^{(j)} &= \begin{Vmatrix} il_j & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i(l_j-1) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i(l_j-2) & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -i(l_j-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -il_j \end{Vmatrix}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$\left(\alpha_m = \sqrt{(l_j+m)(l_j-m+1)}\right).$$

Сделаем несколько замечаний, позволяющих обычно найти, на какие именно неприводимые представления разлагается данное представление группы вращений. Для этого рассмотрим преобразование H_+. Легко видеть, что каждый вектор f, для которого $H_+f = 0$, имеет вид

$$\alpha f_l + \alpha' f'_{l_1} + \dots \tag{22}$$

В частности, такими векторами будут, конечно, и f_l, f'_{l_1}, ... Последние характеризуются тем, что они являются собственными векторами для H_3: $H_3 f_l = l f_l$, $H_3 f'_{l_1} = l_1 f'_{l_1}$, ... Исходя из сказанного выше, мы можем дать следующее правило для построения базиса, в котором матрицы A_1, A_2, A_3 имеют вид (20), или, как мы будем говорить, для разложения представления на неприводимые: ищем все решения уравнения $H_+f = 0$. Совокупность всех этих решений инвариантна относительно H_3. Рассмотрим преобразование H_3 в подпространстве векторов f, для которых $H_+f=0$, и найдем полную ортогональную и нормированную систему его собственных векторов.

По каждому из этих векторов, например f'_{l_1}, строится часть базиса, отвечающая отдельному инвариантному подпространству, т. е. векторы $H_-f'_{l_1}$, $H_-^2f'_{l_1}$, $\ldots$, $H_-^{2l_1}f'_{l_1}$.

Из предыдущего можно сделать следующий вывод: *если задано некоторое представление, то при его разложении на неприводимые встретятся представления с теми l, для которых существует совместное решение уравнений*

$$H_+f=0, \qquad H_3f=lf. \tag{23}$$

Представление с этим l встретится в разложении столько раз, сколько есть линейно независимых решений у уравнений (23).

Заметим еще, что если при разложении представления на неприводимые представления с данным l встречается более одного раза, то разложение неоднозначно. Действительно, при построении соответствующей цепочки базиса мы начинали с ортогональной нормированной системы векторов, для которых $H_+f=0$, $H_3f=lf$. Но если одно и то же l встречается несколько раз, то отсюда следует, что в подпространстве векторов f, для которых $H_+f=0$, H_3 имеет кратные собственные значения и, следовательно, такой базис можно выбрать неоднозначно.

Мы укажем сейчас другой способ разложения на инвариантные подпространства. При этом способе представление в каждом из инвариантных подпространств или неприводимо, или кратно неприводимому, т. е. может быть разложено на неприводимые представления с одним и тем же весом. В отличие от разложения на неприводимые представления такое разложение существует только одно.

Чтобы осуществить это разложение, рассмотрим преобразование

$$H^2=H_1^2+H_2^2+H_3^2. \tag{24}$$

Преобразование H^2 перестановочно с преобразованиями H_1, H_2, H_3, т. е. имеют место равенства

$$[H^2,\ H_1]=0, \quad [H^2,\ H_2]=0, \quad [H^2,\ H_3]=0.$$

Вычислим, например, $[H^2,\ H_3]$:

$$\begin{aligned}[H_1^2,\ H_3]&=H_1^2H_3-H_3H_1^2=H_1^2H_3-H_1H_3H_1+H_1H_3H_1-H_3H_1^2=\\&=H_1[H_1,\ H_3]+[H_1,\ H_3]H_1=-iH_1H_2-iH_2H_1.\end{aligned}$$

Аналогично

$$[H_2^2,\ H_3]=H_2[H_2,\ H_3]+[H_2,\ H_3]H_2=iH_2H_1+iH_1H_2$$

и, очевидно,

$$[H_3^2,\ H_3]=0.$$

Складывая эти равенства, имеем:

$$[H_1^2+H_2^2+H_3^2,\ H_3]=[H^2,\ H_3]=0.$$

Точно так же доказывается, что

$$[H^2,\ H_1]=0,\quad [H^2,\ H_2]=0.$$

В случае неприводимого представления, когда H_1, H_2, H_3 определяются по формулам (19), непосредственным вычислением убеждаемся, что

$$H^2=l(l+1)E,$$

где l — число, определяющее представление. Чтобы произвести это вычисление, полезно заметить, что

$$\begin{aligned}H_+H_-&=(H_1+iH_2)(H_1-iH_2)=\\&=H_1^2+H_2^2+i(H_2H_1-H_1H_2)=H_1^2+H_2^2+H_3,\end{aligned}$$

откуда

$$H^2=H_+H_--H_3+H_3^2.$$

По формулам (18) находим:

$$\begin{aligned}H_+H_-f_m&=H_+\alpha_mf_{m-1}=\alpha_m^2f_m,\\H_3f_m&=mf_m,\\H_3^2f_m&=m^2f_m.\end{aligned}$$

Так как $\alpha_m^2-m+m^2=l(l+1)$, то отсюда имеем:

$$H^2f_m=l(l+1)f_m\ ^{*)}.$$

Мы видим, таким образом, что *все векторы f пространства R, преобразующиеся по неприводимому представлению с данным l, удовлетворяют уравнению*

$$H^2f=l(l+1)f. \tag{25}$$

Отсюда следует, что число линейно независимых решений этого уравнения кратно $2l+1$.

С помощью преобразования H^2 мы можем разложить произвольное представление на представления, кратные неприводимым. Это

---

*) Тот факт, что для неприводимого представления $H^2=aE$, где a — число, можно было бы вывести из перестановочности H^2 со всеми H_k. Значение постоянной a легко найти, применив обе части равенства $H^2=aE$ к вектору f_{-l}.

значит, что мы можем выбрать в пространстве R базис, состоящий из отдельных групп векторов, таких, что, во-первых, каждая группа порождает инвариантное подпространство и, во-вторых, представление в этом подпространстве или неприводимо, или кратно неприводимому. Очевидно, *чтобы получить разложение на представления, кратные неприводимым, нужно для каждого l найти полную систему линейно независимых решений уравнения* (25). *Совокупность всех этих систем решений даст базис, в котором представление разлагается на кратные неприводимым.* Как мы уже упоминали, в отличие от разложения на неприводимые представления такое разложение всегда однозначно.

5. Примеры представлений. Рассмотрим в заключение несколько примеров неприводимых представлений группы вращений.

Положим $l=0$. В этом случае представление одномерно и матрицы T_g суть числа. Очевидно, что мы получим такое представление, если положим $T_g \equiv 1$ (единичное представление). Матрицы A_k будут в этом случае нулями, что, впрочем, видно и из формул (19).

Положим $l=1$. Тогда $2l+1=3$, т. е. мы должны получить представление группы вращений преобразованиями в трехмерном пространстве. Мы получим такое представление, поставив каждому вращению в соответствие матрицу этого вращения (основное представление). Так как всякая ортогональная матрица, если ее рассматривать как матрицу преобразования в комплексном пространстве, является одновременно унитарной, то наше представление унитарно. Канонический базис для основного представления имеет вид

$$f_{-1}=\frac{e_x-ie_y}{\sqrt{2}}, \quad f_0=e_z, \quad f_1=\frac{-e_x-ie_y}{\sqrt{2}}\text{*)},$$

где e_x, e_y и e_z — единичные векторы по осям координат. Легко проверить, что преобразования A_1, A_2 и A_3 имеют в каноническом базисе такой вид, который получается из формул (19) при $l=1$. Найдем матрицу, отвечающую в этом базисе конечному повороту на угол φ вокруг оси oz. В базисе e_x, e_y, e_z это преобразование имеет вид

$$\begin{aligned} e'_x &= e_x\cos\varphi + e_y\sin\varphi, \\ e'_y &= -e_x\sin\varphi + e_y\cos\varphi, \\ e'_z &= e_z. \end{aligned}$$

---

*) Элементы канонического базиса суть нормированные собственные векторы преобразования H_3. Из формулы (7) § 1 легко получить, что матрица H_3 в базисе e_x, e_y, e_z имеет вид $\begin{Vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$.

Отсюда

$$f'_{-1} = \frac{e'_x - ie'_y}{\sqrt{2}} = \frac{(e_x \cos\varphi + e_y \sin\varphi) - i(-e_x \sin\varphi + e_y \cos\varphi)}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{(e_x - ie_y)\, e^{i\varphi}}{\sqrt{2}} = e^{i\varphi} f_1,$$

$$f'_0 = e'_z = e_z = f_0,$$

$$f'_1 = \frac{-e'_x - ie'_y}{\sqrt{2}} = \frac{-e_x - ie_y}{\sqrt{2}}\, e^{-i\varphi} = e^{-i\varphi} f_1.$$

Матрица поворота g_φ имеет, следовательно, вид

$$\begin{Vmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\varphi} \end{Vmatrix}.$$

Найдем компоненты a_-, a_0 и a_+ вектора a в каноническом базисе. Из равенства $a_x e_x + a_y e_y + a_z e_z = a_- f_{-1} + a_0 f_0 + a_+ f_1$, после замены f_{-1}, f_0 и f_1 их выражениями, получим, что

$$a_x = \frac{a_- - a_+}{\sqrt{2}}, \quad a_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_- + a_+), \quad a_z = a_0$$

или

$$a_+ = \frac{-a_x + ia_y}{\sqrt{2}},$$

$$a_0 = a_z,$$

$$a_- = \frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}.$$

Прежде чем разбирать другие примеры, найдем в случае произвольного веса l матрицу T_g, отвечающую конечному повороту вокруг оси Oz. Из формул (19) мы имеем, что матрица A_3, отвечающая бесконечно малому повороту вокруг оси Oz, имеет вид

$$A_3 = \begin{Vmatrix} il & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i(l-1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & i(l-2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -il \end{Vmatrix}.$$

Как было показано в п. 1 настоящего параграфа, повороту g на угол φ вокруг оси Oz отвечает матрица $T_g = e^{A_3\varphi}$, т. е.

$$T_g = \begin{Vmatrix} e^{il\varphi} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i(l-1)\varphi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i(l-2)\varphi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & e^{-il\varphi} \end{Vmatrix}.$$

Если число l — полуцелое, то единичному вращению мы должны сопоставить две матрицы E и $-E$. Действительно, если угол поворота φ менять непрерывно от нуля до 2π, то матрица T_g непрерывно меняется от E до $-E$. Таким образом, при полуцелом l мы не получаем однозначного непрерывного представления. С аналогичным положением мы встретились в п. 4 § 1. Там мы каждому вращению поставили в соответствие две унитарные матрицы второго порядка, отличающиеся знаком. Произведению вращений отвечало произведение матриц, также взятое со знаком $+$ или $-$. Мы получили при этом так называемое двузначное представление группы вращений. Такие представления будут подробно рассмотрены далее в § 6. Там будет показано, что аналогичное соответствие можно построить для любого полуцелого l.

Случай, разобранный в § 1, отвечает $l = \frac{1}{2}$. Найдем для этого случая матрицы A_k, отвечающие бесконечно малым поворотам вокруг осей координат. Эти матрицы определятся однозначно, если поставить единичному вращению в соответствие матрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и для близких вращений определить знак матрицы по непрерывности (см. п. 4 § 1). В § 1 выписаны матрицы второго порядка, отвечающие конечным поворотам вокруг осей Ox и Oz (см. формулы (18) и (19) § 1). Продифференцировав эти матрицы по θ и по φ соответственно и положив значения параметров равными 0, мы найдем матрицы A_1 и A_3:

$$A_1 = \frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \frac{i}{2}\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Далее,

$$A_2 = [A_3, A_1] = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Полученная матрица A_3 диагональна и совпадает с матрицей A_3 формулы (19) этого параграфа при $l = \frac{1}{2}$. В то же время A_1 и A_2 не совпадают с соответствующими матрицами (19). Это значит, что хотя базис в комплексном двумерном пространстве состоит из собственных векторов H_3, он отличается от канонического базиса нормировкой. Умножим первый из базисных векторов на i, а другой на $-i$, т. е. положим:

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{A}_1 &= \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} \frac{i}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix} = -\frac{i}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \\
\tilde{A}_2 &= \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \\
\tilde{A}_3 &= \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix} \frac{i}{2} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{Vmatrix} = \frac{i}{2} \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

Мы видим, что матрицы $\tilde{A}_k$ совпадают с матрицами, определенными по формулам (19) при $l = \frac{1}{2}$, т. е. новый базис уже является каноническим. Матрица второго порядка, отвечающая в каноническом базисе произвольному вращению с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2, выглядит так:

$$\begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} & -i\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \end{Vmatrix}. \qquad (27)$$

До сих пор мы рассматривали неприводимые представления группы вращений. Остановимся коротко на представлениях полной ортогональной группы, т. е. группы вращений с отражениями. Так как всякий элемент полной ортогональной группы есть либо вращение g, либо произведение gg_- вращения на отражение относительно начала координат (см. п. 1 § 1), то для рассмотрения неприводимых представлений полной ортогональной группы достаточно задать преобразование, отвечающее отражению относительно начала координат. Так как $g_-^2 = e$, то $T_{g_-}^2 = E$ и отсюда можно вывести, что при целых l $T_{g_-} = \pm E$. Таким образом, для каждого целого l существуют два различных неприводимых представления веса l полной ортогональной группы. Для первого из них $T_{g_-} = E$, а для второго $T_{g_-} = -E$.

Например, при $l = 0$ мы имеем два представления. В первом из них $T_{g_-} = E$ и как вращения, так и отражения не меняют преобразуемую величину. Такая величина называется *скаляром*. Во втором случае $T_{g_-} = -E$ и величина не меняется при вращениях и меняет знак при отражениях. Такая величина называется *псевдоскаляром*. Примером псевдоскаляра является определитель, составленный из компонент трех заданных векторов.

При $l = 1$ величинами, преобразующимися при вращениях, являются векторы трехмерного пространства. При отражениях обычные векторы меняют знак, т. е. $T_{g_-} = -E$. Если $T_{g_-} = E$, то величина, преобразующаяся по такому представлению, называется *псевдовектором*.

В учебниках векторного исчисления обычные векторы часто называют полярными векторами, а псевдовекторы (например, векторное произведение двух полярных векторов) — аксиальными векторами.

В общем случае величину, преобразующуюся по неприводимому представлению полной ортогональной группы, называют l-вектором, если $T_{g_-}=(-1)^l E$, и соответствующей псевдовеличиной, если $T_{g_-}=(-1)^{l+1}E$.

Добавление к § 2. Доказательство дифференцируемости матрицы T_g

При построении матриц A_1, A_2, A_3 мы использовали дифференцируемость T_g по параметрам ξ_1, ξ_2, ξ_3. Докажем сейчас эту дифференцируемость. Для этого мы покажем, что для любого вектора η функция $T_g\eta$ есть дифференцируемая функция от g. Возьмем произвольный элемент $\xi \in R$ и положим сначала:

$$\eta=\int f(g)\,T_g\xi\,dg,$$

где $f(g)$ — некоторая функция на G, дифференцируемая по g (т. е. по параметрам ξ_1, ξ_2, ξ_3). Здесь интегрирование понимается в смысле инвариантного интегрирования, введенного в § 1, п. 3. Заметим, что $f(g)\,T_g\xi$ есть вектор из R, и под его интегралом мы понимаем следующее: мы рассматриваем произвольный базис и интегрируем каждую компоненту.

Покажем, что функция $T_{g_0}\eta$ дифференцируема по g_0. Для этого вычислим $T_{g_0}\eta$.

Мы имеем:

$$T_{g_0}\eta=T_{g_0}\int f(g)\,T_g\xi\,dg=\int f(g)\,T_{g_0}T_g\xi\,dg=\int f(g)\,T_{g_0g}\xi\,dg.$$

В силу того, что интегрирование понимается как инвариантное интегрирование, мы имеем:

$$T_{g_0}\eta=\int f\left(g_0^{-1}g\right)T_g\xi\,dg.$$

Следовательно, для дифференцирования $T_{g_0}\eta$ по параметрам нужно по ним дифференцировать функцию $f\left(g_0^{-1}g\right)$. Но мы предполагаем эту функцию дифференцируемой. Поэтому дифференцируема и $T_{g_0}\eta$.

Покажем теперь, что $T_{g_0}\eta$ дифференцируема для любого вектора η. Ясно, что если функция $T_{g_0}\eta$ дифференцируема по g_0 для $\eta=\eta_1$ и $\eta=\eta_2$, то она дифференцируема и для вектора η, являющегося их линейной комбинацией. Мы доказали дифференцируемость $T_g\eta$ для векторов вида

$$\eta=\int f(g)\,T_g\xi\,dg. \qquad (*)$$

Покажем, что линейные комбинации векторов вида (*) заполняют всё R. Для этого покажем, что вектор η_0, ортогональный ко всем векторам вида (*), равен нулю. Действительно, пусть $(\eta_0, \eta)=0$ для любого $\eta=\int f(g) T_g \xi\, dg$, где $f(g)$ — произвольная дифференцируемая функция, т. е.

$$\left(\eta_0, \int f(g)\, T_g \xi\, dg\right)=0,$$

т. е.

$$\int f(g)(\eta_0, T_g \xi)\, dg=0.$$

Так как $f(g)$ — произвольная дифференцируемая функция, то имеем:

$$(\eta_0, T_g \xi)=0 \text{ для любого } g \text{ и любого } \xi.$$

В частности, положив $g=e$, имеем:

$$(\eta_0, \xi)=0 \text{ для любого } \xi,$$

т. е. $\eta_0=0$, что и требовалось доказать. Итак, функция $T_g\eta$ дифференцируема для любого вектора η. Выбирая в качестве η векторы базиса, мы получаем, что элементы матрицы T_g дифференцируемы.

§ 3. Сферические функции и представления группы вращений

В § 2 были перечислены возможные неприводимые представления группы вращений трехмерного пространства. Мы перейдем теперь к одной из наиболее часто встречающихся в анализе реализации этих представлений, а именно, будем реализовать операторы T_g представления как преобразования функций. При этом естественным образом возникнут системы функций, инвариантные относительно вращений, — так называемые сферические функции.

Из результатов этого параграфа будет также вытекать существование неприводимых представлений веса l для всех целых значений l. Метод, с помощью которого мы найдем эти сферические функции, является в достаточной мере общим. Так, в § 7 мы аналогичным образом получим другой класс специальных функций.

1. Определение сферических функций. Рассмотрим функцию $f(x)=f(x_1, x_2, x_3)$. Вращение g запишем в виде

$$x'=gx \quad \text{или} \quad x_i'=\sum g_{ik} x_k. \tag{1}$$

Если подставить в $f(x_1, x_2, x_3)$ вместо x_k их выражение через x_i' (из (1)), то мы получим новую функцию $f_1(x_1', x_2', x_3')$. Мы будем говорить, что при вращении g функция f переходит в f_1. Преобразование, переводящее f в f_1, обозначим через T_g. Таким образом, каждому вращению g отвечает преобразование T_g над функциями $f(x)$, состоящее в том, что функция f переходит в функцию f_1, получающуюся из f заменой x его выражением через x', а именно, через $g^{-1}x'$, т. е.

$$T_g f(x) = f_1(x), \quad \text{где} \quad f_1(x) = f(g^{-1}x). \tag{2}$$

Ясно, что преобразование T_g линейно: сумма функций переходит в сумму и произведение на число — в произведение на число.

Покажем, что произведению вращений отвечает произведение преобразований T_g. Для этого возьмем два последовательных вращения g_1 и g_2

$$x' = g_1 x,$$

$$x'' = g_2 x'.$$

В результате первого вращения $f(x)$ перейдет в

$$T_{g_1} f(x) = f\left(g_1^{-1}x\right),$$

а в результате следующего — в

$$T_{g_2} T_{g_1} f(x) = T_{g_2} f\left(g_1^{-1}x\right) = f\left(\left(g_1^{-1}g_2^{-1}x\right)\right) = f\left((g_2 g_1)^{-1}\, x\right) = T_{g_2 g_1} f(x).$$

Это значит, что

$$T_{g\, g_1} = T_{g_2} T_{g_1}. \tag{3}$$

Так как при вращении сфера с центром в начале координат переходит сама в себя, то при рассмотрении преобразований мы можем ограничиться функциями, заданными на поверхности такой сферы. Будем поэтому считать, что $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, т. е. что x лежит на поверхности единичной сферы. При этом часто нам будет удобнее считать, что вектор x задан своими сферическими координатами θ и φ, и полагать $x_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = \sin\theta\sin\varphi$ и $x_3 = \cos\theta$.

Ограничимся также функциями $f(\theta, \varphi)$, квадрат модуля которых интегрируем по поверхности сферы, и определим скалярное произведение таких функций формулой

$$(f, g) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi)\,\overline{g(\theta, \varphi)}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

В метрике, определенной таким скалярным произведением, введенные преобразования T_g унитарны. В самом деле, так как при повороте элемент поверхности сферы не меняется, то интеграл от произведения преобразованных функций равен интегралу от произведения исходных функций. Если обозначить координаты конца вектора x через θ, φ

и координаты конца вектора x' через θ', φ', то это значит, что

$$(T_g f, T_g g) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\,\overline{g(\theta', \varphi')}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\theta', \varphi')\,\overline{g(\theta', \varphi')}\sin\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = (f, g),$$

т. е. преобразования T_g унитарны.

Мы построим с помощью введенных преобразований неприводимые представления с любым целым l. Для этого мы построим конечномерные пространства, состоящие из функций, в которых определенные нами преобразования T_g реализуют неприводимые представления группы вращений с данным весом l. Соответствующее конечномерное пространство для каждого l будет состоять из линейных комбинаций $2l+1$ функций $f_m(x)$ $(-l \leqslant m \leqslant l)$ *). Функции $f_m(x)$ мы подберем так, чтобы они образовывали канонический базис для этого представления. *Функции на сфере, принадлежащие пространству, в котором реализуется неприводимое представление с данным весом l, называются сферическими функциями l-го порядка. Функции $f_m(x)$, образующие канонический базис в этом пространстве, называются основными сферическими функциями l-го порядка.* Так как канонический базис определяется с помощью преобразований, отвечающих бесконечно малым поворотам, то для нахождения $f_m(x)$ мы сначала, в п. 2, построим по введенным нами T_g преобразования A_1, A_2, A_3, отвечающие бесконечно малым поворотам.

2. Дифференциальные операторы, отвечающие бесконечно малым поворотам. В п. 1 мы ввели линейные преобразования T_g в пространстве функций на поверхности сферы. Построим по ним преобразования A_1, A_2 и A_3, отвечающие в этом пространстве бесконечно малым поворотам вокруг осей координат. Функции f, к которым применяются преобразования T_g, будем здесь считать дифференцируемыми **).

---

*) Собственно говоря, определив преобразования T_g и доказав свойство (3) и унитарность этих преобразований, мы определили унитарное представление в пространстве всех функций с интегрируемым квадратом модуля на поверхности сферы. Дальше естественно поставить задачу о разложении этого представления на неприводимые. Построением для каждого l системы функций $f_m(x)$ мы решаем основную часть этой задачи, а именно, выделяем из пространства функций инвариантные подпространства, в которых действуют неприводимые представления группы вращений. Полностью задача о разложении решается в п. 5 этого параграфа.

**) Из того, что всякое унитарное представление группы вращений разлагается на неприводимые, и из добавления к § 2 следует, что инвариантное подпространство функций, в котором действует неприводимое представление, при любом l состоит из дифференцируемых функций.

Найдем сначала оператор A_3, отвечающий бесконечно малому повороту вокруг оси Oz. Для этого мы должны рассмотреть поворот g на угол α. Так как (см. определение в § 2) $T_g = E + \alpha A_3 + \ldots$, то для того, чтобы вычислить $A_3 f$, мы должны $T_g f$ разложить по степеням α и взять коэффициент при первой степени α.

Мы имеем $T_g f(x) = f(g^{-1}x)$. Поэтому для поворота g вокруг оси Oz имеем $T_g f(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi - \alpha)$.

Разлагая $f(\theta, \varphi - \alpha)$ по степеням α, мы получаем:

$$f(\theta, \varphi - \alpha) = f(\theta, \varphi) - \alpha \frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} + \ldots \tag{4}$$

Итак,

$$A_3 f = -\frac{\partial f(\theta, \varphi)}{\partial \varphi},$$

и оператор A_3 есть дифференциальный оператор, имеющий вид

$$A_3 = -\frac{\partial}{\partial \varphi}.$$

Легко видеть, что вообще все A_k ($k = 1, 2, 3$) для определенных в п. 1 преобразований T_g над функциями f будут дифференциальными операторами первого порядка. Действительно, для малого вращения g на угол α вокруг какой-либо фиксированной оси $T_g f(\theta, \varphi) = f(\theta', \varphi')$, где θ' и φ' зависят от угла поворота α и обращаются в θ, соответственно φ, при $\alpha = 0$.

Разлагая $T_g f = f(\theta', \varphi')$ в ряд по α, получим:

$$f(\theta', \varphi') = f(\theta, \varphi) + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta'} \frac{d\theta'}{d\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{d\varphi'}{d\alpha}\right)\Bigg|_{\alpha=0} \alpha + \ldots,$$

следовательно, *соответствующий данному бесконечно малому повороту оператор A имеет вид*

$$\left.\begin{aligned} A &= a(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \theta} + b(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \text{где}\quad a(\theta, \varphi) &= \frac{d\theta}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}, \quad b(\theta, \varphi) = \frac{d\varphi}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Найдем теперь дифференциальный оператор A_1, отвечающий бесконечно малому повороту вокруг оси Ox. Чтобы вычислить функции $a(\theta, \varphi)$ и $b(\theta, \varphi)$, т. е. $\frac{d\theta}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}$ и $\frac{d\varphi}{d\alpha}\Big|_{\alpha=0}$ при таком повороте, нам удобнее сначала найти производную по α от декартовых координат x_1, x_2, x_3 вектора x. Если g есть поворот на угол α вокруг оси Ox, то g^{-1} есть поворот на угол $-\alpha$ вокруг этой оси. Поэтому вектор $x' = g^{-1}x$ имеет координаты $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2 \cos\alpha + x_3 \sin\alpha$,

$x_3' = -x_2 \sin\alpha + x_3 \cos\alpha$. Функции $\left.\frac{dx_k}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ имеют, следовательно, вид

$$\left.\frac{dx_1}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0, \quad \left.\frac{dx_2}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = x_3, \quad \left.\frac{dx_3}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -x_2. \tag{6}$$

Продифференцировав по α равенства $x_1 = \sin\theta\cos\varphi$, $x_2 = \sin\theta\sin\varphi$, $x_3 = \cos\theta$, связывающие декартовы координаты со сферическими, и воспользовавшись (6), мы при $\alpha = 0$ получим уравнения

$$\cos\theta\cos\varphi\frac{d\theta}{d\alpha} - \sin\theta\sin\varphi\frac{d\varphi}{d\alpha} = 0,$$

$$\cos\theta\sin\varphi\frac{d\theta}{d\alpha} + \sin\theta\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\alpha} = \cos\theta,$$

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{d\alpha} = -\sin\theta\sin\varphi,$$

из которых имеем:

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \sin\varphi \quad \text{и} \quad \frac{d\varphi}{d\alpha} = \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi.$$

Подставляя найденные отсюда значения $\left.\frac{d\theta}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ и $\left.\frac{d\varphi}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ в формулу (5), мы находим, что A_1 — *дифференциальный оператор, определяемый формулой*

$$A_1 = \sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{7}$$

Оператор A_2, отвечающий бесконечно малому повороту вокруг оси Oy, можно получить аналогичным подсчетом. Однако, заметив, что замена φ на $\varphi - \frac{\pi}{2}$ соответствует замене оси Oy на ось Ox, мы можем получить A_2, заменив в формуле (7) φ на $\varphi - \frac{\pi}{2}$. Таким образом,

$$A_2 = -\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \operatorname{ctg}\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{8}$$

Дальнейшие вычисления нам придется проводить с преобразованиями H_+, H_- и H_3, введенными в § 2. Воспользовавшись выражениями для A_1, A_2, A_3, получим:

$$\left.\begin{aligned} H_+ &= H_1 + iH_2 = iA_1 - A_2 = e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ H_- &= H_1 - iH_2 = iA_1 + A_2 = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \\ H_3 &= iA_3 = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

3. Дифференциальное уравнение сферических функций. Как мы уже говорили, функции на сфере из инвариантного подпространства, в котором действует неприводимое представление веса l, называются *сферическими функциями* l-го порядка*). Функции, образующие канонический базис в этом подпространстве (т. е. собственные векторы преобразования H_3), называются *основными сферическими функциями*. Основные сферические функции обозначаются обычно $Y_l^m(\theta, \varphi)$, где m — номер базисного вектора, т. е. соответствующее собственное значение H_3 $(-l \leqslant m \leqslant l)$. Таким образом, каждая сферическая функция l-го порядка есть линейная комбинация $2l+1$ основных сферических функций $Y_l^m(\theta, \varphi)$. Их явное выражение будет получено в следующем пункте. Здесь мы выясним, как они зависят от φ, и получим дифференциальное уравнение для сферических функций.

Функции $Y_l^m(\theta, \varphi)$ являются собственными функциями H_3, отвечающими собственному значению m. Воспользовавшись выражением (9) для H_3, получаем:

$$H_3 Y_l^m(\theta, \varphi) = -i \frac{\partial Y_l^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} = m Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Отсюда имеем:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = e^{im\varphi} F_l^m(\theta). \tag{10}$$

Зависимость Y_l^m от φ, таким образом, ясна. Как Y_l^m зависит от θ, мы исследуем более подробно несколько позже.

Из формулы (10) видно, что мы можем получить таким путем функции, однозначные на всей поверхности сферы лишь при целом l**). Таким образом, неприводимые представления такого вида мы получим лишь при целом весе l. Так как $Y_l^m(\theta, \varphi)$ являются нормированными собственными функциями преобразования H_3, то

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 1. \tag{11}$$

Ввиду того, что $\int_0^{2\pi} |e^{im\varphi}| \, d\varphi = 2\pi$, удобнее положить:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F_l^m(\theta) \, e^{im\varphi}. \tag{10'}$$

---

*) В п. 4 будет показано, что для каждого веса l существует в точности одно такое инвариантное подпространство.

**) При полуцелом l мы, выходя из точки (θ, φ) и изменяя φ непрерывно от φ до $\varphi + 2\pi$, пришли бы в ту же точку со значением функции, противоположным по знаку.

При этом условие (11) нормировки перепишется в виде

$$\int\limits_0^\pi |F_l^m(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta = 1. \tag{11'}$$

Перейдем к выводу дифференциальных уравнений для сферических функций и для функций $F_l^m(\theta)$. Как было показано в § 2, векторы, преобразованиями которых реализуется неприводимое представление с данным весом l, удовлетворяют уравнению

$$H^2 f = l(l+1) f,$$

где $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$.

Найдем явный вид этого уравнения в нашем случае. Для этого заметим, что $H_1^2 + H_2^2 = \frac{1}{2}(H_+H_- + H_-H_+)$. Подставляя H_+ и H_- из формулы (9), мы найдем, что

$$H_1^2 + H_2^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} - \operatorname{ctg}^2\theta \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Добавив к этому выражению $H_3^2 = -\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$, мы после простых преобразований получим:

$$-H^2 = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Таким образом, уравнение $[-H^2 + l(l+1)E]f = 0$ имеет в нашем случае вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + l(l+1)f = 0. \tag{12}$$

Это уравнение называется *уравнением сферических функций l-го порядка*. Число линейно независимых решений этого уравнения (нас интересуют, естественно, только решения непрерывные и дифференцируемые на всей сфере) должно быть кратно $2l+1$. Из результатов п. 4 будет следовать, что число решений в точности равно $2l+1$.

Перейдем к основным сферическим функциям. Подставляя выражение $Y_l^m(\theta, \varphi)$ из формулы (10) в уравнение (12), мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $F_l^m(\theta)$. Оно имеет вид

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dF_l^m}{d\theta}\right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]F_l^m(\theta) = 0 \tag{13}$$

или после введения новой независимой переменной $\mu = \cos\theta$ и замены $F_l^m(\theta)$ через $P_l^m(\mu)$ вид

$$[(1-\mu^2)P_l^{m'}(\mu)]' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right]P_l^m(\mu) = 0. \tag{13'}$$

Таким образом, окончательно мы получаем, что *основные сферические функции имеют вид*

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta), \tag{14}$$

где $P_l^m(\mu)$ *удовлетворяет уравнению* (13′). В следующем пункте мы получим явное выражение для $P_l^m(\mu)$.

4. Явное выражение сферических функций. В этом пункте мы получим явное выражение для основных сферических функций. В процессе рассуждения мы одновременно получим, что для каждого целого l существует, и притом только одно, инвариантное подпространство функций, в котором реализуется представление веса l.

Чтобы найти канонический базис для неприводимого представления веса l, мы, как и в § 2 (стр. 35), начнем с совместного решения уравнений

$$H_3 f = lf,$$
$$H_+ f = 0,$$

т. е. с отыскания $Y_l^l(\theta, \varphi)$ (собственного вектора H_3, отвечающего наибольшему собственному значению).

Первое из этих уравнений, как и в п. 3, дает, что $Y_l^l(\theta, \varphi)$ имеет вид

$$Y_l^l(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} F_l^l(\theta).$$

Подставляя эту функцию во второе уравнение и сократив на $e^{i(l+1)\varphi}$, мы получим следующее дифференциальное уравнение для $F_l^l(\theta)$:

$$\frac{dF_l^l(\theta)}{d\theta} - l\operatorname{ctg}\theta F_l^l(\theta) = 0.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$F_l^l(\theta) = C\sin^l\theta. \tag{15}$$

Отсюда видно, что среди собственных функций оператора H_3, соответствующих собственному значению l, имеется, с точностью до множителя, всего одна функция, удовлетворяющая уравнению $H_+ f = 0$. Следовательно, *для каждого l существует только одно неприводимое представление веса l*, так как в противном случае уравнение $H_+ Y_l^l = 0$ имело бы для какого-то l по меньшей мере два линейно независимых решения вида $e^{il\varphi}\Phi(\theta)$.

Прежде чем перейти к нахождению $Y_l^m(\theta, \varphi)$ для $m < l$, следует пронормировать уже найденную функцию $F_l^l(\theta) = C\sin^l\theta$, т. е. подобрать постоянную C так, чтобы выполнялось условие нормировки (11′)

$$\int_0^\pi |F_l^l(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta = 1.$$

Вычисляя интеграл, находим:

$$C^2 \int\limits_0^\pi \sin^{2l+1}\theta \, d\theta = C^2 \cdot 2^{2l+1} \frac{[l!]^2}{(2l+1)!} = 1,$$

откуда

$$C = \pm \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{(2l)}.$$

Обычно полагают:

$$C = (-1)^l \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{(2l)}.$$

Таким образом,

$$Y_l^l(\theta, \varphi) = \frac{(-1)^l}{\sqrt{2\pi} \cdot 2^l \cdot l!} \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sqrt{(2l)}\, e^{il\varphi} \sin^l \theta = \frac{C}{\sqrt{2\pi}} e^{il\varphi} \sin^l \theta.$$

Найдем теперь остальные функции канонического базиса $f_m = Y_l^m(\theta, \varphi)$. Для этого воспользуемся формулой $H_- f_m = \alpha_m f_{m-1}$, где $\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$. Так как $H_- = e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$, то

$$e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial Y_l^m}{\partial\theta} + i \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial\varphi}\right) = \alpha_m Y_l^{m-1}.$$

Подставив сюда $Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} F_l^m(\theta)$ и сократив на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(m-1)\varphi}$, мы получим рекуррентную формулу для $F_l^m(\theta)$

$$-\frac{dF_l^m(\theta)}{d\theta} - m \operatorname{ctg}\theta F_l^m(\theta) = \alpha_m F_l^{m-1}(\theta).$$

Как и раньше, положив $\cos\theta = \mu$ и обозначив $F_l^m(\theta)$ через $P_l^m(\mu)$, мы получим соотношение

$$\sqrt{1-\mu^2}\left(\frac{dP_l^m(\mu)}{d\mu} - m \frac{\mu}{1-\mu^2} P_l^m(\mu)\right) = \alpha_m P_l^{m-1}(\mu). \tag{16}$$

Так как $P_l^l(\mu)$ нам известно, то эта формула дает возможность последовательно определить $P_l^m(\mu)$. Сделаем для этой цели подстановку

$$P_l^m(\mu) = (1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}} u_m(\mu). \tag{17}$$

Мы получим тогда из (16) соотношение, которое после сокращения на $(1-\mu^2)^{-\frac{m-1}{2}}$ примет простой вид

$$u_{m-1}(\mu) = \frac{1}{\alpha_m} \frac{du_m}{d\mu}. \tag{18}$$

Из формулы (15) мы видим, что $P_l^l(\mu) = C(1-\mu^2)^{\frac{l}{2}}$. Значит, $u_l(\mu) = C(1-\mu^2)^l$. Отсюда по формуле (18)

$$u_{l-1}(\mu) = \frac{C}{\alpha_l}\frac{d(1-\mu^2)^l}{d\mu}, \quad u_{l-2}(\mu) = \frac{C}{\alpha_l\alpha_{l-1}}\frac{d^2(1-\mu^2)^l}{d\mu^2}, \ldots$$
$$\ldots, u_m(\mu) = \frac{C}{\alpha_l\alpha_{l-1}\ldots\alpha_{m+1}}\frac{d^{l-m}(1-\mu^2)^l}{d\mu^{l-m}}.$$

Если подставить найденные значения $u_m(\mu)$ в формулу (17), то получится выражение

$$P_l^m(\mu) = \frac{C}{\alpha_l\alpha_{l-1}\ldots\alpha_{m+1}}(1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}(1-\mu^2)^l}{d\mu^{l-m}}.$$

Здесь $m = l, l-1, l-2, \ldots$ Заметим, что при $m \leqslant -l-1$, как и следовало ожидать, мы получаем $P_l^m(\mu) \equiv 0$.

Заменим C и α_m их значениями и внесем $(-1)^l$ под знак производной. Окончательно получим:

$$P_l^m(\mu) = \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\frac{1}{2^l\cdot l!}(1-\mu^2)^{-\frac{m}{2}}\frac{d^{l-m}(\mu^2-1)^l}{d\mu^{l-m}}. \quad (19)$$

В частности, функция $P_l^0(\mu)$, которую чаще обозначают просто через $P_l(\mu)$, имеет вид

$$P_l(\mu) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l(\mu^2-1)^l}{d\mu^l}. \quad (20)$$

Многочлен $P_l(\mu)$ носит название нормированного многочлена Лежандра l-го порядка, а функции $P_l^m(\mu)$ называются нормированными присоединенными функциями Лежандра.

Итак, доказана следующая теорема: *основные сферические функции l-го порядка имеют вид*

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\varphi}P_l^m(\cos\theta),$$

где $P_l^m(\mu)$ определяются формулой (19). *Линейные комбинации функций $Y_l^m(\theta, \varphi)$ с данным l образуют $(2l+1)$-мерное пространство функций, инвариантное относительно вращений сферы, в котором реализуется неприводимое представление группы вращений с весом l.*

В заключение этого пункта выведем рекуррентные соотношения для многочленов и функций Лежандра с одним и тем же l. Два рекуррентных соотношения, в которые входят функции $P_l^m(\mu)$ и их первые производные, содержатся в формулах преобразования основных сферических функций $H_-Y_l^m(\theta, \varphi) = \alpha_m Y_l^{m-1}(\theta, \varphi)$ и $H_+Y_l^m = \alpha_{m+1}Y_l^{m+1}$. Первая из этих формул была уже использована в начале этого пункта для получения рекуррентного соотношения. Для этого мы подставили в нее $Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} P_l^m(\cos\theta)$ и получили формулу

$$\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP_l^m}{d\mu} = m\,\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,P_l^m(\mu) + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,P_l^{m-1}(\mu). \tag{21}$$

Аналогично соотношение $H_+ Y_l^m = \alpha_{m+1} Y_l^{m+1}$ дает другую рекуррентную формулу

$$-\sqrt{1-\mu^2}\,\frac{dP_l^m}{d\mu} = m\,\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,P_l^m(\mu) + \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,P_l^{m+1}(\mu). \tag{22}$$

Складывая формулы (21) и (22), мы получим связь между тремя последовательными нормированными функциями Лежандра:

$$\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,P_l^{m+1}(\mu) + 2m\,\frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}\,P_l^m(\mu) + \\ + \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,P_l^{m-1}(\mu) = 0. \tag{23}$$

В § 7 будут выведены другие рекуррентные соотношения между присоединенными функциями и многочленами Лежандра с различными значениями l.

С помощью формулы (22) можно получить другое, более распространенное выражение для присоединенных функций Лежандра. Положив в этой формуле $m = 0$, мы найдем, что $P_l^1(\mu) = -\frac{1}{\alpha_1}(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dP_l}{d\mu}$.

Положим вообще:

$$P_l^m(\mu) = (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\,V_m(\mu). \tag{24}$$

Тогда формула (22) дает простую связь между функциями $V_m(\mu)$

$$V_{m+1}(\mu) = -\frac{1}{\alpha_{m+1}}\,\frac{dV_m(\mu)}{d\mu}.$$

Так как $V_0(\mu) = \sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,\frac{1}{2^l\cdot l!}\,\frac{d^l(\mu^2-1)^l}{d\mu^l}$, то отсюда находим, что

$$V_m(\mu) = (-1)^m\,\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,\frac{1}{2^l\cdot l!}\,\frac{d^{l+m}(\mu^2-1)^l}{d\mu^{l+m}}.$$

Подставляя $V_m(\mu)$ в формулу (24) и заменяя α_m их значениями, мы получаем следующее выражение для присоединенных функций Лежандра:

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\,\frac{1}{2^l\cdot l!}\,(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\,\frac{d^{m+l}(\mu^2-1)^l}{d\mu^{m+l}}. \tag{25}$$

Сравнивая выражения (19) и (25), мы видим, что при замене m на $-m$ одно из них, с точностью до множителя, переходит во второе. Отсюда следует, что

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m P_l^{-m}(\mu),$$

т. е. нормированные присоединенные функции Лежандра с противоположными по знаку значениями m пропорциональны между собой.

Заметим, наконец, что если заменить в формуле (25) $\sqrt{\frac{2l+1}{2}}\frac{1}{2^l\cdot l!}\frac{d^l(\mu^2-1)^l}{d\mu^l}$ через $P_l(\mu)$, то мы получим:

$$P_l^m(\mu) = (-1)^m\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}(1-\mu^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_l(\mu)}{d\mu}. \tag{26}$$

Эта формула является известным выражением нормированных присоединенных функций Лежандра через нормированный многочлен Лежандра соответствующего порядка.

5. Разложение функций на сфере по сферическим функциям. До сих пор мы строили отдельные неприводимые представления. Из § 1, п. 5 мы знаем, что каждое унитарное представление группы вращений, даже бесконечномерное, можно разложить на неприводимые представления. В начале этого параграфа мы определили бесконечномерное пространство функций с интегрируемым квадратом модуля на поверхности сферы. Преобразования сдвига T_g дают в этом пространстве унитарное представление группы вращений.

Общая теорема о разложении представления на неприводимые означает в этом случае, что каждую функцию $f(\theta, \varphi)$ с интегрируемым квадратом модуля на поверхности сферы можно представить как сходящийся в среднем ряд

$$f = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_l + \ldots,$$

где каждый элемент принадлежит инвариантному подпространству, в котором действует неприводимое представление.

Мы выяснили уже, что каждое из этих инвариантных подпространств состоит из сферических функций определенного порядка, т. е.

$$\varphi_l = \sum_{m=-l}^{l} C_l^m Y_l^m(\theta, \varphi).$$

Заметим, что из общих теорем § 3 следует, что $Y_l^m(\theta, \varphi)$ образуют ортогональную систему на поверхности сферы. Действительно, сферические функции с разными l ортогональны, так как они принадлежат подпространствам, в которых действуют неэквивалентные неприводимые представления. При одном и том же l и различных m они ортогональны как элементы канонического базиса.

Таким образом, доказано, что *произвольная функция с интегрируемым квадратом модуля на поверхности сферы разлагается в ряд, сходящийся в среднем, по ортогональной системе сферических функций*. Отсюда, в частности, следует полнота системы сферических функций на поверхности сферы.

Разложение функций в ряд по сферическим функциям полезно во многих вопросах математической физики в силу инвариантности такого разложения относительно вращений. По этой причине сферические функции играют в задачах, связанных с поверхностью сферы, ту же роль, какую играют тригонометрические функции в задачах, связанных с окружностью.

§ 4. Произведение представлений

В этом параграфе мы укажем способ, как по двум данным представлениям группы вращений построить третье представление, называемое их произведением. При этом окажется, что многие важные представления являются произведениями простейших. Так, например, тензорные представления, которым посвящен следующий параграф, оказываются произведениями неприводимых представлений с $l=1$, а спинорные представления (см. § 6) — произведениями неприводимых представлений с $l=\frac{1}{2}$.

Далее мы покажем, как разлагать произведение двух неприводимых представлений на неприводимые представления.

1. Определение произведения представлений. Прежде чем определить произведение представлений, нам придется ввести произведение пространств. Пусть R_1 — p-мерное евклидово пространство с ортогональным и нормированным базисом $e_1, e_2, \ldots, e_p$, а R_2 — q-мерное евклидово пространство с ортогональным и нормированным базисом $f_1, f_2, \ldots, f_q$. Рассмотрим всевозможные пары $e_i f_k$. Их линейные комбинации с произвольными коэффициентами

$$h=\sum_{i,k=1}^{\substack{k=q\\ i=p}} a_{ik} e_i f_k$$

мы будем считать векторами нового пространства R. Так построенное пространство R называется *произведением пространств* R_1 *и* R_2 и обозначается $R_1 \times R_2$. Таким образом, вектор h пространства R задается pq числами

$$a_{ik} \quad (i=1, 2, \ldots, p; \; k=1, 2, \ldots, q),$$

т. е. это пространство имеет размерность pq. Если взять произвольный элемент $e=\sum_i \mu_i e_i$ из R_1 и произвольный элемент $f=\sum_k \lambda_k f_k$ из R_2, то под ef мы будем понимать элемент пространства $R_1 \times R_2$, равный $\sum_{i,k} \mu_i \lambda_k e_i f_k$.

Определим скалярное произведение двух векторов $h' = \sum_{i,k} a'_{ik} f_i e_k$ и $h'' = \sum_{i,k} a''_{ik} e_i f_k$ пространства $R = R_1 \times R_2$ формулой

$$(h', h'') = \sum_{i,k} a'_{ik} \bar{a}''_{ik}, \tag{1}$$

т. е. будем считать базис $e_i f_k$ пространства $R = R_1 \times R_2$ ортогональным и нормированным.

Аналогично можно определить произведение трех, четырех и т. д. пространств.

В дальнейшем мы часто будем встречаться с произведением трехмерного пространства самого на себя. Каждый его элемент задается системой девяти чисел a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$.

Произведение трех трехмерных пространств есть 27-мерное пространство, каждый элемент которого задается системой чисел

$$a_{ikl} \quad (i, k, l = 1, 2, 3).$$

Аналогично произведение r трехмерных пространств задается системой 3^r чисел

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \qquad (i_1, i_2, i_3, \ldots, i_r = 1, 2, 3).$$

Перейдем теперь к определению произведения представлений. Пусть нам даны два представления трехмерной группы вращений: представление матрицами U_g, действующее в p-мерном пространстве R_1, и представление матрицами V_g, действующее в q-мерном пространстве R_2. Рассмотрим произведение пространств R_1 и R_2. По представлениям, действующим в R_1 и R_2 соответственно, мы можем построить некоторое новое представление, действующее в R. А именно, так как при вращении g векторы e_i пространства R_1 переходят в $U_g e_i$, а векторы f_k пространства R_2 — в векторы $V_g f_k$, то мы определим преобразование T_g в пространстве $R_1 \times R_2$, отвечающее вращению g, формулой

$$T_g e_i f_k = U_g e_i V_g f_k. \tag{2}$$

Так как векторы $e_i f_k$ образуют базис в пространстве $R_1 \times R_2$, то, задав $T_g e_i f_k$, мы тем самым определили линейное преобразование T_g для всех элементов из R. Легко выписать матрицу этого преобразования. Действительно, если при представлении в пространстве R_1 вращению g отвечает матрица $U_g = \|u_{si}\|$, т. е.

$$U_g e_i = \sum_{s=1}^{p} u_{si} e_s,$$

а при представлении в пространстве R_2 — матрица $V_g = \|v_{rk}\|$, т. е.

$$V_g f_k = \sum_{r=1}^{q} v_{rk} f_r,$$

то по определению преобразования T_g

$$T_g e_i f_k = \sum_{s=1}^{p} \sum_{r=1}^{q} u_{si} v_{rk} e_s f_r.$$

Отсюда следует, что произвольный элемент пространства $R_1 \times R_2$, имеющий в базисе $e_i f_k$ координаты a_{ik}, переходит при преобразовании в элемент с координатами $a'_{sr} = \sum_{i,k} u_{si} v_{rk} a_{ik}$.

Исходя из формулы (2), легко проверить, что так определенные преобразования T_g образуют в пространстве R представление трехмерной группы вращений, т. е. что произведению вращений g_1 и g_2 отвечает произведение преобразований T_{g_1} и T_{g_2}.

Итак, *произведением представлений* $g \to U_g$ *и* $g \to V_g$, *действующих в пространствах* R_1 *и* R_2 *соответственно, называется представление* $g \to T_g$, *действующее в пространстве* $R = R_1 \times R_2$. *При этом, если матрица* U_g *в базисе* e_i *есть* $\|u_{si}\|$, *а матрица* V_g *в базисе* f_k *есть* $\|v_{rk}\|$, *то вектор* h *из* $R_1 \times R_2$, *имеющий в базисе* $e_i f_k$ *компоненты* a_{ik}, *преобразуется при вращении* g *в вектор* $h' = T_g h$, *компоненты которого определяются по формулам*

$$a'_{sr} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} u_{si} v_{rk} a_{ik}. \tag{3}$$

Аналогично можно определить произведение любого числа представлений.

Отметим, что полученному результату можно придать также следующую формулировку. Каждому элементу $h = \sum a_{ik} e_i f_k$ произведения пространств поставим в соответствие матрицу $\|a_{ik}\|$ с p строками и q столбцами, составленную из его координат. Эту матрицу также будем обозначать через h: $h = \|a_{ik}\|$. Тогда формула (3), определяющая преобразование $h \to T_g h$, может быть записана в виде

$$T_g h = U_g h V_g^T, \tag{3'}$$

где V_g^T — транспонированная матрица V_g.

Покажем теперь, что произведение унитарных представлений U_g и V_g также унитарно. Для этого заметим раньше, что в силу определения скалярного произведения в произведении пространств (формула (1)) мы имеем:

$$(ef,\ e'f') = (e,\ e')(f,\ f').$$

Для того чтобы доказать, что T_g унитарно, достаточно показать, что T_g переводит ортогональный нормированный базис $e_i f_k$ снова в ортогональный нормированный базис. Но это ясно. Действительно,

$$(T_g e_i f_k,\ T_g e_{i'} f_{k'}) = (U_g e_i V_g f_k,\ U_g e_{i'} V_g f_{k'}) =$$
$$= (U_g e_i,\ U_g e_{i'})(V_g f_k,\ V_g f_{k'}) = \delta_{ii'} \cdot \delta_{kk'},$$

т. е. $T_g e_i f_k$ есть ортогональный нормированный базис, и унитарность T_g доказана.

Рассмотрим важный пример. Простейшим представлением группы трехмерных вращений является тождественное представление в трехмерном пространстве, при котором каждому вращению g отвечает матрица этого вращения $g = \|g_{si}\|$. Найдем произведение этого представления на себя. Произведение двух трехмерных пространств есть девятимерное пространство, элементы которого задаются компонентами a_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$. Так как при вращении g трехмерное пространство преобразуется с помощью матрицы $\|g_{is}\|$, то числа a_{ik} согласно (2) преобразуются при вращении g по формулам

$$a'_{sr} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} g_{si} g_{rk} a_{ik}.$$

Аналогично определяется произведение r таких представлений. Элемент из произведения r трехмерных пространств задается системой 3^r чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_r = 1, 2, 3)$. При вращении g эти числа преобразуются по формулам

$$a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_r = 1}^{3} g_{i'_1 i_1} g_{i'_2 i_2} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r}. \tag{3''}$$

Это представление называется *тензорным представлением.*

С введенным только что представлением тесно связано понятие тензора. Предположим, что некоторая величина определяется в каждой системе координат совокупностью 3^r чисел $a_{i_1 \ldots i_r}$. При этом мы должны указать, как связаны эти числа в различных системах координат. Для случая вектора в трехмерном пространстве эта связь хорошо известна, а именно, если $g = \|g_{ik}\|$ есть матрица перехода от одной прямоугольной системы координат к другой, то

$$a'_i = \sum g_{ik} a_k.$$

Если заданная в каждой ортогональной системе координат совокупность чисел $a_{i_1 \ldots i_r}$ $(i_1, \ldots, i_r = 1, 2, 3)$ *при переходе от одной системы к другой с помощью матрицы* $g = \|g_{ik}\|$ *преобразуется по формулам*

$$a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = \sum_{i_1, i_2, \ldots i_r = 1}^{3} g_{i'_1 i_1} g_{i'_2 i_2} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

то мы говорим, что нам задан тензор r-го ранга в трехмерном евклидовом пространстве. Другими словами, тензор r-го ранга есть элемент из произведения r трехмерных евклидовых пространств, в котором действует определенное выше представление группы трехмерных вращений. Более подробно тензоры и тензорные представления будут рассмотрены в следующем параграфе.

2. Преобразования, отвечающие в произведении представлений бесконечно малым поворотам. Найдем, какие преобразования отвечают при произведении представлений бесконечно малым поворотам вокруг каждой из координатных осей. Чтобы сделать это, мы должны в соответствии с § 2 взять преобразование T_g, отвечающее повороту на угол α вокруг k-й координатной оси, и найти его главный член при разложении по степеням α. Множитель при α в этом главном члене и будет преобразованием A_k, отвечающим бесконечно малому повороту вокруг данной оси.

Мы знаем, что

$$T_g e_i f_k = U_g e_i V_g f_k.$$

Но при вращении на угол α вокруг фиксированной оси

$$U_g e_i = e_i + \alpha A e_i + \ldots,$$
$$V_g f_k = f_k + \alpha A f_k + \ldots,$$

где мы одной и той же буквой A обозначаем преобразование, отвечающее данному бесконечно малому повороту при каждом из представлений. Подставляя эти разложения в выражение $T_g e_i f_k$, получаем:

$$T_g e_i f_k = (e_i + \alpha A e_i + \ldots)(f_k + \alpha A f_k + \ldots) = e_i f_k + \alpha (A e_i f_k + e_i A f_k) + \ldots,$$

где многоточиями, как обычно, заменены члены выше первого порядка относительно α. Так как эта формула представляет собой разложение $T_g e_i f_k$ по степеням α, то отсюда имеем:

$$A(e_i f_k) = A e_i f_k + e_i A f_k. \tag{4}$$

Формула (4) дает правило нахождения преобразования, отвечающего при произведении представлений бесконечно малому повороту вокруг какой-либо оси, аналогичное, как мы видим, правилу дифференцирования произведения.

Аналогичная формула имеет место при произведении нескольких представлений.

3. Произведение двух неприводимых представлений. Предположим теперь, что представления $g \to U_g$ и $g \to V_g$, действующие в пространствах R_1 и R_2 соответственно, неприводимы. Произведение двух неприводимых представлений, как правило, приводимо. Выясним, как оно разлагается на произведение неприводимых представлений.

Рассмотрим неприводимое представление $g \to U_g$ с весом l_1, действующее в пространстве R_1, и представление $g \to V_g$ с весом l_2, действующее в R_2. Выберем в пространствах R_1 и R_2 канонические базисы $e_{-l_1}, e_{-l_1+1}, \ldots, e_{l_1}$ и $f_{-l_2}, f_{-l_2+1}, \ldots, f_{l_2}$ (т. е. базисы, состоящие из нормированных собственных векторов преобразования

$H_3 = iA_3$ в этих подпространствах). Тогда мы будем иметь:

$$H_3 e_{m_1} = m_1 e_{m_1} \qquad (-l_1 \leqslant m_1 \leqslant l_1),$$
$$H_3 f_{m_2} = m_2 f_{m_2} \qquad (-l_2 \leqslant m_2 \leqslant l_2)$$

(см. формулы (19) § 2). Рассмотрим преобразование H_3 для произведения представлений U_g и V_g. Согласно доказанному в п. 2

$$H_3 (e_{m_1} f_{m_2}) = H_3 e_{m_1} f_{m_2} + e_{m_1} H_3 f_{m_2} = m_1 e_{m_1} f_{m_2} + m_2 e_{m_1} f_{m_2} = \\ = (m_1 + m_2)\, e_{m_1} f_{m_2}. \qquad (5)$$

Таким образом, базис $e_{m_1} f_{m_2}$ пространства $R_1 \times R_2$ представляет собой систему ортогональных и нормированных собственных векторов преобразования H_3 с собственными значениями $m = m_1 + m_2$.

Выясним теперь, на какие неприводимые представления разлагается произведение представлений. Для этого найдем сначала, каковы собственные значения преобразования H_3 в пространстве $R_1 \times R_2$ и какова их кратность.

Так как m_1 меняется от $-l_1$ до l_1, а m_2 — от $-l_2$ до l_2, то из формулы (5) следует, что собственное значение m преобразования H_3 в $R_1 \times R_2$ принимает значения $l_1 + l_2$, $l_1 + l_2 - 1$, $\ldots$, $-l_1 - l_2$.

Для того чтобы найти кратность каждого собственного значения m, нужно найти число векторов $e_{m_1} f_{m_2}$, для которых $m_1 + m_2 = m$. Так как вместе с каждым вектором $e_{m_1} f_{m_2}$ базису принадлежит и вектор $e_{-m_1} f_{-m_2}$, то ясно, что число решений задачи не меняется при замене m на $-m$. Поэтому нам достаточно знать, какова кратность неотрицательных собственных значений m.

Предположим для определенности, что $l_1 \leqslant l_2$. Очевидно, что наибольшему собственному значению $m = l_1 + l_2$ отвечает лишь один собственный вектор $e_{l_1} f_{l_2}$. Собственному значению $m = l_1 + l_2 - 1$ отвечают два линейно независимых собственных вектора $e_{l_1 - 1} f_{l_2}$ и $e_{l_1} f_{l_2 - 1}$, значению $m = l_1 + l_2 - 2$ — три линейно независимых собственных вектора и т. д. Наконец, собственному значению $m = l_2 - l_1$ отвечают $2l_1 + 1$ собственных вектора

$$e_{-l_1} f_{l_2},\ e_{-l_1+1} f_{l_2 - 1},\ \ldots,\ e_{l_1} f_{l_2 - 2l_1}. \qquad (6)$$

При дальнейшем уменьшении собственного значения число собственных векторов не может увеличиться, так как в ряде (6) использованы *все* векторы e_{m_1}. Мы получим, таким образом, что каждому собственному значению $m = l_2 - l_1$, $m = l_2 - l_1 - 1$, $\ldots$, $m = -(l_2 - l_1)$ отвечают $2l_1 + 1$ собственных вектора. Например, $2l_1 + 1$ собственных вектора, отвечающих значению $m = -(l_2 - l_1)$, имеют вид

$$e_{-l_1} f_{-l_2 + 2l_1},\ e_{-l_1+1} f_{-l_2 + 2l_1 - 1},\ \ldots,\ e_{l_1} f_{-l_2}.$$

Уменьшая теперь собственные значения дальше от $-l_2 + l_1$ до $-l_2 - l_1$, мы, согласно замечанию, сделанному выше, будем уменьшать число собственных векторов от $2l_1+1$ до 1, так что собственному значению $-l_2-l_1$ снова отвечает лишь один собственный вектор, а именно, $e_{-l_1}f_{-l_2}$. Если бы было $l_2<l_1$, то результат был бы вполне аналогичен, только вместо l_2-l_1 следовало бы писать l_1-l_2. Итак, окончательно можно сформулировать следующий результат:

Преобразование H_3 в пространстве $R_1\times R_2$ имеет собственные значения l_1+l_2, l_1+l_2-1, ..., $-l_1-l_2$. При этом собственное значение l_1+l_2 имеет кратность 1, *собственное значение l_1+l_2-1 — кратность* 2 *и т. д. до $|l_2-l_1|$. В промежутке от $|l_2-l_1|$ до $-|l_2-l_1|$ все собственные значения имеют одну и ту же кратность $l_2+l_1-|l_2-l_1|+1$. Дальше, от $-|l_2-l_1|$ до $-l_2-l_1$, с уменьшением собственного значения на* 1, *его кратность также уменьшается на* 1, *так что наименьшее собственное значение $-l_2-l_1$ снова имеет кратность* 1 *).

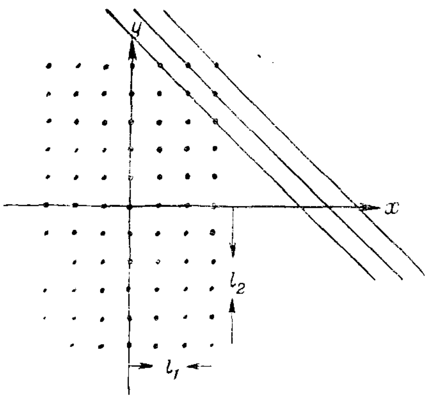

Рис. 4.

На какие же неприводимые представления разлагается данное представление? Так как собственные значения m преобразования H_3 в пространстве $R_1\times R_2$ удовлетворяют неравенствам $-(l_1+l_2)\leqslant m\leqslant(l_1+l_2)$, то веса l этих неприводимых представлений во всяком случае не превосходят l_1+l_2.

У H_3 есть один собственный вектор $e_{l_1}f_{l_2}$ с собственным значением l_1+l_2. Как мы знаем из § 2, пронормированные векторы $e_{l_1}f_{l_2}$, $H_-(e_{l_1}f_{l_2})$, $H_-^2(e_{l_1}f_{l_2})$, ..., $H_-^{2l}(e_{l_1}f_{l_2})$ образуют базис в подпространстве $R^{(1)}$, в котором действует неприводимое представление с весом $l=l_1+l_2$. Среди этих векторов имеются собственные векторы H_3, соответствующие всем собственным значениям от l_1+l_2 до $-(l_1+l_2)$. Поэтому если рассмотреть ортогональное дополнение R' к $R^{(1)}$, то в R' у H_3 все собственные значения будут иметь кратность на еди-

*) Этот же результат легко получается также из рис. 4. Отмеченные точки прямоугольника $-l_1\leqslant x\leqslant l_1$, $-l_2\leqslant y\leqslant l_2$ соответствуют встречающимся парам значений m_1 и m_2. Прямая $x+y=m$ при $m=l_1+l_2$ содержит одну отмеченную точку; при уменьшении m на единицу число точек, которые на нее попадают, каждый раз увеличивается на единицу до значения $m=|l_2-l_1|$ (т. е. пока прямая не дойдет до левого верхнего угла прямоугольника). От этого значения до $m=-|l_2-l_1|$ прямая содержит одно и то же количество отмеченных точек, и затем, с уменьшением m, число отмеченных точек, попавших на прямую, также уменьшается до нуля.

ницу меньше, чем в $R=R_1\times R_2$. В частности, собственного значения l_1+l_2 у H_3 в R' не будет, а наибольшее собственное значение H_3 в R' будет равно l_1+l_2-1 и будет простым.

Возьмем в R' собственный вектор, отвечающий собственному значению l_1+l_2-1 *), и построим, начиная с него, цепочку собственных векторов, образующих базис для подпространства $R^{(2)}$, в котором действует неприводимое представление с номером l_1+l_2-1.

Продолжая этот процесс, мы будем выделять из R подпространства, в которых действуют неприводимые представления с номерами l_1+l_2, l_1+l_2-1, l_1+l_2-2 и т. д., пока не придем к подпространству, в котором наибольшее собственное значение равно $|l_2-l_1|$ и имеет кратность 1. В этом подпространстве H_3 имеет собственные значения $|l_2-l_1|$, $|l_2-l_1|-1$, $|l_2-l_1|-2$, ..., $-|l_2-l_1|$ и, как легко видеть, все эти собственные значения имеют одинаковую кратность 1. Отсюда видно, что представление, действующее в этом подпространстве, есть неприводимое представление с весом $|l_2-l_1|$.

Мы получили, таким образом, следующий результат: *произведение неприводимых представлений с номерами l_1 и l_2 разлагается на неприводимые представления с номерами l_1+l_2, l_1+l_2-1, ..., $|l_2-l_1|$, причем каждое из этих неприводимых представлений встречается в разложении один раз.*

4. Разложение произведения неприводимых представлений, когда одно из них имеет вес 1 или 1/2. В предыдущем пункте мы выяснили, на какие представления разлагается произведение двух неприводимых представлений. Для того чтобы фактически произвести разложение, нужно представить канонические базисы в каждом из подпространств, на которые разлагается $R_1\times R_2$, как линейные комбинации векторов $e_{m_1}f_{m_2}$. Коэффициенты соответствующих линейных комбинаций в общем случае выглядят громоздко. В настоящем пункте мы определим эти коэффициенты в наиболее простых и, вместе с тем, часто встречающихся случаях, когда одно из неприводимых представлений, произведение которых разлагается, имеет вес $l=1$ или $l=\frac{1}{2}$. Общий случай рассмотрен в § 10.

Пусть неприводимое представление $g\to U_g$ имеет вес $l=1$ и $e_{-1}=e_-$, e_0 и $e_1=e_+$ — канонический базис в трехмерном пространстве R_1 **). Представление $g\to V_g$ имеет вес $l\geqslant 1$, и векторы канонического базиса этого представления обозначим f_m $(-l\leqslant m\leqslant l)$.

---

*) Не следует думать, что он совпадает с одним из базисных векторов $e_{l_1-1}f_{l_2}$ или $e_{l_1}f_{l_2-1}$, отвечающих этому собственному значению. Действительно, принадлежащий к $R^{(1)}$ вектор $H_-(e_{l_1}f_{l_2})$ равен $H_-e_{l_1}f_{l_2}+e_{l_1}H_-f_{l_2}=$ $=\sqrt{2l_1}e_{l_1-1}f_{l_2}+\sqrt{2l_2}e_{l_1}f_{l_2-1}$. Поэтому вектор, отвечающий тому же собственному значению l_1+l_2-1 и ортогональный к $R^{(1)}$ также будет линейной комбинацией векторов $e_{l_1-1}f_{l_2}$ и $e_{l_1}f_{l_2-1}$.

**) Связь этого базиса с обычным базисом в трехмерном пространстве см. в п. 5 § 2.

Рассмотрим теперь произведение этих представлений. Базис в пространстве $R_1 \times R_2$, в котором действует это представление, состоит из $3(2l+1)$ векторов e_+f_m, e_0f_m, e_-f_m $(-l \leqslant m \leqslant l)$. По доказанному в п. 3 пространство $R_1 \times R_2$ разлагается на сумму трех инвариантных подпространств, в которых действуют неприводимые представления с весами $l+1$, l и $l-1$ соответственно. Канонические базисы, состоящие из собственных векторов H_3 в этих подпространствах, обозначим через g_m^{l+1}, g_m^l и g_m^{l-1}, где значок наверху указывает на вес неприводимого представления, действующего в данном подпространстве, а m, как всегда, — собственное значение H_3, которому соответствует данный собственный вектор.

При фиксированном m каждый из векторов g_m^{l+1}, g_m^l и g_m^{l-1} является собственным вектором H_3 в пространстве $R_1 \times R_2$, отвечающим собственному значению m. Поэтому векторы g_m^{l+1}, g_m^l, g_m^{l-1} являются линейными комбинациями тех базисных векторов $e_{m_1}f_{m_2}$, которые являются собственными векторами H_3 с тем же самым собственным значением m, т. е. e_-f_{m+1}, e_0f_m, e_+f_{m-1}. Другими словами, g_m^{l+1}, g_m^l, g_m^{l-1} и e_-f_{m+1}, e_0f_m, e_+f_{m-1} являются различными базисами в трехмерном подпространстве *) пространства $R_1 \times R_2$, состоящем из всех собственных векторов H_3, отвечающих собственному значению m. Нам нужно для любого m найти матрицу перехода от одного из этих двух базисов к другому.

Положим:

$$\left.\begin{aligned} e_-f_{m+1} &= c_{11}^m g_m^{l+1} + c_{12}^m g_m^l + c_{13}^m g_m^{l-1}, \\ e_0f_m &= c_{21}^m g_m^{l+1} + c_{22}^m g_m^l + c_{23}^m g_m^{l-1}, \\ e_+f_{m-1} &= c_{31}^m g_m^{l+1} + c_{32}^m g_m^l + c_{33}^m g_m^{l-1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Так как векторы e_-f_{m+1}, e_0f_m и e_+f_{m-1} попарно ортогональны и нормированы и векторы g_m^{l+1}, g_m^l, g_m^{l-1} также ортогональны и нормированы (они принадлежат различным ортогональным друг к другу подпространствам $R_1 \times R_2$), то матрица $C^{(m)} = \|c_{ik}^m\|$ есть унитарная матрица третьего порядка.

При $m = -l-1$ из системы равенств (7) нужно оставить верхнее, и оно превращается в равенство

$$e_-f_{-l} = c_{11}^{-l-1} g_{-l-1}^{l+1}. \tag{7'}$$

При $m = -l$ имеем два равенства:

$$\left.\begin{aligned} e_-f_{-l+1} &= c_{11}^{-l} g_{-l}^{l+1} + c_{12}^{-l} g_{-l}^l, \\ e_0f_{-l} &= c_{21}^{-l} g_{-l}^{l+1} + c_{22}^{-l} g_{-l}^l. \end{aligned}\right\} \tag{7''}$$

---

*) Если $m = l+1$, то это пространство одномерно, а если $m = l$ или $m = -l$, то оно двумерно.

Аналогичное вырождение формул (7) произойдет при $m=l+1$ и при $m=l$.

Для того чтобы определить матрицу $C^{(m)}$, применим преобразования H_- и H_+ к обеим частям равенства (7). Мы получим тогда рекуррентные соотношения, из которых и найдем $C^{(m)}$.

Сначала найдем первую строчку матрицы $C^{(m)}$. Для этого применим H_- к первому из равенств (7). Вспоминая (§ 2), что $H_-f_m = \alpha^l_m f_{m-1}$, где $\alpha^l_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}$, мы из левой части (7) получаем:

$$H_-(e_-f_{m+1}) = e_-H_-f_{m+1} = \alpha^l_{m+1}e_-f_m =$$
$$= \alpha^l_{m+1}\left(c^{m-1}_{11} g^{l+1}_{m-1} + c^{m-1}_{12} g^l_{m-1} + c^{m-1}_{13} g^{l-1}_{m-1}\right).$$

С другой стороны, применяя H_- к правой части того же равенства мы получаем:

$$c^m_{11}\alpha^{l+1}_m\, g^{l+1}_{m-1} + c^m_{12}\alpha^l_m g^l_{m-1} + c^m_{13}\alpha^{l-1}_m g^{l-1}_{m-1}.$$

Эти выражения должны быть равны друг другу. Приравнивая коэффициенты при одних и тех же векторах g и заменяя α^l_m их значениями, находим рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} c^m_{11}\sqrt{l-m+2} &= c^{m-1}_{11}\sqrt{l-m}, \\ c^m_{12}\sqrt{(l+m)(l-m+1)} &= c^{m-1}_{12}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}, \\ c^m_{13}\sqrt{l+m-1} &= c^{m-1}_{13}\sqrt{l+m+1}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как векторы e_-f_{-l} и g^{l+1}_{-l-1} нормированы, то из формулы (7′) следует, что $|c^{-l-1}_{11}| = 1$. Полагая $c^{-l-1}_{11} = 1$ *), мы, применяя первую из формул (8), находим, что

$$c^m_{11} = \sqrt{\frac{l-m}{l-m+2}}\, c^{m-1}_{11} = \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(l-m+2)(l-m+3)}}\, c^{m-2}_{11} = \ldots$$
$$\ldots = \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(l-n)(l-n+1)}}\, c^n_{11} = \ldots = \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}}\, c^{-l-1}_{11},$$

т. е. что

$$c^m_{11} = \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}}.$$

*) Так как каждый из трех векторов g^{l+1}_m, g^l_m и g^{l-1}_m выбирается с точностью до численного множителя, по модулю равного единице, то мы можем зафиксировать этот множитель, выбрав определенным образом по одному коэффициенту в каждом столбце матрицы $C^{(m)}$ (для какого-нибудь одного m).

Полагая $m=-l$ и пользуясь тем, что матрица преобразования (7″) унитарна, т. е. должно быть $|c_{11}^{-l}|^2+|c_{12}^{-l}|^2=1$, находим, далее, что $|c_{12}^{-l}|=\sqrt{\frac{1}{l+1}}$. Полагая снова $c_{12}^{-l}=\sqrt{\frac{1}{l+1}}$ (см. примечание на стр. 63), находим с помощью второго из соотношений (8)

$$c_{12}^{m}\sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)}}.$$

Идя тем же путем, мы из третьей формулы (8) найдем, что

$$c_{13}^{m}=\sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{2l(l+1)}}$$

(при этом мы воспользовались тем, что $|c_{13}^{-l+1}|^2=1-|c_{12}^{-l+1}|^2-|c_{11}^{-l+1}|^2=\frac{1}{l(2l+1)}$, и, как и выше, положили $c_{13}^{-l+1}=\sqrt{\frac{1}{l(2l+1)}}\Big)$. Таким образом, мы определим все элементы первой строки матрицы $C^{(m)}$.

Для того чтобы найти вторую строку этой матрицы, применим к первому из равенств (7) преобразование H_+. Мы получим тогда:

$$\sqrt{2}e_0 f_{m+1}+\alpha_{m+2}^{l}e_- f_{m+2}=c_{11}^{m}\alpha_{m+1}^{l+1}g_{m+1}^{l+1}+c_{12}^{m}\alpha_{m+1}^{l}g_{m+1}^{l}+c_{13}^{m}\alpha_{m+1}^{l-1}g_{m+1}^{l-1},$$

и, заменяя теперь каждый из векторов левой части, снова по формулам (7) найдем простые соотношения, выражающие элементы второй строки матрицы $C^{(m)}$ через известные уже элементы первой строки. Отсюда однозначно определятся c_{21}^{m}, c_{22}^{m}, c_{23}^{m}. Дальше, применяя преобразование H_+ ко второй строке равенств (7), мы аналогичным образом выразим элементы третьей строки матрицы $C^{(m)}$ через элементы второй и отсюда найдем c_{31}^{m}, c_{32}^{m}, c_{33}^{m}.

Окончательно получается следующий результат:

$$C^{(m)}=\left\|\begin{matrix} \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{2l(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)}} & \frac{m}{\sqrt{l(l+1)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{l(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+1)}{2l(2l+1)}} \end{matrix}\right\|. \qquad (9)$$

В силу ортогональности этой матрицы, обратная к ней совпадает с транспонированной, и поэтому векторы g_m^{l+1}, g_m^{l}, g_m^{l-1} выражаются через $e_- f_{m+1}$, $e_0 f_m$, $e_+ f_{m-1}$ с помощью столбцов этой же матрицы.

Рассмотрим теперь произведение неприводимого представления с $l=\frac{1}{2}$ на произвольное неприводимое представление с номером l. Оно разлагается на представление с номером $l+\frac{1}{2}$ $\Big($базис в соответствующем пространстве обозначим $g_m^{l+\frac{1}{2}}\left(-l-\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant l+\frac{1}{2}\right)\Big)$ и представление с номером $l-\frac{1}{2}$ $\Big($базис — $g_m^{l-\frac{1}{2}}\left(-l+\frac{1}{2}\leqslant m\leqslant\right.$ $\left.\leqslant l-\frac{1}{2}\right)\Big)$. Аналогично предыдущему имеем:

$$e_{\frac{1}{2}}f_{m-\frac{1}{2}}=c_{11}^m g_m^{l+\frac{1}{2}}+c_{12}^m g_m^{l-\frac{1}{2}},$$

$$e_{-\frac{1}{2}}f_{m+\frac{1}{2}}=c_{21}^m g_m^{l+\frac{1}{2}}+c_{22}^m g_m^{l-\frac{1}{2}}.$$

Применяя H_+ к первому равенству и H_- ко второму и полагая $c_{11}^{l+\frac{1}{2}}=c_{21}^{-l-\frac{1}{2}}=1$, мы найдем, что матрица $C^{(m)}$ для остальных значений m имеет вид

$$C^{(m)}=\left\|\begin{matrix}\sqrt{\dfrac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & -\sqrt{\dfrac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\\ \sqrt{\dfrac{l-m+\frac{1}{2}}{2l+1}} & \sqrt{\dfrac{l+m+\frac{1}{2}}{2l+1}}\end{matrix}\right\|. \tag{10}$$

§ 5. Тензоры и тензорные представления

В предыдущем параграфе, в связи с определением произведения представлений, мы определили понятие тензора. Мы говорили, что *нам задан тензор r-го ранга в трехмерном евклидовом пространстве, если каждой ортогональной системе координат сопоставлена совокупность 3^r чисел $a_{i_1 i_2\ldots i_r}$, которая при переходе от одной системы к другой преобразуется по формулам*

$$a'_{i'_1 i'_2\ldots i'_r}=\sum_{i_1=1}^{3}\sum_{i_2=1}^{3}\ldots\sum_{i_r=1}^{3}g_{i'_1 i_1}g_{i'_2 i_2}\ldots g_{i'_r i_r}a_{i_1 i_2\ldots i_r}, \tag{1}$$

где $\|g_{ik}\|$ — матрица перехода от одной координатной системы к другой. Матрица перехода — это матрица, выражающая новые базисные векторы e'_1, e'_2, e'_3 через старые e_1, e_2, e_3 по формулам

$$e'_i=\sum_{k=1}^{3}g_{ik}e_k.$$

Рассмотрим совокупность всех тензоров r-го ранга в определенной системе координат, т. е. все системы из 3^r чисел $a_{i_1 i_2\ldots i_r}$.

Они образуют 3^r-мерное пространство R, в котором обычным образом определены операции сложения и умножения на число. Формула (1) задает линейное преобразование в 3^r-мерном пространстве, переводящее $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ в $a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}$. *Если каждому вращению $g = \|g_{ik}\|$ поставить в соответствие линейное преобразование* (1), *то мы получим представление группы вращений, рассмотренное в* § 4 (*тензорное представление*). Это представление, как мы видели, есть произведение трехмерных представлений группы вращений *).

Отметим, как ведут себя тензоры при отражении относительно начала координат. При отражении координаты вектора, т. е. тензора первого ранга, меняют знак. Отсюда следует, что при отражении относительно начала координат компоненты тензора второго ранга не меняются, компоненты тензора третьего ранга меняют знак и вообще компоненты тензора r-го ранга умножаются на $(-1)^r$.

Тензорные представления при $r > 1$ приводимы. В п. 2 этого параграфа мы разложим эти представления на кратные неприводимым. Прежде чем это сделать, мы в п. 1 рассмотрим некоторые операции над тензорами и их связь с вопросом о разложении пространства тензоров на инвариантные подпространства, т. е. о разложении тензорных представлений.

1. Основные алгебраические операции над тензорами и инвариантные подпространства. Определим операцию свертки тензора. Для этого рассмотрим тензор r-го ранга $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$. Выберем те его компоненты, у которых первые два индекса имеют одинаковое значение, и возьмем их сумму

$$\sum_{i=1}^{3} a_{i i i_3 i_4 \ldots i_r} = b_{i_3 i_4 \ldots i_r}. \tag{2}$$

Выражение (2) *называется следом тензора по первым двум индексам, а операция образования следа называется сверткой.* Аналогично можно определить свертку по любой другой паре индексов.

---

*) Заметим, что формулу (1) можно понимать в двух смыслах: как формулу, определяющую преобразование тензора при переходе к другой системе координат, и как формулу, дающую переход к другому тензору в той же самой системе координат. Обе точки зрения одинаково законны. Это отчетливо видно на примере тензоров первого ранга, т. е. векторов a_i. Действительно, если понимать под $\|g_{ik}\|$ матрицу поворота системы координат, то формула $a'_{i'} = \sum g_{i'i} a_i$ есть формула преобразования компонент данного вектора. Если же понимать под $\|g_{ik}\|$ матрицу, задающую вращение пространства в определенной системе координат, то та же формула дает компоненты повернутого вектора.

Из формулы (1) и ортогональности матриц $\|g_{ik}\|$ следует, что след тензора ранга r по любым двум индексам сам есть тензор ранга $r-2$. Действительно *),

$$b'_{i'_3 i'_4 \ldots i'_r} = a_{i'i'i'_3 \ldots i'_r} = g_{i'i_1} g_{i'i_2} g_{i'_3 i_3} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} =$$

$$= \delta_{i_1 i_2} g_{i'_3 i_3} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = g_{i'_3 i_3} g_{i'_4 i_4} \ldots g_{i'_r i_r} a_{iii_3 i_4 \ldots i_r} =$$

$$= g_{i'_3 i_3} g_{i'_4 i_4} \ldots g_{i'_r i_r} b_{i_3 i_4 \ldots i_r}.$$

Таким образом,

$$b'_{i'_3 i'_4 \ldots i'_r} = g_{i'_3 i_3} g_{i'_4 i_4} \ldots g_{i'_r i_r} b_{i_3 i_4 \ldots i_r}, \tag{3}$$

т. е. мы доказали, что след тензора преобразуется по тензорному закону и является, следовательно, тензором ранга $r-2$. В частности, след тензора второго ранга есть тензор нулевого ранга, т. е. скаляр (число, не зависящее от выбора системы координат). Тензор третьего ранга имеет три следа: a_{iik}, a_{iki}, a_{kii}, каждый из которых является вектором.

Операция образования следа дает нам способ строить подпространства в пространстве R, инвариантные относительно тензорного представления. Действительно, *тензоры* $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, *у которых след по некоторой паре индексов равен нулю, образуют в R подпространство, инвариантное относительно тензорного представления.* В самом деле, рассмотрим элементы $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ из R, у которых след, например по первым двум индексам, равен нулю, т. е. $b_{i_3 i_4 \ldots i_r} = a_{iii_3 i_4 \ldots i_r} = 0$. Тогда из формулы (3) следует, что $a'_{i'i'i'_3 \ldots i'_r} = 0$, т. е. $a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}$ принадлежит тому же подпространству. Значит, это подпространство инвариантно.

*) В дальнейшем мы будем, как это обычно делается при вычислениях с тензорами, опускать знак суммы в выражениях, в которых суммирование производится по дважды встречающемуся индексу. При этом условии формула (1), например, запишется в виде

$$a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = g_{i'_1 i_1} g_{i'_2 i_2} \ldots g_{i'_r i_r} a_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

а определение следа в виде

$$a_{iii_3 \ldots i_r} = b_{i_3 \ldots i_r}.$$

Равенство

$$g_{i'i_1} g_{i'i_2} = \delta_{i_1 i_2}$$

есть в этих обозначениях условие ортогональности матрицы $\|g_{ik}\|$.

Определим теперь операцию умножения тензоров. Для этого рассмотрим два тензора $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и $b_{j_1 j_2 \ldots j_p}$, вообще говоря, различного ранга r и p. *Произведением этих тензоров называется тензор* $c_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots j_p}$ *ранга* $r+p$, *компоненты которого представляют собой произведения различных компонент* $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и $b_{j_1 j_2 \ldots j_p}$, *т. е.*

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_r j_1 j_2 \ldots j_p} = a_{i_1 \ldots i_r} b_{j_1 \ldots j_p}.$$

Нетрудно проверить, что при преобразовании координат эти числа преобразуются так, как должны преобразовываться компоненты тензора ранга $r+p$, т. е. произведение тензоров действительно является тензором. Из формулы (1) очевидно также, что при преобразованиях представления произведение тензоров $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и $b_{j_1 j_2 \ldots j_p}$ переходит в произведение $a'_{i'_1 i'_2 \ldots i'_r}$ и $b'_{j'_1 j'_2 \ldots j'_p}$.

Чтобы получить инвариантные подпространства иного типа, чем были указаны выше, введем в рассмотрение так называемый единичный тензор второго ранга δ_{ik}, компоненты которого в любой системе координат определены равенствами

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Проверим, что δ_{ik} есть тензор. Действительно,

$$\delta'_{i'k'} = g_{i'i} g_{k'k} \delta_{ik} = g_{i'k} g_{k'k} = \begin{cases} 0, & i' \neq k', \\ 1, & i' = k', \end{cases}$$

т. е. компоненты этого тензора не меняются при переходе к другой системе координат.

Рассмотрим теперь тензоры r-го ранга, являющиеся произведениями единичного тензора на тензор ранга $r-2$, т. е. тензоры вида

$$a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_r} = \delta_{i_1 i_2} b_{i_3 \ldots i_r}. \tag{4}$$

Так как преобразования, составляющие представление, переводят единичный тензор снова в единичный тензор, а произведение в произведение, то тензоры вида (4) также образуют инвариантное подпространство в пространстве R тензоров r-го ранга.

Покажем, что всякий тензор r-го ранга можно представить как сумму двух тензоров, первый из которых имеет вид $\delta_{i_1 i_2} b_{i_3 \ldots i_r}$, а для второго $a_{iii_3 \ldots i_r} = 0$. Действительно, возьмем произвольный тензор $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и вычтем из него тензор $\frac{1}{3} \delta_{i_1 i_2} b_{i_3 \ldots i_r}$, где $b_{i_3 \ldots i_r}$ — след $a_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_r}$ по первым двум индексам. Мы получим тензор $c_{i_1 i_2 i_3 \ldots i_r}$, след которого по первым двум индексам, как легко видеть, равен нулю (так как $\delta_{ii} = 3$), что и доказывает наше утверждение. Таким образом, пространство R тензоров r-го ранга можно разложить в сумму инвариантных подпространств R' и R'', где R' — подпространство тензоров, у которых след по первым двум индексам равен нулю, а R'' — подпространство тензоров вида (4).

Аналогичное разложение можно осуществить с помощью свертки по любой другой паре индексов.

Укажем здесь еще другой способ выделения инвариантных подпространств в R. Пусть s обозначает произвольную перестановку чисел $i_1 i_2 \ldots i_r$, переводящую эти числа в $j_1 j_2 \ldots j_r$. Поставим тензору r-го ранга $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ в соответствие тензор, в котором переставлены индексы, т. е. $a_{j_1 j_2 \ldots j_r}$. Переход к этому тензору обозначим через S, т. е. положим:

$$Sa_{i_1 i_2 \ldots i_r} = a_{j_1 j_2 \ldots j_r}.$$

Очевидно, что S — линейное преобразование в пространстве тензоров r-го ранга. Мы будем называть преобразования такого рода преобразованиями подстановки. Так как безразлично, сначала ли произвести подстановку индексов и затем перейти к новым координатам или проделать эти операции в обратном порядке, то отсюда следует, что преобразования перестановки перестановочны с преобразованиями тензорного представления T_g.

Рассмотрим ряд преобразований подстановки $S_1, S_2, \ldots, S_p$ и возьмем их линейную комбинацию $\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p$. Тензоры, удовлетворяющие уравнению

$$(\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \ldots + \lambda_p S_p)\, a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = 0, \tag{5}$$

образуют в пространстве R линейное подпространство. Из того, что преобразования подстановки перестановочны с преобразованиями представления, следует, что это подпространство инвариантно относительно тензорного представления *).

Укажем способ разложения тензорного представления с помощью собственных значений преобразования подстановки **). Так как любая подстановка s в некоторой степени равна единичной, то преобразование S в тензорном пространстве, будучи повторено достаточное число раз, дает единичное преобразование E. Но это значит, что собственные значения преобразования S

*) В самом деле, пусть $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ принадлежит подпространству, определенному уравнением (5), т. е. $\sum_j \lambda_j S_j a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = 0$. Тогда

$$\sum_j \lambda_j S_j T_g a_{i_1 \ldots i_r} = T_g \Big(\sum_j \lambda_j S_j a_{i_1 i_2 \ldots i_r}\Big) = 0,$$

т. е. $T_j a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ принадлежит тому же подпространству.

**) Конечно, это разложение, вообще говоря, не есть разложение на неприводимые представления или на представления, кратные неприводимым.

равны корням соответствующей степени из собственных значений E, т. е. из единицы.

Возьмем некоторую подстановку s, и пусть $s^n = s_0$, где s_0 — тождественная подстановка. Обозначим через $\varepsilon_0 = 1$, ε_1, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1^2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ корни n-й степени из 1 и рассмотрим в тензорном пространстве подпространства тензоров, удовлетворяющих уравнениям

$$Sa_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \varepsilon_k a_{i_1 i_2 \ldots i_r}.$$

Из общей теории линейных преобразований известно, что эти подпространства образуют полное разложение тензорного пространства. Согласно сказанному выше все они инвариантны относительно тензорного представления, т. е. мы получаем, таким образом, некоторое разложение тензорного представления.

Например, если s_1 — перестановка первых двух индексов, переводящая $i_1 i_2 \ldots i_r$ в $i_2 i_1 \ldots i_r$, то $S_1^2 = S_0$ и собственные значения соответствующего преобразования S равны ± 1.

Поэтому всякий тензор $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ можно представить как сумму двух тензоров $b_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ и $c_{i_1 i_2 \ldots i_r}$

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = b_{i_1 i_2 \ldots i_r} + c_{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

где $b_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ удовлетворяет уравнению $b_{i_2 i_1 \ldots i_r} = -b_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, а $c_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ — уравнению $c_{i_2 i_1 i_3 \ldots i_r} = c_{i_1 i_2 \ldots i_r}$. Действительно, для этого достаточно положить:

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{1}{2}\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_r} - a_{i_2 i_1 \ldots i_r}\right),$$

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \frac{1}{2}\left(a_{i_1 i_2 \ldots i_r} + a_{i_2 i_1 \ldots i_r}\right).$$

Заметим, что совокупность уравнений вида (5) также выделяет инвариантное подпространство тензоров, удовлетворяющих всем этим уравнениям.

Тензоры, не меняющиеся ни при каких перестановках индексов $i_1 i_2 \ldots i_r$, называются симметрическими тензорами ранга r. Тензоры, не меняющиеся при четных и меняющие знак при нечетных перестановках индексов, называются кососимметрическими. Из сказанного ясно, что как симметрические, так и кососимметрические тензоры образуют инвариантные подпространства в пространстве R.

Рассмотрим подробнее кососимметрические тензоры в трехмерном пространстве. При перестановке любых двух индексов кососимметрический тензор должен менять знак. Отсюда видно, что если компонента кососимметрического тензора отлична от нуля, то все ее индексы должны иметь различные значения. Так как индексы $i_1, i_2, \ldots, i_r$ могут принимать только значения 1, 2 или 3, то отсюда следует, что кососимметрические тензоры выше третьего ранга равны нулю.

Пусть a_{ijk} — кососимметрический тензор третьего ранга. У такого тензора компонента a_{123} может быть произвольна, а остальные отличные от нуля компоненты определяются по ней из условия кососимметричности: $a_{231}=a_{312}=a_{123}$; $a_{213}=a_{321}=a_{132}=-a_{123}$. Обозначим тензор третьего ранга, у которого $a_{123}=1$, через ε_{ijk}. Остальные кососимметрические тензоры третьего ранга совпадают с ε_{ijk} с точностью до скалярного множителя.

Из формул (1) видно, что при преобразовании координат каждая компонента тензора ε_{ijk} умножается на детерминант преобразования матрицы $\|g_{ik}\|$. Поэтому при вращении компоненты этого тензора не меняются, а при вращении с отражением меняют знак. Таким образом, по отношению к представлению кососимметрический тензор третьего ранга представляет собой псевдоскаляр.

Рассмотрим кососимметрический тензор второго ранга a_{ij}. Очевидно, что у этого тензора три независимые компоненты a_{12}, a_{23} и a_{13}, т. е. такие тензоры образуют трехмерное пространство. Умножим a_{ij} на $\varepsilon_{i'j'k'}$ и затем свернем по индексам ii' и jj'. Мы получим тензор первого ранга

$$x_k=\varepsilon_{ijk}a_{ij},$$

т. е. вектор. Очевидно, что $\varepsilon_{ijk}a_{ij}=2a_{ij}$ или $\varepsilon_{ijk}a_{ij}=-2a_{ij}$ в зависимости от выбора системы координат. Таким образом, компоненты кососимметрического тензора совпадают с компонентами вектора x_k с точностью до множителя, знак которого зависит от системы координат. При переходе от одной системы к другой числа a_{23}, a_{31}, a_{12} в случае вращения преобразуются точно так же, как компоненты вектора x_1, x_2, x_3, а в случае вращения с отражением они, кроме того, меняют знак. Другими словами, это значит, что *кососимметрические тензоры второго ранга ведут себя по отношению к представлению, как псевдовекторы.*

В качестве иллюстрации рассмотрим разложение тензорного представления для тензоров второго ранга на неприводимые. Всякий тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметрического и кососимметрического тензора

$$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}.$$

Действительно, достаточно положить:

$$b_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}-a_{ji}),$$

$$c_{ij}=\frac{1}{2}(a_{ij}+a_{ji}).$$

Мы разложили девятимерное пространство тензоров второго ранга на сумму трехмерного пространства псевдовекторов (кососимметрических тензоров второго ранга) и шестимерного пространства симметрических тензоров. Представление в пространстве псевдовекторов неприводимо. Представление в пространстве симметрических тензоров можно разложить дальше. Всякий симметрический тензор можно представить в виде симметрического тензора со следом, равным нулю, и тензора, кратного единичному. Действительно, $c_{ij}=\lambda\delta_{ij}+$ $+d_{ij}$, где $\lambda=\frac{1}{3}c_{ii}$, а симметрический тензор $d_{ij}=c_{ij}-\lambda\delta_{ij}$ имеет след, равный нулю.

Таким образом, *мы разложили девятимерное пространство тензоров второго ранга в сумму инвариантных подпространств: одномерного подпространства тензоров вида* $\lambda\delta_{ij}$, *трехмерного подпространства кососимметрических тензоров и пятимерного подпространства симметрических тензоров со следом, равным нулю.*

Неприводимость представлений в первых двух подпространствах очевидна. Можно было бы без труда показать, что в последнем подпространстве также реализуется неприводимое представление с $l=2$. Это, впрочем, будет следовать из дальнейшего *).

Разложение на неприводимые представления тензорного представления третьего ранга более сложно. Мы получим его в п. 3 как частный случай более общих рассмотрений.

2. Определение весов неприводимых представлений, на которые разлагается тензорное представление. В этом пункте мы выясним, на какие неприводимые представления можно разложить произвольное тензорное представление. Ответ на этот вопрос вытекает из результатов предыдущего параграфа о разложении на неприводимые произведения двух неприводимых представлений.

Мы знаем, что тензорное представление ранга 1 само есть неприводимое представление веса $l=1$ (основное представление).

Рассмотрим тензорное представление ранга 2. Оно есть произведение двух неприводимых представлений веса 1, и поэтому оно разлагается на три неприводимых представления с весами 0, 1 и 2 соответственно.

Следующее тензорное представление ранга 3 представляет собой произведение тензорного представления ранга 2 на трехмерное неприводимое представление. Пространство R тензоров второго ранга разложимо, как указано выше, в сумму трех инвариантных подпространств (обозначим их R_0, R_1 и R_2), в которых действуют неприводимые представления весов $l=0$, 1, 2 соответственно. Поэтому произведение этого пространства на трехмерное пространство R_1: $R\times R_1$ может быть разложено на суммы инвариантных подпространств $R_0\times R_1$, $R_1\times R_1$ и $R_2\times R_1$. Так как представление в каждом из этих трех подпространств есть произведение двух неприводимых

---

*) Этот результат следует также из § 4. Действительно, тензорное представление для $r=2$ есть произведение двух неприводимых представлений с $r=1$ (основных представлений). Следовательно, оно разлагается на неприводимые представления с весами $l=0$, 1, 2.

представлений, то к нему можно применить результаты § 4. Мы получаем:

$R_2 \times R_1$ как произведение представлений весов 2 и 1 разлагается на три представления весов 3, 2, 1.

$R_1 \times R_1$ (опять в силу результата § 4) разлагается на представления весов 2, 1, 0.

$R_0 \times R_1$ есть неприводимое представление веса 1.

Объединяя эти результаты, мы видим, что тензорное представление ранга 3 разлагается на сумму одного неприводимого представления веса 0, трех неприводимых представлений веса 1, двух неприводимых представлений веса 2 и одного неприводимого представления веса 3.

Так как тензорное представление ранга 4 есть произведение представления ранга 3 и 1, то, пользуясь найденным разложением, мы можем найти, на какие неприводимые представления разлагается тензорное представление. Для этого представление ранга 3 надо разложить на неприводимые представления и затем каждое слагаемое в этом разложении умножить на представление ранга 1; полученные произведения нужно снова разложить на неприводимые и результаты сложить.

Вычисления удобно производить с помощью следующей таблицы:

Таблица I

Ранг тензора	Вес представления					
	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$r=0$	1					
$r=1$	0	1				
$r=2$	1	1	1			
$r=3$	1	3	2	1		
$r=4$	3	6	6	3	1	
$r=5$	6	15	15	10	4	1

Каждая строка соответствует тензорному представлению определенного ранга. Столбцы соответствуют неприводимым представлениям разных весов. Числа, стоящие на пересечении l-го столбца и r-й строки, указывают кратность, с которой представление с весом l входит в разложение представления в пространстве тензоров ранга r. Из предыдущего вытекает простое правило заполнения таблицы по строчкам: в каждой клетке r-й строки, начиная со второго столбца, стоит сумма чисел, расположенных в $(r-1)$-й строке непосредственно левее этой клетки, над ней и непосредственно правее нее.

Действительно, представления веса l в разложении представления r-го ранга появятся от умножения имеющихся в разложении представлений $(r-1)$-го ранга неприводимых представлений с весами $l-1$, l и $l+1$ на представление веса 1.

В первый столбец r-й строки переносится число из второго столбца $(r-1)$-й строки, так как разложение произведения представления веса 0 на представление веса 1 есть снова просто представление веса 1.

В первом столбце таблицы стоят представления с весом $l=0$. Величина, преобразующаяся по такому представлению, является либо скаляром, либо псевдоскаляром в зависимости от того, как она ведет себя при отражении. Так как тензор r-го ранга при отражении относительно начала координат умножается на $(-1)^r$, то в первом столбце при r четном будут скаляры и при r нечетном — псевдоскаляры. Величины, преобразующиеся по представлению веса $l=1$, суть векторы, если их компоненты меняют знак при отражении, и псевдовекторы в противоположном случае. Поэтому представления второго столбца при r четном описывают псевдовекторы, а при r нечетном — векторы.

Более общо представления l-го столбца будут описывать l-векторы, если $r+l$ четно, и соответствующие псевдовеличины при $r+l$ нечетном.

3. Разложение тензорного представления на представления, кратные неприводимым. Тензоры третьего ранга*). В п. 2 мы видели, что в разложении тензорного представления неприводимые представления с одним и тем же весом l встречаются, вообще говоря, по нескольку раз. В этом пункте мы укажем способ разложения тензорного представления на представления, кратные неприводимым (определение представления, кратного неприводимому, см. § 2).

Разложение будет проводиться методом, указанным в § 2. Мы знаем из этого параграфа, что векторы, преобразующиеся по неприводимому представлению веса l, удовлетворяют уравнению

$$H^2 f - l(l+1) f = 0, \tag{6}$$

где $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 = -\left(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2\right)$, а A_k — преобразования, отвечающие при представлении бесконечно малым поворотам вокруг координатных осей. Вычислив H^2 для тензорного представления и придавая в уравнении (6) числу l все значения, встречающиеся в r-й строке таблицы I, мы получим ряд уравнений. Решения каждого из этих уравнений образуют инвариантное подпространство, в котором действует представление, кратное неприводимому представлению с соответствующим весом l.

Найдем вид уравнений, определяющих инвариантные подпространства, т. е. вычислим для тензорного представления преобразование

---

*) О разложении тензорного представления на неприводимые более подробно см. Г. Вейль, Классические группы, М., ИЛ, 1947.

$H^2 = -(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$. Чтобы сделать это, надо, прежде всего, найти для этого представления преобразования A_1, A_2 и A_3. Тензорное представление ранга r есть произведение r трехмерных представлений. В § 4 мы показали, что преобразование A_k, отвечающее бесконечно малому повороту в произведении представлений, имеет вид

$$A_k(efg \ldots) = (A_k e) fg \ldots + e(A_k f) g \ldots + ef(A_k g) \ldots + \ldots,$$

где e, f, g — векторы из пространств, в которых действуют перемножаемые представления. Поэтому, чтобы найти, как действует преобразование A_k на тензор $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, мы должны применить это преобразование поочередно к каждому из индексов тензора как к трехмерному вектору, не меняя при этом остальных индексов, и сложить результаты. Нам достаточно, следовательно, знать, как действуют A_k на векторы, т. е. каковы матрицы этих преобразований в трехмерном пространстве. Но это хорошо известно. Если выбрать в трехмерном пространстве базис, состоящий из обычных координатных ортов, то, как легко видеть, матрицы A_1, A_2 и A_3 имеют в этом базисе вид

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_3 = \begin{Vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Если матрицу вращения вокруг k-й оси обозначить через A_{st}, где тройка чисел k, s, t получена из тройки чисел 1, 2, 3 круговой подстановкой, то мы можем объединить эти три формулы в одну:

$$A_{st} = \| \alpha_{ij}^{st} \|,$$

где

$$\alpha_{ij}^{st} = -\delta_{is}\delta_{jt} + \delta_{it}\delta_{js}.$$

Таким образом, преобразования A_{st} действуют на вектор по формуле

$$A_{st} a_j = a_{ij}^{st} a_j = -\delta_{is}\delta_{jt} a_j + \delta_{it}\delta_{js} a_j = -\delta_{is} a_t + \delta_{it} a_s. \tag{7}$$

Возьмем тензор r-го ранга $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$. Применяя преобразования A_{st} по очереди к каждому из индексов и складывая результаты, мы получим:

$$A_{st} a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{p=1}^{r} -\delta_{i_p s} a_{i_1 i_2 \ldots i_{p-1} t i_{p+1} \ldots i_r} + \delta_{i_d t} a_{i_1 i_2 \ldots i_{p+1} s i_{p+1} \ldots i_r}. \tag{8}$$

Так как нам нужны преобразования $(A_{st})^2$, то применим к этому тензору вторично то же преобразование A_{st}. Мы получим тогда:

$$(A_{st})^2 a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{q=1}^{r} -\delta_{i_q s}\Big[\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{r}\big(-\delta_{i_p s} a_{i_1 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_{p-1} t i_{p+1} \ldots i_r} +$$
$$+ \delta_{i_p t} a_{i_1 i_2 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_{p-1} s i_{p+1} \ldots i_r}\big) - \delta_{ts} a_{i_1 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_r} +$$
$$+ \delta_{tt} a_{i_1 \ldots i_{q-1} s i_{q+1} \ldots i_r}\Big] +$$
$$+ \delta_{i_q t}\Big[\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{r}\big(-\delta_{i_p s} a_{i_1 \ldots i_{q-1} s i_{q+1} \ldots i_{p-1} t i_{p+1} \ldots i_r} +$$
$$+ \delta_{i_p t} a_{i_1 \ldots i_{q-1} s i_{q+1} \ldots i_{p-1} s i_{p+1} \ldots i_r}\big) - \delta_{ss} a_{i_1 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_r} +$$
$$+ \delta_{st} a_{i_1 \ldots i_{q-1} s i_{q+1} \ldots i_r}\Big]. \qquad (9)$$

Для подстановки в уравнение (6) нам нужно найти выражение $H^2 = -A_{23}^2 - A_{31}^2 - A_{12}^2$. Но из формулы (8) очевидно, что $A_{ss} = 0$ и $A_{ts} = -A_{st}$, так что $(A_{ts})^2 = (A_{st})^2$. Поэтому, сложив $(A_{st})^2$ для всех возможных значений s и t от 1 до 3, мы получим преобразование $-2H^2$. Проделав в формуле (9) сложение и разделив результат на два, имеем:

$$-H^2 = \sum_{q=1}^{r}\sum_{\substack{p=1\\p\neq q}}^{r}\big(\delta_{i_p i_q} a_{i_1 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_{p-1} t i_{p+1} \ldots i_r} -$$
$$- a_{i_1 \ldots i_{q-1} i_p i_{q+1} \ldots i_{p-1} i_q i_{p+1} \ldots i_r}\big) - 2r a_{i_1 i_2 \ldots i_r}. \qquad (10)$$

Мы видим, таким образом, что *оператор* $-H^2$ *представляет собой сумму всевозможных следов тензора* $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, *умноженных на единичный тензор с соответствующими индексами, минус сумму тензоров, полученных из* $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ *всевозможными перестановками двух индексов, и минус сам тензор* $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$, *умноженный на* $2r$.

Уравнение $(-H^2 + l(l+1))\,a = 0$ имеет, следовательно, вид

$$\sum_{\substack{p,\,q=1\\p\neq q}}^{r} \delta_{i_p i_q} a_{i_1 i_2 \ldots i_{q-1} t i_{q+1} \ldots i_{p-1} t i_{p+1} \ldots i_r} -$$
$$- a_{i_1 \ldots i_{q-1} i_p i_{q+1} \ldots i_{p-1} i_q i_{p+1} \ldots i_r} + [l(l+1) - 2r]\, a_{i_1 i_2 \ldots i_r} = 0. \qquad (11)$$

Решения этого уравнения для каждого l образуют инвариантное подпространство, в котором действует представление, кратное неприводимому представлению с соответствующим весом l.

Для тензоров ранга 2 указанный способ снова приводит к указанному в п. 2 разложению этих тензоров на кососимметрические, симметрические со следом нуль и кратные единичному.

Рассмотрим подробнее расщепление тензоров третьего ранга. Согласно таблице в п. 2 мы должны получить при разложении одно представление веса 0 (псевдоскаляр), три — веса 1 (векторы), два — веса 2 и одно — веса 3.

Уравнение (11) для тензора a_{ijk} после сокращения на 2 приобретает вид

$$\delta_{ij}a_{ssk}+\delta_{jk}a_{iss}+\delta_{ki}a_{sjs}-a_{jik}-a_{ikj}-a_{kji}+ \\ +\left[\frac{l(l+1)}{2}-3\right]a_{ijk}=0. \qquad (12)$$

Нам нужно подставить в него $l=0,\ 1,\ 2,\ 3$.

Возьмем след левой части по индексам i и j. Тогда 2-е и 3-е слагаемые сократятся с 6-м и 5-м соответственно, и мы получим:

$$2a_{ssk}+\left[\frac{l(l+1)}{2}-3\right]a_{ssk}=0,$$

т. е.

$$\left[\frac{l(l+1)}{2}-1\right]a_{ssk}=0.$$

При $l(l+1)\neq 2$, т. е. $l\neq 1$, мы имеем, таким образом, $a_{ssk}=0$ и аналогично $a_{sjs}=a_{iss}=0$. Таким образом, *для тензоров ранга* 3 *подпространства, в которых действуют неприводимые представления с весом $l\neq 1$ или кратные им, состоят из тензоров, у которых все следы равны нулю.*

Положим $l=0$. Учитывая, что все следы a_{ijk} равны нулю, получаем уравнение

$$a_{ijk}=-\frac{a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}}{3}. \qquad (13)$$

При круговой перестановке индексов последние три слагаемых переходят друг в друга и сумма их не меняется. Следовательно, тензор a_{ijk} также не меняется при круговой перестановке индексов, т. е.

$$a_{ijk}=a_{jki}=a_{kij}.$$

Поменяв местами в уравнении (13) индексы i и j, мы точно так же убедимся, что

$$a_{jik}=a_{kij}=a_{ikj}.$$

Обращаясь снова к исходному уравнению (13), получаем, наконец,

$$a_{ijk}=-a_{jik}.$$

Сопоставляя все полученные результаты, мы видим, что решение уравнения (13) есть кососимметрический тензор третьего ранга.

Положим $l=1$. Уравнение приобретает вид

$$\delta_{ij}a_{ssk}+\delta_{jk}a_{iss}+\delta_{ki}a_{sjs}-a_{jik}-a_{ikj}-a_{kji}-2a_{ijk}=0. \tag{14}$$

Подставим в это уравнение тензор $\delta_{ij}x_k$, где x_k — произвольный вектор. Мы получаем:

$$\delta_{ij}\delta_{ss}x_k+\delta_{jk}\delta_{is}x_s+\delta_{ki}\delta_{sj}x_s-\delta_{ij}x_k-\delta_{ik}x_j-\delta_{kj}x_i-2\delta_{ij}x_k=0, \tag{15}$$

т. е. тензор $\delta_{ij}x_k$ удовлетворяет уравнению. Аналогично удовлетворяют ему и тензоры $\delta_{ik}y_j$ и $\delta_{jk}z_i$, а следовательно, тензор

$$a_{ijk}=\delta_{ij}x_k+\delta_{ik}y_j+\delta_{jk}z_i. \tag{16}$$

Из п. 2 мы знаем, что в разложении тензорного представления третьего ранга неприводимое представление веса 1 встречается трижды. Отсюда следует, что решения уравнения (14) должны образовывать девятимерное пространство. Но три вектора x_k, y_j и z_i имеют как раз девять компонент. Покажем, что из обращения в нуль тензора следует обращение в нуль всех этих девяти компонент, т. е. что пространство тензоров вида (16) действительно девятимерно. Но, подставив в формулу (16) тензор $a_{ijk}=0$ и взяв все следы от этого уравнения, мы получим девять уравнений относительно x_k, y_j и z_i, имеющих только нулевые решения.

Положим $l=2$. Так как все следы у решения этого уравнения по доказанному равны нулю, то уравнение имеет вид

$$a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}=0. \tag{17}$$

Размерность пространства решений этого уравнения согласно результатам п. 2 равна 10. Позже мы покажем, как разложить представления в этом пространстве на два неприводимых представления с весом $l=2$.

Положим, наконец, $l=3$. Учитывая, что все следы равны нулю, получаем:

$$a_{ijk}=\frac{a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}}{3}.$$

Рассуждая аналогично случаю $l=0$, найдем, что в этом случае компонента a_{ijk} не меняется ни при какой перестановке индексов, т. е. a_{ijk} — симметрический тензор третьего ранга. Из результатов п. 2 следует, что размерность подпространства симметрических тензоров третьего ранга равна 7.

