

АКАДЕМИЯ НАУК СОЮЗА ССР

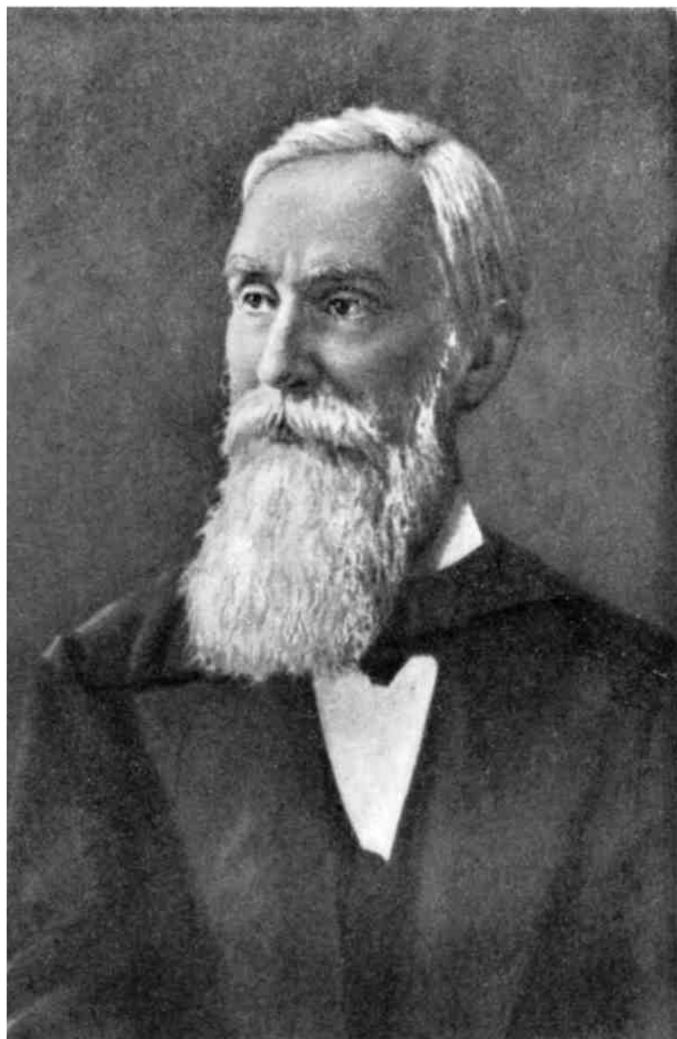
ПОЛНОЕ СОБРАНИЕ
СОЧИНЕНИЙ
П. Л. ЧЕБЫШЕВА

Том IV
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ



ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА - ЛЕНИНГРАД

1948



H. Ceebeury

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

*Академики И. И. Артоболовский, С. Н. Бернштейн (председатель), Н. Г. Бруевич,
И. М. Виноградов, А. Н. Колмогоров, А. Н. Крылов, Л. С. Лейбензон,
В. И. Смирнов, С. Л. Соболев; член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне,
профессор В. Л. Гомчаров*

Ответственные редакторы IV тома

Академик И. И. Артоболовский, академик Н. Г. Бруевич

ОТ РЕДАКЦИИ

В четвертом томе полного Собрания сочинений П. Л. Чебышева помещены в хронологическом порядке его труды по теории механизмов и машин. Комментарии составлены И. И. Артоболевским и Н. И. Левитским. Помещена также статья И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского „Модели механизмов П. Л. Чебышева“, в которой приведены схемы и фотоснимки моделей, изготовленных при жизни П. Л. Чебышева.

Мемуар „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ как по методу изложения, так и по содержанию имеет математический характер и включен поэтому во второй том настоящего Собрания сочинений П. Л. Чебышева, где напечатаны его труды по математическому анализу. Положения, указанные в этом мемуаре, получили дальнейшее развитие в работах по теории механизмов как у самого Чебышева, так и у ряда других исследователей; создалось даже особое направление в теории механизмов, разрабатывающее аналитические методы синтеза механизмов. В связи с этим упомянутый мемуар приобрел в настоящее время особый интерес не только для математиков, но также и для инженерно-технических работников, ведущих исследования в области теории механизмов. Поэтому мемуар „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ выходит также отдельным выпуском, где, кроме комментариев к нему, помещена статья И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского о дальнейшем развитии и перспективах применения аналитических методов приближенного синтеза механизмов, впервые указанных П. Л. Чебышевым.

О НЕКОТОРОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ КОЛЕНЧАТОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАМА УАТТА *

(Перевод А. М. Ляпунова)

Механизм, известный под названием коленчатого параллелограмма Уатта, представляет решение следующего, в известных случаях важного для практики вопроса:

Посредством комбинации круговых движений произвести с достаточным приближением прямолинейное движение.

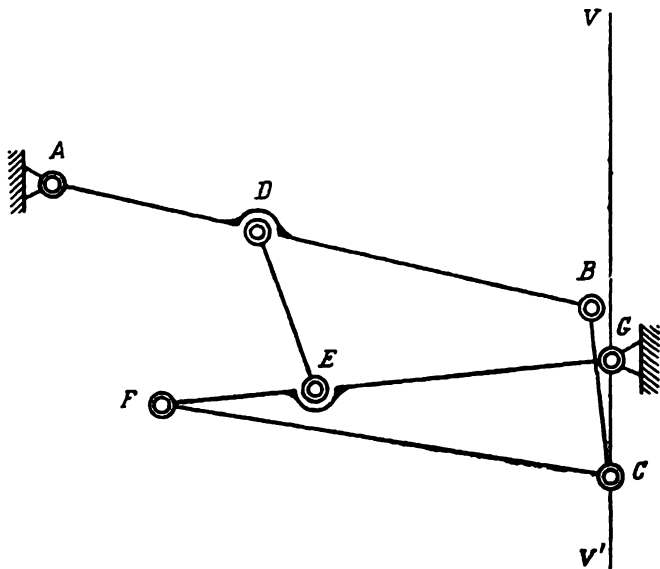
При всей полезности этого механизма для практики нельзя не признать, что в отношении точности хода и по своей сложности он оставляет еще желать многого. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что параллелограм Уатта производит то же движение, как механизм с балансиром,** хотя в своем составе содержит двумя стержнями более, а в механизмах этого рода всякий новый элемент, очевидно, вносит новые средства для достижения большей точности хода. Желая воспроизвести прямолинейное движение с возможно большей точностью как при посредстве механизма с балансиром, так и при посредстве параллелограмма Уатта, мы достигаем овального движения, которое приближается к желаемому прямолинейному лишь настолько, что имеет с ним не более пяти общих элементов. Но такая степень приближения, без сомнения, далеко недостаточна для механизма столь сложного, как параллелограм Уатта, который состоит из четырех частей, находящихся при построении механизма в нашем распоряжении и доставляющих каждая два произвольных параметра: длину и направление. Принимая в расчет, что произвольных параметров здесь 8, мы видим, что возможно попытаться построить механизм, который, при той же сложности как и параллелограм Уатта, был бы способен доставлять движение, гораздо более близкое к искомому

* Читано 30 (18) октября 1861 г. Опубликовано под названием „Sur une modification du parallélogramme articulé de Watt“ в Bull. phys.-math. de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersbourg, t. IV, p. 433—438; русский перевод А. М. Ляпунова — в Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соicina, том. I, СПб., 1899, стр. 531—538. — *Ред.*

** См. Комментарии, стр. 239 настоящего тома. — *Ред.*

прямолинейному, и именно имеющее с ним не пять, а восемь общих элементов.

Это мы и пытались сделать, и мы нашли, что такой механизм можно получить, сочленяя четыре стержня параллелограмма Уатта между собою и с коромыслом следующим образом:



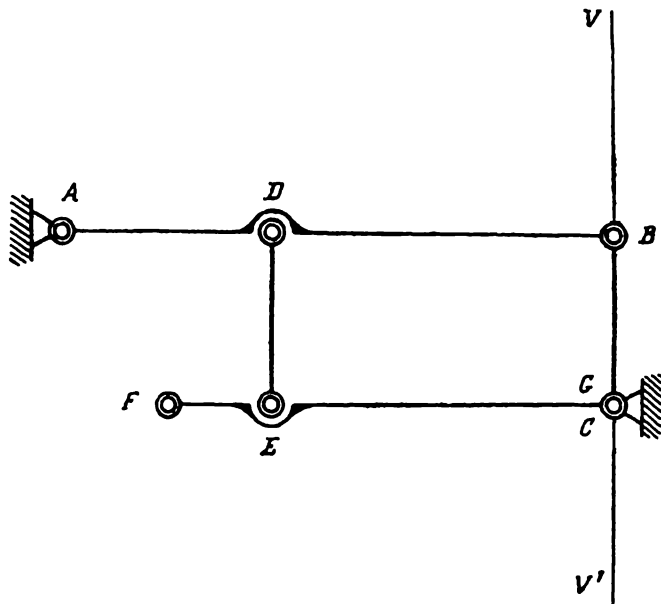
Фиг. 1

На этом чертеже AB представляет ту половину коромысла, на которой требуется построить механизм, производящий приблизительно прямолинейное движение по вертикали VV' , проходящей через конец B коромысла в его горизонтальном положении; BC , DE , CF , FG четыре стержня, составляющие этот механизм, C точка, доставляющая требуемое движение, G неподвижная ось стержня FG , представляющего, как и в параллелограмме Уатта, контр-балансир. Все эти стержни сочленены с коромыслом и между собою таким же образом, как и в параллелограмме Уатта, с той только разницей, что стержни DE и FC не связаны более между собою, а соединены при помощи шарниров с контр-балансиром FG в двух различных точках E и F . При построении этого механизма, стержни CF и FG должны быть сделаны равными $\frac{\sqrt{5}+1}{4} AB$, а расстояния BD и EG равными $\frac{\sqrt{5}-1}{2} AB$,

вследствие чего линия BD представит среднюю пропорциональную между всей линией AB и ее частью AD , а линия EF будет половиной AD . Стержням BC и DE следует дать одинаковую длину, которая может быть выбрана правильно при том лишь условии, чтобы она не превосходила заметным образом половины хода точки C . Что касается точки G , центра вращения контр-балансира FG , то она должна быть помещена таким образом, чтобы при горизонтальном

положении коромысла стержни BC и DE были вертикальными, а стержни CF и FG принимали одно и то же горизонтальное направление, как это можно видеть на фигуре 2.

Таково устройство механизма, который при тех же составных частях, что и в параллелограмме Уатта, будет доставлять движение.



Фиг. 2

приближающееся к прямолинейному настолько, что будет иметь с ним восемь общих элементов. В последнем легко убеждаемся, определяя расстояния точки C от вертикали VV' (фиг. 1) в функции угла наклона коромысла;* ибо при этом замечаем тотчас же, что

* Эти расстояния, как нетрудно видеть, выражаются формулою

$$\frac{\sqrt{5}+1}{4} AB (\cos \psi - \cos \varphi),$$

где φ и ψ суть углы, определяемые в функции α , угла наклона коромысла такими двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cos \varphi \right)^2 + \\ & + \left(\frac{BC}{AB} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sin \varphi \right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}, \\ & \left(1 - \cos \alpha + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cos \varphi - \frac{\sqrt{5}+1}{4} \cos \psi \right)^2 + \\ & + \left(\frac{BC}{AB} + \sin \alpha + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sin \varphi + \frac{\sqrt{5}+1}{4} \sin \psi \right)^2 = \frac{BC^2}{AB^2}. \end{aligned}$$

кривая, описываемая точкою C , в точке, соответствующей горизонтальному положению коромысла, имеет касательную вертикаль VV' , с которою вблизи этой точки имеет 7 общих элементов, и что кривая эта пересекает ту же вертикаль в расстоянии от G , меньшем BC , что вводит еще один элемент, общий этим линиям на протяжении хода точки C .

Из этого видно также, до какой степени быстро убывают отклонения точки C от вертикали VV' (фиг. 1) по мере того, как уменьшается амплитуда качания коромысла, ибо эти расстояния по отношению к углу наклона коромысла суть 7-го порядка. Что касается до обыкновенных случаев практики, в которых наклонение коромысла никогда не достигает углов большой величины, то ход рассматриваемого механизма по своей точности значительно превышает ход параллелограмма Уатта. Так, например, обращаясь к случаю, рассматриваемому Прони в его известной заметке „*Sur le parallélogramme du balancier de la machine à feu*“ (*Annales des Mines*, tome XII), когда длина полукоромысла AB равна 2,515 м, длина стержня BC равна 0,762 м и предельный угол наклона коромысла равен $17^{\circ}35'30''$, мы находим, что механизм, о котором идет речь, при этих условиях давал бы лишь такие отклонения от вертикали, которые менее 0,05 мм. Параллелограм же Уатта, согласно Прони, дает в этом случае отклонения, доходящие до величины в 40 раз большей, а именно до 2 мм, что представляет величину отклонения, которою нельзя пренебрегать в ходе подобного механизма.

До сих пор, стараясь возможно более приблизиться к осуществлению вертикального движения, мы принимали в расчет только число элементов, общих вертикали и кривой, описываемой точкою C , между тем как сближение этих линий, а следовательно, и точность хода рассматриваемого механизма в значительной степени зависят от положения этих элементов. Этот вопрос был предметом наших изысканий в 1-й части мемуара под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“*, где мы предложили способы делать такое сближение возможно более полным. Прилагая эти способы к нашему настоящему случаю, мы можем найти те небольшие изменения, которые нужно ввести в величины параметров механизма, чтобы сделать ход его возможно более точным. При посредстве этих поправок отклонения точки C от вертикальной линии могут быть уменьшены приблизительно в отношении 1 к 2^7 (§ 5 цитированного мемуара), а так как мы только что видели, что в обыкновенных

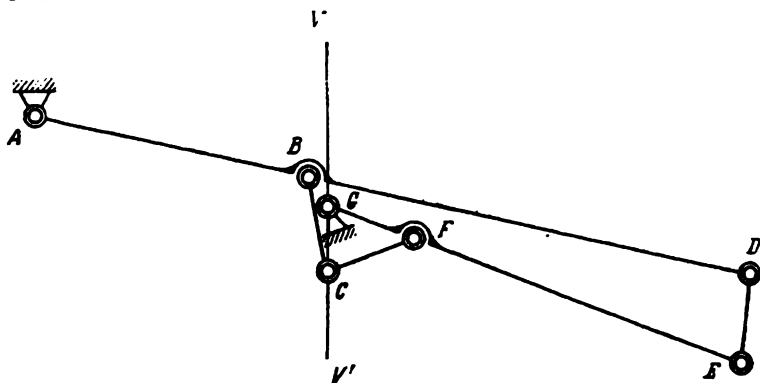
Отсюда для приближенного выражения этих расстояний получается следующий ряд:

$$\frac{7-3\sqrt{5}}{32} \frac{AB^2}{BC} \alpha^7 + \frac{\sqrt{5}-2}{16} \frac{AB^2}{BC^2} \alpha^8 + \dots$$

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51 и 474—485; стр. 238—250 настоящего тома. — Ред.