Окончательно имеем следующий результат: 27-*мерное пространство тензоров третьего ранга разлагается на сумму следующих подпространств, в которых действуют представления, кратные неприводимым: одномерного пространства кососимметрических тензоров или псевдоскаляров, преобразующегося по неприводимому представлению веса* 0, *девятимерного подпространства тензоров* *вида* $a_{ijk}=\delta_{ij}x_k+\delta_{ik}y_j+\delta_{jk}z_i$, *в котором действует трижды повторенное неприводимое представление веса* 1, *десятимерного подпространства тензоров, удовлетворяющих уравнению* $a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}=0$, *в котором действует дважды повторенное неприводимое представление веса* 2, *и, наконец, семимерного подпространства симметрических тензоров, у которых все следы равны нулю. В этом последнем подпространстве действует неприводимое представление веса* 3. *Из общих результатов* § 3 *следует, что приведенное разложение на представления, кратные неприводимым, однозначно.*

Чтобы разложить тензорное представление третьего ранга на неприводимые, нужно разложить на неприводимые те из полученных представлений, которые кратны неприводимым. Это можно сделать различными способами. Мы укажем некоторые из них.

Девятимерное подпространство тензоров вида $a_{ijk}=\delta_{ij}x_k+\delta_{ik}y_j+\delta_{jk}z_i$ естественным образом расщепляется на три трехмерных подпространства $a^{(1)}_{ijk}=\delta_{ij}x_k$, $a^{(2)}_{ijk}=\delta_{ik}y_j$, $a^{(3)}_{ijk}=\delta_{jk}z_i$, в каждом из которых действует неприводимое представление. Это разложение, конечно, не единственно. Всякие три линейно независимые комбинации векторов x_k, y_j и z_i порождают соответствующее расщепление.

Что касается неприводимого представления в пространстве тензоров, удовлетворяющих уравнению (17): $a_{jik}+a_{ikj}+a_{kji}=0$, то, как мы видели, размерность пространства решений этого уравнения равна 10 и в нем действует дважды повторенное неприводимое представление веса 2. Поэтому *всякое* разложение этого представления не может быть ничем иным, кроме разложения на неприводимые, и достаточно взять какое-нибудь расщепление этого 10-мерного пространства на отличные от нуля инвариантные подпространства.

Это можно сделать, применив способ разложения с помощью собственных значений преобразования подстановки, указанный в п. 1. Так, например, можно разложить пространство тензоров, удовлетворяющих уравнению (17), на подпространства тензоров, симметрических и кососимметрических по какой-либо паре индексов, потому что среди отличных от нуля решений уравнения (17) имеются тензоры как одного, так и другого вида.

Можно также использовать для такого разложения, например, круговую перестановку s всех трех индексов, переводящую ijk в jki. Очевидно, что $s^3=s_0$, и поэтому собственные значения соответствующего преобразования S есть корни третьей степени из единицы: $1,\ \varepsilon=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ \varepsilon^2=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Уравнение $Sa_{ijk}=a_{ijk}$ совместно с уравнением (17) дает $a_{ijk}=0$, поэтому остаются два уравнения:

$$Sa_{ijk}=a_{jki}=\varepsilon a_{ijk}$$

и

$$Sa_{ijk}=a_{jki}=\varepsilon^2 a_{ijk},$$

дающих разложение нашего представления на неприводимые. Подобным же образом можно было бы поступить с любым другим преобразованием подстановки.

Таким образом, мы видим, что *разложение тензорного представления третьего ранга на неприводимые неоднозначно. Всякое разложение представления кратного неприводимым на неприводимые дает некоторое разложение для всего тензорного представления в целом.*

§ 6. Спиноры и спинорные представления

В предыдущем параграфе мы видели, что можно реализовать неприводимые представления группы вращений с любым целым весом l с помощью преобразований тензоров. В этом параграфе мы рассмотрим другую конкретизацию представлений группы вращений, так называемые спинорные представления, которые позволят нам реализовать все без исключения неприводимые представления этой группы (в том числе и представления с полуцелым весом, т. е. двузначные).

1. Определение спинора и спинорного представления. Начнем с определения спинора и спинорного представления ранга 1. В § 2 мы в качестве одного из примеров рассмотрели неприводимое представление с весом $l=\frac{1}{2}$. При этом представлении вращению g с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2 ставилась в соответствие определенная с точностью до знака комплексная унитарная матрица второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\alpha=\pm\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}},\quad \beta=\mp i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}},\quad |\alpha|^2+|\beta|^2=1.$$

Произведению вращений соответствует при этом произведение комплексных матриц вида (1).

Предположим теперь, *что в каждой системе координат нам задана определенная с точностью до знака пара комплексных чисел* (a^1, a^2), *которая при переходе от одной системы к другой с помощью вращения* $g=\|g_{ik}\|$ *) *преобразуется матрицей* (1) *по формуле*

$$\left.\begin{aligned} a^{1'} &= \alpha a^1+\beta a^2, \\ a^{2'} &= -\bar{\beta}a^1+\bar{\alpha}a^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

*) То есть при преобразовании координат, задаваемом формулами $x_i'=\sum g_{ik}x_k$.

Такая система чисел называется *спинором* первого ранга в трехмерном евклидовом пространстве. Сами числа a^1 и a^2 называются компонентами спинора.

Если рассматривать формулу (2) как формулу, дающую при фиксированной системе координат переход от одного спинора с компонентами $\{a^1, a^2\}$ к другому с компонентами $\{a^{1'}, a^{2'}\}$, то преобразования (2) образуют двумерное представление группы вращений. Это представление мы назовем *спинорным* представлением первого ранга. Из сказанного выше следует, что оно является неприводимым представлением веса $\frac{1}{2}$. Для дальнейшего удобнее будет обозначить матрицу $\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}$ через $\begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{Vmatrix}$, т. е. положить $\alpha = \alpha_{11}$, $\beta = \alpha_{12}$, $-\bar{\beta} = \alpha_{21}$, $\bar{\alpha} = \alpha_{22}$. Тогда формулы, по которым преобразуются компоненты спинора, примут вид

$$a^{i'} = \sum_{k=1}^{2} \alpha_{ik} a^k, \qquad \operatorname{Det} |\alpha_{ik}| = 1. \tag{2'}$$

Пусть теперь в каждой ортогональной системе координат нам задана определенная с точностью до знака совокупность 2^r комплексных чисел $a^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}$ $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r = 1, 2)$, которая при переходе от одной системы к другой с помощью матрицы $\|\alpha_{ik}\|$ преобразуется по формулам

$$a'^{\lambda'_1\lambda'_2\ldots\lambda'_r} = \sum\sum\ldots\sum \alpha_{\lambda'_1\lambda_1}\alpha_{\lambda'_2\lambda_2}\ldots\alpha_{\lambda'_r\lambda_r} a^{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_r}, \tag{3}$$

где $\alpha_{11} = \bar{\alpha}_{22} = \alpha$, $\alpha_{12} = -\bar{\alpha}_{21} = \beta$. Такая система чисел называется контравариантным спинором ранга r в трехмерном евклидовом пространстве.

Совокупность всех спиноров r-го ранга, заданных в некоторой системе координат, образует 2^r-мерное линейное пространство.

Формула (3) преобразования спиноров дает представление группы вращений преобразованиями в этом пространстве. Оно называется спинорным представлением ранга r. Так как из формулы (3) видно, что каждая компонента спинора ранга r преобразуется как произведение компонент r спиноров первого ранга, то это представление есть произведение r неприводимых представлений веса $\frac{1}{2}$ аналогично тому, как тензорное представление есть произведение неприводимых представлений веса 1.

2. Симметрические спиноры. Существование неприводимых представлений для любого (целого и полуцелого) веса l. В этом пункте мы докажем, что для каждого целого и полуцелого l существуют подпространства спиноров, преобразующихся при вращении по неприводимому представлению веса l. Такими подпространствами являются подпространства симметрических спиноров.

Спинор $a^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ ранга r называется *симметрическим*, если его компоненты не меняются при любой перестановке индексов $i_1 i_2 \ldots i_r$. Так как индексы i_α могут принимать только значения 1 или 2, то ясно, что перестановкой индексов можно любую компоненту симметрического спинора свести к одной из следующих $r+1$ компонент

$$a^{\overbrace{11\ldots 1}^{r}}, \ldots, a^{\overbrace{11\ldots 1}^{r-k},\overbrace{22\ldots 2}^{k}}, \ldots, a^{\overbrace{22\ldots 2}^{r}}.$$

Отсюда видно, что симметрические спиноры r-го ранга образуют $r+1$-мерное подпространство в пространстве всех спиноров. Легко показать, что это подпространство инвариантно относительно спинорного представления. В самом деле, из формулы

$$a'^{i'_1 i'_2 \ldots i'_r} = \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \ldots \sum_{i_r=1}^{2} \alpha_{i'_1 i_1} \alpha_{i'_2 i_2} \ldots \alpha_{i'_r i_r} a^{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

по которой преобразуются спиноры ранга r, видно, что на все индексы i_α действует одна и та же матрица α_{ik}, так что в результате преобразования симметрия спинора не нарушается.

Покажем, что представление в пространстве симметрических спиноров любого ранга r неприводимо. Для дальнейшего удобнее будет обозначить r через $2l$, где l — целое или полуцелое. Чтобы показать неприводимость представления в пространстве симметрических спиноров ранга $2l$, достаточно показать, что преобразование H_3 в этом пространстве имеет $2l+1$ различных собственных значений (столько, какова размерность пространства). Найдем для этого вид преобразования H_3 в спинорном представлении. Спинорное представление ранга 1 есть неприводимое представление веса $\frac{1}{2}$ и матрица $H_3 = iA_3$ для этого представления имеет вид (см. стр. 40)

$$\begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Так как спинорное представление ранга r есть произведение r представлений веса $\frac{1}{2}$, то, чтобы найти для этого представления $H_3 a^{i_1 i_2 \ldots i_r}$, нужно подействовать матрицей поочередно на каждый из индексов i_α, не меняя остальных, и сложить результаты (см. п. 2 § 4). Мы получим:

$$H_3 a^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \left(-\frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2}\right) a^{i_1 i_2 \ldots i_r},$$

где p_1 — число единиц среди индексов i_α, а p_2 — число двоек среди этих индексов. Из этой формулы видно, что спинор $a^{i_1 i_2 \ldots i_r}$, у которого отличны от нуля лишь компоненты с p_1^0 единицами и p_2^0 двойками, является собственным вектором H_3 с собственным значением $\frac{1}{2}(p_2^0 - p_1^0)$.

Пусть f_m — симметрический спинор ранга $2l$, у которого $a^{\overbrace{11 \ldots 1}^{l-m}, \overbrace{22 \ldots 2}^{l+m}} = 1$, а все компоненты, отличные от этой, равны нулю. Тогда

$$H_3 f_m = \left[-\frac{1}{2}(l-m) + \frac{1}{2}(l+m)\right] f_m = m f_m,$$

т. е. f_m отвечает собственному значению m для преобразования H_3. Так как m может принимать значения $-l, -l+1, \ldots, l$, то мы получаем в пространстве симметрических спиноров $2l+1$ собственных векторов преобразования H_3, отвечающих различным собственным значениям. Тем самым доказано, что представление в этом пространстве неприводимо. Спиноры f_m только множителями отличаются от элементов канонического базиса для этого представления.

Мы показали, таким образом, что в пространствах симметрических спиноров можно реализовать любые неприводимые представления группы вращений. В пространстве симметрических спиноров ранга $2l$ действует неприводимое представление размерности $2l+1$ и, следовательно, веса l. Поэтому симметрические спиноры четного ранга реализуют неприводимые представления с целым весом, с которыми мы уже встречались, а симметрические спиноры нечетного ранга — представления с полуцелым весом. В частности, симметрический спинор второго ранга определяет представление с $l=1$. Таким образом, симметрическим спинорам второго ранга можно сопоставить векторы трехмерного пространства так, что при вращениях они преобразуются одинаково. Чтобы установить эту связь, заметим, что если a^{ik} — симметрический спинор, то его компоненты a^{11}, $\sqrt{2}a^{12}$, a^{22} являются координатами его в каноническом базисе. Так как компоненты вектора a_x, a_y, a_z в каноническом базисе равны $\frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}$, a_z, $\frac{a_x + ia_y}{\sqrt{2}}$ (см. п. 5 § 2), то эта связь задается формулами

$$a_x = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a^{11} - a^{22}), \quad a_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a^{11} + a^{22}), \quad a_z = \sqrt{2}a^{12}.$$

3. Основные операции над спинорами. Спиноры и спинорные представления в настоящее время широко применяются в теоретической физике. В связи с этим рассмотрим некоторые операции спинорной алгебры, аналогичные соответствующим операциям для тензоров, рассмотренным в § 5.

Начнем с операции свертки или образования следа. Сначала рассмотрим два спинора первого ранга $\{a^1, a^2\}$ и $\{b^1, b^2\}$. Детерминант, составленный из компонент этих спиноров

$$a^1b^2 - a^2b^1, \tag{4}$$

при преобразовании координат умножается на детерминант матрицы $\|\alpha_{ik}\|$, и в силу того, что $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, выражение $a^1b^2 - a^2b^1$ не меняется при переходе к другой системе координат. Таким образом, составленная из компонент двух спиноров первого ранга билинейная форма $a^1b^2 - a^2b^1$ является скаляром.

Если ввести в рассмотрение матрицу

$$\|\varepsilon_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

то с помощью этой матрицы можно записать этот скаляр так:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \varepsilon_{\alpha\beta} a^\alpha b^\beta.$$

Определим число b_α, положив

$$b_\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} \varepsilon_{\alpha\beta} b^\beta, \tag{6}$$

т. е., другими словами, положив $b_1 = b^2$, $b_2 = -b^1$. Очевидно, что числа b_1 и b_2 наравне с b^1 и b^2 определяют спинор. Они носят название *ковариантных компонент* этого спинора. Из формул (4) и (2) легко вывести, что при преобразовании координат ковариантные компоненты спинора преобразуются с помощью матрицы, комплексно сопряженной к матрице (1).

С помощью ковариантных компонент спинора форму (4) можно записать как сумму произведений $a^1b_1 + a^2b_2 = \sum_{\lambda=1}^{2} a^\lambda b_\lambda$. В дальнейшем мы будем опускать индекс суммирования в формулах, где суммирование производится по одному верхнему и одному нижнему индексам, т. е. будем записывать форму (4) просто в виде $a^\lambda b_\lambda$.

Рассмотрим теперь произвольный спинор $a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$. Составим из его компонент систему чисел

$$b^{\lambda_3\lambda_4 \ldots \lambda_r} = \varepsilon_{\alpha\beta} a^{\alpha\beta\lambda_3 \ldots \lambda_r}. \tag{7}$$

Выражение (7) называется следом спинора $a^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}$ по первым двум индексам. Из формулы (4) следует, что след спинора r-го ранга есть спинор ранга $r-2$. Действительно, так как спинор r-го ранга преобразуется как произведение r спиноров первого ранга, то мы

имеем:

$$b'^{\lambda_3' \ldots \lambda_r'} = \alpha_{\lambda_3' \lambda_3} \alpha_{\lambda_4' \lambda_4} \ldots \alpha_{\lambda_r' \lambda_r} b^{\lambda_3 \ldots \lambda_r}.$$

Если аналогично тому, как мы сделали это для спинора первого ранга, ввести для спинора $a^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$ компоненты с одним опущенным индексом (ковариантные по одному индексу и контравариантные по остальным)

$$a_{\lambda_1}^{\lambda_2 \ldots \lambda_r} = \varepsilon_{\lambda_1 \alpha} a^{\alpha \lambda_2 \ldots \lambda_r},$$

то след спинора $a^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$ по первым двум индексам запишется коротко:

$$\operatorname{Sp} a^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r} = a_{\beta}^{\beta \lambda_3 \ldots \lambda_r}.$$

Операция образования следа, как и соответствующая операция для тензоров, называется сверткой спинора по первым двум индексам. Аналогично определяется операция свертки по любой другой паре индексов.

В процессе определения свертки мы столкнулись с операцией опускания индекса, заменяющей контравариантные компоненты спинора $a^{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_r}$ смешанными (ковариантными по одному и контравариантными по остальным индексам) компонентами $a_{\lambda_1}^{\lambda_2 \ldots \lambda_r}$. Тем же способом можно опустить любое число индексов и получить смешанные компоненты, ковариантные по одним индексам и контравариантные по другим. При преобразовании координат верхние индексы преобразуются матрицей $\|\alpha_{ik}\|$, а нижние — комплексно сопряженной матрицей, так что формула преобразования компонент $a_{\sigma\rho\tau\ldots}^{\lambda\mu\nu\ldots}$ имеет вид

$$a'^{\lambda'\mu'\nu'\ldots}_{\sigma'\rho'\tau'\ldots} = \alpha_{\lambda'\lambda} \alpha_{\mu'\mu} \alpha_{\nu'\nu} \ldots \bar{\alpha}_{\sigma'\sigma} \bar{\alpha}_{\rho'\rho} \bar{\alpha}_{\tau'\tau} a_{\sigma\rho\tau\ldots}^{\lambda\mu\nu\ldots}.$$

Матрица $\|\varepsilon^{\alpha\beta}\|$, обратная к матрице $\|\varepsilon_{\alpha\beta}\|$, наоборот, «поднимает» индексы тензора, так что, пользуясь ею, мы можем заменить любые смешанные компоненты спинора на контравариантные компоненты, преобразующиеся по формулам (3).

Произведением двух спиноров $a_{i_{p+1} \ldots i_s}^{i_1 \ldots i_p}$ и $b_{j_{p'+1} \ldots j_{s'}}^{j_1 \ldots j_{p'}}$, каждый из которых контравариантен по одной части индексов и ковариантен по другой, называется спинор $c_{i_{p+1} \ldots i_s j_{p'+1} \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_p j_1 \ldots j_{p'}}$ ранга $p+s$, компоненты которого суть всевозможные произведения компонент слагаемых. То, что при подобном умножении мы действительно получаем спинор, доказывается так же, как и для тензоров.

4. На какие неприводимые представления разлагается спинорное представление. Допустим теперь, что нам задан произвольный спинор ранга r. Мы знаем, что его преобразования образуют представление группы вращений размерности 2^r. В этом пункте мы выясним, на сколько и каких неприводимых представлений разлагается это представление.

Ответ на этот вопрос можно дать таким же образом, как в случае тензоров. Действительно, мы уже знаем, что спиноры первого ранга преобразуются по неприводимому представлению с весом $\frac{1}{2}$. Произвольный спинор ранга 2 преобразуется в точности так же, как произведение спиноров первого ранга. Так как каждый из сомножителей преобразуется по неприводимому представлению, то произведение разложится на сумму неприводимых представлений с весами $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ и $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$. Перейдем к спинорам ранга 3. Они преобразуются как произведение спинора второго ранга на спинор первого ранга. Но представление спинорами второго ранга уже не является неприводимым, поэтому мы должны рассмотреть это представление как разложенное на сумму неприводимых и умножить на представление с весом $\frac{1}{2}$ каждое из слагаемых. При этом из представления с весом 0 получится одно представление с весом $\frac{1}{2}$, а из представления с весом 1 — одно представление с весом $\frac{1}{2}$ и одно с весом $\frac{3}{2}$ (см. таблицу II). Всего, таким образом, в разложении представления спинорами ранга 3 на неприводимые представления будет два представления с весом $\frac{1}{2}$ и одно с весом $\frac{3}{2}$.

Продолжая этот процесс, т. е. представляя спинор ранга r как произведение спинора ранга $r-1$ на спинор первого ранга и пользуясь уже имеющимся разложением представления для спиноров ранга $r-1$, мы можем подсчитать, на сколько и каких неприводимых представлений разлагается представление спинорами любого ранга.

Таблица II

Порядок спинора	Индекс представления						
	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
1		1					
2	1		1				
3		2		1			
4	2		3		1		
5		5		4		1	
6	5		9		5		1

В каждой клетке r-й строчки ставится сумма чисел, стоящих непосредственно правее и левее этой клетки в $(r-1)$-й строчке.

ГЛАВА 2

ДАЛЬНЕЙШИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ВРАЩЕНИЙ

§ 7. Матричные элементы неприводимого представления (обобщенные сферические функции)

В § 2 мы нашли в некотором специальном базисе матрицы, отвечающие при произвольном неприводимом представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат. В этом параграфе будет найдена матрица, отвечающая в этом же базисе произвольному вращению g.

1. Операторы U_g. Пусть дано неприводимое представление $g \to T_g$ с некоторым весом l. Элементы T_{mn} $(-l \leqslant m, \quad n \leqslant l)$ матрицы T_g являются при этом функциями от g, которые нам надо определить.

Умножим для этого g на произвольное вращение g_1. Тогда $T_{mn}(g)$ перейдет в другую функцию от g, равную $T_{mn}(gg_1)$. Это преобразование функций T_{mn} зависит от вращения g_1, и, обозначив его U_{g_1}, мы можем записать, что

$$U_{g_1} T_{mn}(g) = T_{mn}(gg_1). \tag{1}$$

Легко проверить, что для преобразований U_{g_1} имеет место формула

$$U_{g_2} U_{g_1} = U_{g_2 g_1}. \tag{2}$$

Действительно,

$$U_{g_2} U_{g_1} T_{mn}(g) = U_{g_2} T_{mn}(gg_1) = T_{mn}(gg_2g_1) = U_{g_2 g_1} T_{mn}(g).$$

Рассмотрим подробнее функцию $T_{mn}(gg_1)$. По определению функций T_{mn} это есть элемент матрицы T_{gg_1}. Так как матрицы T_g образуют представление, то

$$T_{gg_1} = T_g T_{g_1}.$$

Приравнивая элементы матриц, стоящих справа и слева, получаем

$$T_{mn}(gg_1) = \sum_{s=-l}^{l} T_{ms}(g)\, T_{sn}(g_1). \tag{3}$$

Это равенство означает, что

$$U_{g_1} T_{mn}(g) = \sum_{s=-l}^{l} T_{ms}(g)\, T_{sn}(g_1). \tag{4}$$

Мы видим, таким образом, что преобразование U_{g_1} переводит элемент m-й строки матрицы T_g в линейную комбинацию элементов той же строки T_g с коэффициентами, зависящими от g_1.

Рассмотрим $(2l+1)$-мерное пространство R^m функций от g, порожденное элементами m-й строки матрицы T_g, т. е. функциями

$$T_{mn}(g) \quad (-l \leqslant n \leqslant l).$$

Из формул (2) и (4) следует, что при любом m преобразования U_{g_1} дают $(2l+1)$-мерное представление группы вращений в пространстве R^m.

Из формулы (4) следует, кроме того, что коэффициенты линейных преобразований, в которые U_{g_1} переводит функции $T_{mn}(g)$, равны $T_{sn}(g_1)$ $(-l \leqslant s,\ n \leqslant l)$. Это значит, что матрицы преобразований U_{g_1} в нашем пространстве R^m совпадают с матрицами T_{g_1}.

Отсюда видно, что, во-первых, представление $g_1 \to U_{g_1}$ в пространстве R^m неприводимо и, во-вторых, сами функции $T_{mn}(g)$ $(-l \leqslant n \leqslant l)$, на которые действуют матрицы T_{g_1}, являются в пространстве каноническим базисом. Это значит, что преобразования H_+ и H_-, отвечающие представлению $g_1 \to U_{g_1}$, действуют на эти функции по формулам, найденным выше (см. формулу (19), § 2).

С помощью этих соображений мы найдем функции $T_{mn}(g)$ и установим ряд рекуррентных соотношений между ними.

2. Дифференциальные операторы, отвечающие бесконечно малым поворотам. Прежде всего нужно найти преобразования A_k, отвечающие при представлении, определенном в п. 1, бесконечно малым поворотам вокруг осей координат. Для этого мы, так же как это было сделано в § 3, должны взять в качестве g_1 поворот вокруг фиксированной оси на угол α и разложить $U_{g_1} T_{mn}(g) = T_{mn}(gg_1)$ по степеням α.

Вычисление проводится очень просто, если за ось вращения принять ось Oz. Зададим произвольное вращение g с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2, и пусть g_1 есть вращение вокруг оси Oz на угол α. Тогда вращение gg_1, как легко видеть, определяется углами Эйлера φ_1, θ, $\varphi_2+\alpha$. Поэтому

$$T_{mn}(gg_1) = T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2+\alpha) = T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) + \alpha \frac{\partial T_{mn}}{\partial \varphi_2} + \ldots$$

и преобразование A_3 есть дифференциальный оператор

$$A_3 = \frac{\partial}{\partial \varphi_2}. \tag{5}$$

В общем случае разложение $T_{mn}(gg_1)=T_{mn}(\varphi_1', \theta', \varphi_2')$ имеет вид

$$T_{mn}(\varphi_1', \theta', \varphi_2')=T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)+$$
$$+\alpha\left[\frac{\partial T_{mn}}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}+\frac{\partial T_{mn}}{\partial\theta}\frac{d\theta'}{d\alpha}+\frac{\partial T_{mn}}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}+\ldots \qquad (6)$$

Определим $\left.\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$, $\left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ и $\left.\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ для случая, когда вращение g_1 на угол α происходит вокруг оси Ox.

Чтобы сделать это, мы рассмотрим матрицу самого вращения g как функцию углов Эйлера. Как было указано в § 1, она имеет вид

$$g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)=\|g_{ik}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\|=$$
$$=\left\|\begin{matrix}\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\theta\sin\varphi_1\sin\varphi_2, & -\cos\varphi_1\sin\varphi_2-\cos\theta\sin\varphi_1\cos\varphi_2, & \sin\varphi_1\sin\theta\\ \sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\theta\cos\varphi_1\sin\varphi_2, & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\theta\cos\varphi_1\cos\varphi_2, & -\cos\varphi_1\sin\theta\\ \sin\varphi_1\sin\theta, & \cos\varphi_2\sin\theta, & \cos\theta\end{matrix}\right\|. \qquad (7)$$

Матрице вращения gg_1 отвечают некоторые значения параметров: φ_1', θ', φ_2', зависящие от угла поворота α и обращающиеся в φ_1, θ, φ_2 при $\alpha=0$. Разлагая матрицу gg_1 по степеням α, мы получим:

$$gg_1=\|g_{ik}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\|+\alpha\left\|\frac{\partial g_{ik}}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial\theta}\frac{d\theta'}{d\alpha}+\frac{\partial g_{ik}}{\partial\varphi_2}\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right\|_{\alpha=0}+\ldots \qquad (8)$$

С другой стороны, так как g_1 есть вращение на угол α вокруг оси Ox, то его матрица равна

$$g_1=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|+\alpha\left\|\begin{matrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{matrix}\right\|+\ldots$$

и, следовательно,

$$gg_1=\|g_{ik}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\|+\alpha\left\|\begin{matrix}0 & g_{13} & -g_{12}\\ 0 & g_{23} & -g_{22}\\ 0 & g_{33} & -g_{32}\end{matrix}\right\|+\ldots \qquad (9)$$

Приравнивая друг другу выражения (8) и (9) для матрицы gg_1 и сравнивая коэффициенты при α в этих выражениях, мы получим уравнения, из которых определятся $\left.\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$, $\left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ и $\left.\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$.

Нам достаточно взять три наиболее простых элемента матриц, на которые умножается α в формулах (8) и (9), а именно, правый нижний, левый нижний и правый верхний элементы. Взяв соответствующие выражения g_{ik} из формулы (7) и продифференцировав их, мы получим уравнения

$$-\sin\theta \left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\cos\varphi_2 \sin\theta,$$

$$\cos\varphi_2 \sin\theta \left.\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \sin\varphi_1 \cos\theta \left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = 0,$$

$$\cos\varphi_2 \sin\theta \left.\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} + \sin\varphi_1 \cos\theta \left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\theta \sin\varphi_1 \cos\varphi_2,$$

из которых найдем, что

$$\left.\frac{d\theta'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \cos\varphi_2, \quad \left.\frac{d\varphi_2'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = -\sin\varphi_2 \operatorname{ctg}\theta, \quad \left.\frac{d\varphi_1'}{d\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta}.$$

Подставляя эти выражения в формулу (6), мы найдем дифференциальный оператор, отвечающий бесконечно малому повороту вокруг оси Ox

$$A_1 = -\operatorname{ctg}\theta \sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{10}$$

Оператор A_2 вычисляется аналогичным образом и имеет вид

$$A_2 = -\operatorname{ctg}\theta \cos\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{\cos\varphi_2}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} - \sin\varphi_2 \frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{11}$$

Операторы H_+, H_- и H_3, с которыми нам удобнее будет производить дальнейшие вычисления, теперь легко определяются:

$$\left.\begin{aligned} H_+ &= H_1 + iH_2 = iA_1 - A_2 = e^{-i\varphi_2}\left(\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\varphi_2} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ H_- &= H_1 - iH_2 = iA_1 + A_2 = e^{i\varphi_2}\left(-\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\varphi_2} + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi_1} + i \frac{\partial}{\partial\theta}\right), \\ H_3 &= iA_3 = i \frac{\partial}{\partial\varphi_2}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Составив из этих операторов оператор $H^2 = H_1^2 + H_2^2 + H_3^2$, мы можем, подобно тому как это было сделано в § 3 для сферических функций, написать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ при всех значениях m и n,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{\partial U}{\partial\theta} + \\ + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_1^2} - 2\cos\theta \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_1 \partial\varphi_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\varphi_2^2}\right) + l(l+1) U = 0. \tag{13}$$

Мы выпишем в явном виде решения этого уравнения, идя тем же путем, каким мы в § 3 нашли сферические функции $Y_l^m(\varphi, \vartheta)$.

В отличие от обозначений § 3 полярный угол θ (широту) мы будем обозначать буквой v, оставляя θ для обозначений второго угла Эйлера.

3. Зависимость матричных элементов от углов Эйлера φ_1 и φ_2. Функции $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ весьма просто зависят от переменных φ_1 и φ_2. В самом деле, мы знаем, что произвольное вращение g можно представить как произведение трех вращений: поворота на угол φ_1 вокруг оси Oz, затем поворота на угол θ вокруг оси Ox и затем снова поворота вокруг оси Oz на угол φ_2. Обозначив матрицы, отвечающие при представлении каждому из этих вращений, через T_{φ_1}, T_θ и T_{φ_2} соответственно, мы можем записать, следовательно, что для произвольного вращения g имеет место равенство

$$T_g = T_{\varphi_1} T_\theta T_{\varphi_2} \tag{14}$$

(напомним, что при произведении операторов их матрицы перемножаются в обратном порядке). Но матрица, отвечающая при неприводимом представлении с весом l повороту на угол φ вокруг оси Oz, нами уже была найдена. Согласно результатам § 2 она имеет вид

$$T_\varphi = \left\| \begin{matrix} e^{il\varphi} & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & e^{i(l-1)\varphi} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots & e^{-il\varphi} \end{matrix} \right\| \tag{14'}$$

(см. формулу на стр 39. Напомним, что строки и столбцы матрицы нумеруются от $-l$ до l, так что на пересечении столбца и строки с индексом m стоит $e^{-im\varphi}$.)

Заменяя матрицы T_{φ_2} и T_{φ_1} в (14) их выражениями по формуле (14′) и производя умножение, мы найдем, что

$$T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} u_{mn}(\theta) e^{-in\varphi_2}, \tag{15}$$

где через $u_{mn}(\theta)$ обозначены элементы матрицы T_θ. Остается, следовательно, найти функции $u_{mn}(\theta)$.

Подставляя $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ из формулы (15) в дифференциальное уравнение (13), которому эта функция удовлетворяет, и сокращая на $e^{-im\varphi_2}e^{-in\varphi_1}$, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функций $u_{mn}(\theta)$. Оно имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \operatorname{ctg}\theta \frac{du}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{n^2 - 2mn\cos\theta + m^2}{\sin^2\theta}\right] u = 0.$$

Заменой переменных

$$\tau = \sin^2\frac{\theta}{2},$$

$$u(\theta) = \tau^{\frac{|m-n|}{2}} (1-\tau)^{\frac{|m+n|}{2}} v(\tau)$$

это уравнение приводится к гипергеометрическому уравнению

$$\tau(1-\tau)\frac{d^2v}{d\tau^2}+[c-(a+b+1)\tau]\frac{dv}{d\tau}-abv(\tau)=0,$$

где

$$a=l+1+\frac{1}{2}(|m-n|+|m+n|),$$

$$b=-l+\frac{1}{2}(|m-n|+|m+n|),$$

$$c=|m-n|+1.$$

В следующем пункте будет найден явный вид функций $u_{mn}(\theta)$.

4. Обобщенные сферические функции. Функции $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ при любом m являются собственными функциями оператора H_3, отвечающими собственному значению n этого оператора. В частности, $T_{ml}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ отвечают наибольшему собственному значению l. Отсюда следует (см. § 2, п. 3), что они должны удовлетворять уравнению $H_+T_{ml}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)=0$ или

$$e^{-i\varphi_1}\left(\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial T_{ml}}{\partial\varphi_1}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T_{ml}}{\partial\varphi_2}+i\frac{\partial T_{ml}}{\partial\theta}\right)=0.$$

Подставляя в это уравнение $T_{ml}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)=e^{-im\varphi_2}u_{ml}(\theta)e^{-il\varphi_1}$ и сокращая на $e^{-im\varphi_2}e^{-i(l+1)\varphi_1}$, мы найдем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для определения $u_{ml}(\theta)$

$$\frac{du_{ml}(\theta)}{d\theta}+\frac{m-l\cos\theta}{\sin\theta}u_{ml}(\theta)=0. \tag{16}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$u_{ml}(\theta)=C_m\frac{\sin^l\theta}{\operatorname{tg}^m\frac{\theta}{2}}, \tag{17}$$

или, если ввести удобную для дальнейших вычислений переменную $\mu=\cos\theta$ и обозначить $u_{ml}(\arccos\mu)$ через $P_{ml}(\mu)$, вид

$$P_{ml}(\mu)=C_m(1-\mu)^{\frac{l-m}{2}}(1+\mu)^{\frac{l+m}{2}}. \tag{18}$$

Тем самым с точностью до численных множителей C_m определены все элементы самого правого столбца матрицы T_g, т. е. $T_{ml}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$. Оставив пока численные множители неопределенными, найдем все остальные элементы $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$. Для этого применим к уже найденным функциям T_{ml} оператор H_- и воспользуемся тем, что $H_-T_{mn}=\alpha_nT_{m,n-1}$, где $\alpha_n=\sqrt{(l+n)(l-n+1)}$ (см. § 2, п. 3). Подставляя в это уравнение оператор H_- из (12) и функции

$T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ из (15), мы получим соотношение для определения функций $u_{mn}(\theta)$

$$\frac{du_{mn}}{d\theta} - \frac{m - n\cos\theta}{\sin\theta} u_{mn} = -i\alpha_n u_{m,\, n-1},$$

которое после введения переменной $\mu = \cos\theta$, $u_{mn}(\theta) = P_{mn}(\mu)$ принимает вид

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dP_{mn}}{d\mu} + \frac{m - n\mu}{(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}} P_{mn}(\mu) = i\alpha_n P_{m,\, n-1}(\mu). \tag{19}$$

Положим

$$P_{mn}(\mu) = (1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} v_{mn}(\mu). \tag{20}$$

Подставляя это выражение для $P_{mn}(\mu)$ в формулу (19), мы получим простое соотношение для определения $v_{mn}(\mu)$

$$\frac{dv_{mn}}{d\mu} = i\alpha_n v_{m,\, n-1}(\mu). \tag{21}$$

Записав найденные ранее функции $P_{ml}(\mu)$ (см. формулу (18) в виде (20))

$$P_{ml}(\mu) = C_m (1-\mu)^{-\frac{l-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{l+m}{2}} v_{ml}(\mu),$$

мы видим, что

$$v_{ml}(\mu) = C_m (1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}.$$

Отсюда и из формулы (21) сразу получается, что

$$v_{mn}(\mu) = (-i)^{l-n} \frac{C_m}{\alpha_l \alpha_{l-1} \ldots \alpha_{n+1}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}]$$

и, следовательно, функции $P_{mn}(\mu)$, которые мы будем обозначать также $P^l_{mn}(\mu)$, имеют вид

$$P^l_{mn}(\mu) = (-i)^{l-n} \frac{C_m}{\alpha_l \alpha_{l-1} \ldots \alpha_{n+1}} (1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \times$$
$$\times \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}].$$

Подставляя теперь в формулу (15) $u_{mn}(\theta) = P^l_{mn}(\cos\theta)$, мы получим функции $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ для любых значений индексов m и n.

Однако в полученных выражениях для $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ содержится $2l+1$ не определенных пока постоянных C_m. Мы найдем их из условия, что вращению с нулевыми углами Эйлера $g_0 = g(0, 0, 0)$ отвечает при представлении единичная матрица E. Это значит, что $T_{mm}(0, 0, 0) = 1$, т. е.

$$P^l_{mm}(1) = (-i)^{l-m} \frac{C_m}{\alpha_l \alpha_{l-1} \ldots \alpha_{m+1}} 2^{-m} (-1)^{l-m} (l-m)!\ 2^{l+m} = 1.$$

Отсюда, заменяя $\alpha_l, \alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_{m+1}$ их значениями, получаем:

$$C_m = \frac{(-1)^{l-m} i^{l-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(2l)!\ (l-m)!}{(l+m)!}},$$

и, подставляя C_m и $\alpha_l, \alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_{n+1}$ в выражение для $P^l_{m,n}(\mu)$, имеем окончательную формулу

$$P^l_{m,n}(\mu) = \frac{(-1)^{l-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!\ (l+n)!}{(l+m)!\ (l-n)!}} \times$$
$$\times (1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}]. \qquad (22)$$

Итак, мы показали, что *матрица, отвечающая при неприводимом представлении веса l произвольному вращению g с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2, имеет в каноническом базисе вид*

$$T^l_g = \| T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \| \quad (m,\ n = -l,\ -l+1, \ldots, l),$$

где

$$T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_2} P^l_{mn}(\cos\theta) e^{-in\varphi_1}$$

и

$$P^l_{mn}(\mu) = A (1-\mu)^{-\frac{n-m}{2}} (1+\mu)^{-\frac{n+m}{2}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}} [(1-\mu)^{l-m} (1+\mu)^{l+m}]. \qquad (23)$$

Постоянная A при этом равна $\frac{(-1)^{l-m} i^{n-m}}{2^l (l-m)!} \sqrt{\frac{(l-m)!\ (l+n)!}{(l+m)!\ (l-n)!}}$. Функции $T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ мы будем в дальнейшем называть для краткости *обобщенными сферическими функциями l-го порядка.*

Приведем для примера обобщенные сферические функции порядков $\frac{1}{2}$, 1 и 2. Так как зависимость этих функций от аргументов φ_1 и φ_2 нам известна, то для сокращения записи мы выпишем матрицы функций $P^{\frac{1}{2}}_{mn}(\cos\theta)$, $P^1_{mn}(\cos\theta)$ и $P^2_{mn}(\cos\theta)$. Они имеют следующий вид:

$$l=\frac{1}{2}$$

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & i\sin\frac{\theta}{2} \\ i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{Vmatrix},$$

$$l=1$$

$$\begin{Vmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta) & -\frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(\cos\theta-1) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \cos\theta & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta \\ \frac{1}{2}(\cos\theta-1) & \frac{i}{\sqrt{2}}\sin\theta & \frac{1}{2}(1+\cos\theta) \end{Vmatrix},$$

$$l=2$$

$$\left\Vert \begin{matrix} \frac{1}{4}(\cos\theta+1)^2 & \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \\ \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & \frac{1}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1) & \sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) & \sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta & \frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1) \\ \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & \frac{1}{2}(2\cos^2\theta-\cos\theta-1) & \sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta \\ \frac{1}{4}(\cos\theta-1)^2 & \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \end{matrix} \right. \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left. \begin{matrix} \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) & \frac{1}{4}(\cos\theta-1)^2 \\ \frac{1}{2}(2\cos^2\theta-\cos\theta-1) & \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta-1) \\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,i\sin\theta\cos\theta & -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\cos^2\theta) \\ \frac{1}{2}(2\cos^2\theta+\cos\theta-1) & \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) \\ \frac{i}{2}\sin\theta(\cos\theta+1) & \frac{1}{4}(\cos\theta+1)^2 \end{matrix} \right\Vert .$$

Во всех приведенных примерах строки нумеруются сверху вниз, а столбцы — слева направо номерами $-l, -l+1, \ldots, l$. Чтобы получить обобщенную сферическую функцию $T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, надо умножить элемент соответствующей матрицы, стоящий на пересечении m-й строки и n-го столбца, на $e^{-im\varphi_1}e^{-in\varphi_2}$.

Функции $T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ при целом l и при $m=0$ имеют вид

$$T^l_{0n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)=$$
$$=e^{-in\varphi_2}(-1)^l i^n \frac{1}{2^l \cdot l!}\sqrt{\frac{(l+n)!}{(l-n)!}}(1-\mu^2)^{-\frac{n}{2}}\frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}(1-\mu^2)^l.$$

Сравнивая эту функцию с соответствующей сферической функцией l-го порядка $Y^n_l(\varphi, \vartheta)$ (см. формулу (14) § 3), мы видим, что

$$T^l_{0n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)=\sqrt{\frac{2}{2l+1}}\,Y^n_l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1, \theta\right), \tag{24}$$

т. е. элементы нулевой (центральной) строки матрицы T_g (такая строка существует, естественно, только у матриц нечетного порядка, дающих представления с целым весом l), с точностью до множителя $\sqrt{\frac{2}{2l+1}}$ и замены φ на $\frac{\pi}{2}-\varphi$ совпадают со сферическими функциями l-го порядка *). В частности, $P^l_{00}(\mu)$ совпадает с обычным (не нормированным условием $\int\limits_{-1}^{1} P^2_l(\mu)\,d\mu=1$) многочленом Лежандра.

При произвольных m и n функции $P^l_{mn}(\mu)$ тесно связаны с другими встречающимися в анализе многочленами — многочленами Якоби. Соответствующая формула будет дана несколько ниже.

Рассмотрим, какие свойства функций $P^l_{mn}(\mu)$ вытекают из унитарности матриц T_g. Пусть вращение g задано углами Эйлера φ_1, θ, φ_2. Тогда вращение g^{-1} определяется углами Эйлера $\pi-\varphi_2$, θ, $\pi-\varphi_1$ (см. §1) и условие унитарности

$$T^*_g=T^{-1}_g=T_{g^{-1}}$$

дает для элементов матрицы T_g соотношение

$$\overline{T_{nm}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)}=T_{mn}(\pi-\varphi_2, \theta, \pi-\varphi_1).$$

---

*) Формулу (24) можно было бы вывести, пользуясь тем, что элементы нулевой строки не зависят от φ_2 и могут быть рассматриваемы как функции на поверхности сферы (ср. § 3).

Сокращая на $e^{im\varphi_1}e^{in\varphi_2}$, имеем:

$$\overline{u_{nm}(\theta)} = u_{mn}(\theta) \cdot (-1)^{m+n}, \tag{25}$$

или, полагая $\cos\theta = \mu$,

$$P^l_{mn}(\mu) = \overline{P^l_{nm}(\mu)} \cdot (-1)^{m+n}. \tag{25'}$$

Так как в силу формулы (23) $\overline{P^l_{nm}(\mu)}$ содержит множителем i^{n-m}, то $\overline{P^l_{nm}(\mu)} = (-1)^{n-m} P^l_{nm}(\mu)$. Итак, окончательно

$$P^l_{mn}(\mu) = P^l_{nm}(\mu), \tag{26}$$

т. е. *матрица из функций* $P^l_{mn}(\mu)$ *симметрична относительно главной диагонали.*

Отсюда следует, что функцию $P^l_{mn}(\mu)$ можно наряду с формулами (23) записать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &P^l_{mn}(\mu) = A'(1-\mu)^{-\frac{m-n}{2}}(1+\mu)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} \left[(1-\mu)^{l-n}(1+\mu)^{l+n}\right], \\ &\text{где} \\ &A' = (-1)^{l-n} \frac{i^{m-n}}{2^l (l-n)!} \sqrt{\frac{(l-n)!\,(l+m)!}{(l+n)!\,(l-m)!}}. \end{aligned}\right\} \tag{23'}$$

Еще одно свойство симметрии, которым обладают функции $P^l_{mn}(\mu)$, вытекает из следующего замечания. Рассмотрим вращение g_0 с углами Эйлера $(0, \pi, 0)$ (поворот на 180° вокруг оси Ox). При этом вращении $\mu = \cos\pi = -1$, т. е. $\mu + 1 = 0$ и элементы соответствующей этому вращению матрицы T_g, обращаются в нуль при $m + n \neq 0$ (см. формулу (23)). При $n = -m$ мы имеем:

$$T_{m,-m} = P_{m,-m}(-1) = (-1)^l.$$

Пусть теперь g — произвольное вращение с углами Эйлера φ_1, θ, φ_2 и $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ — элемент матрицы T_g, отвечающей этому вращению. Рассмотрим вращение $\tilde{g} = g_0 g g_0^{-1}$. Ему отвечает матрица $T_{\tilde{g}} = T_{g_0} T_g T_{g_0^{-1}}$. Перемножив соответствующие матрицы, легко убедиться, что элемент, стоящий на пересечении m-й строки и n-го столбца матрицы $T_{\tilde{g}}$, есть $T_{-m,-n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$. С другой стороны, вращение $\tilde{g}$ изменяет направление двух координатных осей Oy и Oz. Поэтому, если $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, то $\tilde{g} = g_0 g g_0^{-1} = g(-\varphi_1, \theta, -\varphi_2)$ *).

*) Действительно, матрицу $\tilde{g} = g_0 g g_0^{-1}$ можно рассматривать как матрицу того же вращения g в новой системе координат, полученную из старой вращением g_0. А эта система отличается от старой тем, что направления осей Oy и Oz изменены на обратные.

Следовательно, $T_{\tilde{g}} = T(-\varphi_1, \theta, -\varphi_2)$, и мы имеем равенство

$$T_{-m, -n}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = T_{mn}(-\varphi_1, \theta, -\varphi_2).$$

Сокращая на $e^{im\varphi_1} e^{in\varphi_2}$ и полагая $\cos\theta = \mu$, получаем отсюда:

$$P^l_{-m, -n}(\mu) = P^l_{mn}(\mu). \tag{27}$$

Из свойств симметрии функций $P^l_{mn}(\mu)$ очевидно, что эти функции зависят на самом деле не от индексов m и n, а от $|m+n|$ и $|m-n|$.

Укажем, наконец, на связь функций $P^l_{mn}(\mu)$ с упоминавшимися выше многочленами Якоби. Многочленами Якоби называются многочлены вида

$$P_s^{\alpha\beta}(\mu) = \frac{(-1)^s}{2^s \cdot s!}(1-\mu)^{-\alpha}(1+\mu)^{-\beta}\frac{d}{d\mu^s}[(1-\mu)^{s+\alpha}(1+\mu)^{s+\beta}].$$

Очевидно, если положить $s = l - \frac{1}{2}(|m+n| + |m-n|)$, $\alpha = |n-m|$ и $\beta = |n+m|$, то функции $P^l_{mn}(\mu)$ будут выражаться через многочлен Якоби $P_s^{\alpha\beta}(\mu)$ по формуле

$$P^l_{mn}(\mu) = K(1-\mu)^{\frac{\alpha}{2}}(1+\mu)^{\frac{\beta}{2}} P_s^{\alpha\beta}(\mu),$$

где K — постоянная.

Заметим, что из унитарности матрицы $T^l_{mn}(g)$ следует также, что

$$\sum_{n=-l}^{+l} |P^l_{mn}(\cos\theta)|^2 \equiv 1.$$

5. Формула сложения для матричных элементов. Формула (3) этого параграфа $T_{mn}(g'g'') = \sum\limits_{s=-l}^{l} T_{ms}(g')\,T_{sn}(g'')$ представляет собой формулу сложения для обобщенных сферических функций. Она содержит как частный случай обычную формулу сложения для многочленов Лежандра. Выпишем общую формулу сложения в явном виде. Пусть вращение g' определяется углами Эйлера 0, θ' φ'_2, вращение g'' — углами φ''_1, θ'', 0 и, наконец, вращение $g = g'g''$ — углами φ_1, θ, φ_2. Тогда

$$T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sum_{s=-l}^{s=l} T_{ms}(0, \theta', \varphi'_2)\,T_{sn}(\varphi''_1, \theta'', 0).$$

Заменяя $T_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ через $e^{-im\varphi_1} P^l_{mn}(\cos\theta)\, e^{-in\varphi_2}$ и обозначая сумму $\varphi_1' + \varphi_2''$ через φ, мы получаем:

$$e^{-im\varphi_1} P_{mn}^l (\cos\theta)\, e^{-in\varphi_2} = \sum_{s=-l}^{s=l} e^{-is\varphi} P_{ms}^l (\cos\theta')\, P_{sn}^l (\cos\theta''). \qquad (28)$$

Нам осталось выразить φ_1, θ и φ_2 через φ, θ' и θ''. С этой целью рассмотрим матрицы $T_{g'}$, $T_{g''}$ и T_g при $l = \frac{1}{2}$. Из равенства $T_{g'} T_{g''} = T_g$, т. е.

$$\left\| \begin{matrix} \cos\frac{\theta'}{2} e^{i\frac{\varphi_2'}{2}} & -i \sin\frac{\theta'}{2} e^{-i\frac{\varphi_2'}{2}} \\ -i\sin\frac{\theta'}{2} e^{i\frac{\varphi_2'}{2}} & \cos\frac{\theta'}{2} e^{-i\frac{\varphi_2'}{2}} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} \cos\frac{\theta''}{2} e^{i\frac{\varphi_1''}{2}} & -i \sin\frac{\theta''}{2} e^{i\frac{\varphi_1''}{2}} \\ -i\sin\frac{\theta''}{2} e^{-i\frac{\varphi_1''}{2}} & \cos\frac{\theta''}{2} e^{-i\frac{\varphi_1''}{2}} \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} & -i \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} \end{matrix} \right\|,$$

мы получаем два комплексных уравнения для определения θ', θ'' и $\varphi = \varphi_1' + \varphi_2''$:

$$\cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}} = \cos\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta''}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} - \sin\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta''}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\varphi_2-\varphi_1}{2}} = \cos\frac{\theta'}{2}\sin\frac{\theta''}{2} e^{i\frac{\varphi}{2}} + \sin\frac{\theta'}{2}\cos\frac{\theta''}{2} e^{-i\frac{\varphi}{2}}.$$

Приравнивая модули и аргументы левых и правых частей, получим отсюда:

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos\theta'\cos\theta'' - \sin\theta'\sin\theta''\cos\varphi, \\ \operatorname{tg}\varphi_1 &= \frac{\sin\varphi\,\sin\theta''}{\cos\theta'\,\sin\theta''\,\cos\varphi + \cos\theta''\,\sin\theta'}, \\ \operatorname{tg}\varphi_2 &= \frac{\sin\varphi\,\sin\theta'}{\sin\theta'\,\cos\theta''\,\cos\varphi + \cos\theta'\,\sin\theta''}. \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

Полученные формулы (29) можно вывести чисто геометрически. Выведем, например, первую из них. Применим вращение g''. Ось Oz перейдет в прямую OK (рис. 5). Перейдем к вращению g'. При повороте вокруг оси Ox на угол θ' луч OK перейдет в луч OK', а ось Oz в прямую OD. Затем после поворота вокруг прямой OD на угол φ_2' прямая OK' займет положение OL. Нам нужно определить угол θ между осью Oz и прямой OL. Очевидно, что ось Oz можно перевести в положение

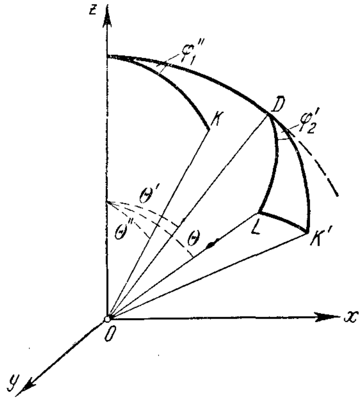

Рис. 5.

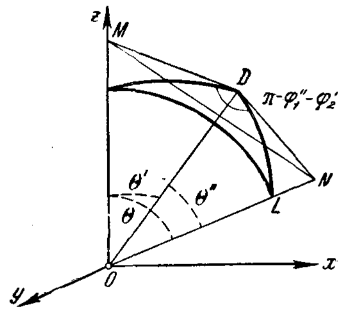

Рис. 6.

прямой OL следующим образом (рис. 6): в плоскости xOy совершить поворот на угол θ' и затем в плоскости DOL, повернутой к плоскости xOy на угол $\varphi = \varphi_1' + \varphi_2'$ луч OD повернуть на угол θ''; при этом он займет положение OL. Из рис. 6 видно, что задача определения угла θ свелась к вычислению стороны сферического треугольника θ по двум другим сторонам θ' и θ'' и углу $(\pi - \varphi)$ между ними. Для этого проводим прямые MD и DN — касательные к дугам ZD и DL. Из рис. 6 видим:

$$OM = \sec\theta', \qquad MD = \operatorname{tg}\theta', \qquad ON = \sec\theta'', \qquad DN = \operatorname{tg}\theta''.$$

Из треугольника MDN имеем:

$$MN^2 = MD^2 + DN^2 - 2MD\,DN\cos(\pi - \varphi) =$$
$$= \operatorname{tg}^2\theta' + \operatorname{tg}^2\theta'' + 2\operatorname{tg}\theta'\operatorname{tg}\theta''\cos\varphi.$$

Из треугольника MNO получаем:

$$MN^2 = MO^2 + ON^2 - 2MO\,NO\cos\theta =$$
$$= \sec^2\theta'' + \sec^2\theta' - 2\sin\theta'\sec\theta''\cos\theta.$$

Приравняв правые части обеих формул, мы после небольших преобразований придем к первой из формул (29). Аналогичным образом можно получить и остальные две формулы.

Таким образом, окончательно получаем следующий результат. *Если* φ, θ', θ'' — *произвольные углы* $(0 \leqslant \varphi < 2\pi,\ \ 0 \leqslant \theta',\ \ \theta'' \leqslant \pi)$, *а* θ, φ_1 *и* φ_2 *определены по* φ_1, θ', θ'' *формулами* (29), *то для обобщенных сферических функций имеет место следующая формула сложения*:

$$e^{-im\varphi_1} P^l_{mn}(\cos\theta)\, e^{-in\varphi_2} = \sum_{s=-l}^{l} e^{-is\varphi} P^l_{ms}(\cos\theta')\, P^l_{sn}(\cos\theta''). \quad (28')$$

В частности, при $m=n=0$ формула (28′) превращается в обычную формулу сложения для многочленов Лежандра, выражающую значение многочлена Лежандра от $\cos\theta=\cos\theta'\cos\theta''-\sin\theta'\sin\theta''\cos\varphi$ через присоединенные функции от θ' и θ''.

Полагая $m=0$, мы получаем теорему сложения для обычных сферических функций $P_{0n}^l(\cos\theta)\,e^{-in\varphi_2}=Y_l^n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_2,\theta\right)$:

$$P_{0n}^l(\cos\theta)=\sum_{s=-l}^{l}e^{-is\varphi}P_{0s}^l(\cos\theta')\,P_{sn}^l(\cos\theta'').$$

Особенно простой вид имеет формула сложения при $\varphi=0$ и, следовательно, $\varphi_1=\varphi_2=0$. В этом случае $\theta=\theta'+\theta''$, и мы имеем:

$$P_{mn}^l[\cos(\theta'+\theta'')]=\sum_{s=-l}^{l}P_{ms}^l(\cos\theta')\,P_{sn}^l(\cos\theta''). \tag{30}$$

Вспоминая связь между $P_{mn}^l(\mu)$ и многочленами Якоби (см. п. 4), мы можем интерпретировать это соотношение как формулу сложения для многочленов Якоби. Так как

$$P_{0n}^l[\cos(\theta'+\theta'')]=\sum_{s=-l}^{l}P_{0s}^l(\cos\theta')\,P_{sn}^l(\cos\theta''),$$

а $P_{0n}^l[\cos(\theta'+\theta'')]$ — присоединенные функции Лежандра, то видим, что обобщенные сферические функции возникают естественным образом при разложении $P_{0n}^l[\cos(\theta'+\theta'')]$ в ряд по присоединенным функциям от θ'. Сами же обобщенные сферические функции, как следует из формул (28′) и (30), образуют систему, замкнутую относительно теоремы сложения. Приведенная формула сложения дает возможность также выразить многочлен Лежандра от косинуса суммы нескольких углов через функции, каждая из которых зависит лишь от одного из углов. Так, например,

$$P_l[\cos(\theta'+\theta''+\theta''')]=$$
$$=\sum_{s_1=-l}^{l}\sum_{s_2=-l}^{l}P_{0s_1}^l(\cos\theta')\,P_{s_1s_2}^l(\cos\theta')\,P_{s_20}^l(\cos\theta''').$$

6. Разложение функций на группе вращений по обобщенным сферическим функциям. Для определения матричных элементов $T_{mn}(g)$ мы построили в начале этого параграфа неприводимые представления преобразованиями U_{g_1}, действующие в конечномерных пространствах $R^{m'}$ функций, заданных на группе вращений.

Рассмотрим теперь множество всех функций от g:

$$f(g)=f(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2),$$

для которых сходится интеграл

$$\int |f(g)|^2 dg = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} |f(\varphi_1, \theta, \varphi_2)|^2 \sin\theta \, d\varphi_1 \, d\theta \, d\varphi_2. \tag{31}$$

Если определить скалярное произведение $f_1(g)$ на $f_2(g)$ формулой

$$(f_1, f_2) = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\varphi_1, \theta, \varphi_2) \overline{f_2(\varphi_1, \theta, \varphi_2)} \sin\theta \, d\varphi_1 \, d\theta \, d\varphi_2, \tag{32}$$

то эти функции образуют гильбертово пространство функций на группе. Преобразования

$$U_{g_1} f(g) = f(gg_1)$$

образуют в этом пространстве бесконечномерное унитарное представление*). Оно называется *регулярным представлением* группы вращений. Неприводимые представления, на которые оно разлагается, нам известны: это представления, действующие в подпространствах обобщенных сферических функций $T^l_{mn}(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ при фиксированных l и m. Нетрудно убедиться, что этим исчерпываются все неприводимые представления преобразованиями U_{g_1}. Действительно, в каждом подпространстве, в котором действует неприводимое представление веса l, должен, согласно общей теории, существовать элемент, удовлетворяющий уравнениям $H_3 f = lf$, $H_+ f = 0$, т. е. (см. формулу (12)) уравнениям $i\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} = lf$ и $\operatorname{ctg}\theta \frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi_2} + i\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$. Решение первого уравнения имеет вид $f = F(\theta, \varphi_2) e^{-il\varphi_1}$, а второе после подстановки этой функции принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{l}{\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \varphi_2} - l \operatorname{ctg}\theta F = 0.$$

Периодические по φ_2 решения этого уравнения могут быть записаны в виде

$$F(\theta, \varphi_2) = \sum_m u_m(\theta) e^{-im\varphi_2},$$

где $u_m(\theta)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{du}{d\theta} + \frac{m - l\cos\theta}{\sin\theta} u = 0.$$

Отсюда (см. формулу (17) этого параграфа)

$$u_m(\theta) = C \frac{\sin^l \theta}{\operatorname{tg}^m \frac{\theta}{2}}.$$

*) Унитарность представления следует из того, что введенное скалярное произведение функций $f_1(g)$, $f_2(g)$ инвариантно относительно умножения справа на элемент g_0 (см. п. 3 § 1).

Возможные значения m определяются из условия принадлежности функции $u_m(\theta)\, e^{-im\varphi_2} e^{-il\varphi_1}$ гильбертову пространству, т. е. из условия сходимости интеграла

$$\int_0^\pi |\, u_m(\theta)\,|^2 \sin\theta\, d\theta.$$

Полагая $\cos\theta = \mu$, легко убедиться в том, что этот интеграл сходится лишь при условии, что $-l \leqslant m \leqslant l$. Но в этом случае полученные нами решения являются линейными комбинациями обобщенных сферических функций.

Таким образом, разложение регулярного представления на неприводимые означает, что каждая однозначная функция на группе вращений с интегрируемым квадратом модуля по группе разлагается в ряд по обобщенным сферическим функциям $T^l_{mn}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$. Функции $T^l_{mn}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ и $T^{l'}_{m'n'}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ при $l' \neq l$ ортогональны между собой, так как они принадлежат ортогональным инвариантным подпространствам, в которых действуют различные неприводимые представления группы вращений. При $l' = l$ и $m' \neq m$ они также ортогональны, так как $\int\limits_0^{2\pi} e^{-im\varphi_2} e^{im'\varphi_2}\, d\varphi_2 = 0$. Аналогично ортогональность имеет место при $l' = l$ и $n' \neq n$. Интеграл же от квадрата модуля каждой из функций $T^l_{mn}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ по группе:

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} |\, T^l_{mn}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)\,|^2 \sin\theta\, d\varphi_1\, d\theta\, d\varphi_2 = \frac{2}{2l+1}.$$

Окончательно можно сформулировать следующую теорему: *совокупность обобщенных сферических функций* $T^l_{mn}(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ (*l — целые*) *образует полную ортогональную систему в пространстве функций* $f(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi;\ 0 \leqslant \varphi_1, \varphi_2 < 2\pi)$, *если скалярное произведение задается формулой* (32).

Добавление к § 7. Рекуррентные соотношения между обобщенными сферическими функциями

Между обобщенными сферическими функциями T^l_{mn} существует целый ряд рекуррентных соотношений. Часть из них связывает между собой обобщенные сферические функции одного и того же порядка (с одним и тем же l), другая часть связывает функции различных порядков.

Рекуррентные формулы, связывающие сферические функции данного порядка, мы уже встречали в п. 4 § 7. Они вытекают из соотношений $H_- T^l_{mn} = \alpha_n T^l_{m,\, n-1}$ и $H_+ T^l_{mn} = \alpha_{n+1} T^l_{m,\, n+1}$ и после подстановки операторов H_- и H_+ из формулы (12) § 7 и замены T^l_{mn} через $e^{-im\varphi_2} u_{mn}(\theta) e^{-in\varphi_1}$ могут быть записаны в виде *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_{mn}}{d\theta} - \frac{m-n\cos\theta}{\sin\theta} u_{m,n} &= -i\alpha_n u_{m,n-1}, \\ \frac{du_{mn}}{d\theta} + \frac{m-n\cos\theta}{\sin\theta} u_{m,n} &= -i\alpha_{n+1} u_{m,n+1}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

После подстановки $\mu = \cos\theta$ эти формулы приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{1-\mu^2}\frac{dP^l_{mn}(\mu)}{d\mu} + \frac{m-n\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P^l_{mn}(\mu) &= i\alpha_n P^l_{m,n-1}, \\ \sqrt{1-\mu^2}\frac{dP^l_{mn}(\mu)}{d\mu} - \frac{m-n\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} P^l_{mn}(\mu) &= i\alpha_{n+1} P^l_{m,n+1}, \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{(l+n)(l-n+1)}.$$

Как было показано в § 7 (п. 4, формула (26)), $u_{mn}(\theta) = u_{nm}(\theta)$. Подставляя $u_{nm}(\theta)$ вместо u_{mn} в формулы (1) и заменяя m на n, а n на m, мы получим формулы

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_{mn}}{d\theta} - \frac{n-m\cos\theta}{\sin\theta} u_{mn} &= -i\alpha_m u_{m-1,n}, \\ \frac{du_{mn}}{d\theta} + \frac{n-m\cos\theta}{\sin\theta} u_{mn} &= -i\alpha_{m+1} u_{m+1,n}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Из каждой пары формул (1) и (2) можно вывести соотношения между тремя последовательными элементами строки (или столбца), уже не содержащие производных. Они имеют вид

$$\alpha_{n+1} u_{m,n+1} - \alpha_n u_{m,n-1} = 2i\frac{m-n\cos\theta}{\sin\theta} u_{mn}, \tag{3}$$

$$\alpha_{m+1} u_{m+1,n} - \alpha_m u_{m-1,n} = 2i\frac{n-m\cos\theta}{\sin\theta} u_{mn}, \tag{3'}$$

где опять через $u_{mn}(\theta)$ обозначено $P^l_{mn}(\cos\theta)$.

Формулы иного типа можно получить, если воспользоваться одним свойством матриц представления, выведенным в § 2. А именно, в п. 2 § 2 мы показали, что если $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ — некоторый вектор и $A_\eta = A_1\eta_1 + A_2\eta_2 + A_3\eta_3$, где A_k — матрицы, отвечающие бесконечно малым поворотам вокруг осей координат, то для любого вращения g имеет место формула

$$T_g A_\eta T_{g^{-1}} = A_{\tilde\eta}, \tag{4}$$

где $\tilde\eta = g\eta$ и $A_{\tilde\eta} = A_1\tilde\eta_2 + A_2\tilde\eta_2 + A_3\tilde\eta_3$. Умножим равенство (4) справа на матрицу T_g и положим $\eta = (1, 0, 0)$. Тогда компоненты

---

*) Для краткости мы обозначаем $P^l_{mn}(\cos\theta)$ через $u_{mn}(\theta)$.

вектора $\tilde{\eta}$ будут элементами первого столбца матрицы $\|g_{ik}\|$. В § 1 мы выписали матрицу $\|g_{ik}\|$ как функцию от углов Эйлера (см. формулу (9) § 1). Подставив элементы g_{11}, g_{21} и g_{31} этой матрицы в соотношение $A_1 T_g = g_{11} T_g A_1 + g_{21} T_g A_2 + g_{31} T_g A_3$, мы получим равенство

$$T_g A_1 = (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\theta \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) A_1 T_g + \\ + (\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\theta \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) A_2 T_g + \sin\varphi_2 \sin\theta\, A_3 T_g.$$

Для дальнейших вычислений удобнее будет заменить матрицы A_k через H_+, H_- и H_3 по формулам

$$A_1 = -\frac{i}{2}(H_+ + H_-), \quad A_2 = \frac{1}{2}(H_- - H_+), \quad A_3 = -iH_3.$$

Сделав это и собрав коэффициенты при H_+ и H_- в правой части, мы получим:

$$T_g(H_+ + H_-) = (\cos\varphi_2 - i\cos\theta \sin\varphi_2) e^{-i\varphi_1} H_+ T_g + \\ + (\cos\varphi_2 + i\cos\theta \sin\varphi_2) e^{i\varphi_1} H_- T_g - 2\sin\varphi_2 \sin\theta\, H_3 T_g.$$

Применим теперь преобразования, стоящие в обеих частях равенства, к вектору канонического базиса f_n и сравним коэффициенты при f_m в полученных выражениях. Учитывая, что $T_g f_n = \sum_m T_{mn} f_m$, $H_+ f_n = \alpha_{n+1} f_{n+1}$, $H_- f_n = \alpha_n f_{n-1}$, $H_3 f_n = n f_n$, найдем следующее соотношение между функциями T_{mn}:

$$\alpha_{n+1} T_{m,\,n+1} + \alpha_n T_{m,\,n-1} = (\cos\varphi_2 - i\cos\theta \sin\varphi_2) e^{-i\varphi_1} \alpha_m T_{m-1,\,n} + \\ + (\cos\varphi_2 + i\cos\theta \sin\varphi_2) e^{i\varphi_1} \alpha_{m+1} T_{m+1,\,n} - 2m \sin\varphi_2 \sin\theta\, T_{m,n}.$$

Подставим в это соотношение $T_{m,\,n} = e^{-im\varphi_1} u_{mn}(\theta) e^{-in\varphi_2}$ и умножим его на $e^{im\varphi_1 + in\varphi_2}$. Мы получим тогда связь между функциями $u_{mn}(\theta)$, имеющую место при любых значениях φ_1:

$$\alpha_{n+1} u_{m,\,n+1} e^{-i\varphi_2} + \alpha_n u_{m,\,n-1} e^{i\varphi_2} = (\cos\varphi_2 - i\cos\theta \sin\varphi_2) \alpha_m u_{m-1,\,n} + \\ + (\cos\varphi_2 + i\cos\theta \sin\varphi_2) \alpha_{m+1} u_{m+1,\,n} - 2m \sin\varphi_2 \sin\theta\, u_{mn}.$$

Положив в этом соотношении $\cos\varphi_2 = \frac{e^{i\varphi_2} + e^{-i\varphi_2}}{2}$ и $\sin\varphi_2 = \frac{e^{i\varphi_2} - e^{-i\varphi_2}}{2i}$ и приравняв коэффициенты при $e^{i\varphi_2}$ и $e^{-i\varphi_2}$ в левой и правой частях, получим окончательные формулы

$$\alpha_{n+1} u_{m,\,n+1} = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \alpha_m u_{m-1,\,n} + \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \alpha_{m+1} u_{m+1,\,n} - \\ - im \sin\theta\, u_{mn}, \qquad (5)$$

$$\alpha_n u_{m,\,n-1} = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) \alpha_m u_{m-1,\,n} + \frac{1}{2}(1 + \cos\theta) \alpha_{m+1} u_{m+1,\,n} + \\ + im \sin\theta\, u_{mn}. \qquad (5')$$

Эти формулы связывают три соседних элемента n-го столбца с элементом $n+1$-го или $n-1$-го столбца. Здесь через $u_{mn}(\theta)$ обозначено $P^l_{mn}(\cos\theta)$. Воспользовавшись тем, что $u_{mn}(\theta)=u_{nm}(\theta)$, мы, как и выше, можем получить аналогичные формулы, связывающие три соседних элемента строки с элементом выше или нижерасположенной строки:

$$\alpha_{m+1}u_{m+1,\,n}=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\,\alpha_n u_{m,\,n-1}+\\ +\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\,\alpha_{n+1}u_{m,\,n+1}-in\sin\theta\,u_{mn}, \quad (6)$$

$$\alpha_m u_{m-1,\,n}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\,\alpha_n u_{m,\,n-1}+\\ +\frac{1}{2}(1+\cos\theta)\,\alpha_{n+1}u_{m,\,n+1}+in\sin\theta\,u_{mn}. \quad (6')$$

Если в равенстве (4) взять $\eta=(0,\ 1,\ 0)$, мы получим те же самые формулы (5), (5′). Если же положить $\eta=(0,\ 0,\ 1)$, мы получим формулу

$$\alpha_{m+1}u_{m+1,\,n}-\alpha_m u_{m-1,\,n}=2i\,\frac{n-m\cos\theta}{\sin\theta}\,u_{mn},$$

уже выведенную другим путем раньше.

Перейдем теперь к выводу формул, связывающих между собой элементы T^l_{mn} матриц T_g с различными значениями l (отвечающих различным неприводимым представлениям). Чтобы сделать это, воспользуемся результатами п. 4 § 4 о разложении произведения двух неприводимых представлений на неприводимые. Мы видели там, что произведение $g\to T_g$ неприводимого представления веса 1 на неприводимое представление веса l разлагается на три неприводимых представления: $g\to T^{l+1}_g$ веса $l+1$, $g\to T^l_g$ веса l и $g\to T^{l-1}_g$ веса $l-1$. Базис $e_k f_{m-k}$ в пространстве $R_1\times R_2$, в котором действует представление, связан с каноническими базисами $\{g^{l+1}_m\}$, $\{g^l_m\}$ и $\{g^{l-1}_m\}$ в пространствах, в которых действуют неприводимые представления $g\to T^{l+1}_g$, $g\to T^l_g$ и $g\to T^{l-1}_g$, соответственно, формулами

$$\left.\begin{aligned} e_{-1}f_{m+1}&=c^m_{11}g^{l+1}_m+c^m_{12}g^l_m+c^m_{13}g^{l-1}_m,\\ e_0 f_m&=c^m_{21}g^{l+1}_m+c^m_{22}g^l_m+c^m_{23}g^{l-1}_m,\\ e_1 f_{m-1}&=c^m_{31}g^{l+1}_m+c^m_{32}g^l_m+c^m_{33}g^{l-1}_m.\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Значения коэффициентов c^m_{ik} приведены на стр. 64 (формула (9) § 4).

Обозначим теперь через T^l_g матрицу неприводимого представления веса l в каноническом базисе и применим преобразование T_g к левой и правой частям каждого из равенств (7). В левой части, пользуясь определением произведения представлений, получим:

$$T_g e_k f_{m-k} = T_g^1 e_k T_g^l f_{m-k} =$$
$$= c_{k+2,1}^m T_g^{l+1} g_m^{l+1} + c_{k+2,2}^m T_g^l g_m^l + c_{k+2,3}^m T_g^{l-1} g_m^{l-1}$$
$$(k = -1,\ 0,\ 1).$$

Обозначая элементы матриц T_g^l через T_{mn}^l, найдем из этого равенства соотношение

$$\left(T_{-1k}^1 e_{-1} + T_{0\,k}^1 e_0 + T_{1k}^1 e_1\right) \sum T_{j,\,m-k}^l f_j =$$
$$= \sum c_{k+2}^m T_{jm}^{l+1} g_j^{l+1} + c_{k+2,2}^m T_{jm}^l g_j^l + c_{k+2,3}^m T_{jm}^{l-1} g_j^{l-1}.$$

Заменим теперь в правой части векторы g_j^{l+1}, g_j^l, g_j^{l-1} через $e_{-1}f_{j+1}$, $e_0 f_j$, $e_1 f_{j-1}$ по формулам (7) *) и сравним после этого коэффициенты при векторах $e_{-1}f_{j+1}$, $e_0 f_j$ и $e_1 f_{j-1}$ в левой и правой частях получившегося равенства. Мы получим три соотношения, зависящих от k. Придавая в каждом из этих соотношений числу k три возможных значения -1, 0, 1 и подставляя функции T_{mn}^1 $(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2)$ (см. вторую матрицу § 7 на стр. 95), найдем девять рекуррентных формул:

$$\left.\begin{aligned}
&c_{11}^m T_{jm}^{l+1} c_{11}^j + c_{12}^m T_{jm}^l c_{12}^j + c_{13}^m T_{jm}^{l-1} c_{13}^j = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\, e^{i\varphi_1+i\varphi_2}\, T_{j+1,\,m+1}^l,\\
&c_{11}^m T_{jm}^{l+1} c_{21}^j + c_{12}^m T_{jm}^l c_{22}^j + c_{13}^m T_{jm}^{l-1} c_{23}^j = \frac{-i}{\sqrt{2}} \sin\theta\, e^{i\varphi_1} T_{j,\,m+1}^l,\\
&c_{11}^m T_{jm}^{l+1} c_{31}^j + c_{12}^m T_{jm}^l c_{32}^j + c_{13}^m T_{jm}^{l-1} c_{33}^j = \frac{1}{2}(\cos\theta - 1)\, e^{i\varphi_1 - i\varphi_2}\, T_{j-1,\,m+1}^l,\\
&c_{21}^m T_{jm}^{l+1} c_{11}^j + c_{22}^m T_{jm}^l c_{12}^j + c_{23}^m T_{jm}^{l-1} c_{13}^j = \frac{-i}{\sqrt{2}} \sin\theta\, e^{i\varphi_2} T_{j+1,\,m},\\
&c_{21}^m T_{jm}^{l+1} c_{21}^j + c_{22}^m T_{jm}^l c_{22}^j + c_{23}^m T_{jm}^{l-1} c_{23}^j = \cos\theta\, T_{j,\,m}^l,\\
&c_{21}^m T_{jm}^{l+1} c_{31}^j + c_{22}^m T_{jm}^l c_{32}^j + c_{23}^m T_{jm}^{l-1} c_{33}^j = \frac{-i}{\sqrt{2}} \sin\theta\, e^{-i\varphi_2}\, T_{j-1,\,m}^l,\\
&c_{31}^m T_{jm}^{l+1} c_{11}^j + c_{32}^m T_{jm}^l c_{12}^j + c_{33}^m T_{jm}^{l-1} c_{13}^j = \frac{1}{2}(\cos\theta - 1)\, e^{-i\varphi_1+i\varphi_2} T_{j+1,\,m-1}^l,\\
&c_{31}^m T_{jm}^{l+1} c_{21}^j + c_{32}^m T_{jm}^l c_{22}^j + c_{33}^m T_{jm}^{l-1} c_{23}^j = \frac{-i}{\sqrt{2}} \sin\theta\, e^{-i\varphi_1}\, T_{j,\,m-1}^l,\\
&c_{31}^m T_{jm}^{l+1} c_{31}^j + c_{32}^m T_{jm}^l c_{32}^j + c_{33}^m T_{jm}^{l-1} c_{33}^j = \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\, e^{-i\varphi_1 - i\varphi_2} T_{j-1,\,m-1}^l.
\end{aligned}\right\}\quad (8)$$

*) Напомним, что в силу ортогональности матрицы $\left\|c_{ik}^m\right\|$ обратная к ней совпадает с транспонированной.

В этих формулах c_{ik}^{m} — известные числа, а именно элементы матрицы $C^{(m)}$, заданной формулой (9) § 4 на стр. 64.

Не подставляя значений этих чисел во все формулы (8), ограничимся тем, что сделаем это для средней из них, дающей связь между функциями T_{mn}^{l+1}, T_{mn}^{l} и T_{mn}^{l-1}, стоящими в соответствующих матрицах на одних и тех же местах. Мы получим формулу

$$\frac{\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)(l+j+1)(l-j+1)}}{(2l+1)(l+1)} T_{jm}^{l+1}+\frac{mj}{l(l+1)} T_{jm}^{l}+ \\ +\frac{\sqrt{(l+m)(l-m)(l+j)(l-j)}}{l(2l+1)} T_{jm}^{l-1}=\cos\theta\, T_{jm}^{l}, \qquad (9)$$

или после умножения на $e^{-im\varphi_1-ij\varphi_2}$ формулу

$$\frac{\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)(l+j+1)(l-j+1)}}{(2l+1)(l+1)} P_{jm}^{l+1}(\mu)+ \\ +\frac{mj}{l(l+1)} P_{jm}^{l}(\mu)+\frac{\sqrt{(l+m)(l-m)(l+j)(l-j)}}{l(2l+1)} P_{jm}^{l-1}(\mu)=\mu P_{jm}^{l}(\mu). \qquad (9')$$

При $j=m=0$ эта формула превращается в рекуррентную формулу между многочленами Лежандра.

§ 8. Разложение векторных и тензорных полей

В § 3 мы разлагали функции, определенные на сфере, т. е. функции, зависящие от полярных углов ϑ и φ, по сферическим функциям (см. обозначения, введенные в конце п. 2, § 7). Такие разложения используются обычно при решении в сферических координатах различных задач, в постановке которых имеется сферическая симметрия относительно некоторой точки (задачи, инвариантные относительно вращений).

В настоящем параграфе мы решим задачу об аналогичном разложении для функций, значениями которых является не скаляр, а вектор, тензор или какая-нибудь другая величина. Таким образом, содержание этого параграфа является развитием результатов § 3, где такое разложение проведено для скалярных функций. Разложение функций, так же как и в § 3, получается в результате разложения представления, порожденного преобразованиями этих функций на неприводимые.

Специальные функции, по которым производится разложение, как мы увидим, окажутся обобщенными сферическими функциями, вычисленными в § 7, частным случаем которых являются обычные сферические функции.

Для большей ясности мы сначала, в п. 1, изложим решение задачи для функций, принимающих векторные значения, и затем уже для функций, значение которых есть произвольная величина.

Подобные разложения для различных величин встречаются во многих физических вопросах.

Подобно тому как решение уравнения Лапласа в сферических координатах естественно приводит к разложению функции в ряд по сферическим функциям, при решении уравнений Максвелла в сферических координатах приходится разлагать в ряд функции, значениями которых являются векторы.

Аналогично при решении уравнений Дирака в центрально-симметрическом поле приходится инвариантным образом разлагать в ряд функцию на сфере, значениями которой является спинор. Функции, по которым производится в этом случае разложение, введены В. А. Фоком и называются шаровыми функциями со спином.

Для решения уравнений теории упругости Г. И. Петрашень ввел так называемые шаровые векторы и успешно применил их к решению задач.

Наконец, в работе В. Б. Берестецкого, А. З. Долгинова и К. А. Тер-Мартиросяна были введены разложения функций, значениями которых являются произвольные l-векторы (величины, преобразующиеся по неприводимому представлению веса l). Разложение проводилось по так называемым шаровым (l, L)-векторным функциям, компоненты которых задаются как линейные комбинации обычных сферических функций. Коэффициенты этих линейных комбинаций совпадают с коэффициентами c_{ik}^{m}, определенными в п. 4 § 4. В общем случае они довольно трудно обозримы.

Мы, как было указано выше, производим разложение компонент величины по обобщенным сферическим функциям. Связь этих функций с обычными сферическими функциями может быть определена с помощью рекуррентных формул § 7.

1. Разложение векторных функций. Рассмотрим функцию $a(x)$, где x — точка трехмерного пространства, а a — вектор, т. е. рассмотрим векторное поле.

Выясним, как преобразуются такие функции при вращении. Подвергнем векторное поле $a(x)$ произвольному вращению g_0. В результате этого вращения мы получим новое векторное поле $a'(x)$. Найдем выражение $a'(x)$ через $a(x)$. После вращения g_0, во-первых, в точку x придет вектор, начало которого до этого было в точке $g_0^{-1}x$. При этом вектор $a(g_0^{-1}x)$ не перенесется в точку x без изменения, а вместе со всем векторным полем подвергнется вращению g_0.

Следовательно, в результате вращения g_0 векторное поле $a(x)$ перейдет в векторное поле $a'(x) = g_0 a(g_0^{-1}x)$. Таким образом, *каждому вращению g_0 отвечает преобразование T_{g_0} векторных функций $a(x)$, определяемое формулой*

$$T_{g_0}a(x)=g_0 a\left(g_0^{-1}x\right). \tag{1}$$

Ясно, что преобразование T_{g_0} линейно.

Далее, из самого определения преобразования T_g следует, что преобразование $T_{g_0g_1}$, отвечающее произведению вращений g_0 и g_1, совпадает с последовательным осуществлением преобразований T_{g_1} и T_{g_0}:

$$T_{g_0g_1}=T_{g_0}T_{g_1}. \tag{2}$$

Точки любой сферы с центром в начале координат остаются после вращения g_0 на этой же сфере. На этом основании мы при изучении преобразований T_g ограничимся функциями, заданными на поверхности единичной сферы, т. е. функциями $a(P)=a(\vartheta, \varphi)$, где a — вектор, зависящий от точки P сферы со сферическими координатами ϑ и φ. Преобразования T_g, как это следует из формулы (2), осуществляют представление группы вращений в пространстве векторных функций *) на поверхности сферы. Выделим из пространства векторных функций на сфере инвариантные подпространства, в которых действуют неприводимые представления. С этой целью найдем конечные системы векторных функций, которые переходят в свои линейные комбинации под действием преобразований T_{g_0}.

Для поля скалярных функций такими системами являются сферические функции данного порядка l.

В случае векторного поля также можно было бы разлагать каждую компоненту вектора $a(P)$ по сферическим функциям. Однако такое разложение не является удобным, так как при вращении каждая компонента вектора переходит в комбинацию всех трех компонент, т. е. компоненты перепутываются между собой.

На самом деле существует более удобный способ задания векторного поля. Например, в качестве одной из компонент вектора целесообразно брать компоненту $a_r(P)$, нормальную к поверхности сферы. Так как при вращении нормальная компонента $a_r(P)$ в точке P заменится снова на нормальную компоненту вектора в точке $g_0^{-1}P$, т. е.

$$T_{g_0}a_r(P)=a_r\left(g_0^{-1}P\right),$$

---

*) Это представление будет унитарным, если ввести скалярное произведение двух векторных функций $a(P)$ и $b(P)$ по формуле

$$(a(P),\ b(P))=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\{a_1(\vartheta,\varphi)\overline{b_1(\vartheta,\varphi)}+a_2(\vartheta,\varphi)\overline{b_2(\vartheta,\varphi)}+$$
$$+a_3(\vartheta,\varphi)\overline{b_3(\vartheta,\varphi)}\}\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

где ϑ, φ — сферические координаты точки P сферы, а a_k и b_k — компоненты a и b в какой-нибудь системе координат.

то функции $a_r(P)$ преобразуются при вращении как скалярные функции (ср. § 3). Задача о разложении этого представления на неприводимые решается разложением функций $a_r(\vartheta, \varphi)$ в ряд по сферическим функциям. Поэтому в качестве одной из компонент будем в дальнейшем брать $a_r(P)$.

Сейчас мы дадим способ задания векторного поля с помощью таких трех функций, *каждая* из которых при вращении преобразуется независимо от других.

Функция на поверхности сферы есть функция двух переменных ϑ и φ. Основной прием, быстро приводящий к решению задачи, состоит в том, что вместо функций от ϑ и φ переходят к функциям трех переменных φ_1, θ, φ_2 (функциям от вращения g), что дает возможность использовать результаты предыдущего параграфа.

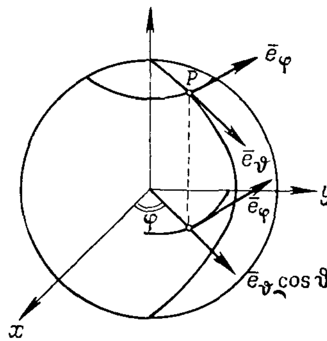

Рис. 7.

С этой целью рассмотрим в точке P сферы какой-либо ортогональный и нормированный репер e_1, e_2, e_3, третий вектор которого e_3 направлен по нормали к поверхности сферы. Каждый такой репер можно задать вращением g, которое переводит репер, расположенный в северном полюсе с векторами, направленными по осям координат (будем называть его в дальнейшем нормальный репер), в данный.

Подвергнем все векторы репера, соответствующего вращению g, некоторому вращению g_0. При этом он перейдет в новый репер. Так как первый репер получается из нормального вращением g, а второй получается из первого вращением g_0, то второй репер из нормального получается вращением $g_0 g$, т. е. он описывается вращением $g_0 g$.

Каждый репер, как было указано выше, описывается вращением g, т. е. эйлеровскими углами φ_1, θ, φ_2. Выясним, как задать репер с помощью φ_1, θ, φ_2.

Подчеркнем, что элемент группы g описывает и положение репера и точку P сферы, являющуюся его началом. Сферические координаты ϑ и φ точки P, в которую переходит при вращении g северный полюс сферы, связаны с углами Эйлера вращения g соотношениями

$$\vartheta = \theta, \qquad \varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}, \tag{3}$$

т. е. эта точка не зависит от первого эйлерова угла φ_1 *).

*) Декартовы координаты точки, в которые переходит северный полюс сферы в результате вращения g, суть элементы 3-го столбца матрицы $\|g_{ik}\|$, т. е. числа $\sin\varphi_2 \sin\theta$, $-\cos\varphi_2 \sin\theta$, $\cos\theta$ (см. п. 2 § 1). Сравнивая эти выражения с выражениями декартовых координат той же точки через ее сферические координаты $\cos\varphi \sin\vartheta$, $\sin\varphi \sin\vartheta$, $\cos\vartheta$, мы и получаем формулу (3).

Третий, нормальный к сфере, вектор репера полностью определяется положением начала репера и поэтому также не зависит от φ_1.

Векторы e_1 и e_2 расположены в касательной плоскости к сфере в точке P и зависят от φ_1. Чтобы найти эту зависимость, рассмотрим два вращения $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ и $g_1 = g(\varphi_1 + \varphi^*, \theta, \varphi_2)$ с различными значениями первого из углов Эйлера. Очевидно, что эти выражения переводят нормальный репер в два репера с началом в одной и той же точке и, следовательно, общим вектором e_3. При этом второй репер (описываемый вращением g_1) получается из первого поворотом на угол φ^* в положительном направлении вокруг e_3. Если e_1 и e_2 — векторы первого репера, а e_1' и e_2' — соответствующие векторы второго, то по обычным формулам имеем:

$$e_1' = e_1 \cos\varphi^* + e_2 \sin\varphi^*,$$

$$e_2' = -e_1 \sin\varphi^* + e_2 \cos\varphi^*.$$

Положим $\varphi_1 = \pi$ и обозначим φ^* через φ_1 и $e_k(\pi, \theta, \varphi_2)$, $k = 1, 2$, через e_k^0. Мы получим тогда:

$$\left.\begin{aligned} e_1(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= e_1^0 \cos\varphi_1 + e_1^0 \sin\varphi_1, \\ e_2(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= -e_1^0 \sin\varphi_1 + e_2^0 \cos\varphi_1. \end{aligned}\right\}$$

Векторы $e_1^0 = e_1(\pi, \theta, \varphi_2)$ и $e_2^0 = e_2(\pi, \theta, \varphi_2)$ имеют простой геометрический смысл, а именно, это — единичные векторы, направленные по касательным к параллели и меридиану сферы в точке P. Действительно, полагая в матрице $\|g_{ik}\|$ $\varphi_1 = \pi$, найдем выражения для декартовых координат этих векторов: $e_1 = (-\cos\varphi_2, -\sin\varphi_2, 0)$, $e_2 = (\cos\theta \sin\varphi_2, -\cos\theta\cos\varphi_2, -\sin\theta)$. С другой стороны, из рис. 7 видно, что единичный вектор e_φ, направленный по касательной к параллели в сторону возрастания φ, имеет компоненты $(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, а e_ϑ — вектор, направленный по касательной к меридиану в сторону возрастания ϑ, имеет компоненты $(\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$. Учитывая, что сферические координаты ϑ и φ точки P, в которой помещен репер, связаны с углами Эйлера θ и φ_2 формулами (3), находим отсюда, что $e_1^0 = -e_\varphi$, $e_2^0 = e_\vartheta$.

Таким образом, окончательно

$$\left.\begin{aligned} e_1(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= -e_\varphi \cos\varphi_1 + e_\vartheta \sin\varphi_1, \\ e_2(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= e_\varphi \sin\varphi_1 + e_\vartheta \cos\varphi_1, \\ e_3(\varphi_1 + \pi, \theta, \varphi_2) &= e_r, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где e_r, e_φ, e_ϑ — единичные векторы, направленные по нормали к сфере и по касательным к параллели и меридиану сферы в точке P со сферическими координатами $\varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = \theta$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь векторную функцию $a(P)$ (векторное поле на сфере). Если имеется некоторый репер с началом в точке P, то, разложив $a(P)$ по векторам этого репера, получим три числа a_1, a_2 и a_3 — компоненты a по векторам репера. Эти числа, как и сами векторы репера, являются функциями от вращения g, т. е. от углов Эйлера φ_1, θ, φ_2. При этом, так как e_3 не зависит от φ_1, то компонента a_3 также не зависит от φ_1. Она совпадает с рассмотренной нами выше функцией $a_r(P)$ в точке P со сферическими координатами $\varphi_2 - \frac{\pi}{2}$ и θ.

Из формулы (4) видно, как компоненты a_1 и a_2 зависят от φ_1. Действительно, умножив обе части равенства (4) скалярно на $a(P)$, мы получим, что

$$\left.\begin{aligned} a_1(\varphi_1+\pi, \theta, \varphi_2) &= -a_\varphi \cos\varphi_1 + a_\vartheta \sin\varphi_1, \\ a_2(\varphi_1+\pi, \theta, \varphi_2) &= a_\varphi \sin\varphi_1 + a_\vartheta \cos\varphi_1, \\ a_3(\varphi_1+\pi, \theta, \varphi_2) &= a_r. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Напомним, как выразить компоненты a_φ и a_ϑ, а также a_r через обычные компоненты a, т. е. через a_x, a_y и a_z. Нам нужно для этого взять скалярное произведение вектора $a=(a_x, a_y, a_z)$ на векторы $e_\varphi = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $e_\vartheta = (\cos\vartheta\cos\varphi, \cos\vartheta\sin\varphi, -\sin\vartheta)$ и $e_r = (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$.

$$\left.\begin{aligned} a_\varphi(\varphi, \vartheta) &= -a_x\sin\varphi + a_y\cos\varphi, \\ a_\vartheta(\varphi, \vartheta) &= a_x\cos\vartheta\cos\varphi + a_y\cos\vartheta\sin\varphi - a_z\sin\vartheta, \\ a_r(\varphi, \vartheta) &= a_x\sin\vartheta\cos\varphi + a_y\sin\vartheta\sin\varphi + a_z\cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Для дальнейшего удобнее ввести комплексные компоненты вектора

$$a_+ = a_1 - ia_2,$$
$$a_- = a_1 + ia_2.$$

Из (5) получаются для a_+ и a_- выражения

$$\left.\begin{aligned} a_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= a_+(\pi, \theta, \varphi_2)\, e^{i\varphi_1} = (-a_\varphi - ia_\vartheta)\, e^{i\varphi_1}, \\ a_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= a_-(\pi, \theta, \varphi_2)\, e^{-i\varphi_1} = (-a_\varphi + ia_\vartheta)\, e^{-i\varphi_1}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

a_φ и a_ϑ берутся в точке с координатами $\varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}$, $\vartheta = \theta$.

Рассмотрим теперь, что происходит с функциями a_1, a_2 и a_3 (или, что все равно, с функциями a_+, a_- и a_3) при вращении. Подвергнем векторное поле и рассматриваемые реперы вращению g_0. Поскольку и векторы поля $a(P)$ и векторы реперов подвергаются одному и тому же вращению, то ясно, что компоненты повернутого вектора a' в новом репере совпадают с компонентами старого вектора a в старом репере. Старый репер задается с помощью вращения g, а новый, как мы видели выше, с помощью $g_0 g$. Таким образом, мы имеем:

$$a'_k(g_0 g) = a_k(g)$$

или, обозначая $g_0 g$ через g,

$$a'_k(g) = a_k\left(g_0^{-1} g\right). \tag{8}$$

Мы видим, таким образом, что функции $a_1(g)$, $a_2(g)$ и $a_3(g)$, а следовательно, и $a_+(g)$, $a_-(g)$ и $a_3(g)$ при вращении преобразуются независимо друг от друга, т. е. преобразования каждой из этих компонент сами по себе порождают некоторое представление группы вращений.

Разлагая каждое из этих представлений на неприводимые, мы получим для введенных компонент вектора $a(P)$ разложения, инвариантные относительно вращений и независимые друг от друга, т. е. не перепутывающиеся при вращении.

В § 7 мы решали задачу о разложении представления преобразованиями функций от вращения (регулярного представления) на неприводимые. Однако там из соображений несколько большего удобства мы в качестве преобразования, отвечающего вращению g_0, рассматривали умножение g на g_0 справа, а не умножение на g_0^{-1} слева. Можно без труда перейти от одних преобразований к другим. Для этого достаточно вместо функций $a_k(g)$ рассматривать функции $\tilde{a}_k(g) = a_k(g^{-1})$, что сводится к замене аргументов φ_1, θ, φ_2 у этих функций на $\pi - \varphi_2$, θ, $\pi - \varphi_1$. После такой замены преобразование (8) запишется в виде

$$\tilde{a}'_k(g) = a'_k\left(g^{-1}\right) = a_k\left(g_0^{-1} g^{-1}\right) = a_k\left((g,\ g_0)^{-1}\right) = \tilde{a}_k(g g_0),$$

т. е.

$$\tilde{a}'_k(g) = \tilde{a}_k(g g_0). \tag{8'}$$

Мы будем рассматривать в дальнейшем вместо a_1, a_2 и a_3 функции $\tilde{a}_1$, $\tilde{a}_2$ и $\tilde{a}_3$ от g. При этом, вспоминая то, что нам известна зависимость старых функций a_1, a_2 и a_3 от аргументов φ_1, θ и φ_2, и заменяя эти аргументы на $\pi - \varphi_2$, θ, $\pi - \varphi_1$, мы можем сказать, что новая функция $\tilde{a}_3$ не зависит от φ_2 и что

$$\tilde{a}_+(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2) = -e^{-i\varphi_2}\tilde{a}_+(\varphi_1,\ \theta,\ 0) = e^{-i\varphi_2}(a_\varphi + i a_\theta),$$
$$\tilde{a}_-(\varphi_1,\ \theta,\ \varphi_2) = -e^{i\varphi_2}\tilde{a}_-(\varphi_1,\ \theta,\ 0) = e^{i\varphi_2}(a_\varphi - i a_\theta).$$

Точка P, в которой рассматривается вектор a с такими компонентами, имеет теперь сферические координаты $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ и θ. Отсюда видно, каковы те неприводимые представления, на которые разлагается каждое из трех полученных представлений для $\tilde{a}_+$, $\tilde{a}_-$ и $\tilde{a}_r$. Действительно, функции $\tilde{a}_r$, как не зависящие от φ_2, разлагаются по функциям, стоящим в нулевых (центральных) строчках всех матриц $T_g^l (l = 0, 1, 2, \ldots)$, т. е., как мы это видели и раньше, по сферическим функциям от $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ и θ. Функции $\tilde{a}_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ содержат множитель $e^{-i\varphi_2}$ такой же, как элементы первых строк матриц T_g^l — обобщенные сферические функции $T_{1n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, и поэтому они разлагаются в ряд именно по этим функциям.

Аналогично функции $\tilde{a}_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ разлагаются по обобщенным сферическим функциям $T_{-1,\,n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$.

Итак, нами доказано следующее. *Пусть задана векторная функция $a(P)$ на поверхности сферы. Разложение этой функции в ряд, инвариантное относительно вращений, получается следующим образом. Берутся в точке P со сферическими координатами φ и ϑ компоненты вектора по параллели, меридиану и радиусу a_φ, a_ϑ и a_r и составляются по ним функции трех переменных $\tilde{a}_+$, $\tilde{a}_-$* и $\tilde{a}_r$ *по следующим формулам*:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{a}_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= e^{-i\varphi_2}[a_\varphi(\varphi, \theta) + ia_\vartheta(\varphi, \theta)], \\ \tilde{a}_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= e^{i\varphi_2}[a_\varphi(\varphi, \theta) - ia_\vartheta(\varphi, \theta)], \\ \tilde{a}_r(\varphi_1, \theta, \varphi_2) &= a_r(\varphi, \theta), \text{ где } \varphi = \frac{\pi}{2} - \varphi_1. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Каждая из этих функций разлагается в ряд по своему набору обобщенных сферических функций, а именно, функции $\tilde{a}_+(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ раскладываются в ряд по функциям $T_{1n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)\,(l = 0, 1, 2, \ldots;$ $-l \leqslant n \leqslant l)$, $\tilde{a}_-(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ по функциям $T_{-1\,n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ и функции $\tilde{a}_r(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ по функциям $T_{0n}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sqrt{\frac{2}{2l+1}}\, Y_n^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1, \theta\right)$. Отбрасывая в первых двух рядах общий множитель $e^{\pm i\varphi_2}$ и заменяя везде $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$ через φ, мы получим разложения компонент вектора $a_\varphi \pm ia_\vartheta$ и a_r, обобщающие соответствующие разложения скалярных функций, данные в § 3.

2. Разложение произвольных величин. В п. 1 мы рассмотрели задачу о разложении функций, значение которых в каждой точке есть вектор трехмерного пространства. Перейдем теперь к случаю, когда в пространстве задана функция $f(x)$, значение которой в каждой точке есть величина, преобразующаяся по неприводимому представлению веса l_0, т. е. задано поле величины f. Это значит, что в каждой точке x пространства нам заданы $2l_0 + 1$ чисел c_m $(-l_0 \leqslant m \leqslant l_0)$ — компонент величины f, которые при вращении g_0 подвергаются линейному преобразованию

$$c'_m = \sum_{n=-l_0}^{l_0} a_{mn}(g_0)\, c_n. \tag{10}$$

Преобразование (10) мы будем, как обычно, записывать так:

$$f' = U_{g_0} f. \tag{10'}$$

Поле величин при вращении g_0 преобразуется следующим образом: во-первых, в результате вращения g_0 пространства в точку x приходит значение величины, отвечавшее до этого точке $g_0^{-1}x$, и, во-вторых, величина подвергается преобразованию U_{g_0}. Таким образом, *при вращении* g_0 величина $f(x)$ заменяется на $f'(x) = U_{g_0} f(g_0^{-1}x)$, т. е. *мы имеем преобразование* T_{g_0} *поля величин, определенное формулой*

$$T_{g_0} f(x) = U_{g_0} f(g_0^{-1}x). \tag{11}$$

(В случае векторного поля векторы подвергались тому же вращению g_0, что и все пространство, и поэтому мы получали формулу (1) $T_{g_0} a(x) = g_0 a(g_0^{-1}x)$, являющуюся частным случаем формулы (11).) Как и в случае векторного поля, очевидно, что эти преобразования образуют представление группы вращений.

Ограничимся, как и в п. 1, полем величин, заданным на поверхности единичной сферы $f(P) = f(\vartheta, \varphi)$, и поставим задачу об инвариантном относительно вращений разложении этого поля, аналогично тому, как мы делали это для векторного поля. Для этого так же как и там, введем вместо обычных компонент величины $2l_0 + 1$ функции от трех переменных φ_1, θ, φ_2, т. е. от вращения g, определяющих величину f и преобразующихся при вращении g_0 независимо друг от друга. Мы получим тогда $2l_0 + 1$ различных представлений, каждое из которых затем легко будет разложить на неприводимые.

Чтобы определить компоненты величины, зависящие от вращения g, воспользуемся соответствием, которое мы установили в п. 1 между вращениями g и реперами с началом в произвольной точке сферы, третий вектор которых направлен по нормали к поверхности. Значение величины в данной точке сферы мы можем задавать компонентами, отнесенными к различным системам координат (различным реперам) в пространстве. Если c_m — заданные компоненты величины и g — вращение, переводящее тройку координатных векторов в векторы e_1, e_2, e_3, то компонентами, отнесенными к реперу e_1, e_2, e_3, будут числа $c'_m = \sum\limits_{n=-l_0}^{l_0} a_{mn}(g) c_m$ (см. формулу (10)). Значение величины в точке P сферы будем задавать ее компонентами относительно репера с началом в точке P, зависящего от какого-либо вращения g, переводящего в P северный полюс. Компоненты величины f в точке P относительно такого репера будут при этом определенными функциями от вращения g $c_m(g)$ $(-l_0 \leqslant m \leqslant l_0)$, полученными из исходных компонент величины $f(P)$ преобразованием U_g.

Выясним, как преобразуются функции $c_m(g)$ при произвольном вращении g_0. Репер, зависящий от g, после вращения g_0 заменяется.

как мы видели в п. 1, на репер, зависящий от $g_0 g$. С другой стороны, при вращении g_0 величины f и реперы переносятся из точки в точку и преобразуются (поворачиваются) согласованно, и поэтому компоненты величины f в соответствующем базисе после вращения не изменяются. Отсюда мы видим, что

$$c'_m(g_0 g) = c_m(g)$$

или, заменяя $g_0 g$ через g,

$$c'_m(g) = c_m\left(g_0^{-1} g\right). \tag{12}$$

Мы видим, что действительно функции $c_m(g)$, определяющие величину, преобразуются при вращении g_0 независимо друг от друга.

Введя, как и в п. 1, вместо $c_m(g)$ эквивалентные им функции $\tilde{c}_m(g) = c_m(g^{-1})$, получим из (12) преобразование для $\tilde{c}_m(g)$, отвечающее вращению g_0:

$$T_{g_0} \tilde{c}_m(g) = \tilde{c}_m(g g_0), \tag{13}$$

т. е. преобразование для функций $\tilde{c}_m(g)$ при любом m совпадет с преобразованием, изученным в § 7.

Нам нужно разложить каждое из этих представлений на неприводимые. Это проще всего сделать, если функции $\tilde{c}_m(g)$ специальным образом зависят от первого угла φ_1, а именно, если

$$\tilde{c}_m(g) = \tilde{c}_m(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} \tilde{c}_m(0, \theta, \varphi_2). \tag{14}$$

Функции такого вида разлагаются по элементам m-х строчек всех матриц T_g^l, т. е. по функциям $T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ с фиксированным значением m.

Но если компоненты величины f имеют вид (14), то, подвергнув пространство вращению на угол φ^* вокруг оси e_3, т. е. прибавив φ^* к углу φ_1, мы умножим каждую функцию $\tilde{c}_m$ $(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ на $e^{-im\varphi^*}$. Это значит, что матрица, отвечающая повороту вокруг оси Oz, диагональна, т. е. базис состоит из собственных векторов этой матрицы *).

Итак, окончательно получаем следующий результат. *Для правильного разложения поля величин $f(P)$ на поверхности сферы, преобразующегося при вращении g_0 по формуле*

$$T_{g_0} f(P) = U_{g_0} f\left(g_0^{-1} P\right), \tag{15}$$

мы должны поступить следующим образом. Сначала задать величину $f(P)$ в каждой точке P со сферическими координатами φ и ϑ ее компонентами $c_m^0(\varphi, \vartheta)$ в каком-либо базисе, состоящем

---

*) Из результатов § 2 следует, что этот базис с точностью до нормировки есть введенный там канонический базис.

из собственных векторов преобразования, отвечающего вращению вокруг оси Oz. Затем перейти к компонентам $c_m(g)$, зависящим от вращения $g = g(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$, где $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\theta = \vartheta$, подвергнув величину $\left\{c_m^0\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_1, \theta\right)\right\}$ преобразованию U_g, отвечающему этому вращению. После этого разложить каждую функцию $\tilde{c}_m(g) = \tilde{c}_m(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ в ряд по элементам m-х строчек всех матриц T_g^l для всех $l \geqslant m$, т. е. положить

$$\tilde{c}_m(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = \sum_{l=m}^{\infty} \sum_{n=-l}^{l} a_{mn}^l \cdot t_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2). \tag{16}$$

В заключение этого пункта остановимся на случае, когда разлагаемая величина преобразуется по произвольному представлению группы вращений (а не обязательно по неприводимому, как предполагалось выше). В этом случае можно, конечно, разложить величину на слагаемые, каждое из которых преобразуется по неприводимому представлению (разложить представление на неприводимые), и затем с каждым из слагаемых поступить, как указано выше.

Однако достаточно просто задать величину компонентами, которые при вращении на угол φ вокруг оси Oz умножаются на $e^{-im\varphi}$, где m — целое или полуцелое, потом преобразовать ее к сферическим координатам (базису — e_φ, e_ϑ, e_r) и затем m-ю компоненту разлагать по функциям $T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2)$ $(l \geqslant m, \ -l \leqslant n \leqslant l)$. При этом в случае приводимого представления в отличие от неприводимых одни и те же значения m будут встречаться более чем по одному разу, т. е. различные компоненты будут раскладываться по одним и тем же функциям.

3. Пример. Поле тензоров второго ранга. Поясним сказанное в п. 2 на простом примере тензоров второго ранга $a = a_{ij}$. Такой тензор есть величина, преобразующаяся по приводимому представлению размерности 9, разложение которого на неприводимые было указано в § 5.

Найдем компоненты тензора a_{ij}, нужным образом преобразующиеся при вращении вокруг оси Oz. Для этого воспользуемся тем, что мы знаем компоненты вектора a_i, ведущие себя нужным образом при вращении вокруг Oz (см. п. 1 этого параграфа). А именно, это компоненты $a_x - ia_y = a_1 - ia_2$ (умножается на $e^{-i\varphi}$), $a_z = a_3$ (умножается на 1), $a_x + ia_y = a_1 + ia_2$) (умножается на $e^{i\varphi}$). Компоненты тензора второго ранга преобразуются при вращении как произведения компонент двух векторов.

Поэтому сначала выделим у такого тензора три группы компонент, различающиеся по действию вращения на первый из индексов: $a_{1j} - ia_{2j}$, a_{3j}, $a_{1j} + ia_{2j}$ $(j = 1, 2, 3)$, а затем проделаем в каждой группе аналогичную операцию со вторым индексом. Мы получим тогда девять комплексных компонент тензора второго ранга, а именно:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}-ia_{21}-i(a_{12}-ia_{22})=a_{11}-a_{22}-i(a_{21}+a_{12}),\\
&a_{13}-ia_{23},\\
&a_{11}-ia_{21}+i(a_{12}-ia_{22})=a_{11}+a_{22}-i(a_{21}-a_{12}),\\
&a_{31}-ia_{32},\\
&a_{33},\\
&a_{31}+ia_{32},\\
&a_{11}+ia_{21}-i(a_{21}+ia_{22})=a_{11}+a_{22}+i(a_{21}-a_{12}),\\
&a_{13}+ia_{23},\\
&a_{11}+ia_{21}+i(a_{12}+ia_{22})=a_{11}-a_{22}+i(a_{21}+a_{12}).
\end{aligned}
$$

Для того чтобы разлагать по обобщенным сферическим функциям, мы должны подвергнуть тензор в каждой точке P со сферическими координатами φ, ϑ вращению $g=g\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_1, \vartheta, 0\right)$, переводящему эту точку в северный полюс сферы *). В результате этого вращения базисные векторы e_x, e_y и e_z перейдут в $-e_\varphi$, e_ϑ и e_r и мы получим следующие девять комплексных компонент тензора, зависящих от φ и ϑ:

a_{rr}, $a_{\varphi\varphi}+a_{\vartheta\vartheta}\pm i(a_{\varphi\vartheta}-a_{\vartheta\varphi})$ — компоненты, разлагающиеся по нулевым строчкам матриц T_g^l (по обычным сферическим функциям $Y_l^n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta\right)$);

$-a_{\varphi r}-ia_{\vartheta r}$, $-a_{r\varphi}-ia_{r\vartheta}$ — компоненты, разлагающиеся по функциям $T_{1n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, 0\right)$;

$-a_{\varphi r}+ia_{\vartheta r}$ и $-a_{r\varphi}+ia_{r\vartheta}$ — компоненты, разлагающиеся по функциям $T_{-1n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, 0\right)$;

$a_{\varphi\varphi}-a_{\vartheta\vartheta}+i(a_{\vartheta\varphi}+a_{\varphi\vartheta})$ — компоненты, разлагающиеся по функции $T_{2n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, 0\right)$; $a_{\varphi\varphi}-a_{\vartheta\vartheta}-i(a_{\vartheta\varphi}+a_{\varphi\vartheta})$ — компоненты, разлагающиеся по функциям $T_{-2,n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, 0\right)$.

4. Решение уравнений Максвелла. Как пример применения полученных разложений рассмотрим решение уравнений Максвелла.

Мы будем рассматривать случай, когда эти уравнения записываются в виде

$$\ddot{\tilde{A}}-\Delta\tilde{A}=0, \qquad \operatorname{div}\tilde{A}=0,$$

*) Обратное вращение g^{-1} должно переводить северный полюс в P (см. п. 1 этого параграфа).

где $\widetilde{A}$ — вектор, зависящий от x, y, z, t (так называемый векторный потенциал), и $\Delta\widetilde{A}$ — вектор с компонентами $\Delta\widetilde{A}_x$, $\Delta\widetilde{A}_y$, $\Delta\widetilde{A}_z$, причем

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Полагая $\widetilde{A} = A(x, y, z)\,e^{ikt}$, получаем систему уравнений

$$\Delta A + k^2 A = 0,$$

$$\operatorname{div} A = 0.$$

Так как эти уравнения инвариантны относительно вращений, то решение удобно искать в виде ряда, также инвариантного относительно вращений, т. е. ряда по обобщенным сферическим функциям. С этой целью перейдем к сферическим координатам и вместо компонент A_x, A_y, A_z будем определять вектор A в каждой точке компонентами A_r, A_φ, A_ϑ, определенными формулами (6) этого параграфа*). Проделав соответствующее преобразование независимых переменных и искомых функций, получим следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 A_r}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_r}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial Ar}{\partial \vartheta} -\\
&\qquad - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}A_\vartheta + k^2 A_r = 0,\\
&\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \vartheta} +\\
&\qquad + \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r^2\sin^2\vartheta} + k^2 A_\varphi = 0,\\
&\frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_\vartheta}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r^2}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} -\\
&\qquad - \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{A_\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta} + k^2 A_\vartheta = 0,\\
&\qquad \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2}{r}A_r + \frac{\operatorname{ctg}\vartheta}{r}A_\vartheta = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Введем теперь комбинации компонент, раскладывающиеся по обобщенным сферическим функциям, а именно, положим:

$$A_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_\varphi + iA_\vartheta),$$

$$A_0 = A_r,$$

$$A_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\varphi - iA_\vartheta).$$

*) Очевидно, в формулах (6) все a надо заменить на A.

Уравнения (17) в этих компонентах приобретают вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 A_0}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_0}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_0}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial A_0}{\partial \vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_0}{\partial \varphi^2}-\frac{2}{r^2}A_0+k^2A_0-\\
&\qquad-\frac{i\sqrt{2}}{r^2}\left[\frac{\partial A_+}{\partial \vartheta}+\frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_+}{\partial \varphi}+\operatorname{ctg}A_+\right]-\\
&\qquad\qquad-\frac{i\sqrt{2}}{r^2}\left[\frac{\partial A_-}{\partial \vartheta}-\frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_-}{\partial \varphi}+\operatorname{ctg}\vartheta A_-\right]=0,\\
&\frac{\partial^2 A_-}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_-}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_-}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial A_-}{\partial \vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_-}{\partial \varphi^2}+\frac{2i\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_-}{\partial \varphi}-\\
&\qquad-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_-+k^2A_--\frac{i\sqrt{2}}{r^2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial \vartheta}+i\frac{\partial A_0}{\partial \varphi}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2 A_+}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial A_+}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 A_+}{\partial \vartheta^2}+\frac{1}{r^2}\operatorname{ctg}\vartheta\frac{\partial A_+}{\partial \vartheta}+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 A_+}{\partial \varphi^2}-\frac{2i\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_+}{\partial \varphi}-\\
&\qquad-\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}A_++k^2A_+-\frac{i\sqrt{2}}{r^2}\left(\frac{\partial A_0}{\partial \vartheta}-i\frac{\partial A_0}{\partial \varphi}\right)=0,\\
&\frac{\partial A_0}{\partial r}+\frac{2}{r}A_0+\frac{i}{r\sqrt{2}}\left(\frac{\partial A_+}{\partial \vartheta}+\frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_+}{\partial \varphi}+\operatorname{ctg}\vartheta A_+\right)+\\
&\qquad+\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial A_-}{\partial \vartheta}-\frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_-}{\partial \varphi}+\operatorname{ctg}\vartheta A_-\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{17'}$$

Будем искать решение системы (17′) в виде рядов по обобщенным сферическим функциям

$$A_0(r,\ \varphi,\ \vartheta)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l^0(r)\sum_{n=-l}^{l}\alpha_{l,n}T_{0n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right),$$

$$A_+(r,\ \varphi,\ \vartheta)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l^+(r)\sum_{n=-l}^{l}\beta_{l,n}T_{1n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right),$$

$$A_-(r,\ \varphi,\ \vartheta)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l^-(r)\sum_{n=-l}^{l}\gamma_{l,n}T_{-1n}^l\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right).$$

При этом выявятся преимущества инвариантного способа решения задачи, состоящие в том, что переменные разделятся, и нам придется решать только систему обыкновенных уравнений для определения функций от r.

В силу линейности уравнений можно подставлять в систему по одному из слагаемых каждого ряда, т. е. подставлять функции

$$\left.\begin{aligned} A_0(r, \varphi, \vartheta) &= f_l^0(r)\, T_{0n}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right), \\ A_+(r, \varphi, \vartheta) &= f_l^+(r)\, T_{1n}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right), \\ A_-(r, \varphi, \vartheta) &= f_l^-(r)\, T_{-1n}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Первое из уравнений (18) приобретет после такой подстановки вид

$$\begin{aligned} &\left[\frac{d^2 f_l^0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df_l^0}{dr} + k^2 f_l^0(r)\right] T_{0n}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right) + \\ &\quad + \frac{1}{r^2} f^0(r)\left[\frac{\partial^2 T_{0n}^l}{\partial\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial T_{0n}}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 T_{0n}}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r^2} T_{0n}\right] - \\ &\quad - \frac{i\sqrt{2}}{r^2} f_l^+(r)\left[\frac{\partial T_{1n}}{\partial\vartheta} + \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial T_{1n}}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{1n}\right] - \\ &\quad - \frac{i\sqrt{2}}{r^2} f_l^-(r)\left[\frac{\partial T_{-1n}}{\partial\vartheta} - \frac{i}{\sin\vartheta}\frac{\partial T_{-1n}}{\partial\varphi} + \operatorname{ctg}\vartheta\, T_{-1n}\right] = 0. \qquad (19) \end{aligned}$$

Вспомним теперь, что $T_{mn}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right) = e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} u_{mn}(\vartheta)$, и воспользуемся дифференциальным уравнением для $u_{mn}(\vartheta)$ (см. § 7)

$$\frac{d^2 u_{0n}}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{du_{0n}}{d\vartheta} + \left[l(l+1) - \frac{n^2}{\sin^2\vartheta}\right] u_{0n}(\vartheta) = 0$$

и рекуррентными формулами (см. добавление к § 7)

$$\begin{aligned} \frac{du_{1n}}{d\vartheta} - \frac{n - \cos\vartheta}{\sin\vartheta} u_{1n} &= -i\sqrt{l(l+1)}\, u_{0n}, \\ \frac{du_{-1n}}{d\vartheta} + \frac{n + \cos\vartheta}{\sin\vartheta} u_{-1n} &= -i\sqrt{l(l+1)}\, u_{0n}. \end{aligned}$$

Если с помощью этих соотношений исключить из уравнения (19)

$$\frac{d^2 u_{0n}}{d\vartheta^2}, \quad \frac{du_{0n}}{d\vartheta}, \quad \frac{du_{1n}}{d\vartheta}, \quad u_{1n}, \quad \frac{du_{-1n}}{d\vartheta}, \quad u_{-1n}$$

и сократить получившееся уравнение на $e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} u_{0n}(\vartheta)$, то мы получим уравнение, содержащее только функции от r:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 f_l^0}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{df_l^0}{dr} + \left[k^2 - \frac{2 + l(l+1)}{r^2}\right] f_l^0(r) - \\ &\qquad - \frac{\sqrt{2}\sqrt{l(l+1)}}{r^2}\left[f_l^+(r) + f_l^-(r)\right] = 0. \qquad (20) \end{aligned}$$

Мы видим, что действительно наша подстановка привела к разделению переменных в уравнении (19). Аналогичная подстановка и преобразование двух следующих уравнений системы (18) дают такие обыкновенные уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2f_l^+}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df_l^+}{dr}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_l^+(r)-\frac{\sqrt{2}\sqrt{l(l+1)}}{r^2}f_l^0(r)=0,\\ &\frac{d^2f_l^-}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{df_l^-}{dr}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]f_l^-(r)-\frac{\sqrt{2}\sqrt{l(l+1)}}{r^2}f_l^0(r)=0. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Уравнение $\operatorname{div} A=0$ после соответствующих преобразований приводится к виду

$$\frac{df_l^0}{dr}+\frac{2}{r}f_l^0(r)+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{r\sqrt{2}}\left[f_l^-(r)+f_l^+(r)\right]=0. \tag{22}$$

Остается решить систему (20), (21), (22). С этой целью исключим $f_l^-(r)+f_l^+(r)$ из уравнений (20) и (22). Мы получим тогда следующее уравнение второго порядка для $f_l^0(r)$:

$$\frac{d^2f_l^0}{dr^2}+\frac{4}{r}\frac{df_l^0}{dr}+\left[k^2+\frac{2-l(l+1)}{r^2}\right]f_l^0(r)=0. \tag{23}$$

Заменой искомой функции оно приводится к уравнению Бесселя порядка $l+\frac{1}{2}$. Таким образом, ограниченное в нуле решение уравнения (23) имеет вид

$$f_l^0(r)=C_1\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{3}{2}}}. \tag{24}$$

Из уравнения (22) при этом получаем:

$$f_l^+(r)+f_l^-(r)=-\frac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\frac{1}{2}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{3}{2}}}+\frac{kJ'_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{25}$$

Вычитая друг из друга уравнения (21) и обозначая $f_l^+(r)-f_l^-(r)$ через $\varphi(r)$, получаем уравнение для $\varphi(r)$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]\varphi(r)=0,$$

откуда

$$\varphi(r)=f_l^+(r)-f_l^-(r)=C_2\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(r)}{r^{\frac{1}{2}}}. \tag{26}$$

Решая уравнения (25) и (26), получаем:

$$f_l^+(r)=\frac{1}{2}\left\{-\frac{C_1}{\sqrt{2}\sqrt{l(l+1)}}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{3}{2}}}-kC_1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}+C_2\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$f_l^-(r)=\frac{1}{2}\left\{-\frac{C_1}{\sqrt{2}\sqrt{l(l+1)}}\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{3}{2}}}-kC_1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{J'_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}-C_2\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Заменяя по рекуррентным формулам $J'_{l+\frac{1}{2}}(kr)$ через $\frac{l+\frac{1}{2}}{kr}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)-$ $-J_{l+\frac{3}{2}}(kr)$, мы можем записать эти решения в виде комбинации бесселевых функций

$$f_l^+(r)=\frac{1}{2}\left\{\frac{kC_1\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{J_{l+\frac{2}{3}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}-\frac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{(l+1)}{r^{\frac{3}{2}}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)+C_2\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$f_l^-(r)=\frac{1}{2}\left\{\frac{kC_1\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{J_{l+\frac{3}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}-\frac{C_1\sqrt{2}}{\sqrt{l(l+1)}}\frac{(l+1)}{r^{\frac{3}{2}}}J_{l+\frac{1}{2}}(kr)-C_2\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

$$f_l^0(r)=C_1\frac{J_{l+\frac{1}{2}}(kr)}{r^{\frac{3}{2}}}.$$

Таким образом, при каждом l и n получаем решение, зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2.

Подставляя эти функции в формулы (18), мы получим частные решения уравнений Максвелла. Произвольное решение можно представить в виде ряда из таких частных решений.

Полагая сначала $C_1=1$, $C_2=0$, а затем $C_1=0$, $C_2=1$, мы найдем два решения, имеющих различный физический смысл. Они различаются между собой поведением при отражении относительно начала координат *). Первое из них (при $C_2=0$) умножается при

*) Чтобы проверить, что происходит при отражении с A_+, A_- и A_0, заметим, что при отражении точка с координатами r, φ, ϑ переходит в точку с координатами r, $\varphi+\pi$, $\pi-\vartheta$, компоненты A_r, A_φ, A_ϑ переходят в A_r, A_φ, $-A_\vartheta$,

$$e^{-in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi+\pi\right)}=(-1)^n e^{-in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)},$$

а $u^l_{mn}(\pi-\vartheta)=(-1)^{m+n+l}u^l_{mn}(\vartheta)$.

отражении на $(-1)^l$ и носит название векторного потенциала *электрического мультиполя* порядка l. Второе решение (при $C_1=0$) умножается при отражении на $(-1)^{l+1}$ и называется векторным потенциалом *магнитного мультиполя* порядка l.

Воспользовавшись рекуррентными формулами, выражающими T^l_{1n} и $T^l_{-1,n}$ через T^{l-1}_{0n}, T^l_{0n} и T^{l+1}_{0n} (см. формулу (8) добавления к § 7), можно выразить найденное решение через обычные сферические функции порядков $l-1$, l и $l+1$.

§ 9. Уравнения, инвариантные относительно вращений

В этом параграфе мы будем рассматривать системы уравнений с частными производными, инвариантные относительно вращений пространства. Пусть $\psi_1(x_1, x_2, x_3)$, $\psi_2(x_1, x_2, x_3)$, ..., $\psi_N(x_1, x_2, x_3)$ — неизвестные функции. Мы будем обозначать совокупность этих функций через $\psi(x_1, x_2, x_3)$. Самую систему запишем в виде

$$L_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+L_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+L_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+\varkappa\psi=0, \tag{1}$$

где L_1, L_2, L_3 — матрицы n-го порядка и $\varkappa$ — число *).

Для того чтобы имело смысл говорить об инвариантности уравнения (1) относительно вращений, мы должны указать закон, по которому преобразуются при вращениях ψ_1, ψ_2, ..., ψ_N. Так как произведению вращений должно при этом отвечать последовательное осуществление соответствующих преобразований над функциями ψ_1, ..., ψ_N, то, следовательно, величина ψ должна преобразовываться по какому-то определенному представлению группы вращений (вообще говоря, приводимому). Таким образом, при вращении g величина ψ переходит в $\psi'=T_g\psi$.

Система уравнений (1) *называется инвариантной относительно вращений, если при преобразовании $x'=gx$ независимых переменных (g — произвольное вращение) и при соответствующем преобразовании $\psi'=T_g\psi$ искомых функций система не меняется.* В этом параграфе мы найдем общий вид уравнений первого порядка, инвариантных относительно вращений, а также с помощью

*) Общий вид системы уравнений первого порядка таков:

$$A_1\frac{\partial\psi}{\partial x_1}+A_2\frac{\partial\psi}{\partial x_2}+A_3\frac{\partial\psi}{\partial x_3}+B\psi=0.$$

Если матрица B не вырождена, то, применяя к обеим частям матрицу B^{-1}, мы получим систему вида (1) (с $\varkappa=1$). Точно так же, применив к системе любую матрицу CB^{-1}, мы можем сделать матрицу, применяющуюся к функции ψ, равной C. Заметим, что применение к системе некоторой невырожденной матрицы не меняет систему, так как оно означает замену данных уравнений их линейными комбинациями.

разложения по обобщенным сферическим функциям сведем решение этой системы к решению системы обыкновенных уравнений первого порядка с тем же числом уравнений и неизвестных функций, разрешимой в комбинациях цилиндрических функций.

1. Определение инвариантных уравнений. Чтобы найти вид инвариантных уравнений, запишем, прежде всего, условие инвариантности системы (1). Подвергнем пространство вращению $g: x' = g^{-1}\varphi$, т. е. сделаем замену независимых переменных $x'_i = \sum_{k=1}^{3} g_{ki} x_k$. Вместо ψ мы должны при этом подставить в уравнение преобразованную величину $\psi' = T_g \psi$. Заменяя ψ через $T_g^{-1}\psi'$, а дифференцирования по x_k дифференцированиями по x'_i по формуле

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum g_{ik} \frac{\partial}{\partial x'_i},$$

мы получим систему

$$\sum_{i=1}^{3} \left[g_{i1} L_1 \frac{\partial (T_g^{-1}\psi')}{\partial x'_i} + g_{i2} L_2 \frac{\partial (T_g^{-1}\psi')}{\partial x'_i} + g_{i3} L_3 \frac{\partial (T_g^{-1}\psi')}{\partial x'_i} \right] + \varkappa T_g^{-1}\psi' = 0$$

или, так как T_g — постоянная матрица, систему

$$\sum_{i} \left[g_{i1} L_1 T_g^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_i} + g_{i2} L_2 T_g^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_i} + g_{i3} L_3 T_g^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x'_i} \right] + \varkappa T_g^{-1}\psi' = 0.$$

Для того чтобы потребовать совпадения полученной системы уравнений с системой (1), сделаем сначала коэффициент при ψ' равным $\varkappa$, применив к получившейся системе преобразование T_g. Мы получим систему

$$\sum_{k} \sum_{i} g_{ik} T_g L_k T_g^{-1} \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} + \varkappa \psi' = 0. \tag{2}$$

Требование инвариантности означает, следовательно, что для любого вращения g между матрицами L_k должны иметь место соотношения

$$\sum_{k} g_{ik} T_g L_k T_g^{-1} = L_i. \tag{3}$$

Запишем условие инвариантности еще в другом, иногда более удобном, виде. Для этого рассмотрим матрицу $\sum L_i p_i$, где p_1, p_2, p_3 — компоненты некоторого вектора. Так как при вращении матрица L_i заменяется на $\sum g_{ik} L_k$, то $\sum L_i p_i$ переходит в $\sum L_k p'_k$, где $p'_k = \sum g_{ik} p_i$, т. е. числа p_i преобразуются при вращении так же, как производные $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Из формулы (3) следует равенство

$$\sum_{i=1}^{3} L_i p_i = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} g_{ik} p_i T_g L_k T_g^{-1} = \sum_{k=1}^{3} T_g L_k p'_k T_g^{-1} = T_g \left(\sum L_k p'_k\right) T_g^{-1},$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} L_i p_i = T_g \left(\sum_{k=1}^{3} L_k p'_k\right) T_g^{-1}. \tag{4}$$

Равенство (4), так же как и (3), представляет собой форму записи условия инвариантности системы (1) при вращениях. С помощью формулы (4) можно непосредственно найти характеристический многочлен произвольной инвариантной системы *). В самом деле, найдем детерминант от обеих частей равенства (4). Так как $\det T_g = \frac{1}{\det T_g^{-1}}$, то мы видим, что

$$\det \sum L_i p_i = \det \sum L_k p'_k,$$

т. е. характеристический многочлен не меняется при вращении. Так как любые два вектора одинаковой длины могут быть переведены друг в друга некоторым вращением, то такая функция постоянна на поверхности каждой сферы с центром в начале координат, т. е. зависит только от $r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$. Но $\det \sum L_i p_i$ есть однородная функция порядка N, где N — число уравнений и неизвестных функций в системе. Следовательно, *характеристический многочлен системы* (1) *равен*

$$C\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)^{N/2}.$$

Так как $\det \sum L_i p_i$ является, очевидно, рациональной функцией от p_1, p_2, p_3, то для того, чтобы он был отличен от нуля, $N/2$ должно быть целым числом, и поэтому *число уравнений и неизвестных функций должно быть четным.*

2. Преобразование условий инвариантности. Условия (3) представляют собой, по существу, бесконечное число равенств, поскольку входящее в них вращение g произвольно. Мы заменим сейчас эти равенства конечным числом алгебраических соотношений. Чтобы получить эти соотношения, заменим вращение g малыми поворотами вокруг каждой из координатных осей.

Положим сначала вращение g равным $e + a_1 \xi + \ldots$, где a_1 — бесконечно малый поворот вокруг оси Ox (см. § 2). Матрица такого

*) Характеристическим многочленом системы (1) называется многочлен относительно p_i, равный $\det \sum L_i p_i$.

вращения с точностью до малых высшего порядка относительно ξ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi \\ 0 & \xi & 1 \end{Vmatrix}.$$

Соответствующее преобразование T_g есть $E+\xi A_1+\ldots$, где A_1 — преобразование, отвечающее бесконечно малому повороту a_1. (Эти преобразования были определены нами в § 2.) Обратное преобразование T_g^{-1} есть с точностью до малых высшего порядка $E-\xi A_1$.

Подставляя $e+a_1\xi+\ldots$, $E+A_1\xi+\ldots$, $E-A_1\xi+\ldots$ в систему (3), получим с точностью до членов второго порядка три равенства

$$(E+A_1\xi)L_1(E-A_1\xi)=L_1,$$
$$(E+A_1\xi)(L_2-\xi L_3)(E-A_1\xi)=L_2,$$
$$(E+A_1\xi)(\xi L_2+L_3)(E-A_1\xi)=L_3.$$

Раскрывая скобки, видим, что члены, не содержащие ξ, как и следовало ожидать, сокращаются, а приравнивая нулю слагаемые, содержащие первую степень ξ, получаем равенства

$$A_1L_1-L_1A_1=0,$$
$$A_1L_2-L_2A_1-L_3=0,$$
$$A_1L_3-L_3A_1+L_2=0,$$

которые короче записываются так:

$$[A_1, L_1]=0,$$
$$[A_1, L_2]=L_3,$$
$$[A_1, L_3]=-L_2.$$

Таким образом, полагая $g=e+a_1\xi+\ldots$, находим коммутаторы всех трех матриц L_1, L_2, L_3 с известной матрицей A_1.

Аналогично, полагая $g=e+a_2\xi+\ldots$ и $g=e+a_3\xi+\ldots$, найдем коммутаторы матриц L_1, L_2, L_3 с A_2 и A_3.

Результат можно записать в виде следующей таблицы уравнений:

$$\begin{array}{lll} [A_1, L_1]=0, & [A_1, L_2]=L_3, & [A_1, L_3]=-L_2, \\ [A_2, L_1]=-L_3, & [A_2, L_2]=0, & [A_2, L_3]=L_1, \\ [A_3, L_1]=L_2, & [A_3, L_2]=-L_1, & [A_3, L_3]=0. \end{array} \tag{5}$$

Из этих уравнений найдем возможный вид матриц L_1, L_2 и L_3.

Мы не будем здесь доказывать, что из равенств (5) следуют равенства (3) или (4). Это доказательство, которое должно установить, что из справедливости некоторого факта для бесконечно малых поворотов следует его справедливость для любых конечных вращений, полностью аналогично проведенному в § 2 доказательству того, что матрицы, отвечающие бесконечно малым поворотам, определяют собой преобразование T_g для любого вращения g.

Для того чтобы найти L_1, L_2 и L_3, исключим сначала из системы (5) матрицы L_1 и L_2. Для этого воспользуемся введенными в § 2 преобразованиями

$$H_+ = H_1 + iH_2 = iA_1 - A_2,$$

$$H_- = H_1 - iH_2 = iA_1 + A_2$$

и вычислим коммутатор $[[L_3, H_-], H_+]$. Сначала найдем коммутатор L_3 и H_-. Пользуясь равенствами (5), имеем:

$$[L_3, H_-] = i[L_3, A_1] + [L_3, A_2] = iL_2 - L_1.$$

Прокоммутируем получившийся оператор с H_+; тогда

$$[iL_2 - L_1, H_+] = [iL_2 - L_1, iA_1 - A_2] = -[L_2, A_1] + [L_1, A_2] = 2L_3.$$

Мы получаем, таким образом, два уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &[L_3, H_3] = 0, \\ &[[L_3, H_-], H_+] = 2L_3, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

которым должна удовлетворять матрица L_3.

Можно показать, что если мы имеем матрицу L_3, удовлетворяющую этим уравнениям, и если определить затем L_1 и L_2 по формулам $L_1 = [A_2, L_3]$, $L_2 = -[A_1, L_3]$, то полученные матрицы L_1, L_2, L_3 удовлетворяют всей системе (5).

3. Определение матриц L_1, L_2, L_3. В этом пункте мы найдем явный вид матриц L_3, являющихся решением системы (6), а затем найдем L_1 и L_2. Величина ψ преобразуется по некоторому представлению, которое мы будем считать разложенным на неприводимые. Компоненты величины ψ мы будем нумеровать неоднократно встречавшимися индексами l и m, где l — вес неприводимого представления, а m — номер компоненты в представлении веса l. Если представления с одним и тем же весом l при разложении представления ψ на неприводимые встречаются больше чем один раз, то для того, чтобы различать между собой эти представления, мы будем добавлять еще индекс τ, указывающий номер представления веса l. Таким образом, в этих компонентах величина ψ будет писаться так:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \{\psi_{lm}^{\tau}(x_1, x_2, x_3)\}.$$

Обозначая через $\xi_{l_0 m_0}^{\tau_0}$ величину, у которой $\psi_{l_0 m_0}^{\tau_0} = 1$, а остальные компоненты — нули, мы можем написать:

$$\psi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{l, m, \tau} \psi^{\tau}_{lm}(x_1, x_2, x_3)\, \xi^{\tau}_{lm} \text{ *)}.$$

Так как величина ξ^{τ}_{lm} определяется тремя индексами l, m, τ, то преобразование этой величины, в частности матрица L_3, задается шестью индексами. Преобразование L_3 векторов ξ^{τ}_{lm} имеет, следовательно, вид

$$L_3 \xi^{\tau}_{lm} = \sum c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'}.$$

Для того чтобы найти числа $c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}$, воспользуемся системой (6). Вспоминая (см. § 2), что

$$H_3 \xi^{\tau}_{lm} = m \xi^{\tau}_{lm},$$
$$H_+ \xi^{\tau}_{lm} = \alpha^l_{m+1}\, \xi^{\tau}_{l, m+1},$$
$$H_- \xi^{\tau}_{lm} = \alpha^l_m\, \xi^{\tau}_{l,\, m-1},$$

где $(\alpha^l_m)^2 = (l+m)(l-m+1)$, имеем:

$$L_3 H_3 \xi^{\tau}_{lm} = m L_3 \xi^{\tau}_{lm} = m \sum_{l', \tau', m'} c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'},$$

$$H_3 L_3 \xi^{\tau}_{lm} = H_3 \sum c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'} = \sum_{l'm'\tau'} m' c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'}.$$

Так как в силу первого из уравнений (6) $(L_3H_3 - H_3L_3)\,\xi^{\tau}_{lm} = 0$, то отсюда

$$\sum_{l', m', \tau'} (m - m')\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $\xi^{\tau'}_{l'm'}$ нулю, получаем, что коэффициенты $c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}$ могут быть отличны от нуля только при $m' = m$. Мы для краткости обозначим $c^{\tau'\tau}_{l'l,\, mm}$ просто через $c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m}$.

Воспользуемся теперь вторым уравнением системы (6). Мы имеем:

$$L_3 H_- \xi^{\tau}_{lm} = L_3 \alpha^l_m\, \xi^{\tau}_{l,\, m-1} = \alpha^l_m \sum_{l'\tau'} c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m-1}\, \xi^{\tau'}_{l',\, m-1},$$

$$H_- L_3 \xi^{\tau}_{lm} = H_- \sum_{l'\tau'} c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m}\, \xi^{\tau'}_{l',\, m} = \sum_{l'\tau'} \alpha^{l'}_m\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m}\, \xi^{\tau'}_{l',\, m-1},$$

$$[L_3, H_-]\, \xi^{\tau}_{lm} = \sum_{l'\tau'} [\alpha^l_m\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m-1} - \alpha^{l'}_m\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m}]\, \xi^{\tau'}_{l',\, m-1}.$$

---

*) Величины ξ^{τ}_{lm} образуют, таким образом, базис в пространстве, в котором действует представление $g \to T_g$, а ψ^{τ}_{lm} — компоненты величины в этом базисе.

Далее,

$$[L_3,\ H_-]\, H_+\xi^{\tau}_{lm} = [L_3,\ H_-]\, \alpha^{l}_{m+1}\, \xi^{\tau}_{l,\ m+1} =$$

$$= \alpha^{l}_{m+1} \sum_{l'\tau'} [\alpha^{l}_{m+1}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m} - \alpha^{l'}_{m+1}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m+1}]\, \xi^{\tau'}_{l'm},$$

$$H_+ [L_3,\ H_-]\, \xi^{\tau}_{lm} = H_+ \sum_{l'\tau'} [\alpha^{l}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m-1} - \alpha^{l'}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m}]\, \xi^{\tau'}_{l',\ m-1} =$$

$$= \sum_{l'\tau'} \alpha^{l'}_{m}\, [\alpha^{l}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m-1} - \alpha^{l'}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m}]\, \xi^{\tau'}_{l'm},$$

$$[\, [L_3,\ H_-],\ H_+]\, \xi^{\tau}_{lm} =$$

$$= \sum_{l'\tau'} \{ [\, (\alpha^{l}_{m+1})^2 + (\alpha^{l'}_{m})^2]\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m} - \alpha^{l'}_{m}\, \alpha^{l}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m-1} -$$

$$- \alpha^{l'}_{m+1}\, \alpha^{l}_{m+1}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m+1} \}\, \xi^{\tau'}_{l',\ m}.$$

Второе из равенств (6) дает, таким образом, систему уравнений для определения $c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m}$:

$$2c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m} = [\, (\alpha^{l}_{m+1})^2 + (\alpha^{l}_{m})\,]\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m} -$$

$$- \alpha^{l'}_{m}\, \alpha^{l}_{m}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m-1} - \alpha^{l'}_{m+1}\, \alpha^{l}_{m+1}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m+1},$$

или, подставляя вместо α^{l}_{m} их значения, систему

$$\begin{aligned} 2c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m} = {} & [(l+m+1)(l-m) + (l'+m)(l'-m+1)\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m} - \\ & - \sqrt{(l'+m)(l'-m+1)(l+m)(l-m+1)}]\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m-1} - \\ & - \sqrt{(l'+m+1)(l'-m)(l+m+1)(l-m)}\, c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Эта система может решаться при фиксированных индексах l', l, τ', τ, которым затем нужно придавать всевозможные значения. Зафиксируем некоторые l', l, τ', τ и обозначим пока $c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m}$ просто c_m. Мы получаем систему однородных уравнений для c_m, где $-\min(l',\ l) \leqslant m \leqslant \min(l',\ l)$ *) и число уравнений равно числу неизвестных. Эти уравнения удобнее всего решать последовательным определением неизвестных. Придав m наибольшее возможное значение $m_0 = \min(l',\ l)$, мы получим уравнение, содержащее два неизвестных c_{m_0} и c_{m_0-1}, из которых c_{m_0-1} определяется через c_{m_0}. Давая теперь m значение $m_0 - 1$, мы получим уравнение, связывающее c_{m_0-2}, c_{m_0-1}, c_{m_0}, из которого мы сможем определить c_{m_0-2} снова через c_{m_0}.

*) Так как $-l' \leqslant m' \leqslant l'$, $-l \leqslant m \leqslant l$ и $c^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm} \neq 0$ лишь при $m' = m$, то m меняется от $-\min(l', l)$ до $\min(l', l)$. Заметим, кстати, что когда m принимает наибольшее допустимое значение m_0, можно формально воспользоваться уравнением, так как коэффициент при $c^{\tau'\tau}_{l'l,\ m_0+1}$ равен нулю.

Продолжая этот процесс, мы дойдем до наименьшего возможного значения m, при котором уравнение снова будет содержать только два неизвестных — с минимальным значением m и со значением, на единицу бо́льшим. Так как оба эти неизвестных уже определены предыдущими уравнениями, то это соотношение либо будет следствием предыдущих, либо из него будет следовать, что c_{m_0}, а значит, и все неизвестные равны нулю. Эти вычисления показывают, что $c^{\tau'\tau}_{l'l,\,m}$ могут быть отличны от нуля, только когда $|l'-l|\leqslant 1$, т. е. при $l'=l$, $l'=l-1$ и $l'=l+1$. Мы найдем $c^{\tau'\tau}_{l'l,\,m}$ для этих случаев указанным способом. Доказательство того, что $c^{\tau'\tau}_{l'l,\,m}$ для остальных значений l' равны нулю, проводится совершенно аналогично, и мы оставляем его читателю.

Примем сначала $l'=l$, τ' и τ произвольны. Тогда уравнения (7) принимают вид

$$[2-(l+m+1)(l-m)-(l+m)(l-m+1)]\,c^{\tau'\tau}_{ll,\,m}+$$
$$+(l+m)(l-m+1)\,c^{\tau'\tau}_{ll,\,m-1}+(l+m+1)(l-m)\,c^{\tau'\tau}_{ll,\,m+1}=0.$$

Полагая $m=l$, найдем, что $(1-l)\,c^{\tau'\tau}_{ll,\,l}+lc^{\tau'\tau}_{ll,\,l-1}=0$, откуда $c^{\tau'\tau}_{ll,\,l}=c^{\tau'\tau}_{ll}\cdot l$; $c^{\tau'\tau}_{ll,\,l-1}=c^{\tau'\tau}_{ll}(l-1)$, где $c^{\tau'\tau}_{ll}$ — произвольная, не зависящая от m постоянная. Полагая $m=l-1$, аналогично найдем, что $c^{\tau'\tau}_{ll,\,l-2}=c^{\tau'\tau}_{ll}(l-2)$. Подстановкой легко убедиться, что найденная закономерность является общей, т. е. что для любого m

$$c^{\tau'\tau}_{ll,\,m}=c^{\tau'\tau}_{ll}\cdot m.$$

Положим теперь $l'=l-1$. Уравнения (7) принимают вид

$$[2-(l+m+1)(l-m)-(l+m-1)(l-m)]\,c^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m}+$$
$$+\sqrt{(l+m-1)(l-m)(l+m)(l-m+1)}\,c^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m-1}+$$
$$+\sqrt{(l+m)(l-m-1)(l+m+1)(l-m)}\,c^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m+1}=0.$$

Сделаем в этих уравнениях подстановку

$$c^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m}=\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m}\sqrt{(l+m)(l-m)}.$$

После этой подстановки и сокращения m-го уравнения на $\sqrt{(l+m)(l-m)}$ мы получаем систему

$$2\,[1-l^2+m^2]\,\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m}+[l^2-(m-1)^2]\,\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m-1}+$$
$$+[l^2-(m+1)^2]\,\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m+1}=0.$$

Легко проверить, что эта система удовлетворяется при $\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1,\,l,\,m}$, не зависящем от m. Положим поэтому $\tilde{c}^{\tau'\tau}_{l-1, l, m} = c^{\tau'\tau}_{l-1, l}$. Отсюда, возвращаясь к старым неизвестным, находим:

$$c^{\tau'\tau}_{l-1, l, m} = c^{\tau'\tau}_{l-1, l}\sqrt{l^2 - m^2}.$$

Положим, наконец, $l' = l + 1$. В получившихся уравнениях

$$[2 - (l+m+1)(l-m) - (l+m+1)(l-m+2)]\, c^{\tau'\tau}_{l+1, l, m} +$$
$$+ \sqrt{(l+m+1)(l-m+2)(l+m)(l-m+1)}\, c^{\tau'\tau}_{l+1, l, m-1} +$$
$$+ \sqrt{(l+m+2)(l-m+1)(l+m+1)(l-m)}\, c^{\tau'\tau}_{l+1, l, m+1} = 0$$

сделаем подстановку

$$c^{\tau'\tau}_{l+1, l, m} = \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\, \tilde{c}^{\tau'\tau}_{l+1, l, m}.$$

После этой подстановки и сокращения на $\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}$ мы придем к уравнению

$$2\,[m^2 - l^2 - 2l]\, \tilde{c}^{\tau'\tau}_{l+1, l, m} + [l^2 - m^2 + 2l + 2m]\, \tilde{c}^{\tau'\tau}_{l+1, l, m-1} +$$
$$+ [l^2 - m^2 + 2l - 2m]\, \tilde{c}^{\tau'\tau}_{l+1, l, m+1} = 0,$$

решением которого также является не зависящая от m постоянная. Обозначим ее $c^{\tau'\tau}_{l+1, l}$.

Таким образом, мы нашли следующие значения элементов $c^{\tau'\tau}_{l'l, m}$ матрицы L_3:

$$\left.\begin{aligned} c^{\tau'\tau}_{l-1, l, m} &= c^{\tau'\tau}_{l-1, l}\sqrt{l^2 - m^2}, \\ c^{\tau'\tau}_{ll, m} &= c^{\tau'\tau}_{ll}\, m, \\ c^{\tau'\tau}_{l+1, l, m} &= c^{\tau'\tau}_{l+1, l}\sqrt{(l+1)^2 - m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Определим теперь матрицы L_1 и L_2. Обозначим элементы матрицы L_1 через $a^{\tau'\tau}_{l'l, m'm}$, т. е. положим:

$$L_1 \xi^{\tau}_{lm} = \sum_{l', m', \tau'} a^{\tau'\tau}_{l'l, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'}. \tag{9}$$

Чтобы найти $a^{\tau'\tau}_{l'l, m'm}$, воспользуемся тем, что $L_1 = [A_2, L_3]$, и подставим вместо A_2 и L_3 известные матрицы. Мы получим тогда:

$$L_1 \xi^{\tau}_{lm} = A_2 L_3 \xi^{\tau}_{lm} - L_3 A_2 \xi^{\tau}_{lm} =$$
$$= A_2 \sum_{l', m', \tau'} c^{\tau'\tau}_{l'l, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'} - \frac{1}{2} L_3 (\alpha^l_m\, \xi^{\tau}_{l, m-1} - \alpha^l_{m+1}\, \xi^{\tau}_{l m+1}) =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{l, m', \tau'} c^{\tau'\tau}_{l'l, m'm} (\alpha^{l'}_{m'}\, \xi^{\tau'}_{l', m'-1} - \alpha^{l'}_{m'+1}\, \xi^{\tau'}_{l', m'+1}) -$$
$$- \frac{1}{2} a^l_m \sum_{l', m'\, \tau} c^{\tau'\tau}_{l'l, m, m-1} \xi^{\tau'}_{l'm'} + \frac{1}{2} \alpha^l_{m+1} \sum_{l', m', \tau'} c^{\tau'\tau}_{l'l, m'+1}\, \xi^{\tau'}_{l'm'}.$$

Разбивая первую сумму на две и изменяя соответственно индекс суммирования в каждой из получившихся сумм, мы можем записать наш результат таким образом:

$$L_1\xi^{\tau}_{lm}=\frac{1}{2}\sum_{l',m',\tau'}(\alpha^{l'}_{m'+1}c^{\tau'\tau}_{l'l,m'+1,m}-\alpha^{l'}_{m'}c^{\tau'\tau}_{l'l,m'-1,m}-$$

$$-\alpha^{l}_{m}c^{\tau'\tau}_{l'l,m',m-1}+\alpha^{l}_{m+1}c^{\tau'\tau}_{l'l,m',m+1})\xi^{\tau'}_{l'm'}.$$

Следовательно, элементы матрицы L_1 имеют вид

$$a^{\tau'\tau}_{l'l,m'm}=\frac{1}{2}(\alpha^{l'}_{m'+1}c^{\tau'\tau}_{l'l,m'+1,m}-\alpha^{l'}_{m'}c^{\tau'\tau}_{l'l,m'-1,m}-$$

$$-\alpha^{l}_{m}c^{\tau'\tau}_{l'l,m',m-1}+\alpha^{l}_{m+1}c^{\tau'\tau}_{l'l,m',m+1}). \qquad (10)$$

Так как $c^{\tau'\tau}_{l'l,m'm}\neq 0$, лишь если $m'=m$, а $l'=l-1,\ l,\ l+1$, то при фиксированных $m,\ l,\ \tau'$ и τ окажется шесть чисел $a^{\tau'\tau}_{l'l,m'm}$, отличных от нуля, а именно, $a^{\tau'\tau}_{l-1,m-1,m}$, $a^{\tau'\tau}_{ll,m-1,m}$, $a^{\tau'\tau}_{l+1,l,m-1,m}$, $a^{\tau'\tau}_{l-1,l,m+1,m}$, $a^{\tau'\tau}_{ll,m+1,m}$, $a^{\tau'\tau}_{l+1,l,m+1,m}$. Подставляя в формулу (10) $\alpha^l_m=$ $=\sqrt{(l+m)(l-m+1)}$ и $c^{\tau'\tau}_{l'lm}$ из формулы (8), мы найдем следующие значения этих коэффициентов:

$$\left.\begin{aligned}
a^{\tau'\tau}_{l-1,l,m-1,m}&=-\frac{c_{l-1,l}}{2}\sqrt{(l+m)(l+m-1)},\\
a^{\tau'\tau}_{l,l,m-1,m}&=\frac{c_{ll}}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)},\\
a^{\tau'\tau}_{l+1,l,m-1,m}&=\frac{c_{l+1,l}}{2}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)},\\
a^{\tau'\tau}_{l-1,l,m+1,m}&=\frac{c_{l-1,l}}{2}\sqrt{(l-m)(l-m-1)},\\
a^{\tau'\tau}_{l,l,m+1,m}&=\frac{c_{ll}}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)},\\
a^{\tau'\tau}_{l+1,l,m+1,m}&=-\frac{c_{l+1,l}}{2}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Постоянные $c_{l-1,l}$, c_{ll}, $c_{l+1,l}$ здесь те же, что и в формуле (8). Аналогично можно найти матрицу $L_2=-[A_1,\ L_3]$.

Полагая $L_2\xi^{\tau}_{lm} = \sum\limits_{l',\, m',\, \tau'} b^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm}\, \xi^{\tau'}_{l'm'}$, мы найдем, что

$$\left.\begin{aligned}
b^{\tau'\tau}_{l-1,\, l,\, m-1,\, m} &= -\frac{ic_{l-1,\, l}}{2}\sqrt{(l+m)(l+m-1)},\\
b^{\tau'\tau}_{l,\, l,\, m-1,\, m} &= \frac{ic_{ll}}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)},\\
b^{\tau'\tau}_{l+1,\, l,\, m-1,\, m} &= \frac{ic_{l+1,\, l}}{2}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)},\\
b^{\tau'\tau}_{l-1,\, l,\, m+1,\, m} &= -\frac{ic_{l-1,\, l}}{2}\sqrt{(l-m)(l-m-1)},\\
b^{\tau'\tau}_{l,\, l,\, m+1,\, m} &= -\frac{ic_{ll}}{2}\sqrt{(l+m+1)(l-m)},\\
b^{\tau'\tau}_{l+1,\, l,\, m+1,\, m} &= \frac{ic_{l+1,\, l}}{2}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)},
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

и все остальные $b^{\tau'\tau}_{l'l,\, m'm} = 0$.

Мы нашли, таким образом, возможный вид матриц L_1, L_2, L_3 *для систем инвариантных уравнений первого порядка. Постоянные* $c^{\tau'\tau}_{l-1,\, l}$, $c^{\tau'\tau}_{ll}$ и $c^{\tau'\tau}_{l+1,\, l}$, входящие в эти матрицы, могут выбираться произвольно. Придавая этим постоянным конкретные значения, мы будем получать различные инвариантные системы уравнений.

4. Решение инвариантных уравнений. Покажем теперь, что решение инвариантных систем уравнений удобно искать в виде рядов по обобщенным сферическим функциям, рассмотренным в предыдущем параграфе. Применяя эти разложения, мы сведем решение произвольной инвариантной системы вида (1) к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, подобно тому как это было сделано в § 8 для уравнений Максвелла.

С этой целью преобразуем уравнение (1) следующим образом. Во-первых, перейдем к сферическим координатам, положив в каждой точке

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= -\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r},\\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi} + \frac{\sin\varphi\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r},\\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= -\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Как следует из результатов § 8 и может быть проверено непосредственно, это преобразование независимых переменных изменяет систему (1) так же, как будто в точке с полярными координатами (φ, ϑ) мы подвергли пространство вращению $g = g\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, \pi\right)$

$\left(\text{обратному к } g\left(0,\ \vartheta,\ \frac{\pi}{2}+\varphi\right)\right)$ и положили $\frac{\partial}{\partial x_1'}=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial}{\partial x_2'}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial}{\partial x_3'}=\frac{\partial}{\partial r}$. Одновременно с этим подвергнем соответствующему преобразованию искомые функции $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$, положив $\psi'=T_g\psi$, где $T_g=T\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ \pi\right)$. Если подставить в систему (1) $\psi=T_{g^{-1}}\psi'$ и затем применить к результату преобразование T_g, то мы получим систему

$$T_gL_1\left[-\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\varphi}+\frac{\cos\varphi\cos\vartheta}{r}\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\vartheta}+\cos\varphi\sin\vartheta\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial r}\right]+$$
$$+T_gL_2\left[\frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta}\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\varphi}+\frac{\sin\varphi\cos\vartheta}{r}\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\vartheta}+\sin\varphi\sin\vartheta\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial r}\right]+$$
$$+T_gL_3\left[-\frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\vartheta}+\cos\vartheta\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial r}\right]+\varkappa\psi'=0.$$

В силу инвариантности системы имеют место равенства (см. формулу (3) этого параграфа)

$$T_g\left[-L_1\sin\varphi+L_2\cos\varphi\right]T_g^{-1}=L_1,$$
$$T_g\left[L_1\cos\varphi\cos\vartheta+L_2\sin\varphi\cos\vartheta-L_3\sin\vartheta\right]T_g^{-1}=L_2,$$
$$T_g\left[L_1\cos\varphi\sin\vartheta+L_2\sin\varphi\sin\vartheta+L_3\cos\vartheta\right]T_g^{-1}=L_3,$$

с помощью которых преобразованная система может быть записана в виде *)

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}L_1T_g\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}L_2T_g\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial\vartheta}+L_3T_g\frac{\partial\left(T_g^{-1}\psi'\right)}{\partial r}+\varkappa\psi'=0. \tag{13}$$

Матрица T_g^{-1} зависит от φ и ϑ. Поэтому при дифференцировании $T_g^{-1}\psi'$ по этим переменным мы должны продифференцировать оба сомножителя, после чего уравнение приобретает вид

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}L_1\frac{\partial\psi'}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial\psi'}{\partial\vartheta}+L_3\frac{\partial\psi'}{\partial\vartheta}+$$
$$+\left[\frac{1}{r\sin\vartheta}L_1T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}L_2T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\vartheta}+\varkappa E\right]\psi'=0. \tag{14}$$

Входящие в коэффициент при ψ' произведения $T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}$ и $T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\vartheta}$ суть не что иное, как линейные комбинации матриц A_k, отве-

*) Для того чтобы записать систему таким образом, нужно вставить справа от каждой матрицы L_k произведение $T_g^{-1}T_g$.

чающих при представлении бесконечно малым поворотам вокруг осей координат. Действительно, вспоминая, что $g=g\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, \pi\right)$ и $g^{-1}=g\left(0, \vartheta, \varphi+\frac{\pi}{2}\right)$, и записывая в параметрах, например, $T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}$, имеем:

$$T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{\Delta\varphi}T\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, \pi\right)\left[T\left(0, \vartheta, \varphi+\Delta\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-T\left(0, \vartheta, \varphi+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{1}{\Delta\varphi}\left[T\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, \pi\right)T\left(0, \vartheta, \varphi+\Delta\varphi+\frac{\pi}{2}\right)-E\right].$$

Первое слагаемое в скобке есть матрица, которая при $\Delta\varphi\to 0$, очевидно, стремится к E. Поэтому вся квадратная скобка может быть представлена как линейная комбинация матриц A_k, умноженная на $\Delta\varphi+$ члены высшего порядка (см. § 2). Предел же всего выражения, т. е. $T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}$, есть просто линейная комбинация A_1, A_2 и A_3. При этом коэффициенты линейной комбинации зависят от вращения $g\left(\frac{\pi}{2}-\varphi, \vartheta, \pi\right)g\left(0, \vartheta, \varphi+\Delta\varphi+\frac{\pi}{2}\right)$, поэтому они будут одинаковы для произведения $T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}$ и для произведения $g\frac{\partial g^{-1}}{\partial\varphi}$. Вычислим последнее произведение непосредственно

$$g=\begin{Vmatrix} -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \cos\varphi\sin\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{Vmatrix},$$

$$g^{-1}=\begin{Vmatrix} -\sin\varphi & -\cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{Vmatrix},$$

$$g\frac{\partial g^{-1}}{\partial\varphi}=\begin{Vmatrix} 0 & -\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \cos\vartheta & 0 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & 0 \end{Vmatrix}=a_2\sin\vartheta+a_3\cos\vartheta,$$

$$g\frac{\partial g^{-1}}{\partial\vartheta}=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}=a_1,$$

где a_1, a_2, a_3 — матрицы, отвечающие бесконечно малым поворотам при основном (трехмерном) представлении.

Поэтому для любого представления $g\to T_g$ имеют место такие же равенства:

$$T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\varphi}=A_2\sin\vartheta+A_3\cos\vartheta, \quad T_g\frac{\partial T_g^{-1}}{\partial\vartheta}=A_1.$$

Подставляя эти произведения в систему (14), преобразуем ее к окончательному виду

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}L_1\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}L_2\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}+L_3\frac{\partial\psi}{\partial r}+$$
$$+\frac{1}{r}(L_1A_2-L_2A_1+\operatorname{ctg}\vartheta L_1A_3)\psi+\varkappa\psi=0. \qquad (15)$$

Мы проделали с величиной ψ в каждой точке то преобразование, которое предшествовало в § 8 инвариантному относительно вращений разложению этой величины по обобщенным сферическим функциям.

Разложив теперь каждую компоненту ψ^{τ}_{lm} величины ψ в ряд по обобщенным сферическим функциям, мы можем в силу инвариантности системы рассчитывать, что ей будут удовлетворять отдельные слагаемые ряда. А это, как мы убедимся ниже, приведет к разделению переменных, т. е. сведет нашу систему к системе обыкновенных уравнений. Чтобы проделать соответствующие вычисления, запишем систему (15) в компонентах. Предварительно вычислим матрицу $D=L_1A_2-L_2A_1$.

Полагая

$$D\xi^{\tau}_{l,m}=\sum_{l',m',\tau'}d^{\tau'\tau}_{l'l,m'm}\xi^{\tau'}_{l',m'}$$

и пользуясь формулами (8), (11) и (12), а также выражениями A_1 и A_2 из § 2, мы найдем, что

$$\left.\begin{aligned} d^{\tau'\tau}_{l-1,l,mm}&=c^{\tau'\tau}_{l-1,l}(l-1)\sqrt{l^2-m^2},\\ d^{\tau'\tau}_{ll,mm}&=c^{\tau'\tau}_{ll}m,\\ d^{\tau'\tau}_{l+1,l,mm}&=-c^{\tau'\tau}_{l+1,l}\,l\sqrt{(l+1)^2-m^2}\end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

и остальные $d^{\tau'\tau}_{l'l,m'm}$ равны нулю. Система (15) в компонентах ψ^{τ}_{lm} имеет вид

$$\frac{1}{r\sin\varphi}\sum_{l',m',\tau'}a^{\tau\tau'}_{ll',mm'}\frac{\partial\psi^{\tau'}_{l'm'}}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\sum_{l',m',\tau'}b^{\tau\tau'}_{ll',mm'}\frac{\partial\psi^{\tau'}_{l'm'}}{\partial\vartheta}+$$
$$+\sum_{l',m',\tau'}c^{\tau\tau'}_{ll',mm'}\frac{\partial\psi^{\tau'}_{l'm'}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sum_{l',m',\tau'}d^{\tau\tau'}_{ll',mm'}\psi^{\tau'}_{l'm'}-$$
$$-\frac{i}{r}\operatorname{ctg}\vartheta\sum_{l',m',\tau'}m'a^{\tau\tau'}_{ll',mm'}\psi^{\tau'}_{l'm'}+\varkappa\psi^{\tau}_{lm}=0\ ^{*}), \qquad (17)$$

---

*) Следует учесть, что так как при воздействии матриц L_k на векторы ξ^{τ}_{lm} суммирование производилось по первым индексам каждой пары, то при преобразовании функций ψ^{τ}_{lm} надо суммировать по вторым индексам.

где коэффициенты $a_{ll',mm'}^{\tau\tau'}$, $b_{ll',mm'}^{\tau\tau'}$, $c_{ll',mm'}^{\tau\tau'}$, $d_{ll',mm'}^{\tau\tau'}$ определены формулами (8), (11), (12) и (16) этого параграфа. При этом в 1-й, 2-й и 5-й суммах отличны от нуля по шесть слагаемых, а в 3-й и 4-й — по три.

Чтобы разделить переменные, положим теперь

$$\psi_{lm}^{\tau}=f_{lm\tau}^{l_0}(r)\,T_{mn}^{l_0}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right),$$

где $l_0\geqslant l$, а $-l_0\leqslant m,\ n\leqslant l_0$, и подставим в систему (17) эти произведения. Тогда окажется, что $T_{m-1,n}^{l_0}$ и $T_{m+1,n}^{l_0}$, которые войдут в 1-ю, 2-ю и 5-ю суммы, можно будет по рекуррентным формулам выразить через $T_{mn}^{l_0}$, и после этого каждое уравнение сократится на $T_{mn}^{l_0}$ и в нем останутся только функции от r.

В самом деле, произведем подстановку значений коэффициентов

$$a_{ll',mm'}^{\tau\tau'},\quad b_{ll',mm'}^{\tau\tau'},\quad c_{ll',mm'}^{\tau\tau'},\quad d_{ll',mm'}^{\tau\tau'}$$

и соберем вместе члены с одними и теми же функциями от r.

Мы получим тогда систему

$$\sum_{\tau'} c_{l,l-1}^{\tau\tau'}\left\{\left[\sqrt{(l^2-m^2)}\,\frac{df_{l-1,m,\tau'}^{l_0}}{dr}-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{(l-1)\sqrt{(l^2-m^2)}}{r}f_{l-1,m,\tau'}^{l_0}\right]T_{m,n}^{l_0}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)-$$

$$-\frac{l}{2r}\sqrt{(l+m-1)(l+m)}\,f_{l-1,m-1,\tau'}^{l_0}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial T_{m-1,n}^{l_0}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial T_{m-1,n}^{l_0}}{\partial\vartheta}-\frac{(m-1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,T_{m-1,n}^{l_0}\right]-$$

$$-\frac{l}{2r}\sqrt{(l-m-1)(l-m)}\,f_{l-1,m+1,\tau'}^{l_0}\left[-\frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial T_{m+1,n}^{l_0}}{\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial T_{m+1,n}^{l_0}}{\partial\vartheta}+\frac{(m+1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\,T_{m+1,n}^{l_0}\right]\right\}+$$

$$+c_{ll}^{\tau\tau'}\left\{\left[m\,\frac{df_{lm\tau'}^{l_0}}{dr}+\frac{m}{r}f_{lm\tau}^{l_0}\right]T_{mn}^{l_0}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)+\right.$$

$$+\frac{i}{2r}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,f_{l,m-1,\tau'}^{l_0}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial T^{l_0}_{m-1,\,n}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T^{l_0}_{m-1,\,n}}{\partial\vartheta}-\frac{(m-1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}T^{l_0}_{m-1,\,n}\right]-$$

$$-\frac{i}{2r}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,f^{l_0}_{l,\,m+1,\,\tau'}\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial T_{m-1,\,n}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T_{m-1,\,n}}{\partial\vartheta}+\frac{(m+1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}T^{l_0}_{m+1,\,n}\right]\Bigg\}+$$

$$+c^{\tau\tau'}_{l,\,l+1}\Bigg\{\left[\sqrt{(l+1)^2-m^2}\,\frac{df^{l_0}_{l+1,\,m,\,\tau'}}{dr}+\right.$$

$$\left.+\frac{l\sqrt{(l+1)^2-m^2}}{r}f^{l_0}_{l+1,\,m,\,\tau'}\right]T^{l_0}_{m,\,n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)+$$

$$+\frac{i}{2r}\sqrt{(l-m+2)(l-m+1)}\,f^{l_0}_{l+1,\,m-1,\,\tau'}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial T_{m-1,\,n}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T_{m-1,\,n}}{\partial\vartheta}-\frac{(m-1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}T^{l_0}_{m-1,\,n}\right]+$$

$$+\frac{i}{2r}\sqrt{(l+m+2)(l+m+1)}\,f^{l_0}_{l+1,\,m+1,\,\tau'}\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial T_{m+1,\,n}}{\partial\varphi}+\frac{\partial T^{l_0}_{m+1,\,n}}{\partial\vartheta}+\frac{(m+1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}T^{l_0}_{m+1,\,n}\right]\Bigg\}+$$

$$+i\varkappa f^{l_0}_{lm\tau}(r)\,T^{l_0}_{mn}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)=0.$$

В каждое уравнение полученной системы входят три обобщенные сферические функции $T^{l_0}_{mn}$, $T^{l_0}_{m-1,\,n}$ и $T^{l_0}_{m+1,\,n}$. Однако к квадратным скобкам, содержащим $T^{l_0}_{m+1,\,n}$ и $T^{l_0}_{m-1,\,n}$, можно применить рекуррентные формулы (см. дополнение к § 7), по которым эти скобки также выразятся через $T^{l_0}_{mn}$.

В самом деле, вспоминая, что $T^{l_0}_{m-1,\,n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)=$ $=e^{-in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}u^{l_0}_{mn}(\vartheta)$ и что, следовательно, $\frac{\partial T_{m\pm1,\,n}}{\partial\varphi}=inT_{m\pm1,\,n}$, мы можем переписать соответствующие квадратные скобки в виде $e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\left(\frac{du_{m-1,\,n}}{d\vartheta}+\frac{n-(m-1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}u_{m-1,\,n}\right)$ и аналогично $e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}\left(\frac{du_{m+1,\,n}}{d\vartheta}+\frac{n-(m+1)\cos\vartheta}{\sin\vartheta}u_{m+1,\,n}\right)$. Но согласно формулам (2) добавления к § 7 первая из этих скобок должна быть равна $-i\sqrt{(l_0+m)(l_0-m+1)}\,u^{l_0}_{mn}$, а вторая скобка соответственно равна $-i\sqrt{(l_0+m+1)(l_0-m)}\,u^{l_0}_{mn}$.

Произведя замену и обозначив снова $e^{in\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}u^{l_0}_{mn}(\theta)$ через $T^{l_0}_{mn}$, мы можем сократить все уравнение на $T^{l_0}_{mn}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi,\ \vartheta,\ 0\right)$. В результате получится система, содержащая только $f^{l_0}_{lm\tau}(r)$, а именно:

$$\sum_{\tau'} c^{\tau\tau'}_{l,\,l-1}\left[\sqrt{(l^2-m^2)}\frac{df^{l_0}_{l-1,\,m,\,\tau'}}{dr}-\frac{(l-1)\sqrt{(l^2-m^2)}}{r}f^{l_0}_{l-1,\,m,\,\tau'}-\right.$$
$$-\frac{1}{2r}\sqrt{(l+m-1)(l+m)}\sqrt{(l_0+m)(l_0-m+1)}f^{l_0}_{l-1,\,m-1,\,\tau'}-$$
$$\left.-\frac{1}{2r}\sqrt{(l-m-1)(l-m)}\sqrt{(l_0+m+1)(l_0-m)}f^{l_0}_{l-1,\,m+1,\,\tau'}\right]+$$
$$+c^{\tau\tau'}_{ll}\left[m\frac{df^{l_0}_{lm\tau'}}{dr}+mf^{l_0}_{lm\tau'}+\right.$$
$$+\frac{1}{2r}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\sqrt{(l_0+m)(l_0-m+1)}f^{l_0}_{l,\,m-1,\,\tau'}(r)-$$
$$\left.-\frac{1}{2r}\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\sqrt{(l_0+m+1)(l_0-m)}f^{l_0}_{l,\,m+1,\,\tau'}(r)\right]+$$
$$+c^{\tau\tau'}_{l,\,l+1}\left[\sqrt{(l+1)^2-m^2}\frac{df^{l_0}_{l+1,\,m,\,\tau'}}{dr}+\frac{l\sqrt{(l+1)^2-m^2}}{r}f^{l_0}_{l+1,\,m,\,\tau'}(r)+\right.$$
$$+\frac{1}{2r}\sqrt{(l-m+2)(l-m+1)}\sqrt{(l_0+m)(l_0-m+1)}f^{l_0}_{l+1,\,m-1,\,\tau'}(r)+$$
$$\left.+\frac{1}{2r}\sqrt{(l+m+2)(l+m+1)}\sqrt{(l_0+m+1)(l_0-m)}f^{l_0}_{l+1,\,m+1,\,\tau}\right]+$$
$$+i\varkappa f^{l_0}_{lm\tau}(r)=0. \qquad (18)$$

5. Решение уравнений Дирака. Частным случаем системы (18) является система уравнений Дирака, которая после отделения множителя, зависящего от времени, может быть записана в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_4+\frac{\partial}{\partial z}u_3-\frac{i}{hc}\left[E-mc^2+V(r)\right]u_1=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_3-\frac{\partial}{\partial z}u_4-\frac{i}{hc}\left[E-mc^2+V(r)\right]u_2=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_2+\frac{\partial}{\partial z}u_1-\frac{i}{hc}\left[E+mc^2+V(r)\right]u_3=0,$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)u_1-\frac{\partial}{\partial z}u_2-\frac{i}{hc}\left[E+mc^2+V(r)\right]u_4=0.$$

При вращениях пара функций $(u_1,\ u_2)$, равно как и $(u_3,\ u_4)$, преобразуется по представлению группы вращений с $l=\frac{1}{2}$.

Произвольная инвариантная система относительно таких неизвестных функций зависит от выбора четырех постоянных $c^{11}_{1/2,\ 1/2}$, $c^{12}_{1/2,\ 1/2}$, $c^{21}_{1/2,\ 1/2}$, $c^{22}_{1/2,\ 1/2}$. Уравнения Дирака получаются при $c^{11}_{1/2,\ 1/2}=c^{22}_{1/2,\ 1/2}=0$; $c^{12}_{1/2,\ 1/2}=\dfrac{2hc}{E-mc^2+V(r)}$; $c^{21}_{1/2,\ 1/2}=\dfrac{2hc}{E+mc^2+V(r)}$, $\varkappa=-1$.

Преобразования, проделанные в п. 4 над общей инвариантной системой, приведут в нашем случае к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_3^l}{dr}+\frac{1}{r}f_3^l(r)-\frac{i\left(l+\frac{1}{2}\right)}{r}f_4^l(r)-k_1f_1^l(r)=0,\\
&-\frac{df_4^l}{dr}-\frac{1}{r}f_4^l(r)-\frac{i\left(l+\frac{1}{2}\right)}{r}f_3^l(r)-k_1f_2^l(r)=0,\\
&\frac{df_1}{dr}+\frac{1}{r}f_1^l(r)-\frac{i\left(l+\frac{1}{2}\right)}{r}f_2^l(r)-k_2f_3^l(r)=0,\\
&-\frac{df_2^l}{dr}-\frac{1}{r}f_2^l(r)-\frac{i\left(l+\frac{1}{2}\right)}{r}f_1^l(r)-k_2f_4^l(r)=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

где

$$k_1=\frac{i}{hc}\left[E-mc^2+V(r)\right],\quad k_2=\frac{i}{hc}\left[E+mc^2+V(r)\right].$$

Эта система относительно четырех неизвестных функций может быть сведена к системе двух уравнений второго порядка. Заметим для этого, что если положить $f_2^l(r)=\mp if_1^l(r)$ и $f_4^l(r)=\pm if_3^l(r)$, то второе уравнение совпадает с первым, третье — с четвертым, и система приобретет вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_3^l}{dr}+\frac{l+\frac{3}{2}}{r}f_3^l(r)-k_1f_1^l(r)=0,\\
&\frac{df_1^l}{dr}-\frac{l-\frac{1}{2}}{r}f_1(r)-k_2f_3^l(r)=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(20)$$

По каждому решению $\left(f_1^l,\ f_3^l\right)$ системы (20) можно построить два линейно независимых решения $\left(f_1^l,\ -if_1^l,\ f_3^l,\ if_3^l\right)$ и $\left(f_1^l,\ if_1^l,\ f_3^l,\ -if_3^l\right)$ исходной системы (19).

В частности, если $V(r)\equiv 0$, то решение системы (20) выражается через цилиндрические функции полуцелого порядка:

$$f_1^l(r)=\frac{c_1}{\sqrt{r}}J_l\left(\sqrt{-k_1k_2}\cdot r\right)+\frac{c_2}{\sqrt{r}}J_{-l}\left(\sqrt{-k_1k_2\cdot r}\right),$$

$$f_3^l(r)=-\frac{c_1}{k_2\sqrt{r}}J_{l+1}\left(\sqrt{-k_1k_2}\cdot r\right)+\frac{c_2}{k_2\sqrt{r}}J_{-l-1}\left(\sqrt{-k_1k_2}\cdot r\right).$$

Найденные нами решения уравнений Дирака имеют, следовательно, вид

$$u_1(r, \varphi, \vartheta) = f_1^l(r)\, T^l_{\frac{1}{2},\, n}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right),$$

$$u_2(r, \varphi, \vartheta) = \mp i f_1^l(r)\, T^l_{-\frac{1}{2},\, n}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right),$$

$$u_3(r, \varphi, \vartheta) = f_3^l(r)\, T^l_{\frac{1}{2},\, n}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right),$$

$$u_4(r, \varphi, \vartheta) = \pm i f_3^l(r)\, T^l_{-\frac{1}{2},\, n}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \vartheta, 0\right)$$

$$\left(l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots; \quad n = -l, -l+1, \ldots, l\right),$$

где

$$T^l_{\pm\frac{1}{2},\, n}(\varphi_1, \vartheta, \varphi_2) = e^{\mp i \frac{\varphi_1}{2}} \cdot P^l_{\pm\frac{1}{2},\, n}(\cos\vartheta) \cdot e^{-in\varphi_2},$$

$$P^l_{\pm\frac{1}{2},\, n}(\mu) =$$

$$= A(1-\mu)^{-\frac{2n\mp 1}{4}}(1+\mu)^{-\frac{2n\pm 1}{4}} \frac{d^{l-n}}{d\mu^{l-n}}\left[(1-\mu)^{l\mp\frac{1}{2}}(1+\mu)^{l\pm\frac{1}{2}}\right],$$

$$A = \frac{(-1)^{l\mp\frac{1}{2}}\, i^{n\pm\frac{1}{2}}}{2^l\left(l\mp\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{\left(l\mp\frac{1}{2}\right)!\,(l+n)!}{\left(l\pm\frac{1}{2}\right)!\,(l-n)!}}.$$

Общее решение может быть разложено в ряд по таким частным решениям.

6. Матрицы L_1, L_2, L_3 для случая $\varkappa \neq 0$ (другой вывод). В этом пункте мы покажем, что матрицы L_1, L_2, L_3 в инвариантном уравнении могут быть вычислены с помощью разложения произведения двух представлений на неприводимые.

Заметим, прежде всего, что соотношения (3) для матриц L_i могут быть, очевидно, переписаны в виде

$$T_g L_i T_g^{-1} = \sum_{k=1,2,3} g_{ki} L_k, \tag{21}$$

где T_g — матрицы представления $g \to T_g$, действующего в пространстве R (пространству R принадлежат значения функции $\psi(x)$), а L_1, L_2, L_3 — матрицы в этом пространстве. Рассмотрим все матрицы в пространстве R. Они также образуют линейное пространство. Обозначим это пространство буквой S. (Размерность S равна n^2, если размерность R равна n.)

Зададим в пространстве S представление $g \to \tau_g$, действующее по формуле

$$\tau_g L = T_g L T_g^{-1} \tag{22}$$

(читатель без труда может убедиться, что эта формула действительно задает представление группы вращения в пространстве S). Представление (22), вообще говоря, приводимо. Допустим, что среди неприводимых представлений, на которые оно распадается, содержится представление с весом $l=1$. Представление с $l=1$ эквивалентно тождественному представлению группы вращений, действующему в трехмерном пространстве. Поэтому, если среди неприводимых относительно представления (22) подпространств в S найдется подпространство с $l=1$, то в нем можно выбрать базис L_1, L_2, L_3, в котором представление (22) действует по формуле

$$\tau_g L_i = \sum_{k=1,2,3} g_{ki} L_k,$$

или

$$T_g L_i T_g^{-1} = \sum_{k=1,2,3} g_{ki} L_k. \tag{21'}$$

Итак, мы видим, что в трехмерном подпространстве $R^{(3)}$ пространства матриц S, неприводимом относительно представления $g \to \tau_g$, найдется тройка матриц L_1, L_2, L_3 (некоторый базис в $R^{(3)}$), удовлетворяющая соотношениям (3) (или, что то же самое (2)) *для матриц в инвариантном уравнении. Обратно, тройка матриц L_1, L_2, L_3, удовлетворяющая соотношению* (21), *порождает в S трехмерное подпространство, инвариантное и неприводимое относительно представления $g \to \tau_g$.*

Таким образом, задача об отыскании матриц L_1, L_2, L_3 свелась к выделению в пространстве всех матриц (пространстве S) неприводимых подпространств с весом $l=1$ относительно представления $g \to \tau_g$ и построению канонических базисов L_0, L_+, L_- в этих подпространствах.

Напомним, что канонический базис L_0, L_+, L_- в трехмерном неприводимом подпространстве связан с базисом L_1, L_2, L_3 соотношениями

$$L_0 = L_3,$$
$$L_+ = L_1 + iL_2,$$
$$L_- = L_1 - iL_2.$$

Покажем теперь, как поставленная задача связана с задачей разложения произведения двух представлений на неприводимые. Напомним (см. замечание на стр. 56), что если $g \to T_g^{(p)}$ и $g \to T_g^{(q)}$ — два представления, действующие в пространствах $R^{(p)}$ и $R^{(q)}$ (p и q — размерности пространств), то произведение этих представлений

$T_g^{(p)} \times T_g^{(q)}$, действующее в пространстве $R^{(p)} \times R^{(q)}$, эквивалентно представлению, действующему в пространстве прямоугольных матриц A размерами $p \times q$ (p — число строк, q — число столбцов) по формуле

$$\tau_g A = U_g A V_g^{\text{тр}},$$

где U_g — матрица представления $g \to T_g^{(p)}$, записанная в некотором базисе пространства R^p, V_g — матрица представления $g \to T_g^{(q)}$, записанная в некотором базисе пространства $R^{(q)}$, и $V_g^{\text{тр}}$ обозначает транспонированную матрицу V_g.

Пусть теперь в пространстве R действует представление $g \to T_g$ группы вращений. Обозначим через U_g матрицы представления $g \to T_g$ в некотором базисе. Зададим в R еще одно представление $g \to \hat{T}_g$ так, что его матрицы в том же базисе имеют вид

$$V_g = \left(U_g^{\text{тр}}\right)^{-1}. \tag{23}$$

(Читатель может без труда убедиться, что соответствие $g \to V_g$ действительно является представлением.)

Воспользовавшись сделанным выше замечанием, мы видим, что произведение двух представлений $T_g \times \hat{T}_g$ можно реализовать в пространстве квадратных матриц L по формуле

$$\tau_g L = U_g L V_g^{\text{тр}}$$

или

$$\tau_g L = U_g L U_g^{-1},$$

что совпадает с формулой (22).

Таким образом, мы видим, что представление (22) в пространстве матриц S эквивалентно произведению двух представлений T_g и $\hat{T}_g$ действующих в R.

Нашей задачей теперь является выделить в произведении представлений $T_g \times \hat{T}_g$ неприводимое трехмерное подпространство и найти его канонический базис.

Обозначим, как всегда, через ξ_{lm}^{τ} канонический базис представления $g \to T_g$ в пространстве R. Мы будем, кроме того, считать, что именно в этом базисе матрицы U_g и V_g представлений $g \to T_g$ и $g \to \hat{T}_g$ связаны соотношением (23) $V_g = \left(U_g^{\text{тр}}\right)^{-1}$.

Заметим при этом, что базис $\{\xi_{lm}^{\tau}\}$ не является каноническим для представления $g \to \hat{T}_g$. Однако он отличается от канонического лишь нумерацией векторов: вектор ξ_{lm}^{τ} является собственным вектором оператора $\hat{H}_3$ для представления $g \to \hat{T}_g$ с собственным значением $-m$

$$\hat{H}_3 \xi_{lm}^{\tau} = -m \xi_{lm}^{\tau},$$

а поэтому базис $\{\eta^{\tau}_{lm}\}=\{\xi^{\tau}_{l,\,-m}\}$ является уже каноническим для представления $g\to\hat{T}_g$. В связи с этим в пространстве $R\times R$ выберем базис $\{\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l',\,-m'}\}=\{\xi^{\tau}_{lm}\hat{\xi}^{\tau'}_{l'm'}\}$, являющийся произведением канонических базисов представлений $g\to T_g$ и $g\to\hat{T}_g$. Вектор h из $R\times R$ в этом базисе запишется, очевидно, так:

$$h=\sum c^{\tau\tau'}_{lml'm'}\xi^{\tau}_{lm}\hat{\xi}^{\tau'}_{l'm'}=\sum c^{\tau\tau'}_{lml'm'}\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l,\,-m'}.$$

В силу замечания на стр. 56, при представлении $T_g\times\hat{T}_g$ в $R\times R$ матрица $\|c^{\tau\tau'}_{lm\,l'm'}\|$ преобразуется по формуле (22).

Пусть, наконец, R^3 — трехмерное неприводимое подпространство, т. е. подпространство в $R\times R$, в котором действует представление с весом $l=1$, а $\tilde{L}_0$, $\tilde{L}_+$, $\tilde{L}_-$ — канонический базис в нем.

Запишем векторы $\tilde{L}_0$, $\tilde{L}_+$, $\tilde{L}_-$ в базисе $\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l',\,-m'}$:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{L}_0&=\sum a^{\tau\tau'\,(0)}_{lm\,l'm'}\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l',-m'},\\ \tilde{L}_+&=\sum a^{\tau\tau'\,(+)}_{lm\,l'm'}\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l',\,-m'},\\ \tilde{L}_-&=\sum a^{\tau\tau'\,(-)}_{lm\,l'm'}\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l',\,-m'}.\end{aligned}\right\}\tag{24}$$

Числа $a^{\tau\tau'\,(0,+,-)}_{lml'm'}$ являются, очевидно, элементами матриц L_0, L_+, L_- инвариантного уравнения. Найдем общий вид этих чисел.

Как и раньше, мы будем предполагать, что пространство R, в котором действует представление $g\to T_g$, раскладывается в прямую сумму инвариантных подпространств R^{τ}_l, в каждом из которых представление $g\to T_g$ порождает неприводимое представление с весом l (значком τ мы будем различать подпространства с одинаковым l)

$$R=\sum_{(l\tau)}R^{\tau}_l.\tag{25}$$

Базис $\{\xi^{\tau}_{l,\,-l}\xi^{\tau}_{l,\,-l+1}\ldots\xi^{\tau}_{l,\,l-1}\xi^{\tau}_{ll}\}$ является каноническим в подпространстве R^{τ}_l.

Аналогичное разложение R имеет место и для представления $g\to\hat{T}_g$

$$R=\sum R^{\tau'}_{l'}\text{ *)}.\tag{26}$$

Базис $\{\eta^{\tau'}_{l'm'}\}$ $(m'=-l,\ \ldots,\ l)$—канонический в подпространстве $R^{\tau'}_{l'}$.

Таким образом, произведение $R\times R$ пространства на самое себя является прямой суммой всевозможных подпространств вида $R^{\tau}_l\times R^{\tau'}_{l'}$:

$$R\times R=\sum_{(l,\,\tau)(l'\tau')}R^{\tau}_l\times R^{\tau'}_{l'}.$$

---

*) Оба разложения (25) и (26) можно выбрать совпадающими.

В подпространствах $R_l^\tau \times R_{l'}^{\tau'}$, инвариантных относительно представления $\tau_g \to T_g \times \hat{T}_g$, последнее действует, как произведение двух неприводимых представлений с весами l и l'. Если теперь в каждом из подпространств $R_l^\tau \times R_{l'}^{\tau'}$ выделим (когда это возможно) трехмерное неприводимое подпространство и его канонический базис

$$g_0(l\tau;\ l'\tau'),\qquad g_+(l\tau;\ l'\tau'),\qquad g_-(l\tau;\ l'\tau'),$$

то с помощью линейных комбинаций вида

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{L}_0 &= \sum d_{ll'}^{\tau\tau'} g_0(l\tau;\ l'\tau'),\\ \widetilde{L}_+ &= \sum d_{ll'}^{\tau\tau'} g_0(l\tau;\ l'\tau'),\\ \widetilde{L}_- &= \sum d_{ll'}^{\tau\tau'} g_-(l\tau;\ l'\tau')\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

мы получим канонический базис в любом трехмерном подпространстве из $R \times R$, неприводимом относительно представления $T_g \times \hat{T}_g$.

Итак, задача свелась к тому, чтобы в произведении $R_l^\tau \times R_{l'}^{\tau}$ найти канонический базис трехмерного неприводимого представления ($l = 1$). Сразу же заметим, что такое представление существует лишь тогда, когда веса l и l' отличаются не более чем на 1:

$$l = l' - 1,\qquad l',\qquad l' + 1,$$

т. е. в подпространствах вида

$$R_{l-1}^\tau \times R_l^{\tau'},\qquad R_l^\tau \times R_l^{\tau'},\qquad R_{l+1}^\tau R_l^{\tau'}.$$

Напишем для $R_{l-1}^\tau \times R_l^{\tau'}$:

$$\begin{aligned}g_0\ (l-1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l-1,\,m;\,l,\,-m}^{10}\xi_{l-1,\,m}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_+\ (l-1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l-1,\,m+1;\,l,\,-m}^{11}\xi_{l-1,\,m+1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_-\ (l-1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l-1,\,m-1;\,l,\,-m}^{1,\,-1}\xi_{l-1,\,m-1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'};\end{aligned}$$

для $R_l^\tau \times R_l^{\tau'}$:

$$\begin{aligned}g_0\,(l\tau;\ l\tau') &= \sum B_{l,\,m;\,l,\,-m}^{10}\xi_{lm}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_+\,(l\tau;\ l\tau') &= \sum B_{l,\,m+1;\,l,\,-m}^{11}\xi_{l,\,m+1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_-\,(l\tau;\ l\tau') &= \sum B_{l,\,m-1;\,l,\,-m}^{1,\,-1}\xi_{l,\,m-1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'};\end{aligned}$$

для $R_{l+1}^\tau \times R_l^{\tau'}$:

$$\begin{aligned}g_0\,(l+1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l+1,\,m;\,l,\,-m}^{10}\xi_{l+1,\,m}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_+\,(l+1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l+1,\,m+1;\,l,\,-m}^{11}\xi_{l+1,\,m+1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'},\\ g_-\,(l+1,\ \tau;\ l\tau') &= \sum B_{l+1,\,m-1;\,l,\,-m}^{1,\,-1}\xi_{l+1,\,m-1}^{\tau}\eta_{l,\,-m}^{\tau'}.\end{aligned}$$

Коэффициенты $\left\{B^{1s}_{l+k,\ m+s;\ l,\ -m}\right\}$ $(s=1,\ 0,\ -1;\ k=1,\ 0,\ -1)$ являются коэффициентами Клебша — Гордона. Используя формулы (22) § 10, п. 3, имеем:

$$g_0(l-1,\ \tau;\ l\tau')=\alpha^{(-1)}(l)\sqrt{2}\sum_m(-1)^{m+1}\sqrt{(l+m)(l-m)}\,\xi^{\tau}_{l-1,\ m}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_+(l-1,\ \tau;\ l\tau')=\alpha^{(-1)}(l)\sum_m(-1)^m\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi^{\tau}_{l-1,\ m+1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_-(l-1,\ \tau;\ l\tau')=\alpha^{(-1)}(l)\sum_m(-1)^m\sqrt{(l+m-1)(l+m)}\,\xi^{\tau}_{l-1,\ m-1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

где

$$\alpha^{(-1)}(l)=\sqrt{3}(-1)^l\sqrt{\frac{1}{2l(2l+1)(2l-1)}}.$$

Аналогично для $R^{\tau}_l\times R^{\tau'}_l$

$$g_0(l\tau;\ l\tau')=\alpha^{(0)}(l)\sqrt{2}\sum(-1)^{m+1}m\xi^{\tau}_{lm}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_+(l\tau;\ l\tau')=\alpha^{(0)}(l)\sum(-1)^m\sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\xi^{\tau}_{l,\ m+1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_-(l\tau;\ l\tau')=\alpha^{(0)}(l)\sum(-1)^{m+1}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi^{\tau}_{l,\ m-1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$\alpha^{(0)}(l)=\sqrt{3}(-1)^l\sqrt{\frac{1}{(2l+1)2l(l+1)}}$$

и для $R^{\tau}_{l+1}\times R^{\tau'}_l$

$$g_0(l+1,\ \tau;\ l\tau')=$$
$$=\alpha^{(+)}(l)\sqrt{2}\sum(-1)^m\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\,\xi^{\tau}_{l+1,\ m}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_+(l+1,\ \tau;\ l\tau')=$$
$$=\alpha^{(+)}(l)\sum(-1)^m\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi^{\tau}_{l+1,\ m+1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$g_-(l+1,\ \tau;\ l\tau')=$$
$$=\alpha^{(+)}(l)\sum(-1)^m\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi^{\tau}_{l+1,\ m-1}\eta^{\tau'}_{l,-m},$$

$$\alpha^{(+)}(l)=(-1)^l\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{(2l+1)(2l+2)(2l+3)}}.$$

Как мы уже говорили, комбинации этих векторов вида (27)

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{L}_0&=\sum d^{\tau\tau'}_{l-1,\ l}g_0(l-1,\ \tau;\ l\tau')+\\
&\qquad+d^{\tau\tau'}_{ll}g_0(l\tau;\ l\tau')+d^{\tau\tau'}_{l+1,\ l}g_0(l+1,\ \tau;\ l\tau'),\\
\tilde{L}_+&=\sum d^{\tau\tau'}_{l-1,\ l}g_+(l-1,\ \tau;\ l\tau')+\\
&\qquad+d^{\tau\tau}_{ll}g_+(l\tau;\ l\tau')+d^{\tau\tau'}_{l+1,\ l}g_+(l+1,\ \tau;\ l\tau'),\\
\tilde{L}_-&=\sum d^{\tau\tau'}_{l-1,\ l}g_-(l-1,\ \tau;\ l\tau')+\\
&\qquad+d^{\tau\tau'}_{ll}g_-(l\tau;\ l\tau')+d^{\tau\tau}_{l+1,\ l}g_-(l+1,\ \tau;\ l\tau')
\end{aligned}\right\}\quad(27')$$

являются снова каноническим базисом в некотором трехмерном неприводимом подпространстве. И наоборот, канонический базис во всяком неприводимом подпространстве в $R \times R$ с весом $l = 1$ имеет вид (27′).

Таким образом, искомые векторы $\widetilde{L}_0$, $\widetilde{L}_+$, $\widetilde{L}_-$ из $R \times R$ запишутся

$$\widetilde{L}_0 = \sum_{m,\tau,\tau',l} (-1)^m \Big[c_{l-1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{l^2 - m^2}\, \xi_{l-1,m}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'} + c_{ll}^{\tau\tau'} m \xi_{lm}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau} + c_{l+1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\, \xi_{l+1,m}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'}\Big],$$

$$\widetilde{L}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m,\tau,\tau',l} (-1)^m \Big[-c_{l-1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l-m)(l-m-1)}\, \xi_{l-1,m+1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'} - c_{ll}^{\tau\tau} \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\, \xi_{l,m+1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'} + c_{l+1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\, \xi_{l+1,m+1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau}\Big],$$

$$\widetilde{L}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum (-1)^m \Big[-c_{l-1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l+m-1)(l+m)}\, \xi_{l-1,m-1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'} + c_{ll}^{\tau+1} \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\, \xi_{l,m-1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'} + c_{l+1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\, \xi_{l+1,m-1}^{\tau} \eta_{l,-m}^{\tau'}\Big].$$

Здесь введены обозначения:

$$c_{l-1,l}^{\tau\tau'} = -d_{l-1,l}^{\tau\tau'} \alpha^{(-1)}(l) \sqrt{2},$$
$$c_{ll}^{\tau\tau'} = -d_{ll}^{\tau\tau'} \alpha^{(0)}(l) \sqrt{2},$$
$$c_{l+1,l}^{\tau\tau'} = d_{l+1,l}^{\tau\tau'} \alpha^{(+1)}(l) \sqrt{2}.$$

Отсюда для элементов матриц $L_0 = L_3$ в инвариантном уравнении получаем:

$$c_{l-1,m;lm}^{\tau\tau'} = c_{l-1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{l^2 - m^2},$$
$$c_{lm;lm}^{\tau\tau'} = c_{ll}^{\tau\tau'} m,$$
$$c_{l+1,m;lm}^{\tau\tau'} = c_{l+1,l}^{\tau\tau'} \sqrt{(l+m+1)(l-m+1)},$$

что совпадает с формулами (8).

Аналогично пишутся элементы матриц $L_1 = \frac{L_+ + L_-}{2}$ и $L_2 = \frac{L_+ - L_-}{2i}$.

7. Инвариантные уравнения с $\varkappa = 0$. Все предыдущие рассуждения и результаты относились к уравнению вида (21) с константой $\varkappa \neq 0$. Они, разумеется, применимы и к случаю $\varkappa = 0$. Но оказывается, что при $\varkappa = 0$ появляются существенно новые возможности для построения инвариантных уравнений.

Заметим только, что инвариантные уравнения с $\varkappa = 0$ в приложениях почти не встречаются. Мы излагаем здесь этот случай в основном для того, чтобы подготовить читателя к аналогичному случаю релятивистски-инвариантных уравнений с $\varkappa = 0$ во второй части книги, а эти последние уравнения важны для теоретической физики.

Выясним, прежде всего, каковы условия инвариантности уравнения с $\varkappa = 0$.

Пусть задана система уравнений

$$L_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0. \tag{28}$$

Заметим с самого начала, что в отличие от случая $\varkappa \neq 0$ матрицы L_1, L_2, L_3 в этой системе не обязательно квадратные; другими словами, число уравнений в системе (28) может не совпадать с числом компонент функции ψ.

Положим, как мы это делали ранее,

$$\psi'(x) = T_g \psi(g^{-1}x).$$

Тогда

$$\frac{\partial \psi'(x)}{\partial x_i} = T_g \sum \frac{\partial \psi(x')}{\partial x'_k} g_{ik},$$

если

$$x' = g^{-1}x.$$

Таким образом, получаем, что функция $\psi'(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum L_k T_g^{-1} g_{ik} \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} = 0. \tag{29}$$

Предположим теперь, что существует некоторое невырожденное преобразование V_g такое, что

$$V_g \sum L_k T_g^{-1} g_{ik} \frac{\partial \psi'(x)}{\partial x_i} \equiv \sum L_i \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} \qquad (\text{при всех } \psi(x)),$$

т. е.

$$\sum_k V_g L_k T_g^{-1} g_{ik} = L_i.$$

Если преобразование V_g существует, то это значит, что уравнение (29) эквивалентно уравнению

$$\sum L_i \frac{\partial \psi'}{\partial x_i} = 0,$$

т. е. после замены $x = gx'$, $\psi'(x) = T_g \psi(x')$ уравнение (28) не изменилось. В связи с этим *уравнение вида* (28) *является инвариантным относительно группы вращений, если при одновременной замене* $x = gx'$ *и* $\psi'(x) = T_g \psi(x')$ *преобразованное уравнение с точностью до невырожденного преобразования* V_g *совпадает с исходным.*

Заметим, что в случае уравнения с $\varkappa \neq 0$ преобразование V_g по необходимости совпадает с преобразованием T_g.

Для матриц L_1, L_2, L_3 в инвариантном уравнении получается соотношение

$$V_g L_k T_g^{-1} g_{ik} = L_i,$$

или

$$V_g L_k T_g^{-1} = \sum g_{ki} L_i,$$

где T_g — матрица представления $g \to T_g$, V_g — матрица невырожденного преобразования. Легко проверить, что соответствие $g \to V_g$ является представлением $g \to V_g$, действующим в некотором пространстве $\widetilde{R}$, вообще говоря, отличном от пространства R, в котором действует представление $g \to T_g$.

Таким образом, мы получили, *что уравнение*

$$\sum L_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0$$

инвариантно относительно группы вращений, если наряду с представлением $g \to T_g$, преобразующим функции ψ, существует представление $g \to V_g$, преобразующее само уравнение и такое, что

$$V_g L_k T_g^{-1} = \sum g_{ki} L_i.$$

Это и есть условие инвариантности уравнения (28).

Из этого условия видно, что матрицы L_1, L_2, L_3 получаются из разложения на неприводимые произведения двух представлений

$$V_g \times \hat{T}_g,$$

где $g \to \hat{T}_g$ — представление контрадиентное представлению $g \to T_g$ (т. е. матрицы этих представлений U_g и $\hat{U}_g$ связаны в некотором базисе с отношением $\hat{U}_g = (U_g^{\text{тр}})^{-1}$).

Это обстоятельство можно обнаружить с помощью тех же рассуждений, что и в случае $\varkappa \neq 0$. При этом мы видим, что в нашем случае $\varkappa = 0$ представления V_g и T_g никак друг с другом не связаны, в то время как при $\varkappa \neq 0$ они должны совпадать.

Найдем теперь общий вид матриц L_1, L_2, L_3 в инвариантном уравнении вида (28).

Заметим, что вектор ψ из пространства R, в котором действует представление $g \to T_g$, переводится матрицей L_k ($k = 1, 2, 3$) в вектор ξ из пространства $\widetilde{R}$, где действует представление $g \to \widetilde{T}_g$. Запишем, таким образом,

$$\xi = L_k \psi. \tag{30}$$

Пусть σ_{lm}^{τ} — канонический базис представления $g \to T_g$ в пространстве $\widetilde{R}$, а ξ_{lm}^{τ} — канонический базис представления $g \to T_g$

в пространстве R; при этом $\eta^{\tau'}_{l',-m'} = \xi^{\tau'}_{l'm'}$ — канонический базис представления $g \to \hat{T}_g$.

Условимся теперь вектор ξ относить к базису σ^{τ}_{lm}, а вектор ψ — к базису ξ^{τ}_{lm}. Равенство (30) при этом перепишется:

$$x^{\tau}_{lm} = \sum c^{\tau\tau'(k)}_{lml'm'} y^{\tau'}_{l'm'},$$

где x^{τ}_{lm} — координаты ξ в базисе $\{\sigma^{\tau}_{lm}\}$, а $y^{\tau'}_{l'm'}$ — координаты ψ в базисе $\{\xi^{\tau'}_{l'm'}\}$. Числа $c^{\tau\tau'(k)}_{lml'm'}$ и образуют элементы матрицы L_k,

$$L_k = \| c^{\tau\tau'(k)}_{lml'm'} \|.$$

При таком определении каждой матрице L_k может быть отнесен вектор h_k из произведения пространства $R \times R$ на самое себя так:

$$L_k \sim h_k = \sum c^{\tau\tau'}_{lml'm'} \sigma^{\tau}_{lm} \xi^{\tau'}_{l'm'} = \sum c^{\tau\tau'}_{lml'm'} \sigma^{\tau}_{lm} \eta^{\tau'}_{l',-m'}.$$

Отсюда видно, что отыскание матриц L_1, L_2, L_3 (или, что то же самое, L_0, L_+, L_-) сводится к написанию базиса в трехмерном подпространстве из $R \times R$, неприводимом относительно представления $\tau_g = T_g \times \hat{T}_g$ через векторы $\{\sigma^{\tau}_{lm} \eta^{\tau}_{l',-m'}\}$. Эту задачу мы уже решили в предыдущем пункте. Если воспользоваться результатами этого пункта, то мы получим, что элементы матриц L_1, L_2, L_3 — числа $c^{\tau\tau'(k)}_{lml'm'}$, $(k = 1, 2, 3)$ задаются формулами (8), (11), (12) из п. 3.

§ 10. Разложение произведения двух представлений. Коэффициенты Клебша — Гордона

1. Вычисление коэффициентов Клебша — Гордона. В п. 3 § 4 мы выяснили, на какие представления разлагается произведение двух неприводимых представлений группы вращений. Здесь мы фактически произведем это разложение, т. е. выразим векторы канонических базисов в каждом из неприводимых подпространств, на которые разлагается пространство $R_1 \times R_2$, через векторы $e_{m_1} f_{m_2}$.

Пусть $\{g^l_m\}$ — ортонормированный канонический базис в подпространстве $R_l \subset R_1 \times R_2$, в котором действует неприводимое представление веса l $(|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2)$.

Напишем g^l_m в виде линейной комбинации векторов вида $e_{m_1} f_{m_2}$:

$$g^l_m = \sum \delta_{m,\, m_1+m_2} B^{lm}_{l_1m_1;\, l_2m_2} e_{m_1} f_{m_2}. \tag{1}$$

Наша задача состоит в определении коэффициентов $B^{lm}_{l_1m_1;\, l_2m_2}$, называемых коэффициентами Клебша — Гордона.

Их вычисление мы проведем в несколько этапов.

I. Растянем векторы канонического базиса $\{e_{m_1}\}$ в пространстве R_1, т. е. перейдем к векторам

$$\xi^{m_1} = \gamma^{l_1}_{m_1} e_{m_1} \tag{2}$$

так, чтобы в новом базисе $\{\xi^{m_1}\}$ операторы H_+ и H_- имели бы вид

$$\left.\begin{aligned} H_+\xi^{m_1} &= (l_1 - m_1)\,\xi^{m_1+1}, \\ H_-\xi^{m_1} &= (l_1 + m_1)\,\xi^{m_1-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(Оператор H_3 действует, очевидно, по-прежнему: $H_3\xi^{m_1} = m_1\xi^{m_1}$.)

Заметим, что при таком выборе операторов H_+, H_-, H_3 выполняются соотношения коммутации (11) § 2. Это означает, что указанную замену базиса действительно можно произвести.

Найдем коэффициенты растяжения $\gamma^{l_1}_{m_1}$. Имеем:

$$H_-\xi^{m_1+1} = (l_1 + m_1 + 1)\,\xi^{m_1} = (l_1 + m_1 + 1)\,\gamma^{l_1}_{m_1} e_{m_1}.$$

С другой стороны,

$$H_-\xi^{m_1+1} = \gamma^{l_1}_{m_1+1} H_{-1} e_{m_1+1} = \gamma^{l}_{m_1+1}\alpha_{m_1+1} e_{m_1}.$$

Отсюда получается система равенств

$$\gamma^{l_1}_{m_1+1}\alpha_{m_1+1} = (l_1 + m_1 + 1)\,\gamma^{l_1}_{m_1}.$$

Из нее мы получаем:

$$\gamma^{l_1}_{m_1} = \gamma^{l_1}_{l_1}\frac{\alpha_{m_1+1}\cdot\alpha_{m_1+2}\cdots\alpha_{l_1}}{(l_1+m_1+1)(l_1+m_1+2)\dots 2l_1}.$$

Подставляя значения α_s из (17) § 2 и полагая $\gamma^{l_1}_{l_1} = 1$, окончательно получим:

$$\gamma^{l_1}_{m_1} = \sqrt{\frac{(l_1+m_1)!\,(l_1-m_1)!}{(2l_1)!}}. \tag{4}$$

Аналогичную замену базиса мы произведем и в пространстве R_2, положив:

$$\eta^{m_2} = \gamma^{l_2}_{m_2} f_{m_2}. \tag{5}$$

II. В пространстве R_l, где действует неприводимое представление веса l наряду с ортонормированным каноническим базисом $\{g^l_m\}$, рассмотрим базис $\{x^l_s\}$, который строится следующим образом:

$$x^l_0 = g^l_l, \quad x^l_1 = H_- x^l_0, \quad x^l_2 = H_- x^l_1 = H^2_- x^l_0, \; \dots, \; x^l_s = H^s_- x^l_0. \tag{6}$$

Очевидно, что

$$x^l_s = \sigma^l_m g_m \qquad (m = l - s). \tag{7}$$

Найдем коэффициенты σ^l_m:

$$H_- x^l_{s-1} = x^l_s = \sigma^l_m g^l_m.$$

С другой стороны,

$$H_- x^l_{s-1} = \sigma_{m+1} H_- g^l_{m+1} = \sigma^l_{s-1}\alpha_{m+1}.$$

Отсюда получается система равенств

$$\sigma_m^l = \sigma_{m+1}^l \alpha_{m+1}$$

или

$$\sigma_m^l = \sigma_l^l \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \ldots \alpha_l.$$

Подставляя α_s из (17) § 2 и полагая $\sigma_l^l = 1$, получим:

$$\sigma_m^l = \sqrt{\frac{(2l)!\,(l-m)!}{(l+m)!}}. \tag{8}$$

III. Итак, вместо ортонормированных базисов $\{e_{m_1}\}$ и $\{f_{m_2}\}$ в пространствах R_1 и R_2 мы выбрали базисы $\{\xi^{m_1}\}$ и $\{\eta^{m_2}\}$, а вместо базиса $\{g_m^l\}$ в R_l — базис $\{x_s^l\}$. Оказывается, что векторы x_s^l просто выражаются через векторы $\xi^{m_1}\eta^{m_2}$.

Пусть $l = l_1 + l_2 - \alpha$ $[0 \leqslant \alpha \leqslant \max\,(2l_1,\ 2l_2)]$.

Запишем вектор $x_0^{l_1+l_2-\alpha}$ следующим образом:

$$x_0^{l_1+l_2-\alpha} = \sum_{k=0}^{k=\alpha} a_k^\alpha \xi^{l_1-k} \eta^{l_2-\alpha+k}.$$

Найдем коэффициенты a_k^α. Очевидно, что

$$H_+ x_0^{l_1+l_2-\alpha} = 0.$$

С другой стороны, из формул (3) получаем:

$$H_+ \left(\sum a_k^\alpha \xi^{l_1-k} \eta^{l_2-\alpha+k}\right) =$$
$$= \sum a_k^\alpha \left[k \xi^{l_1-k+1} \eta^{l_1-\alpha+k} + (\alpha-k)\, \xi^{l_1-k} \eta^{l_2-\alpha+k+1}\right].$$

Отсюда

$$a_0^\alpha \alpha + a_1^\alpha = 0,$$
$$a_1^\alpha(\alpha-1) + 2a_2^\alpha = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_k^\alpha(\alpha-k) + (k+1)\, a_{k+1}^\alpha = 0.$$

Из этих равенств находим:

$$a_k^\alpha = a_0^\alpha (-1)^{-k} C_\alpha^k,$$

где C_α^k — число сочетаний из α элементов по k. Отсюда

$$x_0^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha \sum (-1)^k C_\alpha^k \xi^{l_1-k} \eta^{l_2-\alpha+k}. \tag{9}$$

Если индексы векторов ξ^p и η^t формально понимать как степени переменных ξ и η, то вектор $x_0^{l_1+l_2-\alpha}$ запишется в следующем виде:

$$x_0^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha (\xi - \eta)^\alpha \xi^{l_1-\alpha} \eta^{l_2-\alpha}. \tag{10}$$

Для того чтобы получить векторы $x_1^{l_1+l_2-\alpha}$, $x_2^{l_1+l_2-\alpha}$ и т. д., нужно к вектору $x_0^{l_1+l_2-\alpha}$ последовательно применять оператор H_-. Для этого найдем правило, по которому оператор H_- действует на вектор $\xi^p\eta^t$ $(l_1 \geqslant p \geqslant -l_1,\ l_2 \geqslant t \geqslant -l_2)$,

$$H_-\xi^p\eta^t = (p+l_1)\,\xi^{p-1}\eta^t + (t+l_2)\,\xi^p\eta^{t-1}.$$

Если выражение $\xi^p\eta^t$ снова формально понимать как произведение степеней переменных ξ и η, то оператор H_- можно, очевидно, записать:

$$H_-\xi^p\eta^t = \xi^{-l_1}\eta^{-l_2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)(\xi^{l_1}\eta^{l_2}\xi^p\eta^t).$$

И вообще, если имеется выражение

$$P(\xi,\ \eta) = \sum A_{p,\,t}\xi^p\eta^t \qquad (l_1 \geqslant p \geqslant -l_1,\ l_2 \geqslant t \geqslant -l_2),$$

то

$$H_-P(\xi,\ \eta) = \xi^{-l_1}\eta^{-l_2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)[\xi^{l_1}\eta^{l_2}P(\xi,\ \eta)].$$

Далее, очевидно,

$$H_-^sP(\xi,\ \eta) = \xi^{-l_1}\eta^{-l_2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^s[\xi^{l_1}\eta^{l_2}P(\xi,\ \eta)].$$

Таким образом, для $x_s^{l_1+l_2-\alpha}$ имеем:

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha} = H_-^s x_0^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha H_-^s(\xi-\eta)^\alpha\,\xi^{l_1-\alpha}\eta^{l_2-\alpha},$$

или

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha\xi^{-l_1}\eta^{-l_2}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^s[(\xi-\eta)^\alpha\,\xi^{2l_1-\alpha}\eta^{2l_2-\alpha}].$$

Заметим, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)(\xi-\eta)^\alpha = 0.$$

Поэтому

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha\xi^{-l_1}\eta^{-l_2}(\xi-\eta)^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^s(\xi^{2l_1-\alpha}\eta^{2l_2-\alpha}) =$$

$$= a_0^\alpha\xi^{-l_1}\eta^{-l_2}(\xi-\eta)^\alpha\left(\sum_{p=0}^{p=s} C_s^p\,\frac{\partial^s\xi^{2l_1-\alpha}\eta^{2l_1-\alpha}}{(\partial\xi)^p(\partial\eta)^{s-p}}\right) =$$

$$= a_0^\alpha(\xi-\eta)^\alpha\Big[\sum C_s^p(2l_1-\alpha)\ldots(2l_1-\alpha-p+1)(2l_2-\alpha)\ldots$$
$$\ldots(2l_2-\alpha-s+p+1)\cdot\xi^{l_1-\alpha-p}\eta^{l_2-\alpha-s+p}\Big].$$

Заметим, что

$$(2l_1-\alpha)\ldots(2l_1-\alpha-p+1) = \frac{(2l_1-\alpha)!}{(2l_1-\alpha-p)!},$$

$$(2l_2-\alpha)\ldots(2l_2-\alpha-s+p+1) = \frac{(2l_2-\alpha)!}{(2l_2-\alpha+s-p)!}.$$

Условимся при этом считать $\frac{1}{k!}=0$ при $k<0$. Пишем, далее,

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha}=a_0^\alpha\left(\sum(-1)^k C_\alpha^k \xi^{\alpha-k}\eta^k\right)\left(\sum C_s^p \frac{(2l_1-\alpha)!\,(2l_2-\alpha)!}{(2l-\alpha-p)!\,(2l_2-\alpha+s-p)!}\times\right.$$
$$\left.\times\,\xi^{l_1-\alpha-p}\eta^{l_2-\alpha-s+p}\right)$$

или

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha}=a_0^\alpha\sum(-1)^k C_\alpha^k C_s^p \frac{(2l_1-\alpha)!\,(2l_2-\alpha)!}{(2l_1-\alpha-p)!\,(2l_2-\alpha+s-p)!}\,\xi^{l_1-p-k}\times$$
$$\times\,\eta^{l_2-\alpha-s+p+k}.$$

Положим $k+p=n$. Получим:

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha}=$$
$$=a_0^\alpha\sum(-1)^{n-p}\frac{\alpha!\,s!\,(2l_1-\alpha)!\,(2l_2-\alpha)!\,\xi^{l_1-n}\eta^{l_2-\alpha-s+n}}{(n-p)!\,(\alpha+p-n)!\,p!\,(s-p)!\,(2l_1-\alpha-p)!\,(2l_2-\alpha+s-p)!} \quad (11)$$

или

$$x_s^{l_1+l_2-\alpha}=\sum T_n^{s\alpha}\xi^{l_1-n}\eta^{l_2-\alpha-s+n}, \quad (12)$$

где

$$T_n^{s,\alpha}=$$
$$=a_0^\alpha\sum_p(-1)^{n-p}\frac{\alpha!\,s!\,(2l_1-\alpha)!\,(2l_2-\alpha)!}{(n-p)!\,(\alpha+p-n)!\,p!\,(s-p)!\,(2l_1-\alpha-p)!\,(2l_2-\alpha-s+p)!}.$$
$$(13)$$

Сумма берется по всем тем значениям p, для которых ни одна скобка в знаменателе не отрицательна.

IV. Перейдем теперь к прежним ортонормированным базисам

$$\{e_{m_1}\},\qquad \{f_{m_2}\},\qquad \{g_m^l\}.$$

Положим $l_1-n=m_1$, $l_2-\alpha+n-s=m_2$, $l_1+l_2-\alpha=l$ и $s=l-m$.

Перепишем формулу (12)

$$x_s^l=\sum T_{l_1-m_1}^{l-m,\,l_1+l_2-l}\xi^{m_1}\eta^{m_2}\delta_{m,\,m_1+m_2}.$$

Вместо x_s^l, ξ^{m_1} и η^{m_2} подставим их выражение из (7), (2) и (5):

$$\sigma_m^l g_l^m=\sum T_{l_1-m_1}^{l-m,\,l_1+l_2-l}\gamma_{m_1}^{l_1}\gamma_{m_2}^{l_2}e_{m_1}f_{m_2}\delta_{m,\,m_1+m_2}.$$

Отсюда получаем необходимые нам коэффициенты

$$B_{l_1m_1;\,l_2m_2}^{lm}=\frac{T_{l_1-m_1}^{l-m,\,l_1+l_2-l}\gamma_{m_1}^{l_1}\gamma_{m_2}^{l_2}}{\sigma_m}, \quad (14)$$

где $T_{l_1-m_1}^{l-m,\, l_1+l_2-l}$ определяется формулой (13). Полученное выражение мы должны преобразовать так, чтобы оно явно зависело от чисел l, l_1, l_2, m, m_1, m_2.

Выпишем предварительно коэффициент $T_{l_1-m_1}^{l-m,\, l_1+l_2-l}$. Согласно (13) имеем:

$$T_{l_1-m_1}^{l-m,\, l_1+l_2-l} = a_0^\alpha \sum^{p} \frac{(-1)^{l_1-m_1-p}(l_1+l_2-l)!\,(l-m)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l+l_2-l_1)!}{(l_1-m_1-p)!\,p!\,(l_2+m_1+p-l)!\,(l-m-p)!\,(l+l_1-l_2-p)!\,(l_2-l_1+m+p)!}$$

или, полагая $l_1-m_1-p=z$,

$$T_{l_1-m_1}^{l-m,\, l_1+l_2-l} = a_0^\alpha \sum \frac{(-1)^z (l_1+l_2-l)!\,(l-m)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l+l_2-l_1)!}{z!\,(l_1-m_1-z)!\,(l_2+l_1-l-z)!\,(l-l_1-m_2+z)!\,(l-l_2+m_1+z)!\,(l_2+m_2-z)!}. \tag{15}$$

Отсюда, подставляя в (14) значения $\gamma_{m_1}^{l_1}$, $\gamma_{m_2}^{l_2}$, σ_m^l и $T_{l_1-m_1}^{l-m,\, l_1+l_2-l}$ из (4), (8) и (15), получим:

$$B_{l_1m_1l_2m_2}^{lm} = a_0^\alpha\left(\sum \frac{(-1)}{z!\,(l_1-m_1-z)!\,(l_2+l_1-l-z)!\,(l-l_1-m_2+z)!\,(l-l_2+m_1+z)!\,(l_2+m_2-z)!}\right)\times$$
$$\times\sqrt{\frac{(l_1+m_1)!\,(l_1-m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l_2-m_2)!\,(l+m)!\,(l-m)!}{(2l_1)!\,(2l_2)!\,(2l)!}}\times$$
$$\times(l_1+l_2-l)!\,(l+l_2-l_1)!\,(l+l_1-l_2)!. \tag{16}$$

Остается определить константу a_0^α. Ее нужно выбрать так, чтобы базис $\{g_m^l\}$ был ортонормированным.

Вернемся к формуле (9) для $x_0^{l_1+l_2-\alpha}=g_l^l$

$$g_l^l = x_0^{l_1+l_2-\alpha} = a_0^\alpha \sum (-1)^k C_\alpha^k \xi^{l_1-k}\eta^{l_2-\alpha+k},$$

или

$$g_l^l = a_0^\alpha \sum (-1)^k C_\alpha^k \sqrt{\frac{k!\,(2l_1-k)!}{(2l_1)!}}\sqrt{\frac{(\alpha-k)!\,(2l_2-\alpha+k)!}{(2l_2)!}}\, e_{l_1-k} f_{l_2-\alpha+k}.$$

Пользуясь тем, что векторы $e_{l_1-k} f_{l_2-\alpha+k}$ ортонормированы и $\|g_l^l\|=1$, получаем:

$$a_0^\alpha = \left(\sum (C_\alpha^k)^2 \frac{k!\,(2l_1-k)!\,(\alpha-k)!\,(2l_2-\alpha+k)!}{(2l_1)!\,(2l_2)!}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

или

$$a_0^\alpha = \sqrt{\frac{(2l_1)!\,(2l_2)!}{(\alpha!)^2 \sum \frac{(2l_1-k)!\,(2l_2-\alpha+k)!}{k!\,(\alpha-k)!}}}.$$

Для вычисления суммы в знаменателе воспользуемся следующим тождеством:

$$\sum_{k=0}^{k=\alpha}\frac{(m+\alpha-k)!\,(n+k)!}{k!\,(\alpha-k)!}=\frac{m!n!\,(m+n+\alpha+1)!}{\alpha!\,(m+n+1)!}\ ^{*)}.$$

Положив $m=2l_1-\alpha$ и $n=2l_2-\alpha$, получаем:

$$\sum\frac{(2l_1-k)!\,(2l_2-\alpha+k)!}{k!\,(\alpha-k)!}=\frac{(2l_1-\alpha)!\,(2l_2-\alpha)!\,(2l_1+2l_2-\alpha+1)!}{\alpha!\,(2l_1+2l_2-2\alpha+1)!}.$$

Окончательно, пользуясь тем, что $\alpha=l_1+l_2-l$, получаем для a_0^α выражение

$$a_0^\alpha=\sqrt{\frac{(2l_1)!\,(2l_2)!\,(2l+1)!}{(l+l_1-l_2)!\,(l+l_2-l_1)!\,(l_1+l_2+l+1)!\,(l_1+l_2-l)!}}.$$

Подставив a_0^α в выражение для коэффициентов Клебша — Гордона, имеем окончательно:

$$B_{l_1m_1l_2m_2}^{lm}=\sqrt{\frac{(2l+1)}{(l_1+l_2+l+1)}(l_1+l_2-l)!\,(l+l_1-l_2)!\,(l+l_2-l_1)!}\times$$
$$\times\sqrt{(l_1+m_1)!\,(l_1-m_1)!\,(l_2+m_2)!\,(l_2-m_2)!\,(l+m)!\,(l-m)!}\times$$
$$\times\left(\sum_z\frac{(-1)^z}{z!\,(l_1-m_1-z)!\,(l_2+l_1-l-z)!\,(l-l_1-m_2+z)!\,(l-l_2+m_1+z)!\,(l_2+m_2-z)!}\right). \quad (17)$$

---

*) Это тождество может быть переписано в виде

$$\sum_{k=0}^{k=\alpha}P_{m+\alpha-k}P_{n+k}C_\alpha^k=A_{m+n+\alpha+1}^\alpha P_mP_n$$

(P_s — число перестановок из s элементов, A_l^k — число размещений из l элементов по k, C_α^k — число сочетаний из α элементов по k) и допускает простое комбинаторное доказательство.