случаях практики эти отклонения уже сами представляют величины весьма малые, именно сотые доли миллиметра. то ясно, что в этих случаях поправками элементов точность хода механизма может быть доведена до предела, недостижимого для технических средств изготовления механизмов. Поэтому для обыкновенных случаев практики нет никакого основания разыскивать новый механизм, который был бы способен доставлять прямолинейное движение с точностью еще более значительною. А так как, согласно тому, что сейчас было нами показано, эта степень точности достигается при посредстве механизма, составленного из тех же частей, что и ныне употребляемый параллелограм Уатта, недостатки хода которого нередко чувствуются в практике, то должно признать, что наш измененный механизм заслуживает особенного внимания.

Заметим еще, что если в вышеприведенных величинах элементов этого механизма перед радикалом $\sqrt{5}$ изменим знак, то придем к такой новой форме механизма:



Фиг. 3

где

$$CF = FG = \frac{\sqrt{5}-1}{4} AB,$$

$$BD = EG = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB.$$

Для этого нового вида степень точности хода механизма остается прежняя, но для его построения приходится продолжить коромысло за точку B на длину, равную

$$BD = \frac{\sqrt{5}+1}{2} AB,$$

что представляет значительные практические неудобства.



ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ*

В мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“ ** мы показали, каким образом через последовательные приближения можно найти с желаемой степенью точности наивыгоднейшие размеры составных частей параллелограма Уатта и других механизмов того же рода, доставляющих движение, близкое к прямолинейному. Через разложение в ряды мы свели этот вопрос на определение целых функций, наиболее подходящих к нулю, и в мемуаре под заглавием „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций“,*** мы рассмотрели определение под таким условием функций целых и дробных. Для приближенных решений этого достаточно, но для точного решения необходимо подвергнуть такому же анализу функции иррациональные, которые здесь представляются. Приложение к таким функциям общей теоремы, доказанной нами в последнем из выше упомянутых мемуаров касательно выражений, наиболее подходящих к нулю, интересно во многих отношениях, и как один из результатов такого приложения мы теперь покажем устройство одного механизма, замечательного и по своей простоте и по точности, с которою он дает прямолинейное движение.

Этот механизм состоит из тех же частей, как и *сокращенный параллелограм Уатта*,**** также сочлененных между собою; вся разница — в направлении рычагов, вращающихся около неподвижных осей: они идут в одну сторону и между собою перекрещиваются. Рычаги берутся одинаковой длины, и точка, доставляющая желаемое движение, находится на середине части, сочлененной помощью шарниров с концами рычагов. Прилагая вышеупомянутую теорему к функции, определяющей движение этой точки, находим, что движение ее наиболее подходит к прямолинейному, на протяжении более или менее значительном, при следующих условиях:

* Читано 20 (8) октября 1868 г. Опубликовано в Зап. Имп. Акад. Наук, т. XIV, 1863, стр. 38—46; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сониной, том II, СПб., 1907, стр. 49—57. — *Ред.*

** Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51 и 474—485; стр. 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

*** Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 151—235 и 496—507. — *Ред.*

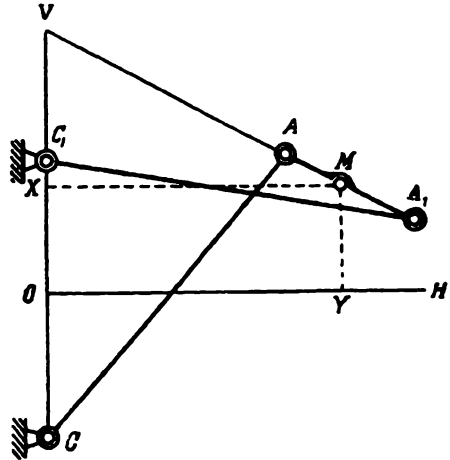
**** См. Комментарии, стр. 239 настоящего тома. — *Ред.*

1) если расстояние между осями вращения рычагов составляет одну треть длины всех трех частей механизма, т. е. двух рычагов и части, сочлененной с ними;

2) если часть, сочлененная с концами рычагов, длиннее четверти каждого из рычагов. Чем ограниченнее то пространство, на котором желают иметь движение, близкое к прямолинейному, тем длина этой части должна быть ближе к четверти длины рычагов и тем с большей точностью получается прямолинейное движение. Длина этой части определяется таким уравнением:

$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(2a + 1)(4a - 1)}{(a + 2)^2},$$

где a — длина этой части, l — длина хорды той дуги, которую стараются сделать по возможности ближе к прямой линии. (За единицу принимается длина рычагов.) Получаемая при этом дуга, как нетрудно убедиться, будет вся заключаться между двумя параллелями, отстоящими от осей вращения рычагов на расстояния, равные



Фиг. 1

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)}, \quad \sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(a+2)^2}}.$$

В самом деле. Пусть будет (фиг. 1) CAA_1C_1 рассматриваемый механизм, где $AC = 1$, $A_1C_1 = 1$ — рычаги, вращающиеся около осей CC_1 , $AA_1 = a$ — часть, сочлененная помощью шарниров с концами рычагов, и середина которой M дает желаемое движение. По сказанному нами, CC_1 , расстояние между осями вращения рычагов AC , A_1C_1 , должно равняться

$$\frac{AC + A_1C_1 + AA_1}{3} = \frac{2 + a}{3}.$$

Восстанавливая из середины линии CC_1 перпендикуляр OH и продолжая линии CC_1 , A_1A до пересечения их в точке V , мы для определения расстояния точки M от линий CV , OH из треугольника MXV , прямоугольника $MXOY$ и треугольников ACV , A_1C_1V получаем такие уравнения:

$$MX = MV \cdot \sin OVM;$$

$$MY = OX = OV - MV \cdot \cos OVM;$$

$$AC^2 = (MV - AM)^2 + (OV + OC)^2 - 2(MV - AM)(OV + OC) \cos OVM;$$

$$A_1C_1^2 = (MV + A_1M)^2 + (OV - OC_1)^2 - 2(MV + A_1M)(OV - OC_1) \cos OVM.$$

Из этих уравнений, полагая

$$\sin \frac{OVM}{2} = S$$

и замечая, что по выше сказанному

$$\begin{aligned} AC &= 1, & A_1 C_1 &= 1, \\ AM &= A_1 M = \frac{AA_1}{2} = \frac{a}{2}, \\ OC &= OC_1 = \frac{CC_1}{2} = \frac{2+a}{6}, \end{aligned}$$

мы находим

$$\begin{aligned} 1) \quad MX &= a \sqrt{\frac{\left(\frac{4(1-a)}{3a} + S^2\right) \left(\frac{1+2a}{3a} - S^2\right)^2}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2}}; \\ 2) \quad MY &= a \sqrt{\frac{\left(\frac{4(1-a)}{3a} + S^2\right) (1-S^2) S^2}{\frac{(1+2a)}{3(2+a)a} - S^2}}. \end{aligned}$$

Определяя по формуле (1) величину разностей

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

и

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2},$$

мы находим, что они представляются так:

$$\begin{aligned} &\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a}\right)^2 S^2}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2}, \\ &\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a}\right)^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a}\right)}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2}, \end{aligned}$$

а потому произведение

$$\left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a)\right] \left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2}\right]$$

равняется

$$\left[\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a}\right) \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a}\right) S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2} \right]^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a}\right).$$

Так как здесь квадрат

$$\left[\frac{a^2 \left(S^2 - \frac{4a-1}{3a} \right) \left(S^2 - \frac{(4a-1)(1+2a)}{6(2+a)a} \right) S}{\frac{(1+2a)^2}{3(2+a)a} - S^2} \right]^2$$

при всех действительных величинах S имеет значение положительное, а множитель

$$S^2 - \frac{4a-1}{(2+a)a}$$

при $S^2 < \frac{4a-1}{(2+a)a}$ имеет значение отрицательное, то при изменении S^2 от 0 до $\frac{4a-1}{(2+a)a}$ произведение

$$\left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) \right] \left[MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2} \right]$$

будет оставаться отрицательным; а для этого множители

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

$$MX^2 - \frac{4}{9}(1-a)(2+a) - \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2}$$

должны иметь противоположные знаки, и, следовательно, величина

$$MX^2$$

должна заключаться между величинами

$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a),$$

$$\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2}.$$

Из этого видно, что от $S^2 = 0$ до $S^2 = \frac{4a-1}{(2+a)a}$ расстояние точки M от линии CC_1 будет заключаться в пределах

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2}},$$

и, следовательно, точка M не будет выходить из пространства, ограниченного линиями, параллельными линии CC_1 и отстоящими от нее на расстояния

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1-a)(2+a) + \frac{(4a-1)^2}{12(2+a)^2}}.$$

С другой стороны, по устройству механизма нами рассматриваемого, точка M будет одинаково двигаться снизу и сверху линии $ОН$. Вследствие этого дуга, описываемая ею при изменении S^2 от 0 до $\frac{4a-1}{(2+a)a}$, будет одинаково расположена по ту и по другую сторону линии $ОН$, и хорда l , стягивающая такую дугу, будет равняться удвоенному расстоянию концов ее от линии $ОН$. Но по формуле (2), делая в ней

$$S^2 = \frac{4a-1}{(2+a)a},$$

мы находим, что это расстояние выражается так:

$$MY = \sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}}.$$

А потому

$$l = 2 \sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{4(2+a)^2}},$$

что по возведении в квадрат дает

$$l^2 = \frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{(2+a)^2}.$$

Так мы убеждаемся, что при l , удовлетворяющем этому уравнению, дуга, стягиваемая хордою l и которой середина находится на линии $ОН$, действительно вся заключается между двумя выше показанными параллелями.

Всякий раз, когда величина a незначительно разнится с $1/4$, эти параллели близки друг к другу, а потому и дуга, рассматриваемая нами, мало отличается от прямой линии. Но по мере удаления a от $1/4$, выше показанные параллели друг от друга отодвигаются и рассматриваемая нами дуга более и более изгибается. При a , превосходящем $0,546^*$ (что соответствует $l > 1,222$), эти изгибы до такой степени значительны, что рассматриваемая нами дуга в концах своих загибается к линии $ОН$, вследствие чего наибольшее удаление точек от линии $ОН$ имеет место не в концах дуги, а в некотором расстоянии от них.

Чтобы показать до какой степени движение, доставляемое этим механизмом, близко подходит к прямолинейному на пространстве довольно значительном, мы приложим выше показанные формулы к случаю

$$l = 0,64,$$

как это имеет место в параллелограмме Уатта, которого действие ис-

* Т. е. корень уравнения $(a^3 - 6a + 2)(2a - 5)(2a + 1) - \frac{27}{4}(4a - 1) = 0$, которое получаем, приравнявая нулю производную MY^2 по S и полагая в ней $S^2 = \frac{4a-1}{(2+a)a}$.

следовал Прони и нашел весьма удовлетворительным (Annales des Mines, tome XII).

Принимая $l = 0,64$ и решая при этой величине l уравнение

$$l^2 = \frac{(5 - 2a)(1 + 2a)(4a - 1)}{(2 + a)^2}.$$

мы находим

$$a = 0,327.$$

Вставляя эту величину a в выражения

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a)},$$

$$\sqrt{\frac{4}{9}(1 - a)(2 + a) + \frac{(4a - 1)^2}{12(2 + a)^2}},$$

определяющие расстояние параллелей от осей вращения рычагов, мы находим, что первое равняется

$$0,83428,$$

а второе

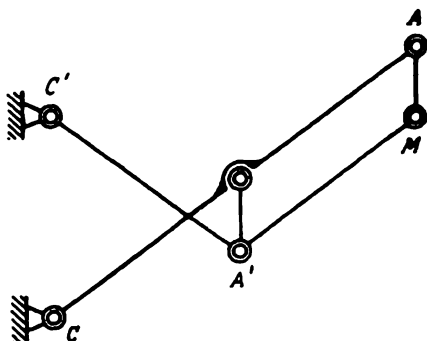
$$0,83457.$$

Следовательно, расстояние между параллелями будет

$$0,83457 - 0,83428 = 0,00029.$$

По вычислениям же Прони в паровой машине, где плечо коромысла имело 2,515 метра длины, параллелограм Уатта представлял отклонения, простиравшиеся до 0,002 м, или до 0,00079, если принять за единицу плечо коромысла. При действии же механизма, нами рассмотренного, эти отклонения, как сейчас нашли, будут простирались только до 0,00029, что не составляет и половины числа 0,00079.

Заметим в заключение, что известное построение, служащее для перехода от сокращенного параллелограмма Уатта к полному, прилагается без всякого изменения к механизму, нами рассмотренному, и через то получается полный параллелограм Уатта с отводным радиусом, направленным в противную сторону и пересекающимся с коромыслом. Такой параллелограм представлен на фиг. 2, где точка M будет описывать дугу, которая, как видно из предыдущего, будет менее уклоняться от вертикальной линии, чем та, которая получается при обыкновенном расположении отводного радиуса $A'C'$. Но при таком изменении в устройстве параллелограмма Уатта линия, описываемая точкою M , как видно из чертежа, делает слишком острый угол с коромыслом AC , что составляет весьма важное неудобство.



Фиг. 2

О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ*

(ПОСВЯЩАЕТСЯ ИМПЕРАТОРСКОМУ ТЕХНИЧЕСКОМУ УЧИЛИЩУ)

§ 1. На практике до сих пор употребляются только три различных параллелограмма: сокращенный и полный параллелограммы Уатта и параллелограм, известный под названием механизма Эванса. Но подобных механизмов, доставляющих движение, подходящее в большей или меньшей степени к прямолинейному, можно составить много. В заседаниях Петербургской Академии Наук (1861 г. окт. 18-го,** 1868 г. окт. 8-го***) и Московского Математического общества (1867 г. ноября 18-го) мы говорили об устройстве таких параллелограмов, которые своею точностью превосходят параллелограммы, ныне употребляемые. Теперь мы покажем, каким образом можно составлять различные параллелограммы, доставляющие прямолинейное движение с приближением, по желанию бóльшим. При этом мы увидим, что с тем же числом составляющих частей, как и полный параллелограм Уатта, можно сделать такой параллелограм, который даст прямолинейное движение с точностью до 13 степени, между тем как параллелограммы Уатта и механизм Эванса дают это движение с точностью не выше 5-й степени, в параллелограмах же, предложенных нами, эта степень меняется от 6 до 8. Такой параллелограм, как мы увидим, имеет еще то преимущество, что он, сохраняя в действии своем точность, еще достаточную для практики, может своими частями заменять мотыль и шатун для преобразования попеременного прямолинейного движения в непрерывное вращательное. Говоря о различных параллелограмах, мы будем иметь в виду только бесконечно малые движения, при которых степень точности параллелограмов особенно легко определяется; для перехода же от бесконечно малых движений к конечным нужно будет сделать некоторые изменения в размере их частей. Эти изменения вообще будут незначительны, если движение параллелограмма происходит в пределах довольно тесных, и тогда

* Опубликовано в Трудах второго съезда русских естествоиспытателей, проходившего в Москве с 1 сент. (20 авг.) по 11 сент. (30 авг.) 1869 г., Отдел технологии и практической механики. 1870, стр. 9—30; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том II, СПб., 1907, стр. 83—106. — *Ред.*

** „О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта“, стр. 5—9 настоящего тома. — *Ред.*

*** „Об одном механизме“, стр. 10 настоящего тома. — *Ред.*

они могут быть вычислены помощью рядов по способу, показанному нами в мемуаре „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“.* Но последний из выше упомянутых случаев, когда параллелограм своими частями заменяет мотыль и кривошип, требует особенного приема, так как в этом случае, далеко отступающем от случая бесконечно малых движений, ряды не могут быть с пользою употреблены. Этим случаем мы особенно займемся и дадим все формулы, относящиеся до него.