Вообразим три набора элементов N, A, M, содержащих соответственно по n, α и m элементов. Набор A разобьем на две части, содержащие k и $\alpha-k$ элементов. Такое разбиение можно, очевидно, произвести C_α^k способами. Затем k элементов присоединим к набору N и получим кучку I из $n+k$ элементов, а из остальных и набора M образуем кучку II, содержащую $m+\alpha-k$ элементов.

Рассмотрим различные цепочки Γ элементов из кучки I (число таких цепочек равно P_{n+k}) и различные цепочки D из второй кучки (их число равно $P_{m+\alpha-k}$). Образуем теперь всевозможные цепочки вида $\Gamma\times D$ (к цепочке Γ дописана цепочка D). Общее число таких цепочек есть

$$\sum_{k=0}^{k=\alpha}P_{m+\alpha-k}P_{n+k}C_\alpha^k.$$

Подсчитаем это число несколько иначе. Возьмем ряд расположенных друг за другом $m+n+\alpha+1$ ячеек.

Произвольным образом расположим там элементы набора A. Это можно сделать $A_{m+n+\alpha+1}^\alpha$ способом. Затем отсчитаем n свободных ячеек от левого

2. Коэффициенты Клебша — Гордона для случая, когда одно из представлений имеет вес 1 или $^1/_2$ *). Выпишем значения коэффициентов Клебша — Гордона для случая, когда $l_2 = 1$ или $l_2 = {}^1/_2$. Этот случай был нами уже подробно рассмотрен в § 4.

I. Пусть $l_2 = 1$ (а $l_1 \geqslant 1$). Тогда l принимает значения $l = l_1 - 1$, l_1, $l_1 + 1$. При фиксированном m m_1 принимает не более трех значений: $m_1 = m - 1$, m, $m + 1$.

Напишем матрицу

$$C^m = \begin{pmatrix} B^{l_1-1,\, m}_{l_1,\, m-1;\, 11} & B^{l_1-1,\, m}_{l_1 m;\, 10} & B^{l_1-1,\, m}_{l_1 m+1;\, 1,-1} \\ B^{l_1 m}_{l_1,\, m-1;\, 11} & B^{l_1 m}_{l_1 m;\, 10} & B^{l_1 m}_{l_1 m+1;\, 1,-1} \\ B^{l_1+1,\, m}_{l_1,\, m-1;\, 11} & B^{l_1+1,\, m}_{l_1 m;\, 10} & B^{l_1+1,\, m}_{l_1,\, m+1;\, 1,-1} \end{pmatrix}.$$

Вычисления по формуле (17) дают ($l_1 = l$);

$$C^m = \left\| \begin{matrix} \sqrt{\dfrac{(l-m)(l-m+1)}{2l(2l+1)}} & -\sqrt{\dfrac{(l+m)(l-m)}{l(2l+1)}} & \sqrt{\dfrac{(l+m)(l+m+1)}{2l(2l+1)}} \\ -\sqrt{\dfrac{(l+m)(l-m+1)}{2l(l+1)}} & \sqrt{\dfrac{m}{l(l+1)}} & \sqrt{\dfrac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)}} \\ \sqrt{\dfrac{(l+m)(l+m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} & \sqrt{\dfrac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)}} & \sqrt{\dfrac{(l-m)(l-m+1)}{(2l+1)(2l+2)}} \end{matrix} \right\|. \quad (18)$$

II. Пусть теперь $l_2 = {}^1/_2$ ($l_1 \geqslant {}^1/_2$). В этом случае l и m_1 принимают значения:

$$l = l_1 - {}^1/_2 \text{ или } l = l_1 + {}^1/_2 \text{ и } m_1 = m + {}^1/_2 \text{ или } m_1 = m - {}^1/_2.$$

конца и расположим в них элементы набора N (это можно сделать P_n способами). От правого конца ряда отсчитаем m ячеек и поместим туда элементы набора M (P_m способами). Одна ячейка при этом останется свободной. Все, что расположено левее от нее, объявим цепочкой Γ, а правее — цепочкой D. Мы придем, таким образом, снова к цепочке вида $\Gamma \times D$. Их число будет, очевидно,

$$A^{\alpha}_{m+n+\alpha+1} P_m P_n.$$

Итак, мы доказали тождество

$$\sum_{k=0}^{k=\alpha} P_{m+\alpha-k} P_{n+k} C^k_{\alpha} = A^{\alpha}_{m+n+\alpha+1} P_m P_n,$$

или

$$\sum_{k=0}^{k=\alpha} \frac{(m+\alpha-k)!\,(n+k)!\,\alpha!}{k!\,(\alpha-k)!} = \frac{m!\,n!\,(m+n+\alpha+1)!}{(m+n+1)!}.$$

*) Напомним, что эти коэффициенты были уже нами вычислены в части I, гл. 2, § 4, п. 4. Мы приводим их здесь еще раз для полноты изложения, при этом коэффициенты $B^{l_1-k,\, m}_{l_1,\, m-i;\, 1i}$ ($k = -1, 0, 1$; $i = -1, 0$) соответствуют коэффициентам C^m_{pr} ($p = 1, 2, 3$; $r = 1, 2, 3$) в обозначениях упомянутого пункта.

Для матрицы

$$C^m = \begin{pmatrix} B^{l_1-1/2,\, m}_{l_1,\, m-1/2;\, 1/2,\, 1/2} & B^{l_1-1/2,\, m}_{l_1,\, m+1/2;\, 1/2,\, -1/2} \\ B^{l_1+1/2,\, m}_{l_1,\, m-1/2;\, 1/2,\, 1/2} & B^{l_1+1/2,\, m}_{l_1,\, m+1/2;\, 1/2,\, -1/2} \end{pmatrix}$$

получаем следующее выражение:

$$C^m = \begin{Vmatrix} -\sqrt{\dfrac{l-m+1/2}{2l+1}} & \sqrt{\dfrac{l+m+1/2}{2l+1}} \\ \sqrt{\dfrac{l+m+1/2}{2l+1}} & \sqrt{\dfrac{l-m+1/2}{2l+1}} \end{Vmatrix}. \qquad (19)$$

3. Симметрия коэффициентов Клебша — Гордона. Заметим, что коэффициенты Клебша — Гордона обладают двумя соотношениями симметрии относительно пар $(l,\ m)$, $(l_1,\ m_1)(l_2,\ m_2)$.

I. Совершенно очевидно, что

$$B^{lm}_{l_1 m_1;\, l_2 m_2} = B^{lm}_{l_2 m_2;\, l_1 m_1}.$$

II. Гораздо менее тривиальными являются соотношения

$$\left.\begin{aligned} B^{l_1 m_1}_{lm;\, l_2,\, -m_2} &= (-1)^{l-l_1-m_2} \sqrt{\frac{2l_1+1}{2l+1}}\, B^{lm}_{l_1 m_1;\, l_2 m_2}, \\ B^{l_2 m_2}_{l_1,\, -m_1;\, lm} &= (-1)^{l-l_2-m_1} \sqrt{\frac{2l_2+1}{2l+1}}\, B^{lm}_{l_1 m_1;\, l_2 m_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

получающиеся перестановкой нижних пар индексов с верхней парой. Эти соотношения могут быть получены непосредственно из формулы (17). Применим их к вычислению коэффициентов

$$\left\{B^{1s}_{l+k;\, m+s;\, l,\, -m}\right\} \qquad (k = -1,\ 0,\ 1;\quad s = -1,\ 0,\ 1).$$

Эти коэффициенты встречаются при выделении неприводимого представления с весом $l=1$ из произведения двух представлений с весами l и $l+k$ $(k=-1,\ 0,\ 1)$.

Имеем:

$$B^{1s}_{l+k,\, m+s;\, l,\, -m} = (-1)^{l+k-1-m} \sqrt{\frac{3}{2(l+k)+1}}\, B^{l+k,\, m+s}_{lm;\, 1s}.$$

Коэффициенты

$$\left\{B^{l+k,\, m+s}_{lm;\, 1s}\right\} \qquad (k = -1,\ 0,\ 1;\quad s = -1,\ 0,\ 1)$$

мы уже вычислили в предыдущем пункте.

Напишем матрицу

$$\begin{Vmatrix} B^{1,-1}_{l-1,\, m-1;\, l,\, -m} & B^{10}_{l-1,\, m;\, l,\, -m} & B^{11}_{l-1,\, m+1;\, l,\, -m} \\ B^{1,-1}_{l,\, m-1;\, l,\, -m} & B^{10}_{lm;\, l,\, -m} & B^{11}_{l,\, m+1;\, l,\, -m} \\ B^{1,-1}_{l+1,\, m-1;\, l,\, -m} & B^{10}_{l+1,\, m;\, l,\, -m} & B^{11}_{l+1,\, m+1;\, l,\, -m} \end{Vmatrix}. \qquad (21)$$

Вычисления с помощью соотношений (20) дают для этой матрицы выражение

$$(-1)^{l-m}\sqrt{3}\left\|\begin{matrix} \sqrt{\frac{(l+m-1)(l+m)}{2l(2l+1)(2l-1)}} & -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)}{(2l-1)(2l+1)l}} & \sqrt{\frac{(l-m)(l-m-1)}{(2l-1)(2l+1)2l}} \\ -\sqrt{\frac{(l+m)(l-m+1)}{(2l+1)2l(l+1)}} & -\frac{m}{\sqrt{(2l+1)l(l+1)}} & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m)}{2l(l+1)(2l+1)}} \\ \sqrt{\frac{(l-m)(l-m+2)}{(2l+1)(2l+2)(2l+3)}} & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)(2l+3)}} & \sqrt{\frac{(l+m+1)(l+m+2)}{(2l+1)(2l+2)(2l+3)}} \end{matrix}\right\|. \tag{22}$$

4. Переход от канонического базиса в $R_1 \times R_2$ к базису $\{e_i f_k\}$. В заключение приведем формулы, выражающие базис $\{e_{m_1} f_{m_2}\} = \{\xi_{l_1 m_1} \xi_{l_2 m_2}\}$ через базис $\{g_{lm}\}$.

Имеем:

$$\xi_{l_1 m_1} \xi_{l_2,\, m-m_1} = \sum A^{lm}_{l_1 m_1;\, l_2 m_2} g_{lm}.$$

Коэффициенты $A^{lm}_{l_1 m_1;\, l_2 m_2}$ можно выразить через коэффициенты Клебша—Гордона.

Пусть в произведении пространств $R_{l_1} \times R_l$ есть подпространство из собственных векторов оператора H_3 с собственным значением m. В этом подпространстве выберем два ортонормированных базиса

$$\{g_{l_1+l_2-k,\, m}\} = g_k \qquad (k = 0, \ldots, l_1 + l_2 - |m|)$$

и

$$\{\xi_{l_1,\, l_1-s} \xi_{l_2,\, m-l_1+s}\} = \eta_s \qquad (s = 0, 1, \ldots, l_1 + l_2 - |m|).$$

Напишем

$$g_{l_1+l_2-k,\, m} = \sum B^{l_1+l_2-k,\, m}_{l_1,\, l_1-s;\, l_2,\, m-l_1+s} \xi_{l_1,\, l_1-s} \xi_{l_2,\, m-l_1+s},$$

или

$$g_k = \sum c_{ks} \eta_s,$$

где обозначено

$$c_{ks} = B^{l_1+l_2-k,\, m}_{l_1,\, l_1-s;\, l_2,\, m-l_1+s}.$$

В силу ортогональности матрицы $\|c_{ks}\|$

$$\eta_s = \sum c_{sk} g_k,$$

или

$$\xi_{l_1,\, l_1-s} \xi_{l_2,\, m-l_1+s} = \sum B^{l_1+l_2-s,\, m}_{l_1,\, l_1-k;\, l_2,\, m-l_1+k} g_{l_1+l_2-k,\, m}.$$

Вернемся к прежним обозначениям

$$l_1 + l_2 - k = l, \qquad k = l_1 + l_2 - l,$$
$$l_1 - s = m_1, \qquad s = l_1 - m_1;$$

тогда

$$l_1 + l_2 - s = l_2 + m_1, \qquad l_1 - k = l - l_2.$$

Таким образом,

$$\xi_{l_1 m_1}\xi_{l_2, m-m_1} = \sum B^{l_2+m_1, m}_{l_1, l-l_2; l_2, m+l_2-l} g_{lm},$$

т. е.

$$A^{lm}_{l_1m_1; l_2m_2} = B^{l_2+m_1, m}_{l_1, l-l_2; l_2, m+l_2-l}.$$

5. Коэффициенты Рака. Рассмотрим произведение трех неприводимых представлений $T^{l_1}_g$, $T^{l_2}_g$, $T^{l_3}_g$, действующих соответственно в подпространствах R_{l_1}, R_{l_2}, R_{l_3}:

$$\tau_g = T^{l_1}_g \times T^{l_2}_g \times T^{l_3}_g,$$

τ_g действует в произведении пространств

$$R = R_{l_1} \times R_{l_2} \times R_{l_3}.$$

Произведение пространств R_{l_1}, R_{l_2}, R_{l_3} можно записать двумя способами:

$$R = [R_{l_1} \times R_{l_2}] \times R_{l_3}$$

и

$$R = R_{l_1} \times [R_{l_2} \times R_{l_3}].$$

Заметим, что с каждой из этих двух записей можно связать разложение пространства R на подпространства, неприводимые относительно представления τ_g. Действительно, воспользуемся первой записью и произведение пространств $R_{l_1} \times R_{l_2}$ разложим на неприводимые относительно представления $T^{l_1}_g \times T^{l_2}_g$ подпространства. Обозначим веса полученных таким образом неприводимых представлений через l_{12}, неприводимые подпространства через $R_{l_{12}}$, а сами неприводимые представления через $T^{l_{12}}_g$ (индексы 1 и 2 указывают на то, что эти представления возникли от произведения представлений $T^{l_1}_g$ и $T^{l_2}_g$). Каждое из полученных пространств $R_{l_{12}}$ мы умножим и полученное произведение разложим на подпространства R_l, неприводимые относительно произведения представления $T^{l_{12}}_g \times T^{l_3}_g$. Пространство R_l принадлежит, очевидно, всему пространству $R = R_{l_1} \times R_{l_2} \times R_{l_3}$ и неприводимо относительно представления τ_g. Канонический базис в пространстве R_l мы обозначим через $\{g^l_m(l_1, l_2, l_{12}, l_3)\}$ (числа в скобках указывают на порядок, в котором получено пространство R^l и его кинетический базис). Объединение канонических базисов во всех пространствах R_l образует, очевидно, базис во всем R.

Аналогично предыдущему мы можем построить разложение пространства R на неприводимые подпространства, пользуясь записью

$$R = R_{l_1} \times [R_{l_2} \times R_{l_3}],$$

Канонические базисы в полученных, таким образом, неприводимых подпространствах $R_{l'}$ мы обозначим через $\{g_m^{l'}(l_2, l_3, l_{23}, l_1)\}$. Объединение всех таких базисов образует базис во всем пространстве R.

Заметим, что оба построенные нами разложения пространства R на неприводимые подпространства, вообще говоря, различны. Действительно, пространство R может содержать инвариантные подпространства, в которых представление τ_g кратно неприводимому *), и тем самым может быть различными способами разложено на неприводимые подпространства. Соответственно этому и базисы

$$\{g_m^l(l_1, l_2, l_{12}, l_3)\} \text{ и } \{g_m^{l'}(l_2, l_3, l_{23}, l_1)\}$$

также различны. Таким образом, пользуясь двумя различными записями для произведения пространств R_{l_1}, R_{l_2} и R_{l_3}: $[R_{l_1} \times R_{l_2}] \times R_{l_3}$ и $R_{l_1} \times [R_{l_2} \times R_{l_3}]$, мы построим два различных разложения пространства R на неприводимые подпространства и два различных базиса в R:

$$\{g_m^l(l_1, l_2, l_{12}, l_3)\} \text{ и } \{g_m^{l'}(l_2, l_3, l_{23}, l_1)\}.$$

Нашей задачей является найти, как выражаются эти базисы друг через друга. Заметим, прежде всего, что два пространства R_l и $R_{l'}$ при различных l и l' принадлежат различным инвариантным подпространствам пространства R и, следовательно, ортогональны. Таким образом, векторы $g_m^l(l_1, l_2, l_{12}, l_3)$ выражаются только через векторы $g_m^l(l_2, l_3, l_{13}, l_1)$ с $l' = l$.

Напишем:

$$g_m^l = \sum K^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3,\ m}_{\quad l_2,\ l_3,\ l_{23},\ l_1,\ m'} g_{m'}^l. \tag{23}$$

Можно показать, что коэффициенты $K^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3,\ m}_{\quad l_2,\ l_3,\ l_{23},\ l_1,\ m'}$ от m и m' зависят следующим образом:

$$K^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3,\ m}_{\quad l_2,\ l_3,\ l_{23},\ l_1,\ m'} = K^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3}_{\quad l_2,\ l_3,\ l_{23},\ l_1,} \delta_{mm'} \text{ **)}$$

---

*) Например, произведение представлений $T_g^1 \times T_g^1 \times T_g^1$ содержит три неприводимых представления с весом 1 и два представления с весом 2.

**) Это обстоятельство является общим: если пространство R^l, в котором действует представление, кратное неприводимому с весом l, разложено двумя способами на неприводимые пространства $R_1, \ldots, R_k$ и $\widetilde{R}_1, \ldots, \widetilde{R}_k$ с каноническими базисами $\{e_{ms}\}$ и $\{\widetilde{e}_{ms}\}$ соответственно, то матрица переи формула (23) приобретает вид

$$g_m^l(l_1, l_2, l_{12}, l_3) = \sum K^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3}_{\quad l_2,\ l_3,\ l_{23},\ l_3} \; g_m^l(l_2, l_3, l_{23}, l_1).$$

Суммирование распространяется на все допустимые значения веса l_{23}.

Рассмотрим числа

$$W^{l,\ l_{12},\ l_{23}}_{l_1,\ l_2,\ l_3} = \frac{R^{l,\ l_1,\ l_2,\ l_{12},\ l_3}_{\quad l_2\ \ l_3,\ l_{23},\ l_1}}{\sqrt{(2l_{12}+1)(2l_{23}+1)}}.$$

Числа $W^{l,\ l_{12},\ l_{23}}_{l_1,\ l_2,\ l_3}$ называются *коэффициентами Рака.*

Коэффициенты Рака могут быть выражены через коэффициенты Клебша — Гордона. Мы опустим выкладки и приведем лишь окончательный результат:

$$W^{l,\ l_{12},\ l_{23}}_{l_1,\ l_2,\ l_3} = \frac{1}{(2l+1)\sqrt{(2l_{12}+1)(2l_{23}+1)}} \sum_{m_1+m_2+m_3+m=0} B^{l_{12}\,m_{12}}_{l_1m_1\,l_2m_2} \times$$
$$\times B^{l;\,-m}_{l_{12}m_{12}l_3m_3} \, B^{l_{23}\,m_{23}}_{l_2m_2\,l_3m_3} \, B^{l;\,-m}_{l_1m_1l_{23}m_{23}}. \quad (24)$$

Рака нашел непосредственные выражения для коэффициентов $W^{l,\ l_{12},\ l_{23}}_{l_1,\ l_2,\ l_3}$. Соответствующая формула, а также различные полезные соотношения между коэффициентами Рака содержатся, например, в книге Г. Я. Любарского «Теория групп и ее применение в физике».

хода от базиса $\{e_{ms}\}$ к базису $\{\tilde{e}_{ms}\}$

$$\tilde{e}_{ms} = \sum_{m',\ s'} a_{msm's'} e_{m's'}$$

имеет вид

$$a_{msm's'} = a_{ss'}\delta_{mm'}.$$

Доказательство этого утверждения содержится, по существу, во второй части книги, в § 2, п. 9.

ЧАСТЬ II

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

ГЛАВА 1

ГРУППА ЛОРЕНЦА И ЕЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

§ 1. Группа Лоренца

Для теоретической физики, помимо представлений группы трехмерных вращений, не менее важными являются представления группы Лоренца.

1. Определение группы Лоренца. Рассмотрим квадратичную форму

$$S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2, \tag{1}$$

определенную на векторах $x = (x_1 x_2 x_3 x_0)$ четырехмерного пространства $R^{(4)}$. Линейное преобразование $x' = gx$, не меняющее эту квадратичную форму, т. е. такое, что $S^2(x') = S^2(x)$, называется *общим преобразованием Лоренца.*

Обозначим через I матрицу квадратичной формы $S^2(x)$

$$I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

При всяком линейном преобразовании с матрицей g матрица квадратичной формы I переходит в $g^* I g$, где g^* — матрица, транспонированная к матрице g. Следовательно, для общего преобразования Лоренца имеет место равенство

$$g^* I g = I. \tag{2}$$

Отсюда видно, что $\det g = \pm 1$, и, значит, преобразование g имеет обратное g^{-1}. Очевидно, что g^{-1} также есть общее преобразование Лоренца. Произведение двух общих преобразований Лоренца есть, очевидно, снова общее преобразование Лоренца. Таким образом, совокупность общих преобразований Лоренца образует группу — *общую группу Лоренца.*

Уравнение $S^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2 = 0$ определяет в $R^{(4)}$ конус (назовем его световым конусом), осью которого служит ось x_0

(временная ось)*). Световой конус делит все пространство $R^{(4)}$ на три области: внешнюю область, где $S^2(x) > 0$, и две внутренние полы: $S^2(x) < 0$ и $x_0 > 0$ и $S^2(x) < 0$ и $x_0 < 0$. Всякое общее преобразование Лоренца переводит световой конус и его внутреннюю область (т. е. область, где $S^2(x) < 0$) в себя. Те общие преобразования Лоренца, которые еще при этом каждую полу светового конуса оставляют на месте, мы назовем просто *преобразованиями Лоренца.* Очевидно, что преобразования Лоренца не меняют положительного направления временной оси. Преобразования Лоренца также образуют группу, называемую *полной группой Лоренца.*

Преобразования Лоренца с определителем, равным 1, назовем *собственными преобразованиями Лоренца.* Они также образуют группу — *собственную группу Лоренца.*

Отметим, что полная группа Лоренца получается из собственной группы добавлением специального преобразования — пространственного отражения s с матрицей

$$s = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1, \end{Vmatrix},$$

а также всевозможных преобразований вида sg, где g — элемент собственной группы Лоренца.

Аналогично этому общая группа Лоренца получается из полной группы Лоренца присоединением так называемого «временного отражения», т. е. преобразования t с матрицей

$$t = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

и всевозможных преобразований вида tg, где g — элемент полной группы Лоренца.

Пусть $g = \|g_{ik}\|$ — матрица вращения трехмерного пространства. Рассмотрим следующее преобразование в $R^{(4)}$:

$$\begin{aligned} x_1' &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + g_{13}x_3, \\ x_2' &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + g_{23}x_3, \\ x_3' &= g_{31}x_1 + g_{32}x_2 + g_{33}x_3, \\ x_0' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Очевидно, что это — собственное преобразование Лоренца. Если, таким образом, с каждым трехмерным вращением отождествить указанное выше собственное преобразование Лоренца, то окажется, что

*) Эта терминология происходит от физической интерпретации четырехмерного пространства $R^{(4)}$, величины $S^2(x)$ и группы Лоренца.

трехмерные вращения образуют подгруппу собственной группы Лоренца.

Сделаем в конце одно замечание относительно пространственного и временного отражения. Отнесем каждому собственному преобразованию Лоренца g другое преобразование Лоренца по формуле

$$\tilde{g}=sgs^{-1}\ (s\text{ — пространственное отражение}). \tag{4}$$

Очевидно, что $\tilde{g}$ — снова собственное преобразование Лоренца. Соответствие $\tilde{g}\sim g$, как легко видеть, таково, что

1) $e\sim e$ (e — единичное преобразование),

2) если $\tilde{g}_1\sim g_1$, а $\tilde{g}_2\sim g_2$, то $\tilde{g}_1\tilde{g}_2\sim g_1g_2$. Всякое соответствие $\tilde{g}\sim g$ между элементами одной и той же группы, удовлетворяющее двум этим условиям, называется *автоморфизмом группы.*

Таким образом, пространственное отражение с помощью формулы (4) порождает автоморфизм собственной группы Лоренца.

Временное отражение t также, очевидно, порождает автомор физм

$$\tilde{g}=tgt^{-1}. \tag{4'}$$

Этот автоморфизм совпадает с предыдущим, так как легко видеть, что

$$tgt^{-1}=sgs^{-1}.$$

Заметим, что матрица преобразования t совпадает с матрицей I квадратичной формы $S^2(x)$. Из равенства (2) следует поэтому, что

$$g^{*-1}=IgI^{-1}=tgt^{-1}.$$

Таким образом, матрица $\tilde{g}$ преобразования $sgs^{-1}=tgt^{-1}$ равна

$$\tilde{g}=g^{*-1}.$$

(Здесь и всюду в дальнейшем g^* обозначает матрицу, транспонированную к матрице g.)

Пусть g — произвольный элемент некоторой группы и g_0 — фиксированный элемент этой же группы. Очевидно, что соответствие $g'\sim g_0gg_0^{-1}$ является автоморфизмом группы. Автоморфизм, представляющийся в таком виде, называется *внутренним.* Всякий другой автоморфизм называется *внешним.*

Автоморфизм (4) собственной группы Лоренца

$$\tilde{g}=sgs^{-1}=g^{*-1},$$

порожденный пространственным отражением s, нельзя представить в виде

$$\tilde{g}=g_0gg_0^{-1},$$

где g_0 — элемент собственной группы.

Это простое обстоятельство легко может быть проверено читателем. Таким образом, автоморфизм

$$\ddot{g}=sgs^{-1}$$

является *внешним автоморфизмом* собственной группы (для полной и общей группы этот автоморфизм является, разумеется, внутренним).

Можно показать, что всякий внешний автоморфизм собственной группы Лоренца представляется в виде

$$\tilde{g} = g_0 s g s^{-1} g_0^{-1},$$

где g_0 — собственное преобразование Лоренца. Это означает, что автоморфизм $g = s g_0 s^{-1}$ является в некотором смысле единственным внешним автоморфизмом собственной группы Лоренца.

Как мы увидим ниже, автоморфизм (4) играет важную роль при изучении представлений полной и общей группы Лоренца.

2. Ортогональные системы координат. При переходе от системы координат $(x_0 x_1 x_2 x_3)$ к координатам $(x'_0 x'_1 x'_2 x'_3)$ с помощью линейного преобразования g матрица I квадратичной формы

$$s^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$$

преобразуется, как известно, так:

$$I' = g^* I g.$$

При этом матрица I' квадратичной формы $s^2(x)$ в системе координат $(x'_0 x'_1 x'_2 x'_3)$ совпадает с матрицей I тогда и только тогда, когда g является общим преобразованием Лоренца. Системы координат $(x'_0 x'_1 x'_2 x'_3)$, в которых квадратичная форма $S^2(x)$ записывается с помощью матрицы I, называются *ортогональными системами координат* в четырехмерном пространстве $R^{(4)}$.

Очевидно, что линейное преобразование g, задающее переход от одной ортогональной системы координат к другой, является общим преобразованием Лоренца. Обратно, всякое общее преобразование Лоренца преобразует ортогональную систему координат в ортогональную.

В дальнейшем мы будем пользоваться лишь ортогональными системами координат в $R^{(4)}$, нигде этого особо не оговаривая.

3. Поверхности в четырехмерном пространстве, транзитивные относительно группы Лоренца. Компоненты связности группы Лоренца. Известно, что всякое вращение в трехмерном пространстве любую сферу с центром в начале координат переводит в себя, и каждые две точки на такой сфере могут быть переведены одна в другую некоторым вращением. В связи с этим говорят, что сферы (с центром в начале координат) являются поверхностями, транзитивными относительно группы вращений.

Вообще, если в некотором пространстве R действует группа преобразований G, то поверхность в этом пространстве R называется *поверхностью транзитивности* для группы G, если всякое преобразование из G переводит эту поверхность в себя, и любые две ее точки могут быть переведены друг в друга каким-нибудь преобразованием из G.

Посмотрим, какие поверхности в четырехмерном пространстве служат поверхностями транзитивности для группы Лоренца.

Поскольку форма

$$s^2(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_0^2$$

при преобразованиях Лоренца не меняется, то поверхности *)

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = \mathrm{const} \tag{5}$$

переходят при преобразованиях Лоренца в себя.

Поверхности (5) бывают следующих типов:

I. $s^2(x) = c < 0$, $x_0 > 0$ — верхняя пола двуполостного гиперболоида.

II. $s^2(x) = c < 0$, $x_0 < 0$ — нижняя пола этого гиперболоида.

III. $s^2(x) = 0$, $x_0 > 0$ — верхняя пола светового конуса.

IV. $s^2(x) = 0$, $x_0 < 0$ — нижняя пола светового конуса.

V. $s^2(x) = c > 0$ — однополостный гиперболоид.

VI. Начало координат $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

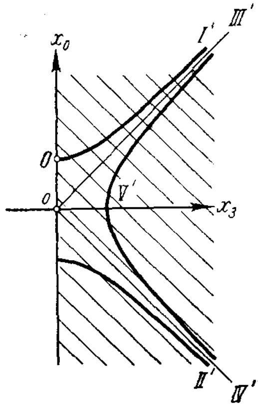

Рис. 8.

Покажем теперь, что каждая из этих поверхностей является поверхностью, транзитивной относительно собственной группы Лоренца.

Заметим сначала, что любую точку $A\ (x_0 x_1 x_2 x_3)$ в четырехмерном пространстве можно вращением (т. е. собственным преобразованием Лоренца, не меняющим четвертую координату x_0), перевести в правую часть плоскости $(x_0 x_3)$, $x_3 > 0$ (см. рис. 8, на котором правая часть плоскости $(x_0 x_3)$ заштрихована). Для этого, очевидно, достаточно луч, проходящий в трехмерном пространстве ($x_0 = 0$) через точку (x_1, x_2, x_3), повернуть так, чтобы он совпал с положительным направлением оси x_3.

Рассмотрим теперь пересечения всех перечисленных поверхностей (I—VI) с правой полуплоскостью $(x_0 x_3)$, $x_3 > 0$. Получим, очевидно, шесть кривых (см. рис. 8):

I'. Верхняя ветвь гиперболы: $x_0^2 - x_3^2 = c > 0$, $x_0 > 0$.

II'. Нижняя ее ветвь: $x_0^2 - x_3^2 = c > 0$, $x_0 < 0$.

III'. Верхняя асимптота: $x_0 = x_3$, $x_0 > 0$.

IV'. Нижняя асимптота: $x_0 = -x_3$, $x_0 < 0$.

*) Точнее говоря, это — трехмерные гиперповерхности. Однако мы будем называть их, ради простоты, поверхностями.

V′. Правая ветвь гиперболы: $x_0^2 - x_3^2 = c < 0$, $x_3 > 0$.

VI′. Начало координат: $x_0 = x_3 = 0$.

Всякое собственное преобразование Лоренца, действующее лишь в плоскости (x_0, x_3) (т. е. не меняющее координат x_1, x_2), каждую из кривых (I′—VI′) оставляет на месте, причем любые две точки на одной и той же кривой могут быть переведены друг в друга некоторым таким преобразованием; иначе говоря, кривые (I′—VI′) являются кривыми, транзитивными относительно собственных преобразований Лоренца, действующих в плоскости $(x_0 x_3)$. Эти преобразования называются гиперболическими поворотами в плоскости $(x_0 x_3)$. В дальнейшем мы будем иногда обозначать их через g_{03}. Заметим, что не только плоскость $(x_0 x_3)$, но и всякая вообще плоскость S, проходящая через ось x_0, пересекается с поверхностями (I—VI) по кривым тех же типов (I′—VI′). При этом гиперболические повороты в плоскости S (т. е. собственные преобразования Лоренца, оставляющие эту плоскость на месте) действуют на таких кривых транзитивно.

Пусть теперь A_1 и A_2 — две точки в четырехмерном пространстве, лежащие на одной и той же поверхности (I—VI).

Повернем каждую из них так, чтобы они попали в точки B_1 и B_2 правой полуплоскости $(x_0 x_3)$: $B_1 = u_1 A_1$, $B_2 = u_2 A_2$ (u_1 и u_2 — вращения). При вращениях каждая из поверхностей (I—VI) переходит в себя. Отсюда следует, что точки B_1 и B_2 лежат на одной и той же кривой (I′—VI′) и, значит, могут быть собственным преобразованием g_{03} в плоскости $(x_0 x_3)$ переведены друг в друга:

$$B_2 = g_{03} B_1.$$

Очевидно, что преобразование $g = u_2^{-1} g_{03} u_1$ переводит A_1 в A_2. Таким образом, действительно, поверхности I—VI являются поверхностями транзитивности собственной группы Лоренца.

Очевидно, что пространственное отражение s каждую из поверхностей (I—VI) переводит в себя. Это означает, что у полной группы Лоренца поверхности транзитивности те же, что и у собственной.

Временное отражение переводит друг в друга обе полы двуполого гиперболоида и обе полы светового конуса. Поэтому у общей группы Лоренца поверхности транзитивности лишь четырех типов:

I. Двуполостный гиперболоид: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c > 0$.

II. Световой конус: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$.

III. Однополостный гиперболоид: $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = c < 0$.

IV. Начало координат: $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Сделаем теперь несколько замечаний, важных для дальнейшего. Как мы показали, всякую точку A верхней полы гиперболоида

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1, \quad x_0 > 0, \tag{6}$$

можно перевести собственными преобразованиями Лоренца в любую другую точку этой полы, в частности в ее вершину O (1, 0, 0, 0). Самое простое из таких преобразований — это гиперболический поворот g_{OA} в плоскости (x_0, A), проходящей через точку A и ось x_0. Но это не единственное собственное преобразование Лоренца, переводящее точку A в точку O. Очевидно, что любые два таких преобразования g_1 и g_2 отличаются друг от друга преобразованием u, оставляющим точку O на месте: $uO = O$. Всякое же преобразование u, оставляющее точку O (а вместе с ней и ось x_0) на месте, является, очевидно, вращением.

Таким образом, любое собственное преобразование Лоренца g, переводящее точку A в точку O, имеет вид

$$g = ug_{OA}$$

(u — вращение, g_{OA} — гиперболический поворот в плоскости (x_0, A)).

Отсюда мы видим, что для того, *чтобы задать собственное преобразование Лоренца, надо указать точку A на верхней поле гиперболоида* (6), *переводимую этим преобразованием в вершину гиперболоида O, затем с помощью гиперболического поворота в плоскости (A, x_0) перевести точку A в точку O и, наконец, совершить вращение u.*

Другими словами, каждое собственное преобразование Лоренца определяется парой $g \sim (u, A)$ (u — вращение, A — точка гиперболоида (6)), причем, как нетрудно проверить, разные преобразования определяются разными парами.

Из этого замечания непосредственно следует, что

1) каждый элемент собственной группы Лоренца задается шестью независимыми параметрами (т. е., другими словами, собственная группа Лоренца — шестипараметрическая группа). Действительно, точка A на гиперболоиде задается тремя независимыми параметрами (например, своими координатами x_1, x_2, x_3) и вращение u — еще тремя параметрами (например, углами Эйлера);

2) собственная группа Лоренца связна, т. е. любые два ее элемента g_1 и g_2 могут быть непрерывно соединены друг с другом. Действительно, пусть $g_1 \sim (u_1, A_1)$ и $g_2 \sim (u_2, A_2)$. Если теперь непрерывно соединить вращения u_1 и u_2 (это всегда возможно, поскольку группа вращений, как мы видели в первой части книги, связна) и точку A_1 с A_2 (верхняя пола гиперболоида также связна), то тем самым g_1 будет непрерывно соединено с g_2.

В связи с последним замечанием определим число связных компонент полной и общей групп Лоренца *).

---

*) Связной компонентой непрерывной группы называется ее часть, обладающая тем свойством, что она сама связна, но всякое ее расширение уже не является связным.

Собственная группа является связной компонентой общей группы Лоренца.

Действительно, всякое преобразование Лоренца g, не входящее в собственную группу, либо меняет положительное направление временной оси x_0, либо $\det g = -1$ и, следовательно, оно не может быть непрерывно соединено ни с каким собственным преобразованием Лоренца. Таким образом, мы видим, что собственная группа связна, а любое ее расширение уже не связно, т. е. собственная группа Лоренца образует *связную компоненту общей группы.*

Очевидно, что все преобразования вида sg (s — пространственное отражение, g — собственное преобразование) также образуют связную компоненту. Это означает, что полная группа Лоренца состоит из двух компонент.

Временное отражение t порождает еще две компоненты: компоненту, состоящую из элементов вида tg, и компоненту, состоящую из элементов вида $tsg = jg$ (j — полное отражение в $R^{(4)}$).

Таким образом, общая группа состоит из четырех связных компонент:

1) Собственная группа, обозначим ее через G_0.

2) Компонента sG_0, состоящая из элементов вида sg (g — собственное преобразование).

Эти две компоненты образуют полную группу.

3) Компонента tG_0 (из элементов tg).

4) Компонента tsG_0 (в нее входят элементы stg).

4. Связь группы Лоренца с группой комплексных матриц второго порядка с определителем, равным единице. При изучении представлений группы трехмерных вращений большую роль играло то обстоятельство, что каждому вращению можно взаимно однозначно сопоставить дробно-линейное преобразование комплексной плоскости

$$z \to \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

с унитарной матрицей $a = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$, причем $\det a = 1$. Тем самым каждому вращению g была отнесена определенная с точностью до знака унитарная матрица второго порядка $\pm a = \pm \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$ с определителем, равным 1. Наоборот, каждой унитарной матрице a с определителем, равным 1, соответствовало некоторое вполне определенное вращение g_a, $a \to g_a$, причем

1) произведению двух матриц $a_1 a_2$ сопоставлялось произведение соответствующих вращений $g_{a_1} g_{a_2}$: $g_{a_1} g_{a_2} = g_{a_1 a_2}$;

2) единичной матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ соответствовало единичное вращение e;

3) двум различным матрицам a_1 и a_2 соответствовало одно и то же вращение g в том и только том случае, когда эти матрицы отличались знаком $a_1 = -a_2$.

Это соответствие между группой U унитарных матриц второго порядка с определителем, равным 1, и группой вращений позволяло представление группы вращений $g \to T_g$ рассматривать как представление группы U $a \to Tg_a = T_a$; и, наоборот, представление группы U $a \to T_a$ рассматривать как, вообще говоря, двузначное представление группы вращений. Представления группы U мы называли спинорными представлениями группы вращений.

Между собственными преобразованиями Лоренца и комплексными матрицами второго порядка имеется, оказывается, аналогичное соответствие. Установим его. Попутно мы еще раз, и более простым путем, получим соответствие между вращениями и унитарными матрицами.

Рассмотрим совокупность эрмитовых матриц второго порядка

$$c = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Каждой такой матрице c отнесем вектор x из $R^{(4)}$ координатами x_0, x_1, x_2, x_3:

$$c \longleftrightarrow x. \tag{7'}$$

Заметим, что

$$\det c = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -S^2(x).$$

Соответствие между матрицами c и векторами x взаимно однозначно и линейно. Поэтому всякое линейное преобразование в пространстве матриц c можно рассматривать как линейное преобразование в $R^{(4)}$.

Зададим в пространстве матриц c линейное преобразование с помощью формулы

$$c' = aca^*, \tag{8}$$

где a — матрица второго порядка с определителем, равным 1 (звездочка означает эрмитовское сопряжение). Очевидно, что $(c')^* = ac^*a^* = aca^* = c'$, т. е. c' — эрмитова матрица.

Порожденное с помощью соответствия (7') линейное преобразование в R_4 обозначим g_a.

Так как $\det c' = \det c$ $(\det a = \det a^* = 1)$, то $s^2(x') = s^2(x)$, т. е. преобразование g_a является общим преобразованием Лоренца.

Соответствие $a \sim g_a$, очевидно, таково, что $g_{a_1}g_{a_2} = g_{a_1a_2}$, т. е. произведению матриц a_1a_2 соответствует произведение отнесенных им преобразований Лоренца $g_{a_1}g_{a_2}$. Найдем, каким матрицам a соответствует тождественное преобразование.

Очевидно, что для таких матриц выполняется равенство

$$c = aca^* \tag{9}$$

при любых c.

Если положить $c = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = E$, то получим:

$$aa^* = E$$

или

$$a^* = a^{-1}.$$

Перепишем теперь равенство (9) в виде

$$c = aca^{-1}.$$

Отсюда видно, что

$$ac = ca,$$

т. е. матрица a перестановочна со всеми эрмитовыми матрицами. Такая матрица кратна единичной:

$$a = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\det a = 1$, то $\lambda = \pm 1$.

Таким образом, тождественное преобразование Лоренца соответствует двум матрицам $a = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, отличающимся лишь знаком.

Покажем, что двум матрицам a_1 и a_2 соответствует одно и то же преобразование Лоренца тогда и только тогда, когда $a_1 = \pm a_2$. Действительно, пусть $g_{a_1} = g_{a_2}$. Это означает, что для всех c

$$a_1 c a_1^* = a_2 c a_2^*$$

или

$$a_2^{-1} a_1 c \left(a_2^{-1} a_1\right)^* = c.$$

Таким образом, матрице $a_2^{-1} a_1$ соответствует тождественное преобразование.

Отсюда

$$a_2^{-1} a_1 = \pm E$$

или

$$a_2 = \pm a_1.$$

Итак, мы каждой комплексной матрице второго порядка a с определителем, равным 1, отнесли преобразование Лоренца g_a, причем соответствие $a \longleftrightarrow g_a$ обладает следующими свойствами:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim e$,

2) $g_{a_1} g_{a_2} = g_{a_1 a_2}$,

3) двум различным матрицам a_1 и a_2 соответствует одно и то же преобразование $g_{a_1} = g_{a_2}$, в том и только том случае, когда эти матрицы отличаются знаком: $a_1 = -a_2$.

Из первых двух свойств следует, что совокупность преобразований g_a образует *подгруппу* общей группы Лоренца. Обозначим ее через G_a. Покажем сейчас, что эта подгруппа совпадает с собственной группой Лоренца.

Заметим, что группа $\mathfrak{A}$ комплексных матриц второго порядка с определителем, равным 1, связна *). В таком случае связна и подгруппа преобразований G_a. Следовательно, эта подгруппа содержится в связной компоненте общей группы Лоренца, содержащей тождественное преобразование e. Как мы видели в предыдущем пункте, такой компонентой является собственная группа Лоренца.

Итак, подгруппа G_a преобразований g_a содержится в собственной группе Лоренца. Покажем, что она с ней совпадает. Подсчитаем для этого число независимых параметров, которыми определяется элемент группы $\mathfrak{A}$ (размерность группы $\mathfrak{A}$). Каждая комплексная матрица задается восемью действительными числами. Так как требование, чтобы $\det a = 1$, накладывает два условия на эти числа: $\operatorname{Re}\det a = 1$; $\operatorname{Im}\det a = 0$, то из них остаются шесть независимых.

Таким образом, элемент группы $\mathfrak{A}$, а следовательно, и подгруппы G_a, задается шестью независимыми параметрами. Элемент собственной группы, как мы видели, зависит также от шести независимых параметров. Отсюда следует, что подгруппа преобразований G_a и собственная группа имеют одинаковую размерность, а так как при этом первая группа содержится внутри второй, то они совпадают **).

---

*) Докажем связность группы $\mathfrak{A}$. Рассмотрим восьмимерное вещественное пространство $R^{(8)}$ всех комплексных матриц второго порядка. Уравнение $\det a = 0$ выделяет в этом пространстве шестимерную поверхность ($\det a = 0$ означает два условия $\operatorname{Re}\det a = \operatorname{Im}\det a = 0$). Так как размерность поверхности на две единицы меньше размерности пространства, то она не разделяет пространства $R^{(8)}$. Таким образом, любые две матрицы a_1 и a_2 с определителем, отличным от нуля, могут быть непрерывно соединены друг с другом кривой $a(t)$, не пересекающей поверхности $\det a = 0$: $a(0) = a_1$, $a(1) = a_2$ и $\det a(t) \neq 0$.

Пусть теперь a_1 и a_2 принадлежат группе $\mathfrak{A}$, т. е. $\det a_1 = \det a_2 = 1$; деформируем нашу кривую $a(t)$ так:

$$a'(t) = \frac{1}{\det a(t)}\, a(t).$$

Очевидно, что кривая $a'(t)$ непрерывна, соединяет a_1 и a_2 и принадлежит целиком группе $\mathfrak{A}$. Таким образом, любые две матрицы a_1 и a_2 из группы $\mathfrak{A}$ могут быть непрерывно соединены друг с другом кривой, также принадлежащей группе $\mathfrak{A}$, т. е., другими словами, группа $\mathfrak{A}$ связна.

**) Действительно, поскольку тождественное преобразование e (единица группы Лоренца) принадлежит подгруппе G_a, то вместе с ней, в силу совпадения размерности, G_a принадлежит и целая окрестность e. Нетрудно показать, что по всякой окрестности единицы группы ее связная компонента, содержащая единицу, восстанавливается однозначно (см., например, Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, Гостехиздат, 1954, гл. III, стр. 138). Из этого следует, что G_a совпадает со всей собственной группой Лоренца.

Подведем итог всему сказанному.

Мы построили соответствие $a \sim g_a$ *между собственной группой Лоренца и группой* $\mathfrak{A}$ *комплексных матриц второго порядка* a $(\det a = 1)$ *так, что каждой матрице* a *соответствует одно собственное преобразование Лоренца* g_a *и каждому такому преобразованию* g *отнесены две отличающиеся лишь знаком матрицы,* $+a$ *и* $-a$. *Построенное соответствие таково, что единичной матрице отнесено тождественное преобразование Лоренца, а произведению матриц* a_1 *и* a_2 *соответствует произведение преобразований Лоренца:* $a_1 a_2 \sim g_{a_1} g_{a_2}$.

Сделаем два важных замечания.

I. Пространственное отражение s не принадлежит собственной группе Лоренца и ему, следовательно, не соответствует никакая матрица a. Однако с отражением s мы можем связать некоторое преобразование (автоморфизм) самих комплексных матриц второго порядка. Действительно, выше мы видели, что с помощью отражения s можно построить автоморфизм собственной группы Лоренца

$$sgs^{-1} = (g^*)^{-1}.$$

Этот автоморфизм собственной группы естественным образом переносится и в группу комплексных матриц a с определителем, равным единице, а именно, *если собственному преобразованию Лоренца* $g_{\pm a}$ *соответствуют матрицы второго порядка* $\pm a$, *то собственному преобразованию* $sg_{\pm a}s^{-1}$ *соответствуют матрицы* $\pm (a^*)^{-1}$.

Другими словами,

$$sg_a s^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

или, иначе,

$$(g_a^*)^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}.$$

Действительно, как мы только что видели, собственные преобразования Лоренца можно рассматривать как преобразования в пространстве эрмитовых матриц второго порядка, задаваемые формулой

$$c' = aca^*, \tag{10}$$

где a — комплексная матрица второго порядка и $\det a = 1$. Найдем, как преобразуются матрицы c при пространственном отражении

$$x_0 \to x_0, \quad x_1 \to -x_1, \quad x_2 \to -x_2, \quad x_3 \to -x_3.$$

Очевидно, что при отражении s матрица c переходит в матрицу c' так:

$$c = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} x_0 + x_3 & -x_2 + ix_1 \\ -x_2 - ix_1 & x_0 - x_3 \end{Vmatrix} = c'.$$

Легко проверить, что c' можно записать в виде

$$c' = \tau\bar{c}\tau^{-1}, \tag{11}$$

где $\tau = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, а черта означает комплексное сопряжение. Таким образом, пространственное отражение порождает в пространстве эрмитовых матриц преобразование (11).

Пусть собственному преобразованию g_a соответствуют матрицы $\pm a$. Найдем, какие матрицы соответствуют преобразованию $g^{*-1} = sg_a s^{-1}$.

Для этого, пользуясь формулой (11), преобразуем последовательно матрицу c с помощью s^{-1}, g_a и s. Получим:

$$c' = \tau\,\overline{\left[a\left(\tau^{-1}\bar{c}\tau\right)a^*\right]}\,\tau^{-1}$$

или

$$c' = \tau\bar{a}\tau^{-1}c\tau\bar{a}^*\tau^{-1}.$$

Отсюда мы видим, что преобразованию sgs^{-1} соответствует матрица $\tau\bar{a}\tau^{-1}$, т. е.

$$sg_a s^{-1} = g_{\tau\bar{a}\tau^{-1}}.$$

Легко проверить, что если $\det a = 1$, то

$$\tau\bar{a}\tau^{-1} = (a^*)^{-1}. \tag{11'}$$

Таким образом, мы получаем:

$$sg_a s^{-1} = g_{(a^*)^{-1}}$$

или, иначе,

$$g_a^{*-1} = g_{(a^*)^{-1}}.$$

II. Вращения $\tilde{g}$ в трехмерном пространстве $x_0 = 0$ образуют, как мы знаем, подгруппу собственной группы Лоренца. Отсюда следует, что те комплексные матрицы a, которые при нашем соответствии $g_a \sim a$ отвечают вращениям $\tilde{g}$, также образуют подгруппу в группе всех комплексных матриц второго порядка с определителем, равным 1. Сейчас мы покажем, что эта подгруппа совпадает с группой всех унитарных матриц второго порядка с определителем, равным 1. Иными словами, *в построенном нами соответствии $g_a \sim a$ между комплексными матрицами второго порядка с определителем, равным 1, и собственными преобразованиями Лоренца, унитарным матрицам a соответствуют вращения $\tilde{g}_a$ в трехмерном пространстве $x_0 = 0$, и наоборот, каждому вращению $\tilde{g}$ отвечают две, отличающиеся знаком, унитарные матрицы $\pm a$ с определителем, равным единице.*

Действительно, пусть комплексная матрица a является унитарной, т. е. $a^{*-1} = a$. Тогда преобразование (10) в пространстве эрмитовых матриц c можно записать в виде

$$c = aca^{-1}. \tag{12}$$

Но при всевозможных преобразованиях вида (12) у матриц c сохраняется след (сумма диагональных элементов), т. е.

$$(x'_0 + x'_3) + (x'_0 - x'_3) = (x_0 + x_3) + (x_0 - x_3),$$

откуда

$$x'_0 = x_0.$$

Следовательно, соответствующие преобразования Лоренца не меняют четвертой координаты x_0 и являются вращениями в пространстве $x_0 = 0$. Итак, мы показали, что *унитарным матрицам соответствуют вращения в трехмерном пространстве* $x_0 = 0$.

Покажем, что и, наоборот, всякому вращению $\tilde{g}$ соответствуют две унитарные матрицы второго порядка $\pm a$ с определителем, равным 1.

Рассмотрим для этого те вращения $\tilde{g}_a$, которым отнесены унитарные матрицы a. Очевидно, что все такие вращения g_a образуют подгруппу $\tilde{G}_a$ группы вращений. Размерность (число независимых параметров) этой подгруппы, очевидно, равна трем, поскольку она совпадает с размерностью группы унитарных матриц второго порядка с определителем, равным 1. Размерность группы вращений трехмерного пространства, как было показано в первой части, также равна трем. Таким образом, подгруппа $\tilde{G}_a$ имеет ту же размерность, что и вся группа вращений, а следовательно (в силу того, что группа вращений связна), совпадает с ней. Итак, *каждому вращению соответствуют две, отличающиеся лишь знаком, унитарные матрицы с определителем, равным* 1.

5. Связь между собственной группой Лоренца и группой комплексных матриц второго порядка с определителем, равным единице (другое изложение) *). В предыдущем пункте мы установили связь между собственной группой Лоренца и группой комплексных матриц второго порядка a, $\det a = 1$, тем, что каждой такой матрице отнесли собственное преобразование Лоренца.

Теперь поступим наоборот: каждому собственному преобразованию Лоренца поставим в соответствие две (отличающиеся лишь знаком) матрицы второго порядка с определителем, равным 1. Мы построим это соответствие чисто геометрическим путем.

Напомним вначале, как было установлено соответствие между вращениями трехмерного пространства и дробно-линейными преобра-

*) При первом чтении этот пункт можно опустить.

зованиями комплексной плоскости. Для этого устраивалась стереографическая проекция сферы на комплексную плоскость. Тогда всякое вращение сферы, как было показано, порождает в комплексной плоскости дробно-линейное преобразование с унитарной матрицей. Рассмотрим аналогичную конструкцию для группы Лоренца.

Рассечем световой конус $x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=0$ гиперплоскостью $x_0=\frac{1}{2}$. В сечении получается трехмерная сфера I диаметра 1: $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{4}$, $x_0=\frac{1}{2}$. В гиперплоскости $x_0=\frac{1}{2}$ зададим проективное преобразование следующим образом. Всякий луч, выходящий из начала координат и пересекающий эту гиперплоскость, под действием собственного преобразования Лоренца перейдет в луч, снова пересекающий эту гиперплоскость (поскольку направление оси времени не меняется). Каждому лучу соответствует в гиперплоскости $x_0=\frac{1}{2}$ точка его пересечения с нею. Тем самым каждое преобразование лучей, в частности преобразование из собственной группы Лоренца, задает некоторое преобразование точек гиперплоскости $x_0=\frac{1}{2}$; обозначим его через Γ. Так как при преобразовании Γ прямая переходит в прямую, а плоскость — в плоскость, то преобразование Γ — проективное. Световой конус преобразованием Лоренца переводится в себя, а это значит, что преобразование Γ в гиперплоскости $x_0=\frac{1}{2}$ оставляет на месте сферу I, определяемую уравнениями $x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{1}{4}$, $x_0=\frac{1}{2}$. Итак, каждому преобразованию g из собственной группы Лоренца отнесено преобразование $\tilde{g}$ сферы I в себя. Так как преобразование $\tilde{g}$ порождено проективным преобразованием трехмерного пространства, то оно, очевидно, переводит окружность на сфере в окружность и не меняет ориентацию на ней.

Рассмотрим, как и раньше, стереографическую проекцию сферы на плоскость T, касающуюся ее в точке $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$, расположенной на оси x_3; (в трехмерной гиперплоскости $x_0=\frac{1}{2}$ естественным образом вводятся координаты x_1, x_2, x_3). При стереографической проекции сферы на плоскость T окружность перейдет в окружность или прямую и наоборот: всякая окружность и прямая на плоскости T являются образами некоторой окружности на сфере.

Всякое преобразование сферы $\tilde{g}$, переводящее окружность в окружность и сохраняющее ориентацию (в частности, преобразование, порожденное собственным преобразованием Лоренца), задает с помощью стереографической проекции преобразование a

плоскости T, переводящее окружность и прямую в окружность или прямую (с сохранением ориентации). Если рассматривать плоскость T как плоскость комплексного переменного z, то всякое такое преобразование, как известно из теории функций комплексного переменного, есть дробно-линейное преобразование плоскости z:

$$z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

Таким образом, преобразованию $\tilde{g}$ сферы I, а следовательно, и собственному преобразованию Лоренца g, соответствует дробно-линейное преобразование плоскости z с матрицей $a=\begin{Vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{Vmatrix}$, а тем самым и самая матрица a, определенная с точностью до множителя. Множитель выберем так, чтобы определитель матрицы был равен 1. Тем самым мы определим матрицу a с точностью до знака. Эту последнюю неопределенность исключить уже нельзя.

Итак, установлено соответствие $g\sim\pm a$ между преобразованиями Лоренца и определенными с точностью до знака комплексными матрицами второго порядка ($\det a=1$).

Заметим, что в наших геометрических построениях вращениям трехмерного пространства $(x_1x_2x_3)$ соответствуют просто вращения сферы I. А вращение сферы I на плоскости при стереографической проекции порождает дробно-линейное преобразование с унитарной матрицей, как это было показано в § 2 первой части. Таким образом, вращениям g соответствуют унитарные матрицы a.

6. Группа Лоренца как группа движений в пространстве Лобачевского. В предыдущем пункте мы установили, что собственная группа Лоренца изоморфна группе проективных преобразований трехмерного пространства, переводящих некоторую сферу в себя. Пользуясь этим, мы покажем сейчас, что группу Лоренца можно считать группой движений пространства Лобачевского.

Для этого рассмотрим предложенную Бельтрами и Клейном модель геометрии Лобачевского. В этой модели точке пространства Лобачевского соответствует внутренняя точка некоторой сферы I трехмерного евклидова пространства, прямой — хорда этой сферы, а плоскости — часть плоскости внутри этой сферы. Расстояние между точками A и B определяется так: пусть P и Q — точки пересечения хорды AB со сферой I, тогда за расстояние $\rho(A, B)$ между A и B принимается логарифм двойного отношения точек

$$\rho(A, B)=\ln\left(\frac{AP}{PB}:\frac{AQ}{QB}\right).$$

При этом движения пространства Лобачевского, т. е. такие преобразования, которые не меняют расстояний, в нашей модели получаются с помощью проективных преобразований трехмерного пространства, переводящих сферу I в себя.

Таким образом, группа движений пространства Лобачевского изоморфна группе проективных преобразований трехмерного пространства, переводящих некоторую сферу в себя. Последняя же, как было показано в предыдущем пункте, изоморфна собственной группе Лоренца. Итак, получаем, что *группа движений пространства Лобачевского изоморфна группе Лоренца.*

Последнее обстоятельство, естественно, наводит на мысль построить модель пространства Лобачевского на поверхности транзитивности собственной группы Лоренца. Оказывается, что такую модель можно построить на верхнем поле гиперболоида

$$x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2=1. \tag{13}$$

Опишем коротко эту модель.

«Прямой» в этой модели назовем гиперболу, получающуюся в пересечении гиперболоида (13) с плоскостью, проходящей через начало координат; «плоскость» пространства Лобачевского — это пересечение трехмерной гиперплоскости, проходящей через начало координат с нашим гиперболоидом.

Если две плоскости в R^4, h_1 и h_2, проходящие через начало координат, пересекаются по прямой l, проходящей внутри светового конуса и, следовательно, имеющей общую точку с гиперболоидом (13), то соответствующие этим плоскостям h_1 и h_2 «прямые» H_1 и H_2 на гиперболоиде пересекаются; если прямая l лежит на конусе, то «прямые» H_1 и H_2 на гиперболоиде параллельны; если, наконец, l проходит вне конуса, то «прямые» H_1 и H_2 — расходящиеся.

Аналогично определяется параллельность и расходимость «плоскостей» пространства Лобачевского в нашей модели.

Очевидно, что на гиперболоиде (13) можно ввести систему координат (ξ, η, ζ)

$$\xi=\frac{x_1}{x_0}, \quad \eta=\frac{x_2}{x_0}, \quad \zeta=\frac{x_3}{x_0}.$$

Эти координаты (ξ, η, ζ) оказываются координатами Бельтрами в нашей модели геометрии Лобачевского.

Расстояние между двумя точками $A(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $B(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ в пространстве Лобачевского в бельтрамиевых координатах ξ, η, ζ выражается формулой

$$\rho(A, B)=\frac{k}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-\tau^2}}{1-\sqrt{1-\tau^2}},$$

где

$$\tau=\frac{\sqrt{1-\xi_1^2-\eta_1^2-\zeta_1^2}\cdot\sqrt{1-\xi_2^2-\eta_2^2-\zeta_2^2}}{1-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2-\zeta_1\zeta_2},$$

а k — фиксированный параметр.

Легко проверить, что эта метрика лишь множителем отличается от метрики, которая индуцирована на гиперболоиде квадратичной формой $s(x^2)=$ $=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$.

Можно было бы и дальше на нашей модели проследить различные понятия геометрии Лобачевского, но мы ограничимся сказанным.

7. Определение представлений группы Лоренца и основные понятия теории представлений. В п. 5 § 1 части I были даны основные понятия теории представлений, относящиеся к конечномерным представлениям групп. Так как все неприводимые представления группы вращений конечномерны, а любое другое ее представление разлагается в прямую сумму неприводимых, то в теории представлений группы вращений мы обходились, по существу, одними лишь конечномерными представлениями.

Иначе обстоит дело с группой Лоренца. Как мы увидим ниже, среди ее неприводимых представлений встречаются бесконечномерные.

В связи с этим мы вновь определим основные понятия теории представлений групп, так чтобы они стали применимы в случае бесконечномерных представлений.

Определение. Пусть R — нормированное пространство. Каждому элементу g группы G сопоставим линейный ограниченный оператор T_g в R так, чтобы соблюдались условия:

1) $T_e = E$ (e — единица группы G, E — единичный оператор в R);

2) $T_{g_1 g_2} = T_{g_1} \cdot T_{g_2}$;

3) непрерывность: если $F(f)$ — ограниченный линейный функционал на R, то при любом фиксированном f, $F(T_g f)$ непрерывно зависит от g.

Соответствие $g \to T_g$, удовлетворяющее этим трем условиям, называется линейным представлением группы G в пространстве R.

Представление называется *конечномерным*, если пространство R конечномерно.

Унитарные представления. Представление $g \to T_g$ называется унитарным, если пространство R является гильбертовым пространством и скалярное произведение (ξ, η) в R инвариантно относительно операторов T_g, т. е.

$$(T_g \xi, T_g \eta) = (\xi, \eta).$$

Другими словами, *представление унитарно, если оно действует в гильбертовом пространстве и если все операторы представления являются унитарными.*

Неприводимые представления. Напомним (см. ч. I, § 1), что конечномерное представление $g \to T_g$ называется неприводимым, если в пространстве R, где оно действует, не существует инвариантных подпространств, отличных от самого R и от нуля. Такое определение в бесконечномерном случае оказывается неудобным. В связи с этим мы назовем представление неприводимым, если выполнено несколько более сильное условие, чем просто отсутствие инвариантных подпространств: представление $g \to T_g$, действующее в пространстве R, *неприводимо, если, во-первых, в пространстве R не существует замкнутых пространств, инвариантных относительно всех операторов T_g, во-вторых, всякий ограниченный оператор A, перестановочный со всеми операторами T_g, кратен единичному: $A = \lambda E$.*

Для конечномерных представлений можно ограничиться каким-либо одним из этих двух требований, поскольку в этом случае оба требования равносильны *). В бесконечномерном случае это не так.

*) Этот факт составляет содержание так называемой леммы Шура: линейный оператор в конечномерном пространстве, коммутирующий с семейством операторов, кратен единичному в том и только том случае, когда это семейство неприводимо (доказательство этого утверждения см. в сноске на стр. 184).

Если представление $g \to T_g$, действующее в пространстве R, приводимо, то, как правило, пространство R может быть разбито в прямую сумму инвариантных подпространств $R_k : R = \sum^{\cdot} R_k$, в каждом из которых представление группы G, порожденное представлением $g \to T_g$, неприводимо. Обозначим представление, порожденное в пространстве R_k, через $T_g^{(k)}$. Представления $g \to T_g^{(k)}$ мы будем называть *неприводимыми компонентами представления* $g \to T_g$.

Эквивалентные представления. Конечномерные представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$, действующие в пространствах $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ соответственно, называются *эквивалентными*, если существует оператор B, взаимно однозначно отображающий $R^{(1)}$ на $R^{(2)}$ и такой, что для любого элемента группы g

$$BT_g^{(1)} = T_g^{(2)}B. \tag{14}$$

Более наглядно это означает, что представления эквивалентны, если между элементами $h^{(1)}$ пространства $R^{(1)}$ и элементами $h^{(2)}$ пространства $R^{(2)}$ можно установить такое взаимно однозначное линейное соответствие $h^{(1)} \longleftrightarrow h^{(2)}$, что если $h^{(1)} \longleftrightarrow h^{(2)}$, то $T_g^{(1)}h^{(1)} \longleftrightarrow T_g^{(2)}h^{(2)}$.

Общее определение эквивалентных представлений, годное как для конечномерного, так и бесконечномерного случая, почти ничем не отличается от приведенного выше. *Представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$, действующие в пространствах $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, называются эквивалентными, если в $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ найдутся такие всюду плотные линейные многообразия $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, инвариантные относительно операторов $T_g^{(1)}$ и $T_g^{(2)}$ соответственно, и такой замкнутый оператор B, взаимно однозначно отображающий $R^{(1)}$ на $R^{(2)}$, что выполняется равенство*

$$T_g^{(1)}B = BT_g^{(2)}. \tag{14'}$$

Смысл приведенного нами определения эквивалентности сводится к тому, что *в пространствах $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$, где действуют эквивалентные представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$, можно так выбрать базисы, чтобы операторы $T_g^{(1)}$ и $T_g^{(2)}$ записывались в них одной и той же матрицей.*

Очевидно, что эквивалентные между собой представления не являются существенно различными. Поэтому в теории представлений обычно рассматривают представления с точностью до эквивалентности.

Сформулируем в заключение одно важное предложение, относящееся к определению эквивалентных представлений. *Пусть в конечномерных пространствах $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ действуют неприводимые представления $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$ некоторой группы. Если существует* *линейный оператор B, отображающий пространство $R^{(1)}$ в $R^{(2)}$ и удовлетворяющий соотношению*

$$T_g^{(2)}B = BT_g^{(1)}, \tag{15}$$

то либо B отображает $R^{(1)}$ на $R^{(2)}$ взаимно однозначно и, следовательно, представления эквивалентны, либо $B = 0$. Это предложение носит в теории представлений название общей леммы Шура. Из нее легко выводится то утверждение, которое было нами ранее названо леммой Шура *) (см. сноску на стр. 182).

Представления, эквивалентные унитарным. Такие представления обладают следующим очевидным свойством.

Представление $g \to T_g$ в нормированном пространстве R эквивалентно унитарному, если в пространстве R существует положительно определенная эрмитова билинейная форма, инвариантная относительно операторов T_g. (Эта форма может быть определенной как на всем пространстве R, так и на его всюду плотном линейном многообразии R', также инвариантном относительно операторов T_g.)

Действительно, если зададим с помощью инвариантной положительно определенной эрмитовой формы (ξ, η) скалярное произведение в пространстве R и пополним R относительно этого скалярного произведения, то получим гильбертово пространство $\tilde{R}$. Операторы T_g из R можно продолжить до унитарных операторов $\tilde{T}_g$ в $\tilde{R}$. Очевидно, что представление $g \to T_g$ эквивалентно унитарному представлению $g \to \tilde{T}_g$.

8. Связь между представлениями собственной группы Лоренца и представлениями группы комплексных матриц второго порядка. Двузначные представления собственной группы Лоренца. Выше мы подробно изучили соответствие $g_a \to \pm a$ между собственными преобразованиями Лоренца и группой $\mathfrak{A}$ комплексных матриц a второго порядка ($\det a = 1$). Это соответствие $g_a \to \pm a$ позволяет очевидным образом всякое представление $g \to T_g$ собственной группы рассматривать как представление группы $\mathfrak{A}$: $a \to T_a \equiv T_{g_a}$. При этом выполняется равенство $T_a = T_{-a}$. Очевидно, что и обратно, всякое представление группы $\mathfrak{A}$ $a \to T_a$ такое, что $T_a = T_{-a}$, можно рассматривать как представление собственной группы Лоренца: $g_a \to T_{g_a} \equiv T_a$.

---

*) Формулировку этой леммы см. в сноске на стр. 182. Приведем ее доказательство.

Пусть оператор A коммутирует с операторами неприводимого представления T_g: $T_gA = AT_g$. Пусть λ—какое-нибудь собственное значение оператора A. Очевидно, что оператор $A - \lambda E$ коммутирует с T'_g: $T_g(A - \lambda E) = (A - \lambda E)T_g$. Поскольку оператор $(A - \lambda E)$ отображает все R в некоторое его подпространство, то в силу общей леммы Шура он равен нулю: $A - \lambda E = 0$. или, окончательно, $A = \lambda E$, что и требовалось доказать.

Если же представление группы $\mathfrak{A}$, не обладает тем свойством, что $T_a = T_{-a}$, то его нельзя, строго говоря, рассматривать как представление группы Лоренца, так как в этом случае каждому элементу $g = g_a$ ставится в соответствие два различных оператора T_a и T_{-a}. Мы, однако, будем рассматривать эти представления группы $\mathfrak{A}$ наравне с теми представлениями, которые удовлетворяют условию $T_a = T_{-a}$. Для единства терминологии представления группы $\mathfrak{A}$, для которых $T_a \neq T_{-a}$, мы будем называть *двузначными представлениями группы Лоренца*, представления же, для которых $T_a = T_{-a}$, — *однозначными представлениями* этой группы.

Можно показать, что двузначное представление собственной группы нельзя сделать однозначным, выбрав из каждой пары T_a и T_{-a} по одному оператору, причем так, чтобы полученное соответствие $g \to T_g$ осталось непрерывным.

Покажем теперь, что если двузначное представление группы Лоренца неприводимо, то каждому элементу группы g ставятся в соответствие в точности два оператора, отличающихся знаком, подобно тому как это имеет место для простейшего двумерного представления $g_a \to \pm a$. Действительно, $T_{-a} = T_{-e}T_a$, где $-e = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Так как матрица $-e$ коммутирует со всеми матрицами a, то и оператор T_{-e} коммутирует со всеми операторами T_a. В силу неприводимости представления отсюда следует, что $T_{-e} = \lambda E$, где E—единичный оператор. Так как, с другой стороны, $(T_{-e})^2 = T_{(-e)^2} = T_e = E$, то $\lambda^2 = 1$; отсюда следует, что $\lambda = +1$ или $\lambda = -1$. В первом случае $T_{-e} = +E$ $(\lambda = 1)$, $T_a = T_{-a}$ и мы имеем однозначное представление; во втором случае $T_{-e} = -E$ и $T_{-a} = -T_a$, т. е. представление двузначно и операторы T_{-a} и T_a отличаются знаком.

Заметим, наконец, что из приведенного только что рассуждения вытекает, очевидно, что представление группы Лоренца *двузначно или однозначно вместе с порожденным им представлением группы вращений*. Другими словами, каждая неприводимая компонента представления группы вращений, порожденного неприводимым представлением собственной группы Лоренца $g \to T_g$, однозначна или двузначна одновременно с этим представлением. Это замечание будет использовано в следующем параграфе для определения однозначных и двузначных представлений собственной группы Лоренца.

Легко проверить, что двузначное представление собственной группы Лоренца, рассматриваемое как представление группы $\mathfrak{A}$ комплексных унимодулярных матриц с определителем, равным 1, является *точным* представлением этой группы, т. е. таким, что $T_{a_1} \neq T_{a_2}$, если $a_1 \neq a_2$. Однозначные же представления собственной группы Лоренца не являются точными представлениями группы $\mathfrak{A}$, так как $T_a = T_{-a}$. Легко, однако, показать, что в этом случае $T_{a_1} = T_{a_2}$ только тогда, когда $a_1 = \pm a_2$.

9. Двузначные представления общей группы Лоренца. Общая группа Лоренца получается из собственной группы Лоренца G_0 добавлением трех отражений s, t, j (s — пространственное, t — временное, j — полное отражение) и всевозможных элементов вида sg', tg', jg' (g' — элемент собственной группы).

Заметим, что преобразования e, s, t, j (e — тождественное преобразование) образуют коммутативную группу с таблицей умножения

	e	s	t	j
	e	s	t	j
s	s	e	j	t
t	t	j	e	s
j	j	t	s	e

(16)

Эту группу будем называть группой отражений.

Пусть теперь задано какое-нибудь представление общей группы $g \to T_g$. Это представление порождает представление как собственной группы $g' \to T_{g'}$, так и группы отражений $\tau \to T_\tau$ ($\tau = e, s, t, j$).

Рассмотрим сначала случай, когда представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы, порожденное представлением общей группы, двузначно, $g' \to \pm T_{g'}$.

Естественно, что при этом и представление группы отражений также двузначно:

$$e \to \pm E, \qquad s \to \pm S, \qquad t \to \pm T, \qquad j \to \pm J.$$

Операторы S, T, J перемножаются, очевидно, следующим образом:

$$ST = \pm J, \qquad SJ = \pm T, \qquad TJ = \pm J,$$
$$S^2 = \pm E, \qquad T^2 = \pm E, \qquad J^2 = \pm E.$$

Из этих равенств легко вывести, что операторы T, S, J либо все одновременно коммутируют:

$$TS = ST, \qquad JS = SJ, \qquad TJ = JT,$$

либо одновременно все антикоммутируют:

$$TS = -ST, \qquad JS = -SJ, \qquad TJ = -JT.$$

Соответственно этому рассмотрим два случая.

П е р в ы й с л у ч а й. Операторы S, T, J коммутируют. В этом случае выбором знаков у этих операторов можно добиться, чтобы они перемножались соответственно таблице (16):

$$TS = ST = J, \qquad JS = S, \qquad J = T, \qquad JT = T, \qquad J = S,$$
$$S^2 = T^2 = J^2 = E.$$

Очевидно, что в этом случае операторы E, S, T, J задают однозначное представление группы отражений $e \to E$, $s \to S$, $t \to T$, $j \to J$.

Представление общей группы, приводящее к только что описанному однозначному представлению группы отражений, будем называть *однозначными представлениями общей группы* (двузначность этого представления связана лишь с двузначностью представления собственной группы).

Второй случай. Операторы S, T, J антикоммутируют. Легко проверить, что выбором знаков у этих операторов можно добиться, чтобы они перемножались с помощью таблицы

	E	S	T	J
E	E	S	T	J
S	S	E	J	T
T	T	$-J$	E	$-S$
J	J	$-T$	S	$-E$

(17)

Легко видеть, что из восьми операторов $\pm E$, $\pm S$, $\pm T$, $\pm J$ нельзя никак выбрать четыре оператора E, S, T, J, образующих однозначное представление группы отражений; другими словами, представление этой группы $e \to \pm E$, $s \to \pm S$, $t \to \pm T$, $j \to \pm J$ существенно двузначно.

Представление общей группы, приводящее к такому двузначному представлению группы отражений, мы назовем *двузначным* *) *представлением общей группы* (его двузначность связана не только с двузначностью представления собственной группы, но и с двузначностью представления группы отражений).

Заметим, что представление общей группы может быть двузначным, даже если порождаемое им представление собственной группы однозначно; достаточно только, чтобы представление группы отражений было двузначным. Соответствующую конструкцию мы приведем ниже (см. § 3).

В заключение отметим, что, в точности так же как двузначное представление собственной группы можно рассматривать как точное однозначное представление группы $\mathfrak{A}$ комплексных матриц второго порядка с определителем, равным 1, так и двузначное представление группы отражений можно рассматривать как точное однозначное представление группы, состоящей из восьми элементов e, e', s, s', t, t', j, j' со следующей таблицей умножения:

$$e'^2 = s^2 = s'^2 = t^2 = t'^2 = e, \; j^2 = j'^2 = e',$$
$$se' = e's = s', \qquad te' = e't = t', \qquad je' = e'j = j',$$
$$st = t's = j, \qquad sj = js' = t, \qquad ts = s't = j'.$$

Остальные соотношения определяются уже написанными (см. (17)).

*) Такие двузначные представления, как мы ниже увидим, встречаются в физических применениях теории представлений группы Лоренца.

Однозначные представления группы отражений являются уже не точными представлениями этой группы из восьми элементов, а такими, что $T_{e'} = T_e$, $T_{s'} = T_s$ и т. д. Эта связь между представлениями группы отражений и построенной нами группы из восьми элементов полностью аналогична той, которая имеется между представлениями собственной группы Лоренца и группы комплексных унимодулярных матриц второго порядка.

10. Основные различия между представлениями группы вращений трехмерного пространства и группы Лоренца. В первой части книги мы видели, что всякое представление группы вращений соответствующим выбором скалярного произведения можно сделать унитарным и, кроме того, всякое неприводимое представление этой группы конечномерно.

Ни то, ни другое не имеет места для группы Лоренца: у нее существуют не унитарные представления (само определяющее эту группу представление в четырехмерном пространстве не унитарно), и, как мы увидим ниже, у нее существуют бесконечномерные неприводимые представления.

Эти существенные различия между представлениями группы вращений и группы Лоренца связаны с тем, что первая из них компактна, т. е. из любой последовательности вращений можно выделить сходящуюся подпоследовательность, вторая же группа некомпактна: можно указать последовательность преобразований Лоренца, никакая подпоследовательность которой не сходится. В компактности группы вращений можно убедиться, например, так: каждое вращение записывается ортогональной матрицей третьего порядка; таким образом, группа вращений образует некоторое замкнутое множество G в девятимерном пространстве всех матриц третьего порядка. Поскольку сумма квадратов всех элементов у ортогональной матрицы $\|g_{ik}\|$ равна

$$\sum_{i,k} g_{ik}^2 = 3,$$

то замкнутое множество G в девятимерном пространстве ограничено и следовательно, компактно.

Для того чтобы убедиться, что группа Лоренца некомпактна, поступим так: выберем на гиперболоиде $s^2(x) = 1$ последовательность точек A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ..., уходящих в бесконечность. Если теперь взять последовательность преобразований Лоренца g_n таких, что $g_nO = A_n$ (O — вершина нашего гиперболоида), то, как легко видеть, из последовательности $\{g_n\}$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность.

Из теории топологических групп известно, что в компактных группах можно ввести инвариантное интегрирование, т. е. всякой ограниченной функции $f(g)$ на компактной группе G можно приписать конечный интеграл $\int f(g)\,dg$, не меняющийся при левых и правых сдвигах функции по группе т. е. такой, что

$$\int f(gg_0)\,dg = \int f(g_0g)\,dg = \int f(g)\,dg \quad \text{при всех } g_0{}^{*)}.$$

Напомним, как из этого обстоятельства следует унитарность всех представлений компактных групп. Выберем в пространстве R, где действует представление $g \to T_g$ компактной группы, положительно определенную билинейную эрмитову форму (ψ_1, ψ_2). Образуем новую форму

$$(\psi_1, \psi_2)_1 = \int (T_g\psi_1, T_g\psi_2)_2\,dg$$

*) В первой части (§ 1) была, например, вычислена инвариантная мера на группе вращений.

(функция $(T_g\psi_1, T_g\psi_2)$ ограничена, как всякая непрерывная функция на компактном множестве). Очевидно, что эрмитова форма $(\psi_1, \psi_2)_1$ положительно определена и инвариантна относительно операторов T_g

$$(T_g\psi_1, T_g\psi_2)_1 = (\psi_1, \psi_2)_1.$$

Если в пространстве R с помощью формы $(\psi_1, \psi_2)_1$ задать скалярное произведение, то относительно него представление $g \to T_g$ будет уже унитарным.

Приведенные рассуждения теряют силу для некомпактных групп, в частности для группы Лоренца, по двум причинам: во-первых, хотя на группе Лоренца и можно ввести инвариантное двустороннее интегрирование, но оно распространяется уже не на все ограниченные функции на этой группе и, во-вторых, функция $(T_g\psi_1, T_g\psi_2)$, с помощью которой мы строили инвариантное скалярное произведение, может даже оказаться неограниченной, так что ее и подавно нельзя интегрировать. Оба эти обстоятельства являются следствиями некомпактности группы Лоренца.

Покажем, наконец, что всякое неприводимое представление компактной группы конечномерно.

Пусть в пространстве R действует представление $g \to T_g$ компактной группы. Как сказано выше, его можно считать унитарным. Это значит, что если h — вектор из R и $\|h\| = 1$, то и $\|T_g h\| = 1$, т. е. образы единичного вектора h в R лежат на сфере радиуса 1. Очевидно, что из компактности группы следует компактность множества $\{T_g h\}$ всех образов вектора h. Но всякое компактное множество на единичной сфере в гильбертовом пространстве содержится в конечномерном подпространстве. С другой стороны, в силу неприводимости представления линейная оболочка множества $\{T_g h\}$ совпадает с R. Итак, R конечномерно.

Совершенно ясно, что эти рассуждения, опирающиеся на компактность группы, уже непригодны в случае группы Лоренца.

§ 2. Инфинитезимальные операторы и представления собственной группы Лоренца

1. Основные однопараметрические подгруппы в группе Лоренца. В § 2 части I для каждого представления группы вращений были введены матрицы (операторы) A_1, A_2, A_3, действующие в пространстве R и отвечающие бесконечно малым поворотам вокруг осей x_1, x_2 и x_3. Там же было показано, что по этим трем матрицам A_k представление группы вращений восстанавливается однозначно. Аналогичные операторы мы построим для представлений собственной группы Лоренца.

Как было показано в части I, всякое вращение трехмерного пространства можно осуществить с помощью последовательного выполнения трех поворотов: в плоскости (x_1, x_2) (вокруг оси x_3); в плоскости (x_1, x_3) (вокруг оси x_2) и, наконец, снова в плоскости (x_1, x_2) (вокруг оси x_3).

Аналогично этому каждое преобразование из группы Лоренца можно осуществить с помощью последовательного выполнения шести преобразований специального вида: преобразования в плоскости (x_1, x_2), не меняющего координат x_3 и x_4, и аналогичных преобразований в плоскостях (x_1, x_3), (x_2, x_3), (x_1, x_0), (x_2, x_0), (x_3, x_0).

Рассмотрим эти преобразования более подробно.

Напишем преобразование в плоскости (x_1, x_2):

$$\begin{aligned} x_1^1 &= g_{11}x_1 + g_{12}x_2, \\ x_2^1 &= g_{21}x_1 + g_{22}x_2, \\ x_3^1 &= \qquad\qquad x_3, \\ x_0^1 &= \qquad\qquad\quad x_0. \end{aligned}$$

Оно, очевидно, не меняет квадратичную форму $x_1^2 + x_2^2$. Следовательно, это есть поворот в плоскости (x_1, x_2) на угол φ Матрица такого преобразования имеет вид .

$$g_{12}(\varphi) = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Аналогично, преобразования в плоскости (x_1, x_3) и (x_2, x_3) запишутся матрицами

$$g_{13} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

$$g_{23} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

где φ — угол соответствующего поворота.

Преобразование в плоскости (x_3, x_0) не меняет двух первых координат и квадратичную форму $x_3^2 - x_0^2$. Матрицу такого преобразования *) можно записать аналогично предыдущим только через гиперболические функции

$$g_{03} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{ch}\varphi & \operatorname{sh}\varphi \\ 0 & 0 & \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{Vmatrix}.$$

Аналогично выглядят матрицы g_{01} и g_{02}.

Отметим, что матрицы $g_{ik}(\varphi)$ образуют подгруппу в группе Лоренца, зависящую от одного параметра (так называемую однопараметрическую подгруппу). Действительно, используя теоремы сложе-

*) Преобразование в плоскости (x, y), не меняющее квадратичной формы $x^2 - y^2$ и направления осей, мы назвали *гиперболическим поворотом*.

ния для круговых или гиперболических функций, легко получить, что

$$g_{ik}(\varphi_1)\,g_{ik}(\varphi_2)=g_{ik}(\varphi_1+\varphi_2) \qquad (i,\ k=0,\ 1,\ 2,\ 3).$$

2. Представление элементов собственной группы Лоренца в виде произведения основных однопараметрических подгрупп. В § 1 части I было показано, что каждое вращение в трехмерном пространстве может быть представлено в виде произведения трех вращений

$$g=g_{\theta_1}g_{\varphi}g_{\theta_2},$$

где $g_{\theta_1}g_{\theta_2}$ — вращения вокруг оси z на угол θ_1 и θ_2 соответственно и g_φ — вращение вокруг оси x на угол φ.

Аналогично этому каждый элемент группы Лоренца может быть представлен в виде произведения

$$g=u_1 g_{03} u_2,$$

где u_1 и u_2 — вращения и g_{03} — гиперболический поворот в плоскости x_0x_3.

Действительно, в п. 2 § 1 мы видели, что всякое собственное преобразование Лоренца g имеет вид

$$g=ug_{0A},$$

где u — вращение, g_{0A} — гиперболический поворот в плоскости (x_0A), проходящей через ось x_0 и точку A — прообраз вершины O гиперболоида $s^2(x)=-1$ при преобразовании g. Очевидно, что гиперболический поворот g_{0A} представляется в виде

$$g_{0A}=u_{0A}^{-1}g_{03}(t)\,u_{0A},$$

где u_{0A} — вращение, переводящее плоскость $(x_0,\ A)$ в плоскость $(x_0,\ x_3)$.

Таким образом,

$$g=uu_{0A}^{-1}g_{03}(t)\,u_{0A}=u_1 g_{03}(t)\,u_2,$$

где

$$u_1=uu_{0A}^{-1}, \quad u_2=u_{0A}.$$

Записав вращения u_1 и u_2 в виде произведения трех поворотов

$$u_1=g_{12}(\theta_1')\,g_{13}(\varphi')\,g_{12}(\theta_2')$$

и

$$u_2=g_{12}(\theta_1'')\,g_{13}(\varphi'')\,g_{12}(\theta_2''),$$

мы для собственного преобразования Лоренца g окончательно получим:

$$g=g(\theta_1')\,g(\varphi')\,g(\theta_2')\,g_{03}(t)\,g_{12}(\theta_1'')\,g_{13}(\varphi'')\,g_{12}(\theta_2''). \qquad (1)$$

Таким образом, любое собственное преобразование Лоренца раскладывается в произведение поворотов из основных однопараметрических подгрупп g_{12}, g_{13}, g_{03}.

3. Определение инфинитезимальных операторов. Пусть задано некоторое представление собственной группы Лоренца $g \to T_g$. Тогда операторы $Tg_{ik(\varphi)} = T_{ik}(\varphi)$ являются функциями параметра φ. Возьмем какой-нибудь вектор f из R. При повороте $g_{ik}(\varphi)$ на угол φ он перейдет в вектор $T_{ik}(\varphi)f$. Его приращение, следовательно, равно

$$T_{ik}(\varphi)f - f = [T_{ik}(\varphi) - E]f.$$

Пусть для вектора f существуют пределы $\lim\limits_{\varphi \to 0} \frac{(T_{ik}(\varphi) - E)f}{\varphi} = h_{ik}$ при всех парах (i, k) $(i, k = 0, 1, 2, 3;\ i < k)$ *). Тем самым на таких векторах f определены операторы A_{ik}, B_i, действующие по формуле

$$A_{ik}f = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(T_{ik}(\varphi) - E)f}{\varphi} = h_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$

$$B_i f = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(T_{0i}(\varphi) - E)f}{\varphi} = h_{0i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Операторы A_{ik}, B_i и их линейные комбинации называются *инфинитезимальными операторами представления* $g \to T_g$. Операторы A_{ik} и B_i отвечают бесконечно малым поворотам соответственно в плоскостях (x_i, x_k) (обычный поворот) и (x_i, x_0) (гиперболический поворот). Три из этих операторов: A_{12}, A_{13}, A_{23}, соответствующие лишь трехмерным вращениям, рассматривались в § 2 части I **). Там же были установлены соотношения коммутации между ними:

$$[A_{12}, A_{13}] = -A_{23}, \quad [A_{12}, A_{23}] = A_{13}, \quad [A_{13}, A_{23}] = -A_{12} \quad \text{(I—III)}$$

Остальные соотношения коммутации таковы ***):

$$\left.\begin{array}{lll} [A_{12}, B_1] = B_2, & [A_{13}, B_1] = -B_3, & [A_{23}, B_1] = 0, \\ [A_{12}, B_2] = -B_1, & [A_{13}, B_2] = 0, & [A_{23}, B_2] = B_3, \\ [A_{12}, B_3] = 0, & [A_{13}, B_3] = B_1, & [A_{23}, B_3] = -B_2, \end{array}\right\} \text{(IV—XII)}$$

$$[B_1, B_2] = -A_{12}, \quad [B_1, B_3] = A_{13}, \quad [B_2, B_3] = -A_{23}. \quad \text{(XIII—XV)}$$

---

*) Совокупность векторов f, для которых существуют названные пределы, образует в R линейное, всюду плотное подпространство R'. Доказательство того, что R' всюду плотно в R, содержится по существу в добавлении к § 2 части I (при этом для конечномерного R R' совпадает с R).

**) Эти операторы в части I обозначались A_1, A_2, A_3,

$$A_1 = A_{23}, \quad A_2 = A_{13}, \quad A_3 = A_{12}.$$

***) Они получаются в точности тем же способом, что и предыдущие (см. часть I, § 2).

Для удобства введем вместо операторов A_{ik} и B_i их комбинации:

$$\left.\begin{aligned} H_+ &= iA_{23} - A_{13}, & H_- &= iA_{23} + A_{13}, & H_3 &= iA_{12}; \\ F_+ &= iB_1 - B_2, & F_- &= iB_1 + B_2, & F_3 &= iB_3. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Легко получить соотношения коммутации между этими операторами:

$$[H_+, H_3] = -H_+, \quad [H_-, H_3] = H_-, \quad [H_+, H_-] = 2H_3; \tag{I′—III′}$$

$$\left.\begin{aligned} &[F_+, H_+] = [H_-, F_-] = [H_3, F_3] = 0, \\ &[H_+, F_3] = -F_3, \qquad [H_-, F_3] = F_-, \\ &[H_+, F_-] = -[H_-, F_+] = 2F_3, \\ &[F_+, H_3] = -F_+, \qquad [F_-, H_3] = F_-; \end{aligned}\right\} \tag{IV′—XII′}$$

$$[F_+, F_3] = H_+, \quad [F_-, F_3] = -H_-, \quad [F_+, F_-] = -2H_3. \tag{XIII′—XV′}$$

В заключение заметим, что если в пространстве R есть подпространство R', инвариантное относительно представления $g \to T_g$, то оно инвариантно и относительно всех инфинитезимальных операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3; и наоборот, подпространство R, инвариантное относительно инфинитезимальных операторов, инвариантно и относительно самого представления $g \to T_g$. Отсюда, в частности, следует, что представление $g \to T_g$ неприводимо тогда и только тогда, когда пространство R, в котором оно действует, неприводимо относительно его инфинитезимальных операторов (т. е. в R нет подпространства, инвариантного относительно всех операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3). Этим замечанием мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

4. Вид инфинитезимальных операторов для неприводимых представлений собственной группы Лоренца. В этом пункте мы найдем общий вид операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 для неприводимого представления собственной группы Лоренца.

Заметим, что всякое представление собственной группы Лоренца $g \to T_g$, действующее в пространстве R, порождает тем самым некоторое представление своей подгруппы — группы вращений. Это представление получается, если ограничиться только теми операторами $T_{g'}$, которые соответствуют трехмерным вращениям g'. При этом в пространстве R представление $g' \to T_{g'}$, вообще говоря, приводимо. Но, как было показано в § 2 части I, R можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств R_l, в каждом из которых представление группы вращений, индуцированное представлением $g' \to T_{g'}$, неприводимо и задается весом l. Мы будем предполагать, что в случае, когда представление собственной группы Лоренца $g \to T_g$ неприводимо, в этом разложении пространства R не встречается двух подпространств R_l с одинаковым весом *). В связи с этим будем нумеровать эти подпространства индексом l.

В каждом подпространстве R_l мы выберем канонический базис ξ_{lm} (т. е. базис из собственных векторов оператора H_3). Векторы $\{\xi_{lm}\}$ образуют, очевидно, базис во всем пространстве R. Этот базис мы будем называть каноническим базисом в пространстве R.

Операторы H_+, H_-, H_3 (инфинитезимальные операторы представления группы вращений) записываются в этом базисе следующим образом (см. часть I, § 2, (18)):

$$\left.\begin{aligned} H_3\xi_{lm} &= m\xi_{lm}, \\ H_-\xi_{lm} &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l,\,m-1}, \\ H_+\xi_{lm} &= \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\xi_{l,\,m+1}, \\ m &= -l,\quad -l+1,\ \ldots,\ l-1,\ l. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Выпишем теперь операторы F_3, F_+, F_- в базисе $\{\xi_{lm}\}$:

$$\left.\begin{aligned} F_3\xi_{lm} &= C_l\sqrt{l^2-m^2}\,\xi_{l-1,\,m} - A_l m\xi_{lm} - C_{l+1}\sqrt{(l+1)^2-m^2}\,\xi_{l+1,\,m}, \\ F_+\xi_{lm} &= C_l\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi_{l-1,\,m+1} - \\ &\quad - A_l\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{l,\,m+1} + \\ &\qquad + C_{l+1}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi_{l+1,\,m+1}, \\ F_-\xi_{lm} &= -C_l\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,\xi_{l-1,\,m-1} - \\ &\quad - A_l\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l,\,m-1} - \\ &\qquad - C_{l+1}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi_{l+1,\,m-1}, \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

$$A_l = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}, \qquad C_l = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2-l_0^2)(l^2-l_1^2)}{4l^2-1}},$$

$$m = -l,\quad -l+1,\ \ldots,\ l-1,\ l; \qquad l = l_0,\ l_0+1,\ \ldots$$

Здесь l_1 — некоторое комплексное число, и формулы (3) и (3′) задают, таким образом, вид инфинитезимальных операторов неприводимого представления собственной группы Лоренца. Как видно из этих формул, каждое такое представление однозначно определяется парой чисел l_0 и l_1; первое из них, l_0, является наименьшим весом, участвующим **)

*) Это предположение не является произвольным. Можно доказать, что для неприводимых как конечномерных, так и бесконечномерных представлений оно действительно всегда выполняется.

**) Мы скажем, что вес l участвует в представлении собственной группы $g \to T_g$, если в представлении группы вращений, порожденном представлением $g \to T_g$, встречается неприводимая компонента с весом l.

в неприводимом представлении, и может принимать, следовательно, только целые или полуцелые значения, число же l_1 произвольно.

Ниже будет дан последовательный вывод формул (3′), но сначала, однако, мы несколько подробнее ознакомимся с ними.

Заметим, что если вес l участвует в неприводимом представлении, то, как видно из формул (3′), векторы из пространства R_l переводятся операторами F_+, F_-, F_3 в линейную комбинацию векторов из пространств R_{l-1}, R_l и R_{l+1}; при этом векторы из R_{l-1} входят в линейную комбинацию в том и только том случае, если $C_l \neq 0$; аналогично векторы из R_{l+1} участвуют в этой линейной комбинации тогда и только тогда, когда $C_{l+1} \neq 0$. В частности, векторы из пространства R_{l_0} переводятся операторами F_3, F_+, F_- лишь в линейную комбинацию векторов из R_{l_0} и R_{l_0+1} ($C_{l_0}=0$). Это вполне согласуется с тем, что l_0 — наименьший из весов, участвующих в представлении.

Таким образом, если подействовать операторами F_3, F_+, F_- на векторы из пространства R_{l_0}, то мы переведем их в векторы, принадлежащие сумме пространств R_{l_0} и R_{l_0+1}; те же, в свою очередь, под действием операторов F_3, F_+, F_- перейдут в векторы, принадлежащие сумме пространств R_{l_0}, R_{l_0+1}, R_{l_0+2}. Продолжая этот процесс дальше, мы построим конечную или бесконечную цепочку пространств

$$R_{l_0} R_{l_0+1} R_{l_0+2} \ldots \tag{3″}$$

Очевидно, что сумма всех входящих в эту цепочку пространств R_l инвариантна относительно операторов H_3, H_+, H_-, F_3, F_+, F_- и, следовательно, в силу неприводимости нашего представления, совпадает со всем пространством R. Из самого построения цепочки (3″) видно, что веса l, участвующие в нашем представлении, пробегают подряд все значения

$$l_0,\ l_0+1,\ l_0+2,\ \ldots$$

Это и указано в формуле (3′).

Заметим, что в случае, когда цепочка (3″) бесконечна, представление бесконечномерно. В случае, если цепочка обрывается на некотором наибольшем весе $\tilde{l}$, представление конечномерно. Легко в последнем случае указать, как наибольший вес $\tilde{l}$ связан с числом l_1. Действительно, цепочка может оборваться на весе $\tilde{l}$, как мы говорили, лишь в случае, если $C_{\tilde{l}+1}=0$. Но так как $\tilde{l} \geqslant l_0$, то это возможно лишь при $(\tilde{l}+1)^2 - l_1^2 = 0$. Отсюда $\tilde{l} = |l_1| - 1$. Последнее равенство возможно только в том случае, если l_1 — целое или полуцелое одновременно с l_0 и $|l_1| > l_0$. Это и есть условие того, что неприводимое представление конечномерно. Ниже мы еще раз вернемся к этому случаю.

Итак, окончательно мы видим, что всякое неприводимое представление собственной группы Лоренца определяется парой чисел (l_0, l_1), где l_0 — целое или полуцелое число, а l_1 — произвольное комплексное число. Инфинитезимальные операторы H_+, H_-, H_3, F_3, F_+, F_- задаются при этом формулами (3) и (3′). Веса l, участвующие в этом представлении, пробегают по одному разу все значения l_0, l_0+1, l_0+2 ... и т. д. При этом представление либо бесконечномерно и веса l меняются до бесконечности, либо представление конечномерно и содержит наибольший вес $\tilde{l}$. Последний случай осуществляется тогда и только тогда, когда l_1 — целое или полуцелое число одновременно с l_0 и $|l_1| > l_0$; при этом наибольший вес $\tilde{l}$ равен $|l_1| - 1$.

После этого предварительного описания перейдем к выводу формул (3′).

Обратимся, прежде всего, к соотношениям коммутации между A_{ik} и B_i (IV—XII). Заметим, что формулы (IV—XII) после замены обозначений $B_i \longleftrightarrow L_i$, $A_{sk} = A_j$ $(s \neq k \neq j)$ совпадают с формулами (5) § 9 части I, дающими соотношения коммутации между матрицами A_i и матрицами L_i инвариантных уравнений.

В § 9 был найден общий вид всех матриц L_i в базисе $\{\xi_{lm}\}$ (индекс τ мы опускаем в силу сделанного нами предположения, что каждый вес встречается не больше одного раза).

Выпишем получающиеся выражения для операторов $F_+ = iB_1 - B_2$, $F_- = iB_1 + B_2$, $F_3 = iB_3$:

$$F_3\xi_{lm} = d_{l-1,\,l}\sqrt{l^2 - m^2}\,\xi_{l-1,\,m} - \\ - d_{ll}m\xi_{lm} - d_{l+1,\,l}\sqrt{(l+1)^2 - m^2}\,\xi_{l+1,\,m}, \tag{4}$$

$$F_+\xi_{lm} = d_{l-1,\,l}\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi_{l-1,\,m+1} - \\ - d_{ll}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{l,\,m+1} + \\ + d_{l+1,\,l}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi_{l+1,\,m+1}, \tag{5}$$

$$F_-\xi_{lm} = -d_{l-1,\,l}\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,\xi_{l-1,\,m-1} - \\ - d_{ll}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l,\,m-1} - \\ - d_{l+1,\,l}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi_{l+1,\,m-1} \tag{6}$$

(мы несколько изменили обозначения § 9 части I, положив

$$d_{l,\,l} = -ic_{l,\,l}, \quad d_{l+1,\,l} = -ic_{l+1,\,l}).$$

Заметим, что в выборе чисел $d_{l-1,\,l}$ $d_{l,\,l}$ $d_{l+1,\,l}$ есть произвол, зависящий от произвола в нормировке базиса $\{\xi_{lm}\}$. Действительно, если в каждом из подпространств R_l одинаково растянуть все векторы базиса, т. е. положить

$$\xi'_{lm} = h(l)\,\xi_{lm},$$

где $h(l)$ — некоторые числа, то при этом вид операторов H_+, H_-, H_3 в новом базисе не изменится, поскольку они действуют независимо в каждом R_l. Числа же $d_{l-1,\,l}$, $d_{l,\,l}$, $d_{l+1,\,l}$ при такой замене базиса перейдут, как нетрудно видеть, в

$$d'_{l-1,\,l}=\frac{h(l)}{h(l-1)}d_{l-1,\,l},\quad d'_{ll}=d_{ll},\quad d'_{l+1,\,l}=\frac{h(l)}{h(l+1)}d_{l+1,\,l}.$$

Однако

$$d'_{l-1,\,l}d'_{l,\,l-1}=\frac{h(l)}{h(l-1)}\frac{h(l-1)}{h(l)}d_{l-1,\,l}d_{l,\,l-1}=d_{l-1,\,l}d_{l,\,l-1},$$

т. е. произведение $d_{l-1,\,l}d_{l,\,l-1}$ сохраняется. Выбором соответствующего множителя $h(l)$ числа $d'_{l-1,\,l}$ и $d'_{l,\,l-1}$ можно сделать равными *).

Будем предполагать, что это выполнено и обозначим:

$$d'_{l,\,l-1}=d'_{l-1,\,l}=C_l;\qquad d'_{ll}=A_l.$$

Тогда формулы (4), (5), (6) перепишутся так:

$$\begin{aligned}F_3\xi_{lm}=C_l\sqrt{l^2-m^2}\,\xi_{l-1,\,m}-A_lm\xi_{lm}-&\\ -C_{l+1}\sqrt{(l+1)^2-m^2}\,\xi_{l+1,\,m},&\qquad(7)\\ F_+\xi_{lm}=C_l\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi_{l-1,\,m+1}-&\\ -A_l\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{l,\,m+1}+&\\ +C_{l+1}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi_{l+1,\,m+1},&\qquad(8)\\ F_-\xi_{lm}=-C_l\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,\xi_{l-1,\,m-1}-&\\ -A_l\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l,\,m-1}-&\\ -C_{l+1}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi_{l+1,\,m-1}.&\qquad(9)\end{aligned}$$

Для определения чисел A_l и C_l воспользуемся теперь соотношениями коммутации между F_3 и F_+: $[F_+,F_3]=H_3$. Подставляя сюда F_+, F_3, H_3 и приравнивая коэффициенты при одинаковых векторах ξ_{lm}, получим такие равенства:

$$\left.\begin{aligned}[A_l(l+1)-(l-1)A_{l-1}]\,C_l=0,\\ [A_{l+1}(l+2)-lA_l]\,C_{l+1}=0,\\ (2l-1)C_l^2-(2l+3)C_{l+1}^2-A_l^2=1.\end{aligned}\right\}\qquad(10)$$

---

*) Для этого достаточно положить

$$h(l)=C\sqrt{\prod_{r=l_0}^{r=l}\frac{d_{r+1,\,r}}{d_{r-1,\,r}}},$$

где l_0 — наименьший вес, участвующий в представлении.

Остальные соотношения $[F_3, F_-] = -2H_3$ и $[F_-, F_3] = -H_-$ приводят к тем же равенствам.

Вычисление A_l. При $C_l \neq 0$ два первых равенства (10) означают, что

$$A_l(l+1) = (l-1)A_{l-1},$$
$$A_{l-1}l = (l-2)A_{l-2},$$

и т. д.

$$A_{l_0+1}(l_0+2) = l_0 A_{l_0},$$

где l_0 — наименьший вес, участвующий в представлении. Отсюда

$$A_l = \frac{A_{l_0} l_0(l_0+1)}{l(l+1)}.$$

A_{l_0} можно, очевидно, выбирать произвольно. Ради симметрии в последующих формулах удобно положить $A_{l_0}(l_0+1) = il_1$. Тогда получим:

$$A_l = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}. \tag{11}$$

Вычисление C_l. Умножим обе части последнего из равенств 10) на $2l+1$ и подставим найденное значение A_l:

$$(4l^2-1)C_l^2 - [4(l+1)^2-1]C_{l+1}^2 = 2l+1 - l_0^2l_1^2\left[\frac{1}{l^2} - \frac{1}{(l+1)^2}\right].$$

Если выписать все эти равенства от $l+1$ до l_0 и сложить, то получим:

$$-[4(l+1)-1]C_{l+1}^2 = \sum_{p=l_0}^{p=l}(2p+1) - l_0^2l_1^2\left[\frac{1}{l_0^2} - \frac{1}{(l+1)^2}\right].$$

После небольших преобразований находим:

$$C_{l+1}^2 = -\frac{\left[(l+1)^2 - l_0^2\right]\left[(l+1)^2 - l_1^2\right]}{(l+1)^2[4(l+1)^2-1]}.$$

Окончательно для C_l получаем выражение

$$C_l = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{\left(l^2-l_0^2\right)\left(l^2-l_1^2\right)}{4l^2-1}}\,{}^{*)}. \tag{12}$$

---

*) Формула (12) определяет числа C_l с точностью до знака. Однако преобразованием канонического базиса ξ_{lm} вида

$$\xi'_{lm} = (-1)^{\theta_l}\xi_{lm} \qquad (\theta_l = 0,1)$$

мы можем всегда добиться, чтобы

$$|\arg C_l| \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

В частности, если C_l вещественно, то мы можем считать его положительным.

Сделаем теперь следующее замечание. При выводе формул (11) и (12) из равенств (10) мы предполагали, что $C_{l_0+1}, C_{l_0+2}, \ldots, C_l$ не обращаются в нуль. Покажем, что такое требование для неприводимого представления всегда выполнено. Пусть какое-то из C_l первый раз обратилось в нуль: $C_l = 0$, $l = l_0 + n + 1$. В этом случае, как видно из формул (3), (4) и (5), пространство $\overline{R}$, образованное векторами $\{\xi_{l_0 m}\}$ $\{\xi_{l_0+1, m}\}$ ... $\{\xi_{l_0+n, m}\}$, инвариантно относительно операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3, а следовательно, инвариантно относительно всех операторов представления T_g. Поскольку представление $g \to T_g$ неприводимо, то $\overline{R}$ совпадает с R и другие веса $l > l_0 + n$ в представлении не участвуют. Таким образом, действительно, для всякого веса $l > l_0$, участвующего в неприводимом представлении, $C_l \neq 0$.

Итак, получаем окончательную запись операторов F_+, F_-, F_3:

$$F_3\xi_{lm} = C_l\sqrt{(l^2 - m^2)}\,\xi_{l-1, m} - A_l m\xi_{l, m} - \\ - C_{l+1}\sqrt{(l+1)^2 - m^2}\,\xi_{l+1, m}, \tag{13}$$

$$F_+\xi_{lm} = C_l\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\,\xi_{l-1, m+1} - \\ - A_l\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{l, m+1} + \\ + C_{l+1}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\xi_{l+1, m+1}, \tag{14}$$

$$F_-\xi_{lm} = -C_l\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\,\xi_{l-1, m-1} - \\ - A_l\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l, m-1} - \\ - C_{l+1}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\xi_{l+1, m-1}, \tag{15}$$

$$A_l = \frac{i l_0 l_1}{l(l+1)}, \qquad C_l = \frac{i}{l}\sqrt{\frac{(l^2 - l_0^2)(l^2 - l_1^2)}{4l^2 - 1}}, \tag{16}$$

$$m = -l, \quad -l+1, \ldots, \quad l-1, \ l,$$

$$l = l_0, \quad l_0 + 1, \ldots$$

Выпишем еще формулы для H_+, H_-, H_3:

$$H_3\xi_{lm} = m\xi_{lm}, \tag{17}$$

$$H_+\xi_{lm} = \sqrt{(l+m+1)(l-m)}\,\xi_{l, m+1}, \tag{18}$$

$$H_-\xi_{lm} = \sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,\xi_{l, m-1}, \tag{19}$$

$$m = -l, \quad -l+1, \ldots, \quad l-1, \quad l.$$

Таким образом, всякое неприводимое представление собственной группы Лоренца определяется парой чисел (l_0, l_1) (l_0 — положительное целое или полуцелое, l_1 — произвольное комплексное число), *и его инфинитезимальные операторы в каноническом базисе* $\{\xi_{lm}\}$ *имеют вид* (13)—(19).

Заметим теперь, что при одновременном изменении знаков у чисел пары $(l_0, l_1): (l_0, l_1) \to (-l_0, -l_1)$ вид формул для инфинитезимальных операторов не меняется. Будем поэтому задавать неприводимое представление как парой (l_0, l_1), так и парой $(-l_0, -l_1)$. Очевидно, что два эквивалентных неприводимых представления определяются одной и той же парой $(\pm l_0, \pm l_1)$ и их инфинитезимальные операторы в канонических базисах записываются одинаково.

В заключение этого пункта сделаем следующее замечание.

Полученные формулы (13)—(19) для инфинитезимальных операторов H_3, H_+, H_-, F_3, F_+, F_- неприводимого представления являются общим решением коммутационных соотношений (I—XV) (для случая, когда пространство, в котором действуют эти операторы, неприводимо относительно них). Поскольку инфинитезимальные операторы всякого представления удовлетворяют соотношениям (I—XV), мы можем быть уверены что для всех неприводимых представлений собственной группы Лоренца инфинитезимальные операторы имеют вид (13)—(19). Обратное же далеко не очевидно: всякие ли шесть операторов, задаваемые формулами (13)—(19), служат инфинитезимальными операторами некоторого неприводимого представления? Другими словами, для всякой ли пары (l_0, l_1) (l_0 — целое или полуцелое, l_1 — произвольное комплексное число) действительно существует определяемое ею представление?

Утвердительный ответ на этот вопрос будет дан в дальнейшем: мы фактически построим неприводимые представления собственной группы Лоренца, отвечающие каждой допустимой паре (l_0, l_1).

5. Однозначные и двузначные представления собственной группы Лоренца. Выясним, каким парам (l_0, l_1) соответствует однозначное представление собственной группы, а каким — двузначное.

В предыдущем параграфе мы видели, что если неприводимое представление собственной группы Лоренца двузначно или однозначно, то одновременно с ним двузначна или однозначна каждая неприводимая компонента представления группы вращений, порожденного этим представлением группы Лоренца. Применим это обстоятельство к представлению группы вращений с наинизшим весом l_0. В части I книги было показано, что неприводимое представление группы вращений, задаваемое целым весом, однозначно, а полуцелым весом — двузначно.

Итак, *неприводимое представление собственной группы Лоренца однозначно при* l_0 *целом и двузначно при* l_0 *полуцелом.*

6. Сопряженные представления. Отметим, что с каждым представлением $g \to T_g$ тесно связано другое представление $g \to T_{(g^*)^{-1}}$, действующее в том же пространстве. Представление $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ мы будем называть *сопряженным к представлению* $g \to T_g$. Поскольку сопряженным к представлению $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ служит исходное представление $g \to T_g$, то оба представления $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ *взаимно сопряжены*, и мы будем их называть просто *сопряженными представлениями*.

Найдем, как связаны инфинитезимальные операторы H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 представления $g \to T_g$ и инфинитезимальные операторы $\tilde{H}_+$, $\tilde{H}_-$, $\tilde{H}_3$, $\tilde{F}_+$, $\tilde{F}_-$, $\tilde{F}_3$ представления $g \to T_{(g^*)^{-1}}$.