§ 2. Механизмы, известные под именем параллелограмов, вообще могут быть рассматриваемы как системы прямых линий, двигающихся в одной плоскости и связанных между собою шарнирами, которые препятствуют точкам соединения линий скользить по ним, но не мешают изменяться углам, составленным этими линиями. Кроме того, некоторые из них прикреплены к некоторым точкам плоскости, так что эти линии могут только вращаться около точек прикрепления. Называя через m число линий, составляющих параллелограм, через n число шарниров, связывающих эти линии по две, и через v число точек прикрепления, мы замечаем, что на плоскости место каждой из m линий рассматриваемой системы, определяется 3 величинами (за которые, например, можно взять две координаты одного из концов линии и наклонение ее к оси абсцисс). С другой стороны, каждый из n шарниров, связывающих две линии, и каждая из v точек прикрепления линии к плоскости дают по два уравнения между величинами, определяющими положение рассматриваемой нами системы (а именно: связь двух линий шарниром предполагает равенство координат двух точек, принадлежащих двум линиям; прикрепление линии одною из ее точек к плоскости предполагает данными координаты этой точки). Из этого видно, что в рассматриваемой нами системе место всех точек будет определяться $3m$ величинами, связанными между собою $2(n + v)$ уравнениями, и, следовательно, число независимых переменных представится разностью

$$3m - 2(n + v).$$

Но это число должно равняться 1 для того, чтобы точки рассматриваемой системы могли двигаться только по определенным траекториям, как это имеет место в параллелограмах; а потому

$$3m - 2(n + v) = 1. \quad (1)$$

С другой стороны, мы замечаем: 1) что рассматриваемая нами система не должна свободно двигаться в плоскости и 2) что все линии, ее составляющие, должны быть в связи между собою.

Первое предполагает необходимым существование точек прикрепления и, следовательно, неравенство $v > 0$.

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51 и 474—485 ~~из~~ 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

Второе предполагает, что n , число шарниров, больше $m - 2$, так как $m - 2$ шарниров, очевидно, недостаточно для того, чтобы связать по две все m линий, составляющих систему. По уравнению же (1) при $n > m - 2$, находим

$$v < \frac{m+3}{2}.$$

Из этого видно, что v , число шарниров, должно удовлетворять таким неравенствам:

$$v > 0, \quad v < \frac{m+3}{2} \quad (2)$$

§ 3. Принимая в уравнении $3m - 2(n + v) = 1$ числа m и $n + v$ за неизвестные и решая его, находим такие величины для m и $n + v$:

$$m = 1, \quad n + v = 1; \quad m = 3, \quad n + v = 4; \quad m = 5, \quad n + v = 7$$

и т. д.

Рассматривая первые значения m и $n + v$

$$m = 1, \quad n + v = 1,$$

мы замечаем, что по (2) при $m = 1$ должно быть

$$v > 0, \quad v < \frac{1+3}{2} = 2,$$

что предполагает $v = 1$. Следовательно в этом случае параллелограм приводится к одной линии, вращающейся около одной из своих точек.

При этом получается круговое движение, которое может заменить прямолинейное только с точностью до второй степени.

Переходя к следующим значениям m и $n + v$, имеем

$$m = 3, \quad n + v = 4.$$

А по (2) при $m = 3$ находим

$$v > 0, \quad v < \frac{3+3}{2} = 3,$$

что предполагает для v одну из таких величин:

$$v = 1, \quad v = 2.$$

По равенству же

$$n + v = 4,$$

этим величинам v будут соответствовать такие величины n :

$$n = 3, \quad n = 2.$$

Итак, при $m = 3$ будет, или

$$v = 1, \quad n = 3,$$

или

$$v = 2, \quad n = 2.$$

В первом случае рассматриваемая нами система представляет линию, вращающуюся около одной из своих точек и связанную с двумя

другими помощью трех шарниров, или, что одно и то же, треугольник, вращающийся около точки, лежащей на одной из его сторон. При этом все точки могут двигаться только по кругам и, следовательно, могут дать прямолинейное движение только с точностью до 2-й степени.

Во втором случае, когда

$$m = 3, \quad v = 2, \quad n = 2,$$

рассматриваемая нами система представляет две линии, вращающиеся около двух неподвижных точек и связанные с третьей помощью двух шарниров. Это простейшая система параллелограмов, которые могут дать прямолинейное движение с точностью выше второй степени; таковы суть: *сокращенный параллелограм Уатта*, *механизм Эванса и параллелограм*, предложенный нами в прошлом году. * Первые два параллелограмма дают прямолинейное движение с точностью до 5-й степени, последний — до 6-й степени.

В третьей системе значений m и $n + v$ имеем

$$m = 5, \quad n + v = 7,$$

и по (2), при $m = 5$, находим

$$v > 0, \quad v < \frac{5+3}{2} = 4,$$

откуда ясно, что v , число точек вращения линий, может иметь только такие значения:

$$v = 1, \quad v = 2, \quad v = 3.$$

По равенству же

$$n + v = 7$$

находим, что этим величинам v будут соответствовать такие величины числа n :

$$n = 6, \quad n = 5, \quad n = 4.$$

Первые величины v и n

$$v = 1, \quad n = 6$$

соответствуют тому случаю, когда 5 линий связаны 6 шарнирами и вращаются около точки, лежащей на одной из них. При этом линии составляют неизменную систему и все точки их могут описывать только круги.

При

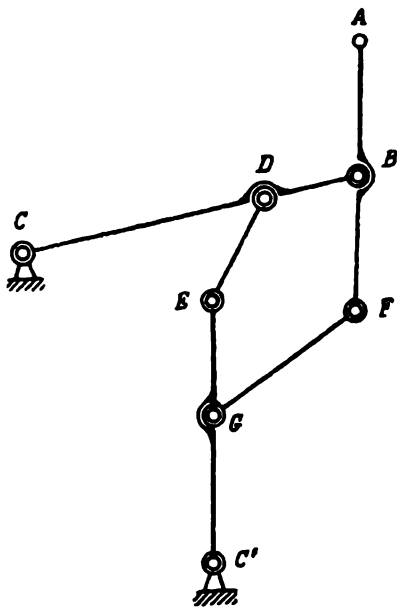
$$v = 2, \quad n = 5$$

получаются параллелограммы, составленные из двух вращающихся около неподвижных точек линий, сочлененных с тремя другими

* См. „Об одном механизме“, стр. 10–15 настоящего тома. — Ред.

помощью пяти шарниров; таковы суть: *полный параллелограмм Уатта* и параллелограм, предложенный нами под названием *измененного параллелограмма Уатта*. * Первый из этих параллелограмов дает прямолинейное движение с точностью до 5-й степени; второй — до 7-й.

При том же сочленении составных частей, как и в параллелограмме Уатта, но при другом направлении их получается параллелограм, упо-



Фиг. 1

минаемый нами в конце нашей статьи, под заглавием: „Об одном механизме“. ** При надлежащем размере составных частей, такой параллелограм дает прямолинейное движение с точностью до 6-й степени. Сочленение же частей такое, как в *измененном параллелограмме Уатта*, но с другим направлением дает параллелограм, изображенный на фиг. 1. Такой параллелограм, как нетрудно показать, может дать прямолинейное движение с точностью до 6-й степени, и для этого размеры его частей должны быть определены следующим образом.

Если длину линии BC , вращающейся около точки C , примем за единицу и положим $GF = f$, $BF = h$ (длина этих линий произвольна), то

все остальные части параллелограмма и точка A на линии AF доставляющая желаемое движение, найдутся по формулам

$$ED = \frac{(1-f)f^2}{1-2f^2}, \quad CD = \frac{(1-f)(1-f^2)}{1-2f^2},$$

$$EC = \frac{(1-f)^2(1+f)}{1-f-f^2} h, \quad GC = \frac{f^2}{1-f-f^2} h,$$

$$AB = \frac{f}{1-f-f^2} h. \quad ***$$

Место точки C' , около которой вращается линия $C'E$, выбирается так, что в среднем положении параллелограмма линия DE идет по линии CD и пятиугольник $EDBFG$ обращается в прямоугольник.

* См. стр. 5—9 настоящего тома. — *Ред.*

** См. стр. 10—15 настоящего тома. — *Ред.*

*** В предыдущих изданиях формула для величины AB имела вид:

$$AB = \frac{1-f-f^2}{f(1-f)} h.$$

Здесь эта формула дана с исправлениями, указанными З. Ш. Блох (стр. 251 настоящего тома). — *Ред.*

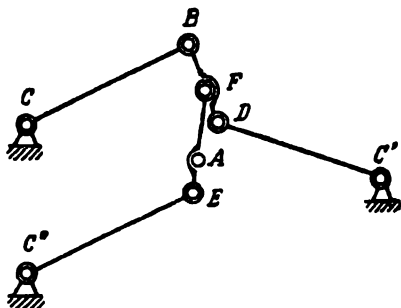
§ 4. Переходим теперь к последним величинам v , n , возможным при

$$m = 5.$$

Эти величины суть

$$v = 3, \quad n = 4,$$

и они, как увидим, дают параллелограммы особенно замечательные по точности их действия. Так как $v = 3$, то в этих параллелограммах линий, вращающихся около неподвижных точек, будет 3, и они все должны быть в связи между собою при помощи остальных линий, которых всего 2; а это возможно только в том случае, когда по крайней мере одна из 2 линий связывающих будет непосредственно сочленена с двумя линиями, вращающимися около неподвижных точек: эти-то две линии, вращающиеся около неподвижных точек, вместе с линиею, их связывающею, мы, для сокращения терминологии, будем называть *первою частью* параллелограмма; другую же линию, вращающуюся около неподвижной точки, и линию, связывающую ее с прочими, будем называть *второю частью* параллелограмма.



Фиг. 2

Параллелограм, о котором мы говорили в заседании Московского Математического общества 1857 года, 18-го ноября, принадлежит к разряду таких параллелограммов. В нем *первая часть* представляет собою *сокращенный* параллелограм Уатта; *вторая же часть* делается так, что в среднем положении параллелограмма все три вращающиеся около неподвижных точек линии параллельны между собою, и обе линии, связывающие их, сливаются в одну, перпендикулярную к ним. Такой параллелограм (фиг. 2), как вычисления показывают, дает прямолинейное движение с точностью до 8 степени, если в размере его частей выполнены следующие условия:

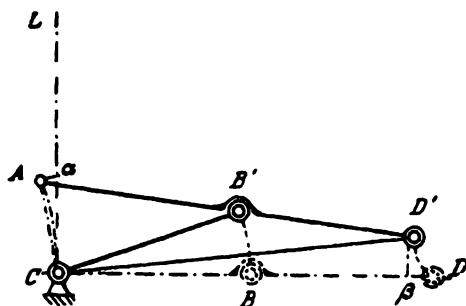
- 1) Все три линии BC , $C'D$, $C'E$, вращающиеся около неподвижных точек C , C' , C'' , должны быть равны.
- 2) Расстояния точки A , доставляющей желаемое движение, от концов F , E линии FE должны иметь такие величины:

$$AF = \frac{BF^2 - DF^2}{4FD},$$

$$AE = \frac{(BF - DF)^2}{4FD}.$$

§ 5. Параллелограмов рассматриваемого нами вида можно составить много, изменяя вид *первой части* и давая различные направления

линиям, составляющим *вторую часть*. Чтобы параллелограммы, таким образом составленные, давали прямолинейное движение с желаемой степенью точности, их части должны удовлетворять некоторым уравнениям, которые легко найти в каждом частном случае. Но эти уравнения оказываются довольно сложными, и число их возрастает вместе со степенью точности параллелограма, а потому решение их представляет трудности непреодолимые, когда имеются в виду параллелограммы, отличающиеся особенною точностью их действия.



Фиг. 3

Затруднение это в составлении таких параллелограмов не имеет места, если во *второй части* параллелограма линия, вращающаяся около неподвижной точки, и линия, связывающая ее с остальною частью параллелограма, выполняют такие условия:

1) Вторая линия вдвое длиннее первой и сочленена с нею своею серединою.

2) Один конец второй линии доставляет желаемое движение, а другой конец сочленен с остальною частью параллелограма.

3) В среднем положении параллелограма конец второй линии, доставляющий желаемое движение, совпадает с точкою, около которой вращается первая линия.

При выполнении этих условий *второй частью* параллелограма, он, как нетрудно убедиться, дает прямолинейное движение с точностью до $2\lambda + 1$ степени, если первая часть его доставляет такое движение с точностью до λ степени, и направление этого движения одинаково с направлением линий *второй части* параллелограма при среднем его положении.

В самом деле, пусть будут (фиг. 3) CB, CD и CB', AD' два положения линий, составляющих вторую часть параллелограма: одно — соответствующее среднему положению параллелограма, когда точка A , доставляющая желаемое движение, совпадает с точкой C , около которой вращается линия CB' , другое, — когда точка A прошла бесконечно малую дугу CA , а точка D , направляемая в своем движении первую часть параллелограма, прошла бесконечно малую дугу DD' . По выше сказанному линия CD будет касательной к дуге DD' , так как эта линия представляет направление движения точки D .

Соединяем точки A и C , C и D' прямыми AC, CD' , восстанавливаем из точки C перпендикуляр CL к линии CD и из точек A, D' опускаем перпендикуляры $A\alpha, D'\beta$ на линию CL, CD .

По положению имеем

$$AD' = CD = 2CB'. \quad AB' = B'D',$$

откуда видно, что угол ACD' прямой, а так как по построению угол LCD тоже прямой, то углы $AC\alpha$, $D'CD$ равны и, следовательно, прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $D'C\beta$ подобны. Из подобия же треугольников имеем

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{\beta D'}{CD'},$$

что дает нам для определения величины $A\alpha$ уклонения точки A от прямой CL ,

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} \beta D';$$

из прямоугольного же треугольника $CD'\beta$ имеем

$$CD'^2 = C\beta^2 + \beta D'^2,$$

а так как

$$C\beta = CD - \beta D$$

и

$$CD = AD',$$

то это дает нам

$$CD'^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2.$$

Замечая же из прямоугольного треугольника ACD' , что

$$CD'^2 = AD'^2 - AC^2,$$

мы из этого равенства выводим

$$AD'^2 - AC^2 = (AD' - \beta D)^2 + \beta D'^2,$$

что по раскрытии скобки и сокращении дает

$$-AC^2 = -2AD' \cdot \beta D + \beta D^2 + \beta D'^2.$$

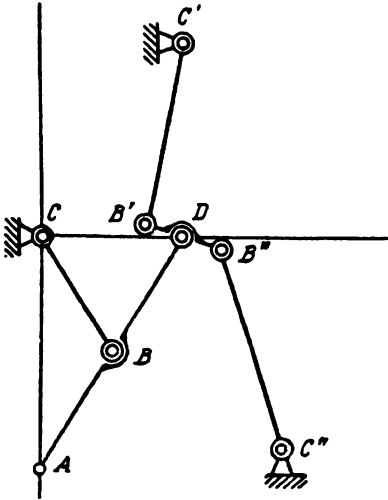
В этом равенстве AD' величина конечная, величины же AC , βD , $\beta D'$ бесконечно малые и порядок бесконечно малой $\beta D'$ выше порядка бесконечно малой βD , так как линия CD касательная к дуге DD' : вследствие чего это равенство предполагает, что βD есть бесконечно малая относительно AC второго порядка. Но по положению $\beta D'$ должна быть относительно βD бесконечно малой порядка λ , так как дуга DD' , описываемая точкой D , представляет прямую CD с точностью до λ степени. Следовательно, линия $\beta D'$ относительно линии AC будет бесконечно малой порядка 2λ , а это по выше найденному равенству

$$A\alpha = \frac{AC}{CD'} \beta D'$$

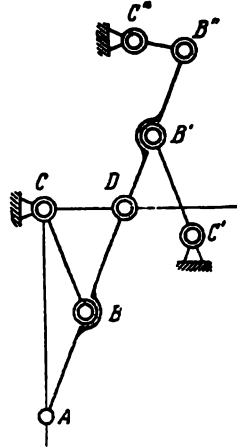
предполагает, что $A\alpha$, уклонение точки A от прямой линии LC , будет относительно AC бесконечно малой порядка $2\lambda + 1$.

§ 6. На основании доказанного нами очень просто можно составлять параллелограммы более точные из параллелограммов менее точных,

прибавляя к последним систему двух линий, о которой мы сейчас говорили. Так, от *сокращенного* параллелограмма Уатта, доставляющего прямолинейное движение с точностью до 5 степени, мы переходим к параллелограмму, изображенному на фиг. 4, который при выполнении условий, показанных в § 5, будет давать прямолинейное движение с точностью до 11 степени. Этот параллелограмм состоит из трех линий BC , $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижных точек C , C' , C'' и двух линий $B'B''$, AD , сочлененных с первыми помощью трех



Фиг. 4

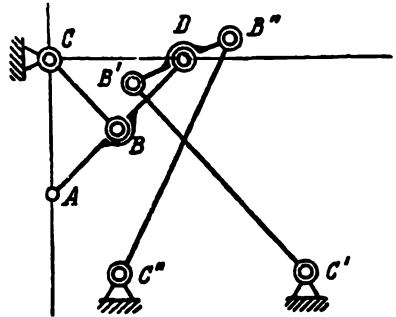


Фиг. 5

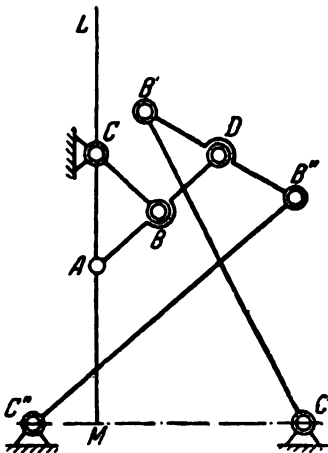
шарниров B , B' , B'' ; желаемое движение доставляет конец A линии AD . Точно так же от механизма Эванса, доставляющего прямолинейное движение с точностью до 5 степени, мы переходим к параллелограмму, показанному на фиг. 5, который может дать прямолинейное движение с точностью тоже до 11 степени. Этот параллелограмм состоит из тех же частей, как и предыдущий; вся разница в положении неподвижных точек C' , C'' , около которых вращаются линии $B'C'$, $B''C''$, и шарнира D , сочленяющего линии AD и $B'B''$. В § 3 мы видели, что из тех же частей, как и сокращенный параллелограмм Уатта и механизм Эванса, составляется параллелограмм, которого точность простирается до 6 степени. Прибавляя к такому параллелограмму две линии, удовлетворяющие условиям, показанным в предыдущем параграфе, мы получим параллелограмм, который даст прямолинейное движение с точностью до 13 степени. Параллелограмм, таким образом получаемый, представлен на фиг. 6. Он также состоит из пяти линий: трех BC , $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около неподвижных точек C , C' , C'' , и двух $B'B''$, AD , сочлененных с первыми помощью трех шарниров B , B' , B'' . Свободный конец линии AD доставляет желаемое движение. Этот параллелограмм разнится с первым из выше показанных только положением точек C' , C'' , около которых вращаются линии $B'C'$, $B''C''$.

Так как этот параллелограмм дает прямолинейное движение с точностью до 13 степени, то, по § 5, прибавляя к нему еще две линии, мы можем получить параллелограмм, который будет действовать с точностью до 27 степени; прибавляя же еще две линии, мы увеличим степень точности до 55 и т. д. Но считая вполне достаточной для практики точность до 13 степени, мы остановимся на последнем из выше показанных параллелограммов и не будем говорить о параллелограмах более сложных.

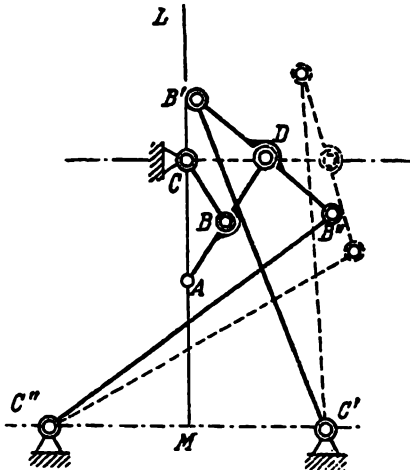
§ 7. Доставляя прямолинейное движение верно до степени столь высокой, рассматриваемый нами параллелограмм может дать с точностью, достаточной для практики, прямую линию значительной длины сравнительно с размерами его частей. Оставляя линии AB , BC той же длины и увеличивая длину пути точки A кверху и книзу от точки C (фиг. 7), мы дойдем до того, что линия BC будет совершать полуоборот по правую сторону линии LM , проходящей через точку C и перпендикулярной к линии $C'C''$. Если же при этом мы перенесем



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

точки $C'C''$ с их места и поместим их симметрично по обе стороны линии LM (фиг. 8), то все положения параллелограмма будут симметричны около линии LM . А потому движению точки A между крайними пределами, о которых сейчас говорили, будет одинаково соответствовать и полуоборот линии BC по правую сторону линии LM и полуоборот линии BC по левую сторону LM . Следовательно, при таком расположении точек C' , C'' , около которых вращаются линии

$B'C'$, $B''C''$, полный оборот линии BC около точки C будет соответствовать движению точки A от одного крайнего предела до другого и возврату ее на прежнее место. При той значительной степени точности, которою обладают параллелограммы рассматриваемого вида, оказывается возможным сделать достаточно близкою к прямой линию всю дугу, проходимую точкой A при полном обороте линии BC около точки C . Этого мы достигаем, как показывают вычисления, давая составным частям параллелограмма размеры, определяемые таким образом.

За единицу принимаем длину линий $B'C'$, $B''C''$, вращающихся около точек C' , C'' ; длина линий $B'B'' = a$, сочлененной с этими линиями, и $C'C'' = b$, расстояние точек C' , C'' , выразятся так:

$$a = \frac{1}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}; \quad (3)$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2}}{\sqrt{8 - 3\sigma + \frac{15}{64}\sigma^2 + (8 - \sigma) \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sigma + \frac{3}{64}\sigma^2}}}, \quad (4)$$

где σ есть sinus-versus угла наклонения линии $B'B''$ к линии $C'C''$ в крайнем положении параллелограмма; линии CB , AB , BD и AD определяются равенством

$$BC = AB = BD = \frac{AD}{2} = \frac{1}{4}l, \quad (5)$$

где l — длина хода точки A , которую найдем по формуле

$$l = a \sqrt{\frac{(\mu + \sigma) \sigma (2 - \sigma)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - \sigma}}, \quad (6)$$

полагая

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{b}{a}, \\ \mu &= \frac{4 - (a + b)^2}{2ab}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Точка D , в которой линия $B'B''$ сочленена с линиею AD , берется на середине линии $B'B''$; а место точки C , около которой вращается линия BC , выбирается так, что в среднем положении параллелограмма, когда линия $B'B''$ параллельна линии $C'C''$, точка D совпадает с точкой C .

§ 8. Нетрудно показать, что при таком устройстве рассматриваемого нами параллелограмма уклонения точки A от прямой линии LM во время полного оборота линии BC около точки C не будут превосходить предела

$$\frac{\sigma^2}{128} \sqrt{M}.$$

где M есть наибольшая величина, которой достигают дроби

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{\mu^2}{a} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) (2 - s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu (\mu + s) \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)^2 (2 - s)}$$

между $s = 0$ и $s = \sigma$.

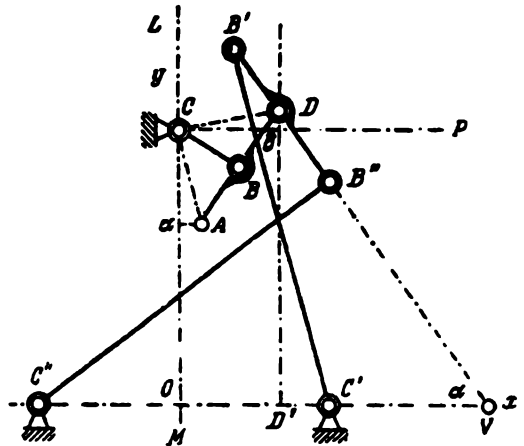
Чтобы показать это, мы сначала найдем формулы, определяющие место точки D (фиг. 9) при различных наклонениях линий $B'B''$ к $C'C''$.

Для этого принимаем линию $C'C''$ за ось абсцисс, линию LM за ось ординат; точка O , пересечение этих линий, будет начало координат, и так как по выше сказанному точки C' , C'' расположены симметрично около линии LM , то

$$C'O = C''O$$

и, следовательно,

$$C'O = C''O = \frac{1}{2} C'C'' = \frac{1}{2} b.$$



Фиг. 9

Продолжая линию $B'B''$ до пересечения ее с осью абсцисс в точке V , мы замечаем, что координаты точки D по длине линий DV и OV и углу $B'VC'' = \alpha$ выразятся так:

$$x = OV - DV \cdot \cos \alpha. \quad y = DV \cdot \sin \alpha.$$

С другой стороны, мы замечаем, что

$$B'V = DV + DB', \quad B''V = DV - DB'',$$

$$C'V = OV - OC', \quad C''V = OV + OC'',$$

откуда по равенствам

$$DB' = DB'' = \frac{1}{2} B'B'' = \frac{a}{2},$$

$$OC' = \frac{b}{2}, \quad OC'' = \frac{b}{2},$$

ВЫВОДИМ

$$B'V = DV + \frac{a}{2}, \quad B''V = DV - \frac{a}{2},$$

$$C'V = OV - \frac{b}{2}, \quad C''V = OV + \frac{b}{2};$$

и так как длина линий $B'C'$, $B''C''$ принята нами за единицу, то из треугольников $C'B'V$, $C''B''V$ имеем

$$1 = \left(DV + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV - \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV + \frac{a}{2}\right)\left(OV - \frac{b}{2}\right)\cos\alpha,$$

$$1 = \left(DV + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(OV + \frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(DV - \frac{a}{2}\right)\left(OV + \frac{b}{2}\right)\cos\alpha.$$

Решая эти уравнения относительно величин DV и OV и полагая для сокращения

$$1 - \cos\alpha = s, \quad \frac{b}{a} = \lambda,$$

$$\frac{4 - (a + b)^2}{2ab} = \mu,$$

находим

$$DV = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right) s(2 - s)}},$$

$$OV = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - \lambda s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right) s(2 - s)}}.$$

Внося эти величины DV и OV в выше показанные выражения координат x , y точки D и замечая, что равенство

$$1 - \cos\alpha = s$$

дает

$$\cos\alpha = 1 - s, \quad \sin\alpha = \sqrt{s(2 - s)},$$

получаем

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(\mu + s) s(2 - s)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$y = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Так выражаются координаты точки D по *sinus-versus* угла наклона линии $B'B''$ к линии $C'C''$.

§ 9. Приступая к определению отклонений точки A от прямой LM , опускаем из точки A перпендикуляр $A\alpha$ на линию LM : длина этого перпендикуляра представит отклонение точки A от линии LM . Для

определения этой длины опускаем из точки D перпендикуляр DD' на ось абсцисс, а из точки C восстанавливаем перпендикуляр CP к оси ординат; линии $C\delta$, DD' будут координаты точки D , а потому на основании выведенных нами в § 8 выражений x и y имеем

$$C\delta = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{(\mu + s)s(2-s)}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}},$$

$$DD' = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Делая в последнем из этих выражений нулем величину $s = 1 - \cos \alpha$ и замечая что это соответствует тому случаю, когда линия $B'B''$ параллельна линии $C'C''$, причем, по § 7, точка D совпадает с точкою C , находим для определения линии OC такую формулу:

$$OC = \frac{a}{2} (\lambda + 1) \sqrt{\frac{\mu}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda}}} = \frac{a}{2} \sqrt{2\lambda\mu}.$$

С другой стороны, соединяя точки C и D прямою CD , а точки A и C прямою AC , замечаем, что по равенству линий (§ 7)

$$BC = AB = BD,$$

угол ACD прямой, а так как угол $\alpha C\delta$, по построению, тоже прямой, то прямоугольные треугольники $AC\alpha$, $DC\delta$ подобны и, следовательно,

$$\frac{A\alpha}{AC} = \frac{D\delta}{CD},$$

что дает нам

$$A\alpha = D\delta \frac{AC}{CD}. \quad (8)$$

Но $D\delta = DD' - D'\delta$ и $D'\delta = CO$, откуда, по внесении выше найденных величин CO , DD' , получаем

$$D\delta = \frac{a}{2} (\lambda + 1 - s) \sqrt{\frac{\mu + s}{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}} - \frac{a}{2} \sqrt{2\lambda\mu},$$

или, что одно и то же,

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} - \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s}}.$$

Умножая здесь числителя и знаменателя на сумму

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)},$$

находим

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s) - \mu [(\lambda + 1)^2 - 2\lambda s]}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s} \left[(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)} \right]}.$$

что, по раскрытии скобок в числителе, приводится к следующему:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^2 + (\mu - 2\lambda - 2)s^2 + ((\lambda + 1)^2 - 2\mu)s}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s} \left[(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)} \right]}.$$

Внося же в выражения вспомогательных величин λ и μ

$$\lambda = \frac{b}{a}, \quad \mu = \frac{4 - (a + b)^2}{2ab},$$

значения a и b , по § 7, находим, что они через σ выражаются так:

$$\lambda = 1 + \sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2},$$

$$\mu = 4 - \sigma + 2\sqrt{4 - 2\sigma + \frac{3}{16}\sigma^2};$$

а потому

$$\left. \begin{aligned} \mu - 2\lambda - 2 &= -\sigma, \\ (\lambda + 1)^2 - 2\mu &= \frac{3}{16}\sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и выше найденное выражение $D\delta$ приводится к такому виду:

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^2 - \sigma s^2 + \frac{3}{16}\sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s} \left[(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)} \right]}.$$

Переходя ко второму множителю

$$\frac{AC}{CD}$$

выражения $A\alpha$ по формуле (8), мы замечаем, что AC как катет прямоугольного треугольника ACD равен

$$\sqrt{AD^2 - CD^2},$$

а потому

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{AD^2 - CD^2}}{CD} = \sqrt{\frac{AD^2}{CD^2} - 1}.$$