Напомним с этой целью, что для преобразований $g_{0i}(\varphi)$, $= 1, 2, 3$, выполняется соотношение

$$g^*_{0i} = g_{0i} \tag{20}$$

и, следовательно, $(g^*_{0i})^{-1} = g^{-1}_{0i}$. Для преобразований же g_{kl} ($k, l = 1, 2, 3$) $g^*_{kl} = g^{-1}_{kl}$ и $(g^*_{kl})^{-1} = g_{kl}$. Отсюда вытекает, что инфинитезимальные операторы представления $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ $\tilde{A}_{ik}$ и $\tilde{B}_i$ связаны с инфинитезимальными операторами представления $g \to T_g$ A_{ik} и B_i следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \tilde{A}_{ik} &= A_{ik}, \\ \tilde{B}_i &= -B_i, \end{aligned}\right\} \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{21}$$

и следовательно,

$$\tilde{F}_+ = -F_+, \qquad \tilde{F}_- = -F_-, \qquad \tilde{F}_3 = -F_3. \tag{22}$$

Действительно, первое из написанных равенств (21) сразу вытекает из того, что $T_{(g^*_{ik})^{-1}} = T_{g_{ik}}$ ($i, k = 1, 2, 3$), второе — получается из следующих очевидных равенств:

$$\tilde{B}_i = \frac{d}{d\varphi} T_{(g^*_{0i})^{-1}(\varphi)}\Big|_{\varphi=0} = \frac{d}{d\varphi} T_{g^{-1}_{0i}(\varphi)}\Big|_{\varphi=0} = \frac{d}{d\varphi} T_{g_{0i}(-\varphi)}\Big|_{\varphi=0} = -B_i.$$

Из равенств (21) следует, что у сопряженных представлений $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ одни и те же инвариантные подпространства. Действительно, поскольку операторы A_{ik}, B_i самое большее знаком отличаются от операторов $\tilde{A}_{ik}$, $\tilde{B}_i$, то подпространства, инвариантные относительно первой шестерки операторов (а тем самым инвариантные и относительно представления $g \to T_g$), инвариантны также относительно второй шестерки $\tilde{A}_{ik}$, $\tilde{B}_i$ (и, следовательно, относительно представления $g \to T_{(g^*)^{-1}}$).

Из этого, в частности, вытекает, что сопряженные представления $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ *одновременно приводимы или неприводимы*.

Найдем, как связаны пары (l_0, l_1) и $(\tilde{l}_0, \tilde{l}_1)$, определяющие два неприводимых сопряженных представления $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$.

Заметим, что равенства $T_{g_{ik}} = T_{\left(g_{ik}^*\right)^{-1}}$ (i, $k = 1$, 2, 3) означают, что представления группы вращений, порождаемые в пространстве R сопряженными представлениями $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$, совпадают. В частности, это значит, что для неприводимых сопряженных представлений $g \to T_g$ и $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ их наименьшие веса l_0 и $\tilde{l}_0$ равны (напомним, что l_0 — это наименьший из весов l неприводимых представлений группы вращений, участвующих в неприводимом представлении $g \to T_g$ собственной группы Лоренца).

Далее, из соотношений (22) и из формул (13)—(16) для инфинитезимальных операторов F_3, F_+, F_- неприводимого представления находим:

$$\tilde{A}_l = -A_l$$

или (см. формулу (16))

$$l_0 l_1 = -\tilde{l}_0 \tilde{l}_1.$$

Так как $l_0 = \tilde{l}_0$, то, следовательно,

$$l_1 = -\tilde{l}_1.$$

Итак, *если представление $g \to T_g$ неприводимо и определяется парой (l_0, l_1), то сопряженное к нему представление $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ также неприводимо и определяется парой $(l_0, -l_1)$ или, что одно и то же, $(-l_0, l_1)$*. Отсюда следует, что *неприводимое представление $g \to T_g$ эквивалентно своему сопряженному $g \to T_{(g^*)^{-1}}$ тогда и только тогда, когда либо $l_0 = 0$, либо $l_1 = 0$, т. е. одно из чисел пары (l_0, l_1) равно нулю.*

Условимся всюду в дальнейшем неприводимое представление, сопряженное представлению τ, обозначать $\dot{\tau}$.

Сопряженные неприводимые представления собственной группы Лоренца будут нами использованы в следующем параграфе для построения неприводимых представлений полной (общей) группы Лоренца.

Замечание. В дальнейшем мы будем называть сопряженным к представлению $g \to T_g$ не только представление $g \to T_{(g^*)^{-1}}$, действующее в том же пространстве, что и $g \to T_g$, но и любое представление, эквивалентное представлению $g \to T_{(g^*)^{-1}}$.

7. Конечномерные представления собственной группы Лоренца. Здесь мы еще раз укажем, какие пары (l_0, l_1) определяют конечномерные представления. Выше было замечено, что обращение C_{l_0+n+1} в первый раз в нуль, как это видно из формул (7), (8), (9), означает, что в неприводимом представлении содержатся все веса l_0, l_0+1, ..., l_0+n и только они. Обратно, для конечномерного представления с наибольшим весом $l = l_0 + n$, как снова видно из формул (7), (8), (9), C_{l_0+n+1} обращается в нуль: $C_{l_0+n+1}=0$. Но $C_{l_0+n+1}=0$, лишь если $l_1^2=(l_0+n+1)^2$ (см. (16)). Отсюда $|l_1|-1=l_0+n$, т. е. l_1 — целое или полуцелое число (одновременно с l_0), и $|l_1|-1$ есть наибольший вес, участвующий в конечномерном представлении. Таким образом, *представление конечномерно, когда l_0 и l_1 — одновременно целые или полуцелые числа и $|l_1|>|l_0|$. При этом в представлении участвуют все веса от $|l_0|$ до $|l_1|-1$ включительно. В случае других пар (l_0, l_1) представление бесконечномерно.*

Заметим еще, что с каждым конечномерным представлением, определяемым парой (l_0, l_1), тесно связано другое, бесконечномерное, представление с парой (l_1, l_0). Это представление называется «хвостом» конечномерного представления (l_0, l_1). Формулы для инфинитезимальных операторов «хвоста» почти такие же, как и для самого конечномерного представления, так как l_0 и l_1 входят в эти формулы симметрично. Только в первом случае $l_0 \leqslant l \leqslant |l_1|$, а во втором $|l_1| \leqslant l < \infty$.

Рассмотрим три важных примера конечномерных представлений собственной группы.

Первый пример. В § 1 мы построили соответствие между элементами $g_a \sim a_g$ собственной группы Лоренца и определенными с точностью до знака комплексными матрицами a_g второго порядка с определителем, равным 1. Легко проверить, что это соответствие задает неприводимое двузначное представление собственной группы Лоренца, действующее в двумерном комплексном пространстве $(z_0 z_1)$ по формуле

$$\left.\begin{aligned} z_0' &= a_{00}z_0 + a_{01}z_1, \\ z_1' &= a_{10}z_0 + a_{11}z_1, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

где матрица $\|a_{ij}\| = a_g$.

Заметим, что если g — вращение, то a_g — унитарная матрица и формула (23) задает обычное спинорное представление группы вращений веса $l=\frac{1}{2}$. Таким образом, в неприводимом представлении (23) участвует один вес $l=\frac{1}{2}$. Следовательно, числа пары (l_0, l_1), определяющей это представление, имеют вид $|l_0|=\frac{1}{2}$; $|l_1|=\frac{3}{2}$. Как мы знаем, числа l_0 и l_1 определены с точностью до одновременного изменения знака. Положим поэтому $l_1=\frac{3}{2}$. В § 4 мы вычислим инфинитезимальные операторы этого представления и убедимся, что $l_0=\frac{1}{2}$, т. е. пара (l_0, l_1) имеет вид $(l_0, l_1)=\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Второй пример. Кроме представления $g_a \to a_g$, в двумерном комплексном пространстве действует сопряженное ему представление

$g_a \to a_{(g^*)^{-1}} = \left(a_g^*\right)^{-1}$. Согласно результатам п. 6, это представление определяется парой $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Заметим, что, как мы видели в § 1, имеет место равенство $\left(a_g^*\right)^{-1} = \tau\bar{a}\tau^{-1}$, где $\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а $\bar{a}$ — матрица, комплексно-сопряженная матрице a. Это равенство означает, что представление $g_a \to \left(a_g^*\right)^{-1}$ эквивалентно представлению $g_a \to \bar{a}_g$, которое, следовательно, также определяется парой $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Из формул (13)—(19) для инфинитезимальных операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 неприводимого представления следует, что, кроме представления $g_a \to a$ и $g_a \to \bar{a}$, не существует никаких других неэквивалентных им неприводимых представлений в двумерном пространстве.

Третий пример — это тождественное представление $g \to g$ собственной группы, действующее в четырехмерном пространстве $R^{(4)}(x_0x_1x_2x_3)$. Представление это, как легко видеть, неприводимо. Найдем определяющую его пару (l_0, l_1). Пространство $R^{(4)}$ содержит два подпространства, инвариантных относительно вращений: временную ось $x_0 (x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ и трехмерное пространство $(x_1x_2x_3)$ $(x_0 = 0)$. Отсюда следует, что числа (l_0, l_1), определяющие представление $g \to g$, таковы: $l_0 = 0$; $l_1 = 2$. Канонический базис этого представления имеет следующий вид:

$$\xi_{00} = e_{x_0}, \qquad \xi_{1,-1} = \frac{e_{x_1} - ie_{x_2}}{2}, \qquad \xi_{10} = e_{x_3}, \qquad \xi_{11} = -\frac{e_{x_1} + ie_{x_2}}{2},$$

где e_{x_0}, e_{x_1}, e_{x_2}, e_{x_3} — орты координатных направлений x_0, x_1, x_2, x_3. В дальнейшем, в § 4, мы еще вернемся к описанным только что примерам.

8. Унитарные неприводимые представления собственной группы Лоренца. Унитарность представления означает, что в пространстве R, где действует представление $g \to T_g$, существует положительно определенная билинейная эрмитова форма, инвариантная относительно всех операторов T_g *).

Покажем, что в случае унитарного представления операторы H_3 и F_3 эрмитовы, т. е.

$$(H_3f, h) = (f, H_3h),$$
$$(F_3f, h) = (f, F_3h).$$

*) Напомним, что билинейная эрмитова форма (f, h) в R называется инвариантной, если для любых двух векторов f и h и любого оператора представления T_g

$$(T_gf, T_gh) = (f, h).$$

Действительно, пусть $g(\varphi)$ — поворот вокруг оси x_3 на маленький угол φ, $T_{g(\varphi)}$ — соответствующий оператор. Из определения оператора H_3 можно написать:

$$T_{g(\varphi)} = F + iH_3\varphi + o(\varphi).$$

Так как $T_{g(\varphi)}$ — унитарный оператор, то

$$T^*_{g(\varphi)} = T^{-1}_{g(\varphi)} = T_{g(-\varphi)}.$$

Отсюда

$$T^*_g = E - iH^*_3\varphi + o(\varphi) = E - iH_3\varphi + o(\varphi)$$

или

$$H^*_3 = H_3, \tag{24}$$

что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается эрмитовость F_3. Кроме того, сопряженным оператором к H_+ является оператор H_-, а к F_+ — оператор F_-:

$$H^*_+ = H_-, \qquad F^*_+ = F_-.$$

Легко проверить, что введенный нами в пространстве представления базис ξ_{lm} в случае унитарного представления является ортогональным *).

Найдем, какие пары (l_0, l_1) определяют унитарные представления. Из формулы (13) видно, что

$$(F_3\xi_{lm}, \xi_{lm}) = -mA_l(\xi_{lm}, \xi_{lm})$$

и

$$(\xi_{lm}, F_3\xi_{lm}) = -m\overline{A}_l(\xi_{lm}, \xi_{lm}),$$

откуда $\overline{A}_l = A_l$, т. е. A_l — действительное число. Но $A_l = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}$. Следовательно, могут быть два случая:

1) l_1 — чисто мнимое (l_0 — любое),

2) $l_0 = 0$.

Найдем ограничения, накладываемые в случае 2).

Напишем:

$$\left.\begin{aligned} (F_3\xi_{lm}, \xi_{l-1, m}) &= C_l\sqrt{(l-m)(l+m)} \\ &\text{и} \\ (\xi_{lm}, F_3\xi_{l-1, m}) &= -\overline{C}_l\sqrt{l^2-m^2}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

---

*) Это обстоятельство следует из того, что $\{\xi_{lm}\}$ — собственные векторы эрмитова оператора H_3 и при разных m имеют различные собственные значения, а также из формул (17), (18), (19), для двух сопряженных между собой операторов H_+ и H_-.

Таким образом, $C_l = -\overline{C}_l$, т. е. C_l — чисто мнимое. Для этого должно быть $\frac{(l^2-l_0^2)(l^2-l_1^2)}{4l^2-1} \geqslant 0$. Но $l > l_0$ и $l > \frac{1}{2}$, следовательно, $l^2 - l_1^2 \geqslant 0$. Если имеет место 1), т. е. l_1 — чисто мнимое, то последнее неравенство выполнено. Если $l_0 = 0$, то следующий вес $l = 1$ и, следовательно, $1 - l_1^2 \geqslant 0$, т. е. либо l_1 — действительное число и $|l_1| \leqslant 1$, либо l_1 — чисто мнимое, и мы приходим к случаю 1).

Таким образом, неприводимое представление собственной группы Лоренца унитарно лишь в следующих случаях:

1) l_1 — *чисто мнимое*, l_0 — *любое* (*целое или полуцелое*),

2) $l_0 = 0$, l_1 *действительно и* $|l_1| \leqslant 1$.

Совокупность неприводимых унитарных представлений, соответствующих случаю 1), называется *основной серией представлений*. Остальные неприводимые унитарные представления образуют *дополнительную серию*.

Заметим, что неприводимое унитарное представление конечномерно, лишь когда $l_0 = 0$, $l_1 = 1$. Это представление одномерно; других конечномерных неприводимых унитарных представлений нет.

9. Инвариантная эрмитова билинейная форма *). В предыдущем пункте мы выяснили, в каком случае неприводимое представление $g \to T_g$ собственной формы унитарно, т. е. когда такое представление допускает *положительно определенную* инвариантную эрмитову форму.

Мы видели, что это встречается редко. Оказывается, что даже если отбросить требование положительной определенности и искать все те неприводимые представления, которые допускают просто невырожденную **) инвариантную эрмитову форму (вообще говоря, индефинитную), то этих представлений хотя и больше, чем унитарных, но еще по-прежнему мало; ниже мы найдем все такие представления.

Но гораздо чаще встречается другая задача: в каком случае представление собственной группы $g \to T_g$, состоящее из двух неприводимых компонент, допускает инвариантную невырожденную эрмитову форму или, что одно и то же, когда из двух величин, преобразующихся по неприводимым представлениям собственной группы Лоренца, можно составить невырожденную инвариантную форму? В этом пункте мы решим эту задачу и решим ее, поскольку выкладки становятся не намного сложнее, в более общем виде, а именно: выясним, в каких случаях представление собственной группы (состоящее из любого числа неприводимых компонент) допускает инва-

*) Результаты этого пункта нам понадобятся лишь во второй главе. Поэтому при первом чтении можно этот пункт опустить.

**) Форма (ψ_1, ψ_2) называется невырожденной, если в пространстве R нет вектора ψ_0 такого, что $(\psi, \psi_0) = 0$ для всех ψ.

риантную невырожденную эрмитову форму, а также найдем ее общий вид.

Пусть пространство R, где действует представление $g \to T_g$ собственной группы, раскладывается в прямую сумму неприводимых подпространств R^τ, в которых действуют неприводимые компоненты τ представления $g \to T_g$ с парами $\tau \sim (l_0^\tau, l_1^\tau)$. Выберем в каждом из R канонический базис $\{\xi_{lm}^\tau\}$. Объединение этих базисов даст базис во всем пространстве R.

Запишем эрмитову билинейную форму (ψ_1, ψ_2) в базисе $\{\xi_{lm}^\tau\}$:

$$(\psi_1, \psi_2) = \sum a_{lml'm'}^{\tau\tau'} x_{lm}^\tau \overline{y_{l'm'}^{\tau'}}, \tag{26}$$

где x_{lm}^τ, $y_{l'm'}^{\tau'}$ — координаты векторов ψ_1, ψ_2 в базисе $\{\xi_{lm}^\tau\}$, а матрица $\|a_{lml'm'}^{\tau\tau'}\| = A$ — матрица билинейной формы, причем $a_{lml'm'}^{\tau\tau'} = \overline{a_{l'm'lm}^{\tau'\tau}}$. В случае невырожденной формы (ψ_1, ψ_2) матрица A также не вырождена, т. е. никакой вектор $\xi \neq 0$ не переводится этой матрицей в нуль.

Предположим, что форма (ψ_1, ψ_2) инвариантна относительно представления $g \to T_g$. Выясним, какие условия это требование налагает на матрицу A.

Пусть оператор представления $g \to T_g$ записывается в базисе $\{\xi_{lm}^\tau\}$ матрицей U_g. Очевидно, что для матрицы A инвариантной формы (ψ_1, ψ_2) выполнено соотношение

$$U_g A U_g^* = A$$

или

$$A U_g^{*-1} = U_g A. \tag{27}$$

Вращениям $\tilde{g}$, как мы знаем (в базисе $\{\xi_{lm}^\tau\}$), соответствуют унитарные матрицы. Отсюда для вращений получаем:

$$U_g A = A U_g, \tag{28}$$

т. е. матрицы U_g, соответствующие вращениям g, перестановочны с матрицей A.

Рассмотрим гиперболический поворот g_{03} в плоскости (x_0, x_3). Запишем при малых φ матрицы $U_{g_{03}(\varphi)}$ и $\left(U_{g_{03}(\varphi)}^*\right)^{-1}$:

$$\left.\begin{aligned} U_{g_{03}(\varphi)} &= E + i\varphi F_3 + o(\varphi), \\ U_{g_{03}(\varphi)}^{*-1} &= U_{g_{03}}^*(-\varphi) = E + i\varphi F_3^* + o(\varphi) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

(где F_3 — матрица оператора F_3).

Подставляя соотношения (29) в равенство (27), получаем:

$$A F_3 = F_3^* A. \tag{30}$$

Мы получили, таким образом, что матрица A, задающая в каноническом базисе ξ^{τ}_{lm} инвариантную билинейную эрмитову форму, удовлетворяет соотношениям:

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ U_g A = A U_g,\ \text{если } g \text{ — элемент группы вращения,} \\ 2)\ A F_3 - \overline{F}_3^{\,\text{тр}} A = 0 \ \text{и} \\ 3)\ A = A^*. \end{array}\right\} \qquad (31)$$

Легко показать, что, обратно, всякий оператор A, удовлетворяющий этим соотношениям, задает в каноническом базисе форму, инвариантную относительно представления собственной группы Лоренца.

Сейчас мы найдем общее решение соотношений (31), а также выясним, какие неприводимые компоненты τ содержатся в представлении $g \to T_g$, допускающем инвариантную форму.

Остановимся сначала на первом условии и найдем общий вид оператора A, перестановочного со всеми U_g, когда g — вращение.

Заметим, что матрица U_g представления группы вращений в каноническом базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}\}$ и может быть записана в следующем «клеточном» виде:

$$U_g = \begin{Vmatrix} U^{\tau_1}_{gl_1} & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 0 & U^{\tau_2}_{gl_2} & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \ldots & U^{\tau_k}_{gl_s} & \ldots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots \end{Vmatrix},$$

где U^{τ}_{gl} — матрица неприводимого представления группы вращений с весом l, участвующего в неприводимой компоненте τ представления $g \to T_g$ всей собственной группы. Матрицу билинейной формы

$$A = \left\| a^{\tau\tau'}_{lml'm'} \right\|$$

аналогичным образом разобьем на клетки:

$$A = \begin{Vmatrix} A^{\tau_1\tau_1}_{l_1 l_1} & A^{\tau_1\tau_2}_{l_1 l_2} & \ldots & A^{\tau_1\tau_k}_{l_1 l_s} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A^{\tau_k\tau_1}_{l_s l_1} & A^{\tau_k\tau_2}_{l_s l_2} & \ldots & A^{\tau_k\tau_k}_{l_s l_s} & \ldots \end{Vmatrix},$$

где

$$A^{\tau\tau'}_{ll'} = \left\| a^{\tau\tau'}_{lml'm'} \right\| \qquad (m = -l, \ldots, l; \quad m' = -l', \ldots, l')$$

— прямоугольная матрица размером $(2l+1) \times (2l'+1)$.

Из соотношения

$$U_g A = A U_g$$

вытекает, что

$$U^{\tau}_{gl} A^{\tau\tau'}_{ll'} = A^{\tau\tau'}_{ll'} U^{\tau'}_{gl}. \qquad (31')$$

Из этого равенства в силу общей леммы Шура (см. § 1, п. 7) следует, что матрица $A^{\tau\tau}_{ll'}$ либо равна нулю, либо является квадратной невырожденной матрицей. В последнем случае представления U^{τ}_{gl} и $U^{\tau'}_{gl'}$ эквивалентны, следовательно, $l = l'$ и матрица $A^{\tau\tau}_{ll}$ имеет вид

$$A^{\tau\tau'}_{ll'} = A^{\tau\tau'}_{l} \delta_{ll'},$$

где $\delta_{ll'} = 1$ при $l = l'$ и $\delta_{ll'} = 0$ при $l \neq l'$.

Далее, так как представления U^{τ}_{gl} и $U^{\tau'}_{gl}$ эквивалентны, то их матрицы, записанные в каноническом базисе, совпадают, т. е.

$$U^{\tau}_{gl} = U^{\tau'}_{gl}.$$

Равенство (31) принимает вид

$$U^{\tau}_{gl} A^{\tau\tau'}_{l} = A^{\tau\tau'}_{l} U^{\tau}_{gl},$$

т. е. матрица $A^{\tau\tau'}_{l}$ перестановочна с матрицами U^{τ}_{gl} неприводимого представления группы вращений. Такая матрица, как мы знаем, кратна единичной

$$A^{\tau\tau'}_{l} = a^{\tau\tau'}_{l} E.$$

Отсюда для матричных элементов $a^{\tau\tau'}_{lml'm'}$ получаем окончательное выражение

$$a^{\tau\tau'}_{lml'm'} = a^{\tau\tau'}_{l} \delta_{mm'} \delta_{ll'}. \qquad (32)$$

Отметим, что при выводе формулы (32) мы пользовались только тем, что матрица A коммутирует с матрицами представления группы вращений.

Таким образом, *матрица всякого оператора, коммутирующего с операторами из представления группы вращений, или, что одно и то же, с инфинитезимальными операторами H_+, H_-, H_3 этого представления, в каноническом базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}\}$ имеет вид* (32).

Полученной формулой (32) мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Нам осталось теперь найти вид чисел $a^{\tau\tau'}_{l}$. Воспользуемся теперь соотношением 2) из (31), которое можно переписать так:

$$(F_3 \xi^{\tau}_{lm},\ \xi^{\tau'}_{l'm'}) = (\xi^{\tau}_{lm} F \xi^{\tau'}_{l'm'}) \qquad (33)$$

для любой пары базисных векторов ξ^{τ}_{lm} и $\xi^{\tau'}_{l'm'}$. Подставляя в (33) выражение для F_3 (см. (13)) и раскрывая (33) с помощью (26) и (32), мы придем к следующим равенствам:

$$A_l^{\tau} a_l^{\tau\tau'} = \overline{A}_l^{\tau'} a_l^{\tau\tau'}, \tag{34}$$

$$C_l^{\tau} a_l^{\tau\tau'} = -\overline{C}_l^{\tau'} a_{l-1}^{\tau\tau'}, \tag{35}$$

$$\overline{C}_l^{\tau'} a_l^{\tau\tau'} = -C_l^{\tau} a_{l-1}^{\tau\tau'}. \tag{36}$$

Из этих равенств и из формул (16) получаем, что $a_l^{\tau\tau'} \neq 0$ и $a_{l-1}^{\tau\tau'} \neq 0$ только при

$$l_0 l_1 + l'_0 \overline{l}'_1 = 0,$$

$$l_0^2 + l_1^2 = l_0'^2 + l_1'^2.$$

Отсюда следует, что

$$(l'_0,\ l'_1) = (l_0,\ -\overline{l}_1) \qquad [\text{или } (l'_0,\ l'_1) = (-l_0,\ \overline{l}_1)].$$

Так как мы предполагаем, что форма $(\psi_1,\ \psi_2)$ не вырождена, то для каждой компоненты τ представления $g \to T_g$ найдется такая компонента τ^*, что $a_l^{\tau\tau^*} \neq 0$ при всех l. Таким образом, инвариантная невырожденная билинейная форма может существовать лишь в том случае, если *в представлении $g \to T_g$ наряду с каждой неприводимой компонентой τ, определяемой числами $(l_0,\ l_1)$, содержится неприводимая компонента τ^*, определяемая числами $(l_0,\ -\overline{l}_1)$*. В частности, если представление $g \to T_g$ состоит из одной компоненты, т. е. если это представление неприводимое, то инвариантная билинейная форма существует лишь при условии $(l_0,\ l_1) = \pm(l_0,\ -\overline{l}_1)$, т. е. либо 1) l_1 — чисто мнимое, а l_0 — любое целое или полуцелое, либо 2) l_1 вещественно, а $l_0 = 0$ *).

Заметим еще, что если представление $g \to T_g$ (для которого инвариантная невырожденная форма существует) содержит несколько эквивалентных между собой компонент $\tau_1, \ldots, \tau_n$, то оно должно содержать столько же эквивалентных между собой компонент $\tau_1^*, \ldots, \tau_n^*$.

Определим теперь числа $a_l^{\tau\tau^*}$. Из (35) имеем:

$$a_l^{\tau\tau^*} = -\frac{\overline{C}_l^{\tau^*}}{C_l^{\tau}} a_{l-1}^{\tau\tau^*}. \tag{37}$$

*) Интересно сравнить полученный результат с результатами предыдущего пункта, где отыскивались условия унитарности неприводимого представления. Унитарность означает существование инвариантной эрмитовой *положительно определенной* формы. Полученные там дополнительные ограничения во втором случае ($l_0 = 0$, l_1 вещественно и $|l_1| \leqslant 1$) связаны с положительной определенностью формы, задающей скалярное произведение.

Поскольку $-\dfrac{\overline{C}_l^{\tau^*}}{C_l^{\tau}}=\pm 1$ (см. формулу (16)), то

$$a_l^{\tau\tau^*}=\pm a^{\tau\tau^*}. \tag{38}$$

Заметим, что в случае конечномерного представления (l_1 действительно и $l<|l_1|$) отношение $\dfrac{\overline{C}_l^{\tau^*}}{C_l^{\tau}}$ можно считать положительным (см. сноску на стр. 198), т. е. для конечномерного представления $a_l^{\tau\tau^*}=-a_{l-1}^{\tau\tau^*}$.

Числа $a^{\tau\tau^*}=a^{-\tau^*\tau}$ могут быть любыми. Различным наборам этих чисел соответствуют различные билинейные инвариантные формы.

Подведем итог всему сказанному.

Представление собственной группы Лоренца $g\to T_g$ допускает инвариантную невырожденную эрмитову билинейную форму в том и только том случае, когда в этом представлении число неприводимых компонент τ, определяемых парой (l_0, l_1), совпадает с числом неприводимых компонент τ^*, определенных парой $(l_0, -\bar{l}_1)$ (или и тех и других — бесконечное число). *При этом сама инвариантная невырожденная эрмитова форма в каноническом базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}\}$ представления $g\to T_g$ имеет вид*

$$(\psi_1, \psi_2)=\sum a^{\tau\tau^*}s_l^{\tau\tau^*}x_{lm}^{\tau}\overline{y}_{lm}^{\tau^*}, \tag{39}$$

где $\{x_{lm}^{\tau}\}$ и $\{y_{lm}^{\tau^*}\}$ — координаты векторов ψ_1 и ψ_2 в каноническом базисе. Здесь $s_l^{\tau\tau^*}=\pm 1$, причем для конечномерных представлений можно положить $s_l^{\tau\tau^*}=(-1)^{[l]}$; числа $a^{\tau\tau^*}=a^{-\tau^*\tau}$ произвольны, с тем, однако, условием, чтобы матрица $\|a^{\tau_i\tau_j^*}\|$, где $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ — набор всех эквивалентных между собой компонент (равно как и набор $\overset{*}{\tau}_1, \ldots, \overset{*}{\tau}_n$), была невырожденной.

В том частном, но важном случае, когда *представление $g\to T_g$ собственной группы состоит из двух неприводимых компонент $\tau\sim(l_0, l_1)$ и $\tau'\sim(l_0', l_1')$, инвариантная невырожденная эрмитова форма существует тогда и только тогда, когда пары (l_0, l_1) и (l_0', l_1') связаны соотношением $(l_0', l_1')=\pm(l_0, -\bar{l}_1)$*; иными словами, *из двух величин, преобразующихся по неприводимым представлениям τ и τ' собственной группы Лоренца, можно составить невырожденную инвариантную эрмитову форму в том и только том случае, когда эти представления задаются парами $\tau\sim(l_0, l_1)$, $\tau'=\tau^*\sim(l_0, -\bar{l}_1)$.*

Заметим, что, перейдя в R к новой системе координат, мы можем привести нашу форму к некоторому более простому виду.

Действительно, пусть $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — эквивалентные между собой компоненты, определяемые парой (l_0, l_1), а $\overset{*}{\tau}_1, \ldots, \overset{*}{\tau}_n$ — эквивалентные компоненты, отвечающие паре $(l_0, -\bar{l}_1)$. Инвариантная невырожденная форма может существовать, лишь если тех и других компонент имеется одинаковое число (может быть, и бесконечное).

Выбрав векторы

$$\xi'^{\tau_i}_{lm} = \sum_j \alpha(\tau_i \tau_j)\, \xi^{\tau_j}_{lm},$$

$$\xi'^{\overset{*}{\tau}_i}_{lm} = \sum_j \alpha(\overset{*}{\tau}_i \overset{*}{\tau}_j)\, \xi^{\overset{*}{\tau}_j}_{lm}$$

за новые координатные векторы в пространстве, натянутом на векторы $\{\xi^{\tau_j}_{lm}\}$ и $\{\xi^{\overset{*}{\tau}_k}_{lm}\}$, мы всегда можем добиться того, что

$$a^{\tau_i \overset{*}{\tau}_j} = \delta_{ij}. \tag{40}$$

Точно так же, если $\tau_1, \ldots, \tau_n$ — совокупность эквивалентных компонент, для которых τ_k эквивалентно $\overset{*}{\tau}_k$, то, вводя новые векторы

$$\xi'^{\tau_i}_{lm} = \sum \alpha(\tau_i \tau_j)\, \xi^{\tau_j}_{lm},$$

мы добьемся того, чтобы

$$a^{\tau_i \tau_j} = \pm \delta_{ij}. \tag{41}$$

Приведение билинейной формы к описанному виду вполне аналогично приведению квадратичной формы к сумме квадратов.

§ 3. Представления полной и общей групп Лоренца*)

1. Предварительные замечания. Напомним, что полная группа Лоренца получается из собственной группы Лоренца добавлением пространственного отражения, т. е. преобразования s с матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

и всевозможных произведений вида sg', где g' — собственное преобразование Лоренца. Преобразования вида sg' будем называть несобственными преобразованиями Лоренца.

Пусть задано какое-нибудь представление полной группы Лоренца $g \to T_g$. Тем самым возникает и представление собственной группы $g' \to T_{g'}$. Обозначим через S оператор, соответствующий отражению s, $s \to S$ $(S^2 = E)$. Тогда каждому несобственному преобразованию Лоренца sg' соответствует оператор $ST_{g'}$. Пусть по-прежнему H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 — инфинитезимальные операторы представ-

*) Этот параграф помещен здесь по логике изложения, однако мы рекомендуем читателю при первом чтении его опустить и сразу перейти к четвертому параграфу.

ления $g' \to T_{g'}$ собственной группы. По этим операторам представление $g' \to T_{g'}$ однозначно восстанавливается. Для того чтобы получить представление $g \to T_g$ полной группы, нужно знать еще, как действует оператор S. *Итак, представление полной группы задается инфинитезимальными операторами H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 и оператором S, соответствующим отражению s.*

Напишем соотношения коммутации между операторами H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 и S. Поскольку отражение перестановочно с вращениями, то и оператор S коммутирует с операторами, соответствующими вращениям. Следовательно, имеют место соотношения

$$SH_+S^{-1} = H_+, \quad SH_-S^{-1} = H_-, \quad SH_3S^{-1} = H_3. \tag{1}$$

Если рассмотреть преобразования в плоскостях (x_0, x_1), (x_0, x_2), (x_0, x_3), то можно легко убедиться, что для этих преобразований имеют место равенства $s^{-1}g_0ks = g_{0k}^{-1}$ $(k = 1, 2, 3)$ (g_{0k} — собственное преобразование Лоренца в плоскости (x_0, x_k)).

Аналогичные равенства возникают и для операторов $T_{g_{0k}}$ и S

$$S^{-1}T_{g_{0k}}S = T_{g_{0k}}^{-1}.$$

Отсюда для инфинитезимальных операторов получаем:

$$SF_+S^{-1} = -F_+, \quad SF_-S^{-1} = -F_-, \quad SF_3S^{-1} = -F_3. \tag{2}$$

В следующем пункте мы найдем вид операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 и S для неприводимого представления полной группы Лоренца.

Сделаем предварительно следующее замечание. Пусть в пространстве R действует представление полной группы Лоренца $g \to T_g$ (приводимое или неприводимое — безразлично) и $g' \to T_{g'}$ — порождаемое им представление собственной группы в R, S — оператор, соответствующий отражению. Напомним, что для элементов собственной группы g' имеет место равенство $sg's^{-1} = (g')^{*-1}$ (s — пространственное отражение).

Аналогичное равенство имеет место и для операторов представления $g' \to T_{g'}$ и S

$$ST_{g'}S^{-1} = T_{(g')^{*-1}}. \tag{3}$$

Напомним, что представление $g' \to T_{(g')^{*-1}}$ собственной группы Лоренца мы назвали сопряженным к представлению $g' \to T_{g'}$.

Равенство (3) означает, что представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы Лоренца эквивалентно представлению $g' \to T_{(g')^{*-1}}$.

Таким образом, представление собственной группы Лоренца $g' \to T_{g'}$, порождаемое представлением полной группы Лоренца

$g \to T_g$, *эквивалентно своему сопряженному представлению* $g' \to T_{(g')^{*-1}}$.

После этого замечания перейдем к описанию неприводимых представлений полной группы Лоренца.

2. Неприводимые компоненты представления собственной группы Лоренца, порожденного неприводимым представлением полной группы. В пространстве R, где действует неприводимое представление $g \to T_g$ полной группы, задано тем самым представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы (вообще говоря, приводимое).

Покажем, что представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы Лоренца в пространстве R или неприводимо, или раскладывается в сумму двух неприводимых представлений (т. е. пространство R разбивается на два подпространства, неприводимых относительно представления $g' \to T_{g'}$). Пусть R^{τ} — подпространство из R, где представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы неприводимо и определяется парой $\tau \sim (l_0, l_1)$. Обозначим через $\dot{R}^{\tau}$ образ подпространства R_{τ} при действии оператором S (т. е. совокупность всех векторов вида $S\xi$, где ξ — элемент R^{τ}). Очевидно, что $\dot{R}^{\tau}$ является подпространством в R. Оказывается, что $\dot{R}^{\tau}$ инвариантно относительно операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3. Действительно, R инвариантно относительно операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3, т. е.

$$H_{\alpha}R^{\tau} = R^{\tau}, \qquad F_{\alpha}R^{\tau} = \dot{R}^{\tau} \qquad (\alpha = -, +, 3).$$

Но в этом случае из соотношений коммутации (1) имеем:

$$H_{\alpha}\dot{R}^{\tau} = H_{\alpha}SR^{\tau} = SH_{\alpha}R^{\tau} = SR^{\tau} = \dot{R}^{\tau}$$

и

$$F_{\alpha}\dot{R}^{\tau} = F_{\alpha}SR^{\tau} = -SFR^{\tau} = -SR^{\tau} = -\dot{R}^{\tau} = \dot{R}^{\tau},$$

т. е. $\dot{R}^{\tau}$ инвариантно относительно операторов H_{α} и F_{α}, и следовательно, инвариантно относительно операторов $T_{g'}$, соответствующих собственным преобразованиям Лоренца. Нетрудно видеть, что представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, действующее в $\dot{R}^{\tau}$, неприводимо. Действительно, если бы в $\dot{R}^{\tau}$ нашлось подпространство R'^{τ}, инвариантное относительно представления $g' \to T_{g'}$ собственной группы, то $S\dot{R}'^{\tau}$ снова было бы инвариантно относительно этого представления $g' \to T_{g'}$. Но поскольку $S\dot{R}^{\tau} = R^{\tau}$ (вспомним, что $S^2 = E$), то $S\dot{R}'^{\tau}$ составляло бы часть пространства R^{τ} и представление $g' \to T_{g'}$ в R^{τ} было бы приводимо, вопреки тому, что предполагалось о пространстве R^{τ}.

Таким образом, в пространстве R, где действует неприводимое представление полной группы, наряду с каждым подпространством R^{τ}, в котором представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, неприводимо, есть подпространство $R^{\dot{\tau}}$, в котором представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы также неприводимо (при этом $SR^{\tau} = R^{\dot{\tau}}$).

Заметим, что пространства R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ либо совпадают, либо не имеют отличных от нуля общих элементов. Действительно, подпространство $\tilde{R}$, по которому пересекаются пространства R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$, инвариантно относительно представления $g' \to T_{g'}$ собственной группы. В силу неприводимости обоих пространств R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ подпространство $\tilde{R}$ либо совпадает с каждым из них (и, следовательно, сами эти пространства совпадают), либо равно нулю.

Итак, возможны два случая.

1. Пространства R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ совпадают друг с другом и, следовательно, со всем пространством R, где действует неприводимое представление полной группы Лоренца. Другими словами, *представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, порождаемое неприводимым представлением полной группы, также неприводимо.*

2. Пространства R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ не имеют общих элементов, отличных от нуля. В этом случае, очевидно, их прямая сумма совпадает со всем пространством R, где действует неприводимое представление полной группы.

Покажем, что в случае 2 представления собственной группы, действующие в R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$, *сопряжены друг другу и не эквивалентны между собой.*

Запишем тождество (3) в виде

$$ST_{g'} = T_{(g'^{*})^{-1}}S. \tag{3'}$$

Применим левую и правую части (3) к вектору ξ из R^{τ}. Так как $T_{g'}$ порождает в R^{τ} представление $T^{\tau}_{g'}$, а в $R^{\dot{\tau}}$—представление $T^{\dot{\tau}}_{g'}$, и так как S переводит R^{τ} в $R^{\dot{\tau}}$, имеем:

$$ST^{\tau}_{g'}\xi = T^{\dot{\tau}}_{(g')^{*-1}}S\xi. \tag{3''}$$

В силу определения эквивалентных представлений (§ 1, п. 6) равенство (3″) означает, что представления $T^{\tau}_{g'}$ и $T^{\dot{\tau}}_{(g')^{*-1}}$ эквивалентны, т. е. представление $T^{\tau}_{g'}$ сопряжено представлению $T^{\dot{\tau}}_{g'}$.

Осталось показать, что представления $T^{\tau}_{g'}$ и $T^{\dot{\tau}}_{g'}$ не эквивалентны. Для этого покажем, что если они эквивалентны, то представление $g \to T_g$ полной группы в пространстве R приводимо.

Действительно, пусть представления $g' \to T_{g'}^{\tau}$ и $g' \to T_{g'}^{\dot{\tau}}$ эквивалентны. Пользуясь этим построим в пространстве R оператор L, не кратный единичному и перестановочный со всеми операторами T_g представления $g \to T_g$ полной группы. Это и будет означать, что представление $g \to T_g$ приводимо.

Оператор L строится так: выберем в R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ базисы так, чтобы операторы $T_{g'}^{\tau}$ и $T_{g'}^{\dot{\tau}}$ записывались в них одинаковой матрицей A_g. (Это возможно, поскольку представления $T_{g'}$ и $T_{g'}^{\dot{\tau}}$ эквивалентны.) Объединив оба эти базиса, мы получим во всем пространстве R базис, в котором оператор $T_{g'}$ запишется матрицей

$$T_{g'} = \begin{Vmatrix} A_{g'} & 0 \\ 0 & A_{g'} \end{Vmatrix},$$

а оператор S, переставляющий пространства R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$, — матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma \\ \tilde{\sigma} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку $S^2 = E$, то $\sigma\tilde{\sigma} = E$, и окончательно

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma^{-1} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Соотношение $ST_{g'}S^{-1} = T_{(g'^*)^{-1}}$ превращается, очевидно, в

$$\sigma A_{g'} \sigma^{-1} = A_{(g')^{*-1}}.$$

Рассмотрим теперь оператор

$$S_1 = \begin{Vmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{Vmatrix}.$$

В силу только что сказанного

$$S_1 T_{g'} S_1^{-1} = T_{(g')^{*-1}}. \qquad (3''')$$

Наконец, строим оператор

$$L = S_1 S = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ E & 0 \end{pmatrix}.$$

Из (3′) и (3‴), очевидно, вытекает, что $LT_{g'} = T_{g'}L$. Кроме того, с помощью непосредственной выкладки убеждаемся, что $LS = SL$. Итак, мы построили оператор L, не кратный единичному и перестановочный со всеми операторами представления полной группы. Таким образом, доказано, что для неприводимого представления полной группы компоненты T_g^{τ} и $T_g^{\dot{\tau}}$ представления собственной группы не эквивалентны.

Перейдем к нахождению пар (l_0, l_1), которыми определяются неприводимые компоненты представления собственной группы, порожденные неприводимым представлением полной группы Лоренца.

Первый случай. Представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы Лоренца (порожденное неприводимым представлением полной группы Лоренца) неприводимо.

Как мы знаем, это представление эквивалентно своему сопряженному. Напомним, что если неприводимое представление собственной группы Лоренца $g' \to T_{g'}$ определяется парой (l_0, l_1), то сопряженное ему представление $g' \to T_{(g')^{*-1}}$ также неприводимо и определяется парой $\pm(l_0, -l_1)$. Отсюда следует, что неприводимое представление, эквивалентное своему сопряженному, должно определяться парой вида $(0, l_1)$ или $(l_0, 0)$ (т. е. одно из чисел l_0 или l_1 равно нулю).

Итак, в случае, когда *неприводимое представление полной группы Лоренца $g \to T_g$ порождает неприводимое представление собственной группы $g' \to T'_g$, пара (l_0, l_1), определяющая это представление, имеет вид $(0, l_1)$ или $(l_0, 0)$.*

Второй случай. Представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы распадается на две неприводимые компоненты.

Пусть одна из них задается парой (l_0, l_1). Так как вторая компонента сопряжена ей, то она задается парой $\pm(l_0, -l_1)$. Ввиду того, что эти компоненты не эквивалентны, ни одно из чисел l_0 и l_1 не равно нулю.

Таким образом, *в случае, когда представление собственной группы, порожденное неприводимым представлением полной группы, состоит из двух компонент, то последние задаются парами (l_0, l_1) и $\pm(l_0, -l_1)$, причем ни одно из чисел l_0 и l_1 не равно нулю.*

3. Оператор пространственного отражения. Найдем вид оператора пространственного отражения S в базисе $\{\xi_{lm}\}$ — каноническом базисе представления $g' \to T_{g'}$ собственной группы.

I. Рассмотрим сначала первый случай (представление $g' \to T_{g'}$ неприводимо).

Напишем:

$$S\xi_{lm} = \sum_{l'm'} s_{lml'm'}\xi_{l'm'}. \tag{4}$$

Мы определим общий вид чисел $s_{lml'm'}$.

Воспользуемся соотношениями (1), означающими, что оператор S коммутирует с операторами представления группы вращений $\tilde{g} \to T_{\tilde{g}}$ ($\tilde{g}$ — вращение), порожденного представлением полной группы. В п. 8 предыдущего параграфа был найден общий вид матрицы такого оператора в каноническом базисе $\{\xi_{lm}\}$. Согласно полученной там формуле (32) числа $s_{lml'm'}$ имеют вид

$$s_{lml'm'} = s_l\delta_{mm'}\delta_{ll'} \tag{4'}$$

(индексы τ и τ', фигурирующие в формуле (32), мы опускаем). Нам остается найти числа s_l.

Воспользуемся для этого соотношением $SF_3 = -F_3S$ или $SF_3\xi_{lm} = -F_3S\xi_{lm}$. Подставляя в это равенство выражение для оператора F_3 (см. § 2, (14)) и учитывая, что число A_l, входящее в выражение для этого оператора, равно в нашем случае нулю, мы получим:

$$s_l = -s_{l-1}\ ^{*)}.$$

Таким образом, получаем:

$$s_l = (-1)^{[l]} s_{l_0}$$

(l_0 — наименьший вес, участвующий в представлении $g' \to T_{g'}$). Так как $S^2 = E$, то $s_{l_0} = \pm 1$.

Итак, для оператора S мы получаем два выражения, отличающиеся лишь знаком,

$$S\xi_{lm} = (-1)^{[l]}\xi_{lm} \tag{5}$$

или

$$S\xi_{lm} = (-1)^{[l]+1}\xi_{lm}. \tag{5'}$$

Это и есть окончательный вид оператора S.

Заметим, что оба выражения (5) и (5′) для оператора S приводят к двум *неэквивалентным* представлениям полной группы $^{**)}$.

Таким образом, получили следующий результат:

В случае, когда неприводимое представление полной группы Лоренца $g \to T_g$ порождает неприводимое представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, последнее эквивалентно своему сопряженному $g' \to T_{(g')^{*-1}}$ (т. е. определяется парой вида $(0, l_1)$ *или* $(l_0, 0)$), *а оператор S в каноническом базисе представления $g' \to T_{g'}$ имеет вид* (5) *или* (5′) (*отличающийся от первого лишь знаком*).

Легко видеть, что, по существу, нами доказано также обратное утверждение:

---

*) Согласно формуле (16) § 2 $A_l = \frac{il_0l_1}{l(l+1)}$; так как либо $l_0 = 0$, либо $l_1 = 0$, то $A_l = 0$.

**) Покажем, что обе формулы для оператора S приводят к двум неэквивалентным представлениям $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$ полной группы. Действительно, пусть они эквивалентны, т. е. найдется такой оператор B, что

$$BT_g^{(1)} = T_g^{(2)}B.$$

Поскольку для элементов собственной группы g' $T_{g'}^{(1)} = T_{g'}^{(2)}$ и представление $g' \to T_{g'}^{(1)}$ собственной группы неприводимо, то $B = \lambda E$. Отсюда следует, что

$$S^{(2)} = BS^{(1)}B^{-1} = S^{(2)},$$

т. е. вид оператора S у обоих эквивалентных представлений $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$ одинаков, т. е. либо задается формулой (5), либо формулой (5′).

Всякое неприводимое представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, *эквивалентное своему сопряженному* (*т. е. определяемое парой вида* $(0, l_1)$ *или* $(l_0, 0)$), *может быть дополнено до представления полной группы Лоренца* $g \to T_g$, *действующего в том же пространстве двумя неэквивалентными способами, отличающимися знаком оператора* S. *Сам оператор* S *действует либо по формуле* (5), *либо по формуле* (5′).

II. Перейдем ко второму случаю. Представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы, порожденное неприводимыми представлениями полной группы Лоренца, приводимо и раскладывается в сумму двух представлений $g' \to T^{\tau}_{g'}$ и $g' \to T^{\dot\tau}_{g'}$, действующих соответственно в пространствах R^{τ} и $R^{\dot\tau}$. При этом, как мы видели, пространства R^{τ} и $R^{\dot\tau}$ переходят друг в друга под действием оператора S: $SR^{\tau} = R^{\dot\tau}$ и $SR^{\dot\tau} = R^{\tau}$. Выберем в пространстве R базис $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot\tau}_{lm}\}$, составленный из канонических базисов представлений $g' \to T^{\tau}_{g'}$ и $g' = T^{\dot\tau}_{g'}$ в пространствах R^{τ} и $R^{\dot\tau}$. Найдем вид оператора S в базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot\tau}_{lm}\}$. Напишем

$$S\xi^{\tau}_{lm} = \sum s^{\tau\dot\tau}_{lml'm'}\xi^{\dot\tau}_{l'm'} \quad \text{и} \quad S\xi^{\dot\tau}_{lm} = \sum s^{\dot\tau\tau}_{lml'm'}\xi^{\tau}_{l'm'}. \tag{6}$$

Мы должны найти общий вид чисел $s^{\tau\dot\tau}_{lml'm'}$ и $s^{\dot\tau\tau}_{lml'm'}$. Снова воспользуемся, прежде всего, тем, что оператор S перестановочен со всеми операторами представления группы вращений, порожденного исследуемым представлением общей группы Лоренца. Как упоминалось выше, общий вид такого оператора был найден в предыдущем параграфе (п. 8). Используя выведенную там формулу (32), получаем:

$$s^{\tau\dot\tau}_{lml'm'} = s^{\tau\dot\tau}_{l}\delta_{mm'}\delta_{ll'}; \qquad s^{\dot\tau\tau}_{lml'm'} = s^{\dot\tau\tau}_{l}\delta_{mm'}\delta_{ll'}. \tag{6′}$$

Итак, оператор S в базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot\tau}_{lm}\}$ имеет вид

$$S\xi^{\tau}_{lm} = s^{\tau\dot\tau}_{l}\xi^{\dot\tau}_{lm}; \qquad S\xi^{\dot\tau}_{lm} = s^{\dot\tau\tau}_{l}\xi^{\tau}_{lm}. \tag{6″}$$

Заметим, кроме того, что из равенства $S^2 = E$ следует, что

$$s^{\tau\dot\tau}_{l}s^{\dot\tau\tau}_{l} = 1.$$

Нам осталось определить числа $s^{\tau\dot\tau}_{l}$ и $s^{\dot\tau\tau}_{l}$. Обратимся для этого к соотношению коммутации $F_3S = -SF_3$. Пользуясь формулами (см. § 2, (6″) и (13)), получим следующие равенства:

$$A^{\tau}_{l}s^{\tau\dot\tau}_{l} + A^{\dot\tau}_{l}s^{\dot\tau\tau}_{l} = 0,$$
$$C^{\tau}_{l}s^{\tau\dot\tau}_{l} + C^{\dot\tau}_{l}s^{\dot\tau\tau}_{l-1} = 0,$$
$$C^{\dot\tau}_{l}s^{\dot\tau\tau}_{l} + C^{\tau}_{l}s^{\tau\dot\tau}_{l-1} = 0.$$

Поскольку для двух сопряженных между собой представлений $g \to T_g^{\tau}$ и $g \to T_g^{\dot\tau}$ $A_l^{\dot\tau} = -A_l^{\tau}$, а $C_l^{\dot\tau} = C_l^{\tau}$ (см. формулы (16) § 2), то первое равенство удовлетворяется автоматически, а из двух других следует, что

$$s_l^{\tau\dot\tau} = -s_{l-1}^{\tau\dot\tau} \quad \text{и} \quad s_l^{\dot\tau\tau} = -s_{l-1}^{\dot\tau\tau}.$$

Отсюда

и

$$\left.\begin{aligned} s_l^{\tau\dot\tau} = (-1)^{[l]}\, s_{l_0}^{\tau\dot\tau}, \qquad s_l^{\dot\tau\tau} = (-1)^{[l]}\, s_{l_0}^{\dot\tau\tau} \\ s_{l_0}^{\tau\dot\tau} s_{l_0}^{\dot\tau\tau} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Формулы (7) для чисел $s_l^{\tau\dot\tau}$ и $s_l^{\dot\tau\tau}$ дают общий вид оператора S в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$. Заметим, что при выводе этих формул мы пользовались только соотношениями коммутации между оператором S и инфинитезимальными операторами H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 представления собственной группы Лоренца $g' \to T_{g'}$ и равенством $S^2 = E$.

Таким образом, *формулы* (7) *дают общий вид оператора* S, *который удовлетворяет соотношениям коммутации* (1), (2) *и действует в том же пространстве, где задано неприводимое представление полной группы Лоренца (порождающее приводимое представление* $g' \to T_{g'}$ *собственной группы*). Этим замечанием мы воспользуемся в следующих пунктах для построения представлений общей группы Лоренца.

Оператор S, определенный формулами (7), может быть приведен к еще более простому виду преобразованием базиса $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$, не меняющим вида операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3. Положим с этой целью $\xi_{lm}'^{\tau} = \alpha\xi_{lm}^{\tau}$, $\xi_{lm}'^{\dot\tau} = \beta\xi_{lm}^{\dot\tau}$. Мы получим, что при этом в новом базисе $\{\xi_{lm}'^{\tau}\, \xi_{lm}'^{\dot\tau}\}$

$$s_{l_0}'^{\tau\dot\tau} = \frac{\alpha}{\beta}\, s_{l_0}^{\tau\dot\tau}, \qquad s_{l_0}'^{\dot\tau\tau} = \frac{\beta}{\alpha}\, s_{l_0}^{\dot\tau\tau}.$$

Выбирая подходящим образом α и β, можно добиться, чтобы

$$s_{l_0}'^{\tau\dot\tau} = s_{l_0}'^{\dot\tau\tau} = 1.$$

Итак, для оператора S получаем окончательно:

$$\left.\begin{aligned} S\xi_{lm}^{\tau} &= (-1)^{[l]}\, \xi_{lm}^{\dot\tau}, \\ S\xi_{lm}^{\dot\tau} &= (-1)^{[l]}\, \xi_{lm}^{\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Таким образом, в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}\, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$ оператор S записывается матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \tilde{S} \\ \tilde{S} & 0 \end{Vmatrix},$$

где матрица $\tilde{S}$ имеет вид

$$\tilde{S} = \|(-1)^l \delta_{ll}\delta_{mm}\|.$$

Подведем итог сказанному.

В случае, когда неприводимое представление полной группы $g \to T_g$ *порождает приводимое представление собственной группы* $g' \to T_{g'}$, *то последнее раскладывается в сумму двух неэквивалентных сопряженных между собой неприводимых представлений* $g' \to T^{\tau}_{g'}$ *и* $g' \to T^{\dot{\tau}}_{g'}$ *собственной группы; при этом пары чисел, определяющие эти представления, имеют вид* $\tau \sim (l_0, l_1)$ *и* $\dot{\tau} \sim \pm(-l_0, l_1)$ $(l_0 \neq 0,\ l_1 \neq 0)$. *Оператор* S *в базисе* $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot{\tau}}_{lm}\}$, *составленном из канонических базисов представлений* $g' \to T^{\tau}_{g'}$ *и* $g' \to T^{\dot{\tau}}_{g'}$, *задается формулой* (8).

Легко видеть, что справедливо и обратное: *два неэквивалентных сопряженных между собой неприводимых представления* $g \to T^{\tau}_{g'}$, $g' \to T^{\dot{\tau}}_{g'}$ (*такие представления определяются парами* $\tau \sim (l_0, l_1)$ *и* $\tau \sim (-l_0, l_1)$ $(l_0 \neq 0,\ l_1 \neq 0)$), *действующие в пространствах* R^{τ} *и* $R^{\dot{\tau}}$, *дополняются единственным (с точностью до эквивалентности) способом до представления полной группы* $g \to T_g$, *действующего в прямой сумме пространств* $R^{\tau} \dotplus R^{\dot{\tau}} = R$. *Оператор* S *имеет при этом вид* (8).

Оба рассмотренных нами случая I и II полностью исчерпывают все возможные неприводимые представления полной группы. Таким образом, мы дали полное описание этих представлений.

4. Неприводимые однозначные представления общей группы Лоренца. Общая группа получается из полной группы Лоренца добавлением временного отражения t, т. е. преобразования с матрицей

$$t = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

и всех преобразований вида tg, где g — элемент полной группы. Заметим при этом, что преобразования s (пространственное отражение) и t перестановочны и их произведение равно полному отражению j в четырехмерном пространстве

$$st = ts = j, \qquad s^2 = t^2 = j^2 = e. \tag{9}$$

Преобразование j (полное отражение) перестановочно с любым общим преобразованием Лоренца

$$jg = gj. \tag{9'}$$

Рассмотрим какое-нибудь неприводимое представление общей группы $g \to T_g$. Пусть S, T, J — операторы, соответствующие отражениям s, t и j. В таком случае

$$ST = TS = J \quad \text{и} \quad J^2 = S^2 = T^2 = E. \tag{10}$$

Кроме того, оператор J перестановочен в силу соотношения (9) с любым оператором представления

$$JT_g = T_g J. \tag{11}$$

Но оператор, перестановочный с операторами неприводимого представления, кратен единичному, т. е. $J = \lambda E$. Так как $J^2 = E$, то $\lambda = \pm 1$ и либо $J = E$, либо $J = -E$.

Отсюда, следовательно, либо $T = S^{-1} = S$, либо $T = -S$.

Таким образом, всякое неприводимое представление полной группы Лоренца может быть дополнено до неприводимого представления общей группы двумя способами: либо путем введения оператора $T = T_t$ по формуле

$$T = S, \tag{12}$$

либо путем введения оператора T по формуле

$$T = -S. \tag{12'}$$

Очевидно, что таким образом получаются все неприводимые однозначные представления общей группы.

5. Двузначные представления общей группы Лоренца. Как было указано еще в § 1, кроме однозначных представлений общей группы Лоренца, характеризующихся тем, что операторы S, T, J, соответствующие отражениям, коммутируют между собою, интересны также и двузначные представления общей группы.

Напомним, что в таких представлениях каждому элементу (e, s, t, j) группы отражений соответствуют два оператора $\pm E$, $\pm S$, $\pm T$, $\pm J$, отличающихся знаком, причем операторы S, T, J между собой *антикоммутируют*.

Найдем вид этих операторов для неприводимого двузначного представления общей группы.

Можно показать, что всякое такое представление *порождает представление собственной группы $g' \to T_{g'}$, состоящее из двух компонент $T^{\tau}_{g'}$ и $T^{\dot{\tau}}_{g'}$, сопряженных между собой* *). При этом компоненты T^{τ}_g и $T^{\dot{\tau}}_g$ могут быть как неэквивалентными, так и эквивалентными; в первом случае представление полной группы, поро-

---

*) Доказательство этого факта может быть получено некоторым усовершенствованием тех рассуждений, с помощью которых в п. 2 этого параграфа мы показали, что неприводимое представление полной группы состоит из двух или одной компоненты представлений собственной группы.

ждаемое представлением общей группы, также неприводимо, во втором случае представление полной группы приводимо, но распадается на два неэквивалентных представления, отличающихся видом оператора S. Рассмотрим оба случая отдельно.

Рассмотрим сначала случай, когда T_g^{τ} и $T_g^{\dot{\tau}}$ неэквивалентны.

Представление $g \to T_g$ общей группы порождает в этом случае неприводимое представление полной группы, причем оператор S в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot{\tau}}\}$ записывается формулой (8)

$$S\xi_{lm}^{\tau} = (-1)^{[l]}\,\xi_{lm}^{\dot{\tau}}, \qquad S\xi_{lm}^{\dot{\tau}} = (-1)^{[l]}\,\xi_{lm}^{\tau}.$$

Найдем оператор T, соответствующий временному отражению t: $t \to \pm T$. Поскольку для элементов g' собственной группы выполняется равенство

$$tg't^{-1} = (g')^{-1},$$

то и для оператора T имеет место аналогичное равенство

$$TT_{g'}T^{-1} = T_{(g')^{*-1}}.$$

Всякий такой оператор T для представления собственной группы $g' \to T_{g'}$, состоящего из двух сопряженных компонент $T_{g'}^{\tau}$ и $T_{g'}^{\dot{\tau}}$, как мы видели в п. 3, имеет вид (7)

$$T\xi_{lm}^{\tau} = (-1)^{[l]}\,t_{l_0}^{\tau\dot{\tau}}\,\xi_{lm}^{\dot{\tau}}, \qquad T\xi_{lm}^{\dot{\tau}} = (-1)^{[l]}\,t_{l_0}^{\dot{\tau}\tau}\,\xi_{lm}^{\tau}.$$

Из условия $ST = -TS$ и $T^2 = E$ находим, что

$$t_{l_0}^{\tau\dot{\tau}}t_{l_0}^{\dot{\tau}\tau} = 1 \quad \text{и} \quad t_{l_0}^{\tau\dot{\tau}} = -t_{l_0}^{\dot{\tau}\tau} = i = \sqrt{-1}.$$

Итак, оператор T задается формулой

$$T\xi_{lm}^{\tau} = (-1)^{[l]}\,i\xi_{lm}^{\dot{\tau}}, \qquad T\xi_{lm}^{\dot{\tau}} = -(-1)^{[l]}\,i\xi_{lm}^{\tau}.$$

Найдем теперь оператор $J = TS$. Получаем:

$$J\xi_{lm}^{\tau} = -i\xi_{lm}^{\tau}, \qquad J\xi_{lm}^{\dot{\tau}} = i\xi_{lm}^{\dot{\tau}}.$$

Заметим, что операторы S, T, J в базисе $(\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot{\tau}})$ записываются матрицами

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \tilde{S} \\ \tilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T = \begin{Vmatrix} 0 & i\tilde{S} \\ -i\tilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

где $\tilde{S}$ — диагональная матрица, имеющая вид $\tilde{S} = \|(-1)^{[l]}\,\delta_{ll}\delta_{mm}\|$, E — единичная матрица.

Легко проверить, что операторы S, T, J (13) антикоммутируют и вместе с единичным оператором E образуют, тем самым, двузначное представление группы отражений: $s \to \pm S$; $t \to \pm T$; $j \to \pm J$; $e \to \pm E$.

Итак, в случае двузначного неприводимого представления общей группы Лоренца, содержащего две неэквивалентные компоненты представления собственной группы, операторы S, T, J, *соответствующие отражениям в каноническом базисе* $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$, *записываются матрицами* (13).

Рассмотрим теперь случай, когда компоненты $T_{g'}^{\tau}$ и $T_{g'}^{\dot\tau}$ представления собственной группы, порожденного двузначным представлением общей группы, эквивалентны. В этом случае представление $g \to T_g$ полной группы Лоренца приводимо. Можно показать, тем не менее, что обе компоненты представления полной группы не эквивалентны: оператор S действует в одной из них по формуле

$$S\xi_{lm}^{\tau} = (-1)^{[l]}\xi_{lm}^{\tau}$$

и в другой — по формуле

$$S\xi_{lm}^{\dot\tau} = (-1)^{[l]+1}\xi_{lm}^{\dot\tau}.$$

Матрица оператора S в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$ имеет вид

$$S = \begin{Vmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & -\tilde{S} \end{Vmatrix},$$

где снова

$$\tilde{S} = \|(-1)^{[l]}\delta_{ll'}\delta_{mm'}\|.$$

Найдем вид оператора J, соответствующего полному отражению. Этот оператор коммутирует с оператором $T_{g'}$ из представления собственной группы $g' \to T_{g'}$. Легко показать, что в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}, \xi_{lm}^{\dot\tau}\}$ он запишется с помощью матрицы

$$J = \begin{Vmatrix} \lambda_{11}E & \lambda_{12}E \\ \lambda_{21}E & \lambda_{22}E \end{Vmatrix}.$$

Из условия $SJ = -JS$ и $J^2 = -E$ имеем:

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$J\xi_{lm}^{\tau} = \xi_{lm}^{\dot\tau}, \qquad J\xi_{lm}^{\dot\tau} = -\xi_{lm}^{\tau}.$$

Наконец, для оператора $T = JS$ имеем:

$$T\xi_{lm}^{\tau} = -(-1)^{[l]}\xi_{lm}^{\dot\tau}, \qquad T\xi_{lm}^{\dot\tau} = -(-1)^{[l]}\xi_{lm}^{\tau}.$$

т. е. матрица для оператора T в базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot{\tau}}_{lm}\}$ имеет вид

$$T = \begin{Vmatrix} 0 & -\widetilde{S} \\ -\widetilde{S} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что операторы S, T, J по-прежнему перемножаются по таблице (13).

Заметим, что в сумме пространств R^{τ} и $R^{\dot{\tau}}$ мы можем перейти к базису, в котором оператор J диагонален, а именно, к базису $\{\xi_{lm}, \eta_{lm}\}$, где

$$\xi_{lm} = \xi^{\tau}_{lm} + i\xi^{\dot{\tau}}_{lm}, \qquad \eta_{lm} = \xi^{\tau}_{lm} - i\xi^{\dot{\tau}}_{lm}.$$

Подпространства R_{ξ} и R_{η}, натянутые соответственно на базисы $\{\xi_{lm}\}$, $\{\eta_{lm}\}$, инвариантны и неприводимы относительно представления $g' \to T_{g'}$ собственной группы, причем базисы $\{\xi_{lm}\}$ и $\{\eta_{lm}\}$ являются по-прежнему каноническими.

В базисе $\{\xi_{lm}, \eta_{lm}\}$ матрицы операторов S, T, J примут вид

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \widetilde{S} \\ \widetilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T = \begin{Vmatrix} 0 & i\widetilde{S} \\ -i\widetilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}.$$

Такой же вид эти матрицы имели в предыдущем случае двух неэквивалентных компонент $T^{\tau}_{g'}$, $T^{\dot{\tau}}_{g'}$ представления собственной группы.

Таким образом, объединяя оба эти случая вместе, мы получаем, что *неприводимые двузначные представления общей группы содержат всегда два сопряженных друг другу неприводимых представления собственной группы, при этом в пространстве R, где действует наше представление, всегда можно так выбрать канонический базис, что операторы S, T, J запишутся в нем матрицами*

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & \widetilde{S} \\ \widetilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T = \begin{Vmatrix} 0 & i\widetilde{S} \\ -i\widetilde{S} & 0 \end{Vmatrix}, \qquad J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}, \qquad (14)$$

где матрица $\widetilde{S} = \| (-1)^{[l]} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \|$.

Заметим в заключение, что если от канонического базиса $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot{\tau}}_{lm}\}$ перейти к базису $\{\xi^{\tau}_{lm}, \sigma^{\dot{\tau}}_{lm}\}$

$$\xi^{\tau}_{lm} = \xi^{\tau}_{lm}, \qquad \sigma^{\dot{\tau}}_{lm} = (-1)^{l}\, \xi^{\dot{\tau}}_{lm},$$

то операторы S, T, J в этом базисе запишутся матрицами

$$J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}, \qquad S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \qquad T = \begin{Vmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{Vmatrix}.$$

Такой вид матриц операторов S, T, J будет нами использован в § 5.

6. Билинейная эрмитова невырожденная форма, инвариантная относительно представления полной группы Лоренца. Выясним, в каких случаях представление $g \to T_g$ полной группы Лоренца допускает инвариантную невырожденную билинейную эрмитову форму (ψ_1, ψ_2), и найдем ее вид.

Представление $g \to T_g$ полной группы распадается на неприводимые компоненты, каждая из которых содержит либо одну неприводимую компоненту представления собственной группы Лоренца, либо две неэквивалентные сопряженные друг другу компоненты τ и $\dot{\tau}$.

Рассмотрим представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы, порожденное представлением $g \to T_g$ полной группы Лоренца.

Напомним, что представление $g' \to T_{g'}$ допускает инвариантную билинейную эрмитову невырожденную форму тогда и только тогда, когда число неприводимых компонент этого представления, определяемых парой (l_0, l_1), равно числу компонент τ^* с парой $(l_0, -\bar{l}_1)$. При этом в каноническом базисе $\{\xi^\tau_{lm}\}$ представления $g' \to T_{g'}$ инвариантная форма (ψ_1, ψ_2) имеет согласно (39) § 2 вид

$$(\psi_1, \psi_2) = \sum_\tau a^{\tau\tau^*} s_l x^\tau_{lm} \bar{y}^{\tau^*}_{lm}, \tag{15}$$

где x^τ_{lm}, y^τ_{lm} — координаты ψ_1 и ψ_2 в базисе $\{\xi^\tau_{lm}\}$ и $a^{\tau\tau^*} = \bar{a}^{\tau^*\tau}$ — любые комплексные числа, отличные от нуля лишь для компонент $\tau \sim (l_0, l_1)$ и $\tau^* \sim (l_0, -\bar{l}_1)$; $s_l = \pm 1$ (для конечномерного представления $s_l = (-1)^{[l]}$). Для инвариантности формы (15) относительно полной группы нужно еще, очевидно, чтобы

$$(S\psi_1, S\psi_2) = (\psi_1, \psi_2), \tag{16}$$

где S — оператор, соответствующий пространственному отражению. Отсюда

$$\left(S\xi^\tau_{lm}, S\xi^{\tau^*}_{lm}\right) = \left(\xi^\tau_{lm}, \xi^{\tau^*}_{lm}\right). \tag{17}$$

Подставляя в равенство (17) выражение для S (см. (5), (5′), (8)), получим, что числа, задающие инвариантную билинейную форму, должны удовлетворять условию

$$a^{\dot{\tau}\dot{\tau}^*} = \pm a^{\tau\tau^*}. \tag{18}$$

При этом в случае, если $\tau = \dot{\tau}$, (т. е. компонента τ определяется парой $\tau(0, l_1)$ или $\tau(l_0, 0)$, а следовательно, и $\tau^* = \dot{\tau}^*$), оператор S должен действовать в пространствах R^τ и R^{τ^*} одинаково, т. е. либо по формулам

$$S\xi^\tau_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^\tau_{lm} \quad \text{и} \quad S\xi^{\tau^*}_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^{\tau^*}_{lm}, \tag{19}$$

либо по формулам

$$S\xi_{lm}^{\tau} = (-1)^{[l]+1}\xi_{lm}^{\tau} \quad \text{и} \quad S\xi_{lm}^{\tau^*} = (-1)^{[l]+1}\xi_{lm}^{\tau^*} \tag{20}$$

(см. п. 3, случай I).

Сформулируем теперь полученный результат.

Наряду с каждой неприводимой компонентой χ представления полной группы Лоренца, состоящей из двух компонент τ и $\dot{\tau}$ представления собственной группы

$$\chi \sim (\tau(l_0, l_1), \dot{\tau}(l_0, -l_1)), \quad (l_0 \neq 0, \ l_1 \neq 0)$$

рассмотрим другую неприводимую компоненту χ^*, также состоящую из двух компонент τ^* и $\dot{\tau}^*$ представления собственной группы

$$\chi^*(\tau^*(l_0, -\overline{l}_1); \dot{\tau}^*(l_0, \overline{l}_1)).$$

Точно так же для каждой неприводимой компоненты представления полной группы χ, состоящей из одной компоненты представления собственной группы

$$\chi \sim \tau(0, l_1) \text{ или } \chi \sim \tau(l_0, 0),$$

рассмотрим неприводимую компоненту χ^*, состоящую из компоненты τ^*,

$$\chi^* \sim \tau^*(0, -\overline{l}_1) \text{ или } \chi^* \sim \tau^*(l_0, 0),$$

причем так, что оператор S действует в компонентах χ и χ^* одинаково (одновременно, либо по формулам (19), либо по формулам (20)).

Таким образом, мы получили, что представление $g \to T_g$ полной группы допускает инвариантную невырожденную билинейную эрмитову форму в том и только том случае, если число эквивалентных между собой компонент $\chi_1, \ldots, \chi_s, \ldots$ совпадает с числом эквивалентных между собой компонент $\overset{*}{\chi}_1, \ldots, \overset{*}{\chi}_s, \ldots$ При этом сама форма (ψ_1, ψ_2) *имеет вид* (15) *с дополнительным условием* (18).

Применим полученный результат к случаю неприводимого представления полной группы. Если это представление состоит из двух неэквивалентных компонент $\tau \sim (l_0, l_1)$ и $\dot{\tau} \sim (l_0, -l_1)$ собственной группы, то инвариантная форма (ψ_1, ψ_2) для такого представления существует, очевидно, лишь тогда, когда

1) либо $\tau = \tau^*$, 2) либо $\dot{\tau} = \tau^*$, т. е. либо $(l_0, l_1) = (l_0, -\overline{l}_1)$, либо $(l_0, -l_1) = (l_0, -\overline{l}_1)$.

В первом случае l_1 — чисто мнимое, во втором случае l_1 действительно.

Если представление $g \to T_g$ полной группы содержит одну компоненту $\tau \sim (0, l_1)$, то инвариантная форма существует только при l_1 действительном или чисто мнимом. Наконец, у представления полной группы с компонентой $\tau \sim (l_0\, 0)$ инвариантная форма (ψ_1, ψ_2) существует всегда.

Итак, *неприводимое представление полной группы допускает инвариантную невырожденную эрмитову форму в том и только том случае, когда это представление содержит компоненты* (τ *и* $\dot{\tau}$) *с действительным или чисто мнимым* l_1.

В частности, *конечномерное неприводимое представление полной группы всегда допускает инвариантную невырожденную эрмитову форму.*

Вернемся к случаю приводимого представления, допускающего инвариантную форму.

Аналогично тому как это было сделано в п. 8 предыдущего параграфа для формы, инвариантной относительно представления собственной группы Лоренца, билинейную невырожденную инвариантную форму (15) можно привести к несколько более простому виду, а именно, можно так выбрать базис, чтобы для каждой компоненты $\tau(l_0, l)$ существовала лишь одна компонента $\tau^*(l_0, -\bar{l}_1)$ такая, что $a^{\tau\tau^*} \neq 0$, при этом:

1. В том случае, когда пара компонент $(\tau, \dot{\tau})$, определяющая неприводимое представление полной группы, совпадает с парой компонент $(\tau^*, \dot{\tau}^*)$ (что будет, как мы видели, при l_1 чисто мнимом: $\tau = \tau^*$, или l_1 вещественном: $\dot{\tau} = \tau^*$), можно добиться, чтобы

$$a^{\tau\tau^*} = \pm 1. \tag{21}$$

2. В случае, если пары компонент $(\tau, \dot{\tau})$ и $(\tau^*, \dot{\tau}^*)$ не совпадают (l_1 не вещественное и не чисто мнимое), можно выбрать базис так, чтобы

$$a^{\tau\tau^*} = 1. \tag{22}$$

Заметим, что если среди неприводимых компонент представления $g \to T_g$ встречаются компоненты с l_1 вещественным или чисто мнимым (случай 1), мы можем построить несколько существенно различных инвариантных форм, отличающихся знаком у соответствующих $a^{\tau\tau^*}$.

§ 4. Спиноры и спинорные представления собственной группы Лоренца

Как мы видели в первой части книги, все неприводимые представления группы вращений можно построить с помощью спиноров — величин, определенным образом преобразующихся при вращениях трехмерного пространства.

Здесь мы определим спиноры для собственной группы Лоренца и покажем, как с их помощью получить все ее конечномерные неприводимые представления.

1. Спиноры ранга 1. В § 1 было построено двумерное двузначное неприводимое представление собственной группы Лоренца

$$g_a \to \pm a, \tag{1}$$

где

$$a = \begin{Vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{Vmatrix} \tag{2}$$

— определенная с точностью до знака комплексная матрица второго порядка с определителем, равным единице.

Пусть теперь в каждой ортогональной системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3) *) *четырехмерного пространства задана определенная с точностью до знака пара комплексных чисел* (a^0, a^1), *которая при переходе от одной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца* $g = g_a$ *преобразуется матрицей* (2) *по формуле*

$$\left.\begin{aligned} a^{0'} &= a_{00}a^0 + a_{01}a^1, \\ a^{1'} &= a_{10}a^0 + a_{11}a^1. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Такая пара чисел называется непунктирным спинором первого ранга относительно собственной группы Лоренца.

Линейное двумерное комплексное пространство $R_{(1,\,0)}$, в котором действует представление (1), называется иногда *пространством непунктирных спиноров ранга* 1, а само представление (1) носит название *непунктирного спинорного представления ранга* 1.

Рассмотрим теперь наряду с представлением (1) другое двузначное неприводимое представление, задаваемое формулой

$$g_a \to \pm \bar{a}, \tag{3}$$

где

$$\bar{a} = \begin{Vmatrix} \bar{a}_{00} & \bar{a}_{01} \\ \bar{a}_{10} & \bar{a}_{11} \end{Vmatrix} \tag{4}$$

— матрица, элементы которой комплексно сопряжены элементам матрицы (2).

Пусть теперь в каждой ортогональной системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3) *четырехмерного пространства* R^4 *задана определенная с точностью до знака пара комплексных чисел* $(a^{\dot{0}}, a^{\dot{1}})$, *которая при переходе от одной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца* $g = g_a$ *преобразуются матрицей* (4) *по формуле*

$$\left.\begin{aligned} a^{\dot{0}'} &= \bar{a}_{00}a^{\dot{0}} + \bar{a}_{01}a^{\dot{1}}, \\ a^{\dot{1}'} &= \bar{a}_{10}a^{0} + \bar{a}_{11}a^{\dot{1}}. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Такая пара чисел называется пунктирным спинором первого ранга относительно собственной группы Лоренца.

Двумерное комплексное пространство $R_{(\dot{1},\,0)}$, в котором действует представление (3), называется *пространством пунктирных спиноров ранга* 1, а представление (3), действующее в этом пространстве,

*) Напомним, что ортогональной системой координат в четырехмерном пространстве мы назвали такую систему (x_0, x_1, x_2, x_3), в которой форма $S^2(x)$ записывается в виде $S^2(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, т. е. с помощью матрицы I (см. § 1, п. 1).

называется *пунктирным представлением ранга* 1. Ниже будет показано, что пунктирное и непунктирное представления ранга 1 сопряжены друг другу (см. также § 2, п. 6).

Перейдем к нахождению инфинитезимальных операторов спинорных представлений ранга 1 (непунктирного и пунктирного) и вычислим определяющие их пары (l_0, l_1).

Как мы увидим, эти пары таковы: для непунктирного представления

$$l_0 = \frac{1}{2}, \qquad l_1 = \frac{3}{2},$$

для пунктирного —

$$l_0 = -\frac{1}{2}, \qquad l_1 = \frac{3}{2} \text{ *)}.$$

Заметим, что непунктирные спиноры $e_0 = (1, 0)$ и $e_1 = (0, 1)$ образуют в пространстве $R_{(1,0)}$ непунктирных спиноров базис, в котором операторы представления (1) как раз и записаны матрицами a.

Аналогично этому пунктирные спиноры $e_{\dot 0} = (1, 0)$ и $e_{\dot 1} = (0, 1)$ образуют в пространстве пунктирных спиноров $R_{(\dot 0, \dot 1)}$ базис, в котором операторы представления (3) записываются матрицами $\bar a$.

Мы вычислим ниже матрицы инфинитезимальных операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 представлений (1) и (3) в базисах (e_0, e_1) и $(e_{\dot 0}, e_{\dot 1})$. Попутно мы установим связь между базисами (e_0, e_1) и $(e_{\dot 0}, e_{\dot 1})$ и каноническими базисами $(\xi_{1/2}, \xi_{-1/2})$ и $(\eta_{1/2}, \eta_{-1/2})$ спинорных представлений (1) и (3).

Начнем со случая непунктирного спинорного представления. Напомним, как строилось соответствие между матрицами a и преобразованиями Лоренца.

Каждому вектору (x_0, x_1, x_2, x_3) из R^4 была отнесена эрмитова матрица

$$c = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}.$$

Тогда преобразование вида

$$c' = aca^*,$$

где a — любая комплексная матрица второго порядка и $\det a = 1$, задает в R^4 собственное преобразование Лоренца.

В § 1 мы показали, что так может быть получено любое собственное преобразование Лоренца g и две матрицы, соответствующие одному и тому же, преобразованию g, отличаются лишь знаком.

Найдем теперь, какие матрицы a соответствуют вращениям в плоскости (x_1, x_2) (вокруг оси x_3). Преобразование в плоскости (x_1, x_2)

*) Напомним, что в п. 6 § 2 числа l_0, l_1 были вычислены лишь с точностью до знака у l_0. Здесь мы определим знак у l_0 для каждого из спинорных представлений ранга 1.

имеет вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi, \\ x_2' &= -x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi, \\ x_3' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_3, \\ x_0' &= \qquad\qquad\qquad\quad x_0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{Vmatrix} x_0' - x_3' & x_1' + ix_2' \\ x_1' - ix_2' & x_0' + x_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & (x_1 + ix_2)\, e^{-i\varphi} \\ (x_1 - ix_2)\, e^{i\varphi} & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что требуемое преобразование задается матрицей
$a = \pm \begin{Vmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{Vmatrix}$, другими словами,

$$\begin{Vmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & (x_1 + ix_2)\, e^{-i\varphi} \\ (x_1 - ix_2)\, e^{i\varphi} & x_0 + x_3 \end{Vmatrix}$$

Таким образом, вращениям в плоскости $(x_1,\ x_2)$ соответствуют матрицы

$$a(\varphi) = \pm \begin{Vmatrix} e^{-\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\varphi}{2}} \end{Vmatrix},$$

а инфинитезимальный оператор H_3 имеет вид

$$H_3 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Отсюда видно, что векторы базиса $(e_0,\ e_1)$ в двумерном пространств $R_{(1,\,0)}$ с точностью до множителя совпадают с векторами канонического базиса $\left(\xi_{\frac{1}{2}},\ \xi_{-\frac{1}{2}}\right)$ нашего представления. Если же вычислить операторы H_+ и H_-*) (мы этого делать не будем), то можно убедиться, что базисы (e_0, e_1) и $\left(\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right)$ в точности совпадают:

$$e_1 = \xi_{\frac{1}{2}}, \qquad e_2 = \xi_{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, *непунктирные спиноры с компонентами* (1, 0) *и* (0, 1) *образуют канонический базис* $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *непунктирного спинорного представления.*

Операторы H_+ и H_- имеют, как всегда, вид

$$H_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad H_- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{5'}$$

Найдем оператор F_3 — инфинитезимальный оператор, соответствующий преобразованиям в плоскости (x_0, x_3). Эти преобразования записывают так:

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \operatorname{ch} t + x_3 \operatorname{sh} t, \\ x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2, \\ x_3' &= x_0 \operatorname{sh} t + x_3 \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{Vmatrix} x_0' - x_3' & x_1' + ix_2' \\ x_1' - ix_2' & x_0' + x_3' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} (x_0 - x_3)e^{-t} & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & (x_0 + x_3)e^t \end{Vmatrix}.$$

Снова легко проверить, что такое преобразование достигается с помощью матрицы

$$a(t) = \pm \begin{Vmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Таким образом, преобразованиям в плоскости (x_0, x_3) соответствуют матрицы (6), а инфинитезимальный оператор этих преобразований F_3 равен

$$F_3 = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Операторы F_+ и F_- имеют вид

$$F_+ = -i\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; \qquad F_- = -i\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{7'}$$

(Их вычисление мы предоставляем читателю.)

---

*) Такое вычисление проделано в первой части книги, § 2, стр. 40.

Сопоставляя формулы (7) и (7′) с формулами (13)—(16) § 2 мы получаем, что наше *представление задается числами* $l_0=\frac{1}{2}$; $l_1=\frac{3}{2}$.

Рассмотрим теперь пунктирное спинорное представление. В отличие от предыдущего случая базис $(e_{\dot 0}, e_{\dot 1})$ в пространстве пунктирных спиноров не является каноническим.

Оказывается, что канонический базис пунктирного представления $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ связан с базисом $\left\{e_{\dot 0}, e_{\dot 1}\right\}$ с помощью матрицы

$$\tau=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\eta_{\frac{1}{2}}=-e_{\dot 1}, \qquad \eta_{-\frac{1}{2}}=e_{\dot 0}.$$

Иными словами, *пунктирные спиноры с компонентами* (0, —1) *и* (1, 0) *образуют канонический базис* $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *пунктирного спинорного представления.*

Чтобы убедиться в том, что базис $\left(\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right)$ является каноническим, запишем в этом базисе операторы пунктирного представления и найдем его инфинитезимальные операторы. Очевидно, что если в базисе $\left(e_{\dot 0}, e_{\dot 1}\right)$ операторы представления (3) записываются матрицами $\bar a_g$, то в базисе $\left(\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right)$ они запишутся с помощью матрицы

$$\tau\bar a_g\tau^{-1}.$$

Но

$$\tau\bar a_g\tau^{-1}=\left(\overset{*}{a}_g\right)^{-1} \quad [\text{см. § 1, п. 4, } (11')].$$

Итак, в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ пунктирное представление (3) запишется матрицами

$$g_a\to\left(\overset{*}{a}_g\right)^{-1}\,{}^{*)}. \tag{8}$$

Если $\tilde g$ — вращение, то a_g — унитарная матрица: $a_g=\left(\overset{*}{a}_g\right)^{-1}$. Поэтому для вращений $\tilde g$ представление $g\to a_g$ совпадает с представлением

$$g_a\to\left(\overset{*}{a}_g\right)^{-1}.$$

*) Отметим, что из формулы (8) уже видно, что пунктирное спинорное представление сопряжено непунктирному и потому определяется парой чисел $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (см. п. 5 § 2).

Следовательно, операторы H_+, H_-, H_3 пунктирного спинорного представления ранга 1 в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}},\ \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ задаются соответственно матрицами $\tilde{H}_+$, $\tilde{H}_-$, $\tilde{H}_3$ равными

$$\tilde{H}_+ = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{H}_- = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{H}_3 = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Полученные формулы означают, что базис $\left\{\eta_{\frac{1}{2}},\ \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ действительно является каноническим для этого представления. Найдем матрицы операторов F_+, F_-, F_3 в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}},\ \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$. Как мы уже видели, матрица $a_{g_{03}}$, соответствующая гиперболическому повороту в плоскости $(x_0,\ x_3)$, имеет вид (6):

$$a_{g_{03}} = \begin{Vmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{2}} \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, матрица $(a^*_{g_{03}})^{-1}$ имеет вид

$$(a^*_{g_{03}})^{-1} = \begin{Vmatrix} e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{t}{2}} \end{Vmatrix}. \tag{8'}$$

Отсюда для матрицы $\tilde{F}_3$ инфинитезимального оператора F_3 в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}},\ \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ получаем окончательно выражение

$$\tilde{F}_3 = -\frac{i}{2} \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{10}$$

Наконец, операторы F_+, F_- в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}},\ \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ запишутся матрицами

$$\tilde{F}_+ = i \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{F}_- = i \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{10'}$$

Из сравнения формул (13)—(16) § 2 и вида инфинитезимальных операторов $(F_3,\ F_-,\ F_+)$ получаем, что *представление* (3) *определяется парой* $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$.

Выпишем, наконец, матрицы инфинитезимальных операторов H_3, H_+, H_-, F_3, F_+, F_- в базисе $\left\{e_{\dot{0}},\ e_{\dot{1}}\right\}$.

Имеем:

$$\dot{H}_3 = \tau \widetilde{H}_3 \tau^{-1} = \begin{Vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{Vmatrix}.$$

Аналогично этому получим:

$$\left.\begin{aligned} \dot{H}_+ &= \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, & \dot{F}_+ &= -i \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \\ \dot{H}_- &= \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, & \dot{F}_- &= -i \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}, \\ & & \dot{F}_3 = -\frac{i}{2} & \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (10'')$$

Итак, для обоих спинорных представлений первого ранга мы нашли их инфинитезимальные операторы, канонические базисы $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ и $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ и задающие эти представления числа l_0, l_1.

Подведем всему этому итог.

Непунктирное спинорное представление $g_a \to \pm a$ *ранга* 1 *задается парой* $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, *его канонический базис* $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *состоит из непунктирных спиноров* (1, 0) *и* (0, 1) *и операторы представления* (1) *записываются в этом базисе матрицами* a. *Инфинитезимальные операторы в базисе* $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *имеют вид* (5), (5′), (7) *и* (7′).

Пунктирное спинорное представление $g_a \to \pm \bar{a}$ *ранга* 1 *задается парой* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, *его канонический базис* $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *состоит из пунктирных спиноров* (0, —1), (1, 0) *и операторы самого представления* (3) *в этом базисе записываются матрицами* $(a^*)^{-1}$. *Инфинитезимальные операторы пунктирного представления в базисе* $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *имеют вид* (9), (10) *и* (10′). *Канонический базис* $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ *в пространстве пунктирных спиноров связан с базисом* $e_{\dot{0}} = (1, 0)$, $e_{\dot{1}} = (0, 1)$, *в котором пунктирное представление записывается матрицами* $\dot{\bar{a}}$, *преобразованием* τ *с матрицей*

$$\tau = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Инфинитезимальные операторы H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3, *пунктирного представления в базисе* $\left\{e_{\dot{0}}, e_{\dot{1}}\right\}$ *имеют вид* (10″).

Заметим, что канонический базис всякого представления во многих отношениях очень удобен. В связи с этим часто рассматривают компоненты пунктирного спинора относительно канонического базиса $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$. Если обозначить эти компоненты через $a_{\dot{0}}$ и $a_{\dot{1}}$, то они, очевидно, связаны с компонентами $\left(a^{\dot{0}}, a^{\dot{1}}\right)$ соотношениями

$$a_{\dot{0}} = a^{\dot{1}},$$
$$a_{\dot{1}} = -a^{\dot{0}}.$$

Величины $\left(a_{\dot{0}}, a_{\dot{1}}\right)$ при собственных преобразованиях Лоренца преобразуются, очевидно, с помощью матрицы $(a^*)^{-1}$. Эти величины $\left(a_{\dot{0}}, a_{\dot{1}}\right)$, называемые пунктирными спинорами с нижними индексами, мы рассмотрим подробнее в следующем пункте.

2. Опускание индексов у спиноров первого ранга. Рассмотрим билинейную (неэрмитову!) форму

$$\sum_{\alpha, \beta} \tau_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta} \qquad (\alpha = 0,\ 1, \quad \beta = 0,\ 1) \tag{11}$$

с матрицей

$$\tau = \|\tau_{\alpha\beta}\| = \begin{Vmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix},$$

a^{α}, b^{β} — два непунктирных спинора.

Как мы не раз отмечали, имеет место равенство

$$a \tau a^{\text{тр}} = \tau,$$

где $a^{\text{тр}}$ — транспонированная матрица a. Это равенство означает, что билинейная форма (11) инвариантна относительно представления $g_a \to a$, действующего в пространстве непунктирных спиноров.

Аналогично этому форма

$$\sum \tau_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} a^{\dot{\alpha}} b^{\dot{\beta}} \tag{11$'$}$$

($a^{\dot{\alpha}}$ и $b^{\dot{\beta}}$ — пунктирные спиноры) инвариантна относительно представления $g_a \to \bar{a}$. С помощью матрицы τ из непунктирного спинора a^{β} образуем величину

$$a_{\alpha} = \sum_{\beta = 0,1} \tau_{\alpha\beta} a^{\beta} \qquad (\alpha = 0,\ 1). \tag{11$''$}$$

Величину (a_0, a_1) будем называть непунктирным спинором ранга 1 с нижним индексом, а операцию (11″) — опусканием индекса.

Легко проверить, что спинор (a_0, a_1) при преобразовании Лоренца g_a преобразуется с помощью матрицы $\tau a \tau^{-1} = (a^{\text{тр}})^{-1}$.

Очевидно, что в пространстве спиноров (a_0, a_1) действует представление собственной группы, эквивалентное представлению в пространстве спиноров (a^0, a^1) с верхними индексами.

Аналогично этому можно опустить индекс у пунктирного спинора:

$$a_{\dot\alpha} = \sum_{\dot\beta=0,1} \tau_{\dot\alpha\dot\beta} a^{\dot\beta}. \tag{11'''}$$

Величина $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ *называется пунктирным спинором ранга* 1 *с нижним индексом.*

При собственном преобразовании Лоренца g_a спинор $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ преобразуется с помощью матрицы $\tau\bar{a}\tau^{-1} = (a^*)^{-1}$. Таким образом, в пространстве спиноров $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ действует представление собственной группы $g_a \to \pm(a^*)^{-1}$, эквивалентное представлению $g_a \to \pm\bar{a}$.

Заметим, что, как следует из результатов предыдущего пункта, в пространстве спиноров $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ *базис* $e^{\dot 0} = (1, 0)$, $e^{\dot 1} = (0, 1)$, *в котором записаны все матрицы* $(a^*)^{-1}$, *совпадает с каноническим базисом представления* $g_a \to (a^*)^{-1}$.

3. Спиноры высших рангов. Рассмотрим 2^k-мерное комплексное пространство R^{2^k}, каждая точка которого определяется набором 2^k чисел $a^{\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_k}$ $(\alpha_i = 0, 1)$. Зададим в R^{2^k} представление $g_a \to T_a$, действующее по формуле

$$a^{\alpha'_1 \cdot \alpha'_2 \cdots \alpha'_k} = \sum a_{\alpha'_1\alpha_1} a_{\alpha'_2\alpha_2} \ldots a_{\alpha'_k\alpha_k} a^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}, \tag{12}$$

суммирование идет по всем наборам $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$; $a = \| a_{\alpha'_i\alpha_i} \|$ — матрица, соответствующая преобразованию g_a.

Пусть в каждой ортогональной системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3) *задан определенный с точностью до знака набор* 2^k *комплексных чисел* $a^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ $(\alpha_i = 0, 1)$, *который при переходе от одной системы к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g = g_a$ *преобразуется по формулам* (12). *Такой набор чисел называется непунктирным спинором ранга* k *относительно собственной группы Лоренца.*

Представление (12) называется *непунктирным спинорным представлением ранга* k.

Заметим, что, поскольку в формуле (12) матрица $\|a_{\alpha'\alpha}\|$ действует на каждый индекс независимо, представление (12) является произведением k представлений вида (1), т. е. произведением k непунктирных спинорных представлений ранга 1 (равно как и само пространство R^{2^k} является произведением k двумерных пространств).

Аналогично предыдущему мы определим пунктирное спинорное представление, действующее в 2^n-мерном пространстве величин

$a^{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$ по формуле

$$a^{\dot{\alpha}'_1 \ldots \dot{\alpha}'_n} = \sum \bar{a}_{\dot{\alpha}'_1 \dot{\alpha}_1} \bar{a}_{\dot{\alpha}'_2 \dot{\alpha}_2} \ldots \bar{a}_{\dot{\alpha}'_n \dot{\alpha}_n} a^{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}, \tag{13}$$

матрица $a = \| a_{\dot{\alpha}'_i \dot{\alpha}_i} \|$ — по-прежнему матрица, соответствующая преобразованию Лоренца $g = g_a$.

Пусть в каждой ортогональной системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3) *задан определенный с точностью до знака набор* 2^n-*комплексных чисел* $a^{\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \ldots \dot{\alpha}_n}$ $(\dot{\alpha}_i = 0, 1)$, *который при переходе от одной системы к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g = g_a$ *преобразуется по формулам* (13). *Такой набор чисел называется пунктирным спинором ранга n относительно собственной группы Лоренца.* Представление, задаваемое формулой (13), называется *пунктирным спинорным представлением ранга n.* Аналогично непунктирному оно является, очевидно, произведением n пунктирных спинорных представлений ранга 1.

Рассмотрим, наконец, самый общий случай.

В 2^{k+n}-мерном пространстве величин $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$ зададим представление собственной группы с помощью формулы

$$a^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_k \dot{\alpha}'_1 \ldots \dot{\alpha}'_n} =$$

$$= \sum a_{\alpha'_1 \alpha_1} \ldots a_{\alpha'_k \alpha_k} \bar{a}_{\dot{\alpha}'_1 \dot{\alpha}_1} \ldots \bar{a}_{\dot{\alpha}'_n \dot{\alpha}_n} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}. \tag{14}$$

Пусть в каждой ортогональной системе координат (x_0, x_1, x_2, x_3) *задан определенный с точностью до знака набор* 2^{k+n}-*комплексных чисел* $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$, *который при переходе от одной системы к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g = g_a$ *преобразуется по формулам* (14). *Такой набор чисел называется спинором с* k *непунктирными и* n *пунктирными индексами, или, короче, спинором ранга* (k, n) *относительно собственной группы Лоренца.* Представление (14) называется *спинорным представлением ранга* (k, n) *).

Представление (14) является произведением k непунктирных и n пунктирных спинорных представлений ранга 1. Представление (14) ранга (k, n) можно рассматривать также и как произведение двух представлений: непунктирного спинорного представления ранга k (т. е. представления ранга $(k, 0)$) и пунктирного спинорного представления ранга n (т. е. представления ранга $(0, n)$). Заметим здесь же, что в том случае, когда g_a — вращение, матрица a, как мы видели, унитарна. Таким образом, *представление* (12) (*непунктирное спи-*

*) Спинором ранга $(k, 0)$ является, очевидно, непунктирный спинор ранга k, а спинором ранга $(0, n)$ — пунктирный спинор ранга n.

норное представление) для группы вращений совпадает с обычным спинорным представлением группы вращений, рассмотренным нами в первой части (§ 6). Формулы (13) и (14), задающие спинорные представления собственной группы рангов $(0, n)$ и (k, n) в случае, когда g_a — вращение (т. е. когда a — унитарная матрица), непосредственно не переходят в формулу, определяющую спинорное представление группы вращений (см. часть I, § 6, формула (3)). Тем не менее *представление группы вращений, порожденное формулой* (14), *эквивалентно спинорному представлению ранга $n+k$ этой группы* *).

Представление (14) в пространстве спиноров ранга (k, n), вообще говоря, приводимо, т. е. в 2^{k+n}-мерном пространстве спинорного представления (14) существуют подпространства, инвариантные относительно этого представления. Сейчас мы в каждом спинорном пространстве выберем одно такое инвариантное подпространство $R_{(k, n)}$, в котором, как окажется, представление (14) неприводимо. Кроме того, мы покажем, что представлениями в подпространствах $R_{(k, n)}$ исчерпываются все неприводимые конечномерные представления собственной группы.

4. Симметрические спиноры. Реализация всех неприводимых конечномерных представлений собственной группы. Начнем снова с частных случаев.

I. Непунктирный спинор $a^{\alpha_1 \cdots \alpha_k}$ ранга $(k, 0)$ назовем *симметрическим*, если он не меняется при всевозможных перестановках индексов $(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$. Очевидно, что симметрические спиноры ранга $(k, 0)$ образуют подпространство в пространстве всех спиноров. Обозначим это подпространство $R_{(k, 0)}$ (размерность его равна $k+1$).

---

*) Как мы видели выше, переход от матрицы a к матрице $\bar{a}$ в группе унитарных матриц осуществляется с помощью формулы

$$\bar{a} = \tau a \tau^{-1}, \qquad \tau = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{8''}$$

Так как τ — унитарная матрица и $\det \tau = 1$, то равенство (8″) выполняется и для операторов представления

$$T_a = T_\tau T_{\bar{a}} T_\tau^{-1}.$$

Это означает, что представления группы вращений $g_a \to T_a$ и $g_a \to T_{\bar{a}}$ эквивалентны. Из сказанного ясно, что если рассмотреть операторы, отвечающие вращениям в пунктирном спинорном представлении ранга n, то мы получим представление, эквивалентное спинорному представлению группы вращений ранга n.

Так как спинорное представление ранга (k, n) есть произведение непунктирного ранга k и пунктирного ранга n, то, следовательно, оно порождает представление группы вращений эквивалентное произведению ее спинорных представлений рангов k и n, т. е. эквивалентное спинорному представлению ранга $k+n$.

Поскольку в формуле (12), задающей представление (12) в пространстве всех спиноров ранга $(k, 0)$, матрица действует на каждый индекс одинаково, симметрический спинор преобразуется формулой (2) снова в симметрический спинор, т. е. подпространство $R_{(k, 0)}$ инвариантно относительно представления (12).

Покажем, что представление (12) в пространстве $R_{(k, 0)}$ неприводимо. Действительно, в случае, когда g_Q — вращение, это представление совпадает со спинорным представлением группы вращений, а последнее, как было показано в первой части книги (см. § 6), в пространстве симметрических спиноров ранга k неприводимо и задается весом $l=\frac{k}{2}$. Отсюда следует, что представление (12) всей собственной группы Лоренца в пространстве $R_{(k, 0)}$ и подавно неприводимо и содержит лишь один вес $l=\frac{k}{2}$. Это значит, что $|l_0|=\frac{k}{2}$ и $|l_1|=\frac{k}{2}+1$. Для того чтобы определить знаки у чисел l_0 и l_1, надо вычислить инфинитезимальный оператор F_3 нашего представления. Мы этого делать не будем, а лишь укажем, что для всех непунктирных симметрических спиноров знаки l_0 и l_1 одинаковы (мы видели это в п. 1 на примере непунктирного спинора ранга 1).

Таким образом, представление (12) *действующее в пространстве $R_{k, 0}$ симметрических спиноров ранга* $(k, 0)$ *неприводимо и определяется парой*

$$l_0=\frac{k}{2}, \qquad l_1=\frac{k}{2}+1. \tag{15}$$

Будем такое представление называть *спинорным неприводимым представлением ранга* $(k, 0)$ и обозначать $T_g^{(k, 0)}$.

Очевидно, что *любое неприводимое конечномерное представление, у которого пара чисел l_0 и l_1 одинакового знака и $l_1=l_0+1$, эквивалентно некоторому представлению $T_g^{(k, 0)}$.*

II. Пунктирный спинор $a^{\dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$ ранга $(0, n)$ назовем *симметрическим*, если он не меняется при всевозможных перестановках индексов. Среди всех спиноров ранга $(0, n)$ симметрические спиноры образуют подпространство $R_{(0, n)}$, инвариантное относительно пунктирного представления (13).

Так как для группы вращений представление (13) эквивалентно обычному спинорному представлению ранга n этой группы (см. предыдущий пункт), а последнее неприводимо в пространстве симметрических спиноров и имеет вес $l=\frac{n}{2}$, то представление всей группы Лоренца также неприводимо в $R_{(0, n)}$ и содержит ровно один вес, т. е. $|l_0|=\frac{n}{2}$, $|l_1|=\frac{n}{2}+1$. Можно показать, вычислив инфинитезимальный оператор F_3 представления (13) в $R_{(0, n)}$, что для представлений группы Лоренца в пространстве пунктирных симметрических спиноров числа l_0 и l_1 имеют разные знаки. (Для представления ранга 1 это было проделано в п. 1.) Нам удобно положить:

$$l_0 = -\frac{n}{2}, \qquad l_1 = \frac{n}{2} + 1.$$

Таким образом, представление собственной группы Лоренца, задаваемое формулой (13) *в пространстве* $R_{(0,n)}$ *всех симметрических спиноров ранга* $(0, n)$, *неприводимо и определяется парой*

$$l_0 = -\frac{n}{2}, \qquad l_1 = \frac{n}{2} + 1. \tag{16}$$

Такое представление назовем *неприводимым спинорным представлением ранга* $(0, n)$ и обозначим $T_g^{(0, n)}$. Всякое *конечномерное неприводимое представление с парой* (l_0, l_1) *такой, что* $|l_1| = |l_0| + 1$ *и* l_0 *и* l_1 — *разных знаков, эквивалентно некоторому представлению* $T_g^{(0, n)}$.

Мы видели, что представления $T_g^{(k, 0)}$ и $T_g^{(0, \dot{n})}$ неприводимы также относительно группы вращений (содержат ровно один вес). Обратно, всякое представление собственной группы Лоренца, неприводимое относительно группы вращений, эквивалентно либо $T_g^{(k, 0)}$, либо $T_g^{(0, n)}$ *).

Обратимся к общему случаю.

III. Спинор ранга (k, n) (с k непунктирными и n пунктирными индексами) назовем *симметрическим*, если он не меняется при всевозможных перестановках как пунктирных индексов между собой, так и непунктирных индексов между собой. Симметрические спиноры ранга (k, n) образуют подпространство в пространстве всех спиноров ранга (k, n) (обозначим его $R_{(k, n)}$); размерность $R_{(k, n)}$ равна $(k+1)(n+1)$. Это подпространство инвариантно относительно представления (14), так как матрица a действует одинаково на все непунктирные индексы, а матрица $\bar{a}$ — одинаково на все пунктирные.

---

*) Для неприводимого представления собственной группы, содержащего лишь один вес $l = |l_0|$, согласно § 2, п. 6, выполняется равенство

$$|l_1| = |l_0| + 1.$$

Возможны два случая:

1. l_1 и l_0 одинакового знака ($l_0 > 0$ и $l_1 > 0$). Такое представление эквивалентно непунктирному спинорному представлению $T_g^{(2l_0, 0)}$.

2. l_1 и l_0 — разных знаков ($l_0 < 0$, $l_1 > 0$); в этом случае такое представление эквивалентно пунктирному спинорному представлению $T_g^{(0, 2|l_0|)}$.

Оказывается, что представление (14) в $R_{(k,n)}$ неприводимо. Мы не будем этого доказывать*), а найдем лишь пару (l_0, l_1), задающую это неприводимое представление. Заметим, что пространство $R_{(k,n)}$ симметрических спиноров ранга (k, n) является произведением пространств $R_{(k,0)}$ и $R_{(0,n)}$ симметрических спиноров рангов $(k, 0)$ и $(0, n)$

$$R_{(k,n)} = R_{(k,0)} \times R_{(0,n)},$$

а представление (14), действующее в $R_{(k,n)}$ (обозначим его $T_g^{(k,n)}$), есть произведение представлений $g \to T_g^{(k,0)}$ и $g \to T_g^{(0,n)}$, действующих в $R_{(k,0)}$ и $R_{(0,n)}$,

$$T_g^{(k,n)} = T_g^{(k,0)} \times T_g^{(0,n)}.$$

Представления $T_g^{(k,0)}$ и $T_g^{(0,n)}$ в $R_{(k,0)}$ и $R_{(0,n)}$ неприводимы относительно группы вращений и веса их равны $\frac{k}{2}$ и $\frac{n}{2}$. В таком случае произведение этих представлений $T_g^{(k,0)} \times T_g^{(0,n)} = T_g^{(k,n)}$ содержит все веса от $\frac{|k-n|}{2}$ до $\frac{k+n}{2}$ по одному разу. Это значит, что представление $T_g^{(k,n)}$ в пространстве $R_{(k,n)}$ определяется парой (l_0, l_1), где

$$|l_0| = \frac{k-n}{2}, \qquad |l_1| = \frac{k+n}{2} + 1.$$

Если вычислить инфинитезимальный оператор F_3 для представления $T_g^{(k,n)}$, то получим, что

$$l_0 = \frac{k-n}{2}, \qquad l_1 = \frac{k+n}{2} + 1.$$

Итак, *представление* (14) $g \to T_g^{(k,n)}$ *собственной группы в пространстве симметрических спиноров ранга* (k, n) *неприводимо и задается парой* (l_0, l_1), *причем числа* l_0 *и* l_1 *равны*

$$l_0 = \frac{k-n}{2}, \qquad l_1 = \frac{k+n}{2} + 1. \tag{17}$$

Представление $T_g^{(k,n)}$ в $R_{(k,n)}$ будем называть *спинорным неприводимым представлением ранга* (k, n). Очевидно, что, подбирая числа k и n, мы можем получить всевозможные пары (l_0, l_1), задающие конечномерные представления собственной группы (т. е. пары,

---

*) В п. 5 этого параграфа мы построим представление, эквивалентное представлению (14), действующее в пространстве многочленов $p(\xi, \bar{\xi})$ от переменных ξ и $\bar{\xi}$. С помощью формул, задающих это последнее представление (см. (31)), легко проверяется и неприводимость спинорного представления (14).

где l_0 и l_1 — одновременно целые или полуцелые и такие, что $|l_1| > |l_0|$).

Итак, нами доказано, что *любое неприводимое конечномерное представление собственной группы эквивалентно некоторому спинорному неприводимому представлению* $T_g^{(k,\,n)}$. Другими словами, *спинорные представления исчерпывают все конечномерные неприводимые представления собственной группы Лоренца.*

Заметим, что, как видно из формулы (17), представления $T_g^{(k,\,n)}$ и $T_g^{(n,\,k)}$ определяются соответственно парами (l_0, l_1) и $(-l_0, l_1)$, а это означает, что они *сопряжены друг другу.*

Сделаем в конце одно замечание, которое мы используем в дальнейшем.

Рассмотрим представление (12), действующее в 2^k-мерном пространстве непунктирных спиноров. Выберем в этом пространстве базис, состоящий из спиноров, у которых одна и только одна компонента отлична от нуля *). Если в этом базисе записать матрицы A_g всех операторов представления $g \to T_g$ (17), то, как видно из формулы (12), элементы этих матриц являются полиномами от элементов матрицы a:

$$A_g = \|P_{\varkappa\varkappa'}(a_{00},\ a_{01},\ a_{10},\ a_{11})\|$$

($\varkappa$ и $\varkappa'$ — два набора спинорных индексов), т. е. *комплексными аналитическими* функциями от переменных $(a_{00},\ a_{01},\ a_{10},\ a_{11})$.

Если мы перейдем к другому базису, то матрицы преобразуются по формуле

$$\tilde{A} = SA_gS^{-1}$$

и элементы новой матрицы $\tilde{A}_g$ выразятся через линейные комбинации элементов матрицы A_g, т. е. снова будут комплексными аналитическими функциями переменных $(a_{00},\ a_{01},\ a_{10},\ a_{11})$. Если пространство распадается в прямую сумму инвариантных подпространств, то, приурочив базис во всем пространстве к этому разбиению и используя приведенное выше соображение, мы получим, что в любом инвариантном подпространстве пространства всех спиноров ранга $(k, 0)$, в частности в подпространстве $R_{(k,\,0)}$ симметрических спиноров, операторы представления $g_a \to T_a$ во всяком базисе записываются матрицами, элементы которых суть комплексные аналитические функции от $(a_{00}\ a_{10},\ a_{01},\ a_{11})$. Очевидно, что это свойство остается и у матриц любого конечномерного представления, эквивалентного представлению $T_g^{(k,\,0)}$.

Для представления (13) в пространстве пунктирных спиноров; как видно из формулы (13), элементы матриц операторов T_g в любом

---

*) В спинорных обозначениях такой спинор можно записать $\xi^{\alpha_1 \ldots \alpha_k} = \delta_{\beta_1\alpha_1}\delta_{\beta_2\alpha_2} \ldots \delta_{\beta_k\alpha_k}$, где отлична от нуля компонента, соответствующая набору $(\beta_1\beta_2 \ldots \beta_k)$.

базисе являются полиномами от $(\bar{a}_{00}, \bar{a}_{01}, \bar{a}_{10}, \bar{a}_{11})$, т. е. *антианалитическими* функциями переменных $(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$. Это свойство матричных элементов имеет место и для неприводимого спинорного представления ранга $(0, n)$ и любого эквивалентного ему представления.