Но по § 7

$$AD = \frac{1}{2} l,$$

по построению же

$$CD > C\delta,$$

где

$$C\delta = OD' = x,$$

вследствие чего находим

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 l^2}{x^2} - 1},$$

откуда, по внесении величины x , полученной в § 8, имеем

$$\frac{AC}{CD} < \sqrt{\frac{l^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)}{a^2 (\mu + s) s (2 - s)} - 1},$$

что иначе можно написать так:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) - s(\mu + s)(2 - s)}}{\sqrt{s(\mu + s)(2 - s)}}.$$

Но по уравнению (6), определяющему величину хода l , выражение

$$\frac{l^2}{a^2} \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) - s(\mu + s)(2 - s)$$

обращается в нуль при $s = \sigma$, что предполагает делимость этого выражения на $s - \sigma$. Раскрывая скобки в этом выражении и деля его на $s - \sigma$, мы находим частное

$$s^2 + (\mu + \sigma - 2)s + (\mu + \sigma - 2)\sigma - \frac{l^2}{a^2} - 2\mu,$$

где, по (9),

$$\mu + \sigma - 2 = 2\lambda,$$

вследствие чего это выражение может быть заменено таким произведением двух множителей:

$$(\sigma - s) \left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2 \right),$$

а потому выше показанное неравенство приводится к такому виду:

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma - s) \left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2 \right)}}{\sqrt{s(\mu + s)(2 - s)}}.$$

§ 10. Мы видели (§ 9), что $A\alpha$, отклонение точки A от прямой линии LM , равняется произведению

$$D\delta \cdot \frac{AC}{CD},$$

где

$$D\delta = \frac{a}{2} \frac{s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16} \sigma^2 s}{\sqrt{\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s} \left[(\lambda+1-s) \sqrt{\mu+s} + \sqrt{\mu((\lambda+1)^2 - 2\lambda s)} \right]}$$

и

$$\frac{AC}{CD} < \frac{\sqrt{(\sigma-s) \left(2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2 \right)}}{\sqrt{s(\mu+s)(2-s)}},$$

откуда видно, что $A\alpha$ будет меньше произведения этих двух выражений, а это произведение может быть разложено на два таких множителя:

$$\frac{\left(s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16} \sigma^2 s \right) \sqrt{s(\sigma-s)}}{(\lambda+1-s) \sqrt{\mu+s} + \sqrt{\mu((\lambda+1)^2 - 2\lambda s)}},$$

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s \right) (\mu+s)(2-s)}}.$$

Остановливаясь на первом из этих множителей, мы замечаем, что выражение

$$\left(s^3 - \sigma s^2 + \frac{3}{16} \sigma^2 s \right) \sqrt{s(\sigma-s)}$$

по возведении в квадрат дает

$$- \left[s^6 - 3\sigma s^5 + \frac{27}{8} \sigma^2 s^4 - \frac{14}{8} \sigma^3 s^3 + \frac{105}{256} \sigma^4 s^2 - \frac{9}{256} \sigma^5 s \right],$$

где полином, стоящий в скобках, равняется квадрату полинома

$$s^3 - \frac{3}{2} \sigma s^2 + \frac{9}{16} \sigma^2 s - \frac{1}{32} \sigma^3$$

без

$$\frac{\sigma^4}{32^2},$$

а потому это выражение может быть представлено в таком виде:

$$\sqrt{\frac{\sigma^4}{32^2} - \left(s^3 - \frac{3}{2} \sigma s^2 + \frac{9}{16} \sigma^2 s - \frac{1}{32} \sigma^3 \right)^2},$$

откуда видно, что числовые значения этого выражения не будут превосходить предела

$$\sqrt{\frac{\sigma^4}{32^2}} = \frac{\sigma^2}{32}.$$

С другой стороны, мы замечаем, что в этом множителе знаменатель

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s} + \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}$$

будет больше удвоенной величины наименьшего из двух членов

$$(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}, \quad \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)},$$

его составляющих, и, следовательно, будет больше наименьшей из двух величин

$$2(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}, \quad 2 \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}.$$

А так как в этом множителе, по замеченному выше, числитель не превосходит предела

$$\frac{\sigma^3}{32},$$

то этот множитель будет меньше наибольшей из двух таких дробей:

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}} = \frac{\sigma^3}{64(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}},$$

$$\frac{\frac{\sigma^3}{32}}{2 \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}} = \frac{\sigma^3}{64 \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}},$$

вследствие чего произведение этого множителя на второй множитель

$$\frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}}$$

будет меньше наибольшего из таких произведений:

$$\frac{\sigma^3}{64(\lambda + 1 - s) \sqrt{\mu + s}} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}},$$

$$\frac{\sigma^3}{64 \sqrt{\mu ((\lambda + 1)^2 - 2\lambda s)}} \frac{a}{2} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{\left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)(2 - s)}},$$

которые приводятся к следующим:

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s\right)(\mu + s)^2(2 - s)}},$$

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{\frac{2\mu - 2\lambda s + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s \right)^2 (\mu+s)(2-s)}}.$$

А так как для s возможны только значения от $s=0$ до $s=\sigma$, то наибольшая из этих двух величин не будет превосходить предела

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

где M означает наибольшую величину, которой достигают выражения

$$\frac{2\mu - 2\lambda s + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda+1-s)^2 \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s \right) (\mu+s)^2 (2-s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda \sigma + \frac{\mu^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu \left(\frac{(\lambda+1)^2}{2\lambda} - s \right) (\mu+s)(2-s)}$$

от $s=0$ до $s=\sigma$, и, следовательно, это будет предел значений $A\alpha$, отклонений точки A от прямой линии LM , что и нужно было показать.

§ 11. Чтобы дать пример употребления выведенных нами формул, а вместе с тем и показать, сколь значительна степень точности, с которою рассмотренный нами параллелограмм дает прямолинейное движение, мы возьмем

$$\sigma = 1.$$

Делая в формулах (3), (4), определяющих a и b ,

$$\sigma = 1,$$

находим

$$a = \frac{1}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,30992;$$

$$b = \frac{1 + \sqrt{\frac{35}{16}}}{\sqrt{\frac{335}{64} + 7\sqrt{\frac{35}{64}}}} = 0,76831.$$

Вставляя эти величины a и b в выражения (7), определяющие значение вспомогательных количеств λ , μ , находим

$$\lambda = \frac{0,76831}{0,30992} = 2,47902,$$

$$\mu = \frac{4 - (0,30992 + 0,76831)^2}{2 \cdot 0,30992 \cdot 0,76831} = 5,95804.$$

При этих величинах λ , μ , a и $\sigma = 1$ формула (6), определяющая длину хода l , дает

$$l = 0,30992 \sqrt{\frac{(5,95804 + 1) \cdot 1 \cdot (2 - 1)}{\frac{(2,47902 + 1)^2}{2 \cdot 2,47902} - 1}} = 0,68099.$$

По величине l равенства (5) нам дают

$$BC = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AB = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$BD = \frac{0,68099}{4} = 0,17025,$$

$$AD = \frac{0,68099}{2} = 0,34049.$$

Таковы должны быть размеры различных частей показанного нами параллелограмма, если за величину σ принимаем единицу.

Уклонения от прямолинейного движения в таком параллелограмме, по § 8, будут меньше

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

где M есть наибольшая величина, которой достигают дроби

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{(\lambda + 1 - s)^2 (\mu + s)^2 \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right) (2 - s)},$$

$$\frac{2\mu - 2\lambda\sigma + \frac{l^2}{a^2} - 2\lambda s - s^2}{2\lambda\mu (\mu + s) \left(\frac{(\lambda + 1)^2}{2\lambda} - s \right)^2 (2 - s)}$$

между $s = 0$ и $s = \sigma = 1$.

Внося в выражение этих дробей величины σ , a , λ , μ , l и ограничиваясь двумя десятичными знаками, находим, что они равны

$$\frac{11,79 - 4,96s - s^2}{(3,48 - s)^2 (5,96 + s)^2 (2,44 - s) (2 - s)},$$

$$\frac{11,79 - 4,96s - s^2}{29,54 (5,96 + s) (2,44 - s)^2 (2 - s)}.$$

Эти же дроби, как нетрудно заметить, идут постоянно возрастая от $s = 0$, до $s = 1$; а поэтому в этих пределах наибольшие их величины будут при $s = 1$. Делая

$$s = 1,$$

мы находим, что первая дробь приводится к 0,0136, а вторая к 0,0137. Последняя величина, как ббльшая, и будет наибольшую величиною, до которой достигают такие дроби между $s = 0$ и $s = 1$, и, следовательно, по нашему знакоположению,

$$M = 0,0137.$$

Внося эту величину M и величины σ , a в формулу

$$\frac{a\sigma^3}{128} \sqrt{M},$$

находим, что уклонения от прямолинейного движения в рассмотренном нами случае будут меньше

$$\frac{0,30992 \cdot 1^3}{128} \sqrt{0,0137} = 0,000283.$$

что не составляет и 0,00042 длины хода $l = 0,68099$, между тем как в параллелограме Уатта, бывшем предметом исследований Прони. (Annales des Mines, tome XII), эти уклонения превосходят 0,00060, длины хода.*

Из этого видно, что такой параллелограм, доставляя непосредственно преобразование попеременного прямолинейного движения в постоянное круговое, может заменить собою в паровых машинах и параллелограммы, ныне употребляемые, и мотыль с шатуном.** Заметим в заключение, что при этом отношение скоростей оказывается таким, какое может дать мотыль только при длине бесконечно большой.

* С уменьшением σ , предел этих уклонений быстро уменьшается. Так. при $\sigma = \frac{4}{5}$, когда $a = 0,29533$, $b = 0,76415$, $l = 0,59676$, этот предел меньше 0,00014; а при $\sigma = \frac{2}{3}$, когда $a = 0,28648$, $b = 0,76175$, $l = 0,53716$, этот предел меньше 0,00007.

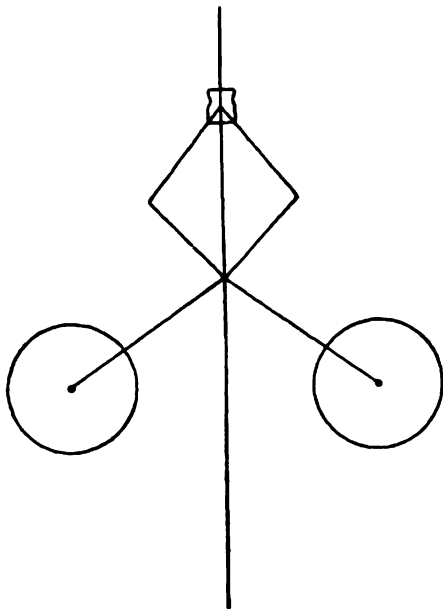
** См. Комментарии, стр. 251 настоящего тома. — *Ред.*

О ЦЕНТРОБЕЖНОМ УРАВНИТЕЛЕ*

§ 1. В настоящее время известно несколько центробежных уравнивателей, которых скорость вращения остается одна и та же при всех возможных положениях подвижной муфты. Но такого рода изохронизм, весьма важный для практики, достигается только введением новых частей в состав центробежного уравнивателя Уатта, через что этот механизм лишается своей первоначальной простоты. Средство наиболее простое для сообщения уравнителю изохронизма, бесспорно, представляет *пружина*, как ее употребил Фуко в своем уравнителе; но при этом для полного изохронизма необходимо, чтобы действие пружины неизменно и вполне точно следовало одному определенному закону, чего на практике нельзя достигнуть. Что касается устройства изохронических уравнивателей без помощи пружины, то по сложности их они оказываются неудобоприменимыми на практике. Если же невозможно достигнуть вполне изохронизма, оставляя центробежный уравнитель Уатта в его первоначальном составе, то, с другой стороны, легко заметить, что степень уклонения его от изохронических уравнивателей зависит от размера и расположения его частей; а потому, прежде чем решаться на усложнение его с целью сообщить ему изохронизм (которого на практике во всяком случае можно достигнуть только отчасти), необходимо определить наибольшую степень приближения к изохронизму, которая возможна для центробежного уравнивателя в его простейшем составе. Такого рода исследования относительно центробежного уравнивателя приводят к вопросу математического анализа, подобного тому, который представляется при определении наилучшего устройства *параллелограмма Уатта*, и решение этого вопроса, как мы увидим, показывает, что центробежный уравнитель Уатта, при надлежащих размерах его частей и расположении их, так близко подходит к изохроническому, что нет надобности усложнять этот механизм с целью достигнуть изохронизма. Степень приближения к изохронизму, которая оказывается возможною для уравнивателя Уатта, едва ли не превосходит ту, которой можно ожидать на практике при выполнении уравнивателей совершенно изохронических

* Опубликовано: Отчет и речи, произнесенные в торжественном собрании Императорского Московского Технического Училища. 20 (8) сент. 1871 г.; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соинина, том II, СПб., 1907, стр. 107—126. — *Ред.*

§ 2. Рассматривая центробежный уравниватель Уатта (фиг. 1), мы будем предполагать, что стержни, снабженные шарами, продолжены за точки их прикрепления к оси уравнивателя и концами своими сочленены с ручками, поддерживающими подвижную муфту, как это часто делается на практике. Но не ограничиваясь частным случаем стержней



Фиг. 1

ней прямых, мы будем предполагать, что они в точках прикрепления их к оси уравнивателя перегнуты и образуют некоторый угол ψ . Часть стержня от точки сочленения с ручками до точки прикрепления его к оси уравнивателя, для сокращения терминологии, мы будем называть *первою частью* стержня и длину ее примем за *единицу*. Другую часть стержня — от точки прикрепления к оси уравнивателя до центра шара — мы будем называть *второю частью* стержня и длину ее будем изображать через r . Угловую скорость вращения мы будем вообще изображать через ω , а нормальную величину этой скорости через ω_0 , угол наклона первой части стержня к оси уравнивателя при нормальной скорости враще-

ния ω_0 мы будем изображать через φ ; а тот же угол при какой-нибудь скорости ω через $\varphi + \alpha$, так что α будет представлять изменение этого угла при отклонении скорости вращения от ее нормальной величины ω_0 .

Определяя по началу *возможных перемещений* условие равновесия силы тяжести, постоянно действующей на муфту и шары, и силы центробежной, которая происходит при вращении со скоростью ω , мы находим такое уравнение:

$$P \left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) = 2r \left[1 + \frac{\omega^2}{g} r \cos(\psi - \varphi - \alpha) \right] \sin(\psi - \varphi - \alpha),$$

где m — длина ручек, за единицу веса принят вес шара, а P есть вес муфты.

Решая это уравнение относительно ω^2 , находим

$$\omega^2 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) P - 2r \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{2 \frac{r^2}{g} \sin(\psi - \varphi - \alpha) \cdot \cos(\psi - \varphi - \alpha)},$$

что по разделении на ω_0^2 может быть представлено под видом

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - \frac{2r}{P} \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{\frac{\omega_0^2 r^2}{Pg} \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

или

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)},$$

полагая

$$\frac{2r}{P} = A, \quad \frac{\omega_0^2 r^2}{Pg} = B. \quad (1)$$

Так как по нашему обозначению величина

$$\alpha = 0$$

соответствует

$$\omega = \omega_0,$$

то функция

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} \quad (2)$$

при $\alpha = 0$ должна равняться 1.