Наконец, матричные элементы у операторов представления (14) в пространстве симметрических спиноров ранга (k, n) ни в каком базисе не являются ни аналитическими, ни антианалитическими функциями переменных $(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$.

Из сказанного следует, что если у некоторого конечномерного представления матричные элементы операторов в некотором базисе являются аналитическими (антианалитическими) функциями переменных $(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{11})$, то неприводимые компоненты этого представления эквивалентны лишь непунктирным (пунктирным) спинорным представлениям, т. е. представлениям рангов $(k, 0)$ ($(0, n)$).

Это замечание мы используем в § 6.

В заключение этого пункта в качестве примера рассмотрим, как векторное представление собственной группы Лоренца, действующее в пространстве $R^{(4)}$, реализуется спинорами. В п. 7 § 2 мы нашли, что представление $g \to g$ определяется парой $(l_0, l_1) = (0, 2)$. Отсюда следует, что это представление эквивалентно спинорному представлению $T_g^{(1,1)}$ ранга $(1, 1)$ и реализуется в пространстве $R_{(1,1)}$ спиноров с одним пунктирным и одним непунктирным индексом. Найдем сейчас явное выражение координат вектора x_0, x_1, x_2, x_3 через компоненты спинора $(a^{0\dot{0}}, a^{0\dot{1}}, a^{1\dot{0}}, a^{1\dot{1}})$. Предварительно заметим, что пространство $(R_{1,1})$ является четырехмерным *комплексным* пространством. В связи с этим представление $g \to g$, эквивалентное представлению $T_g^{(1,1)}$ и действующее, как мы до сих пор считали, в четырехмерном *действительном* пространстве, естественно теперь считать действующим в четырехмерном *комплексном* пространстве; это означает, иными словами, что координаты x_0, x_1, x_2, x_3 могут быть комплексными.

Напомним теперь, что основное соответствие $g_a \to a$ между собственными преобразованиями Лоренца и матрицами a $(\det a = 1)$ строилось так: если вектору (x_0, x_1, x_2, x_3) отнести матрицу c

$$c = \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix},$$

то каждое преобразование матриц c вида

$$c' = aca^*$$

порождает в пространстве $R^{(4)}$ собственное преобразование Лоренца g_a, которое мы и сопоставляли матрице a: $a \sim g_a$. При этом в случае действительных координат x_0, x_1, x_2, x_3 матрица c — эрмитова, в случае же, как мы теперь предполагаем, комплексных координат $x_0, x_1,$

x_2, x_3 матрица c может быть произвольной комплексной матрицей второго порядка.

Итак, мы получили, что всякое собственное преобразование Лоренца над векторами x: $x' = g_a x$, с помощью матриц c может быть записано в виде

$$\begin{Vmatrix} x'_0 - x'_3 & x'_2 - ix'_1 \\ x'_2 + ix'_1 & x'_0 + x'_3 \end{Vmatrix} = a \begin{Vmatrix} x_0 - x_3 & x_2 - ix_1 \\ x_2 + ix_1 & x_0 + x_3 \end{Vmatrix} a^*. \tag{17'}$$

Спинор $(a^{0\dot{0}}, a^{0\dot{1}}, a^{1\dot{0}}, a^{1\dot{1}})$ ранга $(1, 1)$ также можно записать в виде матрицы

$$c = \begin{Vmatrix} a^{0\dot{0}} & a^{0\dot{1}} \\ a^{1\dot{0}} & a^{1\dot{1}} \end{Vmatrix}.$$

При этом представление $T_g^{(1,1)}$, как нетрудно проверить, действует на матрицу c по формуле

$$c' = aca^*$$

или, подробнее,

$$\begin{Vmatrix} a'^{0\dot{0}} & a'^{0\dot{1}} \\ a'^{1\dot{0}} & a'^{1\dot{1}} \end{Vmatrix} = a \begin{Vmatrix} a^{0\dot{0}} & a^{0\dot{1}} \\ a^{1\dot{0}} & a^{1\dot{1}} \end{Vmatrix} a^*.$$

Сравнивая полученную формулу с формулой (17′), мы видим, что

$$a^{0\dot{0}} = x_0 - x_3, \qquad a^{0\dot{1}} = x_2 - ix_1,$$
$$a^{1\dot{1}} = x_0 + x_3, \qquad a^{1\dot{0}} = x_2 + ix_1.$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{a^{0\dot{0}} + a^{1\dot{1}}}{2}, \qquad x_1 = \frac{a^{1\dot{0}} - a^{0\dot{1}}}{2i},$$

$$x_2 = \frac{a^{1\dot{0}} + a^{0\dot{1}}}{2}, \qquad x_3 = \frac{a^{1\dot{1}} - a^{0\dot{0}}}{2}.$$

Короче эти формулы можно записать так:

$$x_k = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\dot{\alpha}} \sigma^{(k)}_{\alpha\dot{\alpha}} a^{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{17''}$$

где $\|\sigma^{(k)}_{\alpha\dot{\alpha}}\| = \sigma^{(k)}$ — так называемые матрицы Паули

$$\sigma^0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \qquad \sigma^{(1)} = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \sigma^{(2)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \sigma^{(3)} = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Сделаем еще одно замечание. Представление $T_g^{(1,1)}$ в пространстве спиноров ранга $(1, 1)$ является произведением представлений $T_g^{(1,0)}$ и $T_g^{(0,1)}$, действующих в пространствах непунктирных и пунктирных спиноров соответственно. В связи с этим координаты вектора x_0, x_1, x_2, x_3 можно выразить через компоненты непунктирного спинора (a^0, a^1) и пунктирного $(a^{\dot 0}, a^{\dot 1})$. Действительно, если положить

$$a^0a^{\dot 0}=a^{0\dot 0}, \qquad a^0a^{\dot 1}=a^{0\dot 1}, \qquad a^1a^{\dot 0}=a^{1\dot 0}, \qquad a^1a^{\dot 1}=a^{1\dot 1},$$

то числа $(a^{0\dot 0}, a^{0\dot 1}, a^{1\dot 0}, a^{1\dot 1})$ образуют спинор ранга (1, 1). Отсюда получаем:

$$x_k=\frac{1}{2}\sum \sigma^{(k)}_{\alpha\dot\alpha}a^{\alpha}a^{\dot\alpha}.$$

Это и есть выражение вектора через пунктирный и непунктирный спиноры.

5. Опускание индекса у спиноров высших рангов. Напомним, что из спиноров (a^0, a^1) и $(a^{\dot 0}, a^{\dot 1})$ первого ранга с помощью матрицы $\|\tau_{\beta\alpha}\|=\tau$ мы построили спиноры с нижними индексами

$$a_{\beta}=\sum \tau_{\beta\alpha}a^{\alpha} \quad \text{и} \quad a_{\dot\beta}=\sum \tau_{\dot\beta\dot\alpha}a^{\dot\alpha}. \tag{18}$$

Преобразование (18) мы назвали опусканием индекса.

Спиноры (a_0, a_1) и $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ с нижним индексом преобразуются при собственном преобразовании Лоренца g_a с помощью матриц $(a^{\text{тр}})^{-1}$ и $(a^*)^{-1}$ соответственно.

Аналогичным образом можно опускать индексы и у спиноров любого ранга. Пусть $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_n}$ — спинор ранга (k, n). Величину

$$a^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}\dot\alpha_{j_1}\ldots\dot\alpha_{j_p}}_{\beta_{k_1}\ldots\beta_{k_l}\dot\beta_{r_1}\ldots\dot\beta_{r_m}}=\sum \tau_{\beta_{k_1}\alpha_{k_1}}\ldots\tau_{\dot\beta_{r_1}\dot\alpha_{r_1}}\ldots a^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_n} \tag{19}$$

мы назовем *спинором ранга* (k, n) *с* (s, p) *верхними индексами и* (l, m) *нижними индексами* $(l+s=k;\ p+m=n)$, а *операцию* (19) — *опусканием нескольких индексов*. Посмотрим, как преобразуется спинор $a^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}\dot\alpha_{j_1}\ldots\dot\alpha_{j_p}}_{\beta_{k_1}\ldots\beta_{k_l}\dot\beta_{r_1}\ldots\dot\beta_{r_m}}$ при собственных преобразованиях Лоренца. Спинор $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot\alpha_1\ldots\dot\alpha_n}$ преобразуется с помощью формулы (14), где на каждый непунктирный индекс спинора действует матрица a, а на пунктирный — матрица $\bar a$. На примере пунктирного спинора первого ранга мы видели, что при опускании непунктирного индекса матрица a заменяется матрицей $(a^{\text{тр}})^{-1}$, а при опускании пунктирного индекса матрица $\bar a$ заменяется матрицей $(a^*)^{-1}$. Легко видеть, что так будет и для спинора любого ранга, т. е. формула для преобразования спинора

$$a^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}\dot\alpha_{j_1}\ldots\dot\alpha_{j_p}}_{\beta_{k_1}\ldots\beta_{k_l}\dot\beta_{r_1}\ldots\dot\beta_{r_m}}$$

имеет вид

$$a^{\alpha'_{i_1}\ldots\alpha'_{i_s}\dot{\alpha}'_{j_1}\ldots\dot{\alpha}'_{j_p}}_{\beta'_{k_1}\ldots\beta'_{k_l}\dot{\beta}'_{r_1}\ldots\dot{\beta}'_{r_m}} = \sum a_{\alpha'_{i_1}\alpha_{i_1}}\ldots \bar{a}_{\dot{\alpha}'_{j_1}\dot{\alpha}_{j_1}}\ldots \bar{a}^{\beta'_{k_1}\beta_{k_1}}\ldots a^{\dot{\beta}'_{r_1}\dot{\beta}_{r_m}}\ldots$$

$$\ldots a^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}\dot{\alpha}_{j_1}\ldots\dot{\alpha}_{j_p}}_{\beta_{k_1}\ldots\beta_{k_l}\dot{\beta}_{r_1}\ldots\dot{\beta}_{r_m}}, \tag{20}$$

где на верхние непунктирные индексы действует матрица a, а на нижние пунктирные индексы — матрица $(a^*)^{-1} = \left\| a^{\dot{\beta}'_i\dot{\beta}_i} \right\|$; аналогично для других индексов.

Представление собственной группы Лоренца, задаваемое формулой (20) в пространстве спиноров $a^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_s}\dot{\alpha}_{j_1}\ldots\dot{\alpha}_{j_p}}_{\beta'_{k_1}\ldots\beta_{k_l}\dot{\beta}_{r_1}\ldots\dot{\beta}_{r_m}}$, очевидно, эквивалентно представлению (14) в пространстве спиноров ранга (k, n) $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n}$ с одними верхними индексами.

Рассмотрим особо случай спиноров $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_n}$ с k верхними непунктирными индексами и n нижними пунктирными индексами.

Представление собственной группы в пространстве таких спиноров действует по формуле

$$a^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_n} = \sum a_{\alpha_1\alpha'_1}\ldots a_{\alpha_k\alpha'_k} a^{\dot{\beta}_1\dot{\beta}'_1} a^{\dot{\beta}_n\dot{\beta}'_n} a^{\alpha'_1\ldots\alpha'_k}_{\dot{\beta}'_1\ldots\dot{\beta}'_n}. \tag{21}$$

Очевидно, что симметрические спиноры $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_n}$ образуют подпространство R^k_n, инвариантное и неприводимое относительно представления (21). При этом представление (21), задаваемое в R^k_n, эквивалентно неприводимому спинорному представлению $T^{(k,\,n)}_g$ ранга (k, n), т. е. задается парой $\left(l_0 = \frac{k-n}{2};\ l_1 = \frac{k+n}{2} + 1\right)$.

Заметим, что представление, сопряженное к представлению $T^{(k,\,n)}_g$, т. е. определенное парой $\left(\frac{n-k}{2},\ \frac{n+k}{2} + 1\right)$, можно реализовать в пространстве R^n_k спиноров с n верхними непунктирными индексами и k нижними пунктирными индексами по формуле

$$b^{\alpha'_1\ldots\alpha'_n}_{\dot{\beta}'_1\ldots\dot{\beta}'_k} = \sum a_{\alpha'_1\alpha_1}\ldots a_{\alpha'_n\alpha_n} a^{\dot{\beta}'_1\dot{\beta}_1} a^{\dot{\beta}'_k\dot{\beta}_k} b^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_k}. \tag{22}$$

Между спинорами $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_n}$ из R^k_n и $b^{\alpha_1\ldots\alpha_n}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_k}$ из R^n_k существует естественное соответствие: каждому спинору $a^{\alpha_1\ldots\alpha_k}_{\dot{\beta}_1\ldots\dot{\beta}_n}$ из R^k_n перестановкой верхних индексов с нижними ставится в соответствие спинор $b^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k}$ из R^n_k и наоборот:

$$a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n} \longleftrightarrow b^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k}, \quad \alpha'_i = \dot\beta_i, \quad \dot\beta'_i = \alpha_i. \tag{23}$$

Соответствие (23) обладает следующим очевидным свойством. Пусть $e_1 \ldots e_N$ и $f_1 \ldots f_N$ — базисы из R^k_n и R^n_k, соответственно переходящие друг в друга при соответствии (23)

$$f_i \longleftrightarrow e_i.$$

Пусть A_g — матрица представления (21) в базисе $e_1 \ldots e_N$, а $\widetilde{A}_g$ — матрица представления (22) в базисе $f_1 \ldots f_N$.

В таком случае

$$\widetilde{A}_{g_a} = A_{(g_a)^{*-1}} \text{ или } \widetilde{A}_{g_a} = A_{g_{(a^*)^{-1}}}. \tag{24}$$

Действительно, перестановка верхних индексов с нижними влечет, очевидно, замену матрицы a в формулах (21) и (22) на матрицу $(a^*)^{-1}$. А это и означает равенство (24).

Описанное нами соответствие (23) между спинорами $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ и $b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$ мы используем в следующем параграфе при построении конечномерных неприводимых представлений полной группы Лоренца.

6. Другое описание спинорного представления. Рассмотрим совокупность однородных полиномов $p(z_0, z, \bar z_0, \bar z)$ степени k по z_0 и z_1 и степени n по $\bar z_0$ и $\bar z_1$, т. е. полиномов вида

$$p(z_0, z, \bar z_0, \bar z_1) = \sum_{\substack{p+r=k \\ s+t=n}} b_{p, r, s, t} z_0^p z_1^r \bar z_0^s \bar z^t. \tag{25}$$

Обозначим пространство этих полиномов через $\widetilde{R}_{(k, n)}$. Каждый полином из $\widetilde{R}_{(k, n)}$ может быть записан в следующем виде:

$$p(z_0, z, \bar z_0, \bar z_1) = \sum_{\substack{(\alpha_1 \ldots \alpha_k) \\ (\dot\alpha_1 \ldots \dot\alpha_n)}} \frac{1}{k!\, n!} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot\alpha_1 \ldots \dot\alpha_n} z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_k} \bar z_{\dot\alpha_1} \ldots \bar z_{\dot\alpha_n} \tag{26}$$

$$(\alpha_i = 0, 1; \quad \dot\alpha_i = 0, \dot 1),$$

где числа $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot\alpha_1 \ldots \dot\alpha_n}$ не меняются при перестановках пунктирных индексов между собой, а также непунктирных индексов между собой. Таким образом, каждому полиному вида (25) соответствует набор чисел $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot\alpha_1 \ldots \dot\alpha_n}$, не меняющихся при перестановках пунктирных и непунктирных индексов.

Зададим в пространстве $\widetilde{R}_{(k,n)}$ представление группы $\mathfrak{A}$ следующим образом. Пусть переменные z_0, z_1 преобразуются с помощью матрицы

$$\begin{aligned} z_0 &= a_{00} z_0' + a_{01} z_1', \\ z_1 &= a_{10} z' + a_{10} z_1', \end{aligned} \tag{27}$$

а $\bar{z}_0$, $\bar{z}_1$ соответственно

$$\begin{aligned} \bar{z}_0 &= \bar{a}_{00} \bar{z}_0' + \bar{a}_{01} \bar{z}_1', \\ \bar{z}_1 &= \bar{a}_{10} \bar{z}_0' + \bar{a}_{10} \bar{z}_1. \end{aligned} \tag{27'}$$

После такой замены переменных полином $p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1)$ перейдет в полином $\tilde{p}(z_0', z_1', \bar{z}_0', \bar{z}_1')$ от переменных z_0', z_1', $\bar{z}_0'$, $\bar{z}_1'$, снова принадлежащий $\widetilde{R}_{(k,n)}$. Преобразование в $\widetilde{R}_{(k,n)}$ $p \to \tilde{p}$ линейно и задает представление группы $\mathfrak{A}$:

$$T_a p = \tilde{p}.$$

Напишем, как преобразуются коэффициенты $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$ при этом преобразовании T_a:

$$T_a p = T_a \left(\frac{1}{k!\,n!} \sum a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n} z_{\alpha_1} \ldots z_{\alpha_k} \bar{z}_{\dot{\alpha}_1} \ldots \bar{z}_{\dot{\alpha}_n} \right) =$$

$$= \frac{1}{k!\,n!} \sum a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n} \left(\sum a_{\alpha_1' \alpha_1} z'_{\alpha_1} \right) \times \left(\sum a_{\alpha_2' \alpha_2} z'_{\alpha_2} \right) \times \ldots$$

$$\ldots \times \left(\sum a_{\alpha_k' \alpha_k} z'_{\alpha_k} \right) \times \left(\sum \bar{a}_{\dot{\alpha}_1' \dot{\alpha}_1} \bar{z}'_{\dot{\alpha}_1} \right) \times \ldots \times \left(\sum \bar{a}_{\dot{\alpha}_n' \dot{\alpha}_n} \bar{z}'_{\dot{\alpha}_n} \right) =$$

$$= \frac{1}{k!\,n!} \sum a^{\alpha_1' \ldots \alpha_k' \dot{\alpha}_1' \ldots \dot{\alpha}_n'} z'_{\alpha_1} \ldots z'_{\alpha_k} \bar{z}'_{\dot{\alpha}_1} \ldots \bar{z}'_{\dot{\alpha}_n}, \tag{28}$$

где

$$a^{\alpha_1' \ldots \alpha_k' \dot{\alpha}_1' \ldots \dot{\alpha}_n'} = \sum a_{\alpha_1' \alpha_1} \ldots a_{\alpha_k' \alpha_k} \bar{a}_{\dot{\alpha}_1' \dot{\alpha}_1} \ldots \bar{a}_{\dot{\alpha}_n' \dot{\alpha}_n} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}. \tag{29}$$

Полученная формула совпадает с формулой (14). Это означает, что *коэффициенты полинома* $p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1)$ *образуют симметрический спинор ранга* (k, n). Следовательно, представление (28) в пространстве $\widetilde{R}_{(k,n)}$ полиномов $p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1)$ эквивалентно представлению (14) в пространстве $R_{(k,n)}$ симметрических спиноров ранга (k, n). Последнее же неприводимо и, как мы видели, определяется парой $\left(l_0 = \frac{k-n}{2},\ l_1 = \frac{k+n}{2} + 1\right)$.

Преобразуем несколько полученные формулы. Каждый однородный многочлен $p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1)$ степени k по z_0 и z_1 и n по $\bar{z}_0$ и $\bar{z}_1$ можно записать в виде

$$p\left(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1\right) = z_1^k \bar{z}_1^n p\left(\frac{z_0}{z_1}, 1, \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_1}, 1\right). \tag{30}$$

Обозначим

$$\frac{z_0}{z_1} = \xi, \quad \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_1} = \bar{\xi}.$$

Тогда можно написать:

$$p\left(z_0, z_1, \bar{z}_0, z_1\right) = z_1^k \bar{z}_1^n q(\xi, \bar{\xi}),$$

где $q(\xi, \bar{\xi}) = p(\xi, 1, \bar{\xi}, 1)$ есть полином степени k по ξ и степени n по $\bar{\xi}$. Пространство полиномов $q(\xi, \bar{\xi})$ обозначим $\tilde{\tilde{R}}_{(k, n)}$.

Очевидно, что представление (28), действующее в пространстве $\tilde{R}_{(k, n)}$ однородных полиномов, можно считать действующим в пространстве $\tilde{\tilde{R}}_{(k, n)}$ полиномов $q(\xi, \bar{\xi})$.

Найдем формулы, задающие это представление. Так как

$$q(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{z_1^k \bar{z}_1^n} p(z_0, z_1, \bar{z}_0, \bar{z}_1),$$

$$T_g q = \frac{1}{z_1^k \bar{z}_1^n} T_g p.$$

Используя это, получаем:

$$T_g q(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{z_1^k \bar{z}_1^n} T_g \left[z_1^k \bar{z}_1^n q\left(\frac{z_0}{z_1}, \frac{\bar{z}_0}{\bar{z}_1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{z_1^k \bar{z}_1^n} (a_{10} z_0 + a_{11} z_1)^k (\bar{a}_{10} \bar{z}_0 + \bar{a}_{11} \bar{z}_1)^n q\left(\frac{a_{00} z_0 + a_{01} z_1}{a_{10} z_0 + a_{11} z_1}, \frac{\bar{a}_{00} \bar{z}_0 + \bar{a}_{01} \bar{z}_1}{\bar{a}_{10} \bar{z}_0 + \bar{a}_{11} \bar{z}_1}\right) =$$

$$= (a_{10}\xi + a_{11})^k (\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11})^n q\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}, \frac{\bar{a}_{00}\bar{\xi} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11}}\right).$$

Итак, окончательно мы получаем, что неприводимое представление собственной группы, действующее в пространстве полиномов $g(\xi, \bar{\xi})$ степени k по ξ и степени n по $\bar{\xi}$, задается формулой

$$T_g q(\xi, \bar{\xi}) = (a_{10}\xi + a_{11})^k (\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11})^n q\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}; \frac{\bar{a}_{00}\bar{\xi} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11}}\right). \tag{31}$$

Из этой формулы видно, что действие операторов представления T_g сводится к замене переменных в многочлене $q(\xi, \bar{\xi})$ с помощью дробно-линейного преобразования и умножению $q(\xi, \bar{\xi})$ на некоторые выражения, зависящие от коэффициентов этого преобразования.

7. Унитарные представления собственной группы Лоренца. В предыдущем пункте было рассмотрено представление $g_a \to T_{g_a}$:

$$T_{g_a} q(\xi, \bar{\xi}) = (a_{10}\xi + a_{11})^k (\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11})^n q\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}, \frac{\bar{a}_{00}\bar{\xi} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11}}\right), \quad (31)$$

действующее в пространстве $\tilde{R}_{kn}$ полиномов $q(\xi, \bar{\xi})$. Напомним, что это представление определяется парой

$$(l_0, l_1) = \left(\frac{k-n}{2}, \frac{k+n}{2} + 1\right).$$

Заменяя k и n их выражениями через l_0 и l_1: $k = l_0 + l - 1$, $n = l_1 - l_0 - 1$, перепишем формулу (31) в виде

$$T_{g_a} q(\xi, \bar{\xi}) =$$

$$= (a_{10}\xi + a_{11})^{l_0 + l_1 - 1} (\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11})^{l_1 - l_0 - 1} q\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}; \frac{\bar{a}_{00}\bar{\xi} + \bar{a}_{01}}{\bar{a}_{10}\bar{\xi} + \bar{a}_{11}}\right). \quad (32)$$

Ясно, что эта формула имеет смысл при произвольном комплексном l_1 и полуцелом l_0, если только вместо полиномов $q(\xi, \bar{\xi})$ взять подходящее семейство функций. При этом оказывается, что имеет место следующая замечательная теорема:

Любое неприводимое представление собственной группы Лоренца эквивалентно представлению, задаваемому формулой (32) *в подходящим образом выбранном пространстве функций.* Доказательство этой теоремы проводится по следующему плану: в § 2 были найдены всевозможные неприводимые шестерки операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3, удовлетворяющие соотношениям коммутации (I′—XV′). Оказывается, что если вычислить инфинитезимальные операторы представлений, задаваемых формулой (32) при различных значениях (l_0, l_1), то получаются все описанные в § 2 шестерки неприводимых операторов H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3. Тем самым, во-первых, мы доказываем сформулированную выше теорему и, во-вторых, получаем, что действительно, каждая построенная в § 2 шестерка операторов $\{H_{+,-,3}, F_{+,-,3}\}$ служит инфинитезимальными операторами некоторого неприводимого представления группы Лоренца, т. е., другими словами, каждой допустимой паре (l_0, l_1) отвечает некоторое неприводимое представление собственной группы Лоренца *).

Построим с помощью формулы (32) унитарные представления собственной группы Лоренца.

---

*) Подробное доказательство, проведенное по этому плану, см. в статье М. А. Наймарка, Успехи матем. наук IX, вып. 4 (1955), 89—90.

А. Основная серия унитарных представлений. Числа (l_0, l_1), определяющие унитарное представление, принадлежащее к основной серии, имеют вид (см. § 2) $l_0 = \frac{m}{2}$, $l_1 = i\rho$, где m — произвольное целое число и ρ — произвольное вещественное число.

В качестве пространства, в котором мы зададим представление, рассмотрим гильбертово пространство функций $f(\xi)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int f_1(\xi)\overline{f_2}(\xi)\, dx\, dy \qquad (\xi = x + iy).$$

С помощью несложной выкладки, которую мы здесь опускаем, легко убедиться в том, что операторы

$$T_{g_a} f(\xi) = (a_{10}\xi + a_{11})^{\frac{m}{2} - 1 + i\rho}\, \overline{(a_{10}\xi + a_{11})}^{-\frac{m}{2} - 1 + i\rho} f\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}\right)$$

унитарны в нашем гильбертовом пространстве.

Нетрудно показать, что это представление действительно неприводимо и принадлежит основной серии, причем определяющие его числа равны $l_0 = \frac{m}{2}$, $l_1 = i\rho$ *).

В. Дополнительная серия унитарных представлений: $l_0 = 0$ $|l_1| = \rho < 1$. Определяющие представление этой серии числа равны (см. § 2) $l_0 = 0$, $l_1 = \rho$, где ρ — вещественное, $0 < \rho < 1$. Для реализации представлений дополнительной серии с помощью формулы (32) рассмотрим гильбертово пространство функций $f(\xi)$ со скалярным произведением

$$(f_1 f_2) = \int |\xi_1 - \xi_2|^{-2-2\rho} f_1(\xi_1)\overline{f_2(\xi_2)}\, dx_1\, dy_1\, dx_2\, dy_2$$

$$(\xi_1 = x_1 + iy_1, \quad \xi_2 = x_2 + iy_2).$$

В соответствии с формулой (32) операторы представления задаются так:

$$T_{g_a} f = |a_{10}\xi + a_{11}|^{2\rho - 2} f\left(\frac{a_{00}\xi + a_{01}}{a_{10}\xi + a_{11}}\right).$$

Так же как и в предыдущем случае, легко доказывается, что это представление унитарно, неприводимо и что определяющая его пара чисел равна $(l_0, l_1) = (0, \rho)$.

8. Замечание о тензорах. Наряду с реализацией конечномерных представлений собственной группы Лоренца с помощью спиноров часто используется и другая реализация этих представлений — тензорная.

---

*) См. цитировавшуюся выше статью М. А. Наймарка, Успехи матем. наук IX, вып. 4 (1955), 68—78.

Определение тензора. *Пусть в каждой ортогональной системе координат нам задан набор* 4^n *чисел* $t_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ ($k_i = 0, 1, 2, 3$), *который при переходе от одной системы координат к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g = \| g_{k'k} \|$ *преобразуется по формуле*

$$t'_{k'_1 k'_2 \ldots k'_n} = \sum g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} \ldots g_{k'_n k_n} t_{k_1 k_2 \ldots k_n} \quad (k'_i, k_i = 0, 1, 2, 3). \quad (33)$$

Такой набор чисел $t_{k_1 \ldots k_n}$ *мы назовем тензором n-го ранга относительно собственной группы Лоренца* *).

Представление, действующее в 4^n-мерном пространстве таких тензоров, мы будем называть *тензорным представлением собственной группы Лоренца ранга n*. Например, величины

$$t_{k_1 k_2 \ldots k_n} = x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} \ldots x_{k_n}$$

(x_0, x_1, x_2, x_3 — координаты точки в четырехмерном пространстве) образуют тензор n-го ранга; величины x_k ($k = 0, 1, 2, 3$) образуют, таким образом, тензор первого ранга, иначе называемый вектором.

Заметим, что тензорное представление (33) ранга n эквивалентно n-кратному произведению самого на себя тождественного представления группы Лоренца, действующего в пространстве $R^{(4)}(x_0 x_1 x_2 x_3)$ по формуле

$$x'_{k'} = \sum g_{k'k} x_k.$$

Представление (33) в пространстве тензоров, вообще говоря, приводимо.

Выясним, какие у него могут быть неприводимые компоненты.

Поскольку представление собственной группы $g \to g$, действующее в четырехмерном пространстве, содержит лишь целые веса l ($l = 0, 1$), то и тензорное представление (33), эквивалентное n-кратному произведению представления $g \to g$, содержит только целые веса l. Это означает, что числа l_0, l_1, определяющие неприводимые компоненты тензорного представления, являются целыми.

---

*) Наряду с тензорами $t_{k_1 \ldots k_4}$ с нижними индексами рассматривают также тензоры вида $t^{j_1 \ldots j_s}_{k_1 \ldots k_n}$, причем при собственных преобразованиях Лоренца на верхние индексы $j_1 \ldots j_s$ действует матрица $\| g^{j'j} \| = \left(\| g_{k'k} \|^{\text{тр}} \right)^{-1}$:

$$t'^{j'_1 \ldots j'_s}_{k'_1 \ldots k'_n} = \sum g^{j'_1 j_1 \ldots j'_s j_s} g_{k'_1 k_1} \ldots g_{k'_n k_n} t^{j_1 \ldots j_n}_{k_1 \ldots k_n}. \quad (34)$$

Однако представление (34) эквивалентно представлению (33) (см. § 1, п. 1) и мы не рассматриваем его особо.

В § 6 будет доказано обратное утверждение, а именно: всякое конечномерное неприводимое представление собственной группы, если только определяющие его числа l_0, l_1 — целые, эквивалентно неприводимой компоненте некоторого тензорного представления.

Отметим еще, что с помощью формулы (33) можно задать в пространстве тензоров представление полной (а также общей) группы Лоренца, если взять в качестве матрицы $\|g_{k'k_1}\|$ матрицу s, соответствующую пространственному отражению. Таким образом, представление собственной группы Лоренца (33) можно дополнить до представления полной (и общей) группы Лоренца. Согласно результатам § 3 из этого вытекает, в частности, что наряду с каждой неприводимой компонентой представления (33), определяемой парой (l_0, l_1), тензорное представление содержит сопряженную компоненту, определяемую парой $(-l_0, l_1)$.

В § 5 мы еще раз вернемся к представлению полной группы в пространстве тензоров.

В заключение рассмотрим более подробно тензорное представление второго ранга

$$t'_{k'_1 k'_2} = \sum g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} t_{k_1 k_2}, \tag{35}$$

действующее в 16-мерном пространстве тензоров $t_{k_1 k_2}$. Это представление приводимо. Найдем его неприводимые подпространства.

Заметим, что симметрические тензоры ($t_{k_1 k_2} = t_{k_2 k_1}$) образуют подпространство $R^{(10)}$ (размерности 10), инвариантное относительно представления (35).

Антисимметрические тензоры ($t_{k_1 k_2} = -t_{k_2 k_1}$) также образуют подпространство $R^{(6)}$ (размерности 6), инвариантное относительно тензорного представления (35).

Подпространства $R^{(6)}$ и $R^{(10)}$ не имеют общих элементов, отличных от нуля, и в сумме дают все пространство $R^{(16)}$ тензоров ранга 2

$$R^{(16)} = R^{(10)} \dotplus R^{(6)}.$$

Однако в каждом из инвариантных подпространств $R^{(6)}$ и $R^{(10)}$ тензорное представление (35) все еще приводимо, и мы должны раскладывать эти подпространства дальше.

С и м м е т р и ч е с к и е т е н з о р ы. Заметим, что симметрический тензор $\delta_{k_1 k_2}$ с компонентами $-\delta_{00} = \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ и $\delta_{k_1 k_2} = 0$ при $k_1 \neq k_2$ переводится преобразованием (35) в себя. Таким образом, тензоры вида $\alpha\delta_{k_1 k_2}$ образуют одномерное инвариантное подпространство $R^{(1)}$ (представление в $R^{(1)}$ определяется парой (0,1)).

Прежде чем продолжать разложение пространства $R^{(10)}$ дальше, заметим, что выражение $t_{11} + t_{22} + t_{33} - t_{00}$ (назовем его следом тензора $t_{k_1 k_1}$) не меняется при преобразованиях вида (35). Следовательно, подпространство симметрических тензоров со следом, равным нулю (обозначим его R^9), инвариантно относительно нашего представления. Оказывается, более того, $R^{(9)}$ неприводимо. (Мы убедимся в этом позже, см. § 6.) Найдем пару (l_0, l_1), определяющую неприводимое представление в $R^{(9)}$.

Заметим с этой целью, что вращения $\|g_{ik}\|$ в формуле (35) никак не действуют на индекс $k_i=0$, т. е. группы компонент тензора $t_{k_1k_2}$: $\{t_{00}\}$; $\{t_{01}=t_{10};\ t_{02}=t_{20};\ t_{03}=t_{30}\}$; $\{t_{11},\ t_{22},\ t_{33},\ t_{12}=t_{21},\ t_{31}=t_{13},\ t_{23}=t_{32}\}$ преобразуются при вращениях независимо. Отсюда подпространство $R^{(5)}$ симметрических тензоров $t_{k_1k_2}$, у которых компоненты $t_{00}=t_{01}=t_{02}=t_{03}=0$, инвариантно относительно группы вращений. Ненулевые компоненты таких тензоров t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12}, t_{13}, t_{23} образуют симметрический тензор второго ранга относительно группы вращений (со следом, равным нулю). Таким образом, представление группы вращений, порожденное в $R^{(5)}$ формулой (35), совпадает с представлением этой группы, действующим в пространстве симметрических тензоров второго ранга со следом, равным нулю. Последнее, как мы знаем из первой части книги (см. § 5 стр. 72), неприводимо и имеет вес $l=2$. Аналогичным образом убеждаемся, что подпространство $R^{(3)}$ тензоров, у которых отличны от нуля лишь компоненты $t_{01}=t_{10}$, $t_{02}=t_{20}$, $t_{03}=t_{30}$, неприводимо относительно группы вращений с весом $l=1$. Наконец, тензор из $R^{(9)}$ с компонентами $t_{00}=1$, $t_{11}=t_{22}=$ $=t_{33}=\frac{1}{3}$, $t_{k_1k_2}=0$ при $k_1\neq k_2$ образует скаляр относительно группы вращений (представление с весом $l=0$).

Таким образом, неприводимое представление собственной группы Лоренца, действующее в подпространстве $R^{(9)}$, содержит веса $l=2$, 1, 0 и, следовательно, определяется парой $(l_0, l_1)=(0, 3)$.

Итак, все пространство $R^{(10)}$ симметрических тензоров ранга 2 мы разложили на два неприводимых подпространства: скаляр $\delta_{k_1k_2}(R^{(1)})$ (представление с парой $(0, 1)$) и $R^{(9)}$ — симметрические тензоры со следом нуль (представление с парой $(0, 3)$).

Заметим, что оба эти подпространства инвариантны относительно представления полной группы Лоренца, задаваемого формулой (35).

Антисимметрические тензоры: $t_{ik}=-t_{ki}$. Заметим снова, что две группы ненулевых компонент такого тензора $t_{01}=-t_{10}$, $t_{02}=-t_{20}$, $t_{03}=-t_{30}$ и $t_{12}=-t_{21}$, $t_{13}=-t_{31}$, $t_{23}=-t_{32}$ преобразуются при вращениях независимо. Следовательно, трехмерные подпространства тензоров, у которых либо первая, либо вторая группа компонент равна нулю, инвариантны и неприводимы относительно группы вращений (и имеют вес $l=1$). Из этого немедленно вытекает, что представление собственной группы Лоренца в $R^{(6)}$ приводимо (неприводимое представление собственной группы не содержит двух одинаковых весов) и состоит из двух неприводимых представлений, действующих в пространствах $R^{(3)}$ и $\dot{R}^{(3)}$ и содержащих ровно один вес $l=1$. Пары, определяющие такие представления, имеют вид $(\pm 1, 2)$.

Как было отмечено на стр. 254, тензорное представление вместе с каждой неприводимой компонентой содержит сопряженную. Поэтому представления, задаваемые в $R^{(3)}$ и $\dot{R}^{(3)}$, не эквивалентны и одно из них задается парой (1, 2), другое — парой (—1, 2).

Пространство $R^{(6)}$ антисимметрических тензоров $t_{k_1k_2}$, как видно из формул (35), инвариантно относительно пространственного отражения. Поскольку $R^{(6)}$ состоит из двух сопряженных компонент, то в соответствии с результатами § 3, это означает, что представление полной группы, задаваемое в $R^{(6)}$ формулой (35), неприводимо.

Таким образом, *пространство* $R^{(6)}$ *антисимметрических тензоров ранга* 2 *раскладывается на два подпространства* $R^{(3)}$ *и* $\dot{R}^{(3)}$ *неприводимых относительно представления собственной группы Лоренца. Пары, определяющие эти представления, равны* (—1, 2) *и* (1, 2). *Представление полной группы Лоренца в пространстве* $R^{(6)}$ *неприводимо.*

Подведем итог сказанному.

Пространство тензоров $t_{k_1k_2}$ ранга 2 раскладывается в сумму четырех подпространств, неприводимых относительно представления (35) собственной группы Лоренца:

1) $R^{(1)}\delta_{k_1k_2}$ — скаляр (пара (0, 1));

2) $R^{(9)}$ — пространство симметрических тензоров со следом $t_{11}+t_{22}+t_{33}-t_{00}$, равным нулю (пара (0, 3));

3 и 3′) два пространства $R^{(3)}$ и $\dot{R}^{(3)}$ антисимметрических тензоров (пары (—1, 2) и (1, 2)). Сумма пространств $R^{(3)}+\dot{R}^{(3)}$ образует все пространство $R^{(6)}$ антисимметрических тензоров ранга 2.

Пространства $R^{(1)}$, $R^{(9)}$ и $R^{(6)}$ инвариантны и неприводимы относительно представления полной группы Лоренца, задаваемого формулой (35).

В заключение этого пункта сделаем следующее замечание. Как мы знаем, всякое конечномерное представление, в том числе и тензорное, эквивалентно некоторому спинорному представлению. Здесь мы явно выразим компоненты тензора n-го ранга $t_{k_1 \ldots k_n}$ через компоненты спинора $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n \dot{\alpha}_1 \ldots \dot{\alpha}_n}$ с n-пунктирными и n-непунктирными индексами.

Для этого рассмотрим тензор вида

$$t_{k_1 \ldots k_n} = x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_n} \qquad (k_i = 0, 1, 2, 3), \tag{36}$$

где x_{k_i} — координаты вектора. Как мы уже видели в (17″) п. 4 § 4,

$$x_{k_i} = \sum_{\alpha_i \dot{\alpha}_i} \sigma^{(k_i)}_{\alpha_i \dot{\alpha}_i} a^{\alpha_i \dot{\alpha}_i},$$

где $a^{\alpha_i \dot{\alpha}_1}$ — компоненты спинора ранга (1, 1). Отсюда

$$x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_n} = \sum \sigma^{(k_1)}_{\alpha_1 \dot{\alpha}_1} \sigma^{(k_2)}_{\alpha_2 \dot{\alpha}_2} \ldots \sigma^{(k_n)}_{\alpha_n \dot{\alpha}_n} a^{\alpha_1 \dot{\alpha}_1} a^{\alpha_2 \dot{\alpha}_2} \ldots a^{\alpha_n \dot{\alpha}_n}.$$

Очевидно, что произведение

$$a^{\alpha_1\dot{\alpha}_1}a^{\alpha_2\dot{\alpha}_2}\ldots a^{\alpha_n\dot{\alpha}_n} \doteq a^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\dot{\alpha}_1\dot{\alpha}_2\ldots\dot{\alpha}_n}$$

является спинором с n-пунктирным и n-непунктирным индексами (вообще говоря, несимметрическим). Таким образом, тензор вида (36), а следовательно, и любой тензор n-го ранга, может быть записан в виде

$$t_{k_1\ldots k_n} = \sum \sigma^{(k_1)}_{\alpha_1\dot{\alpha}_1}\sigma^{(k_2)}_{\alpha_2\dot{\alpha}_2}\ldots\sigma^{(k_n)}_{\alpha_n\dot{\alpha}_n} a^{\alpha_1\ldots\alpha_n\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n}$$

(суммирование происходит по всем наборам $(\alpha_1\ldots\alpha_n\dot{\alpha}_1\ldots\dot{\alpha}_n)$).

9. Различие между спинорными и тензорными представлениями группы Лоренца. Заметим, что тензорное представление группы Лоренца, задаваемое формулой (35), может быть продолжено до представления всей группы невырожденных линейных преобразований a в четырехмерном пространстве. Для этого достаточно подставить в эту формулу матрицу линейного преобразования a. Таким образом, тензоры $t_{k_1k_2\ldots k_n}$, которые мы рассматривали выше, только в ортогональных системах координат (т. е. таких системах, которые переходят друг в друга с помощью преобразований Лоренца) можно записывать в любой системе координат.

Иначе обстоит дело с теми из спинорных представлений $T_g^{(k,\,n)}$, которые не эквивалентны тензорным представлениям (в частности, с непунктирным спинорным представлением ранга 1 или пунктирным ранга 1). Эти представления группы Лоренца не могут быть продолжены до представления всей группы линейных преобразований четырехмерного пространства. Таким образом, спиноры, определенные нами только в ортогональной системе координат, никаким естественным образом не могут быть определены в косоугольной системе координат.

§ 5. Конечномерные представления полной и общей групп Лоренца. Биспиноры

В предыдущем параграфе мы реализовали все конечномерные неприводимые представления собственной группы Лоренца (или, точнее, группы $\mathfrak{A}$ комплексных матриц второго порядка с определителем, равным 1) в пространствах $R_{(k,\,n)}$ симметрических спиноров ранга $(k,\ n)$ (k — число непунктирных, n — число пунктирных индексов).

В этом параграфе мы с помощью спиноров реализуем конечномерные неприводимые представления полной группы.

Напомним предварительно основные результаты § 3, где были описаны все неприводимые представления полной группы.

Всякое такое представление $g \to T_g$ порождает представление $g' \to T_{g'}$ собственной группы, состоящее либо из одной компоненты, либо из двух неэквивалентных компонент τ и $\dot{\tau}$.

В первом случае представление $g' \to T_{g'}$ эквивалентно своему сопряженному представлению и определяется, следовательно, парой $(0, l_1)$ или $(l_0, 0)$. Обратно, всякое неприводимое представление собственной группы, эквивалентное своему сопряженному, может быть дополнено до представления полной группы, причем это можно сделать двумя различными способами, отличающимися выбором знака у оператора S.

Во втором случае, когда в представлении полной группы участвуют две неэквивалентные неприводимые компоненты τ и $\dot{\tau}$ представления $g' \to T_{g'}$ собственной группы, последние сопряжены друг другу и определяются парами $\tau \sim (l_0, l_1)$ и $\dot{\tau} \sim (l_0, -l_1)$, причем $l_0 \neq 0$, $l_1 \neq 0$. Обратно, представление собственной группы Лоренца, распадающееся на два сопряженных друг другу неэквивалентных неприводимых представления τ и $\dot{\tau}$, может быть дополнено единственным, с точностью до эквивалентности, способом до неприводимого представления полной группы Лоренца.

После этих напоминаний перейдем к построению неприводимых конечномерных представлений полной группы.

Начнем с самого простого случая.

1. Биспинор первого ранга. Напомним, что в § 4 мы построили неприводимое представление собственной группы Лоренца в двумерном комплексном пространстве $R_{(1,0)}$, действующее по формуле

$$\left.\begin{aligned} a^{0'} &= a_{00}a^0 + a_{01}a^1, \\ a^{1'} &= a_{10}a^0 + a_{11}a^1, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $a = \|a_{\alpha}{}^{\dot\alpha}\|$ — матрица, соответствующая преобразованию g_a из собственной группы (соответствие $g_a \sim a$ подробно описано в § 1, п. 2). Величину (a^0, a^1), преобразующуюся по формуле (1), мы назвали непунктирным спинором ранга 1 относительно собственной группы Лоренца. Это представление, как мы видели, задается парой $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и его канонический базис образует спиноры $\xi_{\frac{1}{2}} = (1, 0)$, $\xi_{-\frac{1}{2}} = (0, 1)$.

Из результатов § 3 следует, что в пространстве $(R_{1,0})$ непунктирных спиноров ранга 1 представление (1) собственной группы не может быть дополнено до представления полной группы Лоренца. Для того чтобы это сделать, нужно задать еще одно неприводимое представление собственной группы, сопряженное представлению $g_a \to \pm a$, т. е. определяемое парой $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Представление, сопряженное представлению $g_a \to \pm a$, действует, как мы уже знаем, в пространстве пунктирных спиноров с нижними индексами по формуле

$$\left.\begin{aligned} a'_{\dot 0} &= a^{\dot 0\dot 0} a_{\dot 0} + a^{\dot 0\dot 1} a_{\dot 1}, \\ a'_{\dot 1} &= a^{\dot 1\dot 0} a_{\dot 0} + a^{\dot 1\dot 1} a_{\dot 1}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где матрица $\|a^{\dot\alpha\dot\beta}\| = (a^*)^{-1}$. При этом базис из векторов $\{e^{\dot 0}, e^{\dot 1}\}$, т. е. базис, в котором записаны все матрицы $(a^*)^{-1}$, совпадает с каноническим базисом $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ представления $g_a \to \pm (a^*)^{-1}$.

Если теперь рассмотреть представление собственной группы, состоящее из компонент $g_a \to \pm a$ и $g_a \to \pm a^{*-1}$, то операторы этого представления в каноническом базисе $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}, \eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ записываются матрицами четвертого порядка

$$T_{g_a} = \pm \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{*-1} \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

В соответствии с результатами § 3 оператор S в этом базисе должен быть записан матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Предоставляем читателю проверить непосредственно, не пользуясь результатами § 3, что операторы T_g и S удовлетворяют необходимым соотношениям

$$ST_gS^{-1} = T_{g^{*-1}}, \qquad S^2 = E.$$

Пространство, в котором действует построенное только что представление полной группы, обозначим через R_1^1; координаты вектора из R_1^1 в каноническом базисе обозначим через a^0, a^1, $a_{\dot 0}$, $a_{\dot 1}$. Формулы (3) и (4), очевидно, означают, что при переходе от одной ортогональной системы координат к другой с помощью преобразования из собственной группы Лоренца числа a^0, a^1, $a_{\dot 0}$, $a_{\dot 1}$ преобразуются по формулам

$$\left.\begin{aligned} a^{0'} &= a_{00}a^0 + a_{01}a', \\ a^{1'} &= a_{10}a^0 + a_{11}a', \\ a'_{\dot 0} &= \qquad\qquad a^{\dot 0\dot 0}a_{\dot 0} + a^{\dot 0\dot 1}a_{\dot 1}, \\ a'_{\dot 1} &= \qquad\qquad a^{\dot 1\dot 0}a_{\dot 0} + a^{\dot 1\dot 1}a_{\dot 1}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

а при пространственном отражении s — по формулам

$$\left.\begin{aligned} a'^0 &= a_{\dot 0}, \\ a'^1 &= a_{\dot 1}, \\ a'_{\dot 0} &= a^0, \\ a'_{\dot 1} &= a^1. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Пусть в каждой ортогональной системе координат четырехмерного пространства R^4 *задана определенная с точностью до знака четверка чисел* $(a^0, a^1, a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$, *которая при переходе от одной системы координат к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g=g_a$ *преобразуется матрицей* (3) *по формулам* (5); *при переходе же от одной системы координат к другой с помощью пространственного отражения числа* $(a^0, a^1, a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ *преобразуются по формулам* (6). *Такая четверка чисел называется биспинором первого ранга.*

Первые две компоненты биспинора (a^0, a^1) при собственных преобразованиях Лоренца преобразуются как непунктирный спинор первого ранга с верхними индексами, а две последние компоненты $(a_{\dot 0}, a_{\dot 1})$ — как пунктирный спинор первого ранга с нижними индексами. При пространственном отражении эти пары компонент переставляются.

Заметим еще, что при вращениях, которым соответствуют унитарные матрицы $a=(a^*)^{-1}$, обе пары компонент биспинора преобразуются одинаково.

В пространстве R_1^1 биспиноров первого ранга представление $g \to T_g$ полной группы может быть двумя различными способами дополнено до однозначного представления общей группы, если временному отражению t отнести оператор $T=+S$ или $T=-S$.

Заметим, что в пространстве R_1^1 можно задать также двузначное представление общей группы (см. § 1 и § 3), если временному отражению t сопоставить матрицу T

$$T=\begin{Vmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{Vmatrix},$$

а полному отражению — матрицу J

$$J=\begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}$$

(это представление общей группы тесно связано с так называемым уравнением Дирака (см. § 9)). Такое двузначное представление общей группы в пространстве R_1^1 может быть задано единственным (с точностью эквивалентности) способом.

2. Общий случай. Биспиноры ранга (k, n). Как мы показали в § 4, каждое неприводимое конечномерное представление собственной группы можно реализовать в пространстве R_n^k симметрических спиноров $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ с k верхними непунктирными индексами и n нижними пунктирными индексами по формуле

$$a'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_k}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_n} = \sum a_{\alpha'_1 \alpha_1} \ldots a_{\alpha'_k \alpha_k} a^{\dot\beta'_1 \dot\beta_1} \ldots a^{\dot\beta'_n \dot\beta_n} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, \tag{7}$$

$$\left\| a^{\dot\beta'_i \dot\beta_i} \right\| = \left\| a_{\alpha'_i \alpha_i} \right\|^{* -1}.$$

Пара, определяющая это представление, имеет вид $\left(l_0 = \frac{k-n}{2};\ l_1 = \frac{k+n}{2} + 1\right)$. Представление, сопряженное представлению (7), действует в пространстве R_k^n спиноров $b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$ с n верхними непунктирными индексами и с k нижними пунктирными индексами по формуле

$$b'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k} = \sum a_{\alpha'_1 \alpha_1} \ldots a_{\alpha'_n \alpha_n} a^{\dot\beta'_1 \dot\beta_1} \ldots a^{\dot\beta'_k \dot\beta_k} b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}. \tag{8}$$

После этих напоминаний перейдем к построению неприводимых конечномерных представлений полной группы.

Рассмотрим, как всегда, два случая.

I. $k \neq n$ или $l_0 \neq 0$. В этом случае, как мы знаем из § 3, неприводимое представление полной группы может быть построено единственным, с точностью до эквивалентности, способом в прямой сумме пространств

$$R(k, n) = R_n^k \dotplus R_k^n.$$

Выпишем это представление полной группы явно.

Каждый вектор из пространства $R(k, n)$ задается набором чисел

$$\left\{ a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, \quad b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k} \right\}. \tag{9}$$

В пространстве $R(k, n)$ представление полной группы действует следующим образом. При собственных преобразованиях Лоренца g_a набор $\left\{ a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k} \right\}$ преобразуется по формулам

$$\left.\begin{aligned} a'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_k}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_n} &= \sum a_{\alpha'_1 \alpha_1} \ldots a_{\alpha'_k \alpha_k} a^{\dot\beta'_1 \dot\beta_1} \ldots a^{\dot\beta'_k \dot\beta_k} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}, \\ b'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k} &= \sum a_{\alpha'_1 \alpha_1} \ldots a_{\alpha'_n \alpha_n} a^{\dot\beta'_1 \dot\beta_1} \ldots a^{\dot\beta'_k \dot\beta_k} b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

т. е. пространства R_n^k и R_k^n являются инвариантными и неприводимыми подпространствами относительно представления (10) собственной группы и в этих пространствах представление (10) совпадает с представлением (7) и (8) соответственно.

Оператор S, соответствующий отражению s, зададим так:

$$\left.\begin{aligned} a^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n} &= \sum \delta^{\alpha'_1 \dot\beta_1} \ldots \delta^{\alpha'_k \dot\beta_k} \delta_{\alpha_1 \dot\beta'_1} \ldots \delta_{\alpha_n \dot\beta'_n} b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}, \\ b^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k} &= \sum \delta^{\alpha'_1 \dot\beta_1} \ldots \delta^{\alpha'_n \dot\beta_n} \delta_{\alpha_1 \dot\beta'_1} \ldots \delta_{\alpha_k \dot\beta'_k} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

т. е. числа $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$ и $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ переставляются друг с другом, причем одновременно их верхние индексы переставляются с нижними. Напомним, что в п. 5 § 4 мы построили соответствие между спинорами $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ из R_n^k и $b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$ из R_k^n

$$a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n} \longleftrightarrow b^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_n}_{\dot\beta'_1 \ldots \dot\beta'_k}, \qquad \begin{matrix} \alpha'_i = \dot\beta_i, \\ \dot\beta'_i = \alpha_i \end{matrix} \qquad (12)$$

Очевидно, что как раз оператор S задает это соответствие. Нам нужно убедиться, что формулы (10), (11) действительно задают представление полной группы. Для этого достаточно проверить, что для любого оператора T_{g_a} из представления (11) собственной группы выполняется равенство

$$ST_{g_a}S = T_{\left(g_a^*\right)^{-1}} = T_{g_{(a^*)^{-1}}}$$

см. § 3).

Пусть $\{e_1, \ldots, e_N\}$ и $\{f_1, \ldots, f_N\}$ — базисы из R_n^k и R_k^n, переходящие друг в друга под действием оператора S,

$$Se_i = f_i, \qquad Sf_i = e_i \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Очевидно, что оператор S запишется в базисе $(e_1, \ldots, e_N, f_1, \ldots, f_N)$ матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \qquad E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix},$$

а операторы представления (10) собственной группы, как это следует из замечания в конце п. 5 § 4 о соответствии (12) между спинорами $a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}$ и $b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}$, матрицей вида

$$T_{g_a} = \begin{Vmatrix} A_{g_a} & 0 \\ 0 & A_{g_{(a^*)^{-1}}} \end{Vmatrix}.$$

Равенство $ST_{g_a}S^{-1}=T_{g(a^*)^{-1}}$ проверяется теперь непосредственно. Итак, мы действительно получили представление полной группы Лоренца, действующее в пространстве $R(k, n)$ величин $\left(a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}\right)$. Как следует из результатов § 3, представление полной группы в пространстве $R(k, n)$ $(k \neq n)$ неприводимо.

Дадим теперь общее определение величин

$$\left\{ a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, \quad b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k} \right\}.$$

Пусть в каждой ортогональной системе координат задан определенный с точностью до знака набор $2 \times 2^{k+n}$ *чисел* $\left\{ a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k} \right\}$, *которые при переходе от одной системы координат к другой с помощью собственного преобразования Лоренца* $g=g_a$ *преобразуются по формулам* (10); *при переходе же от одной системы координат к другой с помощью пространственного отражения числа* $\left\{ a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k} \right\}$ *преобразуются по формулам* (11). *Такой набор чисел называется биспинором ранга* (k, n).

Первый набор чисел у биспинора при собственных преобразованиях Лоренца преобразуется как спинор ранга (k, n) с k верхними непунктирными индексами и с n нижними пунктирными индексами, а второй набор чисел — как спинор ранга (n, k) с n верхними непунктирными индексами и с k нижними пунктирными индексами.

При вращениях $a=(a^*)^{-1}$ первый и второй наборы чисел биспинора преобразуются одинаково.

Биспиноры ранга (k, n) образуют $2 \times 2^{k+n}$-мерное линейное пространство. Формулы (10) и (11) задают в этом пространстве представление полной группы Лоренца, вообще говоря, приводимое. Построенное нами выше пространство $R(k, n)$ является, очевидно, подпространством в пространстве всех биспиноров, инвариантных относительно представления (10) и (11). Биспиноры, принадлежащие пространству $R(k, n)$, будем называть *симметрическими* биспинорами ранга (k, n) (они составлены из двух симметрических спиноров). Таким образом, построенное нами выше представление (10), (11) — это представление, действующее в пространстве $R(k, n)$ симметрических биспиноров ранга (k, n). В случае, когда $k \neq n$, оно неприводимо.

II. Рассмотрим случай, когда $n=k$. Все построения предыдущего пункта здесь, конечно, остаются в силе, с той лишь разницей, что построенное представление полной группы в пространстве симметрических биспиноров $R(k, k)$ (как следует из § 3) уже приводимо.

Однако в случае, если $n=k$ (т. е. $l_0=0$), неприводимое представление полной группы можно задать в самом пространстве R^k_k

симметрических спиноров ранга (k, k) двумя неэквивалентными способами.

Оператор S определяется формулой

$$a^{\alpha_1' \dots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_k'} = \pm \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \dots \delta^{\alpha_k' \dot\beta_k} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \dots \delta_{\alpha_k \dot\beta_k'} a^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}. \tag{13}$$

3. Неприводимые представления общей группы. Однозначные представления. Как мы знаем из результатов § 3, всякое неприводимое представление полной группы дополняется до однозначного представления общей группы, если временному отражению t отнести оператор $T = \pm S$, а полному отражению j — оператор $J = \pm E$. Таким образом, в пространстве биспиноров любого ранга можно построить неприводимое однозначное представление общей группы. При этом в случае I $(k \neq n)$ операторы T и J имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&T: \begin{cases} a^{\alpha_1' \dots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_n'} = \pm \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \dots \delta^{\alpha_k' \dot\beta_k} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \dots \delta_{\alpha_n \dot\beta_n'} b^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}, \\ b^{\alpha_1' \dots \alpha_n'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_k'} = \pm \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \dots \delta^{\alpha_n' \dot\beta_n} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \dots \delta_{\alpha_k \dot\beta_k'} a^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}, \end{cases} \\
&J: \begin{cases} a^{\alpha_1' \dots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_n'} = \pm a^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_n}, \\ b^{\alpha_1' \dots \alpha_n'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_k'} = \pm b^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}, \end{cases} \qquad \begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i, \\ \dot\beta_i' &= \dot\beta_i, \end{aligned}
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

а в случае II $(k = n)$ операторы T, J, как и оператор S, действуют в пространстве спиноров ранга (k, k) по формулам

$$\left.\begin{aligned}
&T: a^{\alpha_1' \dots \alpha_k'}_{\dot\beta_k' \dots \dot\beta_k'} = \pm \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \dots \delta^{\alpha_k' \dot\beta_k} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \dots \delta_{\alpha_k \dot\beta_k'} a^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}, \\
&J: a^{\alpha_1' \dots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \dots \dot\beta_k'} = \pm a^{\alpha_1 \dots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \dots \dot\beta_k}, \qquad \begin{aligned} \alpha_i' &= \alpha_i, \\ \dot\beta_i' &= \dot\beta_i. \end{aligned}
\end{aligned}\right\} \tag{14'}$$

Двузначные представления общей группы. Как мы видели в § 3, всякое такое представление порождает представление полной группы, состоящее из двух сопряженных друг другу неприводимых компонент собственной группы. При этом можно выбрать базис (см. п. 5 § 3), где операторы S, T и J записываются матрицами

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix}, \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{Vmatrix}, \quad J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}.$$

Обратно, всякое представление собственной группы, состоящее из двух сопряженных друг другу компонент, можно дополнить до неприводимого двузначного представления общей группы.

Представление полной группы, действующее в пространстве симметрических биспиноров ранга (k, n), содержит две сопряженные друг другу компоненты собственной группы. Таким образом, представление (10), (11) полной группы в пространстве биспиноров можно дополнить до неприводимого двузначного представления общей группы. При этом операторы T и J действуют по формулам

$$T: \left\{ \begin{aligned} a^{\alpha_1' \ldots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \ldots \dot\beta_n'} &= i \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \ldots \delta^{\alpha_k' \dot\beta_k} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \ldots \delta_{\alpha_n \dot\beta_n'} b^{\alpha_1 \ldots \alpha_n}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_k}, \\ b^{\alpha_1' \ldots \alpha_n'}_{\dot\beta_1' \ldots \dot\beta_k'} &= -i \sum \delta^{\alpha_1' \dot\beta_1} \ldots \delta^{\alpha_n' \dot\beta_n} \delta_{\alpha_1 \dot\beta_1'} \ldots \delta_{\alpha_k \dot\beta_k'} a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

$$J: \left\{ \begin{aligned} a^{\alpha_1' \ldots \alpha_k'}_{\dot\beta_1' \ldots \dot\beta_n'} &= -i a^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, & \alpha_i' &= \alpha_i, \\ b^{\alpha_1' \ldots \alpha_n'}_{\dot\beta_1' \ldots \dot\beta_k'} &= i b^{\alpha_1 \ldots \alpha_k}_{\dot\beta_1 \ldots \dot\beta_n}, & \dot\beta_i' &= \dot\beta_i, \end{aligned} \right\} \tag{15'}$$

а оператор S — по формуле (11).

Легко видеть, что если в пространстве симметрических биспиноров $R(k, n)$ выбрать базис так, чтобы оператор S (11) записывался матрицей

$$S = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix},$$

то операторы T, J (15) и (15′) в этом базисе имеют вид

$$J = \begin{Vmatrix} -iE & 0 \\ 0 & iE \end{Vmatrix}; \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & iE \\ -iE & 0 \end{Vmatrix}.$$

Операторы S, T, J антикоммутируют и, таким образом, вместе с E образуют двузначное представление группы отражений: $e \to \pm E$; $s \to \pm S$; $t \to \pm T$; $j = \pm J$.

4. Тензорные представления полной и общей групп Лоренца. Напомним, что тензорное представление собственной группы, т. е. представление, задаваемое формулой

$$t'_{k_1' k_2' \ldots k_n'} = \sum g_{k_1' k_1} g_{k_2' k_2} \ldots g_{k_n' k_n} t_{k_1 k_2 \ldots k_n} \tag{16}$$

(индексы k_i принимают значения $k_i = 0, 1, 2, 3$; $\| g_{k_i' k_i} \|$ — матрица собственного преобразования Лоренца), естественно дополняется до представления полной группы Лоренца, если в качестве матрицы $\|g_{ik}\|$ в формулу (16) подставить матрицу пространственного отражения s

$$s = \begin{Vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

ли матрицу — s.

Оператор S определяется при этом формулой

$$t'_{k'_1 \ldots k'_n} = \sum \left(\pm \delta_{k'_1 k_1}\right)\left(\pm \delta_{k'_2 k_2}\right) \ldots \left(\pm \delta_{k'_n k_n}\right) t_{k_1 \ldots k_n}, \tag{16'}$$

где

$$-\delta_{00} = \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1 \quad \text{при} \quad k'_i = k_i$$

и

$$\delta_{k'_i k_i} = 0 \quad \text{при} \quad k'_i \neq k_i.$$

Если в формуле (16′) выбирается знак плюс в четном числе скобок, то соответствующая величина называется собственно тензором. Величины же, преобразующиеся при отражениях с помощью формулы (16′), в которой знак плюс выбирается в нечетном числе скобок, называют псевдотензорами (псевдоскаляр, псевдовектор).

Аналогично оператору S можно задать с помощью формулы (16) операторы T и J, соответствующие временному и пространственному отражению t, j. При этом мы получим тензорное однозначное представление общей группы.

Тензорное представление собственной группы Лоренца можно дополнить до двузначного представления общей группы. Согласно общей конструкции, описанной в § 3, это представление задается так: рассмотрим пару тензоров $t_{k_1 \ldots k_n}$ и $\tilde{t}_{k_1 \ldots k_n}$, которые независимо преобразуются при собственных преобразованиях Лоренца и при отражении s по формулам (16) и (16′). При этом тензор $t_{k_1 \ldots k_n}$ преобразуется формулой (16′) со знаком плюс, а для тензора $\tilde{t}_{k_1 \ldots k_n}$ перед этой формулой ставится знак минус. Операторы T и J действуют на $t_{k_1 \ldots k_n}$ и $\tilde{t}_{k_1 \ldots k_n}$ так:

$$T: \begin{cases} t'_{k'_1 \ldots k'_n} = i \sum \left(\pm \delta_{k'_1 k_1}\right)\left(\pm \delta_{k'_2 k_2}\right) \ldots \left(\pm \delta_{k'_n k_n}\right) \tilde{t}_{k_1 \ldots k_n}, \\ \tilde{t}'_{k'_1 \ldots k'_n} = -i \sum \left(\pm \delta_{k'_1 k_1}\right)\left(\pm \delta_{k'_2 k_2}\right) \ldots \left(\pm \delta_{k'_n k_n}\right) t_{k_1 \ldots k_n}, \end{cases}$$

$$J: \begin{cases} t'_{k_1 \ldots k_n} = \tilde{t}_{k_1 \ldots k_n}, \\ \tilde{t}'_{k_1 \ldots k_n} = -t_{k_1 \ldots k_n}. \end{cases}$$

§ 6. Произведение двух неприводимых конечномерных представлений собственной группы Лоренца *)

1. Разложение кронекеровского произведения двух неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые. Как и в случае группы вращений, представляет интерес следующая задача: даны два неприводимых представления собственной группы: одно $g \to T_g^{(1)}$, действующее в пространстве R_1, и другое

*) Определение произведения представлений см. ч. I, § 4.

$g \to T_g^{(2)}$, действующее в пространстве R_2. Представление $\tau_g = T_g^{(1)} \times T_g^{(2)}$, действующее в $R_1 \times R_2$, вообще говоря, приводимо. Какие неприводимые компоненты оно содержит?

Мы решим здесь эту задачу для случая конечномерных неприводимых представлений $g \to T_g^{(1)}$ и $g \to T_g^{(2)}$. При этом нам будет удобно рассматривать эти представления реализованными в пространствах спиноров (см. § 4). Напомним, что всякое конечномерное представление собственной группы Лоренца можно реализовать в пространстве симметрических спиноров ранга (k, n), где k — число непунктирных индексов, n — число пунктирных индексов, причем определяющие это представление числа равны

$$l_0 = \frac{k-n}{2}, \qquad l_1 = \frac{k+n}{2} + 1.$$

Перейдем к решению нашей задачи. Начнем с частных случаев.

1. В § 4 было показано, что неприводимое представление в пространстве симметрических спиноров ранга (k, n), $T_g^{(k, n)}$ является произведением двух неприводимых представлений — $T_g^{(k, 0)}$ и $T_g^{(0, n)}$:

$$T_g^{(k, n)} = T_g^{(k, 0)} \times T_g^{(0, n)}.$$

Первое из этих представлений реализуется в пространстве непунктирных спиноров, и мы его в дальнейшем называем коротко непунктирным, второе — действует в пространстве пунктирных спиноров и в дальнейшем называется просто пунктирным.

2. Пусть задано произведение двух непунктирных представлений

$$T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(k_2, 0)}.$$

Покажем, что неприводимые компоненты этого произведения суть снова непунктирные произведения. Для этого воспользуемся сделанным нами в § 4, п. 3 замечанием о том, что те конечномерные представления $g \to T_g$, у которых матричные элементы операторов T_g в некотором базисе являются аналитическими функциями элементов матрицы второго порядка a: $(a_{00}, a_{01}, a_{10}, a_{11})$, раскладываются лишь на непунктирные спинорные представления. Такие представления $g \to T_g$ мы назвали аналитическими. Очевидно, что само неприводимое пунктирное представление $g \to T_g^{(k_1, 0)}$ аналитично. Кроме того, ясно, что произведение двух аналитических представлений аналитично.

Таким образом, представление $T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(k_2, 0)}$ — аналитическое и содержит поэтому лишь непунктирные компоненты $T_g^{(k', 0)}$.

Выясним, какие ранги k' могут встречаться у этих компонент. Напомним для этого, что представления $T_g^{(k_1, 0)}$ и $T_g^{(k_2, 0)}$ неприводимы относительно группы вращений и имеют веса $\frac{k_1}{2}$ и $\frac{k_2}{2}$ соответственно.

Поскольку каждое представление $T_g^{(k'_1, 0)}$ также неприводимо относительно группы вращений и имеет вес $\frac{k'}{2}$, то $\frac{k'}{2}$ пробегает все значения от $\frac{|k_1-k_2|}{2}$ до $\frac{k_1+k_2}{2}$ (по одному разу).

Итак, *ранги k' непунктирных компонент $T_g^{(k', 0)}$, входящих в разложение $T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(k_2, 0)}$, принимают по одному разу значения*

$$k'=|k_1-k_2|, \quad |k_1-k_2|+2, \ \ldots, \quad k_1+k_2-2, \quad k_1+k_2.$$

3. Аналогично предыдущему произведение двух пунктирных представлений

$$T_g^{(0, n_1)} \times T_g^{(0, n_2)}$$

распадается лишь на пунктирные компоненты $T_g^{(0, n')}$, *ранги которых n' могут принимать значения*

$$n'=|n_1-n_2|, \quad |n_1-n_2|+2; \quad n_1+n_2-2, \quad n_1+n_2$$

(*каждое по одному разу*).

4. Общий случай. Как было указано вначале, произведение непунктирного представления $T_g^{(k, 0)}$ на пунктирное $T_g^{(0, n)}$

$$T_g^{(k, 0)} \times T_g^{(0, n)}$$

неприводимо и эквивалентно представлению $T_g^{(k, n)}$ в пространстве симметрических спиноров ранга (k, n):

$$T_g^{(k, 0)} \times T_g^{(0, n)} = T_g^{(k, n)}.$$

Воспользуемся этим обстоятельством для разложения на неприводимые представления

$$\tau_g = T_g^{(k_1, n_1)} \times T_g^{(k_2, n_2)},$$

т. е. для решения общей задачи о разложении произведения неприводимых конечномерных представлений собственной группы Лоренца.

Воспользуемся равенствами

$$T_g^{(k_1, n_1)} = T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(0, n_1)}$$

и

$$T_g^{(k_2, n_2)} = T_g^{(k_2, 0)} \times T_g^{(0, n_2)}.$$

Тогда для τ_g получим:

$$\tau_g = \left(T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(0, n_1)}\right) \times \left(T_g^{(k_2, 0)} \times T_g^{(0, n_2)}\right).$$

Переставляя сомножители и пользуясь ассоциативностью произведения двух представлений, получаем *):

$$\tau_g = \left(T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(k_2, 0)}\right) \times \left(T_g^{(0, n_1)} \times T_g^{(0, n_2)}\right).$$

Первая скобка в этом произведении дает представление, содержащее лишь одни непунктирные компоненты $T_g^{(k', 0)}$ $k' = |k_1 - k_2|$, $|k_1 - k_2| + 2, \ldots, k_1 + k_2$. Вторая скобка раскладывается на пунктирные компоненты $T_g^{(0, n')}$ $n' = |n_1 - n_2|$, $|n_1 - n_2| + 2, \ldots$ $\ldots, n_1 + n_2 - 2$, $n_1 + n_2$. Очевидно, что представление τ содержит всевозможные представления вида $T_g^{(k', 0)} \times T_g^{(0, n')}$ (ровно по одному разу). Но каждое такое представление неприводимо и реализуется в пространстве спиноров ранга (k', n'), т. е.

$$T_g^{(k', 0)} \times T_g^{(0, n')} = T_g^{(k' n')}.$$

Таким образом, мы окончательно получаем, что *произведение двух конечномерных неприводимых представлений собственной группы Лоренца* $T_g^{(k_1, n_1)}$ и $T_g^{(k_2, n_2)}$ *(реализуемых спинорами ранга* (k_1, n_1) *и* (k_2, n_2) *соответственно) раскладывается на неприводимые компоненты* $T_g^{(k', n')}$, *где* k' *и* n' *независимо пробегают значения*

$$\begin{array}{llll} k' = |k_1 - k_2|, & |k_1 - k_2| + 2, \ldots, & k_1 + k_2 - 2, & k_1 + k_2, \\ n' = |n_1 - n_2|, & |n_1 - n_2| + 2, \ldots, & n_1 + n_2 - 2, & n_1 + n_2, \end{array}$$

и каждая такая компонента $T_g^{(k', n')}$ *входит в разложение один раз.*

Напомним еще раз, что числа (k, n) связаны с числами (l_0, l_1), которыми обычно задаются неприводимые представления в этой книге, с помощью формул

$$l_0 = \frac{k - n}{2}, \qquad l_1 = \frac{k + n}{2} + 1. \tag{1}$$

Рассмотрим пример: произведение двух тождественных представлений группы Лоренца $g \to g$.

Заметим, что, как мы видели в § 4, п. 7, такое произведение эквивалентно тензорному представлению ранга 2. В том же пункте мы разложили это представление на неприводимые. Найдем это разложение еще раз, исходя из полученных только что результатов.

Представление $g \to g$ определяется парой (0, 2). (Пространство $R^{(4)}$ содержит два подпространства, инвариантных относительно группы вращений, а именно, одномерное: ось x_0 $(l = l_0 = 0)$, и трехмерное:

*) Возможность перестановки сомножителей, а также ассоциативность умножения представлений легко следуют непосредственно из самого определения произведения представлений (см. ч. I, § 4).

$x_0 = 0$ $(l = 1,\ l_1 = 2)$.) Из формулы (1) следует, что представление $g \to g$ реализуется спинорами ранга (1, 1) (т. е. эквивалентно представлению $T_g^{(1,1)}$). Итак, мы должны разложить на неприводимые компоненты произведение

$$T_g^{(1,1)} \times T_g^{(1,1)}.$$

Имеем:

$$T_g^{(1,1)} \times T_g^{(1,1)} = \sum T_g^{(k',n')},$$

где

$$k' = 0{,}2; \quad n' = 0{,}2$$

(всего получаются четыре компоненты).

Составим таблицу (см. § 4, п. 7)

$n' \backslash k'$	0	2
0	скаляр $l_0 = 0,\ l_1 = 1$	$l_0 = 1,\ l_1 = 2$ антисимметрический тензор
2	антисимметрический тензор $l_0 = -1,\ l_1 = 2$	симметрический тензор ранга 2 со следом, равным $0\ (t_{11} + t_{22} + t_{33} - t_{00} = 0)$, $l_0 = 0,\ l_1 = 3$

Мы снова, разумеется, получили те же четыре компоненты, что и в § 4, п. 7. Из этой таблицы, в частности, видно, что симметрические тензоры со следом нуль (компонента $T_g^{(2,2)}$) образуют неприводимое подпространство в пространстве тензоров второго ранга; в § 4 этот факт мы приняли без доказательства.

2. Коэффициенты Клебша — Гордона *). В этом пункте мы найдем, как выражаются векторы канонических базисов неприводимых компонент произведения двух представлений $T_g^{(k_1,n_1)}$ и $T_g^{(k_2,n_2)}$ через произведение канонических базисов $\{\xi_{lm}^{k_1n_1}\}$ и $\{\xi_{lm}^{k_2n_2}\}$ в пространствах R_{k_1,n_1} и R_{k_2,n_2}, где действуют сами представления $T_g^{(k_1,n_1)}$ и $T_g^{(k_2,n_2)}$.

Пусть $\{\xi_{lm}^{k'n'}\}$ — канонический базис для компоненты $T_g^{(k',n')}$.

Имеем:

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum H_{k_1n_1\ l_1m_1;\ k_2n_2l_2m_2}^{k'n'\ lm} \xi_{l_1m_1}^{k_1n_1} \xi_{l_2m_2}^{k_2n_2}. \tag{2}$$

Мы выразим коэффициенты $H_{k_1n_1l_1m_1;\ k_2n_2l_2m_2}^{k'n'lm}$ через коэффициенты Клебша — Гордона для группы вращений (см. ч. I, § 10).

*) По аналогии со случаем группы вращений элементы матрицы, переводящей один базис в другой, мы называем коэффициентами Клебша — Гордона.

Мы видели выше, что

$$T_g^{(k_1, n_1)} = T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(0, n_1)}.$$

Пусть $\left\{\eta_{\frac{k_1}{2}, m_1'}\right\}$ и $\left\{\bar{\eta}_{\frac{n_1}{2}, m_1''}\right\}$ — канонические базисы представлений $T_g^{(k_1, 0)}$ и $T_g^{(0, n_1)}$. В пространстве R_1, где действует представление $T_g^{(k_1, n_1)}$, векторы $\left\{\eta_{\frac{k_1}{2}, m_1'}, \bar{\eta}_{\frac{n_1}{2}, m_1''}\right\}$ образуют базис. Очевидно, что

$$\xi_{l_1 m_1}^{k_1 n_1} = \sum_{m_1' + m_1'' = m_1} B_{\frac{k_1}{2}, m_1'; \frac{n_1}{2}, m_1''}^{l_1 m_1} \eta_{\frac{k_1}{2}, m_1'} \bar{\eta}_{\frac{n_1}{2}, m_1''}. \tag{3}$$

Наоборот (см. § 10 ч. I),

$$\eta_{\frac{k_1}{2}, m_1'} \bar{\eta}_{\frac{n_1}{2}, m_1''} = \sum_{\substack{|m_1| \leqslant l_1 \\ m_1' + m_1'' = m_1}} B_{\frac{k_1}{2}, l_1 - \frac{n_1}{2}; \frac{n_1}{2}, m_1 + \frac{n_1}{2} - l_1}^{\frac{n_1}{2} + m_1', m_1} \xi_{l_1 m_1}^{k_1 n_1}. \tag{4}$$

Аналогично для

$$T_g^{(k_2 n_2)} = T_g^{(k_2, 0)} \times T_g^{(0, n_2)}$$

имеем:

$$\eta_{\frac{k_2}{2}, m_2'} \bar{\eta}_{\frac{n_2}{2}, m_2''} = \sum_{\substack{|m_2| \leqslant l_2 \\ (m_2' + m_2'' = m_2)}} B_{\frac{k_2}{2}, l_2 - \frac{n_2}{2}; \frac{n_2}{2}, m_2 + \frac{n_2}{2} - l_2}^{\frac{n_2}{2} + m_2', m_2} \xi_{l_2 m_2}^{k_1 k_2}, \tag{5}$$

где $\left\{\eta_{\frac{k_2}{2}, m_2'}\right\}$ и $\left\{\bar{\eta}_{\frac{n_2}{2}, m_2''}\right\}$ — канонические базисы представлений $T_g^{(k_2, 0)}$ и $T_g^{(0, n_2)}$.

Рассмотрим представление

$$T_g^{(k_1, 0)} \times T_g^{(k_2, 0)}.$$

Пусть $\left\{\xi_{\frac{k'}{2}, \mu}\right\}$ — канонический базис компоненты $T_g^{(k', 0)}$ этого произведения ($|k_1 - k_2| \leqslant k' \leqslant k_1 + k_2$).

Очевидно, что

$$\xi_{\frac{k'}{2}, \mu'} = \sum_{\mu' = m_1' + m_2'} B_{\frac{k_1}{2}, m_1'; \frac{k_2}{2}, m_2'}^{\frac{k'}{2}, \mu'} \eta_{\frac{k_1}{2}, m_1'} \eta_{\frac{k_2}{2}, m_2'}. \tag{6}$$

Подобным образом для канонического базиса $\left\{\bar{\xi}_{\frac{n'}{2}, \mu''}\right\}$ компоненты $T_g^{(0, n')}$ из произведения $T_g^{(0, n_1)} \times T_g^{(0, n_2)}$ имеем:

$$\bar{\xi}_{\frac{n'}{2}, \mu''} = \sum_{\mu'' = m_1'' + m_2''} B_{\frac{n_1}{2}, m_1''; \frac{n_2}{2}, m_2''}^{\frac{\nu'}{2}, \mu''} \bar{\eta}_{\frac{n_1}{2}, m_1''} \bar{\eta}_{\frac{n_2}{2}, m_2''}. \tag{7}$$

Произведение $T_g^{(k',0)} \times T_g^{(0,n')}$ образует неприводимое представление $T_g^{(k',n')}$ с каноническим базисом $\{\xi_{lm}^{k'n'}\}$

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum_{m=\mu'+\mu''} B^{lm}_{\frac{k'}{2},\,\mu';\,\frac{n'}{2},\,\mu''}\, \xi_{\frac{k'}{2},\,\mu'}\, \bar{\xi}_{\frac{n'}{2},\,\mu''} \tag{8}$$

или (см. (6) и (7))

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum_{m_1,\,m_1',\,m_2'} B^{lm}_{\frac{k'}{2},\,\mu';\,\frac{n'}{2},\,\mu''} B^{\frac{k'}{2},\,\mu'}_{\frac{k_1}{2},\,m_1';\,\frac{k_2}{2},\,m_2'} \times$$
$$\times B^{\frac{n'}{2},\,\mu''}_{\frac{n_1}{2},\,m_1'';\,\frac{n_2}{2},\,m_2''} \eta_{\frac{k_1}{2},\,m_1'} \eta_{\frac{k_2}{2},\,m_2'} \bar{\eta}_{\frac{n_1}{2},\,m_1''} \bar{\eta}_{\frac{n_2}{2},\,m_2''}.$$

Или, наконец (см. (4) и (5)),

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum_{\substack{m_1',\,m_2',\,l_1\\ l_2,\,m_1}} B^{lm}_{\frac{k'}{2},\,\mu';\,\frac{n'}{2},\,\mu''} B^{\frac{k'}{2},\,\mu'}_{\frac{k_1}{2},\,m_1';\,\frac{k_2}{2},\,m_2'} B^{\frac{n'}{2},\,\mu''}_{\frac{n_1}{2},\,m_1'';\,\frac{n_2}{2},\,m_2''} \times$$
$$\times B^{\frac{n_1}{2}+m_1',\,m_1}_{\frac{k_1}{2},\,l_1-\frac{n_1}{2};\,\frac{n_1}{2},\,m_1+\frac{n_1}{2}-l_1} B^{\frac{n_2}{2}+m_2';\,m_2}_{\frac{k_2}{2},\,l_2-\frac{n_2}{2};\,\frac{n_2}{2},\,m_2+\frac{n_2}{2}-l_2} \xi^{k_1n_1}_{l_1m_1} \xi^{k_2n_2}_{l_2m_2}.$$

Имеем:

$$m_1'' = m_1 - m_1', \qquad m_2'' = m_2 - m_2',$$
$$\mu' = m_1' + m_2', \qquad \mu'' = m - m_1' - m_2'$$

(суммирование идет по всем дважды встречающимся индексам). Отсюда

$$\xi_{lm}^{k'n'} = \sum B^{lm}_{\frac{k'}{2},\,m_1'+m_2';\,\frac{n'}{2},\,m-m_1'-m_2'} B^{\frac{k'}{2},\,m_1'+m_2'}_{\frac{k_1}{2},\,m_1';\,\frac{k_2}{2},\,m_2'} \times$$
$$\times B^{\frac{n'}{2},\,m-m_1'-m_2'}_{\frac{n_1}{2},\,m_1-m_1';\,\frac{n_2}{2},\,m_2-m_2'} B^{\frac{n_1}{2}+m_1',\,m_1}_{\frac{k_1}{2},\,l_1-\frac{n_1}{2};\,\frac{n_1}{2},\,m_1+\frac{n_1}{2}-l_1} \times$$
$$\times B^{\frac{n_2}{2}+m_2',\,m_2}_{\frac{k_2}{2},\,l_2-\frac{n_2}{2};\,\frac{n_2}{2},\,m_2+\frac{n_2}{2}-l_2} \xi^{k_1n_1}_{l_1m_1} \xi^{k_2n_2}_{l_2m_2}.$$

Суммирование идет по индексам

$$-\frac{k_1}{2} \leqslant m_1' \leqslant \frac{k_1}{2}, \quad -\frac{k_2}{2} \leqslant m_2' \leqslant \frac{k_2}{2}, \quad \frac{|k_1-n_1|}{2} \leqslant l_1 \leqslant \frac{k_1+n_1}{2},$$
$$\frac{|k_2-n_2|}{2} \leqslant l_2 \leqslant \frac{k_2+n_2}{2} \quad \text{и} \quad -l_1 < m_1 \leqslant l_1 \quad (m = m_1 + m_2).$$

Сравнивая с (2), получаем:

$$H^{k'n'\,lm}_{k_1n_1\,l_1m_1\,k_2\,n_2\,l_2m_2} = \sum_{m_1',\,m_2'} B^{lm}_{\frac{k'}{2},\, m_1'+m_2';\, \frac{n'}{2},\, m-m_1'-m_2'} \times$$

$$\times B^{\frac{k'}{2},\, m_1'+m_2'}_{\frac{k_1}{2},\, m_1';\, \frac{k_2}{2},\, m_2'} B^{\frac{n'}{2},\, m-m_1'-m_2'}_{\frac{n_1}{2},\, m_1-m_1';\, \frac{n_2}{2},\, m_2-m_2'} B^{\frac{n_1}{2}+m_1',\, m_1}_{\frac{k_1}{2},\, l_1-\frac{n_1}{2};\, \frac{n_1}{2},\, m_1+\frac{n_1}{2}-l_1} \times$$

$$\times B^{\frac{n_2}{2}+m_2',\, m_2}_{\frac{k_2}{2},\, l_2-\frac{n_2}{2};\, \frac{n_2}{2},\, m_2+\frac{n_2}{2}-l_2}.$$

ГЛАВА 2

РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 7. Общие релятивистски-инвариантные уравнения

1. Определение релятивистски-инвариантных уравнений. В квантовой теории полей состояние частицы описывается некоторой функцией $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$. Величина $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ может состоять как из одной, так и из нескольких компонент (а также, быть может, бесконечного числа их).

Функция $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ должна удовлетворять некоторому однородному линейному дифференциальному уравнению *). Вид этого уравнения определяется физическими свойствами частицы.

Рассмотрим пример наиболее простого уравнения — так называемого уравнения Клебша — Гордона:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} + \varkappa^2\psi = 0, \tag{1}$$

где функция $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ состоит из одной компоненты (скалярная функция).

Нетрудно видеть, что если переменные $(x_0, x_1, x_2, x_3) = \bar{x}$ подвергнуть преобразованию Лоренца g: $\bar{x}' = g\bar{x}$, то вид уравнения (1) не изменится, а функция $\psi'(\bar{x}') = \psi(\bar{x})$ по-прежнему останется решением уравнения (1). В связи с этим про уравнение (1) говорят, что оно инвариантно относительно преобразований Лоренца, или, короче, релятивистски-инвариантно.

Это обстоятельство выражает тот факт, что свойства частицы, описываемой уравнением (1) (в частности, само это уравнение), не должны зависеть от выбора системы отсчета (x_0, x_1, x_2, x_3). Две же различные ортогональные **) системы отсчета связаны преобразованием

---

*) Мы рассматриваем случай свободного поля. Для взаимодействующих полей уравнения уже неоднородны.

**) Напомним, что систему координат (x_0, x_1, x_2, x_3) называют ортогональной, если квадратичная форма $s^2(x^2)$ в этой системе записывается в виде

$$s^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

В физике такие системы отсчета называют инерциальными.

Лоренца:

$$x'_i = \sum g_{ik} x_k, \tag{1'}$$

где $\|g_{ik}\|$ — матрица преобразования Лоренца.

Таким образом, инвариантность уравнения (1) относительно преобразований Лоренца означает инвариантность этого уравнения относительно выбора системы отсчета. Очевидно, что последнее свойство — не зависеть от выбора системы отсчета — является общим для всех дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений, описывающих реальные частицы.

Мы будем рассматривать системы уравнений первого порядка. *) Их можно записать так:

$$L_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} + i\varkappa\psi = 0 \tag{2}$$

---

*) Можно показать, что всякое уравнение более высокого порядка может быть сведено к системе уравнений первого порядка. Для примера рассмотрим уравнение (1)

$$\Box\psi + \varkappa^2\psi = 0.$$

Положим

$$\varkappa\psi_i = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}.$$

Уравнение (1) перейдет в систему

$$\sum_{i=1,2,3} \frac{\partial\psi_i}{\partial x_i} - \frac{\partial\psi_0}{\partial x_0} - \varkappa\psi = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_i} - \varkappa\psi_i = 0.$$

Эту систему можно записать так: пусть $\Phi = \begin{pmatrix} \psi \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}$.

Тогда

$$L_0 \frac{\partial\Phi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial\Phi}{\partial x_3} + i\varkappa\Phi = 0,$$

где

$$L_0 = \begin{Vmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad L_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$L_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad L_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

($\varkappa$ — вещественная константа), волновая функция $\psi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ принимает значения из некоторого линейного пространства R (другими словами, имеет конечное или бесконечное число компонент), а L_0, L_1, L_2, L_3 — матрицы, действующие в этом пространстве.

Сейчас мы точно определим, что называется релятивистски-инвариантным уравнением вида (2).

Всякое преобразование Лоренца g над координатами x_0, x_1, x_2, x_3 (переход от одной системы отсчета к другой) должно сопровождаться, вообще говоря, некоторым преобразованием T_g над величинами ψ

$$\psi'(x') = T_g\psi(x) \qquad (x' = gx). \tag{2'}$$

Соответствие $g \to T_g$ задает некоторое представление группы Лоренца в пространстве R.

Уравнение вида (2) *называется релятивистски-инвариантным, если при одновременном преобразовании координат по формулам* (1) *и функции* ψ *по формулам* (2) *вид уравнения не меняется.*

Подчеркнем еще раз, что для полного описания частицы, помимо релятивистски-инвариантного уравнения вида (2), нужно задать еще и закон преобразования величин ψ при преобразовании Лоренца, т. е. задать представление $g \to T_g$ в пространстве R.

2. Условия релятивистской инвариантности уравнения для случая, когда $\varkappa \neq 0$. Выведем условия, которым должны удовлетворять матрицы L_0, L_1, L_2, L_3 в релятивистски-инвариантном уравнении с $\varkappa \neq 0$. Подвергнем $x(x_0, x_1, x_2, x_3)$ некоторому преобразованию Лоренца g: $x' = gx$.

При этом ψ преобразуется с помощью оператора T_g

$$\psi'(x') = T_g\psi(x).$$

Посмотрим, как преобразуется уравнение (2). Имеем:

$$\frac{\partial\psi'}{\partial x_i} = \sum_k \frac{\partial\psi'}{\partial x'_k} g_{ki}, \qquad \psi = T_g^{-1}\psi'.$$

Подставляя эти выражения в (2), получим:

$$\sum_{i,\,k} L_i T_g^{-1} \frac{\partial\psi'}{\partial x'_k} g_{ki} + i\varkappa T_g^{-1}\psi' = 0.$$

Умножив слева на оператор T_g, получим:

$$\sum_{k,\,i} T_g L_i T_g^{-1} g_{ki} \frac{\partial\psi'}{\partial x'_k} + i\varkappa\psi' = 0.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (2), видим, что для инвариантности уравнения (2) нужно положить

$$\sum_i T_g L_i T_g^{-1} g_{ki} = L_k \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 0). \tag{3}$$

Это и есть условия, которым должны удовлетворять матрицы L_i.

Достаточно, очевидно, потребовать выполнения равенств (3) для бесконечно малых преобразований Лоренца.

Пусть, например, $\|g_{ki}\|$ — матрица поворота $g_{12}(\varphi)$ в плоскости $(x_1,\ x_2)$,

$$g_{12}(\varphi) = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

или, при малых φ,

$$g_{12}(\varphi) = E + \varphi \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} + o(\varphi).$$

Отсюда для элементов матрицы $g_{12}(\varphi)$ при малых φ получаем выражение

$$[g_{12}(\varphi)]_{ki} = \delta_{ki} - \varphi(\delta_{k2}\delta_{i1} - \delta_{k1}\delta_{i2}) + o(\varphi)$$

$$(\delta_{ki} = 1 \ \text{при}\ k = i;\ \delta_{ki} = 0 \ \text{при}\ k \neq i).$$

Оператор $T_{g_{12}}(\varphi)$ при малых φ запишется, очевидно, следующим образом:

$$T_{g_{12}(\varphi)} = E + \varphi A_{12} + o(\varphi).$$

Подставляя $[g_{12}(\varphi)]_{ki}$ и $T_{g_{12}(\varphi)}$ в выражение (3), имеем:

$$\sum_i \{(E + \varphi A_{12}) L_i (E - \varphi A_{12})(\delta_{ki} - \varphi[\delta_{k2}\delta_{i1} - \delta_{k1}\delta_{i2}]) + o(\varphi)\} = L_k.$$

Собирая члены первого порядка по φ, получим:

$$\sum_i \{(A_{12}L_i - L_i A_{12})\delta_{ki} - (L_i\delta_{k2}\delta_{i1} - L_i\delta_{k1}\delta_{i2})\} = 0$$

или

$$[A_{12},\ L_k] - L_1\delta_{k2} + L_2\delta_{k1} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ 3,\ 0).$$

Отсюда получаем следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &[A_{12}, L_1] = -L_2, \ [A_{12}, L_2] = L_1, \\ &[A_{12}, L_3] = [A_{12}, L_0] = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Аналогично для A_{13} и A_{23}

$$\left.\begin{aligned} &[A_{13}, L_k] - L_1\delta_{k3} + L_3\delta_{k1} = 0, \\ &[A_{23}, L_k] - L_2\delta_{k3} + L_3\delta_{k2} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Для B_1, B_2, B_3 получаем так же

$$\left.\begin{aligned} &[B_1, L_k] + L_1\delta_{k0} + L_0\delta_{k1} = 0, \\ &[B_2, L_k] + L_2\delta_{k0} + L_0\delta_{k2} = 0, \\ &[B_3, L_k] + L_3\delta_{k0} + L_0\delta_{k3} = 0, \end{aligned}\right\} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ 0. \tag{6}$$

Таким образом, задача отыскания всех релятивистски-инвариантных уравнений сводится к отысканию матриц L_1, L_2, L_3, L_0, удовлетворяющих соотношениям (4) — (6).

Из соотношений (6) видно, что

$$L_k = -[B_k, L_0] \qquad (k = 1,\ 2,\ 3), \tag{6'}$$

т. е. достаточно найти лишь матрицу L_0, как остальные однозначно восстановятся.

Для матрицы L_0 имеем следующие соотношения:

$$[L_0, A_{12}] = [L_0, A_{13}] = [L_0, A_{23}] = 0,$$
$$[B_3, [B_3, L_0]] = L_0.$$

Остальные соотношения следуют из написанных.

Если ввести операторы

$$\begin{aligned} H_+ &= iA_{23} - A_{13}, &\quad F_+ &= iB_1 - B_2, \\ H_- &= iA_{23} + A_{13}, &\quad F_- &= iB_1 + B_2, \\ H_3 &= iA_{12}, &\quad F_3 &= iB_3, \end{aligned}$$

то получим:

$$[L_0, H_+] = [L_0, H_-] = [L_0, H_3] = 0, \tag{7}$$

$$[[F_3, L_0], F_3] = L_0. \tag{8}$$

Итак, задача об определении четверки матриц L_1, L_2, L_3, L_0 свелась к отысканию матрицы L_0, удовлетворяющей соотношениям (7) — (8).

Если уравнение (2) инвариантно относительно полной группы Лоренца, т. е. не меняется при отражении s трехмерного пространства

$$x_1' = -x_1, \quad x_2' = -x_2, \quad x_3' = -x_3, \quad x_0' = x_0,$$

то матрица L_0 коммутирует с оператором S ($S = T_s$). Действительно, из соотношения (3) имеем:

$$SL_0S^{-1} = L_0 \quad \text{или} \quad [S, L_0] = 0. \tag{9}$$

Таким образом, мы получаем окончательно, что *матрицы* L_1, L_2, L_3 *в релятивистски-инвариантном уравнении* (2) *выражаются через матрицу* L_0 *по формулам* (6′):

$$L_i = -[B_i L_0], \qquad i = 1, 2, 3; \tag{6′}$$

матрица L_0 *определяется из условий* (7)—(8):

$$[L_0, H_+] = [L_0, H_-] = [L_0, H_3] = 0, \qquad [[F_3, L_0], F_3] = L_0. \tag{7—8}$$

В случае, когда уравнение (2) *инвариантно относительно полной группы Лоренца, к условиям* (7)—(8) *добавляется условие* (9).

3. Определение матриц L_0, L_1, L_2, L_3. Найдем матрицу L_0 в уравнении, инвариантном относительно собственной группы Лоренца, т. е. в уравнении, не меняющемся при собственных преобразованиях Лоренца. Такая матрица L_0 удовлетворяет, как было показано в предыдущем пункте, условиям (7)—(8).

Пусть пространство R, в котором действует представление $g \to T_g$, разлагается в прямую сумму подпространств R^τ, в каждом из которых действует неприводимое представление собственной группы Лоренца τ, определяемой парой

$$\tau \sim (l_0, l_1).$$

В каждом подпространстве R^τ выберем канонический базис $\{\xi^\tau_{lm}\}$, т. е. базис из собственных векторов оператора H_3. Векторы $\{\xi^\tau_{lm}\}$ образуют, очевидно, базис во всем пространстве R.

Пусть $\|c^{\tau\tau'}_{lml'm'}\|$ — матрица оператора L_0, записанная в этом базисе, т. е.

$$L_0 \xi^\tau_{lm} = \sum c^{\tau\tau'}_{lml'm'} \xi^{\tau'}_{l'm'}. \tag{10}$$

Мы найдем общий вид чисел $c^{\tau\tau'}_{lml'm'}$.

Из соотношений (7), означающих, что матрица L_0 коммутирует с операторами представления группы вращений, получаем согласно (32) § 2:

$$c^{\tau\tau'}_{lml'm'} = c^{\tau\tau'}_{l} \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \tag{11}$$

Найдем теперь числа $c^{\tau\tau'}_{l}$. Воспользуемся соотношением

$$[[F_3, L_0], F_3] = L_0.$$

Применяя операторы из обеих частей этого равенства к вектору ξ^τ_{lm}, получаем:

$$[[F_3, L_0], F_3] \xi^\tau_{lm} = L_0 \xi^\tau_{lm}.$$

Развертывая это равенство, мы с помощью соотношений (10) и (11) и выражения для F_3 (13) § 2 придем к следующим системам уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&C_l^{\tau'}C_{l+1}^{\tau'}c_{l+1}^{\tau\tau'}-2C_l^{\tau'}C_{l+1}^{\tau}c_l^{\tau\tau'}+C_l^{\tau}C_{l+1}^{\tau}c_{l-1}^{\tau\tau'}=0,\\
&C_l^{\tau}C_{l+1}^{\tau}c_{l+1}^{\tau\tau'}-2C_l^{\tau}C_{l+1}^{\tau'}c_l^{\tau\tau'}+C_l^{\tau'}C_{l+1}^{\tau'}c_{l-1}^{\tau\tau'}=0,\\
&C_l^{\tau'}\left[A_{l-1}^{\tau'}+A_l^{\tau'}-2A_l^{\tau}\right]c_l^{\tau\tau'}=C_l^{\tau}\left[2A_{l-1}^{\tau'}-A_{l-1}^{\tau}-A_l^{\tau}\right]c_{l-1}^{\tau\tau'},\\
&C_l^{\tau'}\left[A_{l-1}^{\tau}+A_l^{\tau}-2A_l^{\tau'}\right]c_l^{\tau\tau'}=C_l^{\tau'}\left[2A_{l-1}^{\tau}-A_{l-1}^{\tau'}-A_l^{\tau'}\right]c_{l-1}^{\tau\tau'},\\
&2C_{l+1}^{\tau'}C_{l+1}^{\tau}c_{l+1}^{\tau\tau'}-\left\{\left(C_{l+1}^{\tau'}\right)^2+\left(C_{l+1}^{\tau}\right)^2+\left(C_l^{\tau'}\right)^2+\left(C_l^{\tau}\right)^2+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\left(A_l^{\tau'}-A_l^{\tau}\right)^2\right\}c_l^{\tau\tau'}+2C_l^{\tau'}C_l^{\tau}c_{l-1}^{\tau\tau'}=0,\\
&2(l+1)^2C_{l+1}^{\tau'}C_{l+1}^{\tau}c_{l+1}^{\tau\tau'}-\left\{(l+1)^2\left(C_{l+1}^{\tau'}\right)^2+(l+1)^2\left(C_{l+1}^{\tau}\right)^2+\right.\\
&\qquad\qquad\left.+l^2\left(C_l^{\tau'}\right)^2+l^2\left(C_l^{\tau}\right)^2\right\}c_l^{\tau\tau'}+2l^2C_l^{\tau'}C_l^{\tau}c_{l-1}^{\tau\tau'}=4c_l^{\tau\tau'}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Здесь A_l^{τ} и C_l^{τ} обозначают величины, определенные формулами (16) § 2, в неприводимом представлении $\tau(l_0, l_1)$. Наша задача сводится к исследованию и решению написанной системы линейных уравнений. Разрешая какие-либо три из уравнений (12) относительно $c_{l-1}^{\tau\tau'}$, $c_l^{\tau\tau'}$, $c_{l+1}^{\tau\tau'}$ и подставляя полученные значения в остальные уравнения, мы убедимся, что $c_l^{\tau\tau'}$ может быть отлично от нуля только тогда, когда компоненты $\tau(l_0, l_1)$ и $\tau'(l_0', l_1')$ такие, что

1) либо
$$(l_0', l_1')=(l_0\pm 1,\ l_1),\qquad(13)$$
2) либо
$$(l_0', l_1')=(l_0,\ l_1\pm 1).\qquad(14)$$

Если пары (l_0, l_1) и (l_0', l_1) двух компонент τ и τ' связаны каким-нибудь из этих двух соотношений, то компоненты τ и τ' мы будем называть зацепляющимися.

При этом числа $c_l^{\tau\tau'}$ имеют следующий вид:

1) при $(l_0', l_1')=(l_0+1,\ l_1)$
$$\left.\begin{aligned}
c_l^{\tau\tau'}&=c^{\tau\tau'}\sqrt{(l+l_0+1)(l-l_0)},\\
c_l^{\tau'\tau}&=c^{\tau'\tau}\sqrt{(l+l_0+1)(l-l_0)};
\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

2) при $(l_0', l_1')=(l_0,\ l_1+1)$
$$\left.\begin{aligned}
c_l^{\tau\tau'}&=c^{\tau\tau'}\sqrt{(l+l_1+1)(l-l_1)},\\
c_l^{\tau'\tau}&=c^{\tau'\tau}\sqrt{(l+l_1+1)(l-l_1)},
\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

где $c^{\tau\tau'}$ и $c^{\tau'\tau}$ — произвольные комплексные числа. Подчеркнем еще раз, что числа $c^{\tau\tau'}$ и $c^{\tau'\tau}$ отличны от нуля только для зацепляющихся компонент τ и τ'. В остальных случаях $c^{\tau\tau'}=c^{\tau'\tau}=0$.

Таким образом, окончательно, *элементы матрицы* L_0 *имеют вид*

$$c^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}=c^{\tau\tau'}_{l}\delta_{ll'}\delta_{mm'}, \tag{17}$$

где числа $c^{\tau\tau'}_{l}$ *определяются по формулам* (14), (15) *и отличны от нуля только в том случае, когда компоненты* τ *и* τ' *зацепляются*. Для матриц L_1, L_2, L_3 получаем, пользуясь формулами (6′), следующие выражения.

a) Для L_3. Обозначим матричные элементы L_3 через $a^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}$: $L_3=\left\| a^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}\right\|$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
a^{\tau\tau'}_{lm;\,l-1,\,m}&=i\sqrt{l^2-m^2}\left[C^{\tau}_{l}c^{\tau\tau'}_{l-1}-C^{\tau'}_{l}c^{\tau\tau'}_{l}\right],\\
a^{\tau\tau'}_{lm;\,lm}&=-imc^{\tau\tau'}_{l}\left[A^{\tau}_{l}-A^{\tau'}_{l}\right],\\
a^{\tau\tau'}_{lm;\,l+1,\,m}&=-i\sqrt{(l+1)^2-m^2}\left[C^{\tau}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l+1}-C^{\tau'}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

b) Для L_1 и L_2. Обозначим элементы этих матриц соответственно через $b^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}$ и $d^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}$: $L_1=\left\| b^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}\right\|$, $L_2=\left\| d^{\tau\tau'}_{lm;\,l'm'}\right\|$. Имеют место равенства:

$$\left.\begin{aligned}
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l-1,\,m-1}&=-id_{lm;\,l-1,\,m-1}=\\
&=+\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l+m-1)}\left[C^{\tau}_{l}c^{\tau\tau'}_{l-1}-C^{\tau'}_{l}c^{\tau\tau'}_{l}\right],\\
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l-1;\,m+1}&=id_{lm;\,l-1,\,m+1}=\\
&=-\frac{i}{2}\sqrt{(l-m)(l-m-1)}\left[C^{\tau}_{l}c^{\tau\tau'}_{l-1}-C^{\tau'}_{l}c^{\tau\tau'}_{l}\right],\\
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l,\,m-1}&=-id_{lm;\,l,\,m-1}=\\
&=\frac{i}{2}\sqrt{(l+m)(l-m+1)}\,c^{\tau\tau'}_{l}\left[A^{\tau}_{l}-A^{\tau'}_{l}\right],\\
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l,\,m+1}&=id_{lm;\,l,\,m+1}=\\
&=\frac{i}{2}\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,c^{\tau\tau'}_{l}\left[A^{\tau}_{l}-A^{\tau'}_{l}\right],\\
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l+1,\,m-1}&=-id_{lm;\,l+1,\,m-1}=\\
&=\frac{i}{2}\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\left[C^{\tau}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l+1}-C^{\tau'}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l}\right],\\
b^{\tau\tau'}_{lm;\,l+1,\,m+1}&=id_{lm;\,l+1,\,m+1}=\\
&=-\frac{i}{2}\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\left[C^{\tau}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l+1}-C^{\tau'}_{l+1}c^{\tau\tau'}_{l}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Компоненты τ и τ' в этих формулах предполагаются зацепляющимися. Числа $c^{\tau\tau'}_{l}$ определяются по формулам (15) и (16), а числа C^{τ}_{l} и

A_l^τ — по формулам (16) § 2. Формулы (13)—(19) содержат полное решение задачи о разыскании всех уравнений, инвариантных относительно собственных преобразований Лоренца. Мы видим, что такие уравнения полностью определяются набором чисел $c^{\tau\tau'}$ и $c^{\tau'\tau}$, отвечающих различным парам τ и τ' зацепляющихся компонент представления $g \to T_g$.

4. Релятивистски-инвариантные уравнения с $\varkappa = 0$. Все определения и результаты предыдущих пунктов относились к релятивистски-инвариантным уравнениям (2) с $\varkappa \neq 0$. Очевидно, что они полностью применимы и к случаю $\varkappa = 0$. Оказывается, однако, что в последнем случае можно несколько расширить сами условия, при которых уравнение является релятивистски-инвариантным.

Рассмотрим уравнение

$$L_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} = 0 \tag{20}$$

(величина ψ преобразуется, как всегда, по некоторому представлению $g \to T_g$ собственной или полной группы Лоренца).

Выясним, в каких случаях уравнение (23) следует называть релятивистски-инвариантным. Совершим, как всегда, замену

$$x' = gx, \qquad \psi'(x') = T_g \psi(x). \tag{21}$$

Отсюда

$$\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_i} = \sum T_g^{-1} \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'_k} g_{ki};$$

функция $\psi'(x')$ удовлетворяет, следовательно, уравнению

$$\sum_{k,\, i} L_i T_g^{-1} g_{ki} \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'_k} = 0. \tag{22}$$

Допустим, что найдется такое невырожденное преобразование V_g, что

$$\sum_{k,\, i} V_g L_i T_g^{-1} g_{ki} \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'_k} \equiv \sum_k L_k \frac{\partial\psi'(x')}{\partial x'_k} \quad (\text{для всех } \psi'(x')),$$

т. е.

$$\sum_i V_g L_i T_g^{-1} g_{ki} = L_k. \tag{23}$$

Если такое преобразование V_g найдется, то это будет означать, что уравнения (20) и (22) эквивалентны, т. е. после замены (21) уравнение (20), по существу, не изменилось.

Таким образом, *уравнение* (20) *является релятивистски-инвариантным, если при одновременной замене $x' = gx$ и $\psi' = T_g\psi$ измененное уравнение с точностью до невырожденного преобразования V_g совпадает с исходным.*

Заметим, что в случае $\varkappa \neq 0$ преобразование V_g, приводящее уравнение к исходному виду, обязано совпадать с оператором T_g: $V_g = T_g$. В случае же $\varkappa = 0$, преобразование V_g может быть отличным от T_g.

Для матриц L_0, L_1, L_2, L_3 в релятивистски-инвариантном уравнении вида (20) получаем соотношение (23) $\sum\limits_i V_g L_i T_g^{-1} g_{ki} = L_k$, где T_g — матрица представления, V_g — матрица невырожденного преобразования.

Соответствие $g \to V_g$, как нетрудно проверить, задает представление собственной (или полной) группы Лоренца (действующее в том же пространстве, что и представление $g \to T_g$).

Итак, для того чтобы уравнение (20) *было релятивистски-инвариантным, нужно, чтобы в пространстве величин* ψ, *кроме представления* $g \to T_g$, *действовало представление* $g \to V_g$ *такое, что выполняется равенство* (23)

$$\sum_i g_{ki} V_g L_i T_g^{-1} = L_k.$$

Это и есть условие релятивистской инвариантности уравнения (20).

Определим общий вид матриц L_0, L_1, L_2, L_3 в релятивистски-инвариантном уравнении (20).

Вектор ψ из R под действием матрицы L_k перейдет в некоторый вектор ξ,

$$\xi = L_k \psi. \tag{24}$$

Пусть теперь $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$ — канонический базис представления $g \to V_g$, $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$ — канонический базис представления $g \to T_g$. Условимся вектор ξ относить к базису $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$, а вектор ψ — к базису $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$. В таком случае равенство (24) можно записать:

$$x_{lm}^{\tau} = \sum c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'\,(k)} y_{l'm'}^{\tau'},$$

где x_{lm}^{τ} — координаты ξ в базисе $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$, а $y_{l'm'}^{\tau'}$ — координаты ψ в базисе $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$. Числа $c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'\,(k)}$ и служат элементами матрицы L_k. При таком определении этих чисел будем говорить, что матрица L_k записана в двух базисах $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$ и $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$.

С помощью выкладок, аналогичных тем, что проделаны в п. 3, мы можем легко убедиться, что *числа* $c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'\,(k)}$ *имеют тот же вид, что и для матриц* L_k *в уравнении* (2) *с* $\varkappa \neq 0$, *т. е. задаются формулами* (13) — (19), *в которых теперь величины со значком* τ *относятся к представлению* $g \to V_g$, *а величины со значком* τ' — *к представлению* $g \to T_g$.

В частности, для матрицы L_0

$$c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'} = c_l^{\tau\tau'} \delta_{mm'} \delta_{ll'}, \tag{25}$$

где числа $c_l^{\tau\tau'} \neq 0$ лишь для зацепляющихся компонент τ и τ' двух представлений $g \to V_g(\tau)$ и $g \to T_g(\tau')$ и получаются по формулам (15) и (16).

Ради простоты мы рассматривали пока случай квадратных матриц L_0, L_1, L_2, L_3, т. е. предполагали, что число уравнений в системе (20) совпадает с числом компонент волновой функции ψ. При этом представление $g \to V_g$, по которому преобразуется система (20), мы могли считать действующим в том же пространстве R, в котором лежат значения волновой функции ψ, и где, следовательно, действует представление $g \to T_g$.

Однако встречаются системы уравнений вида (20), в которых число уравнений не совпадает с числом компонент ψ, т. е. матрицы L_0, L_1, L_2, L_3 уже не квадратные, а произвольные прямоугольные матрицы. В таком случае представление $g \to V_g$, преобразующее систему, надо считать уже действующим в некотором пространстве $\widetilde{R}$, отличном от пространства R, где действует представление $g \to T_g$. При этом для того чтобы такая система уравнений была релятивистски-инвариантной, матрицы L_0, L_1, L_2, L_3 по-прежнему должны удовлетворять условию

$$\sum V_g L_k g_{ik} T_g^{-1} = L_i.$$

Определим общий вид матриц L_0, L_1, L_2, L_3 в этом случае.

Мы можем, очевидно, считать, что вектор ψ из пространства R под действием матрицы L_k переходит в вектор ξ пространства $\widetilde{R}$,

$$\xi = L_k \psi. \tag{26}$$

Если по-прежнему обозначить через $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$ канонический базис представления $g \to V_g$ в пространстве $\widetilde{R}$, через $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$ — канонический базис представления $g \to T_g$ в пространстве R, а через x_{lm}^{τ} и $y_{l'm'}^{\tau'}$ — координаты векторов ξ и ψ относительно базисов $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$ и $\{\xi_{l'm'}^{\tau'}\}$ соответственно, то равенство (26) перепишется так:

$$x_{lm}^{\tau} = \sum c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'\,(k)} y_{l'm'}^{\tau'}.$$

Числа $c_{lm;\, l'm'}^{\tau\tau'\,(k)}$ составляют матричные элементы матриц L_k.

Вид этих чисел по-прежнему определяется формулами (13)—(19), где индекс τ относится к представлению $g \to V_g$, а индекс τ' — к представлению $g \to T_g$, причем компоненты τ и τ' зацепляются.

В дальнейшем мы подробно рассмотрим два примера релятивистски-инвариантных уравнений с $\varkappa = 0$: уравнение для так называемого двухкомпонентного нейтрино и уравнения Максвелла для электромагнитного поля в пустоте.

5. Уравнения, инвариантные относительно полной группы Лоренца. Как мы видели (п. 2, (9)), для таких уравнений $SL_0 = L_0 S$

(S — оператор, соответствующий пространственному отражению s). Посмотрим, какие условия это соотношение накладывает на матрицу L_0 (т. е. на числа $c^{\tau\tau'}$).

Напомним, что неприводимое представление полной группы Лоренца содержит либо одно, либо два неприводимых сопряженных друг другу представлений собственной группы Лоренца τ и $\dot{\tau}$. Определяющие их пары

$$\tau \sim (l_0, l_1) \quad \text{и} \quad \dot{\tau} \sim (\dot{l}_0, \dot{l}_1)$$

связаны соотношением

$$(\dot{l}_0, \dot{l}_1) = \pm (l_0 - l_1).$$

Отсюда в первом случае, когда $\tau = \dot{\tau}$, либо $l_1 = 0$, либо $l_0 = 0$.

Пусть по-прежнему пространство R, где действует представление $g \to T_g$ полной группы, разложено в сумму подпространств R^τ, в которых представление собственной группы неприводимо. Очевидно, что вместе с каждым подпространством R^τ пространство R содержит также и подпространство $R^{\dot{\tau}}$. Заметим, что если компоненты τ и τ' «зацеплялись», то $\dot{\tau}$ и $\dot{\tau}'$ также «зацепляются».

I. Рассмотрим сначала случай, когда $\tau \neq \dot{\tau}$ и $\tau' \neq \dot{\tau}'$. Оператор S в этом случае запишется (см. формулы (7) § 3):

$$\left.\begin{aligned} S\xi^{\tau}_{lm} &= (-1)^{[l]}\xi^{\dot{\tau}}_{lm}, \\ S\xi^{\tau'}_{lm} &= (-1)^{[l]}\xi^{\dot{\tau}'}_{lm}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Подставив эти выражения в соотношение

$$L_0 S\xi^{\tau}_{lm} = SL_0\xi^{\tau}_{lm}, \tag{27'}$$

получим $c_l^{\dot{\tau}\dot{\tau}'} = c_l^{\tau\tau'}$ или, воспользовавшись (15) и (16),

$$c^{\tau\tau'} = c^{\dot{\tau}\dot{\tau}'}.$$

II. Пусть $\tau = \dot{\tau}$, а $\tau' \neq \dot{\tau}'$ (либо, наоборот, $\tau \neq \dot{\tau}$, а $\tau' = \dot{\tau}'$). В этом случае оператор S имеет вид (см. (5) и (6) § 3)

$$S\xi^{\tau}_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^{\tau}_{lm} \tag{28}$$

или

$$S\xi^{\tau}_{lm} = (-1)^{[l]+1}\xi^{\tau}_{lm} \tag{28'}$$

и

$$S\xi^{\tau'}_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^{\dot{\tau}'}_{lm}. \tag{28''}$$

Снова подставляя в выражения для S и для L_0 (27), получим:

$$c^{\tau\tau'} = c^{\tau\dot{\tau}'} \qquad \text{(если оператор } S \text{ имеет вид (28))},$$

или

$$c^{\tau\tau'} = -c^{\dot{\tau}\dot{\tau}'} \qquad \text{(оператор } S \text{ задается (28'))}.$$

III. Если, наконец, $\tau = \dot{\tau}$ и $\tau' = \dot{\tau}'$, то легко видеть, что $c_l^{\tau\tau'} \neq 0$ лишь тогда, когда оператор S действует одинаково в пространствах R^{τ} и $R^{\tau'}$, т. е. одновременно, либо (см. § 3, (5) и (6))

$$S\xi^{\tau}_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^{\tau}_{lm} \text{ и } S\xi^{\tau'}_{lm} = (-1)^{[l]}\xi^{\tau'}_{lm}, \tag{29}$$

либо

$$S\xi^{\tau}_{lm} = (-1)^{[l]+1}\xi^{\tau}_{lm} \text{ и } S\xi^{\tau'}_{lm} = (-1)^{[l]+1}\xi^{\tau'}_{lm}. \tag{29'}$$

Других ограничений на числа $c^{\tau\tau'}$ в этом случае не накладывается *).

Итак, для матрицы L_0 уравнения, инвариантного относительно полной группы, имеем:

$$1.\ c^{\tau\tau'} = c^{\dot{\tau}\dot{\tau}'} \qquad (\tau \neq \dot{\tau},\quad \tau' \neq \dot{\tau}'). \tag{30}$$

$$2.\ c^{\tau\tau'} = \pm c^{\dot{\tau}\dot{\tau}'} \qquad (\tau \neq \dot{\tau},\quad \tau' = \dot{\tau}' \text{ или } \tau = \dot{\tau},\quad \tau' \neq \dot{\tau}'). \tag{31}$$

При этом знак $+$ берется, когда оператор S действует по формулам (28) и (28''), а знак $-$, когда S действует по формулам (28') и (28'').

3. При $\tau = \dot{\tau}$ и $\tau' = \dot{\tau}'$ имеем

$$c^{\tau\tau'} \neq 0 \tag{32}$$

лишь тогда, когда S действует одинаково в R^{τ} и $R^{\tau'}$, т. е. либо по формулам (29) либо по формулам (29'). Других ограничений на числа $c^{\tau\tau'}$ в этом случае не накладывается.

В случае уравнения (20) с $\varkappa = 0$, инвариантного относительно полной группы Лоренца, условия, накладываемые на числа $c^{\tau\tau'}$, остаются такими же, как и для $\varkappa \neq 0$ (см. (30) — (32)). Напомним только, что компоненты τ и τ' принадлежат разным представлениям: τ' — представлению $g \to T_g$, по которому преобразуются волновые функции, τ — представлению $g \to V_g$, с помощью которого преобразуется сама система (20).

6. Замечание об операторах T_g. Случай общей группы Лоренца. В самом начале этого параграфа мы предположили, что волновые функции $\psi(x)$ частицы при переходе от одной ортогональной системы координат к другой с помощью преобразований Лоренца g преобразуются по некоторому представлению $g \to T_g$ группы Лоренца.

---

*) Заметим, что в случае наличия таких зацеплений часто можно несколькими различными способами определить оператор S, не нарушив инвариантности уравнения и не меняя матриц L_k. Так как инвариантное уравнение определяется не только матрицами L_k, но и законом преобразований величин ψ (т. е. представлением $g \to T_g$), то в этих случаях мы будем иметь, по существу, несколько различных уравнений. Примерами таких уравнений, отличающихся лишь видом преобразования S, могут служить скалярное и псевдоскалярное, векторное и псевдовекторное уравнения (см. § 9).

Заметим, однако, что поскольку сами волновые функции $\psi(x)$ определены с точностью до множителя, то и преобразования T_g, которым они подвергаются, также могут быть определены только с точностью до множителя. Другими словами, каждому преобразованию Лоренца g отвечает семейство операторов λT_g, отличающихся множителем.

Можно показать, что в случае неприводимого представления для каждого преобразования g можно выбрать множитель перед оператором T_g так, что каждому преобразованию g будет отвечать либо один оператор T_g, либо два таких оператора, отличающихся знаком: T_g и $-T_g$, причем должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} &1)\ e \to \pm E, \\ &2)\ T_{g_1}T_{g_2} = \pm T_{g_1g_2}. \end{aligned} \tag{33}$$

В случае собственной (или полной группы) Лоренца мы приходим, таким образом, либо к однозначному представлению этой группы, когда каждому g соответствует ровно один оператор T_g, либо к двузначному ее представлению, когда каждому преобразованию g отвечают два отличающихся знаком оператора $g \to \pm T_g$, причем эту неопределенность в знаке уничтожить нельзя.

Обратимся теперь к случаю общей группы Лоренца. Здесь, как мы знаем, могут представиться два случая.

1. Операторы S, T, J, соответствующие элементам группы отражений s, t, j, коммутируют. В этом случае неопределенность в знаке у операторов S, T, J может возникнуть лишь из-за двузначного представления собственной группы. Такие представления мы назвали однозначными представлениями общей группы.

2. Операторы S, T, J антикоммутируют. В этом случае существенно двузначно уже само представление

$$e \to \pm E, \quad s \to \pm S, \quad t \to \pm T, \quad j \to \pm J$$

группы отражений и устранить эту неоднозначность невозможно (даже если представление собственной группы и однозначно). Такие представления общей группы мы назвали двузначными представлениями.

Итак, в случае собственной или полной группы Лоренца операторы T_g, по которым преобразуются волновые функции $\psi(x)$, задают однозначное или двузначное представление собственной (полной) группы. Также и в случае общей группы, операторы T_g образуют либо ее однозначное представление (s, t, j коммутируют), либо двузначное представление (S, T, J антикоммутируют).

Мы увидим ниже, что, например, волновые функции, удовлетворяющие уравнению Дирака, преобразуются именно по двузначному представлению общей группы.

Отметим в заключение, что в дальнейшем в этой книге не рассматриваются уравнения, инвариантные относительно общей группы Лоренца (кроме примера с уравнением Дирака).

§ 8. Уравнения, получаемые из инвариантной функции Лагранжа

Для физических применений излагаемой теории особенно интересны те релятивистски-инвариантные уравнения, которые могут быть получены варьированием некоторой инвариантной функции Лагранжа. С такими уравнениями можно инвариантно связать ряд физических величин, например, заряд, энергию, импульс, момент количества движения.

1. Инвариантная функция Лагранжа. Пусть частица описывается волновой функцией $\psi(x)$, которая при преобразованиях координат с помощью группы Лоренца преобразуется по представлению $g \to T_g$:

$$\tilde{\psi}(x') = T_g \psi(x), \qquad x' = gx.$$

Пусть, кроме того, в пространстве R, где лежат значения волновой функции $\psi(x)$, задана некоторая невырожденная билинейная эрмитова форма (ψ_1, ψ_2).

С помощью такой билинейной эрмитовой формы можно построить выражение, называемое функцией Лагранжа, и некоторый билинейный функционал, называемый действием.

Функцией Лагранжа называется выражение

$$\mathscr{L}[\psi(x)] = \frac{1}{2i} \sum_{k=0,1,2,3} \left\{ \left(\Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi \right) - \left(\psi, \Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) \right\} + \varkappa (\psi, \psi) =$$
$$= \operatorname{Im} \sum_{k=0,1,2,3} \left(\Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}, \psi \right) + \varkappa (\psi, \psi), \qquad (1)$$

где $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ — *некоторые матрицы.*

Действием называется билинейный функционал вида

$$S(\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{L}[\psi(x)]\, dx_0 dx_1 dx_2 dx_3. \qquad (2)$$

Дадим теперь определение инвариантной функции Лагранжа и инвариантного действия.

Функция Лагранжа называется *инвариантной*, если она не меняется при преобразованиях Лоренца. Другими словами, при одновременной замене $x' = gx$ и $\tilde{\psi}(x') = T_g \psi(x)$

$$\mathscr{L}[\tilde{\psi}(x')] = \mathscr{L}[\psi(x)]. \qquad (3)$$

Аналогично этому действие $S(\psi)$ называется *инвариантным*, если

$$S(\tilde{\psi}) = S(\psi). \qquad (3')$$

Очевидно, что инвариантной функции Лагранжа соответствует инвариантное действие и инвариантное действие получается из инвариантной функции Лагранжа.

Найдем необходимые и достаточные условия для того, чтобы функция Лагранжа была инвариантной. При этом возникают два существенно различных случая: когда $\varkappa \neq 0$ и когда $\varkappa = 0$. Мы их рассмотрим в отдельности.

Первый случай: $\varkappa \neq 0$. Покажем, что в этом случае функция Лагранжа инвариантна тогда и только тогда, когда, во-первых, инвариантна эрмитова форма (ψ_1, ψ_2) и, во-вторых, матрицы Λ_k удовлетворяют условиям

$$\sum g_{ik} T_g \Lambda_k T_g^{-1} = \Lambda_i, \tag{4}$$

т. е. с их помощью может быть построено инвариантное дифференциальное уравнение (см. § 7, (3)).

Пусть функция Лагранжа инвариантна. Рассмотрим в качестве функции $\psi(x)$ константу $\psi(x) \equiv \psi^0$.

Поскольку $\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = 0$, то $[\psi(x)] = \varkappa(\psi^0, \psi^0)$. Условие инвариантности (3) сводится в этом случае, очевидно, к равенству

$$(\psi^0, \psi^0) = (T_g \psi^0, T_g \psi^0),$$

означающему, что форма (ψ_1, ψ_2) инвариантна *).

Покажем теперь, что матрицы Λ_k в инвариантной функции Лагранжа $\mathscr{L}[\psi(x)]$ удовлетворяют условию (4). Напишем для этого более подробно условие (3): пусть

$$\psi(x) = T_g^{-1} \tilde{\psi}(x'), \qquad x' = gx,$$

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[\psi(x)] &= \operatorname{Im} \sum \left(\psi, \Lambda_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right) + \varkappa(\psi, \psi) = \\
&= \operatorname{Im} \sum_k \left(T_g^{-1} \tilde{\psi}(x'), \Lambda_k T_g^{-1} \sum_i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_i'} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k}\right) + \varkappa(T_g \tilde{\psi}, T_g \tilde{\psi}) = \\
&= \operatorname{Im} \sum_k \left(\tilde{\psi}(x')\, T_g \Lambda_k T_g^{-1} \sum_k g_{ik} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x_i'}\right) + \varkappa(\tilde{\psi}, \tilde{\psi})
\end{aligned} \tag{5}$$

(в последнем равенстве была использована инвариантность формы (ψ_1, ψ_2)).

С другой стороны,

$$\mathscr{L}(\tilde{\psi}(x')) = \operatorname{Im} \sum_i \left(\tilde{\psi}(x'), \Lambda_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i'}\right) + \varkappa(\tilde{\psi}, \tilde{\psi}). \tag{5'}$$

*) Можно показать, что билинейная форма (ψ_1, ψ_2) инвариантна одновременно с соответствующей квадратичной формой (ψ, ψ).

В силу инвариантности функции Лагранжа $\mathscr{L}[\psi(x)]=\mathscr{L}[\tilde{\psi}(x')]$. Окончательно получаем:

$$\operatorname{Im}\sum_i\left(\tilde{\psi}(x'),\ \Lambda_i\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_i}\right)=\operatorname{Im}\sum_i\left(\tilde{\psi}(x'),\ \sum_k g_{ik}T_g\Lambda_kT_g^{-1}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_i}\right),$$

или

$$\operatorname{Im}\sum_i\left(\tilde{\psi}(x'),\ \left(\Lambda_i-\sum g_{ik}T_g\Lambda_kT_g^{-1}\right)\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_i}\right)=0, \tag{5''}$$

откуда *)

$$\sum g_{ik}T_g\Lambda_kT_g^{-1}=\Lambda_i,$$

что совпадает с (4).

Итак, мы получили, что *если функция Лагранжа с $\varkappa\neq0$ инвариантна, то определяющая ее форма* $(\psi_1,\ \psi_2)$ *инвариантна, а матрицы* Λ_k *удовлетворяют условию* (4).

Обратно, *функция Лагранжа, построенная с помощью инвариантной формы* $(\psi_1,\ \psi_2)$ *и матриц* Λ_k, *удовлетворяющих условию* (4), *инвариантна*. Это утверждение легко проверяется с помощью равенств (5) — (5′), переписанных в обратном порядке.

Второй случай: $\varkappa=0$. В этом случае эрмитова невырожденная форма $(\psi_1,\ \psi_2)$ может быть произвольной. При этом для инвариантности функции Лагранжа необходимо и достаточно, чтобы матрицы Λ_k удовлетворяли условиям

$$\sum g_{ik}(T_g^+)^{-1}\Lambda_kT_g^{-1}=\Lambda_i, \tag{6}$$

где операторы T_g^+ определяются так:

$$(T_g\psi_1,\ \psi_2)=(\psi_1,\ T_g^+\psi_2)\qquad\text{при любых }\psi_1,\ \psi_2. \tag{7}$$

Прежде чем перейти к доказательству этого утверждения, заметим что операторы $V_g=(T_g^+)^{-1}$ образуют представление $g\to V_g$ группы Лоренца: $V_e=E$ и $V_{g_1}V_{g_2}=V_{g_1g_2}$. Подставив в формулу (6) вместо оператора $(T_g^+)^{-1}$ оператор V_g, мы получим соотношение

$$\sum g_{ik}V_g\Lambda_kT_g^{-1}=\Lambda_i. \tag{6'}$$

Это соотношение совпадает с выведенным в § 7 необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение $\sum\limits_{k=0,1,2,3}\Lambda_k\frac{\partial\psi}{\partial x_k}=0$ было инвариантным относительно группы Лоренца (см. § 7, п. 4).

Таким образом, аналогично предыдущему случаю мы получаем, что из *матриц в инвариантной функции Лагранжа с* $\varkappa=0$ *можно построить релятивистски-инвариантное уравнение с* $\varkappa=0$.

*) Можно показать, что если $(\psi_1,\ \psi_2)$ — невырожденная форма (т. е. из того, что $(\psi,\ \psi_0)=0$ при всех ψ, следует, что $\psi_0=0$), то и $\operatorname{Im}(\psi_1,\ \psi_2)$ обладает тем же свойством: $\psi_0=0$, если $\operatorname{Im}(\psi,\ \psi_0)=0$ при всех ψ.

Перейдем к выводу условия (6). Для этого запишем подробно левую часть равенства

$$\mathscr{L}[\psi(x)] = \operatorname{Im}\sum_k \left(\psi,\ \Lambda_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right) = \operatorname{Im}\sum_k \left(T_g^{-1}\tilde{\psi}(x'),\ \Lambda_k T_g^{-1} g_{ik} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_k}\right) =$$
$$= \operatorname{Im}\sum_k \left(\tilde{\psi}(x')\,(T_g^{+})^{-1}\Lambda_k T_g g_{ik} \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_k}\right). \quad (8)$$

Поскольку

$$\mathscr{L}[\tilde{\psi}(x')] = \operatorname{Im}\sum \left(\tilde{\psi}(x'),\ \Lambda_i \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_i}\right)$$

и

$$\mathscr{L}[\tilde{\psi}(x')] = \mathscr{L}[\psi(x)],$$

получаем:

$$\operatorname{Im}\sum_k \left[\tilde{\psi}(x'),\ (T_g^{+})^{-1}\Lambda_k T_g \sum_i^{-1} g_{ik} \frac{\partial\psi}{\partial x'_i}\right] = \operatorname{Im}\sum_i \left(\tilde{\psi}(x')\,\Lambda_i \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x'_i}\right). \quad (8')$$

Отсюда

$$\sum (T_g^{+})^{-1}\Lambda_k T_g^{-1} g_{ik} = \Lambda_i,$$

т. е. действительно матрицы Λ_i в инвариантной функции Лагранжа (1) с $\varkappa = 0$ удовлетворяют условию (6).

Переписав выкладки (8) — (8′) в обратном порядке, убедимся, что и, наоборот, из условия (6) вытекает инвариантность функции Лагранжа с $\varkappa = 0$.

2. Уравнения, получаемые из инвариантной функции Лагранжа. Следуя принятому в физике формализму, мы получим уравнения, описывающие нашу частицу (уравнения движения), из условия, чтобы вариация действия S равнялась нулю.

Обозначим через Λ^+ матрицу, обладающую тем свойством, что при всех ψ_1 и ψ_2

$$(\Lambda\psi_1,\ \psi_2) = (\psi_1,\ \Lambda^+\psi_2). \quad (9)$$

Очевидно, что матрицы Λ_k^+ ($k = 0, 1, 2, 3$) подобно матрицам Λ_k удовлетворяют условиям (4) *).

*) То, что матрицы Λ_k^+ действительно удовлетворяют условию (4) для матриц в релятивистски-инвариантном уравнении, легко показать так: запишем условие (4) для матриц Λ_k

$$\sum_k T_g \Lambda_k T_g^{-1} g_{ik} = \Lambda_i.$$

Отсюда, взяв $+$ от обеих частей, получим:

$$\sum_k (T_g^{-1})^{+}\Lambda_k^{+}(T_g)^{+} g_{ik} = \Lambda_i^{+}.$$

Но в силу инвариантности формы $(T_g^{-1})^{+} = T_g$, мы получаем $\sum\limits_k T_g\Lambda_k^{+}T_g^{-1} g_{ik} = \Lambda_i^{+}$, что и требовалось доказать.

Имеем:

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L}[\psi(x)]\, d^4x,$$

$$\delta\mathcal{L} = \operatorname{Im}\left\{\sum_k \left(\Lambda_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k},\ \delta\psi\right) + \left(\Lambda_k \frac{\partial\delta\psi}{\partial x_k},\ \psi\right)\right\} + \varkappa(\psi,\ \delta\psi) + \varkappa(\delta\psi,\ \psi) =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\sum_k \left(\Lambda_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k},\ \delta\psi\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\Lambda_k\,\delta\psi,\ \psi) - \left(\Lambda_k\,\delta\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\right)\right\} + 2\varkappa(\psi,\ \delta\psi) =$$

$$= \operatorname{Im}\left\{\sum_k \left(\Lambda_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k},\ \delta\psi\right) - \sum \overline{\left(\Lambda_k^+ \frac{\partial\psi}{\partial x_k},\ \delta\psi\right)}\right\} + 2\varkappa(\psi,\ \delta\psi) +$$

$$+ \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{Im}(\Lambda_k\,\delta\psi,\ \psi) =$$

$$= 2\operatorname{Im}\left\{\left(\sum_k \left(\frac{\Lambda_k + \Lambda_k^+}{2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi\right), \delta\psi\right\} + \sum \frac{\partial}{\partial x_k} \operatorname{Im}(\Lambda_k\,\delta\psi,\ \psi).$$

Последний член при интегрировании дает нуль. Таким образом, из условия $\delta S = \int \delta\mathcal{L}\, d^4x = 0$ получаем:

$$\operatorname{Im}\left\{\left(\sum_k \left(\frac{\Lambda_k + \Lambda_k^+}{2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi\right), \delta\psi\right\} = 0.$$

Отсюда

$$\sum_k \frac{\Lambda_k + \Lambda_k^+}{2}\,\frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi = 0\ ^{*)}. \tag{10}$$

Это и есть уравнение, описывающее поведение частицы. Оно, таким образом, является уравнением Лагранжа — Эйлера для функционала $S(\psi) = \int \mathcal{L}(\psi)\, d^4x$.

Если положить

$$L_k = \frac{\Lambda_k + \Lambda_k^+}{2}, \tag{11}$$

то уравнение (10) перепишется в виде

$$\sum_k L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi = 0. \tag{12}$$

Поскольку матрицы L_k удовлетворяют одновременно с Λ_k и Λ_k^+ условиям (4), то это уравнение релятивистски-инвариантно.

Очевидно, что $L_k^+ = L_k$, или, что то же самое, $(L_k\psi_1,\ \psi_2) = (\psi_1,\ L_k\psi_2)$ при любых ψ_1 и ψ_2.

Заметим, что из последнего равенства следует, что квадратичная форма $(L_k\psi,\ \psi)$ вещественна.

*) См. примечание на стр. 290.

Мы видим, таким образом, что не всякое релятивистски-инвариантное уравнение

$$\sum L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi = 0 \qquad (\varkappa \neq 0) \tag{13}$$

может быть получено из инвариантной вещественной функции Лагранжа; для этого необходимо, чтобы, во-первых, в пространстве значений функций $\psi(x)$ существовала невырожденная инвариантная билинейная форма (ψ_1, ψ_2) и, во-вторых, для матриц L_k выполнялось равенство

$$(L_k\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_k\psi_2). \tag{14}$$

Аналогично предыдущему легко получить, что для того, чтобы релятивистски-инвариантное уравнение с $\varkappa = 0$

$$\sum L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} = 0 \tag{15}$$

могло быть получено из инвариантной функции Лагранжа, необходимо, чтобы относительно некоторой невырожденной эрмитовой формы (ψ_1, ψ_2) в пространстве значений функции ψ матрицы L_k удовлетворяли условию

$$(L_k\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_k\psi_2). \tag{16}$$

Инвариантности формы в этом случае не требуется.

Заметим, что в обоих случаях сама инвариантная функция Лагранжа может быть построена с помощью формы (ψ_1, ψ_2) и матриц L_k. При этом при варьировании действия $S = \int \mathscr{L}\, d^4x$ мы придем снова к уравнению (13) при $\varkappa \neq 0$ или (14) при $\varkappa = 0$.

Заметим, что условия (14) и (16) будут выполнены для всех матриц L_k, $k = 1, 2, 3$, коль скоро они выполняются для матрицы L_0:

$$(L_0\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_0\psi_2). \tag{17}$$

Действительно, матрицы L_k получаются из L_0 по формулам (6′) § 7

$$L_k = -[B_k L_0] = L_0 B_k - B_k L_0 \qquad (k = 1, 2, 3),$$

где B_k — инфинитезимальный оператор представления $g \to T_g$, соответствующий гиперболическому повороту $g_{0k}(\varphi)$ в плоскости (x_0, x_k). Для операторов $T_{g_{0k}(\varphi)}$ при малых φ напишем:

$$T_{g_{0k}(\varphi)} = E + \varphi B_k + o(\varphi).$$

Подставляя последнее выражение в формулу

$$(T_g\psi_1, T_g\psi_2) = (\psi_1, \psi_2)$$

и собирая члены одного порядка по φ, получим:

$$(B_k\psi_1, \psi_2) = -(\psi_1, B_k\psi_2) \quad \text{или} \quad B_k = -B_k^{\#}. \tag{18}$$

Отсюда

$$L_k^+ = (L_0 B_k - B_k L_0)^+ = B_k^+ L_0^+ - L_0^+ B_k^+ = -B_k L_0 + L_0 B_k = L_k,$$

т. е.

$$(L_k \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_k \psi_2).$$

Суммируя все сказанное выше, мы приходим к окончательному выводу: *релятивистски-инвариантное уравнение*

$$L_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + i\varkappa\psi = 0, \qquad \varkappa \neq 0, \tag{19}$$

в том и только том случае можно получить из инвариантной функции Лагранжа, когда существует невырожденная инвариантная билинейная эрмитова форма (ψ_1, ψ_2), *составленная из компонент волновой функции* ψ, *для которой выполняется соотношение*

$$(L_0 \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_0 \psi_2) \tag{20}$$

при любых ψ_1 *и* ψ_2.

Релятивистски-инвариантное уравнение

$$L_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} + L_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + L_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + L_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = 0 \tag{21}$$

тогда и только тогда можно получить из инвариантной функции Лагранжа, когда существует невырожденная билинейная эрмитова форма (ψ_1, ψ_2), *относительно которой матрица* L_0 *удовлетворяет условию*

$$(L_0 \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_0 \psi_2). \tag{22}$$

(Инвариантности формы в этом случае не требуется.)

В обоих случаях *сама функция Лагранжа строится из упомянутой эрмитовой формы* (ψ_1, ψ_2) и матриц L_k, входящих в уравнение (19) или (21), по формуле

$$\mathscr{L}[\psi(x)] = \operatorname{Im} \sum \left(\psi, L_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k}\right) + \varkappa(\psi, \psi). \tag{23}$$

Сделаем в заключение этого пункта следующее замечание.

Мы построили инвариантную функцию Лагранжа $\mathscr{L}$ и с ее помощью действие S, а само уравнение (19) получили варьированием действия S. Возникает при этом вопрос, можно ли изменить функцию Лагранжа $\mathscr{L}$, чтобы она тем не менее приводила к прежнему уравнению (19). Наиболее важными преобразованиями этого рода являются следующие:

1) умножение на вещественную константу $\mathscr{L} \to c\mathscr{L}$ (c вещественно),

2) добавление выражения вида $\operatorname{div} E(x)$, где $E(x)$ — какое-нибудь векторное поле, заданное во всем пространстве $R^{(4)}$

$$\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \operatorname{div} E.$$

То обстоятельство, что преобразования над функцией Лагранжа

1) и 2) не меняют получаемых из нее уравнений, иногда коротко формулируют так: говорят, что функция Лагранжа определена с точностью до множителя и слагаемого, типа дивергенции.

3. Уравнения, получаемые из инвариантной функции Лагранжа (окончание). В этом пункте мы найдем условия, налагаемые на элементы матрицы L_0, в уравнении (19) ($\varkappa \neq 0$), получаемом из инвариантной функции Лагранжа.

Как было показано в предыдущем пункте, для того, чтобы релятивистски-инвариантное уравнение могло быть получено варьированием инвариантной функции Лагранжа, необходимо и достаточно, чтобы для некоторой инвариантной формы (ψ_1, ψ_2) выполнялось равенство

$$(L_0\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_0\psi_2). \tag{24}$$

Общий вид инвариантной невырожденной билинейной формы был нами найден в §§ 2 и 3. Мы получили, что всякая форма, инвариантная относительно представления собственной группы Лоренца, в каноническом базисе ξ^{τ}_{lm} запишется так:

$$(\psi_1, \psi_2) = \sum a^{\tau\tau^*} s_l x^{\tau}_{lm} \overline{y}^{\tau^*}_{lm}, \tag{25}$$

где x^{τ}_{lm} и $y^{\tau^*}_{lm}$ — координаты ψ_1 и ψ_2 в каноническом базисе, а $a^{\tau\tau^*}$ — некоторые числа, отличные от нуля только для компонент, определяемых парами $\tau \sim (l_0, l_1)$ и $\tau^* \sim (l_0, -\overline{l}_1)$, причем $a^{\tau\tau^*} = \overline{a}^{\tau^*\tau}$, $s_l = \pm 1$.

Если форма (ψ_1, ψ_2) инвариантна также относительно представления полной группы, то числа $a^{\tau\tau^*}$ подчинены дополнительному условию:

$$a^{\tau\tau^*} = \pm a^{\dot{\tau}\dot{\tau}^*}, \tag{25$'$}$$

где $\dot{\tau}$ и $\dot{\tau}^*$ — представления, сопряженные представлениям τ и τ^* соответственно. При этом в случае, когда компоненты τ и τ^* эквивалентны своим сопряженным и, следовательно, неприводимы относительно представления полной группы, оператор S должен действовать в этих компонентах одинаково; в противном случае $a^{\tau\tau^*} = 0$.

Мы показали в § 3, что при соответствующем выборе базиса $\{\xi^{\tau}_{lm}\}$ числа $a^{\tau\tau^*}$ в форме, инвариантной относительно представления полной группы, имеют вид

1. $a^{\tau\tau^*} = 1$ при l_1 не вещественном и не чисто мнимом, (25$''$)
2. $a^{\tau\tau^*} = \pm 1$ при l_1 вещественном или чисто мнимом. (25$'''$)

Вернемся после этого напоминания к матрице L_0. Перепишем условие (24) для базисных векторов ξ^{τ}_{lm}

$$\left(L_0\xi^{\tau}_{lm}, \xi_{l'm'}\right) = \left(\xi^{\tau}_{lm}, L_0\xi^{\tau'}_{l'm'}\right). \tag{26}$$

Отсюда получаем, подставив выражение для L_0 из (15) — (17) § 7 в формулу (26), и, пользуясь (25):

$$c^{\tau\tau'}a^{\tau'\tau'^*} = \bar{c}^{\tau'^*\tau^*}a^{\tau\tau^*}. \tag{27}$$

Заметим, что если уравнение с матрицей L_0 и форма (ψ, ψ) инвариантны относительно представлений полной группы Лоренца, то, как следует из формулы (25) и формул (30) и (31) § 7, никаких новых условий, дополнительных к условию (27), не возникает.

Таким образом, условие (27) есть окончательное условие, которому должна удовлетворять матрица L_0 (т. е. числа $c^{\tau\tau'}$) для того, чтобы уравнение (19) получалось из инвариантной функции Лагранжа.

В частности, при соответствующем выборе базиса (так что $a^{\tau\tau^*}$ имеют вид (25″) или (25‴)) получим:

$$c^{\tau\tau'} = \bar{c}^{\tau'^*\tau^*} \tag{27'}$$

при l_1 не вещественном и не чисто мнимом и

$$c^{\tau\tau'} = \pm\bar{c}^{\tau'^*\tau^*} \tag{27''}$$

при l_1 вещественном или чисто мнимом.

4. Величины, образуемые из волновой функции ψ и инвариантной формы *). Здесь мы покажем, как с помощью инвариантной формы (ψ_1, ψ_2) из компонент волновой функции ψ, ее частных производных $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$ и матриц L_0, L_1, L_2, L_3 релятивистски-инвариантного уравнения можно строить различные величины, определенным образом преобразующиеся при преобразованиях Лоренца.

Уточним, что мы понимаем здесь под словом величина. Напомним, что значения функции $\psi(x)$ преобразуются при преобразовании Лоренца по представлению $g \to T_g$

$$\tilde{\psi}(x') = T_g\psi(x), \qquad x' = gx,$$

где преобразование Лоренца g действует на аргумент функции ψ, а оператор T_g — на ее компоненты.

Мы построим функции $\Phi(x)$, определенные в каждой точке четырехмерного пространства R^4 со значениями в некотором пространстве $\tilde{R}$, которые при преобразованиях Лоренца $x' = gx$ будут преобразовываться следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(x') = \tau_g\Phi(x),$$

где τ_g — оператор из некоторого представления $g \to \tau_g$, действующего в пространстве $\tilde{R}$. Соответствующую функцию $\Phi(x)$ мы будем называть скаляром, вектором, тензором и т. д. в зависимости от

*) В дальнейшем мы считаем, что форма (ψ, ψ) инвариантна относительно представления полной группы Лоренца.

того, какому представлению — скалярному, векторному, тензорному и т. д. — эквивалентно представление $g \to \tau_g$.

I. Вначале рассмотрим величины, не содержащие производных волновой функции ψ. Начнем с нескольких примеров.

а) Величина (ψ, ψ) является скаляром в силу инвариантности формы.

б) Пусть в пространстве величин ψ можно выбрать оператор T, коммутирующий со всеми операторами T_g представления собственной группы Лоренца и антикоммутирующий с оператором S, соответствующим пространственному отражению s:

$$TT_g = T_g T \quad \text{и} \quad ST = -TS.$$

В таком случае величина $(T\psi, \psi)$ является псевдоскаляром, т. е. преобразуется как скаляр под действием собственной группы Лагранжа и меняет знак при отражении.

Действительно,

$$(TT_g\psi,\ T_g\psi) = \left(T_g^{-1}TT_g\psi,\ \psi\right) = (\psi,\ \psi)$$

для собственных преобразований Лоренца и

$$(TS\psi,\ S\psi) = (S^{-1}TS\psi,\ \psi) = -(\psi,\ \psi)$$

для пространственного отражения.

в) Величина с компонентами $t_k = (L_k\psi, \psi)$ образует вектор, т. е. преобразуется так же, как и координаты (x_0, x_1, x_2, x_3):

$$t'_k = \sum g_{ki} t_i. \tag{28}$$

Действительно, пусть $x' = gx$ и $\psi' = T_g\psi$,

$$t'_k = \left(L_k\psi',\ \psi'\right) = \left(T_g^{-1}L_kT_g\psi,\ \psi\right).$$

В силу равенства (3) § 7 для матриц L_0, L_1, L_2, L_3 в релятивистски-инвариантном уравнении, которое можно переписать в виде

$$T_g^{-1}L_kT_g = \sum g_{ki}L_i,$$

мы получим:

$$t'_k = \left(\sum g_{ki}L_i\psi,\ \psi\right) = \sum g_{ki}\,(L_i\psi,\ \psi) = \sum g_{ki}t_i.$$

г) Величина $\dot{t}_k = (TL_k\psi, \psi)$ является псевдовектором (оператор T коммутирует с операторами T_g, когда g принадлежит собственной группе Лоренца, и антикоммутирует с оператором S).

д) Величина

$$t_{k_1k_2} = (L_{k_1}L_{k_2}\psi,\ \psi)$$

преобразуется как тензор второго ранга

$$t'_{k'_1k'_2} = \sum g_{k'_1k_1}\, g_{k'_2k_2}\, t_{k_1k_2}. \tag{29}$$

Действительно,

$$t'_{k'_1 k'_2} = \left(L_{k'_1} L_{k'_2} \psi', \psi'\right) = \left(T_g^{-1} L_{k'_1} L_{k'_2} T\psi, \psi\right) =$$
$$= \left(T_g^{-1} L_{k'_1} T_g T_g^{-1} L_{k'_2} T_g \psi, \psi\right) = \left(\left[\sum g_{k'_1 k_1} L_{k_1}\right]\left[\sum g_{k'_1 k_2} L_{k_2}\right]\psi, \psi\right) =$$
$$= \sum g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} \left(L_{k_1} L_{k_2} \psi, \psi\right) = \sum g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} t_{k_1 k_2}.$$

Тензорное представление (29) приводимо. Поэтому величина $t_{k_1 k_2}$ может, вообще говоря, принадлежать некоторому инвариантному подпространству в пространстве всех тензоров второго ранга.

е) Величина с составляющими

$$\dot{t}_{k_1 k_2} = (TL_{k_1} L_{k_2} \psi, \psi)$$

является псевдотензором (оператор T тот же, что и в примерах б) и г)).

Общий случай: величина $t_{k_1 k_2 k_3 \ldots k_n} = \left(L_{k_1} L_{k_2} L_{k_3} \ldots L_{k_n} \psi, \psi\right)$ преобразуется как тензор n-го ранга

$$t'_{k'_1 k'_2 \ldots k'_n} = \sum g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} g_{k'_3 k_3} \ldots g_{k'_n k_n} t_{k_1 k_2 \ldots k_n}.$$

При этом, как и в случае тензора второго ранга, величины $t_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ могут принадлежать лишь некоторому инвариантному подпространству в пространстве всех тензоров ранга n. Аналогично предыдущему величина

$$\dot{t}_{k_1 k_2 \ldots k_n} = \left(TL_{k_1} L_{k_2} \ldots L_{k_n} \psi, \psi\right)$$

является псевдотензором.

В следующем параграфе в качестве примера мы построим рассмотренные выше величины для случая уравнения Дирака.

II. Величины, содержащие частные производные волновой функции ψ. Снова начнем с примеров.

а) $t^j = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}, \psi\right)$. Как нетрудно проверить, величина t^j преобразуется по формуле

$$t'^{j'} = \sum_j g^{j'j} t^j, \tag{30}$$

где матрица $\|g^{j'j}\| = \left(\|g_{k'k}\|^{\text{тр}}\right)^{-1}$ (матрица $\|g_{k'k}\|$ — матрица преобразования Лоренца). В силу равенства

$$(g^{\text{тр}})^{-1} = sgs^{-1},$$

где s — пространственное отражение (см. п. 1 § 1), представление (30) эквивалентно тождественному представлению $g \to g$ группы Лоренца. Величину t^j называют контравариантным вектором в отличие от обычного вектора t_k (называемого ковариантным).

б) Величина

$$t_k^j = \left(L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_j},\ \psi\right)$$

преобразуется по формуле

$$t'^{j'}_{k'} = \sum g^{j'j} g_{k'k} t_k^j, \tag{31}$$

где на верхний индекс действует матрица $\|g^{j'j}\|$, а на нижний — матрица $\|g_{k'k}\|$. Представление, задаваемое формулой (31), эквивалентно тензорному представлению ранга 2, а величина t_k^j называется тензором с одним верхним и одним нижним индексами.

Общий случай:

$$t_{k_1 \ldots k_n}^{j_1 \ldots j_s} = \left(L_{k_1} L_{k_2} \ldots L_{k_n} \frac{\partial^s \psi}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_s}},\ \psi\right). \tag{32}$$

Эта величина преобразуется по формуле

$$t'^{j'_1 \ldots j'_s}_{k'_1 \ldots k'_n} = \sum g^{j'_1 j_1} g^{j'_2 j_2} \ldots g^{j'_s j_s} g_{k'_1 k_1} g_{k'_2 k_2} \ldots g_{k'_n k_n} t^{j_1 \ldots j_s}_{k_1 \ldots k_n} \tag{32'}$$

и называется тензором с s верхними и n нижними индексами. Представление (32′) эквивалентно тензорному представлению ранга $s+n$ (или, точнее, представлению, возникающему в некотором инвариантном подпространстве пространства тензоров ранга $k+n$).

Заметим, что тензор (32) $t_{k_1 \ldots k_n}^{j_1 \ldots j_s}$ симметричен по верхним индексам.

Аналогично тому, как это делалось выше, можно строить соответствующие псевдовеличины с помощью оператора T.

5. Замечание о величинах, составленных квадратично из волновой функции ψ. В предыдущем пункте мы построили различные величины, квадратично зависящие от волновой функции ψ и ее частных производных и преобразующие, по тому или иному представлению, группы Лоренца (скаляр, вектор, тензор и т. д.). Здесь мы выясним, по каким, вообще, представлениям могут преобразовываться величины, зависящие квадратично от ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x_k}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_k}$ и т. д.

I. Найдем сначала, по какому представлению может преобразовываться величина Φ, зависящая квадратично только от самой функции.

Пусть значения величины Φ принадлежат некоторому линейному пространству $\widetilde{R}$. Выберем в $\widetilde{R}$ какой-нибудь базис η_α и координаты величины Φ в этом базисе обозначим $\{t_\alpha\}$. Так как Φ зависит квадратично от значений волновой функции ψ, то это означает, что все t_α имеют вид

$$t_\alpha = (\psi,\ \psi)_\alpha, \tag{33}$$

где $(\psi,\ \psi)_\alpha$ — некоторая эрмитова квадратичная форма, для каждой координаты t_α — своя.

Значения волновой функции ψ преобразуются, как всегда, по представлению $g \to T_g$, действующему в пространстве R и состоящему из компонент $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$. В этом случае значения комплексно-сопряженной волновой функции $\overline{\psi}$ преобразуются по представлению $g \to T_g^*$, состоящему из неприводимых компонент $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots, \tau_k^*$ и действующему также в пространстве R. (Напомним, что если представление τ определяется парой (l_0, l_1), то представление τ^* определяется парой $(l_0, -\overline{l}_1)$).

Из формулы (33) видно, что пространство $\widetilde{R}$, которому принадлежат значения величины Φ, содержится в произведении пространства R на самое себя: $\widetilde{R} \subset R \times R$, а представление τ_g, по которому преобразуется величина Φ, содержится в произведении представлений *) $T_g \times T_g^*$.

Таким образом, *величина, квадратично зависящая от значений волновой функции ψ, может преобразовываться только по представлению, содержащемуся в произведении представлений $T_g \times T_g^*$.*

II. Рассмотрим теперь случай величины Φ, квадратично зависящей как от волновой функции ψ, так и от ее первых частных производных $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$.

Заметим вначале, что если волновая функция ψ преобразуется по представлению $g \to T_g$, т. е. при $x' = gx$

$$\widetilde{\psi}(x') = T_g \psi(x),$$

то ее частные производные первого порядка преобразуются по формуле

$$\frac{\partial \widetilde{\psi}(x')}{\partial x'_k} = \sum T_g \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial x'_k} = \sum T_g g^{ki} \frac{\partial \psi}{\partial x_i},$$

где матрица $\|g^{ki}\| = (\|g_{ik}\|)^{-1}$.

Из этой формулы видно, что величина $\left\{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right\}$ преобразуется по произведению представлений $\tau_g^1 = T_g \times T_g^1$, где через T_g^1 обозначено представление $g \to (g^*)^{-1}$, эквивалентное векторному представлению $g \to g$ (это представление определяется парой $(l_0, l_1) = (0, 2)$ или, в спинорных обозначениях, парой $(k, n) = (1, 1)$).

Рассмотрим теперь величину Φ_1, являющуюся билинейной комбинацией ψ и $\frac{\partial \psi}{\partial x_i}$ (составляющие t_α величины Φ имеют вид $t_\alpha = \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i}, \psi_2\right)_\alpha$, где $(\psi_1, \psi_2)_\alpha$ — эрмитова билинейная форма).

---

*) Мы говорим, что представление $g \to T_g$ содержится в представлении $g \to \tau_g$, если последнее в каком-нибудь из своих инвариантных подпространств порождает представление, эквивалентное представлению T_g.

Точно так же как и в предыдущем случае, мы видим, что величина Φ_1 может преобразовываться только по представлениям, содержащимся в произведении

$$\tau_g \times T_g^* = T_g \times T_g^* \times T_g^1.$$

Величина Φ_2, зависящая от билинейных комбинаций только одних частных производных $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, преобразуется, очевидно, по представлению

$$\tau_g^1 \times \left(\tau_g^1\right)^* = T_g \times T_g^* \times T_g^1 \times T_g^1$$

(заметим, что представление $g \to \left(T_g^1\right)^*$ эквивалентно представлению $g \to T_g^1$).

Очевидно, что *величина общего вида Φ, квадратично зависящая от ψ и ее частных производных $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, преобразуется по представлению, содержащемуся в сумме представлений* *)

$$T_g \times T_g^*,\ T_g \times T_g^* \cdot T_g^{(1)} \text{ и } T_g \times T_g^* \cdot T_g^{(1)} \times T_g^{(1)}.$$

III. Рассмотрим, наконец, величину Φ, квадратично зависящую от функции ψ и ее частных производных $\frac{\partial^s\psi}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_s}}$ до n-го порядка включительно.

Заметим, что при преобразованиях Лоренца частные производные $\frac{\partial^s\psi}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_s}}$ преобразуются по формулам

$$\frac{\partial^s\tilde{\psi}(x')}{\partial x'_{i_1}\partial x'_{i_2}\ldots\partial x'_{i_s}} = \sum g^{i_1k_1}g^{i_2k_2}\ldots g^{i_sk_s}T_g\frac{\partial^s\psi}{\partial x_{k_1}\partial x_{k_2}\ldots\partial x_{k_s}}.$$

Из этой формулы видно, что представление τ_g^s, по которому преобразуются частные производные $\frac{\partial^s\psi}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_s}}$, является произведением представления T_g и T_g^s, где через $T_g^{(s)}$ обозначено представление, действующее по формуле

$$t'_{i_1 i_2\ldots i_s} = \sum g_{i_1k_1}g_{i_2k_2}\ldots g_{i_sk_s}t_{k_1\ldots k_s},$$

в пространстве симметрических тензоров s-го ранга.

---

*) Суммой представлений $T_g^{(1)}, \ldots, T_g^{(s)}$, действующих соответственно в пространствах $R^{(1)}, \ldots, R^{(s)}$, называется представление τ_g, действующее в прямой сумме этих пространств, причем так, что каждое пространство $R^{(i)}$ инвариантно относительно представления $g \to \tau_g$ и последнее порождает в $R^{(i)}$ представление, совпадающее с $T_g^{(i)}$.

Теперь, как и в предыдущих случаях, найдем, что *величина Φ, квадратично зависящая от ψ и ее частных производных вплоть до n-го порядка, преобразуется по представлению, которое содержится в сумме представлений вида*

$$T_g \times T_g^* \times T_g^{(l)} \times T_g^{(s)},$$

где l и s меняются от нуля до n.

Сделаем в заключение одно замечание.

Представление $(T_g \times T_g^*)$, как нетрудно видеть, в случае конечномерного представления T_g, содержит лишь одни целые веса l. Такое представление эквивалентно, очевидно, сумме тензорных представлений.

Любое произведение представлений $T_g \times T_g^* \times T_g^{(s)} \times T_g^{(l)}$ также эквивалентно сумме тензорных представлений. Таким образом, если волновая функция ψ преобразуется по конечномерному представлению, то величина Φ, квадратично зависящая от ψ и ее частных производных, преобразуется по представлению, неприводимые компоненты которого эквивалентны неприводимым компонентам тензорного представления. В связи с этим, величины Φ иногда называют тензорами, квадратично зависящими от ψ и ее производных.

Заметим, наконец, что величина Φ преобразуется всегда по однозначному представлению собственной и полной группы Лоренца.

В заключение рассмотрим пример. Пусть представление T_g состоит из двух компонент: $T_g^{(0,1)}$ и $T_g^{(1,0)}$:

$$T_g = T_g^{(0,1)} \dotplus T_g^{(1,0)}.$$

Через $T_g^{(0,1)}$ здесь, как и всюду в этой книге, обозначено непунктирное спинорное представление ранга 1, а через $T_g^{(1,0)}$ — пунктирное представление того же ранга. Напомним, что представление $T_g^{(0,1)}$ определяется парой $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, а представление $T_g^{(1,0)}$ — парой $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Найдем все неприводимые компоненты τ, содержащиеся в произведении

$$T_g \times T_g^*.$$

Заметим, что T_g^* состоит из тех же компонент, что и T_g:

$$T_g^* = T_g^{(1,0)} + T_g^{(0,1)}.$$

Отсюда

$$T_g \times T_g^* = T_g^{(1,0)} \times T_g^{(1,0)} + T_g^{(1,0)} \times T_g^{(0,1)} + T_g^{(0,1)} \times T_g^{(1,0)} + T_g^{(0,1)} \times T_g^{(0,1)}.$$

Разложим каждый из членов этой суммы на неприводимые (см. § 6).

Разложения	Пары (l_0, l_1), задающие эти компоненты, таковы:
1. $T_g^{(1,0)} \times T_g^{(1,0)} = T_g^{(0,0)} + T_g^{(1,0)}$	$T_g^{(0,0)} \sim \tau_0 \sim (0,1)$; $T_g^{(1,0)} \sim \tau_2 \sim (1,2)$
2. $T_g^{(1,0)} \times T_g^{(0,1)} = T_g^{(0,1)} \times T_g^{(1,0)} = T_g^{(1,1)}$	$T_g^{(1,1)} \sim \tau_1 \sim (0,2)$
3. $T_g^{(0,1)} \times T_g^{(0,1)} = T_g^{(0,0)} + T_g^{(0,2)}$	$T^{(0,0)} \sim \tau_0 \sim (0,1)$; $T_g^{(0,1)} \sim \dot{\tau}_2 \sim (-1,2)$

Итак, представление $T_g \times \overset{*}{T}_g$ собственной группы Лоренца состоит из шести неприводимых компонент: двух компонент τ_0, двух компонент τ_1 и компонент τ_2 и $\dot{\tau}_2$.

Этим компонентам соответствуют величины: в первом случае — скаляр, во втором случае — вектор, наконец, в третьем случае (т. е. в случае приводимого представления, состоящего из компонент τ_2 и $\dot{\tau}_2$) — антисимметрический тензор.

Отметим, что во всех трех случаях представление собственной группы Лоренца может быть дополнено до представления полной группы, причем в третьем случае, так же как и в первых двух, получается неприводимое представление полной группы (подробнее об этом см. § 4, п. 8).

§ 9. Примеры релятивистски-инвариантных уравнений

Начиная с этого параграфа, мы будем рассматривать в основном физические применения всей развитой перед этим теории. При этом возникает ряд дополнительных ограничений, накладываемых физическими требованиями, которые существенно сужают число рассматриваемых релятивистски-инвариантных уравнений.

Вначале приведем несколько примеров релятивистски инвариантных уравнений. В дальнейшем мы увидим, что эти уравнения являются наиболее существенными. Например, все известные в настоящее время элементарные частицы, по-видимому, описываются лишь этими уравнениями.

1. Уравнение Дирака. Возьмем два представления собственной группы: τ, определяемое числами $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (непунктирное спинорное представление ранга 1), и $\dot{\tau}$, определяемое числами $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (пунктирное спинорное представление ранга 1). Эти представления, как легко видеть, зацепляются *). Поэтому можно построить релятивистски-инвариантное уравнение относительно величины, преобразующейся по представлению, состоящему из компонент τ и $\dot\tau$.

Матрица L_0 такого уравнения в базисе $\left\{\xi^{\tau}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ \xi^{\tau}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}},\ \xi^{\dot\tau}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}},\ \xi^{\dot\tau}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}\right\}$ запишется так:

$$L_0=\begin{Vmatrix} 0 & 0 & c^{\tau\dot\tau} & 0\\ 0 & 0 & 0 & c^{\tau\dot\tau}\\ c^{\dot\tau\tau} & 0 & 0 & 0\\ 0 & c^{\dot\tau\tau} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{1}$$

(см. общие формулы (15)—(19) в § 7).

Заметим, что представление с компонентами τ и $\dot\tau$ можно дополнить до представления полной группы Лоренца **). При этом в базисе $\left\{\xi^{\tau}_{\frac{1}{2}m},\ \xi^{\dot\tau}_{\frac{1}{2}m}\right\}$ оператор S, соответствующий пространственному отражению s, запишется матрицей

$$S=\begin{Vmatrix} 0 & E\\ E & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1$'$}$$

Если теперь потребовать, чтобы уравнение с матрицей L_0 было инвариантно относительно полной группы, то мы получим:

$$c^{\tau\dot\tau}=c^{\dot\tau\tau}=c,$$

т. е. матрица L_0 имеет вид

$$L_0=c\begin{Vmatrix} 0 & E\\ E & 0 \end{Vmatrix}=c\gamma_0,\qquad E=\begin{Vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Заметим, что γ_0 совпадает с оператором S (см. (1$'$)). Другие матрицы L_1, L_2, L_3 имеют при этом следующий вид (см. § 7, (18)—(19)):

$$L_3=c\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}=c\gamma_3,\qquad L_2=c\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}=c\gamma_2;$$

$$L_1=c\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}=c\gamma_1. \tag{3}$$

---

*) Напомним, что представления, определяемые числами (l_0, l_1) и (l_0', l_1'), были названы зацепляющимися, если

$$(l_0', l_1')=(l_0\pm 1,\ l_1)\qquad\text{или}\qquad (l_0', l_1')=(l_0,\ l_1\pm 1).$$

) *Величина ψ, преобразующаяся по представлению полной группы, состоящему из компонент τ и $\dot\tau$, является* **биспинором первого ранга (см. § 5).

Для двух компонент τ и $\dot{\tau}$ можно построить инвариантную эрмитову билинейную форму (как и для всякого конечномерного представления полной группы). В базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot{\tau}}_{lm}\}$ эта форма имеет матрицу

$$\beta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix} = \gamma_0$$

и записывается так:

$$(\psi_1, \psi_2) = \\ = x^{\tau}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \overline{y}^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + x^{\tau}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \overline{y}^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + x^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} \overline{y}^{\tau}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} + x^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \overline{y}^{\tau}_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}; \tag{4}$$

$\{x^{\tau}_{lm}\}$ и $\{y^{\tau}_{lm}\}$ — координаты ψ_1 и ψ_2 в базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot{\tau}}_{lm}\}$. Заметим, что матрица β снова совпадает с матрицей оператора S и γ_0: $\beta = S = \gamma_0$.

Как нетрудно видеть, матрица L_0 вида (2) при вещественном c ($\overline{c} = c$) удовлетворяет условию

$$(L_0\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_0\psi_2).$$

Таким образом, существует инвариантная функция Лагранжа для уравнения с матрицами L_k вида (2), (3) при вещественном c

$$\mathscr{L}[\psi(x)] = c \operatorname{Im}\left\{ \sum \left(\gamma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \psi \right) \right\} + \varkappa(\psi, \psi).$$

Поскольку функция Лагранжа определяется с точностью до вещественного множителя, то можно положить $c = 1$, изменив, если нужно, константу $\varkappa$. Таким образом, мы получим $L_k = \gamma_k$. *Уравнение с матрицами γ_k называется уравнением Дирака.*

Заметим, что матрицы Дирака $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_0$ удовлетворяют следующему соотношению:

$$\gamma_{k_1}\gamma_{k_2} + \gamma_{k_2}\gamma_{k_1} = \delta_{k_1 k_2} E; \\ \delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = -\delta_{00} = 1, \quad \delta_{k_1 k_2} = 0 \quad \text{при } k_1 \neq k_2, \tag{3'}$$

которое проверяется непосредственно.

Рассмотрим матрицу

$$\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -i \begin{Vmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{Vmatrix}. \tag{5}$$

Она, как легко проверить простой выкладкой, коммутирует со всеми операторами T_g представления собственной группы; напомним лишь, что эти операторы записываются в каноническом базисе $\left\{\xi^{\tau}_{\frac{1}{2}}, \xi^{\tau}_{-\frac{1}{2}}, \xi^{\dot\tau}_{\frac{1}{2}}, \xi^{\dot\tau}_{-\frac{1}{2}}\right\}$ матрицами вида

$$A_g = \begin{Vmatrix} T_g & 0 \\ 0 & T_{(g^*)^{-1}} \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Кроме того, матрица γ_5 антикоммутирует со всеми матрицами $\{\gamma_k\}$ ($k = 0, 1, 2, 3$), в частности с γ_0, которая одновременно служит оператором пространственного отражения.

Составим теперь из волновой функции ψ, преобразующейся по представлению с неприводимыми компонентами $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и $\dot\tau\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, квадратичные относительно ψ величины, образующие то или иное неприводимое представление полной группы Лоренца.

Общий способ получения таких величин с помощью инвариантной формы (ψ_1, ψ_2) и матриц L_0, L_1, L_2, L_3 инвариантного уравнения описан в предыдущем параграфе. Выпишем эти величины для случая уравнения Дирака.

1. *Скаляр* — сама инвариантная форма (ψ, ψ).

2. *Псевдоскаляр* — $(\gamma_5\psi, \psi)$. Напомним (см. § 8, п. 7), что величина $(T\psi, \psi)$ является псевдоскаляром, если оператор T коммутирует с операторами T'_g представления собственной группы Лоренца и антикоммутирует с оператором S. Здесь положено $T = \gamma_5$.

3. *Вектор* $t_k = (\gamma_k\psi, \psi)$. В п. 7 § 8 мы показали, что величины $t_k = (L_k\psi, \psi)$, где L_k — матрицы в релятивистски-инвариантном уравнении, преобразуются как составляющие вектора.

4. *Псевдовектор* $\dot t_k = (\gamma_5\gamma_k\psi, \psi)$ (см. снова § 8, п. 7).

5. *Тензор*

$$t_{k_1k_2} = (\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\psi, \psi). \tag{7}$$

В п. 7 § 8 мы показали, что величина (7) преобразуется как тензор второго ранга. Напомним, что пространство всех тензоров второго ранга распадается в сумму трех подпространств, неприводимых относительно полной группы Лоренца: одномерного подпространства (скаляр), девятимерного пространства симметрических тензоров $t_{k_1k_2} = t_{k_2k_1}$ с нулевым следом и шестимерного пространства антисимметрических тензоров $t_{k_1k_2} = -t_{k_2k_1}$.

Оказывается, величина (7) может быть либо скаляром, либо антисимметрическим тензором.

Действительно, из равенства (3′) следует, что компоненты

$$t_{11} = t_{22} = t_{33} = -t_{00} = (\psi_1, \psi_2)$$

при преобразованиях Лоренца не меняются. Таким образом, величины t_{kk} ($k = 0, 1, 2, 3$) являются скалярами.

Для компонент с разными индексами имеем (см. (3′)):

$$t_{k_1k_2} = \frac{1}{2}\left(\left(\gamma_{k_1}\gamma_{k_2} - \gamma_{k_2}\gamma_{k_1}\right)\psi,\ \psi\right).$$

Отсюда видно, что $t_{k_1k_2} = -t_{k_2k_1}$, т. е. такие компоненты образуют антисимметрический тензор.

Заметим, что величина

$$\dot{t}_{k_1k_2} = \left(\gamma_5\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\psi,\ \psi\right)$$

является либо псевдоскаляром ($\dot{t}_{11}$, $\dot{t}_{22}$, $\dot{t}_{33}$, $\dot{t}_{00}$), либо снова антисимметрическим тензором $\dot{t}_{k_1k_2} = -\dot{t}_{k_1k_2}$ ($k_1 \neq k_2$), причем в последнем случае $\dot{t}_{12} = -t_{3,4}$, $\dot{t}_{23} = -t_{01}$ и т. д., т. е. антисимметрический тензор $\dot{t}_{k_1k_2}$ с точностью до нумерации компонент и знака совпадает с тензором $t_{k_1k_2}$.

Итак, из волновой функции ψ, удовлетворяющей уравнению Дирака, мы построили пять неприводимых величин, зависящих от ψ квадратично: скаляр, псевдоскаляр, вектор, псевдовектор и антисимметрический тензор. В п. 7 предыдущего параграфа мы видели, что из волновой функции ψ, преобразующейся по представлению $\tau\left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)$ и $\dot{\tau}\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, других неприводимых величин, квадратично зависящих от ψ, построить нельзя.

Выясним теперь, можно ли представление (6) полной группы дополнить до представления общей группы Лоренца, причем так, чтобы уравнение Дирака осталось инвариантным.

Пусть J — оператор, соответствующий полному отражению j. Для инвариантности уравнения Дирака относительно этого оператора должны, очевидно, выполняться соотношения

$$J\gamma_k J^{-1} = -\gamma_k \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

т. е. j антикоммутирует со всеми матрицами γ_k и $J^2 = E$. Легко показать, что такой оператор только один:

$$J = i\gamma_5.$$

При этом, как ясно из формул (5) и (6), оператор J коммутирует с операторами представления собственной группы Лоренца.

Если теперь положить

$$t \rightarrow T = \gamma_5\gamma_0,$$

то легко убедиться, что имеют место равенства

$$T\gamma_k T^{-1} = \gamma_k \quad (k = 1,\ 2,\ 3), \qquad T\gamma_0 T^{-1} = -\gamma_0.$$

Кроме того, для операторов представления $g \to T_g$ собственной группы Лоренца выполняется соотношение

$$TT_gT^{-1} = T_{(g^*)^{-1}}.$$

Таким образом, операторы

$$S = \gamma_0, \quad T = \gamma_0\gamma_5, \quad J = i\gamma_5$$

вместе с операторами T_g образуют представление общей группы Лоренца, оставляющее инвариантным уравнение Дирака.

Однако

$$\gamma_0\gamma_5 = -\gamma_5\gamma_0, \quad \gamma_5(\gamma_0\gamma_5) = -(\gamma_0\gamma_5)\gamma_5 \quad \text{и} \quad \gamma_0(\gamma_0\gamma_5) = -(\gamma_0\gamma_5)\gamma_0,$$

т. е. все операторы T, S, J антикоммутируют. Другими словами, полученное нами представление общей группы является двузначным (см. §§ 1, 3 и 7).

Итак, представление *общей группы*, оставляющее инвариантным уравнение Дирака, — это двузначное представление. Операторы J, S, T определены так:

$$J = i\gamma_5, \quad S = \gamma_0, \quad T = \gamma_5\gamma_0.$$

Можно, однако, построить уравнение относительно восьмикомпонентной функции ψ и инвариантное относительно однозначного представления общей группы. В этом уравнении матрицы L_k имеют вид

$$L_k = \begin{Vmatrix} \gamma_k & 0 \\ 0 & \gamma_k \end{Vmatrix}.$$

Операторы S, T, J и T_g (g — элемент собственной группы) задаются формулами

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & i\gamma_5 \\ i\gamma_5 & 0 \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} \gamma_0 & 0 \\ 0 & -\gamma_0 \end{Vmatrix}, \quad T = \begin{Vmatrix} 0 & i\gamma_5\gamma_0 \\ i\gamma_5\gamma_0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$T_g = \begin{Vmatrix} A_g & 0 \\ 0 & A_g \end{Vmatrix},$$

где матрица A_g определяется формулой (6).

Заметим, что если такое уравнение рассматривать только относительно представления полной группы Лоренца, то оно распадается на два уравнения Дирака. Относительно же представления общей группы это уравнение является нераспадающимся.

2. Уравнение Даффина для скалярных частиц. Это уравнение уже приводилось в качестве примера в начале § 7 (см. сноску *) на стр. 275). Напомним, что оно имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_k} = \varkappa\psi_k, \qquad \sum_{k=1,2,3} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k} - \frac{\partial \psi_0}{\partial x_0} - \varkappa\psi = 0. \tag{8}$$

Как легко видеть, величина $\Phi=\{\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3\}$ состоит из скаляра ψ и вектора $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$, т. е. представление имеет две зацепляющиеся компоненты $\tau_0\sim(0, 1)$ и $\tau_1\sim(0, 2)$

$$\tau_0\longleftrightarrow\tau_1. \qquad (8')$$

(Условимся такую схему называть схемой зацепления компонент.)

Для всякого уравнения со схемой зацепления (8′) матрица L_0 в базисе из векторов

$$\left\{\xi_{00}^{\tau_0}, \xi_{00}^{\tau_1}, \xi_{1,-1}^{\tau_1}, \xi_{10}^{\tau_1}, \xi_{11}^{\tau_1}\right\}$$

имеет вид

$$L_0=\begin{Vmatrix} 0 & c^{\tau_0\tau_1} & 0 & 0 & 0 \\ c^{\tau_1\tau_0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (8'')$$

В качестве инвариантной билинейной формы можно, очевидно, взять следующую форму *):

$$(\psi_1, \psi_2)=x_{00}^{\tau_0}\overline{y_{00}^{\tau_0}}-x_{00}^{\tau_1}\overline{y_{00}^{\tau_1}}+\sum_{m=-1,0,1}x_{1m}^{\tau_1}\overline{y_{1m}^{\tau_1}}, \qquad (8''')$$

где $\{x_{lm}^{\tau}\}$ и $\{y_{lm}^{\tau}\}$ — координаты ψ_1 и ψ_2 в базисе $\{\xi_{lm}^{\tau}\}$.

Для того чтобы существовала функция Лагранжа для уравнения с матрицей L_0 вида (8″), получаемая с помощью формы (8‴), нужно, как мы видели, чтобы

$$(L_0\psi_1, \psi_2)=(\psi_1, L_0\psi_2).$$

Это приводит к равенству

$$c^{\tau_0\tau_1}=-\overline{c^{\tau_1\tau_0}},$$

т. е. $c^{\tau_0\tau_1}$ — чисто мнимое; если положить $c^{\tau_0\tau_1}=i$, то мы получим написанную систему (8). Заметим еще, что любая компонента величины $\Phi=(\psi, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\Box\psi-\varkappa^2\psi=0 \text{ (уравнение Клейна — Гордона).}$$

---

*) Заметим, что инвариантная билинейная форма для представления с компонентами $\tau_0\sim(0, 1)$ и $\tau_1\sim(0, 2)$ $\left(\tau_1=\overset{*}{\tau}_1, \tau_2=\overset{*}{\tau}_2\right)$ может быть выбрана двумя различными способами:

1. $a^{\tau_0\tau_0}=a^{\tau_1\tau_1}=1,$

2. $a^{\tau_0\tau_0}=-a^{\tau_1\tau_1}=1.$

Нами выбран второй вариант. Как мы увидим в § 11, первый вариант не приводит ни к положительно определенной энергии, ни к положительно определенному заряду, а потому лишен физического интереса.

Представления $\tau_0 \sim (0,1)$ и $\tau_1 \sim (0,2)$ могут быть дополнены двумя неэквивалентными способами до представления полной группы (причем так, что система уравнений (8) останется по-прежнему инвариантной). При одном способе скаляр ψ не меняет знака при отражении (собственно скаляр); в этом случае говорят, что уравнение описывает так называемые *скалярные частицы*; другой способ ведет к изменению у ψ знака при отражении; это — так называемый случай *псевдоскалярных частиц*. При этом величина $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ является соответственно вектором (первый случай) или псевдовектором (второй случай).

Оператор S в базисе $\{\xi^{\tau}_{lm}\}$ имеет вид

$$S\xi^{\tau_0}_{00} = \xi^{\tau_0}_{00}, \qquad S\xi^{\tau_1}_{00} = \xi^{\tau_1}_{00}, \qquad S\xi^{\tau_1}_{1m} = -\xi^{\tau_1}_{1m}$$

(для скалярных частиц) или

$$S\xi^{\tau_0}_{00} = -\xi^{\tau_0}_{00}, \qquad S\xi^{\tau_1}_{00} = -\xi^{\tau_1}_{00}, \qquad S\xi^{\tau_1}_{1m} = \xi^{\tau_1}_{1m}$$

(для псевдоскалярных частиц).

При всяком другом способе введения оператора S в представление с компонентами τ_0 и τ_1 (например, если положить ψ скаляром, а $(\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$ — псевдовектором) уравнение (8) не останется инвариантным.

3. Уравнение Даффина для векторных частиц. Так называется следующая система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i} &= \psi_{ik}, \\ \sum_i \frac{\partial \psi_{ik}}{\partial x_i} + \varkappa^2 \varphi_k &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Здесь видно, что величина Ψ состоит из вектора $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ и антисимметрического тензора ψ_{ik}, т. е. преобразуется по представлению τ, состоящему из трех компонент τ_1, τ_2, $\dot\tau_2$, определяемых соответственно парами: $(0, 2)$, $(1, 2)$, $(-1, 2)$. Эти компоненты зацепляются, и схема зацепления между ними следующая:

$$\dot\tau_2 \longleftrightarrow \tau_1 \longleftrightarrow \tau_2. \tag{9'}$$

Наиболее общий вид матрицы L_0 в уравнении со схемой зацепления (9′) в базисе

$$\left\{ \xi^{\dot\tau_2}_{11},\ \xi^{\dot\tau_2}_{10},\ \xi^{\dot\tau_2}_{1,-1},\ \xi^{\tau_1}_{00},\ \xi^{\tau_1}_{11},\ \xi^{\tau_1}_{10},\ \xi^{\tau_1}_{1,-1},\ \xi^{\tau_2}_{11},\ \xi^{\tau_2}_{10},\ \xi^{\tau_2}_{1,-1} \right\}$$

следующий:

$$L_0 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\dot{\tau}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\dot{\tau}_2\tau_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\dot{\tau}_2\tau_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^{\tau_1\dot{\tau}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_1\tau_2} & 0 & 0 \\ 0 & c^{\tau_1\dot{\tau}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_1\tau_2} & 0 \\ 0 & 0 & c^{\tau_1\dot{\tau}_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_1\tau_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_2\tau_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_2\tau_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^{\tau_2\tau_1} & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \quad (10)$$

Представление $g \to T_g$ с компонентами τ_1, τ_2, $\dot{\tau}_2$ можно дополнить до представления полной группы Лоренца.

Требование инвариантности относительной этой группы приводит к равенству

$$c^{\tau_1\dot{\tau}_2} = c^{\tau_1\tau_2} = c_1 \quad \text{и} \quad c^{\dot{\tau}_2\tau_1} = c^{\tau_2\tau_1} = c_2$$

(см. § 7, (30) и (31)).

Если теперь в качестве инвариантной билинейной формы выбрать форму

$$(\psi_1, \psi_2) = \sum x_{1m}^{\tau_2} \bar{y}_{1m}^{\dot{\tau}_2} + \sum x_{1m}^{\tau_1} \bar{y}_{1m}^{\tau_1} - x_{00}^{\tau_1} \bar{y}_{00}^{\tau_1}\ ^{*)}, \quad (11)$$

то для того, чтобы существовала функция Лагранжа, приводящая к уравнению с матрицей вида (10), нужно положить:

$$c^{\dot{\tau}_2\tau_1} = \overline{c^{\tau_1\dot{\tau}_2}},$$

или

$$c_1 = \bar{c}_2;$$

при $c_1 = i$ мы приходим к системе, равносильной системе (9).

Снова заметим, что представление с компонентами τ_1, τ_2, $\dot{\tau}$ можно двумя неэквивалентными способами дополнить до представления полной группы Лоренца:

---

*) Инвариантная форма, как и в предыдущем примере, может быть выбрана двумя способами, отличающимися знаком у $a^{\tau_1\tau_2}$. Однако второй способ не приводит ни к положительно определенной энергии, ни к положительно определенному заряду (см. § 11).

1. У вектора $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ при отражении составляющие $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ меняют знак, а знак φ_0 сохраняется (собственно вектор).

2. Отражение не изменяет составляющих $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ и меняет знак у φ_0 (псевдовектор).

4. Уравнение для двухкомпонентного нейтрино. Здесь мы рассмотрим пример релятивистски-инвариантного уравнения с $\varkappa = 0$. Напомним, что такое уравнение может существовать, если наряду с представлением $g \to T_g$, по которому преобразуется волновая функция ψ, в том же пространстве действует представление $g \to V_g$, с помощью которого преобразуются сами уравнения. При этом элементы матриц L_0, L_1, L_2, L_3, записанных в канонических базисах представлений $g \to V_g$ $\{\sigma_{lm}^{\tau}\}$ и $g \to T_g$ $\{\xi_{lm}^{\tau}\}$ *) — числа $c_{lm,\,l'm'}^{\tau\tau'}$ имеют тот же вид, что и для уравнений с $\varkappa \neq 0$, т. е. задаются формулами (13)—(19) § 7. Числа $c^{\tau\tau'}$ по-прежнему отличны от нуля лишь для зацепляющихся компонент τ и τ' представлений $g \to V_g$ и $g \to T_g$ соответственно.

Рассмотрим двухкомпонентную функцию ψ, преобразующуюся по двумерному представлению τ, определяемому парой $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (непунктирное спинорное представление ранга 1). В этом же двумерном пространстве можно определить также и другое неприводимое представление $\dot{\tau}$, определяемое парой $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (это — пунктирное спинорное представление ранга 1). Представления τ и $\dot{\tau}$ зацепляются. Таким образом, мы можем построить релятивистски-инвариантное уравнение с $\varkappa = 0$ относительно величины ψ, преобразующейся по представлению $\tau \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (при этом само уравнение должно изменяться по представлению $\dot{\tau} \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$.

---

*) Напомним, что элементы матриц L_k определялись следующим образом. Пусть

$$\xi = L_k \psi,$$

где ψ — вектор из пространства R, а ξ — его образ при действии оператором L_k. Это равенство можно переписать так:

$$x_{lm}^{\tau} = \sum c_{lml'm'}^{\tau\tau'\,(k)} y_{l'm'}^{\tau'},$$

где x_{lm}^{τ} — координата вектора ξ в каноническом базисе представления $g \to V_g$, а $y_{l'm'}^{\tau'}$ — координата ψ в каноническом базисе представления $g \to T_g$. Числа $c_{lml'm'}^{\tau\tau'\,(k)}$ и служат элементами матриц L_k.

В канонических базисах представлений τ и $\dot{\tau}$ $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ и $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ числа $c_{mm'}^{\tau\dot{\tau}(k)}$ образуют матрицы

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \begin{Vmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{Vmatrix} = c\sigma_0 = cE, \\
L_1 &= c\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = c\sigma_1, \\
L_2 &= c\begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix} = c\sigma_2, \\
L_3 &= c\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = c\sigma_3.
\end{aligned} \tag{12}
$$

Матрицы σ_1, σ_2, σ_3 называются матрицами Паули.

Заметим, что если выбрать в двумерном пространстве эрмитову форму

$$(\psi_1, \psi_2) = x^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}} \overline{y^{\tau}_{\frac{1}{2}}} + x^{\dot{\tau}}_{-\frac{1}{2}} \overline{y^{\tau}_{-\frac{1}{2}}}, \tag{13}$$

где $x^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2}}$, $x^{\dot{\tau}}_{-\frac{1}{2}}$ — координаты ψ_1 в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$, а $y^{\tau}_{\frac{1}{2}}$, $y^{\tau}_{-\frac{1}{2}}$ — координаты ψ_2 в базисе $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$, то

$$(V_g \psi_1, \psi_2) = (\psi_1, T_g\psi_2),$$

где V_g — оператор представления $\dot{\tau}$, а T_g — оператор представления τ. Как мы знаем из предыдущего параграфа, если выполнено это условие, то уравнение (12) с матрицами L_k может быть получено из инвариантной функции Лагранжа, построенной с помощью формы (ψ_1, ψ_2) и матриц L_k. При этом необходимо только, чтобы

$$(L_0\psi, \psi) = (\psi, L_0\psi),$$

или

$$c = \bar{c},$$

т. е. c — действительное число.

Таким образом, уравнение с матрицами L_k вида (12) при вещественном c может быть получено из инвариантной функции Лагранжа. Последняя имеет вид

$$\mathscr{L}[\psi(x)] = c\,\mathrm{Im}\left\{\sum_k \left(\sigma_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k}, \psi\right)\right\}, \quad c \text{ вещественно.} \tag{14}$$

Если положить $c=1$, то получим $L_k = \sigma_k$ $(k=0, 1, 2, 3)$. Уравнение с матрицами σ_k называется уравнением «двухкомпонентного нейтрино» *). Оно имеет вид

$$\sigma_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} + \sigma_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = 0. \tag{15}$$

Представление собственной группы $\tau \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\text{равно как } \dot{\tau} \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$ нельзя дополнить до представления полной группы Лоренца. Поэтому не имеет смысла говорить об инвариантности уравнения (15) с матрицами (12) относительно полной группы Лоренца **).

Выясним теперь, какие величины могут быть квадратично составлены из волновой функции двухкомпонентного нейтрино, преобразующейся по представлению $\tau \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, т. е. по непунктирному спинорному представлению ранга 1.

Напомним с этой целью, что если сама волновая функция ψ преобразуется по представлению $g \to T_g$, то, как мы видели в § 8, величины, квадратично зависящие от ψ, преобразуются по представлению, входящему в произведение представления $g \to T_g$ и комплексно-сопряженного представления $g \to T_g^*$. В нашем случае $g \to T_g$ есть непунктирное спинорное представление ранга 1, оно

*) Кроме этого, рассматривают также уравнение для «четырехкомпонентного нейтрино»: это — обычное уравнение Дирака с $\varkappa = 0$.

**) В этом заключалась причина, по которой до недавнего времени отвергалась возможность описания нейтрино двухкомпонентной функцией, подчиняющейся уравнению (15). Считалось, что все процессы, происходящие с элементарными частицами, должны одинаково описываться как в левой, так и в правой системе координат (физики называют этот принцип законом сохранения четности); последнее означает, в частности, что у всех элементарных частиц компоненты волновой функции ψ при пространственном отражении (т. е. при переходе от правой системы координат к левой) должны подвергаться также некоторому линейному преобразованию S (другими словами, волновая функция ψ должна преобразовываться по представлению полной группы Лоренца), а описывающее эту частицу уравнение должно быть инвариантным относительно отражения (или, что то же самое, относительно полной группы Лоренца). Однако ряд экспериментов последнего времени привел Л. Д. Ландау (СССР) и Ли и Янга (США) к гипотезе о том, что в некоторых случаях инвариантность процессов относительно отражений может не иметь места (четность не сохраняется). В частности, было допущено, что такая инвариантность нарушается в тех процессах, где участвует нейтрино. Поскольку, таким образом, от самого нейтрино (точнее, от его волновой функции) уже не требовалось никакой инвариантности по отношению к пространственному отражению, появилась возможность описывать его двухкомпонентной функцией ψ, удовлетворяющей уравнению (15).

определяется числами $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Представление $g \to T_g^*$ задается, таким образом, числами $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (см. § 8, п. 8). Оно является пунктирным спинорным представлением ранга 1. Напомним, что произведение пунктирного и непунктирного спинорных представлений ранга 1 неприводимо и задается парой (0, 2). Величина, преобразующаяся по такому представлению, называется вектором.

Итак, единственной величиной, которая может быть составлена из квадратичных комбинаций волновой функции двухкомпонентного нейтрино, является вектор.

Заметим, что компоненты этого вектора могут быть записаны в следующей изящной форме:

$$t_k = (\sigma_k\psi, \psi),$$

где σ_k — при $k > 0$ — матрицы Паули, $\sigma_0 = E$ и (ψ_1, ψ_2) — введенная выше эрмитова форма (13).

Тот факт, что t_k при преобразованиях Лоренца преобразуется как вектор, проверяется в точности так же, как мы это делали в общем виде в п. 7 § 8 для уравнений с $\varkappa \neq 0$.

Заметим, наконец, что релятивистски-инвариантного уравнения с $\varkappa \neq 0$ относительно двухкомпонентной функции ψ построить нельзя, поскольку в двумерном пространстве нельзя задать представления собственной группы с зацепляющимися компонентами. В случае же $\varkappa = 0$, кроме уже написанного, существует еще одно уравнение относительно двухкомпонентной функции: функция $\psi(x)$ преобразуется по представлению $\dot{\tau} \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, а уравнение — по представлению $\tau \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Это уравнение имеет вид

$$\sigma_1 \frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial\psi}{\partial x_3} - \sigma_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0} = 0, \tag{16}$$

т. е. матрицы L_1, L_2, L_3 этого уравнения совпадают с соответствующими матрицами уравнения (15), а матрицы L_0 в уравнениях (15) и (16) отличаются знаком *). Инвариантная форма (ψ_1, ψ_2) для уравнения (16) в базисе $\left\{\eta_{\frac{1}{2}}, \eta_{-\frac{1}{2}}\right\}$ (для представления $\dot{\tau}$) и $\left\{\xi_{\frac{1}{2}}, \xi_{-\frac{1}{2}}\right\}$ (для представления τ) имеет прежний вид (13).

*) Кроме уравнений (15) и (16) для двухкомпонентной волновой функции возможны лишь релятивистски-инвариантные уравнения с прямоугольными (неквадратными) матрицами L_0, L_1, L_2, L_3 (см. § 7).

5. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля в пустоте. Так называют две системы уравнений с $\varkappa=0$ относительно антисимметрического тензора F_{ik}:

$$\text{I.}\qquad \frac{\partial F_{ik}}{\partial x_l}+\frac{\partial F_{kl}}{\partial x_i}+\frac{\partial F_{li}}{\partial x_k}=0,$$

индексы i, k, l различны; всего получаем четыре уравнения.

$$\text{II.}\qquad \sum_{k=0}^{k=3}\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k}=0.$$

Эта система также содержит четыре уравнения. Обе системы при преобразованиях Лоренца преобразуются независимо.

Антисимметрический тензор F_{ik} преобразуется по представлению $g\to T_g$, состоящему из двух компонент $\tau\sim(1, 2)$ и $\dot\tau\sim(-1, 2)$. Представления $g\to V_g^{(1)}$ и $g\to V_g^{(2)}$, по которым преобразуются обе системы, являются векторными представлениями $\tau_0\sim(0, 2)$. Схема зацепления для обеих систем одна и та же

$$\tau\longleftrightarrow\tau_0\longleftrightarrow\dot\tau. \tag{17}$$

Пусть $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot\tau}_{lm}\}$ — канонический базис представления $g\to T_g$, а $\{\sigma^{\tau_0}_{lm}\}$ — канонический базис представления $g\to V_g$. Выпишем матрицу L_0 в базисах $\{\sigma^{\tau_0}_{lm}\}$ и $\{\xi^{\tau}_{lm}, \xi^{\dot\tau}_{lm}\}$ для уравнения со схемой зацепления (17).

$$L_0=\begin{array}{c} \\ \sigma^{\tau_0}_{00} \\ \sigma^{\tau_0}_{1,-1} \\ \sigma^{\tau_0}_{10} \\ \sigma^{\tau_0}_{11}\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}\xi^{\tau}_{1,-1} & \xi^{\tau}_{10} & \xi^{\tau}_{11} & \xi^{\dot\tau}_{1,-1} & \xi^{\dot\tau}_{10} & \xi^{\dot\tau}_{11}\end{array}\\ \left\|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ c^{\tau_0\tau} & 0 & 0 & c^{\tau_0\dot\tau} & 0 & 0\\ 0 & c^{\tau_0\tau} & 0 & 0 & c^{\tau_0\dot\tau} & 0\\ 0 & 0 & c^{\tau_0\tau} & 0 & 0 & c^{\tau_0\dot\tau}\end{array}\right\|\end{array}.$$

Потребуем теперь, чтобы уравнение с такой матрицей было инвариантно относительно представления полной группы. Здесь могут представиться две возможности:

1. Представление $g\to V_g$ является псевдовекторным представлением; в таком случае

$$c^{\tau_0\tau}=c^{\tau_0\dot\tau}=c.$$

2. Представление $g\to V_g$ — векторное; при этом

$$c^{\tau_0\tau}=-c^{\tau_0\dot\tau}=c.$$

Если потребовать, чтобы наше уравнение получалось из инвариантной функции Лагранжа, то мы получим, что c действительно; всегда можно положить $c=1$. Таким образом, случаи 1 и 2 приводят к двум возможным матрицам L_0 со схемой зацепления (17):

1. $$L_0=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

2. $$L_0=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&-1 \end{Vmatrix}. \tag{18'}$$

Нетрудно проверить, что первый случай приводит к системе, равносильной системе I, а второй случай — к системе, равносильной II. Если рассматривать обе системы вместе, то матрица L_0 имеет вид

$$L_0=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&-1&0&0\\ 0&1&0&0&-1&0\\ 0&0&1&0&0&-1 \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

Матрица L_3 (она понадобится нам в дальнейшем) при этом выглядит так (см. § 7, (18) и (19)):

$$L_3=\begin{Vmatrix} 0&-i&0&0&-i&0\\ -1&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&-1\\ 0&-i&0&0&i&0\\ -1&0&0&-1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&1 \end{Vmatrix}. \tag{19'}$$

Приведенными примерами, по-видимому, исчерпываются все практически применяемые в настоящее время релятивистски-инвариантные уравнения. Ниже, в § 11, будут показаны некоторые исключительные свойства этих уравнений. Заметим здесь только,—и это будет важно для дальнейшего,— что во всех рассмотренных примерах матрица L_0 была приводима к диагональному виду.

Сейчас мы приведем еще один пример инвариантного уравнения, у которого матрица L_0 уже неприводима к диагональному виду. Это уравнение представляет некоторый теоретический интерес, ясный из дальнейшего (см. § 11).

6. Уравнение Паули — Фирца. Пусть величина ψ преобразуется по представлению с компонентами τ_1, $\dot{\tau}_1$, τ_2, $\dot{\tau}_2$, определяемыми парами:

$$\begin{aligned} &\tau_1 \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \qquad \dot{\tau}_1 \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \\ &\tau_2 \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \qquad \dot{\tau}_2 \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Эти компоненты зацепляются, очевидно, по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccc} \tau_1 & \longleftrightarrow & \dot{\tau}_1 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \tau_2 & \longleftrightarrow & \dot{\tau}_2 \end{array} \tag{21}$$

(Для уравнения с таким зацеплением матрица L_0 изображена на стр. 319).

Заметим, что элементы матрицы L_0 с одинаковыми индексами l и соответствующими одной и той же паре компонент τ и τ' одинаковы. Поэтому ради простоты матрицу L_0 можно переписать в виде двух ящиков, соответствующих двум значениям l:

$$l = \frac{1}{2} \qquad\qquad\qquad l = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{cccc} \tau_1 & \dot{\tau}_1 & \tau_2 & \dot{\tau}_2 \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccc} 0 & c^{\tau_1 \dot{\tau}_1} & c^{\tau_1 \tau_2} & 0 \\ c^{\dot{\tau}_1 \tau_1} & 0 & 0 & c^{\dot{\tau}_1 \dot{\tau}_2} \\ c^{\tau_2 \tau_1} & 0 & 0 & c^{\tau_2 \dot{\tau}_2} \\ 0 & c^{\dot{\tau}_2 \dot{\tau}_1} & c^{\dot{\tau}_2 \tau_2} & 0 \end{array} \right\|; \qquad \begin{array}{cc} \tau_2 & \dot{\tau}_2 \end{array} \left\| \begin{array}{cc} 0 & 2c^{\tau_2 \dot{\tau}_2} \\ 2c^{\dot{\tau}_2 \tau_2} & 0 \end{array} \right\|. \tag{22}$$

Из требования инвариантности относительно отражения получаем:

$$c^{\tau_1 \dot{\tau}_1} = c^{\dot{\tau}_1 \tau_1}; \qquad c^{\dot{\tau}_2 \tau_2} = c^{\tau_2 \dot{\tau}_2}; \qquad c^{\tau_1 \tau_2} = c^{\dot{\tau}_1 \dot{\tau}_2}; \qquad c^{\tau_2 \tau_1} = c^{\dot{\tau}_2 \dot{\tau}_1}.$$

Билинейную эрмитову форму, инвариантную относительно нашего представления (20), можно задать двумя существенно различными

$\xi^{\tau_1}_{1\,\frac12\,\frac12}$	$\xi^{\tau_1}_{1\,\frac12,\,-\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_1}_{1\,\frac12\,\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_1}_{1\,\frac12,\,-\frac12}$	$\xi^{\tau_2}_{1\,\frac12\,\frac12}$	$\xi^{\tau_2}_{1\,\frac12,\,-\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{1\,\frac12\,\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{1\,\frac12,\,-\frac12}$	$\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32\,\frac32}$	$\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32\,\frac12}$	$\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32,\,-\frac12}$	$\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32,\,-\frac32}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32\,\frac32}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32\,\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32,\,-\frac12}$	$\dot\xi^{\tau_2}_{3\,\frac32,\,-\frac32}$
0	0	$c^{\tau_1\dot\tau_1}$	0	$c^{\tau_1\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$c^{\tau_1\dot\tau_1}$	0	$c^{\tau_1\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$c^{\dot\tau_1\tau_1}$	0	0	0	0	0	$c^{\dot\tau_1\dot\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$c^{\dot\tau_1\tau_1}$	0	0	0	0	0	$c^{\dot\tau_1\dot\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$c^{\tau_2\tau_1}$	0	0	0	0	0	$c^{\tau_2\dot\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$c^{\tau_2\tau_1}$	0	0	0	0	0	$c^{\tau_2\dot\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$c^{\dot\tau_2\dot\tau_1}$	0	$c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$c^{\dot\tau_2\dot\tau_1}$	0	$c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2c^{\tau_2\dot\tau_2}$	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2c^{\tau_2\tau_2}$	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2c^{\tau_2\dot\tau_2}$	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$2c^{\tau_2\dot\tau_2}$
$2c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	$2c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	$2c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	$2c^{\dot\tau_2\tau_2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

способами:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{а)}\quad (\psi_1, \psi_2) = \sum_{m=\frac12,\,-\frac12}\left(x^{\tau_1}_{\frac12 m}\overline{y}^{\dot\tau_1}_{\frac12 m} + x^{\dot\tau_1}_{\frac12 m}\overline{y}^{\tau_1}_{\frac12 m}\right) + \\
&\quad + \sum_{m=\frac12,\,-\frac12}\left(x^{\tau_2}_{\frac12 m}\overline{y}^{\dot\tau_2}_{\frac12 m} + x^{\dot\tau_2}_{\frac12 m}\overline{y}^{\tau_2}_{\frac12 m}\right) - \\
&\qquad - \sum_{m=\frac32,\,\frac12,\,-\frac12,\,-\frac32}\left(x^{\tau_2}_{\frac32 m}\overline{y}^{\dot\tau_2}_{\frac32 m} + x^{\dot\tau_2}_{\frac32 m}\overline{y}^{\tau_2}_{\frac32 m}\right), \\
&\qquad\qquad a^{\tau_1\dot\tau_1} = a^{\tau_2\dot\tau_2} = 1 \\
&\text{и} \\
&\text{б)}\quad (\psi_1, \psi_2) = \sum_{m=\frac12,\,-\frac12}\left(x^{\tau_1}_{\frac12 m}\overline{y}^{\dot\tau_1}_{\frac12 m} + x^{\dot\tau_1}_{\frac12 m}\overline{y}^{\tau_1}_{\frac12 m}\right) - \\
&\qquad - \sum_{\substack{l=\frac12,\,\frac32\\ -l\leqslant m\leqslant l}}(-1)^{[l]}\left(x^{\tau_2}_{lm}\overline{y}^{\dot\tau_2}_{lm} + x^{\dot\tau_2}_{lm}\overline{y}^{\tau_2}_{lm}\right), \\
&\qquad\qquad a^{\tau_1\dot\tau_1} = -a^{\tau_2\dot\tau_2} = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Этим двум способам соответствуют следующие условия, необходимые для того, чтобы уравнение с матрицей L_0 можно было получить из инвариантной функции Лагранжа:

а) $c^{\tau_1\dot\tau_1} = c^{\dot\tau_1\tau_1}$; $\quad c^{\tau_1\tau_2} = \overline{c}^{\dot\tau_2\dot\tau_1}$; $\quad c^{\dot\tau_1\dot\tau_2} = \overline{c}^{\tau_2\tau_1}$; $\quad c^{\tau_2\dot\tau_2} = \overline{c}^{\dot\tau_2\tau_2}$

и

б) $c^{\tau\dot\tau_1} = c^{\dot\tau_1\tau_1}$; $\quad c^{\tau_1\tau_2} = -\overline{c}^{\dot\tau_2\dot\tau_1}$; $\quad c^{\dot\tau_1\dot\tau_2} = -\overline{c}^{\tau_2\tau_1}$; $\quad c^{\tau_2\dot\tau_2} = \overline{c}^{\dot\tau_2\tau_2}$.

Итак, в случае инвариантного уравнения со схемой зацепления (21) и получающегося из инвариантной функции Лагранжа матрица L_0 должна иметь одну из следующих форм:

а)

$$\begin{array}{cc}
l = 3/2 & l = 1/2 \\
\left\|\begin{matrix}
0 & c^{\tau_1\tau_1} & c^{\tau_1\tau_2} & 0 \\
c^{\tau_1\dot\tau_1} & 0 & 0 & c^{\tau_1\tau_2} \\
\overline{c}^{\tau_1\tau_2} & 0 & 0 & c^{\tau_2\dot\tau_2} \\
0 & \overline{c}^{\tau_1\tau_2} & c^{\tau_2\dot\tau_2} & 0
\end{matrix}\right\|, &
\left\|\begin{matrix}
0 & 2c^{\tau_2\dot\tau_2} \\
2c^{\tau_2\dot\tau_2} & 0
\end{matrix}\right\|,
\end{array}$$

б)

$$\begin{array}{cc}
l = 3/2 & l = 1/2 \\
\left\|\begin{matrix}
0 & c^{\tau_1\dot\tau_1} & c^{\tau_1\tau_2} & 0 \\
c^{\tau_1\dot\tau_1} & 0 & 0 & c^{\tau_1\tau_2} \\
-\overline{c}^{\tau_1\tau_2} & 0 & 0 & c^{\tau_2\dot\tau_2} \\
0 & -\overline{c}^{\tau_1\tau_2} & c^{\tau_2\dot\tau_2} & 0
\end{matrix}\right\|, &
\left\|\begin{matrix}
0 & 2c^{\tau_2\dot\tau_2} \\
2c^{\tau_2\dot\tau_2} & 0
\end{matrix}\right\|.
\end{array}$$

где $c^{\tau_1\dot{\tau}_1}$, $c^{\tau_2\dot{\tau}_2}$ — произвольные вещественные числа, а $c^{\tau_1\tau_2}$ — комплексное число. Мы можем, далее, еще упростить это выражение, перейдя к новой системе координат. Допустимое преобразование координат (т. е. сохраняющее вид всех инфинитезимальных операторов $H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3$, вид преобразования S, отвечающего отражению, и вид инвариантной билинейной формы) в нашем случае задается формулами

$$\begin{aligned} \xi'^{\tau_1}_{lm} &= e^{i\theta_1}\xi^{\tau_1}_{lm}, & \xi'^{\dot{\tau}_1}_{lm} &= e^{i\theta_1}\xi^{\dot{\tau}_1}_{lm}, \\ \xi'^{\tau_2}_{lm} &= e^{i\theta_2}\xi^{\tau_2}_{lm}, & \xi'^{\dot{\tau}_2}_{lm} &= e^{i\theta_2}\xi^{\dot{\tau}_2}_{lm}. \end{aligned} \tag{24}$$

При таком преобразовании элементы $c^{\tau_1\dot{\tau}_1}$ и $c^{\tau_2\dot{\tau}_2}$ матрицы L_0, очевидно, не изменятся, а $c^{\tau_1\tau_2}$ перейдет в

$$c'^{\tau_1\tau_2} = c^{\tau_1\tau_2}e^{i(\theta_1-\theta_2)}. \tag{25}$$

Таким образом, существенными параметрами исследуемого уравнения (матрицы L_0) в этом случае будут три вещественных числа: $c^{\tau_1\dot{\tau}_1}$ $c^{\tau_2\dot{\tau}_2}$ и $|c^{\tau_1\tau_2}|$.

Выбрав соответствующим образом θ_1 и θ_2 в равенствах (24), (25) и разделив все уравнение на $2c^{\tau_1\dot{\tau}_2}$ (что сводится к изменению константы $\varkappa$), мы можем привести нашу матрицу L_0 к одному из следующих видов:

а)

$$\begin{array}{cc} l=\frac{1}{2} & l=\frac{3}{2} \\ \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \beta & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \end{array} \tag{26}$$

б)

$$\begin{array}{cc} l=\frac{1}{2} & l=\frac{3}{2} \\ \begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\beta & \frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}, & \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}. \end{array} \tag{27}$$

где α — вещественное число, β — вещественное положительное число.

Таким образом, мы получили общий вид матрицы L_0 для релятивистски-инвариантных уравнений со схемой зацепления (21), получаемых из инвариантной функции Лагранжа.

В дальнейшем, в § 11, мы покажем, что одно из этих уравнений (получающееся из случая б) определенным выбором параметров α и β) имеет особые преимущества перед остальными. Матрица L_0 для этого уравнения выглядит так:

$$\overset{l=\frac{1}{2}}{\left\|\begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\|}, \qquad \overset{l=\frac{3}{2}}{\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|}. \tag{28}$$

Релятивистски-инвариантное уравнение с такой матрицей L_0 называется *уравнением Паули — Фирца.*

7. Примеры бесконечномерных инвариантных уравнений. I. Простейшим бесконечномерным уравнением (с $\varkappa \neq 0$), удовлетворяющим всем условиям §§ 7 и 8, будет уравнение относительно волновой функции, преобразующейся по неприводимому представлению собственной (и полной) группы Лоренца, определяемому парой чисел $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ или $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (согласно результатам § 7 это — единственные случаи уравнений с $\varkappa \neq 0$, когда представление собственной группы, по которому преобразуются компоненты волновой функции, может быть неприводимым.) Веса, участвующие в первом представлении $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, принимают значения $l = 0, 1, 2, \ldots$; для представления

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$$

Матрица же L_0 в обоих случаях будет диагональна, причем элементы ее имеют вид

$$c_{lml'm'} = \left(l + \frac{1}{2}\right)\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{29}$$

В связи с особой простотой выпишем здесь полностью соответствующее уравнение; в этом случае Ψ есть вектор с компонентами ψ_{lm} ($m = -l$, $-l+1, \ldots, l-1, l$), где $l = 0, 1, 2, \ldots$ для первого или соответственно

$l=\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ для второго случая, и уравнение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(l+\frac{1}{2}\right)\psi_{lm}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3}\left\{\sqrt{(l+m+1)(l-m+1)}\,\psi_{l+1,\,m}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{(l+m)(l-m)}\,\psi_{l-1,\,m}\right\}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_2}+i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\times$$
$$\times\left\{\sqrt{(l+m+1)(l+m+2)}\,\psi_{l+1,\,m+1}-\sqrt{(l-m-1)(l-m)}\,\psi_{l-1,\,m+1}\right\}-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\left\{\sqrt{(l-m+1)(l-m+2)}\,\psi_{l+1,\,m-1}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{(l+m-1)(l+m)}\,\psi_{l-1,\,m-1}\right\}+i\varkappa\psi_{lm}=0. \tag{30}$$

II. В качестве следующего примера рассмотрим еще уравнения с $\varkappa \neq 0$, для которых представление T_g, по которому преобразуются компоненты функции ψ, распадается на два неприводимых представления τ и $\dot{\tau}$ собственной группы Лоренца. Ясно, что такие уравнения, удовлетворяющие всем условиям §§ 7 и 8, могут существовать только в том случае, если эти неприводимые представления τ и $\dot{\tau}$ определяются парами $\tau\sim\left(\frac{1}{2}, l_1\right)$ и $\dot{\tau}\sim\left(-\frac{1}{2}, l_1\right)$, где l_1 — или чисто мнимое или вещественное (в последнем случае при l_1 целом или полуцелом возможны, конечно, также и пары представлений $\left(l_1, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(l_1, -\frac{1}{2}\right)$). Действительно, только в этом случае компоненты τ и $\dot{\tau}$ зацепляются и представление, состоящее из этих компонент, допускает инвариантную форму:

$$\tau=\tau^* \quad \text{и} \quad \dot{\tau}=\dot{\tau}^*$$

(при l_1 вещественном) или

$$\dot{\tau}=\tau^* \quad \text{и} \quad \tau=\dot{\tau}^*$$

(при l_1 чисто мнимом).

В случае l_1 чисто мнимого мы можем здесь еще двумя способами определить инвариантную билинейную форму (ψ_1, ψ_2); условимся выбирать ее так, чтобы она была положительно определенной. В таком случае элементы матрицы L_0 для всех наших уравнений можно привести к виду

$$c^{\tau\dot{\tau}'}_{lml'm'}=c^{\dot{\tau}'\tau}_{l'm'lm}=\left(l+\frac{1}{2}\right)\delta_{ll'}\delta_{mm'}. \tag{31}$$

Заметим еще, что в случае целого или полуцелого l_1 матрица L_0 в бесконечномерном уравнении с зацепляющимися компонентами $\tau\longleftrightarrow\dot{\tau}$, $\tau\sim\left(l_1, \frac{1}{2}\right)$ и $\dot{\tau}\left(l_1, -\frac{1}{2}\right)$ имеет тот же вид (31).

Заметим также, что бесконечномерное уравнение с зацеплением $\left(\frac{1}{2}, l_1\right)\longleftrightarrow\left(-\frac{1}{2}, l_1\right)$ и матрицей (31) в случае полуцелого l_1 распадается на два уравнения: конечномерное с волновой функцией, преобразующейся по представлению с компонентами $\left(\frac{1}{2}, l_1\right)\longleftrightarrow\left(-\frac{1}{2}, l_1\right)$, и бесконечномерный «хвост» — уравнение со схемой зацепления $\left(l, \frac{1}{2}\right) \longleftrightarrow \left(l_1, -\frac{1}{2}\right)$ $\Big($напомним, что представления с парами $\left(l_1, \frac{1}{2}\right)$ и $\left(l_1, -\frac{1}{2}\right)$ называются «хвостами» конечномерных представлений $\left(\frac{1}{2}, l_1\right)$ и $\left(-\frac{1}{2}, l_1\right)$ (см. § 2)$\Big)$.

§ 10. Определение значения массы покоя и спина частицы

В этом параграфе мы рассмотрим две физические величины, а именно: массу покоя и спин частицы, и покажем, каким образом эти величины связаны с матрицей L_0 релятивистски-инвариантного уравнения, описывающего частицы.

1. Плоские волны. Вектор энергии — импульса. Пусть волновая функция некоторой частицы удовлетворяет релятивистски-инвариантному уравнению

$$\sum L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi = 0. \tag{1}$$

Будем искать решения этого уравнения в виде

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p_0, p_1, p_2, p_3)\, e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)} \tag{2}$$

(такое решение называется плоской волной). Величина $\psi(p_0, p_1, p_2, p_3) = \psi(p)$ не зависит от координат x_0, x_1, x_2, x_3, а числа p_0, p_1, p_2, p_3 мы будем предполагать действительными.

Заметим, что четверка чисел (p_0, p_1, p_2, p_3) и величина $\psi(p)$, задающие плоскую волну (2), меняются при переходе от одной ортогональной системы координат в четырехмерном пространстве $R^{(4)}$ к другой ортогональной системе координат. Действительно, координаты одной и той же точки (x_0, x_1, x_2, x_3) и (x_0', x_1', x_2', x_3') в двух системах координат связаны соотношениями

$$x_i' = \sum g_{ik} x_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

где $\|g_{ik}\| = g$ — матрица преобразования Лоренца, задающего переход от одной ортогональной системы координат к другой. Значения же волновой функции ψ в каждой точке при переходе от координат (x_0, x_1, x_2, x_3) к координатам (x_0', x_1', x_2', x_3') преобразуются по формуле

$$\psi(x_0', x_1', x_2', x_3') = T_g\psi(x_0, x_1, x_2, x_3).$$

Применительно к плоской волне (2) получаем:

$$\psi(x_0', x_1', x_2', x_3') = T_g\psi(p)\, e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)}. \tag{2'}$$

С другой стороны, можно написать:

$$\psi(x_0', x_1', x_2', x_3') = \psi(p')\, e^{i\left(-p_0'x_0'+p_1'x_1'+p_2'x_2'+p_3'x_3'\right)},$$

где величина $\psi(p') = T_g\psi(p)$, а четверка чисел (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3) связана с числами (p_0, p_1, p_2, p_3) формулой

$$p'_i = \sum g_{ik} p_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3). \tag{3}$$

Выражение (2′) является по-прежнему плоской волной, но записанной в новой системе координат (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3). Таким образом, если в одной системе координат плоская волна задавалась величиной $\psi(p)$ и четверкой чисел (p_0, p_1, p_2, p_3), то в другой системе координат та же плоская волна задается величиной $\psi(p') = T_g\psi(p)$ и четверкой чисел (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3), связанной с числами (p_0, p_1, p_2, p_3) формулой (3), где $g = \| g_{ik} \|$ — преобразование Лоренца, задающее переход от первой системы координат ко второй.

Мы видим, что при преобразовании системы координат в пространстве $R^{(4)}$ четверка чисел (p_0, p_1, p_2, p_3) преобразуется по тем же формулам, что и координаты вектора (x_0, x_1, x_2, x_3) из пространства $R^{(4)}$.

Рассмотрим теперь некоторое другое четырехмерное пространство $\tilde{R}^{(4)}$ и фиксированную систему координат в этом пространстве. Отнесем каждой четверке чисел (p_0, p_1, p_2, p_3) вектор p из $\tilde{R}^{(4)}$ с координатами (p_0, p_1, p_2, p_3) (в выбранной нами системе координат). Вектор p *называют вектором энергии — импульса* (p_0 называют энергией, а трехмерный вектор (p_1, p_2, p_3) — импульсом). Пространство $\tilde{R}^{(4)}$ называют *импульсным пространством*. При этом исходное четырехмерное пространство $R^{(4)}$ называют *координатным пространством*.

Суммируя все сказанное, мы получаем, *что плоская волна* (2) *в каждой ортогональной системе координат пространства* $R^{(4)}$ *задается некоторым вектором энергии — импульса* $p(p_0, p_1, p_2, p_3)$ *из импульсного пространства* $\tilde{R}^{(4)}$ *и величиной* $\psi(p)$. *При переходе от одной ортогональной системы координат к другой с помощью преобразования Лоренца* g *вектор* p, *задающий плоскую волну, подвергается преобразованию* g, *а величина* $\psi(p)$ *подвергается преобразованию* T_g.

Обратно, всякое преобразование Лоренца над векторами p из импульсного пространства: $p' = gp$, можно рассматривать как переход от системы координат в координатном пространстве, в которой плоская волна задавалась вектором p, к системе координат, в которой эта же плоская волна задается вектором p'.

Вернемся теперь к уравнению (1).

Подставив плоскую волну (2) в уравнение (1), мы получим, что величина $\psi(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(-L_0 p_0 + L_1 p_1 + L_2 p_2 + L_3 p_3)\,\psi(p) + \varkappa\psi(p) = 0. \tag{4}$$

Если для краткости обозначить $-L_0p_0+L_1p_1+L_2p_2+L_3p_3$ через $L(p)$, то уравнение (4) означает, что $\psi(p)$ является собственным вектором матрицы $L(p)$ с собственным значением $-\varkappa$

$$L(p)\psi(p)=-\varkappa\psi(p). \qquad (5)$$

Покажем, что ненулевое решение $\psi(p)$ этого уравнения существует только для тех векторов $p(p_0, p_1, p_2, p_3)$ из $R^{(4)}$, для которых выполнено соотношение

$$p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=\mu_i^2,$$

где $\mu_i=\frac{\varkappa}{\lambda_i}$, а λ_i — какое-нибудь действительное, отличное от нуля собственное значение матрицы L_0.

Мы будем ради простоты предполагать, что уравнение (1) конечномерно. В таком случае уравнение (5) допускает ненулевое решение для тех и только тех векторов p, при которых определитель матрицы $L(p)+\varkappa E$ равен нулю. Определитель $\det(L(p)+\varkappa E)$ является, очевидно, многочленом от переменных p_0, p_1, p_2, p_3. Обозначим его через $D(p_0, p_1, p_2, p_3)=D(p)$. Из соотношения

$$\sum_i T_gL_iT_g^{-1}g_{ki}=L_k$$

для матриц в релятивистски-инвариантном уравнении (см. § 7, (3)) следует, что

$$T_gL(p)\,T_g^{-1}=L(gp),$$

где gp — образ вектора при преобразовании Лоренца g.