Полный изохронизм уравнивателя, как видели, предполагает, что угловая скорость ω при всех возможных положениях муфты и, следовательно, при всех возможных величинах угла α , определяющего ее положение, остается равною одной и той же величине ω_0 , для чего функция (2) должна приводиться к единице. Но если эта функция ни при каких значениях постоянных

$$A, B, m, \psi, \varphi,$$

в нее входящих, не делается тождественною единице, то, с другой стороны, надлежащим выбором этих величин уклонения ее от 1 при значениях α , представляющихся на практике, могут быть доведены до размеров весьма малых и, следовательно, центробежный уравниватель, в котором A, B, m, φ, ψ имеют такие величины, будет очень близко подходить к изохроническому.

§ 3. При определении параметров, с которыми данная функция наименее уклоняется от какой-либо постоянной величины при всех значениях переменной, заключающихся в известных пределах, необходимо различать два случая: 1) случай, когда эти пределы бесконечно близки между собою, и 2) случай, когда эти пределы разнятся между собою конечною величиною, более или менее значительною,

Величины параметров, получаемые в первом случае, как показано было в мемуаре нашем под заглавием „Теория механизмов, известных под именем параллелограмов“, * представляют первое приближение для определения их во втором случае, приближение, по которому более точные величины этих параметров легко отыскиваются по способу, показанному в упомянутом нами мемуаре.

Останавливаясь на первом случае, когда пределы α бесконечно близки между собою, мы замечаем, что в этом случае степень приближения выражения

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)}$$

к 1 определяется низшею степенью α в разложении разности

$$\frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}}\right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} - 1$$

по восходящим степеням α .

Разлагая эту разность в ряд по степеням α и приравнивая нулю коэффициенты при

$$\alpha^0, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4.$$

мы находим пять уравнений, которые должны быть удовлетворены для того, чтобы низшая степень α в этом разложении доходила до 5, что составляет высшую степень приближения выражения (2) к единице, так как пятью уравнениями, получаемыми при этом, вполне определяются все пять параметров, входящих в него.

Решая уравнения, таким образом получаемые, мы нашли, что они удовлетворяются при следующих величинах A, B, m, ψ, φ :

$$\begin{aligned} A &= 0,84713, \\ B &= 0,65616, \\ m &= 1,31271, \\ \psi &= 119^\circ 10', \\ \varphi &= 58^\circ 46'. \end{aligned}$$

Внося эти величины в формулу (2), мы получаем выражение, которое, отличаясь от единицы только членами 5-й и высших степеней, при α незначительном (как это бывает на практике) мало разнится с единицею. Так, вычисляя значение этого выражения при различных величинах α , мы находим, что разность его с единицею достигает до 0,001 только при $\alpha = 14^\circ 40'$ и понижается до —0,001 только при

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51 и 474—485; стр. 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

$\alpha = -13^\circ 50'$. С уменьшением же числовой величины α эта разность уменьшается очень быстро, а именно: почти как пятая степень α .

С другой стороны, вычисляя высоту муфты при

$$\alpha = 14^\circ 40', \quad \alpha = -13^\circ 50', *$$

находим, что при переходе α от $14^\circ 40'$ до $-13^\circ 50'$ муфта поднимается на 0,62 первой части стержня, принятой нами за единицу длины. При уменьшении же предельных величин α высота подъема муфты, как показывают вычисления, уменьшается почти пропорционально первой степени α . Из этого видно, что, давая различным частям центробежного уравнивателя Уатта такие размеры и расположение, при которых отношение $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ приводится к выше найденному выражению, мы сделаем

его очень близко подходящим к изохроническому, а именно: по выше показанному при всех положениях муфты на длине, равной 0,62, отношение $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ не будет выходить из пределов $1 + \frac{1}{1000}$, $1 - \frac{1}{1000}$ и,

следовательно, разность $\omega - \omega_0$ будет заключаться между $+\frac{\omega_0}{2000}$ и $-\frac{\omega_0}{2000}$. С уменьшением же длины хода муфты на 0,1, 0,2, 0,3, 0,4 его первоначальной величины пределы разности $\omega - \omega_0$ уменьшатся пропорционально

$$0,9^5; 0,8^5; 0,7^5; 0,6^5$$

и вследствие того приведутся к таким величинам:

$$\pm 0,00029\omega_0; \pm 0,00016\omega_0; \pm 0,00008\omega_0; \pm 0,00004\omega_0.$$

§ 4. Сколь ни малы эти пределы отклонений угловой скорости ω от ее нормальной величины ω_0 , эти пределы могут быть еще уменьшены и очень значительно. Эти пределы отклонений, как мы видели, получаются в том случае, когда при определении параметров, входящих в функцию (2), предполагают переменную α бесконечно малою. Переходя от случая, когда α остается бесконечно малою величиною, к случаю, когда α удаляется от 0 на конечные, но незначительные величины, мы по приемам, показанным в выше упомянутом мемуаре, эти пределы можем уменьшить в $2^4 = 16$ раз. Так как приближение, доставляемое выше найденными величинами A, B, m, ψ, φ , совершенно достаточно для практики, мы не будем останавливаться на определении их величин, доставляющих большее приближение. Заметим только, что при величинах

$$A, B, m, \psi, \varphi,$$

* По формуле $\cos(\varphi + \alpha) + \sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}$.

которые таким образом найдутся, разность

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 = \frac{\left[1 + \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sqrt{m^2 - \sin^2(\varphi + \alpha)}} \right] \sin(\varphi + \alpha) - A \sin(\psi - \varphi - \alpha)}{B \sin 2(\psi - \varphi - \alpha)} - 1$$

будет приводиться к нулю при пяти различных величинах α , и, следовательно, пять различных положений подвижной муфты будут соответствовать одной и той же угловой скорости ω_0 . Что касается значений параметров

$$A, B, m, \varphi, \psi,$$

при которых всякой угловой скорости вращения соответствовало бы только одно положение муфты, они также найдутся по способу, показанному нами в вышеупомянутом мемуаре, только при этом *полином, наименее уклоняющийся от нуля, безусловно должен быть заменен полиномом, который наименее уклоняется от нуля, постоянно возраста или убывая*. Определяя различные полиномы под этим условием, мы находим, что полином, необходимый в настоящем случае, представляется следующей формулой:

$$\left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right)^5 - \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{18} \left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right)^3 + \frac{5(\alpha_1 - \alpha_0)^4}{144} \left(\alpha - \frac{\alpha_1 + \alpha_0}{2} \right),$$

где α_1, α_2 означают пределы переменной α , в которых искомый полином вида

$$\alpha^5 + a\alpha^4 + b\alpha^3 + c\alpha^2 + d\alpha + e,$$

постоянно возраста или убывая, наименее удаляется от нуля и что при помощи этого полинома пределы уклонений выражения (2) от единицы, показанные в § 3, уменьшаются в отношении 4:9.

§ 5. Ограничиваясь первым приближением, мы по § 3 будем иметь

$$A = 0,84713,$$

$$B = 0,65616,$$

$$m = 1,31271,$$

$$\psi = 119^\circ 10',$$

$$\varphi = 58^\circ 46',$$

где по (1)

$$A = \frac{2r}{P}, \quad B = \frac{\omega_0^2 r^4}{Pg}. \quad (3)$$

Из этих равенств получаются такие величины P и r :

$$r = \frac{2B}{A} \cdot \frac{g}{\omega_0^2}, \quad P = \frac{4B}{A^2} \cdot \frac{g}{\omega_0^2},$$

что по внесении величин A и B дает

$$r = 1,54906 \frac{g}{\omega_0^2}, \quad P = 3,65719 \frac{g}{\omega_0^2}.$$

Таким образом получаются величины, необходимые для определения всех частей уравнивателя.

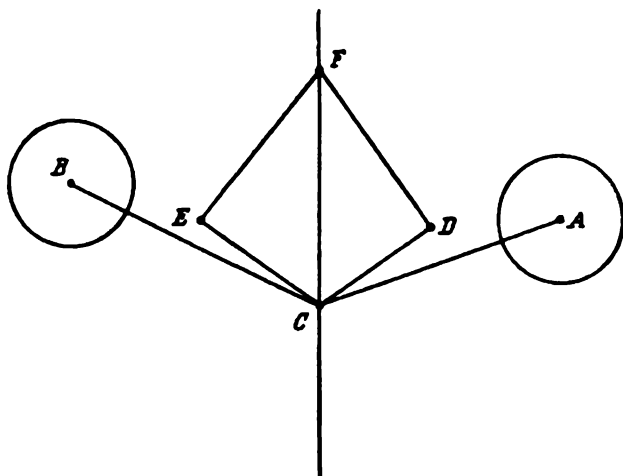
Полагая для примера

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9,$$

мы по этим формулам получаем

$$r = 1,72115, \quad P = 4,06355.$$

Составляя по этой величине r и выше показанным значениям m , ψ чертеж центробежного уравнивателя, мы находим, что он будет иметь вид, представленный на фиг. 2, где CD , CE —первые части



Фиг. 2

стержней, длина которых (§ 2) принимается за единицу, AC , BC —вторые части стержней, которых длина r в нашем примере равняется 1,72115; DF , EF —ручки, поддерживающие муфту F ; длина их m постоянно равна 1,31271; угол перегиба стержней ACE , BCD равняется $119^\circ 10'$. Что касается углов FCD , ECF , определяющих наклонение первой части стержня к оси уравнивателя, эти углы при нормальной скорости вращения уравнивателя равны $58^\circ 46'$.

Центробежный уравниватель, таким образом составленный, как показывает фиг. 2, будет иметь стержни, поднятые вверх, и центры шаров будут выше точек прикрепления стержней к оси уравнивателя. Кроме того, такой уравниватель от обыкновенного уравнивателя Уатта будет отличаться муфтой, которой вес P будет всегда велик сравнительно с весом шаров. Так, в нашем

вместе с ручкою EF , с ним сочлененною, должен быть одинаковым относительно двух плоскостей, перпендикулярных к плоскости уравнителя и делающих с линиею AC в точке A углы равные $\frac{\pi}{4}$.

Если такое условие выполняется каждым из двух стержней вместе с ручками, к ним прикрепленными, и масса их незначительна сравнительно с массою шаров, выражение, определяющее отношение $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$, приводится к виду (2) с точностью, достаточною для практики, когда полагаем

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \text{уг. } ACE + \arcsin \frac{2(p + p_1)Y}{AP}, \\ A &= \frac{2r + 2(p + p_1)X}{P + \frac{2\rho}{m} p_1}, \\ B &= \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \frac{r^2 + (p + p_1)(\eta^2 - \xi^2)}{P + \frac{2\rho}{m} p_1}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где p — вес одного стержня, p_1 — вес одной ручки, ρ — расстояние центра тяжести ручки от точки ее сочленения с муфтою; X , Y — координаты центра тяжести, а ξ , η — плечи моментов инерции* относительно плоскостей yz , xz стержня с ручкою, направленной по выше сказанному; причем за ось x принимается линия AC , за ось y — перпендикуляр к ней в плоскости уравнителя, за ось z — перпендикуляр к этой плоскости (фиг. 3).

Что касается r и угла ACE , то r представляет расстояние центра A от точки C , а угол ACE — наклонение этого расстояния к первой части стержня ACE . Приведя таким образом к прежнему виду (2) выражение величины $\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ при действии массы стержней и ручек, мы получим уравнитель, близко подходящий к изохроническому при действии этих масс, давая его частям такие размеры и расположение, при которых величины

$$A, B, m, \psi, \varphi$$

$$* \text{ Т. е. величины } \sqrt{\frac{x_1^2 M_1 + x_2^2 M_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}}, \quad \sqrt{\frac{y_1^2 M_1 + y_2^2 M_2 + \dots}{M_1 + M_2 + \dots}},$$

если через M_1, M_2, \dots обозначим частицы стержня и ручки, а через $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots$ координаты частиц M_1, M_2, \dots .

имеют значения, показанные в § 2. Внося эти величины A , B , ψ в формулы (4), мы получаем три уравнения

$$\left. \begin{aligned} \text{уг. } ACE + \arcsin \frac{2(p+p_1)Y}{0,84713 P} &= 119^\circ 10', \\ \frac{2r + 2(p+p_1)X}{P + \frac{2p}{m} p_1} &= 0,84713, \\ \frac{\omega_0^2}{g} \cdot \frac{r^2 + (p+p_1)(\eta^2 - \xi^2)}{P + \frac{2p}{m} p_1} &= 0,65616 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

взамен прежних (§ 5). Что касается величин m и φ , то они остаются без перемены.

§ 7. Чтобы показать на примере употребление выше приведенных формул, положим, что требуется сделать центробежный уравниватель, для которого

$$\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9.$$

Так как у нас везде за единицу длины принимается длина первой части стержня, то g , ускорение тяжести, представится числом более или менее значительным, смотря по длине этой части, и вследствие того надлежащим выбором этой длины отношение

$$\frac{\omega_0^2}{g}$$

может быть приведено к величине 0,9, каковы бы ни были угловая скорость ω_0 и ускорение тяжести g .

Приступая к определению различных частей уравнивателя, мы, для первого приближения, пренебрегаем массой стержней и ручек, для чего в формулах (5) полагаем

$$p=0, \quad p_1=0.$$

При таких величинах p , p_1 и при $\frac{\omega_0^2}{g} = 0,9$ формулы эти приводятся к следующему:

$$\text{уг. } ACE = 119^\circ 10',$$

$$\frac{2r}{P} = 0,84713,$$

$$0,9 \frac{r^2}{P} = 0,65616.$$

Решая последние уравнения относительно P и r , находим

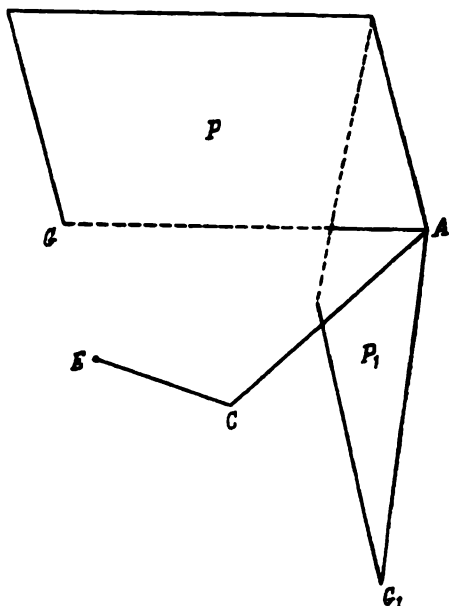
$$P = 4,063, \quad r = 1,721.$$

Первое показывает вес муфты, причем за единицу (§ 2) принимается вес одного шара; второе нам дает расстояние центра шара от точки прикрепления стержня к оси уравнивателя.