Из этого равенства мы получаем:

$$\det(L(gp)+\varkappa E)=\det(L(p)+\varkappa E)$$

или

$$D(p)=D(gp),$$

т. е. значения многочлена $D(p)$ не меняются, если аргументы подвергнуть преобразованию Лоренца. Такой многочлен $D(p)$ постоянен вдоль поверхностей транзитивности полной или собственной группы Лоренца, т. е. постоянен на гиперболоидах

$$-s^2(p)=p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=\text{const}$$

в импульсном пространстве $\widetilde{R}^{(4)}$. Отсюда следует, как нетрудно видеть, что многочлен $D(p)$ зависит на самом деле лишь от $-s^2(p)$: $D(p)=\widetilde{D}[-s^2(p)]$, где $\widetilde{D}(-s^2)$ — некоторый многочлен от одной переменной $-s^2$.

Разложим $\widetilde{D}[-s^2(p)]$ на множители:

$$\widetilde{D}[-s^2(p)]=c[-s^2(p)-\mu_1^2][-s^2(p)-\mu_2^2][-s^2(p)-\mu_3^2]\dots$$
$$\dots[-s^2(p)-\mu_k^2], \qquad (6)$$

где $\mu_1^2, \mu_2^2, \dots, \mu_k^2$ — корни многочлена $\widetilde{D}$.

Из этого разложения видно, что $\det(L(p)+\varkappa E)$ обращается в нуль только в том случае, если вектор p удовлетворяет соотношению

$$-s^2(p)=p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=\mu_i^2, \tag{7}$$

где μ_i^2 — какой-нибудь из корней многочлена $\widetilde{D}$. Поскольку числа p_0, p_1, p_2, p_3 действительны, корень μ_i^2 тоже должен быть выбран действительным.

Таким образом, для того чтобы уравнение $L(p)\psi(p)=-\varkappa\psi(p)$ имело ненулевое решение и тем самым существовала бы плоская волна с вектором энергии — импульса $p(p_0, p_1, p_2, p_3)$, последний должен удовлетворять соотношению (5) с каким-нибудь из действительных корней μ_i^2 многочлена $\widetilde{D}$.

Найдем теперь, как корни μ_i^2 связаны с собственными значениями матрицы L_0. Положим $p_1=p_2=p_3=0$. Тогда $-s^2(p)=p_0^2$ и многочлен $\widetilde{D}[-s^2(p)]=\widetilde{D}(p_0^2)$. Разложение (6) запишется при этом так:

$$D(p_0^2)=c(p_0^2-\mu_1^2)(p_0^2-\mu_2^2)\ldots(p_0^2-\mu_k^2)=$$
$$=c(p_0-\mu_1)(p_0+\mu_1)(p_0-\mu_2)(p_0+\mu_2)\ldots(p_0-\mu_k)(p_0+\mu_k). \tag{8}$$

С другой стороны, при $p_1=p_2=p_3=0$ матрица $L(p)$ равна $L(p)=-p_0L_0$ и $\det(L(p)+\varkappa E)=\det(-p_0L_0+\varkappa E)$. Последний определитель можно представить в виде

$$\det(-L_0p_0+\varkappa E)=\tilde{c}\left(p_0-\frac{\varkappa}{\lambda_1}\right)\left(p_0-\frac{\varkappa}{\lambda_2}\right)\ldots\left(p_0-\frac{\varkappa}{\lambda_s}\right), \tag{9}$$

где λ_1, λ_2, ..., λ_s — отличные от нуля собственные значения матрицы L_0. Сравнивая разложения (8) и (9), мы видим, что при соответствующей нумерации можно положить:

$$\mu_1=\frac{\varkappa}{\lambda_1}, \quad -\mu_1=+\frac{\varkappa}{\lambda_2}, \quad \mu_2=\frac{\varkappa}{\lambda_3}=-\frac{\varkappa}{\lambda_4} \quad \text{и т. д.} \tag{10}$$

Формула (10) и дает связь между корнями многочлена $\widetilde{D}$ и собственными значениями матрицы L_0. Из этой формулы также видно, что вместе с каждым ненулевым собственным значением λ матрица имеет собственное значение $-\lambda$ той же кратности, что и λ.

Найдем теперь в каком случае у матрицы L_0 в уравнении (1), получаемом из инвариантной функции Лагранжа, собственные значения действительны и в каком случае они комплексны. Как мы видели в § 8, матрица L_0 такого уравнения должна удовлетворять условию

$$(L_0\psi_1, \psi_2)=(\psi_1, L_0\psi_2), \tag{11}$$

где (ψ_1, ψ_2) — невырожденная билинейная эрмитова форма, с помощью которой записывается функция Лагранжа. Равенство (11) для собственного вектора ψ_λ матрицы L_0 с собственным значением λ перепишется так:

$$(L_0\psi_\lambda, \psi_\lambda) = \lambda(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = \bar{\lambda}(\psi, \psi_\lambda);$$

отсюда

$$(\lambda - \bar{\lambda})(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = 0,$$

т. е. либо $\lambda = \bar{\lambda}$ и собственное значение λ действительно, либо $(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = 0$. Таким образом, если у матрицы L_0 собственное значение λ комплексно, то соответствующий собственный вектор ψ_λ обращает в нуль квадратичную форму $(\psi, \psi):(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = 0$. Такие собственные векторы матрицы L_0 мы назовем недопустимыми и рассматривать их в дальнейшем не будем *).

Итак, мы видим, что собственные значения матрицы L_0 в уравнении (1), полученном из функции Лагранжа, за исключением редких недопустимых случаев, вещественны.

Пусть λ — вещественное собственное значение матрицы L_0, Тогда число $\mu = \frac{\varkappa}{\lambda}$ также вещественно. Соотношение (5) мы можем теперь переписать в следующем виде:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)^2 = \mu^2 \geqslant 0.$$

Из этого соотношения мы видим, что для вектора энергии — импульса p плоской волны (2) выполняется неравенство

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 > 0 \quad \text{при} \quad \varkappa \neq 0$$

и равенство

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0 \quad \text{при} \quad \varkappa = 0 \text{ **)},$$

*) В следующем параграфе мы увидим, что плоской волне, построенной с помощью недопустимого вектора ψ_λ, отвечает нулевой заряд и нулевая энергия.

**) При выводе соотношения (7) мы пользовались тем, что $D(L(p) + \varkappa E) = \det(L(gp) + \varkappa E)$. Это равенство получалось из соотношения

$$\sum g_{ik} T_g L_i T_g^{-1} = L_k$$

для матриц в релятивистски-инвариантном уравнении. Однако при $\varkappa = 0$ это соотношение заменяется более общим:

$$\sum V_g L_k T_g^{-1} g_{ik} = L_i.$$

Можно показать, что у всех операторов любого конечномерного представления определитель равен 1:

$$\det V_g = \det T_g = 1.$$

Отсюда мы получаем, что и в случае $\varkappa = 0$

$$\det L_p = \det L(gp).$$

т. е. вектор энергии — импульса лежит внутри светового конуса в импульсном пространстве $R^{(4)}$ при $\varkappa \neq 0$ (такие векторы называют времяподобными) и лежит на световом конусе при $\varkappa = 0$.

Подведем итог всему сказанному.

Для того чтобы существовало решение уравнения

$$\sum L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + \varkappa\psi = 0$$

в виде плоской волны

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p)\, e^{i(-p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)},$$

необходимо и достаточно, чтобы вектор энергии — импульса $p(p_0, p_1, p_2, p_3)$ *удовлетворял соотношению*

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \mu^2, \tag{12}$$

где $\mu = \frac{\varkappa}{\lambda}$, *а* λ *— какое-нибудь отличное от нуля действительное собственное значение матрицы* L_0. *При этом для уравнения с* $\varkappa \neq 0$ *вектор энергии — импульса времяподобен, а при* $\varkappa = 0$ *этот вектор лежит на световом конусе. Величина* $\psi(p)$ *(амплитуда плоской волны) получается из уравнения*

$$L(p)\psi(p) = -\varkappa\psi(p),$$

т. е. является собственным вектором матрицы $L(p)$ *с собственным значением* $-\varkappa$.

2. Система покоя. Масса покоя. В этом и в следующих двух пунктах мы рассмотрим случай уравнения с $\varkappa \neq 0$. В этом случае вектор энергии — импульса, задающий плоскую волну (2), как мы видели в предыдущем пункте, времяподобен

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 > 0.$$

Выберем теперь такое преобразование Лоренца g_0, которое переводило бы этот вектор в направление временной оси p_0 в импульсном пространстве

$$g_0 p = p' \text{ и } p_1' = p_2' = p_3' = 0.$$

При этом уравнение

$$L(p)\psi(p) + \varkappa\psi(p) = 0,$$

из которого определяется величина $\psi(p)$, задающая плоскую волну (2), перейдет в уравнение

$$-p_0 L_0 \psi(p_0) + \varkappa\psi(p_0) = 0, \tag{13}$$

где величина $\psi(p_0)$ связана с $\psi(p)$ соотношением

$$\psi(p_0) = T_{g_0}\psi(p).$$

Как видно из уравнения (13), величина $\psi(p_0)$ является собственным вектором матрицы L_0 с собственным значением $\lambda = -\frac{\varkappa}{p_0}$. Очевидно, что

$$p_0 = -\frac{\varkappa}{\lambda}.$$

Обратно, сама величина $\psi(p)$, задающая плоскую волну, выражается через $\psi(p_0)$ по формуле

$$\psi(p) = T_{g_0}^{-1}\psi(p_0).$$

Таким образом, каждое решение (2) в виде плоской волны определяется некоторым собственным вектором матрицы L_0 с ненулевым собственным значением.

Как мы отмечали выше, всякое преобразование Лоренца g над векторами p из импульсного пространства $\widetilde{R}^{(4)}$ можно рассматривать как переход с помощью матрицы $g = \| g_{ik} \|$ от системы координат в координатном пространстве $R^{(4)}$, в которой плоская волна задается вектором p и величиной $\psi(p)$, к системе координат в $R^{(4)}$, в которой эта плоская волна определяется вектором p' и величиной $\psi(p') = T_g\psi(p)$. В частности, если в некоторой системе координат плоская волна

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p)\, e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)} \tag{14}$$

задавалась вектором p, то преобразование Лоренца g_0, переводящее вектор p в направление временной оси в $\widetilde{R}^{(4)}$: $gp = p'$ $(p_1' = p_2' = p_3' = 0)$, можно рассматривать как переход к системе координат (x_0', x_1', x_2', x_3'), в которой плоская волна (14) запишется в виде

$$\psi(x_0') = \psi(p_0')\, e^{-ip_0'x_0'}. \tag{15}$$

Система координат (x_0', x_1', x_2', x_3'), в которой плоская волна (14) принимает вид (15), называется *системой покоя для плоской волны* (14).

Плоскую волну (15) в системе покоя называют иногда плоской волной покоя. Величина $\psi(p_0')$, задающая плоскую волну покоя, как мы видели, является собственным вектором матрицы L_0 с вещественным ненулевым собственным значением λ

$$L_0\psi(p_0') = \lambda\psi(p_0'), \text{ при этом } p_0' = \frac{\varkappa}{\lambda} = \mu. \tag{16}$$

Числа μ называют значениями *массы покоя частицы* *). Мы видим,

*) Как мы видели в предыдущем пункте, с каждым собственным значением λ у матрицы L_0 встречается собственное значение $-\lambda$. Это означает, другими словами, что вместе с каждым значением массы покоя μ у частицы существует значение массы покоя $-\mu$. При этом состояние с $\mu > 0$ называют состоянием частицы с массой μ, а состояние с $\mu < 0$ — состоянием античастицы с массой $|\mu|$. Таким образом, в случае конечномерных уравнений каждому состоянию частицы соответствует состояние античастицы с той же массой, или, как говорят короче, у каждой частицы есть античастица.

что энергия частицы p_0' в системе покоя совпадает с каким-нибудь значением массы покоя. Соотношение (12) превращается при этом в хорошо известное из релятивистской механики соотношение между энергией, импульсом и массой покоя частицы:

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = \mu^2.$$

3. Спин покоящейся частицы. Состояние частицы в системе покоя определяется, как было только что показано, собственным вектором $\tilde{\psi}_\lambda^0$ матрицы L_0 с некоторым вещественным собственным значением λ.

Как правило, собственные значения λ матрицы L_0 являются кратными. Действительно, из общего условия, которому удовлетворяют матрицы L_k релятивистски-инвариантного уравнения (см. § 7, (3)), следует, что матрица L_0 перестановочна с операторами $T_{\tilde{g}}$, соответствующими вращениям $\tilde{g}$. Но тогда каждое собственное подпространство матрицы L_0 (т. е. максимальное подпространство, состоящее из ее собственных векторов с одним и тем же собственным значением) инвариантно относительно операторов $T_{\tilde{g}}$. Действительно, пусть $L_0\psi = \lambda\psi$. Тогда $L_0 T_g \psi = T_g L_0 \psi = \lambda T_g \psi$, т. е. $T_g\psi$ так же является собственным вектором с собственным значением λ, т. е. принадлежит тому же собственному подпространству, что и ψ.

Собственное подпространство, отвечающее собственному значению λ, обозначим через R_λ.

Пространство R_λ распадается на несколько инвариантных подпространств R_λ^l, в каждом из которых представление группы вращений неприводимо и имеет вес l. *Числа l называют значениями спина частицы.* Очевидно, что в каждом инвариантном подпространстве R_λ^l существует $2l+1$ независимых векторов $\tilde{\psi}_{\lambda l m}^0$ (например, $2l+1$ собственных векторов оператора H_3). *Число m называют проекцией спина на какую-нибудь ось* (например, на ось x_3) *).

Выясним, как фактически, с помощью матрицы L_0, определить допустимые значения спина l частицы.

Формулы (15) и (16) § 7 показывают, что матрица L_0 распадается на «ящики» $\|c_l^{\tau\tau'}\|$, отвечающие различным значениям l. Каждое собственное значение $\lambda^{(l)}$ ящика $\|c_l^{\tau\tau'}\|$ является $(2l+1)$-кратным собственным значением матрицы L_0, причем, очевидно, соответствующие $2l+1$ собственных векторов $\psi_{\lambda l m}^0$ $(m=-l, \ldots, l)$

---

*) Спин частицы l можно физически истолковать следующим образом. Система покоя для плоской волны определена неоднозначно: любое вращение переводит систему покоя снова в систему покоя, при этом так, что энергия плоской волны (масса покоя) не меняется. Это вращение системы покоя частицы, не меняющее ее массу, может быть истолковано как некоторая внутренняя степень свободы для частицы. Эта внутренняя (вращательная) степень свободы и приводит к существованию внутреннего полного момента — спина частицы l и его проекций m на какую-нибудь ось.

матрицы L_0 преобразуются между собой при пространственных вращениях по неприводимому представлению группы вращений веса l (эти векторы как раз и образуют базис в пространстве $R^l_{\lambda_i}$). Собственным вектором $\psi^{(l)}_{\lambda l m}$ отвечают решения вида (2), описывающие различные состояния покоя частицы со спином l и массой $\mu = \frac{\varkappa}{\lambda}$, отличающиеся значением проекции спина m на некоторую ось. *Таким образом, возможные для данной частицы значения спина — это те значения l, для которых матрица $\|c_l^{\tau\tau'}\|$ имеет отличные от нуля собственные значения, причем число таких собственных значений, умноженное на $(2l+1)$, определяет число различных состояний со спином l.*

Итак, с помощью матрицы L_0 определяются как значения масс покоя, так и значения спина для данной частицы.

4. Спин частицы в произвольной системе координат. В предыдущем пункте мы определили спин частицы в ее системе покоя. Поскольку для любой плоской волны, как мы видели, существует система покоя, то тем самым ее спин определен и в любой системе координат: для этого надо положить его равным тому значению спина, которое получит плоская волна при переходе к системе покоя. То же самое относится и к значению проекции спина m.

Однако нам кажется целесообразным определение спина частицы сразу в произвольной системе координат без перехода к системе покоя.

Заметим с этой целью, что спин в предыдущем параграфе был определен из следующих соображений: состояния в системе покоя определяются собственными векторами матрицы L_0. Матрица L_0 коммутирует с операторами $T_{\tilde{g}}$, соответствующими вращениям $\tilde{g}$; отсюда мы получили, что пространство R_λ собственных векторов ψ_λ инвариантно относительно представления группы вращений. Веса этих представлений l и являются значениями спина.

Применим эти соображения к плоской волне

$$\psi(p)\, e^{i(-p_0x_0+p_1x_1+p_2x_2+p_3x_3)}$$

в произвольной системе координат. Вектор $\psi(p)$ является собственным для матрицы $L(p)$ с собственным значением $-\varkappa$

$$L(p)\,\psi(p) = -\varkappa\psi(p).$$

Найдем теперь те операторы T_g из представления группы Лоренца, которые коммутируют с матрицей $L(p)$. Как мы видели, имеет место равенство

$$T_g L(p)\, T_g^{-1} = L(gp).$$

Из этого равенства следует, что оператор T_g перестановочен с матрицей $L(p)$ в том и только том случае, когда преобразование g оставляет вектор p на месте: $gp = p$.

Совокупность таких преобразований $\tilde{\tilde{g}}$ образует подгруппу группы Лоренца. Эта подгруппа называется *стационарной подгруппой вектора* p. Будем ее обозначать $G_0(p)$. Заметим, что для вектора $p(p_0, 0, 0, 0)$, направленного вдоль временной оси, стационарной подгруппой G_0 является группа вращений.

Представление $g \to T_g$ всей группы Лоренца порождает представление $\tilde{\tilde{g}} \to T_{\tilde{\tilde{g}}}$ стационарной подгруппы $G_0(p)$. Таким образом, мы показали, что матрица $L(p)$ перестановочна только с операторами $T_{\tilde{\tilde{g}}}$, образующими представление стационарной подгруппы $G_0(p)$,

$$T_{\tilde{\tilde{g}}} L(p) T_{\tilde{\tilde{g}}}^{-1} = L(p).$$

Отсюда следует, что собственное подпространство этой матрицы с собственным значением $-\varkappa$ (обозначим его $R_\varkappa(p)$) инвариантно относительно оператора $T_{\tilde{\tilde{g}}}$. Действительно, пусть $L(p)\psi(p) = -\varkappa\psi(p)$. Применим оператор $T_{\tilde{\tilde{g}}}$ к обеим частям этого равенства

$$T_{\tilde{\tilde{g}}} L(p)\psi(p) = -\varkappa T_{\tilde{\tilde{g}}}\psi(p),$$
$$T_{\tilde{\tilde{g}}} L(p) = L(p) T_{\tilde{\tilde{g}}},$$

и окончательно получим:

$$L(p) T_{\tilde{\tilde{g}}}\psi(p) = -\varkappa T_{\tilde{\tilde{g}}}\psi(p),$$

т. е. вектор $T_{\tilde{\tilde{g}}}\psi(p)$ снова является собственным вектором матрицы $L(p)$ с тем же собственным значением $-\varkappa$. Таким образом, пространство $R_\varkappa(p)$ инвариантно относительно представления $\tilde{\tilde{g}} \to T_{\tilde{\tilde{g}}}$ стационарной группы $G_0(p)$.

Покажем теперь, что для времяподобного вектора p группа $G_0(p)$ изоморфна группе вращений. Действительно, пусть g_0 — преобразование, переводящее вектор p в направление временной оси

$$g_0 p = p', \qquad p'_1 = p'_2 = p'_3 = 0.$$

Очевидно, что всякое преобразование

$$\tilde{\tilde{g}} = g_0^{-1} \tilde{g} g_0,$$

где $\tilde{g}$ — вращение, оставляет вектор p на месте. Таким образом, группа $G_0(p)$ получается из группы вращений G_0 так:

$$G_0(p) = g_0^{-1} G_0 g_0.$$

Отсюда и следует, что группы $G_0(p)$ и G_0 изоморфны.

Последнее означает, что всякое представление группы $G_0(p)$, в частности представление в пространстве $R_\varkappa$, можно рассматривать как представление группы вращений. Отсюда вытекает, что представление стационарной группы в пространстве $R_{-\varkappa}^{(p)}$ разбивается на неприводимые представления с целым или полуцелым весом l, действующие в подпространствах $R_{\varkappa}^{l}(p)$. Значения l и являются *значениями спина в системе координат* (x_0, x_1, x_2, x_3). Легко показать, что эти значения спина l совпадают со значениями спина в системе покоя.

Каждому спину l отвечает $2l+1$ линейно независимых собственных векторов матрицы $L(p)$ (с собственным значением $-\varkappa$). Их удобнее всего выбрать следующим образом.

Рассмотрим какое-нибудь направление γ в трехмерном пространстве. Можно показать, что в стационарной группе $G_0(p)$ вектора p существует однопараметрическая подгруппа $G_{0\gamma}(p)$ преобразований, оставляющих на месте ось γ, причем эта подгруппа $G_{0\gamma}(p)$ изоморфна группе вращений вокруг фиксированной оси (например, оси p_3)*). В пространстве $R_{\varkappa}^{l}(p)$, где действует неприводимое представление стационарной группы $G_0(p)$, задано тем самым и представление ее однопараметрической подгруппы $G_{0\gamma}(p)$. Инфинитезимальный оператор, соответствующий этой подгруппе, обозначим $H_\gamma(p)$. Его собственные векторы образуют базис в $R_{\varkappa}^{l}(p)$, а собственные значения m имеют вид $m=-l, -l+\ldots+l$. В качестве собственных векторов матрицы $L(p)$, соответствующих спину l, можно выбрать собственные векторы оператора $H_\gamma(p)$ $\psi^{\gamma}_{\mu l m}(p)$. Построенные с помощью векторов $\psi^{\gamma}_{\mu l m}(p)$ плоские волны называют плоскими волнами со спином l, «поляризованными вдоль направления γ». Числа «m» называют при этом проекцией спина l на ось γ или, иначе, *значениями поляризации*.

В случае, если направление γ совпадает с направлением импульса p_1, p_2, p_3, то говорят, что плоская волна поляризована по движению.

Таким образом, плоская волна в произвольной системе координат задается вектором энергии — импульса p, удовлетворяю-

---

*) Действительно, преобразование g_0, переводящее направление временной оси в направление вектора p, можно выбрать так, чтобы плоскость (p_0, p_3) перешла под действием преобразования g_0 в плоскость, натянутую на вектор p и ось γ. При этом вращения $\tilde{g}_{12}$ вокруг оси p_3, оставляющие на месте любой вектор плоскости (p_0, p_3), после автоморфизма

$$\approx{g}_\gamma = g_0\tilde{g}_{12}g_0^{-1} \tag{17}$$

перейдут в преобразования $\overset{\approx}{g}_\gamma$, оставляющие на месте любой вектор плоскости (p, γ), в частности, и само направление γ. Эти преобразования $\overset{\approx}{g}_\gamma$ и образуют однопараметрическую подгруппу $G_{0\gamma}(p)$ стационарной группы $G_0(p)$, оставляющую на месте ось γ. Из равенства (13) видно, что группа $G_{0\gamma}(p)$ изоморфна группе вращений вокруг оси p_3.

щим соотношению (12), *спином* l *и проекцией* m *спина на некоторое направление* γ (*значением поляризации*).

5. Частицы с нулевой массой покоя. До сих пор мы рассматривали уравнения $\sum\limits_i L_i \frac{d\psi}{dx_i} + i\varkappa\psi = 0$ с $\varkappa \neq 0$. Из формулы (16), определяющей значения массы покоя такой частицы, следует, что $\mu \neq 0$, т. е. при $\varkappa \neq 0$ все массы покоя отличны от нуля.

Перейдем теперь к уравнениям с $\varkappa = 0$. Из формулы (16) следует, что при этом $\mu = 0$, т. е. для таких уравнений все массы покоя равны нулю.

Заметим, что для уравнений с $\varkappa = 0$ не существует системы покоя. Действительно, в п. 1 мы видели, что вектор энергии — импульса p плоской волны удовлетворяет соотношению

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0,$$

т. е. вектор p лежит на световом конусе. Вектор же со светового конуса никаким преобразованием Лоренца не может быть переведен на временную ось, т. е., другими словами, не существует ортогональной системы координат, в которой три последние координаты вектора p обращались бы в нуль (разумеется, кроме того тривиального случая, когда $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 0$, т. е. когда всякая система координат является системой покоя. Этот случай лишен интереса).

Итак, в случае уравнения с $\varkappa = 0$ мы получаем, что у частиц, описываемых этим уравнением, масса покоя равна нулю, а системы покоя не существует. Термин «масса покоя» имеет здесь, таким образом, несколько условный смысл.

6. Поляризация частиц с нулевой массой покоя. Поскольку для частиц с $\varkappa = 0$ не существует системы покоя, то для этих частиц теряет смысл определение спина как веса представления группы вращений, которое действует в пространстве собственных векторов матрицы L_0, описывающих плоские волны покоя.

Однако для частиц с $\varkappa = 0$ можно тем не менее, как и для частиц с $\varkappa \neq 0$, определить поляризацию.

Мы введем ее точно так же, как в п. 3 мы определили спин и поляризацию частицы с $\varkappa \neq 0$ в произвольной системе координат с помощью представления стационарной подгруппы $G_0(p)$ для вектора энергии — импульса p, действующего в собственном подпространстве матрицы $L(p)$.

Итак, пусть в некоторой системе координат мы ищем решения уравнения $\sum L_i \frac{d\psi}{dx_i} = 0$ в виде плоской волны

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p_0, p_1, p_2, p_3)\, e^{i(-p_0x_0 + p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3)}.$$

Величина $\psi(p)$ определяется, как всегда, из уравнения

$$L(p)\,\psi(p) = 0, \tag{18}$$

а вектор энергии — импульса p лежит на световом конусе

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 = 0.$$

Решения уравнения (18) образуют подпространство $R(p)$ в пространстве R значений волновых функций. Точно так же как в п. 3, можно показать, что подпространство $R(p)$ инвариантно относительно тех и только тех операторов T_g из представления группы Лоренца $g \to T_g$, которые отвечают преобразованиям g, оставляющим вектор p на месте. Другими словами, пространство $R(p)$ инвариантно относительно представления стационарной группы $G_0(p)$ вектора p.

В п. 3 мы видели, что стационарная подгруппа любого времяподобного вектора изоморфна группе вращений. Для вектора p, лежащего на световом конусе, стационарная подгруппа $G_0(p)$ устроена совершенно иначе, чем группа вращений.

Кратко опишем эту группу. Заметим, что стационарные группы двух любых векторов, лежащих на световом конусе, изоморфны. В связи с этим мы построим стационарную подгруппу вектора p с координатами $(p_0, 0, 0, p_3)$, $p_0 = p_3$. Всякой подгруппе собственной группы Лоренца отвечает некоторая подгруппа в группе $\mathfrak{A}$ комплексных матриц второго порядка a с определителем, равным 1. Выпишем сейчас подгруппу группы $\mathfrak{A}$, отвечающую стационарной подгруппе $G_0(p_0, 0, 0, p_3)$. Обозначим ее $\mathfrak{A}_0(p)$ (при этом мы, разумеется, пользуемся тем соответствием $g_a \to a$ между собственными преобразованиями Лоренца и комплексными матрицами второго порядка a ($\det a = 1$), которое мы установили в § 1).

Группа $\mathfrak{A}_0(p)$ состоит из трех однопараметрических подгрупп:

$$a_1(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\varphi}{2}} \end{pmatrix}, \qquad a_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a_3(s) = \begin{pmatrix} 1 & is \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что подгруппа $a_1(\varphi)$ соответствует вращениям вокруг оси x_3. (Эти вращения, как легко видеть, принадлежат стационарной подгруппе $G_0(p_0, 0, 0, p_3)$.)

Нетрудно видеть, что группа $\mathfrak{A}_0(p)$ изоморфна группе всех движений плоскости (x, y).

Действительно, если подгруппе $a_1(\varphi)$ отнести вращения в плоскости (x, y) вокруг начала координат на угол φ, подруппам $a_1(t)$ и $a_2(s)$ — сдвиги вдоль осей x и y на расстояние t и s соответственно, то этим и будет установлен изоморфизм между группой движений плоскости и группой $\mathfrak{A}_0(p)$.

Заметим, что стационарная группа $G_0(p)$ содержит вращение вокруг направления импульса (p_1, p_2, p_3). Выберем теперь ради удобства систему координат в четырехмерном пространстве так, чтобы положительное направление оси x_3 совпадало с вектором (p_1, p_2, p_3). В этой системе вектор энергии — импульса имеет координаты $(p_0, 0, 0, p_3)$. При таком выборе оси x_3 вращение вокруг направления импульса совпадает с вращением вокруг оси x_3 и, следовательно, пространство $R(p)$ инвариантно относительно операторов $T_{g_{12}}$, соответствующих этим вращениям. Тем самым пространство $R(p)$ инвариантно также относительно инфинитезимального оператора H_3; и в пространстве $R(p)$ можно выбрать базис из собственных векторов этого оператора. Обозначим эти векторы через $\psi_m(p)$, где m — собственные значения оператора H_3. Как мы знаем, числа m могут принимать все одновременно целые или полуцелые значения. *Значения чисел* $m=m_1, m_2, \ldots, m_k$ *называются значениями поляризации частицы с* $\varkappa=0$. Собственным векторам $\psi_m(p)$ отвечают *плоские волны с определенным значением поляризации* m. При этом говорят, что *плоские волны* $\psi_m(p)$ *поляризованы по движению* *).

Заметим, что в случае, когда направление оси x_3 не совпадает с направлением импульса (p_1, p_2, p_3), как мы только что предполагали, вместо оператора H_3 надо выбрать инфинитезимальный оператор H_p, отвечающий однопараметрической группе вращений вокруг направления импульса (p_1, p_2, p_3). При этом в качестве векторов $\psi_m(p)$ надо взять собственные векторы этого оператора.

Итак, *каждая плоская волна для частицы с* $\varkappa=0$ *задается выбором вектора энергии — импульса, лежащего на световом конусе*

$$p_0^2-p_1^2-p_2^2-p_3^2=0,$$

и некоторым вектором $\psi_m(p)$ *из дефектного подпространства матрицы* $L(p)$:

$$L(p)\,\psi_m(p)=0$$

с определенным значением поляризации m.

7. Масса покоя и спин частиц, описываемых уравнениями из предыдущего параграфа. I. Уравнение Дирака. Матрица

$$L_0=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{Vmatrix}$$

состоит из одного ящика

$$\begin{Vmatrix} c_{\frac{1}{2}}^{\tau\dot{\tau}} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $l=\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение Дирака описывает частицы со спином $l=\frac{1}{2}$. Масса принимает два значения $\mu=+\varkappa$ и $\mu=-\varkappa$. Так как при $l=\frac{1}{2}$ проекция спина m принимает два значения $\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$, то существуют четыре линейно независимых вектора

---

*) Мы не рассматриваем здесь случая поляризации плоских волн с $\varkappa=0$ вдоль направления, не совпадающего с направлением импульса. Заметим только, что в отличие от случая $\varkappa\neq 0$ плоские волны с $\varkappa=0$, поляризованные не вдоль движения, не всегда существуют. Мы убедимся в этом ниже на примере двухкомпонентного нейтрино.

матрицы L_0, а именно:

$$\psi_{\varkappa, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \quad \psi_{\varkappa, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}, \quad \psi_{-\varkappa, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}}, \quad \psi_{-\varkappa, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}},$$

т. е. состояние с массой $\varkappa$ и проекцией спина $\frac{1}{2}$, состояние с массой $\varkappa$ и проекцией спина $-\frac{1}{2}$, и т. д.

II. Уравнение Даффина для скалярных частиц. Здесь существует лишь один отличный от нуля ящик (см. § 9, (8″)),

$$\left\| c_0^{\tau_1\tau_2} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{matrix} \right\|,$$

т. е. спин частицы принимает лишь значение $l = 0$. Масса принимает значения $\mu_1 = \varkappa$ и $\mu_2 = -\varkappa$. Существует, таким образом, только два независимых состояния в системе покоя.

III. Уравнение Даффина для векторных частиц. В этом случае снова существует один ящик (см. § 9, (10))

$$\left\| c_1^{\tau\tau} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0 & i & i \\ -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, спин $l = 1$.

Ненулевые собственные значения этой матрицы $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Масса покоя равна $\mu_{1,2} = \pm \frac{\varkappa}{\sqrt{2}}$. Всего существуют шесть линейно независимых состояний в системе покоя

$$\psi_{\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}, 1, m} \quad \text{и} \quad \psi_{-\frac{\varkappa}{\sqrt{2}}, 1, m} \qquad (m = -1, 0, 1).$$

IV. Уравнение Паули—Фирца. Здесь имеются два ящика:

$$l = \frac{1}{2} \qquad\qquad l = \frac{3}{2}$$

$$\left\| \begin{matrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Все собственные значения первого из них равны нулю, а собственные значения второго равны ± 1.

Таким образом, спин для уравнения Паули—Фирца равен $l = \frac{3}{2}$, а масса $\mu_{1,2} = \pm \varkappa$.

В системе покоя восемь линейно независимых состояний:

$$\psi_{\varkappa, \frac{3}{2}, m} \quad \text{и} \quad \psi_{-\varkappa, \frac{3}{2}, m} \qquad \left(m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Итак, приведенные в § 9 уравнения с $\varkappa \neq 0$ — это уравнения для частиц со спином $l = \frac{1}{2}$, 0, 1, $\frac{3}{2}$.

V. Двухкомпонентное нейтрино (см. § 9, п. 4). Уравнение для него имеет вид

$$\sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} + \sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0, \tag{19}$$

или

$$\sigma_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sigma_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sigma_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \sigma_0 \frac{\partial \psi}{\partial x_0} = 0. \tag{20}$$

В первом случае величина ψ преобразуется по представлению $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (непунктирное спинорное представление ранга 1), а во втором случае — по представлению $\dot{\tau}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ (пунктирное спинорное представление ранга 1). Масса двухкомпонентного нейтрино равна нулю. Определим поляризацию.

Рассмотрим сначала случай уравнения (19). Выберем, как и в общем случае, систему координат так, чтобы $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 > 0$, $p_0 = \pm p_3$. Рассмотрим сначала случай $p_0 = p_3$. Уравнение (18) для определения величины $\psi^0(p_3, p_0)$ примет вид

$$(p_3\sigma_3 + p_0\sigma_0)\,\psi^0(p_3, p_0) = 0.$$

Отсюда $\psi^0(p_3, p_0) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, т. е. нейтрино может находиться лишь в одном состоянии с данным импульсом и энергией (пространство $R_0(p_3, p_0)$ одномерно). Вектор $\psi(p_3, p_0)$, будучи в таком случае собственным вектором оператора H_3, должен совпадать с каким-нибудь из векторов канонического базиса представления $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Из результатов § 4, п. 1 следует действительно, что вектор $\psi^0 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ совпадает с вектором $\xi_{\frac{1}{2}}$ $\left(\text{с собственным значением } m = \frac{1}{2}\right)$ из канонического базиса представления $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Таким образом, в случае положительной энергии $p_0 > 0$ значение поляризации для нейтрино, подчиняющегося уравнению (19), равно $\frac{1}{2}$. В случае $p_0 < 0$ поляризация равна $-\frac{1}{2}$.

Если же волновая функция нейтрино удовлетворяет уравнению (20), мы получаем противоположные знаки поляризации: при $p_0 > 0$ $m = -\frac{1}{2}$, а при $p_0 < 0$ $m = \frac{1}{2}$. Состояние нейтрино с $p_0 < 0$ физики называют антинейтрино (см. сноску на стр. 330). Составим табличку:

Частица	Представление	
	$\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ уравнение (19)	$\dot{\tau}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ уравнение (20)
Нейтрино $p_0 > 0$	$m = \frac{1}{2}$	$m = -\frac{1}{2}$
Антинейтрино $p_0 < 0$	$m = -\frac{1}{2}$	$m = \frac{1}{2}$

Вопрос о том, какой из двух вариантов нейтрино имеет место в действительности (если оно, вообще, двухкомпонентно), решается экспериментом.

VI. Поляризация фотонов. Рассмотрим плоские волны для уравнения Максвелла, описывающего фотоны. Масса покоя фотонов равна нулю. Определим поляризацию. Выберем ось x_3 вдоль положительного направления импульса фотона. В такой системе координат вектор энергии — импульса p имеет координаты $p(p_0, 0, 0, p_3)$, $p_3 > 0$, а плоская волна записывается в виде

$$F_{ik}(x) = F_{ik}(p)\, e^{ip_3x_3 - ip_0x_0}.$$

Величина $F_{ik}(p)$ удовлетворяет уравнению

$$(p_3L_3 - p_0L_0)\, F_{ik}(p) = 0,$$

т. е. принадлежит дефектному подпространству матрицы $p_3L_3 - p_0L_0$. Выпишем эту матрицу (см. § 9, (19) и (19′))

$$\begin{array}{c} \\ p_3L_3 - p_0L_0 = \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} \xi^{\tau}_{1,-1} & \xi^{\tau}_{10} & \xi^{\tau}_{11} & \xi^{\dot\tau}_{1,-1} & \xi^{\dot\tau}_{10} & \xi^{\dot\tau}_{11} \end{array} \\
\left\|\begin{array}{cccccc}
0 & -ip_3 & 0 & 0 & -ip_3 & 0 \\
-p_3-p_0 & 0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 \\
0 & -p_0 & 0 & 0 & -p_0 & 0 \\
0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 & -p_3-p_0 \\
0 & -ip_3 & 0 & 0 & ip_3 & 0 \\
-p_3-p_0 & 0 & 0 & -p_3+p_0 & 0 & 0 \\
0 & -p_0 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\
0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 & p_3+p_0
\end{array}\right\|
\end{array}$$

Первая строка этой матрицы пропорциональна 3-й строке, а 5-я пропорциональна 7-й. Если выкинуть две из них (например, 1-ю и 5-ю), то мы получим квадратную матрицу шестого порядка

$$\begin{array}{cccccc} \xi^{\tau}_{1,-1} & \xi^{\tau}_{10} & \xi^{\tau}_{11} & \xi^{\dot\tau}_{1,-1} & \xi^{\dot\tau}_{10} & \xi^{\dot\tau}_{11} \end{array}$$

$$\begin{Vmatrix} -p_3-p_0 & 0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_0 & 0 & 0 & -p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 & -p_3-p_0 \\ -p_3-p_0 & 0 & 0 & -p_3+p_0 & 0 & 0 \\ 0 & -p_0 & 0 & 0 & p_0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3-p_0 & 0 & 0 & p_3+p_0 \end{Vmatrix}.$$

Эту матрицу перестановкой строк и столбцов можно привести к ящичному виду

$$\begin{array}{cccccc} \xi^{\tau}_{1,-1} & \xi^{\dot\tau}_{1,-1} & \xi^{\tau}_{10} & \xi^{\dot\tau}_{10} & \xi^{\tau}_{11} & \xi^{\dot\tau}_{11} \end{array}$$

$$\begin{Vmatrix} -p_3-p_0 & p_3-p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_3-p_0 & -p_3+p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 & -p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p_0 & p_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3-p_0 & -p_3-p_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_3-p_0 & p_3+p_0 \end{Vmatrix}. \qquad (21)$$

После того как матрица приведена к такому виду, ясно, что при $p_0 = p_3 \neq 0$ ее дефектное подпространство $R(p_3, p_3)$ двумерно и содержит векторы $\xi^{\dot\tau}_{1,-1}$ и ξ^{τ}_{11}. В случае же $p_0 = -p_3 \neq 0$ дефектное подпространство $R(p_3, -p_3)$ также двумерно и содержит векторы $\xi^{\tau}_{1,-1}$ и $\xi^{\dot\tau}_{11}$. В обоих случаях дефектные подпространства инвариантны относительно оператора H_3 и собственные значения этого оператора равны $m = 1, -1$. Значение поляризации $m = 0$ исключено, поскольку линейная комбинация векторов $\xi^{\tau}_{10}, \xi^{\dot\tau}_{10}$ может принадлежать дефектному подпространству матрицы (21) лишь в случае, если $p_3 = p_0 = 0$. Таким образом, поляризация фотона может принимать только значения $m = 1, -1$ или, как говорят физики, фотон всегда поляризован *поперечно*.

8. Бесконечномерные уравнения. Формулы (13)—(16) § 2 для бесконечномерных неприводимых представлений группы Лоренца (точнее, набор значений l в этих формулах) показывают, что уравнения относительно волновых функций ψ, преобразующихся по бесконечномерному представлению, будут, вообще говоря, описывать частицы, могущие находиться в состояниях с любым целым или соответственно полуцелым спином, бо̀льшим некоторого наименьшего значения l_0. При этом, если l_0 — целое, то и спин принимает целые значения, если l_0 — полуцелое, то и спин — полуцелый.

Будем теперь предполагать, что представление T_g, по которому преобразуются величины ψ, распадается на конечное число неприводимых представлений, среди которых есть и бесконечномерные. В этом случае все матрицы $\left\| c_l^{\tau\tau'} \right\|$ будут матрицами конечного порядка, и их порядки, очевидно, совпадут для всех l, за исключением, быть может, нескольких самых нижних значений l. Из основных формул (15) и (16) § 7 следует, что коэффициенты характеристических уравнений для матриц $\left\| c_l^{\tau\tau'} \right\|$ будут равны квадратным корням из многочленов относительно l *).

Отсюда вытекает, что это уравнение в общем случае будет иметь корни, неограниченно возрастающие по абсолютной величине при $l \to \infty$ **); лишь в исключительном случае все коэффициенты характеристического уравнения могут оказаться вовсе не зависящими от l, т. е. все собственные значения матриц $\left\| c_l^{\tau\tau'} \right\|$ для всех l, кроме, быть может, нескольких самых нижних значений, совпадут, Итак, бесконечномерным уравнениям такого типа будет соответствовать спектр масс, либо стремящийся к нулю при $l \to \infty$ (общий случай), либо же совпадающий для всех достаточно больших значений l (исключительный случай).

Этот результат объясняет неудачу всех попыток построения релятивистски-инвариантных уравнений с растущим спектром масс. Можно, правда, строить уравнения с растущим спектром масс, используя бесконечное число неприводимых представлений: добавляя для каждого спина l достаточное число новых неприводимых представлений с $l_0 = l$, мы сможем, не меняя состояний частицы со спином меньшим, чем l, добиться любых значений массы для этого спина. Такое построение, однако, представляется достаточно сложным; как правило, уравнения, для которых T_g распадается на бесконечное число неприводимых представлений, также будут иметь падающий спектр масс.

В рассмотренных в предыдущем параграфе примерах бесконечномерных уравнений спектр масс в обоих случаях такой: спину l отвечает масса $\mu^{(l)}$,

$$\mu^{(l)} = \frac{\varkappa}{l + \frac{1}{2}}.$$

Спин в каждом из этих примеров принимает либо все целые, либо все полуцелые значения.

§ 11. Заряд и энергия релятивистских частиц

В этом параграфе мы всюду будем предполагать, что релятивистски-инвариантное уравнение, описывающее поле частицы ψ, получено из некоторой инвариантной функции Лагранжа. Это означает, как мы видели в § 8, что из компонент волновой функции ψ можно составить инвариантную невырожденную эрмитову форму (ψ_1, ψ_2) и матрицы L_1, L_2, L_3, L_0 релятивистски-инвариантного уравнения удовлетворяют соотношению

$$(L_3\psi_1, \psi_2) = (\psi_1, L_k\psi_2)$$

для всех ψ_1 и ψ_2 или, что одно и то же, эрмитова квадратичная форма $(L_k\psi, \psi)$ вещественна.

*) Можно показать, что на самом деле они будут всегда многочленами относительно l.

**) Вообще говоря, собственные значения матриц $\left\| c_l^{\tau\tau'} \right\|$ при $l \to \infty$ будут возрастать как l (в смысле порядка роста).

Кроме того, в этом параграфе мы рассматриваем только случай уравнений с $\varkappa \neq 0$.

1. Определение заряда и энергии. С каждым уравнением, получаемым из инвариантной функции Лагранжа, связан вектор с компонентами s_k:

$$s_k = (L_k\psi, \psi) \text{ *)} \qquad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{1}$$

Вектор s_k называется вектором тока **).

Последняя его компонента

$$s_0 = (L_0\psi, \psi) \tag{2}$$

называется плотностью заряда. Полный заряд s равен

$$s = \int s_0 \, d^4x. \tag{3}$$

Кроме вектора тока, с релятивистски-инвариантным уравнением связан тензор энергии — импульса

$$T_k^j = \operatorname{Im}\left(L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_j}, \psi\right) \text{***)}, \tag{4}$$

компонента T_0^0 которого

$$T_0^0 = \operatorname{Im}\left(L_0 \frac{\partial\psi}{\partial x_0}, \psi\right) \tag{5}$$

задает плотность энергии $W(x) = -T_0^0$.

Полная энергия поля $\psi(x)$ равна

$$E = \int W(x) \, d^4 x. \tag{6}$$

Напомним, что в системе покоя частицы ее волновая функция может быть представлена в виде плоской волны:

$$\psi(x_0, x_1, x_2, x_3) = \psi(p_0) e^{-ip_0x_0}, \tag{7}$$

где $\psi(p_0)$—собственный вектор матрицы L_0 с ненулевым собственным значением λ:

$$p_0 L_0 \psi(p_0) = \varkappa \psi(p_0), \qquad \lambda = \frac{\varkappa}{p_0}.$$

---

*) То обстоятельство, что четверка чисел s_k образует вектор, т. е. при преобразованиях Лоренца преобразуется так же, как и координаты x_0, x_1, x_2, x_3, доказано в § 8, п. 7.

**) См., например, В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, М., 1947, стр. 13 или А. И. Ахиезер и В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, Гостехиздат, М., 1953, стр. 393.

***) Шестнадцать компонент тензора T_k^j преобразуются как произведение двух векторов, т. е. по полному приводимому тензорному представлению второго ранга (см. § 8, п. 7).

Плотность заряда для состояния (7) равна, очевидно,

$$s_0 = (L_0 \psi(p_0) e^{-ip_0x_0}, \quad \psi(p_0) e^{-ip_0x_0}) = \lambda(\psi(p_0), \psi(p_0)). \tag{8}$$

Мы видим, что плотность заряда для состояния (7) не зависит от (x_0, x_1, x_2, x_3). Плотность энергии для плоской волны (7) также не зависит от (x_0, x_1, x_2, x_3) и равна

$$W = (p_0 L_0 \psi(p_0), \psi(p_0)) = \varkappa(\psi(p_0), \psi(p_0)). \tag{9}$$

Сейчас мы разыщем конечномерные уравнения с $\varkappa \neq 0$, для которых либо плотность заряда s_0 положительна для всех плоских волн (7), либо для всех таких волн положительна плотность энергии, т. е., другими словами, для всех собственных векторов $\psi(p_0)$ матрицы L_0 с ненулевым вещественным собственным значением λ положительна либо форма $(L_0 \psi(p_0), \psi(p_0))$, либо форма $(\psi(p_0), \psi(p_0))$.

Мы будем предполагать с самого начала, что все собственные значения матрицы L_0 вещественны. Это ограничение разумно еще и в том отношении, что собственному вектору ψ_λ матрицы L_0 с комплексным собственным значением λ (в предыдущем параграфе мы назвали такие векторы ψ_λ недопустимыми) отвечают нулевые плотности заряда и энергии. Действительно, если

$$L_0 \psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda \text{ и } \lambda \text{ комплексно,}$$

то

$$(L_0 \psi_\lambda, \psi_\lambda) = \lambda(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = \bar{\lambda}(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = (\psi_\lambda, L_0 \psi_\lambda).$$

Отсюда получаем, что, поскольку $\lambda \neq \bar{\lambda}$,

$$(\psi_\lambda, \psi_\lambda) = 0,$$

и при этом $s_0 = 0$ и $W = 0$.

Оказывается, конечномерные уравнения ($\varkappa \neq 0$) с положительной плотностью заряда или положительной плотностью энергии легко перечислить, если предположить, что матрица L_0 приводится к диагональному виду. Мы увидим, что это — уравнения, уже известные нам из § 9: уравнение Дирака для частиц со спином $l = \frac{1}{2}$ (положительный заряд) и уравнения Даффина для частиц со спином 0 или 1 (положительная энергия).

2. Конечномерные уравнения с положительным зарядом и матрицей L_0, приводящейся к диагональному виду. Положительность плотности заряда s_0 означает, очевидно, что для всех собственных векторов $\psi_\lambda(p)$ матрицы L_0 с ненулевым собственным значением λ

$$(L_0 \psi_\lambda, \psi_\lambda) > 0. \tag{10}$$

Покажем, что если матрица L_0 приводится к диагональному виду, то условие (10) равносильно требованию, чтобы

$$(L_0\psi,\ \psi)\geqslant 0$$

для всех векторов ψ из пространства R, т. е. чтобы форма $(L_0\,\psi,\ \psi)$ была неотрицательно определенной.

Действительно, у матрицы L_0, приводящейся к диагональному виду, набор всех ее линейно независимых собственных векторов образует базис в пространстве R. При этом любой вектор ψ из R может быть разложен в сумму

$$\psi=c_1\psi_1+c_2\psi_2+\ldots+c_k\psi_k+\ldots,$$

где $\psi_1,\ldots,\psi_k,\ldots$ — собственные векторы матрицы L_0 с различными собственными значениями $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots$ Заметим, что для двух собственных векторов ψ_i и ψ_k с различными собственными значениями выполняется равенство

$$(L_0\psi_i,\ \psi_k)=0.$$

Это равенство получается так:

$$(L_0\psi_i,\ \psi_k)=\lambda_i(\psi_i,\ \psi_k)$$

и

$$(L_0\psi_i,\ \psi_k)=(\psi_i,\ L_0\psi_k)=\lambda_k(\psi_i,\ \psi_k)$$

(λ_k, как мы предположили, вещественно).

Так как $\lambda_i\neq\lambda_k$, то $(\psi_i,\ \psi_k)=0$ и $(L_0\psi_i,\ \psi_k)=0$. Вычислим теперь значение формы $(L\psi,\ \psi)$

$$(L_0\psi,\ \psi)=\sum_{i,\,k}c_i\bar{c}_k(L_0\psi_i,\ \psi_k)=\sum|c_i|^2(L_0\psi_i,\ \psi_i).$$

В силу $(L_0\psi_i,\ \psi_i)\geqslant 0$ имеет место

$$(L_0\psi,\ \psi)\geqslant 0,$$

т. е. форма $(L_0\psi,\ \psi)$ неотрицательно определенна.

Итак, нам нужно найти конечномерные уравнения, для которых форма $(L_0\psi,\ \psi)$ является неотрицательно определенной.

С помощью формул (15)—(16) § 7 и (20) § 8 форма $(L_0\psi,\ \psi)$ в базисе $\{\xi_{lm}\}$, каноническом для представления T_g, которое преобразует компоненты волновой функции, запишется так:

$$(L_0\psi,\ \psi)=\sum a_l^{\tau\tau^*}c_l^{\tau\tau'}y_{lm}^{\tau'}\bar{y}_{lm}^{\tau^*},\tag{11}$$

где числа $a_l^{\tau\tau^*}$ и $c_l^{\tau\tau'}$ определяются формулами (15)—(16) из § 7 и (16)—(17) из § 8. Напомним, что $c_l^{\tau\tau'}\neq 0$ лишь для зацепляющихся компонент, а $a_l^{\tau\tau^*}\neq 0$ для компонент $\tau\sim(l_0,\ l_1)$ и $\tau^*\sim(l_0,\ -\bar{l}_1)$, причем в конечномерном случае l_1 вещественно и потому $\tau^*=\dot{\tau}=(-l_0,\ l_1)$.

Из выражения (11) видно, что если форма $(L_0\psi, \psi)$ неотрицательна, то компоненты τ и τ^* зацепляются; в противном случае форма не содержала бы членов с $|y_{lm}^{\tau^*}|^2$ и $|y_{lm}^{\tau'}|^2$, а содержала бы только произведения различных координат $y_{lm}^{\tau^*}\bar{y}_{lm}^{\tau'}$. Такая форма, как легко видеть, может принимать значения разных знаков. Конечномерные компоненты τ и τ^* зацепляются лишь, когда $l_0 = -l_0 \pm 1$, т. е. $l_0 = \pm\frac{1}{2}$. Итак, представление T_g содержит неприводимые компоненты только вида $\left(\pm\frac{1}{2}, l_1\right)$, зацепляющиеся по схеме

$$\left(\frac{1}{2}, l_1\right) \longleftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, l_1\right). \tag{12}$$

Форма $(L_0\psi, \psi)$ приобретает при этом вид

$$(L_0\psi, \psi) = \sum a_l^{\tau\tau'} c_l^{\tau\tau'} |y_{lm}^{\tau'}|^2. \tag{13}$$

Если теперь какая-нибудь пара зацепляющихся компонент содержит более одного веса l $\left(\text{т. е. } l_1 > \frac{3}{2}\right)$, то члены $|y_{lm}^{\tau'}|^2$ и $|y_{l+1, m}^{\tau'}|^2$ входят в выражение (13) с разными знаками (действительно, для конечномерных представлений $a_l^{\tau\tau'} = -a_{l+1}^{\tau\dot{\tau}'}$, см. формулу (38) § 2, а $c_l^{\tau\tau'}$ и $c_{l+1}^{\tau\tau'}$ имеют одинаковые знаки). Следовательно, форма неотрицательна лишь, когда представление T_g содержит компоненты $\tau \sim \left(\pm\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Легко проверить, что в случае, когда каждая из этих компонент встречается в представлении T_g более одного раза, уравнение, а также и инвариантная форма будут распадающимися. Таким образом, для нераспадающегося уравнения представление $g \to T_g$ содержит лишь две зацепляющиеся компоненты $\tau\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ и $\tau^* = \dot{\tau}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. Такое зацепление, как мы видели в § 9, приводит к уравнению Дирака. Для уравнения же Дирака форма $(L_0\psi, \psi)$ имеет вид (см. (2) и (4) § 9)

$$(L_0\psi, \psi) = \sum_{m=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \left\{ |y^{\tau}_{\frac{1}{2} m}|^2 + |y^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2} m}|^2 \right\} > 0. \tag{14}$$

Итак, из конечномерных уравнений ($\varkappa \neq 0$) *с матрицей* L_0, *приводимой к диагональному виду, только уравнение Дирака имеет положительный заряд.*

3. Конечномерные уравнения с положительной энергией и матрицей L_0, приводящейся к диагональному виду. Положительность энергии, как мы видели, означает положительность формы

$$W = \varkappa(\psi_\lambda, \psi_\lambda) > 0 \tag{15}$$

для собственных векторов ψ_λ матрицы L_0 с ненулевым собственным значением.

В случае, если матрица L_0 может быть приведена к диагональному виду, это условие равносильно неотрицательной определенности формы

$$(L_0\psi,\ L_0\psi) \geqslant 0 \tag{16}$$

для всех векторов ψ. Это обстоятельство проверяется точно так же, как мы это делали в предыдущем пункте для случая формы $(L_0\psi,\ \psi)$.

В каноническом базисе представления $g \to T_g$ эта форма запишется так:

$$(L_0\psi,\ L_0\psi) = \sum_{l,\tau,m} a_l^{\tau\tau^*} c_l^{\tau\tau'} \bar{c}_l^{\tau^*\tau^{*\prime}} y_{lm}^{\tau'} \bar{y}_{lm}^{\tau^{*\prime}}; \tag{17}$$

здесь через $\tau^{*\prime}$ обозначены компоненты, зацепляющиеся с τ^*. Для того, чтобы это выражение было неотрицательным, компоненты τ и $\tau^{*\prime}$ должны зацепляться, иначе форма (17) не содержала бы членов $|y_{lm}^{\tau'}|^2$ и $|y_{lm}^{\tau^*}|^2$, а содержала бы только произведение $y_{lm}^{\tau'}\bar{y}_{lm}^{\tau^*}$ и, следовательно, могла бы принимать значения обоих знаков.

В конечномерном случае компоненты τ и τ^* зацепляются, лишь если

а) $\qquad l_0 \pm 1 = -l_0 \pm 1, \qquad$ т. е. $\qquad l_0 = 0,\ 1,\ -1,$

и

б) $\qquad l_0 = 0, \qquad$ т. е. $\qquad \tau \sim (0,\ l)$ и $\tau^{*\prime} \sim (0,\ l \pm 1)$.

Таким образом, представление T_g содержит компоненты вида $(1,\ l_1)$, $(-1,\ l_1)$, $(0,\ l_1)$, зацепляющиеся по схемам

а) $$(-1,\ l_1) \longleftrightarrow (0,\ l_1) \longleftrightarrow (1,\ l_1)$$

и

б) $$(0,\ l_1 - 1) \longleftrightarrow (0,\ l_1).$$

Покажем, что в обоих случаях $l_1 = 2$. Действительно, при $l_1 > 2$ каждая из компонент $(1,\ l_1)$, $(-1,\ l_1)$, $(0,\ l_1)$, $(0,\ l_1 - 1)$ содержала бы более одного веса l и члены $|y_{lm}^{\tau_1}|^2$ и $|y_{l-1,m}^{\tau_1}|^2$ входили бы в выражение (17) с разными знаками $\left(a_{l-1}^{\tau\tau^*} = -a_l^{\tau\tau^*}\right)$.

Итак, представление T_g содержит только компоненты вида $\tau_0 \sim (0,\ 1)$, $\tau_1 \sim (0,\ 2)$, $\tau_2 \sim (-1,\ 2)$, $\dot{\tau}_2 \sim (1,\ 2)$. Все они не могут одновременно входить в одну схему зацепления

$$\begin{tikzcd} \dot{\tau}_2 \arrow[r, leftrightarrow] & \tau_1 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \tau_2 \\ & \tau_0 & \end{tikzcd},$$

так как в этом случае в форме (17) коэффициент при $|y_{00}^{\tau_0}|^2$ (равный $a_0^{\tau_1\tau_1}|c_0^{\tau_1\tau_0}|^2$) и коэффициент при $|y_{1m}^{\tau_2}|^2$ (равный $a_1^{\tau_1\tau_1}|c_1^{\tau_1\tau_2}|^2$) были бы разного знака. Кроме того, в случае, если какая-нибудь из компонент входит в T_g более одного раза, то уравнение распадается. Таким образом, для нераспадающегося уравнения возможны лишь две схемы зацепления:

а) $$(0, 2) \longleftrightarrow (0, 1)$$

и

б) $$(-1, 2) \longleftrightarrow (0, 2) \longleftrightarrow (1, 2).$$

Первая из них приводит к уравнению Даффина (см. § 9) для частиц со спином 0, вторая — к уравнению Даффина для частиц со спином 1.

Форма $(L_0\psi, L_0\psi)$ в каждом из случаев равна (см. § 9)

а) $$(L_0\psi, L_0\psi) = |y_{00}^{\tau_0}|^2 + |y_{00}^{\dot{\tau}_1}|^2 \geqslant 0$$

и

б) $$(L_0\psi, L_0\psi) = 2\sum_m |y_{1m}^{\tau_1}|^2 + \sum_m \{|y_{1m}^{\tau_2}|^2 + |y_{1m}^{\dot{\tau}_2}|^2 + y_{1m}^{\tau_2}\overline{y_{1m}^{\dot{\tau}_2}} + y_{1m}^{\dot{\tau}_2}\overline{y_{1m}^{\tau_2}}\} \geqslant 0,$$

т. е., действительно, энергия положительна.

Итак, *из конечномерных уравнений с приводимой к диагональному виду матрицей L_0 только уравнения Даффина (для частиц со спином $l=0$ или для частиц со спином $l=1$) имеют положительную энергию.*

Возможны, однако, конечномерные уравнения с положительной энергией, или зарядом, у которых матрица L_0 не приводится к диагональному виду.

Мы рассмотрим пример одного такого уравнения с положительным зарядом.

4. Уравнения с положительным зарядом и матрицей L_0, не приводящейся к диагональному виду. Пусть представление T_g, преобразующее компоненты волновой функции, состоит из компонент

$$\tau_1 \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \dot{\tau}_1 \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \quad \tau_2 \sim \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right), \quad \dot{\tau}_2 \sim \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right),$$

зацепляющихся по схеме

$$\begin{array}{ccc} \tau_1 & \longleftrightarrow & \dot{\tau}_1 \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \tau_2 & \longleftrightarrow & \dot{\tau}_2 \end{array} \qquad (18)$$

Напомним, что с такой схемой мы уже встречались в § 9, п. 5, где и нашли общий вид соответствующих этой схеме инвариантных уравнений, получаемых из инвариантной функции Лагранжа. Матрица L_0 таких уравнений состоит из ящиков

$$
\left.\begin{array}{lcc}
\text{а)} & l=\frac{1}{2} & l=\frac{3}{2} \\[1ex]
& \left\|\begin{matrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ \beta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \beta & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\|; & \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|, \\[1ex]
\text{или} & & \\
\text{б)} & l=\frac{1}{2} & l=\frac{3}{2} \\[1ex]
& \left\|\begin{matrix} 0 & \alpha & \beta & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\beta & \frac{1}{2} & 0 \end{matrix}\right\|; & \left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|.
\end{array}\right\} \qquad (19)
$$

α и β — вещественные числа, причем $\beta > 0$.

Каждому из случаев а) и б) соответствуют разные инвариантные формы. Выпишем их:

$$
\left.\begin{aligned}
\text{а)}\ (\psi_1, \psi_2) &= \sum_{m=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \left\{ x^{\tau_1}_{\frac{1}{2} m} \bar{y}^{\dot{\tau}_1}_{\frac{1}{2} m} + x^{\dot{\tau}}_{\frac{1}{2} m} \bar{y}^{\tau_1}_{\frac{1}{2} m} \right\} + \\
&\qquad + \sum_{l, m} (-1)^{[l]} \left\{ x^{\tau_2}_{lm} \bar{y}^{\dot{\tau}_2}_{lm} + x^{\dot{\tau}_2}_{lm} \bar{y}^{\tau_2}_{lm} \right\}; \\
\text{б)}\ (\psi_1, \psi_2) &= - \sum_{m=\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \left\{ x^{\tau_1}_{\frac{1}{2} m} \bar{y}^{\dot{\tau}_1}_{\frac{1}{2} m} + x^{\dot{\tau}_1}_{\frac{1}{2} m} \bar{y}^{\tau_1}_{\frac{1}{2} m} \right\} + \\
&\qquad + \sum_{l, m} (-1)^{[l]} \left\{ x^{\tau_2}_{lm} \bar{y}^{\dot{\tau}_2}_{lm} + x^{\dot{\tau}_2}_{lm} \bar{y}^{\tau_2}_{lm} \right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (20)
$$

Заметим, что энергия W в обоих случаях не является положительно определенной. Действительно, в состояниях $\psi_{-\varkappa \frac{3}{2} m}$ и $\psi_{\varkappa \frac{3}{2} m}$, соответствующих спину $l = \frac{3}{2}$ и собственным значениям ящика

$$
\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}\right\|,
$$

равным ± 1, энергия имеет разные знаки:

$$(\psi_{-\varkappa\frac{3}{2}m}, \psi_{-\varkappa\frac{3}{2}m}) = -(\psi_{\varkappa\frac{3}{2}m}, \psi_{\varkappa\frac{3}{2}m}).$$

Рассмотрим заряд. В случае а) матрица L_0 приводится к диагональному виду при любых значениях α и β и, следовательно, заряд у соответствующих уравнений не является положительно определенным.

Обратимся к случаю б). Так как мы ищем матрицу L_0, не приводящуюся к диагональному виду, то она должна иметь кратные собственные значения. Это значит, что характеристическое уравнение матрицы $\|c^{\tau\tau'}_{\frac{1}{2}}\|$

$$\lambda^4 - \left(\alpha^2 + \frac{1}{4} - 2\beta^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta^2\right)^2 + 0 \tag{21}$$

имеет кратные корни.

Здесь возможны три случая:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \alpha = -\frac{1}{2}; & \text{корни: } \lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{1}{4} - \beta^2} = -\lambda_{3,4}, \\ 2) & \alpha = \frac{1}{2} \pm 2\beta; & \text{корни: } \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \beta = -\lambda_{3,4}, \\ 3) & \alpha = -2\beta^2; & \text{корни: } \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -\lambda_4 = \frac{1}{2} - 2\beta^2. \end{array}\right\} \tag{22}$$

Случаи 1) и 2) при $\beta \neq \frac{1}{2}$ дают матрицу L_0, приводимую к диагональному виду, и, следовательно, заряд в этих случаях не является положительно определенным.

В случае 3) матрица L_0 к диагональному виду уже не приводится. При этом для всех собственных векторов $\psi^0_{\lambda\frac{1}{2}m}$ ящика $\|c^{\tau\tau'}_{\frac{1}{2}}\|$ форма $(\psi^0, \psi^0) = 0$. Таким образом, в случае 3) заряд неотрицателен. Однако при $\beta \neq \frac{1}{2}$ существуют ненулевые собственные значения λ ящика $\|c^{\tau\tau'}_{\frac{1}{2}}\|$, т. е. возможны состояния (плоские волны) со спином $l = \frac{1}{2}$, энергия и заряд которых равны нулю $W = \varkappa(\psi^0, \psi^0) = s_0 = \lambda_i(\psi^0, \psi^0) = 0$. Лишь при $\beta = \frac{1}{2}$ таких состояний нет (все собственные значения ящика $\|c^{\tau\tau'}_{\frac{1}{2}}\|$, отвечающего спину $l = \frac{1}{2}$, при $\beta = \frac{1}{2}$ равны нулю). При $\beta = \frac{1}{2}$ из формулы (22) 1) и 3) находим.

что $\alpha = -\frac{1}{2}$ и мы приходим к уравнению Паули-Фирца (см. § 9). Заряд для этого уравнения $\left(\text{в состояниях с } l = \frac{3}{2}\right)$ имеет вид

$$s_0 = \sum_{m=-\frac{3}{2}}^{m=+\frac{3}{2}} \left\{ \left| y^{\tau_2}_{\frac{3}{2}\, m} \right|^2 + \left| y^{\dot{\tau}_2}_{\frac{3}{2}\, m} \right|^2 \right\} > 0.$$

Таким образом, из всех уравнений со схемой зацепления (18) лишь для уравнения Паули-Фирца все плоские волны в системе покоя имеют положительный заряд $\left(\text{и спин } l = \frac{3}{2}\right)$.

5. Теорема Паули. В предыдущем пункте мы видели, что в случае конечномерных уравнений не существует частиц с целым спином и положительно определенной плотностью заряда, а также нет частиц с полуцелым спином, обладающих положительно определенной плотностью энергии.

Этот факт является следствием более общей теоремы, принадлежащей Паули. Прежде чем сформулировать эту теорему, сделаем несколько напоминаний.

В п. 8 § 8 мы рассматривали функции $\Phi(x)$, значения которых в каждой точке x квадратично зависят от значений волновой функции $\psi(x)$ и ее частных производных в этой же точке. При преобразовании Лоренца $x' = gx$ и $\psi(x') = T_g \psi(x)$ величины $\Phi(x)$ также преобразуются по некоторому представлению $g \to \tau_g$

$$\tilde{\Phi}(x') = \tau_g \Phi(x).$$

Мы показали в § 8, что представление $g \to \tau_g$, по которому преобразуются величины $\Phi(x)$, содержится в сумме представлений вида

$$(T_g \times T_g^*) \times (T_g^s \times T_g^l),$$

где через T_g^s и T_g^l обозначены представления, действующие в пространстве симметрических тензоров ранга s и l соответственно *).

В случае, когда представление $g \to T_g$ конечномерно, представления $g \to \tau_g$, по которым преобразуются величины Φ, раскладываются в сумму неприводимых тензорных представлений. Величины $\Phi(x)$ мы условились в связи с этим называть тензорами, квадратично

---

*) Напомним, что представление $g \to T_g^*$ состоит из неприводимых компонент $\tau_1^*, \ldots, \tau_k^*, \ldots$, если представление $g \to T_g$ состоит из компонент $\tau_1, \ldots, \tau_k, \ldots$ (неприводимые компоненты τ и τ^* определяются соответственно парами $\tau \sim (l, l)$ и $\tau^* \sim (l_0, -\bar{l})$.

зависящими от ψx). Так, например, вектор тока s_i и тензор энергии — импульса T^i_j служат примерами тензоров, квадратично зависящих от $\psi(x)$.

Заметим, что неприводимые тензорные представления можно разделить на два типа: четные и нечетные, в зависимости от того, принадлежат ли они тензорному представлению четного или нечетного ранга *). Если представление, по которому преобразуется величина $\Phi(x)$, раскладывается на четные (нечетные) неприводимые компоненты, то величину $\Phi(x)$ будем называть соответственно четным (нечетным) тензором. Вектор тока, например, является нечетным, а тензор энергии — импульса четным тензором.

Сформулируем теперь теорему Паули.

I. Пусть волновая функция ψ удовлетворяет конечномерному релятивистски-инвариантному уравнению

$$\sum L_k \frac{\partial\psi}{\partial x_k} + i\varkappa\psi = 0, \qquad \varkappa \neq 0, \tag{23}$$

и преобразуется по представлению $g \to T_g$, содержащему только целые веса l (частицы с целым спином).

Пусть $\Phi(x)$ — нечетный тензор, квадратично зависящий от $\psi(x)$ и ее производных (условимся писать $\Phi = \Phi[\psi(x)]$).

В таком случае *для каждого решения* $\psi(x)$ *уравнения* (23) *найдется другое решение этого уравнения* $\tilde{\psi}(x)$ *такое, что*

$$\Phi[\psi(x)] = -\Phi[\tilde{\psi}(x)],$$

т. е. *тензор* $\Phi(x)$ *меняет знак при переходе от волновой функции* $\psi(x)$ *к волновой функции* $\tilde{\psi}(x)$.

Из этой теоремы следует, что никакая компонента нечетного тензора Φ не может оставаться положительно определенной для всех решений уравнения (23).

Так как вектор тока (s_0, s_1, s_2, s_3) является нечетным тензором, то теорема Паули означает, что в случае частиц с целым спином плотность заряда s_0 не может быть положительно определенной.

II. Пусть волновая функция $\psi(x)$ удовлетворяет конечномерному уравнению (23) и преобразуется по представлению $g \to T_g$, содержащему полуцелые веса (частицы с полуцелым спином). Пусть $\Phi(x)$ — какой-нибудь четный тензор, квадратично зависящий от $\psi(x)$ и ее

*) Такое разделение корректно: одно и то же представление нельзя реализовать как в тензорах четного, так и в тензорах нечетного ранга. Как легко следует из результатов § 6, все неприводимые компоненты тензорного представления четного ранга эквивалентны спинорным представлениям $T_g^{(k,n)}$, где k и n одновременно четные. Неприводимые компоненты тензорного представления нечетного ранга эквивалентны спинорным представлениям $T_g^{(k,n)}$, у которых числа k и n одновременно нечетные.

производных: $\Phi = \Phi[\psi(x)]$. Тогда *для любого решения* $\psi(x)$ *уравнения* (23) *найдется другое решение* $\tilde{\psi}(x)$ *того же уравнения такое, что* $\Phi[\tilde{\psi}(x)] = -\Phi[\psi(x)]$.

Таким образом, в случае частиц с полуцелым спином никакая компонента четного тензора, квадратично зависящего от $\psi(x)$, не может оставаться положительной для всех решений уравнения (23). В частности, поскольку тензор энергии — импульса T^i_j является четным тензором, то плотность энергии $W = -T^0_0$ не может быть положительно определенной для частиц с полуцелым спином.

Доказательства теоремы Паули мы не приводим *). Заметим, что эта теорема верна только для конечномерных уравнений. Для бесконечномерных уравнений, как мы увидим в следующем пункте, энергия и заряд могут быть сделаны и одновременно и порознь положительными как при целом, так и при полуцелом спине.

6. Бесконечномерные уравнения с положительным зарядом или энергией. Примерами таких уравнений могут служить бесконечномерные уравнения, рассмотренные нами в § 9, п. 7.

I. Напомним, что волновая функция ψ преобразовывалась по неприводимому представлению (самозацепляющемуся) $\tau_1 \sim \left(0, \frac{1}{2}\right)$ или $\tau_2 \sim \left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Участвующие в этих представлениях веса l (спин частицы) пробегают значения либо $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ (для τ_1), либо $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$ (для τ_2). Матрица L_0 в обоих случаях диагональна и имеет вид

$$L_0 = \left\| \left(l + \frac{1}{2}\right) \delta_{mm'} \delta_{ll'} \right\|. \tag{24}$$

Заметим, что оба представления τ_1 и τ_2 унитарны (см. § 2). Таким образом скалярное произведение (ψ_1, ψ_2) является инвариантной формой, причем $(\psi, \psi) > 0$. Отсюда заряд (для плоских волн в системе покоя)

$$s_0 = (L_0\psi^0, \psi^0) = \left(l + \frac{1}{2}\right)(\psi^0, \psi^0)$$

и энергия

$$W = \varkappa(\psi^0, \psi^0)$$

положительны.

Таким образом, мы получили два уравнения: одно для частиц с целым спином (представление τ_1), другое для частиц с полуцелым спином (пара τ_2) для которых положительны и энергия и заряд.

II. Это уравнение со схемой зацепления

$$\left(\frac{1}{2}, l_1\right) \longleftrightarrow \left(-\frac{1}{2}, l_1\right), \tag{25}$$

*) Доказательство этой теоремы содержится в книге В. Паули «Релятивистская теория элементарных частиц», ИЛ, 1947, стр. 75 и в книге А. И. Ахиезера и В. Б. Берестецкого «Квантовая электродинамика», Гостехиздат, 1953, стр. 405.

где l_1 — чисто мнимое или вещественное. Матрица L_0 состоит из ящиков $\|c_l^{\tau\tau'}\|$

$$\|c_l^{\tau\tau'}\| + \begin{Vmatrix} 0 & l+\frac{1}{2} \\ l+\frac{1}{2} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

При l_1 чисто мнимом инвариантную форму (ψ, ψ) можно выбрать положительно определенной: $(\psi, \psi) > 0$.

В этом случае энергия положительна, а заряд может принимать значения разных знаков. Спин частицы — полуцелый.

При вещественном l_1 мы получим уравнение с энергией обоих знаков; при $0 \leqslant |l_1| \leqslant \frac{3}{2}$ заряд будет положительно определенным и при $|l_1| > \frac{3}{2}$ знак заряда будет неопределенным; спин — по-прежнему полуцелый.

Наконец, для уравнений со схемой зацепления

$$\left(l_1, \frac{1}{2}\right) \longleftrightarrow \left(l_1, -\frac{1}{2}\right)$$

(где l_1 — целое или полуцелое; матрица L_0 для таких уравнений имеет по-прежнему вид (26)) мы будем иметь положительно определенный заряд и энергию обоих знаков; спин, соответствующий этим уравнениям, будет целым или полуцелым одновременно с l_1.

Таким образом, из приведенных примеров видно, что для бесконечномерных уравнений как при целом, так и при полуцелом спине могут быть положительными либо энергия, либо заряд, либо обе величины одновременно.

ДОПОЛНЕНИЯ

I. Неприводимые представления группы ортогональных матриц

В первой части книги приведены формулы для инфинитезимальных операторов любого неприводимого представления трехмерной группы вращения, или, что одно и то же, группы ортогональных матриц 3-го порядка. В этом дополнении мы приведем явные формулы, задающие инфинитезимальные операторы неприводимых представлений группы ортогональных матриц любого порядка.

Напомним, что матрица $\|g_{ik}\|$ называется ортогональной, если задаваемое ею линейное преобразование

$$x'_i = \sum_{k=1}^{n} g_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

сохраняет форму $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, т. е. $\sum\limits_{i=1}^{n} (x'_i)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.

Очевидно, что ортогональные матрицы n-го порядка образуют группу, которую мы будем обозначать K_n. В группе K_n можно выбрать $n(n-1)/2$ различных однопараметрических подгрупп точно так же, как мы это делали для группы вращений и собственной группы Лоренца. Рассмотрим подгруппу ортогональных матриц, преобразующих только переменные x_i и x_k $(i \neq k)$ и не меняющих остальные переменные. Поскольку каждая такая матрица сохраняет сумму $x_i^2 + x_k^2$, то ей соответствует вращение в плоскости $(x_i x_k)$. Сама матрица имеет при этом вид

$$g_{ik}(t) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & (i) & & (k) & \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 1\ \ 0\ldots0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots \\ 0\ \ 1\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0\ \ 0\ldots1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots0 & \cos t & \ldots & \sin t & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots0 & -\sin t & \ldots & \cos t & 0\ \ldots \\ & & & 0 & 1\ \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ 1 \end{array} \right\| \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ (i) \\ \\ \\ (k) \\ \\ \\ \end{array} \qquad (1)$$

Все матрицы вида (1) образуют, очевидно, однопараметрическую подгруппу группы ортогональных матриц. Всего таким образом можно построить $n(n-1)/2$ различных однопараметрических подгрупп. Можно показать, что каждая ортогональная матрица представима в виде произведения матриц $g_{ik}(t)$ из этих подгрупп.

Рассмотрим теперь представление $g \to T_g$ группы K_n. Каждой однопараметрической подгруппе $g_{ik}(t)$ отвечает в этом представлении инфинитезимальный оператор I_{ik} $(i < k = 1, \ldots, n)$. Напишем соотношение коммутации между этими операторами. Заметим, что при тождественном представлении $g \to g$ группы K_n инфинитезимальным оператором, отвечающим подгруппе $g_{ik}(t)$, является матрица e_{ik}, у которой элементы $g_{ik} = -g_{ki} = 1$, а остальные элементы равны нулю.

Нетрудно проверить, что коммутаторы таких матриц равны

$$[e_{i_1k_1}e_{i_2k_2}] = \delta_{k_1i_2}e_{i_1k_2} + \delta_{i_1k_2}e_{k_1i_2} - \delta_{k_1k_2}e_{i_1i_2} - \delta_{i_1i_2}e_{k_1k_2}. \tag{2}$$

Аналогичные соотношения коммутации возникают и между инфинитезимальными операторами I_{ik} любого представления ортогональной группы.

Заметим, что всякое представление ортогональной группы унитарно. При этом операторы I_{ik} и I_{ki} связаны соотношением $I_{ik} = -(I_{ki})^*$.

Из соотношений (2) ясно, что для описания представления достаточно знать, как действуют операторы $I_{21}, I_{32}, I_{43}, \ldots, I_{k+1,\,k}$, так как остальные можно выразить через них с помощью соотношений (2).

Итак, мы построим инфинитезимальные операторы $I_{k+1,\,k}$ для всех неприводимых представлений группы ортогональных матриц n-го порядка.

Начнем с нескольких частных случаев:

I. Напомним прежде всего случай $n = 3$. Каждое неприводимое представление этой группы задается целым или полуцелым числом l. В пространстве R, где действует такое представление, можно выбрать канонический базис $\{\xi_m\}$, где индекс m принимает все значения, целые или полуцелые одновременно с l и заключенные в пределах $l \geqslant m \geqslant -l$. Операторы I_{21} и I_{32} в базисе $\{\xi_m\}$ задаются формулами

$$\left.\begin{aligned} I_{21}\xi_m &= im\xi_m, \\ I_{32}\xi_m &= \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,\xi_{m+1} - \sqrt{(l-m+1)(l+m)}\,\xi_{m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

II. Рассмотрим случай $n = 4$. Каждое неприводимое представление группы ортогональных матриц 4-го порядка $g \to T_g$ порождает представление $\tilde{g} \to T_{\tilde{g}}$ группы матриц третьего порядка (вообще говоря, приводимое). Пространство R, где действует представление $g \to T_g$, разбивается при этом в сумму подпространств R_l, в каждом из которых представление $\tilde{g} \to T_{\tilde{g}}$ неприводимо и задается весом l.

Можно показать, что вес l принимает по одному разу все целые или полуцелые значения, заключенные между двумя числами m_1 и $|m_2|$: $m_1 \geqslant l \geqslant |m_2|$, числа m_1 и m_2, определяющие представление, одновременно целые или полуцелые. В каждом из подпространств R_l можно выбрать канонический базис $\{\xi_m^l\}$, причем объединение этих базисов образует базис во всем пространстве R. Операторы I_{12} и I_{23} действуют в базисе $\{\xi_m^l\}$ по формулам (3). Оператор же I_{43} задается формулой

$$I_{43}\xi_m^l = \sqrt{\frac{(l+m+1)(l-m+1)(m_1-l)(m_1+l+2)(l-m_2+1)(l+m_2+1)}{(2l+1)(2l+3)(l+1)^2}} \times$$
$$\times \xi_m^{l+1} + im\frac{(m_1+1)m_2}{(l+1)l}\xi_m^l -$$
$$-\sqrt{\frac{(l+m)(l-m)(m_1-l+1)(m_1+l+1)(l-m_2)(l+m_2)}{(2l+1)(2l-1)l^2}}\xi_m^{l-1}. \quad (4)$$

III. Наконец, рассмотрим случай $n=5$. Каждое представление группы 5-го порядка порождает представление группы 4-го порядка. Последнее можно разложить на неприводимые компоненты, определяемые парами m_1, m_2. Числа m_1 и m_2 независимо пробегают по одному разу все значения, заключенные в пределах $n_1 \geqslant m_1 \geqslant n_2 \geqslant \geqslant m_2 \geqslant -n_2$, где числа n_1 и n_2 (одновременно целые или полуцелые) задают представление. В каждом из неприводимых подпространств $R(m_1m_2)$ можно выбрать канонический базис $\xi\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix}$. Операторы I_{12}, I_{23}, I_{34} действуют в этом базисе по формулам (3) и (4) (индексы m_1 и m_2 не меняются).

Оператор I_{54} задается формулой

$$I_{54}\xi\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} =$$
$$= \sqrt{\frac{(m_1-l+1)(m_1+l+2)(n_1-m_1)(n_1+m_1+2)(m_1-n_2+1)(m_1+n_2+2)}{(m_1+m_2+1)(m_1+m_2+2)(m_1-m_2+1)(m_1-m_2+2)}} \times$$
$$\times \xi\begin{pmatrix} m_1+1, & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} +$$
$$+\sqrt{\frac{(l-m_2)(m_2+l+1)(n_2-m_2)(n_2+m_2+1)(n_1-m_2+1)(n_1+m_2+2)}{(m_1+m_2+1)(m_1+m_2+2)(m_1-m_2)(m_1-m_2+1)}} \times$$
$$\times \xi\begin{pmatrix} m_1, & m_2+1 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix} -$$

$$-\sqrt{\frac{(m_1+l+1)(m_1-l)(n_1-m_1+1)(n_1+m_1+2)(m_1-n_2)(m_1+n_2+1)}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)(m_1-m_2)(m_1-m_2+1)}}\times$$

$$\times\xi\begin{pmatrix} m_1-1, & m_2 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix}-$$

$$-\sqrt{\frac{(l-m_2+1)(m_2+l)(n_2-m_2+1)(n_2+m_2)(n_1-m_2+2)(m_2+n_1+1)}{(m_1+m_2)(m_1+m_2+1)(m_1-m_2+2)(m_1-m_2+1)}}\times$$

$$\times\xi\begin{pmatrix} m_1, & m_2-1 \\ & l & \\ & m & \end{pmatrix}.$$

IV. Рассмотрим общий случай. Пусть n — четное: $n=2k+2$. Образуем схему

$$\alpha=\left\{\begin{array}{ccccccc}
m_{2k,\,1} & & m_{2k,\,2} & \ldots & & & m_{2k,\,k} \\
m_{2k-1,\,1} & & m_{2k-1,\,2} & \ldots & & & m_{2k-1,\,k} \\
& m_{2k-2,\,1} & & m_{2k-2,\,2} & \ldots & m_{2k-2,\,k-1} & \\
& m_{2k-3,\,1} & & m_{2k-3,\,2} & \ldots & m_{2k-3,\,k-1} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
& & m_{41} & & m_{42} & & \\
& & m_{31} & & m_{32} & & \\
& & & m_{21} & & & \\
& & & m_{11} & & &
\end{array}\right\},$$

где числа m_{ij} — одновременно целые или полуцелые.

При этом числа m_{ij} пробегают значения

$$n_1 \geqslant m_{2k,\,1} \geqslant n_2 \geqslant m_{2k,\,2} \geqslant \ldots \geqslant n_k \geqslant m_{2k,\,k} \geqslant |n_{k+1}|,$$

$$m_{2k,\,1} \geqslant m_{2k-1,\,1} \geqslant m_{2k,\,2} \geqslant \ldots \geqslant m_{2k-1,\,k} \geqslant -m_{2k-1,\,k},$$

$$m_{2k-1,\,1} \geqslant m_{2k-2,\,1} \geqslant m_{2k-1,\,2} \geqslant \ldots \geqslant m_{2k-2,\,k-1} \geqslant |m_{2k-1,\,k}|$$

и т. д.

$$\left.\begin{array}{lll}
m_{2p+1,\,i} \geqslant m_{2p,\,i} \geqslant m_{2p+1,\,i+1}, & & i=1,\ \ldots,\ p-1, \\
m_{2p+1,\,p} \geqslant m_{2p,\,p} \geqslant |m_{2p+1,\,p+1}|, & & \\
m_{2p,\,i} \geqslant m_{2p-1,\,i} \geqslant m_{2p,\,i+1}, & & i=1,\ \ldots,\ p-1, \\
m_{2p,\,p} \geqslant m_{2p-1,\,p} \geqslant -m_{2p,\,p}. & &
\end{array}\right\}\qquad(5)$$

Здесь $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}$ — фиксированные числа (одновременно целые или полуцелые), определяющие представление.

В случае $n=2k+1$ схема α имеет вид

$$\alpha=\begin{pmatrix} m_{2k-1,\,1} & & m_{2k-1,\,2} & \dots & \dots & & m_{2k-1,\,k} \\ & m_{2k-2,\,1} & \dots & \dots & m_{2k-2,\,k-1} & & \\ & m_{2k-3,\,1} & & & m_{2k-3,\,k-1} & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ & & m_{41} & & m_{42} & & \\ & & m_{31} & & m_{32} & & \\ & & & m_{21} & & & \\ & & & m_{11} & & & \end{pmatrix},$$

а числа m_{ij} подчинены условиям

$$\left.\begin{aligned} &n_1 \geqslant m_{2k-1} \geqslant n_2 \geqslant m_{2k-1,\,2} \geqslant \dots \geqslant n_k \geqslant m_{2k-1,\,k} \geqslant -n_k, \\ &m_{2k-1,\,1} \geqslant m_{2k-2,\,1} \geqslant m_{2k-1,\,2} \geqslant \dots \geqslant m_{2k-2,\,k-1} \geqslant |m_{2k-1,\,k}| \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

и т. д. согласно неравенствам (5). Числа $n_1, n_2, \dots, n_k$ — фиксированные числа, задающие представление (одновременно целые или полуцелые). Каждой такой схеме отнесем вектор $\xi(\alpha)$ из пространства R, в котором действует наше представление. Оказывается, что при этом векторы $\xi(\alpha)$ образуют базис в пространстве R. Мы напишем формулы для операторов $I_{2p+1,\,2p}$ и $I_{2p+2,\,2p+1}$ в базисе $\xi(\alpha)$. Обозначим через $\xi^+(\alpha_r^j)$ вектор, соответствующий схеме, полученной из схемы α заменой m_{rj} на $m_{rj}+1$, а через $\xi^-(\alpha_r^j)$ — вектор, схема которого получается из схемы α заменой m_{rj} на $m_{rj}-1$ (предполагается, что в обоих случаях мы приходим к схемам, удовлетворяющим условиям (5) или (6)).

Формулы для операторов $I_{2p+1,\,p}$ и $I_{2p+2,\,2p+1}$ имеют вид

$$I_{2p+1,\,2p}\xi(\alpha)=\sum_{j=1}^{p} A(m_{2p-1,\,j})\,\xi^+(\alpha_{2p-1}^j)-\sum A(m_{2p-1,\,j-1})\,\xi^-(\alpha_{2p-1}^j),$$

$$I_{2p+2,\,2p+1}\xi(\alpha)=\sum_{j=1}^{p} B(m_{2p,\,j})\,\xi^+(\alpha_{2p}^j)-\sum B(m_{2p,\,j-1})\,\xi^-(\alpha_{2p}^j)+iC_{2p}\xi(\alpha).$$

Напишем выражение для коэффициентов A, B и C.

Обозначим

$$\begin{aligned} &m_{2p-1,\,p}=l_{2p-1,\,p}, && m_{2p,\,p}+1=l_{2p,\,p}, \\ &m_{2p-1,\,p-1}=l_{2p-1,\,p-1}, && m_{2p,\,p-1}+2=l_{2p,\,p-1}, \\ &\dots\dots\dots && \dots\dots\dots \\ &m_{2p-1,\,1}+p-1=l_{2p-1}, && m_{2p,\,1}+p=l_{2p,\,1}. \end{aligned}$$

При этом числа, определяющие представление, а именно $n_1, \dots, n_{k+1}$ при четном $n=2k+2$ и $n_1, \dots, n_k$ при нечетном $n=2k+1$, обозначаются в этих равенствах соответственно через $m_{2k+1,\,1}$, $m_{2k+1,\,2}, \dots, m_{2k+1,\,k+1}$ и $m_{2k,\,1}, m_{2k,\,2}, \dots, m_{2k,\,k}$.

В этих обозначениях A, B и C запишутся

$$A(m_{2p-1,\,j}) =$$

$$= \left[\prod_{r=1}^{p-1} (l_{2p-2,\,r} - l_{2p-1,\,j} - 1)(l_{2p-2,\,r} + l_{2p-1,\,j})\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left[\prod_{r=1}^{p} (l_{2p,\,2} - l_{2p-1,\,j} - 1)(l_{2p,\,r} + l_{2p-1,\,j})\right]^{1/2} \times$$

$$\times \left\{\prod \left(l_{2p-1,\,r}^2 - l_{2p-1,\,j}^2\right)\left[l_{2p-1,\,r}^2 - (l_{2p-1,\,j} + 1)^2\right]\right\}^{-1/2},$$

$$B(m_{2p,\,j}) = \left[\frac{\prod\limits_{r=1}^{p}\left(l_{2p-1,\,r}^2 - l_{2p,\,j}^2\right)\prod\limits_{r=1}^{p+1}\left(l_{2p+1,\,r}^2 - l_{2p,\,j}^2\right)}{l_{2p,\,j}^2\left(4l_{2p,\,j}^2 - 1\right)\prod\limits_{r \neq j}\left[l_{2p,\,r}^2 - l_{2p,\,j}^2\right]\left[\left(l_{2p,\,r} - 1\right)^2 - l_{2p,\,j}^2\right]}\right]^{1/2},$$

$$C_{2p} = \frac{\prod\limits_{r=1}^{p} l_{2p-1,\,r} \prod\limits_{r=1}^{p+1} l_{2p+1,\,r}}{\prod\limits_{r=1}^{p} l_{2p,\,r}(l_{2p,\,2} - 1)}.$$

II. Конечномерные представления группы невырожденных матриц n-го порядка

Здесь мы приведем явные формулы, задающие инфинитезимальные операторы для всех неприводимых конечномерных представлений группы всех невырожденных линейных преобразований действительного n-мерного пространства. Эту группу будем обозначать A_n.

Как всегда, начнем с построения однопараметрических подгрупп группы A_n, для которых мы и будем находить инфинитезимальные операторы.

Рассмотрим подгруппу, состоящую из матриц вида

$$a_{ik}(t) = e + e_{ik}t \qquad (i \neq k),$$

где e — единичная матрица, e_{ik} — матрица с единицей на пересечении i-й строки и k-го столбца и с нулями на остальных местах, t — параметр. Нетрудно проверить, что матрицы $a_{ik}(t)$ образуют подгруппу:

$$a_{ik}(t_1) - a_{ik}(t_2) = a_{ik}(t_1 + t_2).$$

Очевидно, что всего в группе A_n существует $n(n-1)$ таких подгрупп.

Кроме того, есть еще n подгрупп диагональных матриц

$$a_{ii}(t)=\begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & e^t & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & 1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

(e^t стоит на i-м месте главной диагонали).

Можно показать, что любой элемент группы A_n представляется в виде произведения элементов из однопараметрических подгрупп $a_{ik}(t)$ $(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$.

Таким образом, чтобы задать представление группы A_n, достаточно задать представление всех n^2 однопараметрических подгрупп, или, что одно и то же, задать для каждого представления инфинитезимальные операторы I_{ik}, соответствующие подгруппам $a_{ik}(t)$.

Напишем соотношения коммутации между операторами I_{ik}. Очевидно, они совпадают с соотношениями коммутации для инфинитезимальных операторов тождественного представления группы A_n: $a \to a$. Инфинитезимальными операторами последнего служат матрицы e_{ik}, и их коммутаторы имеют вид

$$\left.\begin{array}{l} [e_{ik}e_{kl}]=e_{il} \quad (i\neq l), \quad [e_{ik}e_{ki}]=e_{ii}-e_{kk}, \\ [e_{i_1k_1}e_{i_2k_2}]=0, \quad \text{если} \quad k_1\neq i_2 \quad \text{и} \quad i_1\neq k_2. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Аналогичные соотношения выполняются и для операторов I_{ik}.

Мы приведем формулы, задающие операторы I_{ik} для всех конечномерных неприводимых представлений группы A_n.

Начнем с частных случев.

I. $n=2$. Неприводимое конечномерное представление группы невырожденных матриц 2-го порядка задается двумя целыми числами m_1 и m_2 $(m_1\geqslant m_2)$. В пространстве R, где действует такое представление, можно выбрать базис из собственных векторов операторов I_{11} и I_{22}. Эти векторы можно занумеровать индексом q, пробегающим по одному разу все целые значения в пределах $m_1\geqslant q\geqslant m_2$.

Операторы I_{11}, I_{22}, I_{12}, I_{21} в базисе ξ_q запишутся

$$I_{11}\xi_q=q\xi_q, \qquad I_{22}\xi_q=(m_1+m_2-q)\,\xi_q,$$
$$I_{12}\xi_q=\sqrt{(m_1-q)(q-m_2+1)}\,\xi_{q+1},$$
$$I_{21}\xi_q=\sqrt{(q-m_2)(m_1-q+1)}\,\xi_{q-1}.$$

II. $n=3$. Каждое неприводимое представление этой группы задается тремя целыми числами $m_1\geqslant m_2\geqslant m_3$.

Рассмотрим теперь всевозможные тройки целых чисел

$$\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix},$$

удовлетворяющие условиям

$$m_1 \geqslant p_1 \geqslant m_2 \geqslant p_2 \geqslant m_3,$$
$$p_1 \geqslant q \geqslant p_2.$$

Оказывается, что в пространстве, где действует неприводимое представление группы A_3, можно выбрать базис из собственных векторов инфинитезимальных операторов I_{11}, I_{22}, I_{33} и каждому вектору этого базиса отнести одну из троек $\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix}$. В дальнейшем будем обозначать эти векторы $\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix}$.

В базисе $\left\{\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix}\right\}$ операторы I_{11}, I_{22}, I_{12}, I_{21}, I_{23}, I_{32}, I_{33} запишутся:

$$I_{11}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = q\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix}, \quad I_{22}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = (p_1+p_2-q)\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix},$$

$$I_{12}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = \sqrt{(p_1-q)(q-p_2+1)}\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q+1 & \end{pmatrix},$$

$$I_{21}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = \sqrt{(p-q+1)(q-p_2)}\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q-1 & \end{pmatrix},$$

$$I_{23}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(m_1-p_1)(m_2-p_1-1)(m_3-p_1-2)(p_1-q+1)}{(p_1-p_2+2)(p_1-p_2+1)}}\,\xi\begin{pmatrix} p_1+1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} +$$
$$+\sqrt{\frac{(m_1-p_2+1)(m_2-p_2)(m_3-p_2-1)(p_2-q)}{(p_1-p_2+1)(p_1-p_2)}}\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2+1 \\ & q & \end{pmatrix},$$

$$I_{32}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{(m_1-p_1+1)(m_2-p_1)(m_3-p_1-1)(p_1-q)}{(p_1-p_2+1)(p_1-p_2)}}\,\xi\begin{pmatrix} p_1-1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} +$$
$$+\sqrt{\frac{(m_1-p_2+2)(m_2-p_2+1)(m_3-p_2)(p_2-q)}{(p_1-p_2+2)(p_1-p_2+1)}}\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2-1 \\ & q & \end{pmatrix},$$

$$I_{33}\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix} = (m_1+m_2+m_3-p_1-p_2)\,\xi\begin{pmatrix} p_1 & & p_2 \\ & q & \end{pmatrix}.$$

III. Перейдем к общему случаю.

Каждое конечномерное неприводимое представление группы A_n задается n целыми числами: $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1} \geqslant m_n$.

Рассмотрим всевозможные схемы из целых чисел

$$\alpha = \left(\begin{array}{ccccccccc} m_{1,\,n-1} & & m_{2,\,n-1} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & m_{n-1,\,n-1} \\ & m_{1,\,n-2} & & m_{2,\,n-2} & \ldots & \ldots & m_{n-2,\,n-2} & & \\ & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ & & m_{13} & & m_{23} & & m_{33} & & \\ & & & m_{12} & & m_{22} & & & \\ & & & & m_{11} & & & & \end{array}\right),$$

где числа m_{pq} должны удовлетворять условиям

$$m_{p,\,q+1} \geqslant m_{pq} \geqslant m_{p+1,\,q+1}.$$

Числа же первой строки меняются в пределах

$$m_1 \geqslant m_{1,\,n-1} \geqslant m_2 \geqslant m_{2,\,n-1} \geqslant \ldots \geqslant m_{n-1,\,n-1} \geqslant m_n$$

(где $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ — числа, задающие представление). Оказывается, каждой схеме α можно поставить в соответствие вектор $\xi(\alpha)$ — собственный вектор для операторов I_{ii} $(i = 1, \ldots, n)$ из пространства R, где действует наше неприводимое представление, и векторы $\xi(\alpha)$ образуют в R базис. Напишем теперь вид операторов I_{ik} в базисе $\{\xi(\alpha)\}$. Достаточно задать операторы $I_{k-1,\,k}$, I_{kk} и $I_{k,\,k-1}$, так как остальные получаются коммутированием этих операторов по формулам (1).

Обозначим через $\overset{+}{\alpha}{}^i_{k-1,\,k}$ схему, которая получается из схемы α заменой $m_{i,\,k-1}$ на $m_{i,\,k-1}+1$, а через $\overline{\alpha}{}^i_{k-1,\,k}$ — схему, получаемую из α заменой $m_{i,\,k-1}$ на $m_{i,\,k-1}-1$. В этих обозначениях операторы $I_{k-1,\,k}$, I_{kk}, $I_{k,\,k-1}$ запишутся:

$$\left.\begin{aligned} I_{k-1,\,k}\xi(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} a^i_{k-1,\,k}\,\xi\left(\overset{+}{\alpha}{}^i_{k-1,\,k}\right), \\ I_{kk}\xi(\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^{k} m_{ik} - \sum_{i=1}^{k-1} m_{i,\,k-1}\right)\xi(\alpha), \\ I_{k,\,k-1}\xi(\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} b^i_{k,\,k-1}\,\xi\left(\overline{\alpha}{}^i_{k,\,k-1}\right), \end{aligned}\right\} \quad . \tag{2}$$

где числа $a^i_{k-1,\,k}$ и $b^i_{k,\,k-1}$ вычисляются по формулам

$$\left.\begin{aligned} a^j_{k-1,\,k} &= \left[(-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(l_{i,\,k}-l_{j,\,k-1})\prod\limits_{i=1}^{k-2}(l_{i,\,k-2}-l_{j,\,k-1}-1)}{\prod\limits_{i\neq j}(l_{i,\,k-1}-l_{j,\,k-1})(l_{i,\,k-1}-l_{j,\,k-1}-1)}\right]^{1/2}, \\ b^j_{k,\,k-1} &= \left[(-1)^{k-1}\frac{\prod\limits_{i=1}^{k}(l_{i,\,k}-l_{j,\,k-1}+1)\prod\limits_{i=1}^{k-2}(l_{i,\,k-2}-l_{j,\,k-1})}{\prod\limits_{i\neq j}(l_{i,\,k-1}-l_{j,\,k-1}+1)(l_{i,\,k-1}-l_{j,\,k-1})}\right]^{1/2}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Формулами (2) и (3) представление определяется полностью.

Однако мы, тем не менее, впишем формулы для всех операторов I_{pq} $(p < q)$

$$I_{pq}\xi(\alpha) = \sum a^{i_p \ldots i_{q-1}}_{pq}\,\xi\left(\alpha^{i_p \ldots i_{q-1}}_{pq}\right).$$

Здесь $\alpha^{i_p \dots i_{q-1}}$ означает схему, полученную из схемы α увеличением каждого из индексов $m_{i_p p}, \dots, m_{i_{q-1} q-1}$ на 1. Числа $a_{pq}^{i_p \dots i_{q-1}}$ определяются по формуле

$$a_{pq}^{i_p \dots i_{q-1}} = \pm \frac{\prod\limits_{k=p}^{q-1} a_{k,\,k+1}^{i_k}}{\left[\prod\limits_{k=p}^{q-2} (l_{i_k k} - l_{i_{k+1},\,k+1})(l_{i_k k} - l_{i_{k+1},\,k+1})\right]^{1/2}};$$

знак определяется числом инверсий в последовательности $i_p \dots i_{q-1}$.

Аналогичными формулами задаются операторы I_{pq} при $p > q$.

III. Замечание о двойственности между коэффициентами Клебша — Гордона и полиномами Якоби

Оказывается, что между коэффициентами Клебша — Гордона $B^{lm}_{l_1 m_1 l_2 m_2}$ группы вращений и полиномами Якоби

$$P_s^{\alpha\beta}(\mu) = \frac{(-1)^s}{2^s s!}(1-\mu)^{-\alpha}(1+\mu)^{-\beta}\frac{d^s}{d\mu^s}\left[(1-\mu)^{s+\alpha}(1+\mu)^{s+\beta}\right]$$

существует удивительная аналогия.

Введем предварительно несколько определений.

I. Пусть $f(k)$ — функция целочисленного аргумента k. Разностной степенью $s\,\{f(k)\}_k^{[s]}$ этой функции (по аргументу k) мы назовем произведение

$$\{f(k)\}_k^{[s]} = \underbrace{f(k)\,f(k-1)\,f(k-2)\dots f(k-s+1)}_{s}.$$

Так, например,

$$\{k\}_k^{[s]} = k(k-1)\dots(k-s+1) = \frac{k!}{s!}.$$

II. Пусть $f(k)$ по-прежнему — функция целочисленного аргумента. Первой разностью $\frac{\Delta}{\Delta k} f(k)$ мы назовем разность

$$\frac{\Delta}{\Delta k} f(k) = f(k) - f(k-1).$$

Аналогично этому вторая разность $\frac{\Delta^2}{(\Delta k)^2} f(k)$ определится

$$\frac{\Delta^2}{(\Delta k)^2} f(k) = [f(k) - f(k-1)] - [f(k-1) - f(k-2)] =$$
$$= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2).$$

Нетрудно проверить, что n-я разность вычисляется по формуле

$$\frac{\Delta^n}{(\Delta k)^n} f(k) = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s f(k-s).$$

III. Обратимся теперь к полиномам Якоби. Рассмотрим $P_s^{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{k}\right)$:

$$P_\mu^{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{k}\right) = (-1)^s\left(1-\frac{\mu}{k}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{\mu}{k}\right)^{-\beta}\frac{d^s}{d\left(\frac{\mu}{k}\right)^s}\left[\left(1-\frac{\mu}{k}\right)^{s+\alpha}\left(1+\frac{\mu}{k}\right)^{s+\beta}\right]=$$

$$=\frac{(-1)^s}{2^s s!}\,\frac{1}{k^s(k-\mu)^\alpha(k+\mu)^\beta}\,\frac{d^s}{d\mu^s}\left[(k-\mu)^{s+\alpha}(k+\mu)^{s+\beta}\right].$$

Рассмотрим полином

$$T_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k) = 2^s s!\,k^s(k-\mu)^\alpha(k+\mu)^\beta P_s^{\alpha\beta}\left(\frac{\mu}{k}\right)=$$

$$=(-1)^s\frac{d^s}{d\mu^s}\left[(k-\mu)^{s+\alpha}(k+\mu)^{s+\beta}\right].$$

Пусть μ и k — целые числа. Заменим в выражении для $T_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k)$ обычную степень разностной степенью, а производную — разностью, т. е. положим

$$\widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k) = (-1)^s\frac{\Delta^s}{(\Delta\mu)^s}\left[(k-\mu)_\mu^{[s+\alpha]}(k+\mu)_\mu^{[s+\beta]}\right].$$

Функцию $\widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k)$ будем называть *разностным аналогом* полинома $T_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k)$.

Оказывается, имеет место следующая замечательная теорема: *коэффициенты Клебша — Гордона выражаются через функцию* $\widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k)$ *по формуле*

$$B_{l_1m_1l_2m_2}^{lm} = \delta_{m,\,m_1+m_2}\sqrt{\frac{(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(2l+1)}{(l+l_1+l_2+1)!}}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l_1-m_1)!\,(l_1+m_1)!\,(l_2-m_2)!\,(l_2+m_2)!}}\,\widetilde{T}_s^{\alpha\beta}(\mu,\ k),$$

где

$$k=\frac{l_1+l_2+l}{2},\qquad \mu=\frac{l+l_2-l_1}{2}+m_1,$$

$$s=l-l_1+l_2,\qquad \alpha=(l_1-m_1)-(l+m),\qquad \beta=(l_1+m_1)-(l+m).$$

Мы не будем выводить эту формулу. Заметим только, что она получается простыми выкладками, если воспользоваться следующей записью коэффициентов Клебша — Гордона *):

$$B^{lm}_{l_1m_1l_2m_2} =$$
$$= \delta_{m,\, m_1+m_2} \sqrt{\frac{(l+l_1-l_2)!\,(l-l_1+l_2)!\,(l_1+l_2-l)!\,(2l+1)}{(l+l_1+l_2+1)!}} \times$$
$$\times \sqrt{\frac{(l+m)!\,(l-m)!}{(l_1-m_1)!\,(l_1+m_1)!\,(l_2-m_2)!\,(l_2+m_2)!}} \times$$
$$\times \sum_k \frac{(-1)^{k+l_2+m_2}\,(l+l_2+m_1-k)!\,(l_1-m_1+k)!}{(l-l_1+l_2-k)!\,(l+m-k)!\,k!\,(l_1-l_2-m+k)!}$$

(k принимает все те значения, при которых все скобки неотрицательны).

Мы хотим отметить, что аналогия между коэффициентами Клебша — Гордона и полиномами Якоби простирается достаточно далеко: различные соотношения между полиномами Якоби с разными индексами после замены степени и дифференцирования на разностную степень и разность переходят в аналогичные соотношения между коэффициентами Клебша — Гордона.

---

*) См., например, ван-дер-Варден «Методы теории групп», стр. 75.

БИБЛИОГРАФИЯ

I. Общие вопросы теории представлений группы вращений и группы Лоренца

[1] Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, ИЛ, М., 1947.
[2] Картан Э., Теория спиноров, ИЛ, М., 1947.
[3] Мурнаган Ф., Теория представления групп, ИЛ, М., 1950.
[4] Наймарк М. А., Линейные представления группы Лоренца, Успехи матем. наук, 9, вып. 4 (1955).
[5] Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, Гостехиздат, М., 1954.
[6] Румер Ю. Б., Спинорный анализ, ОНТИ, М.—Л., 1936.

II. Некоторые применения теории представлений группы вращений

[1] Берестецкий В. Б., Электромагнитные поля мультиполей, ЖЭТФ, **17**, вып. I (1947), 12—18.
[2] Берестецкий В. Б., Долгинов А. З., Тер-Мартиросян К. А.,
[3] Угловые функции частиц со спином, ЖЭТФ, № 6 (1950), 527—537.
Wigner E., Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik und Atomspektren, Braunschweig, 1931.
[4] Кондон Е. и Шортли Г., Теория атомных спектров, ИЛ, М., 1949.
[5] Левинсон И. Б., Сумма произведений коэффициентов Вигнера и их графическое изображение, Тр. Физ.-техн. ин-та АН ЛитССР, 2 (1956), 17—29.
[6] Левинсон И, Б., Зависимость суммы произведений коэффициентов Вигнера от магнитных чисел, Тр. Физ.-техн. ин-та АН ЛитССР, 2 (1956) 31—43.
[7] Левинсон И. Б., Некоторые формулы преобразования и суммирования (j, m)-символов, Тр. Академии наук ЛитССР, сер. Б4 (1957), 3—15.
[8] Любарский Г. Я., Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, 1957.
[9] Петрашень Г. И., Динамические задачи в случае изотропной сферы, Ученые записки ЛГУ, № 114, вып. 17 (1949).
[10] Роуз М., Поле мультиполей, ИЛ, М., 1957.
[11] Фок В. А., Начала квантовой механики, КУБУЧ, 1932.

III. Релятивистски-инвариантные уравнения

[1] Ахиезер А. И. и Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, Гостехиздат, М., 1953.
[2] Bhabha H. J., Relativistic equation for articles of arbitrary spin, Current science, **14** (1945), 89—90.

[3] Гельфанд И. М. и Яглом А. М., Общие релятивистски-инвариантные уравнения и бесконечномерные представления группы Лоренца, ЖЭТФ, 18, № 8 (1948), 703—733.
[4] Гельфанд И. М. и Яглом А. М., Теорема Паули для общих релятивистски-инвариантиых уравнений, ЖЭТФ, 18, № 12 (1948), 1096—1104.
[5] Гельфанд И. М. и Яглом А. М., Зарядная сопряженность для общих релятивистски-инвариантных уравнений, ЖЭТФ, 18, № 12 (1948), 1105—1111.
[6] Паули В., Релятивистская теория элементарных частиц, ИЛ, М., 1947.

IV. К дополнениям

[1] Гельфанд И. М. и Цейтлин М. Л., Конечномерные представления группы унимодулярных матриц, ДАН СССР, 71, № 5 (1950), 825—828.
[2] Гельфанд И. М. и Цейтлин М. Л., Конечномерные представления группы ортогональных матриц, ДАН СССР, 71, № 6 (1950), 1017—1020.