Переходя к более точному определению этих величин, мы по выше найденной величине r и углу ECA ищем приближенное место центра шара относительно первой части стержня. Для этого, взявши какую-нибудь прямую EC за первую часть стержня и длину ее за единицу, проводим (фиг. 4) линию AC под углом $ACE=119^\circ 10'$ и откладываем

$$AC=r=1,721.$$

Точка A будет местом центра шара, как оно получается в первом приближении; точка C будет местом прикрепления стержня к оси уравнивателя, и вся ломаная линия ACE будет находиться в плоскости уравнивателя. Проводя через точку A линии AG , AG_1 , делающие с линией AC углы CAG , CAG_1 , равные 45° , и через эти линии плоскости P , P_1 , перпендикулярные к плоскости уравнивателя, мы получим те две плоскости, относительно которых, по § 6, должен быть одинаковым момент инерции стержня вместе с ручкою, прикрепленную к нему и направленную таким образом, что проекция ее свободного конца на плоскость чергежа приходится в точке C . При этом вся ручка будет, очевидно, ближе к плоскости P , чем к P_1 , и то же замечается относительно EC , первой части стержня; а потому выше сказанное равенство моментов может иметь место только в



Фиг. 4

том случае, когда на второй части стержня будут точки, лежащие ближе к плоскости P_1 , чем к P , для чего эта часть стержня должна заходить вниз за линию AC , так как, по равенству углов CAG , CAG_1 , все точки этой линии равно отстоят от плоскостей P и P_1 . Откуда видно, что изгиб стержней (фиг. 3), который доставляет возможность им свободно двигаться, необходим для того, чтобы можно было удовлетворить рассматриваемому нами равенству моментов, оставляя ручки и первые части стержней прямыми. Так как по мере удаления точек второй части стержня вниз за линию AC разница моментов инерции их относительно плоскостей P_1 и P постоянно возрастает, то последовательными испытаниями нетрудно приискать такое положение

кругов, определяющих вид внешних нитей на закругленной части стержня, то они легко найдутся по ширине этой части в начале, середине и конце ее, как это будет показано ниже (§ 9).

Заметим еще, что утолщение и выемки в стержнях около C , точки их прикрепления к оси уравнивателя, не имеют значительного влияния на рассматриваемое нами равенство моментов, так как в этом месте для всякой точки разница расстояний от плоскостей P и P_1 очень незначительна. То же можно сказать о конце ручки, который должен быть сочленен с муфтой, так как при рассматриваемом нами равенстве проекция этого конца на плоскость чертежа будет в точке C , что предполагает равенство расстояний его от плоскостей P и P_1 .

§ 8. Остановливаясь на случае, когда стержень, ручки и шарниры, их сочленяющие, сделаны согласно с выше сказанным, и вычисляя в этом предположении величины $p, p_1, Y, \xi, \eta, \rho$, входящие в формулы (5), мы находим

$$\begin{aligned} p &= 13,8\lambda\mu, & X &= 0,292, \\ p_1 &= 2,5\lambda\mu, & Y &= 0,205, \\ \eta^2 - \xi^2 &= 0,044, & \rho &= \frac{m}{2}, \end{aligned}$$

где за единицу веса принимается вес шара, которого поперечник в рассматриваемом нами случае, как видели, равен 0,8 и который мы предполагаем состоящим из того же вещества, как и стержни с ручками и шарнирами.

Внося эти величины в формулы (5) и заменяя отношение $\frac{\omega_0^2}{g}$ величиною его 0,9, получаем такие уравнения для определения r, P и уг. ACE :

$$\frac{2r + 9,6\lambda\mu}{P + 2,5\lambda\mu} = 0,84713, \quad (6)$$

$$0,9 \frac{r^2 + 0,72\lambda\mu}{P + 2,5\lambda\mu} = 0,65616,$$

$$ACE + \arcsin \frac{6,7\lambda\mu}{0,84713 P} = 119^\circ 10'. \quad (7)$$

Деля первое из этих уравнений на второе, находим

$$\frac{2r + 9,6\lambda\mu}{(r^2 + 0,72\lambda\mu) \cdot 0,9} = \frac{0,84713}{0,65616},$$

что дает такое уравнение для определения r :

$$r^2 - 1,72124r = 7,5\lambda\mu:$$

откуда выходит

$$r = 0,86062 + \sqrt{0,86062^2 + 7,5\lambda\mu}.$$

Разлагая же эту величину в ряд и ограничиваясь первой степенью $\lambda\mu$, находим

$$r = 1,7212 + 4,4 \lambda\mu. \quad (8)$$

Переходя к определению P , мы замечаем, что уравнение (6) дает

$$P + 2,5 \lambda\mu = \frac{2r}{0,84713} + \frac{9,6 \lambda\mu}{0,84713},$$

что по вставке выше найденной величины r приводится к следующему:

$$P = 4,0636 + 19 \lambda\mu. \quad (9)$$

Определив таким образом P , мы на основании уравнения (7) найдем величину угла ACE , а по этому углу и длине $AC = r$ мы найдем место точки A , центра шара.

Так с точностью, достаточною для практики, определится стержень и вес муфты. Что касается ручек, то длина их m , как видели (§ 5), всегда равняется 1,31271; площадь же сечения их предполагалась по всей длине одинаковою и равною 0,52 $\lambda\mu$. Но, очевидно, мы ничего не изменим в условиях равновесия, если частицы муфты, соприкасающиеся с ручкой, будем считать принадлежащими не муфте, а тому концу ручки, который сочленен с нею. Точно так же может быть отнесена к другому концу ручки часть массы, назначенной для образования шарнира, связывающего ручки со стержнем.

С другой стороны, нетрудно заметить, что по незначительности массы ручек изменение в расположении ее по длине их не будет иметь значительного влияния на движение уравнителя, если только центр тяжести ручек остается на прежнем месте. Вследствие этого при устройстве уравнителей можно уклоняться от сделанного нами предположения относительно сечения ручек и увеличивать их массу за счет массы муфты и шарниров.

§ 9. Чтобы показать на примере употребление выше найденных формул, положим, что величины λ , μ , определяющие по § 8 ширину и толщину стержня, имеют такие значения:

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12.$$

Внося эти величины в формулы (8) и (9), находим

$$r = 1,7212 + 4,4 \cdot 0,16 \cdot 0,12 = 1,8057,$$

$$P = 4,0636 + 19 \cdot 0,16 \cdot 0,12 = 4,4283.$$

Внося же величину P и величины λ , μ в уравнение (7), получаем

$$ACE = \arcsin \frac{6,7 \cdot 0,16 \cdot 0,12}{0,84715 \cdot 4,4283} = 119^\circ 10',$$

откуда, замечая, что

$$\arcsin \frac{6,78 \cdot 0,16 \cdot 0,12}{0,84715 \cdot 4,4283} = \arcsin 0,0345 = 1^\circ 58',$$

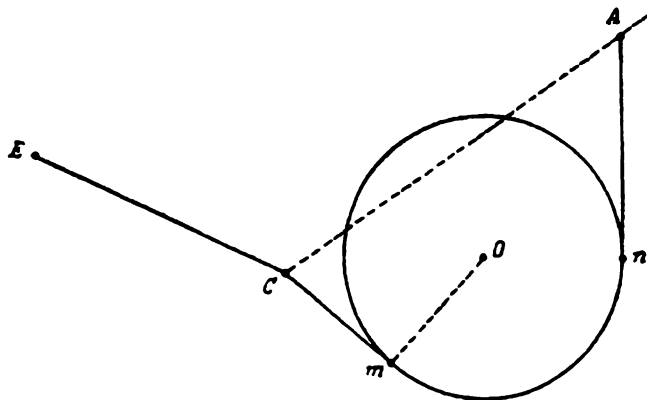
выводим

$$ACE + 1^{\circ}58' = 119^{\circ}10',$$

что дает нам

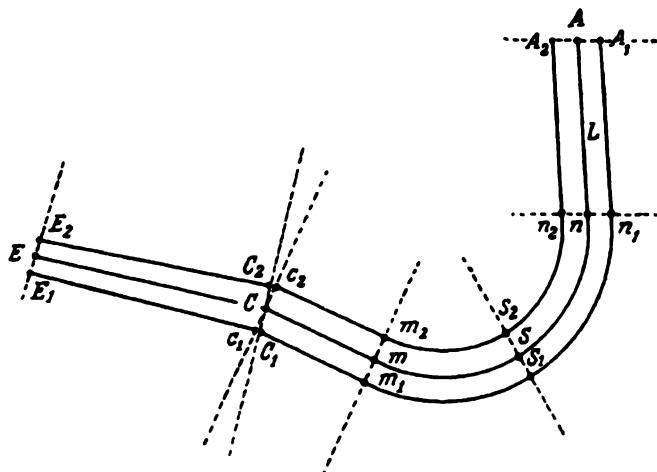
$$ACE = 119^{\circ}10' - 1^{\circ}58' = 117^{\circ}12'.$$

Приступая к определению различных частей стержня, мы, согласно сказанному в § 7, выбираем длину первой части стержня и чертим линию EC (фиг. 6), равную этой длине. Принимая EC за единицу, проводим через точку C под углом ECm , равным 192° , линию Cm ,



Фиг. 6

равную 0.5. Восставляя из точки m , конца этой линии, перпендикуляр, откладываем на нем часть mO , равную 0,6; по сказанному в § 8 точка O будет центр круга, которого дуга представляет загнутую часть



Фиг. 7

средней нити стержня. С другой стороны, проведя из точки C линию AC под углом к линии CE , равным $117^{\circ}12'$, и делая $AC=r=1,8057$, мы найдем точку A , место центра шара; касательная Al к кругу O ,

проведенная из этой точки, определяет точку n , конец загнутой части нити и начало последней прямой части nA . Так найдется средняя нить всего стержня.

Переходя к определению крайних нитей, проводим (фиг. 7) нормали к средней нити $ECmnA$ в точках E, C, m, n, A и к точке S , середине дуги mn . На этих нормалях, по ту и по другую сторону средней нити, откладываем части, равные половине ширины стержня в этих местах (§ 7), делая

$$EE_1 = EE_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \lambda = 0,06,$$

$$CC_1 = CC_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$Cc_1 = Cc_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$mm_1 = mm_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$SS_1 = SS_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \lambda = 0,10,$$

$$nn_1 = nn_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08,$$

$$AA_1 = AA_2 = \frac{1}{2} \lambda = 0,08.$$

Проведа через точки

$E_1, C_1,$

$c_1, m_1,$

$n_1, A_1,$

$E_2, C_2,$

$c_2, m_2,$

n_2, A_2

прямые, а через точки

$n_1, S_1, m_1,$

n_2, S_2, m_2

дуги кругов, мы по § 8 получим очертание внешних нитей стержня.

Заметим при этом, что расширение стержня около точки C , которое необходимо сделать для прикрепления стержня к оси уравнивателя, не будет иметь значительного влияния на наши уравнения, так как около C координаты всех точек (фиг. 3) имеют малую величину. Вследствие этого около точки C стержень может быть расширен, сколько этого потребует прочность. Увеличивая же массу в конце его E для того, чтобы образовать шарнир, мы должны иметь в виду, что объем всего шарнира на конце стержня и ручки должен составлять

$$0,13 \lambda \mu,$$

что при

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12$$

приводится к

$$0,002496.$$

Что касается другого конца стержня, на котором будет шар, то (фиг. 7), откладывая от точки A , места центра шара, по направлению AL линию AL , равную $0,4$, радиусу шара, мы найдем то место стержня, где он будет прикасаться к поверхности шара.

Переходя к ручкам, мы замечаем, что по § 5 длина их всегда равна $m = 1,31271$. По формуле же

$$0,52 \lambda \mu$$

при

$$\lambda = 0,16, \quad \mu = 0,12$$

мы находим, что в рассматриваемом нами случае площадь сечения ручек должна равняться $0,01$. Мы предполагали, что такое сечение будет одинаково на всей длине ручек; но по замеченному в § 8 можно изменять распределение массы по длине ручек, лишь бы центр тяжести оставался на том же месте. Так, вместо ручки с одинаковым сечением по всей длине можно взять ручку, составленную из двух параллельных полосок, связанных по середине третьей поперечною полоскою (фиг. 8): центр тяжести такой ручки будет тоже по середине длины. Если вес ручки окажется более того, сколько он был бы при площади сечения $0,01$ по всей длине, на одну половину лишнего веса ее, как видели, должна быть уменьшена муфта, а на другую половину шарнир, сочленяющий ручку с стержнем. Делая то же относительно каждой ручки, мы должны будем уменьшить оба шарнира на половину лишнего веса одной ручки, и на весь лишний вес ее уменьшит вес муфты $P = 4,4283$.



Фиг. 8

Толщина стержня, как видели, предполагается по всей длине его равною $\mu = 0,12$.

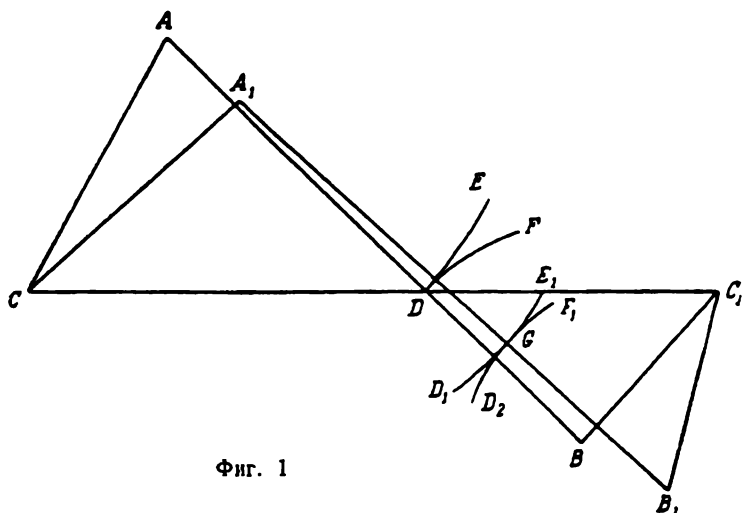
О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ*

§ 1. Рассматривая построение зубчатых колес в теории, обыкновенно предполагают данную форму зуба на одном колесе и по ней ищут форму зуба другого колеса. Таким образом, делая различные предположения относительно вида зуба одного колеса, можно найти бесчисленное множество различных видоизменений зубчатых колес. Но из всех этих видоизменений на практике употребляются очень немногие. Для того чтобы практика могла, не ограничиваясь этими частными видами зубьев, употреблять всякий раз то самое очертание их, которое в данном случае представляется наиболее пригодным, необходимо иметь такой общий способ черчения их, при котором легко получалась бы форма зубьев на обоих колесах, наиболее соответствующая тем или другим требованиям практики. Если иметь в виду теоретически точное очертание зубьев, определение их формы под такими условиями представляет трудности непреодолимые. Но практика и не требует точного определения вида зубьев; она обыкновенно довольствуется приближенным черчением их, при котором выступы и впадины зубьев ограничены дугами кругов, надлежащим образом выбранных. Если же иметь в виду только такие очертания зубьев (а они вообще с точностью, достаточною для практики, могут заменить собою все другие), вопрос об определении зубьев, наиболее соответствующих каким-либо требованиям практики, становится значительно легче, приводясь к определению центра и радиуса нескольких кругов. Но приступая к рассмотрению зубьев, ограниченных дугами кругов, мы замечаем, что они никогда не могут дать такого зацепления, при котором отношение угловых скоростей оставалось бы постоянно равным одной и той же величине, как это необходимо для правильного действия зубчатых колес; а потому при определении очертания таких зубьев необходимо иметь в виду по возможности уменьшить неправильности в движении зубчатых колес, происходящие от более или менее значительной перемены отношения угловых скоростей в продолжение зацепления одной пары зубьев. Этим мы теперь и займемся: мы покажем, каким образом найдется очертание

* Опубликовано 23 (11) авг. 1872 г., изд. Моск. Тех. Учил.; Отчет и речи, произнесенные в торжественном собрании Имп. Моск. Тех. Учил. 22 (10) сент. 1872 г., *Revue Universelle des Mines*, t. 38, 1875, p. 523—546; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соница, том II, СПб., 1907, стр. 126—162. — Ред.

выступов и впадины зубьев, ограниченных дугами кругов, при котором неправильности в движении колес достигают самого низшего предела, возможного при выполнении тех или других требований практики.

§ 2. Пусть будут (фиг. 1) C, C_1 центры зубчатых колес (которые мы для сокращения будем называть: колесо C , колесо C_1) и их первообразных кругов; $R = CD, R_1 = C_1D$ — радиусы первообразных кругов; $\rho = AD, \rho_1 = BD$ — радиусы, которыми описана дуга DE , ограничивающая выступ колеса C , и дуга DF , ограничивающая впадину зуба на колесе C_1 ; A, B — места центров этих дуг в момент, когда они соприкасаются на линии центров, и A_1, B_1 — места



Фиг. 1

центров, когда рассматриваемые дуги соприкасаются в какой-нибудь точке G ниже этой линии. Углы ACA_1, BC_1B_1 будут представлять величину поворота колес C, C_1 от момента, когда зубья соприкасались на линии центров до момента, когда они соприкасаются в какой-нибудь точке G ниже этой линии. Называя вообще величину этих углов через λ и μ и изображая через $F(\lambda)$ функцию, определяющую величину угла μ , соответствующую какой-либо величине угла λ , мы замечаем, что производная $F'(\lambda)$ будет представлять отношение угловых скоростей колес C, C_1 при различных величинах угла $\lambda = ACA_1$.

Так как при $\lambda = ACA_1 = 0$ угол $\mu = BC_1B_1$ тоже приводится к нулю, функция $F(\lambda)$ при $\lambda = 0$ будет обращаться в нуль. С другой стороны, нетрудно заметить, что при этой величине λ производная $F'(\lambda)$ должна равняться $\frac{R}{R_1}$. В самом деле, при $\lambda = ACA_1 = 0$, как видели, зубья соприкасаются на линии центров в точке D , вследствие чего по общему свойству зацеплений отношение угловых скоростей колес C, C_1 при этой величине λ будет равно $\frac{CD}{C_1D}$ или $\frac{R}{R_1}$, а это отношение по выше сказанному и будет величина производной $F'(\lambda)$ при $\lambda = 0$.

Приступая к рассмотрению неправильностей в ходе колес C, C_1 , неизбежных при зубьях, ограниченных дугами кругов, мы замечаем, что в рассматриваемом нами случае, где радиусы первообразных кругов равны R, R_1 , отношение угловых скоростей должно было бы оставаться постоянно равным $\frac{R}{R_1}$ и, следовательно, при повороте колеса C на угол $\lambda = ACA_1$ колесо C_1 должно бы было повернуться на угол, равный $\frac{R}{R_1} \lambda$. А так как по нашему знакоположению μ , угол поворота колеса C_1 , соответствующий повороту колеса C на угол λ в рассматриваемом нами зацеплении, будет представляться функцией $F(\lambda)$, то разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

нам покажет ошибку в повороте колеса C_1 , которая будет иметь место при повороте колеса C на угол $ACA_1 = \lambda$.

Так как по выше сказанному функция $F(\lambda)$ при $\lambda = 0$ обращается в нуль, то разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

при $\lambda = 0$ будет тоже приводиться к нулю. При других величинах λ эта разность будет вообще отличаться от нуля и при переходе λ от нуля до предельной величины своей, соответствующей моменту, когда дуги DE, DF соприкасаются своими концами E, F , — величины, которую мы будем изображать через l , эта разность будет более или менее уклоняться от нуля. Для уменьшения по возможности неправильности в ходе колес при рассматриваемом нами зацеплении, необходимо дуги DE, DF выбрать таким образом, чтобы разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

от $\lambda = 0$ до $\lambda = l$ наименее удалялась от нуля. Точное определение дуг DE, DF под таким условием очень трудно по сложности состава функции $F(\lambda)$; но, ограничиваясь приближенным решением этого вопроса, совершенно достаточным для практики, мы можем устранить затруднение, происходящее от сложности функции $F(\lambda)$, заменяя выражение

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

его разложением в ряд по восходящим степеням переменной λ .

Так как угол λ , заключаясь в пределах $\lambda = 0, \lambda = l$, остается всегда малою величиною, то нет надобности удерживать в разложении выражения

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

значительное число членов. Для решения различных вопросов, представляющихся в практике, как мы увидим, нам достаточно будет иметь это разложение до третьей или четвертой степени λ включительно; вследствие чего разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

будет представляться у нас или полиномом

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2 + K_1 \lambda + K_0,$$

или полиномом

$$K_4 \lambda^4 + K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2 + K_1 \lambda + K_0.$$

§ 3. По сказанному выше, определение дуг DE , DF , доставляющих наиболее правильное зацепление, приведет к определению полиномов вида

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2 + K_1 \lambda + K_0,$$

$$K_4 \lambda^4 + K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2 + K_1 \lambda + K_0,$$

наиближе подходящих к нулю в данных пределах. Эти полиномы подобны тем, которые представляются при определении наилучшего устройства параллелограма Уатта и разнятся они с этими последними только некоторыми особенностями, происходящими от выше замеченного нами относительно значения функции $F(\lambda)$ и ее производной $F'(\lambda)$ при $\lambda = 0$. Так как при $\lambda = 0$ функция $F(\lambda)$ обращается в нуль, то в разложении разности

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

не будет члена без λ ; вследствие же того, что $F'(\lambda)$ при $\lambda = 0$ равняется $\frac{R}{R_1}$, мы замечаем, что в разложении разности

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

коэффициент при λ будет равняться нулю. Из этого видно, что наши полиномы приведутся к следующему:

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2, \quad K_4 \lambda^4 + K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2.$$

Вот какого вида полиномы представляются при решении рассматриваемого нами вопроса о зубчатых колесах. В этих полиномах, подобно тому как и в полиномах, представляющихся в теории параллелограма Уатта, первые коэффициенты предполагаются данными, а остальные должны быть выбраны так, чтобы значение полиномов в пределах $\lambda = 0$ и $\lambda = l$ наименее уклонялось от нуля. На основании того, чтобы было показано в мемуаре нашем: „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“, * определение таких

* Том II, стр. 23—51 и 474—485 настоящего Собрания сочинений; стр. 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

полиномов в общем виде возможно только при помощи эллиптических функций; но для случая 3 и 4 степени они легко определяются. Ограничиваясь тысячными долями в числовых коэффициентах, мы находим, что эти полиномы могут быть представлены так:

$$K_3(\lambda^3 - 0,894 l \lambda^2),$$

$$K_4(\lambda^4 - 1,559 l \lambda^3 + 0,578 l^2 \lambda^2) *$$

Эти полиномы в пределах $\lambda = 0$ до $\lambda = l$ меньше всех других полиномов того же вида будут удаляться от нуля, но они при предельной величине $\lambda = l$, как нетрудно заметить, достигают наибольшего отклонения от нуля, вследствие чего зубчатые колеса, в которых отклонения от нормального хода выразятся такими полиномами, будут наихуже действовать при конце зацепления каждой пары зубьев. Для практики это очень невыгодно; для нее особенно полезно, чтобы колеса приходили в нормальное положение как при начале, так и при конце зацепления; а потому выше показанные полиномы полезно заменить такими, которые, представляя наименьшее отклонение от нуля в пределах $\lambda = 0$, $\lambda = l$, обращались бы в нуль не только при $\lambda = 0$, но и при $\lambda = l$. На основании того, что было замечено нами в § 9 выше упомянутого мемуара, такого рода полиномы получатся из выше приведенных формул, когда заменим l в выражении полинома третьей степени через $\frac{l}{0,894}$, а в выражении полинома четвертой степени — через $\frac{l}{0,952}$. Таким образом мы получаем полиномы

$$K_3(\lambda^3 - l \lambda^2),$$

$$K_4(\lambda^4 - 1,638 l \lambda^3 + 0,638 l^2 \lambda^2)$$

взамен выше приведенных, и эти полиномы нам послужат к определению таких очертаний выступа и впадины зубьев, при которых в конце и начале зацепления колеса будут иметь нормальное положение, а в продолжение зацепления отклонения от нормального хода будут по возможности малыми.

§ 4. Мы начнем с того случая, когда при выборе дуг, ограничивающих выступ и впадину зубьев, остается за удовлетворением тех или других требований практики только одна величина, которую

* Точное выражение этих полиномов есть следующее:

$$K_3(\lambda^3 - a l \lambda^2),$$

$$K_4\left(\lambda^4 - \frac{4 p l}{q} \lambda^3 + \frac{(13 p^2 - 4) l^2}{2 q^2} \lambda^2\right),$$

где a определяется уравнением $a^3 + \frac{27}{4}(a-1) = 0$, а p и q имеют такие величины:

$$p = \sqrt{\frac{20 + 24 \sqrt{3}}{83}}, \quad q = \frac{p}{2} + \sqrt{1 - p^2} + \sqrt{p^2 + 2 p \sqrt{1 - p^2}}.$$

можно располагать для уменьшения по возможности неправильностей в ходе колес. В этом случае, ограничиваясь в разложении: выражения

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda.$$

третьею степенью λ , мы, по сказанному в предыдущем параграфе, должны положить

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda = K_3(\lambda^3 - l\lambda^2). \quad (1)$$

Так как по самому составу функции $F(\lambda)$ разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

всегда приводится (§ 2) с точностью до λ^3 к полиному вида

$$K_3 \lambda^3 + K_2 \lambda^2,$$

то равенство (1) нам даст одно уравнение между коэффициентами K_2 , K_3 и, следовательно, между величинами, входящими в состав функции $F(\lambda)$ и когорыми определяются рассматриваемые нами дуги.

Это уравнение мы могли бы вывести, найдя выражение функции $F(\lambda)$ и сличив коэффициенты при λ^2 , λ^3 в двух частях равенства (1); но это уравнение мы можем получить гораздо проще, заметив, что равенство (1), будучи продифференцировано, дает

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1} = K_3(3\lambda^2 - 2l\lambda),$$

что предполагает, с точностью до λ^2 , обращение в нуль разности

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

при таких величинах λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = \frac{2}{3}l.$$

Первая величина λ , как видели (§ 2), будет всегда обращать в нуль разность

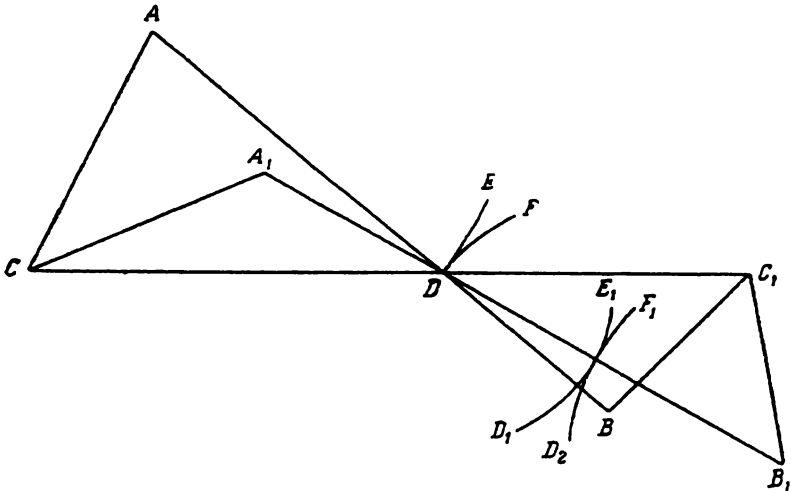
$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1};$$

обращение же в нуль этой разности при $\lambda = \frac{2}{3}l$ нам послужит для вывода искомого уравнения между величинами, входящими в состав функции $F(\lambda)$.

Для этого мы замечаем, что по § 2 производная $F'(\lambda)$ представляет отношение угловых скоростей рассматриваемых нами колес, дробь же $\frac{R}{R_1}$ — нормальную величину этого отношения; а потому обращение в нуль разности

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

при $\lambda = \frac{2}{3}l$ показывает, что при этой величине λ отношение угловых скоростей колес будет иметь настоящую величину и, следовательно, общая нормаль в точке соприкосновения зубьев должна пересекать линию центров в точке соприкосновения первообразных кругов. На основании этого нетрудно найти величину изменения в наклонении общей нормали соприкасающихся зубьев при повороте колеса C на угол $\lambda = \frac{2}{3}l$, что послужит нам для вывода уравнения между величинами, определяющими рассматриваемые нами очертания зубьев.



Фиг. 2

§ 5. Сохраняя прежние обозначения, мы будем изображать (фиг. 2) радиусы CD , C_1D первообразных кругов C , C_1 через R , R_1 ; радиусы AD , BD , которыми описаны дуги DE , DF , через ρ , ρ_1 ; A , B — места, занимаемые центрами дуг DE , DF в момент, когда они соприкасаются на линии центров в точке D . Называя через A_1 , B_1 места этих центров после поворота колеса C на угол $\lambda = ACA_1 = \frac{2}{3}l$, и когда, по

выше сказанному, общая нормаль дуг D_1E_1 , D_2F_1 проходит попрежнему через точку D , и изображая через r радиус $AC = A_1C$, через L , N , v

углы ACD , ADC , ADA , мы из треугольника A_1DC выводим такое выражение тангенса угла $A_1DC = ADC - ADA_1$:

$$\operatorname{tang}(ADC - ADA_1) = \frac{A_1C \cdot \sin A_1CD}{CD - A_1C \cdot \cos A_1CD},$$

где, по выше показанному обозначению,

$$ADC = N, \quad ADA_1 = v, \quad A_1C = r, \quad CD = R,$$

$$A_1CD = ACD - ACA_1 = L - \frac{2}{3}l,$$

вследствие чего это равенство приводится к следующему:

$$\operatorname{tang}(N - v) = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)}$$

или, что одно и то же,

$$\frac{\operatorname{tang} N - \operatorname{tang} v}{1 + \operatorname{tang} N \cdot \operatorname{tang} v} = \frac{r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)}.$$

Решая это уравнение относительно $\operatorname{tang} v$, находим

$$\operatorname{tang} v = \frac{\left[R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right)\right] \operatorname{tang} N - r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right)}{R - r \cos\left(L - \frac{2}{3}l\right) + r \sin\left(L - \frac{2}{3}l\right) \operatorname{tang} N},$$

что по вставке

$$\frac{\sin N}{\cos N}$$

на место $\operatorname{tang} N$ приводится к следующему:

$$\operatorname{tang} v = \frac{R \sin N - r \sin\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}{R \cos N - r \cos\left(L + N - \frac{2}{3}l\right)}. \quad (2)$$

Разлагая здесь

$$\sin\left(N + L - \frac{2}{3}l\right), \quad \cos\left(N + L - \frac{2}{3}l\right)$$

по восходящим степеням l , мы находим, что числитель представляется рядом

$$R \sin N - r \sin(L + N) + \frac{2}{3}rl \cos(L + N) + \frac{2}{9}rl^2 \sin(L + N) + \dots,$$

а знаменатель — рядом

$$R \cos N - r \cos(L + N) - \frac{2}{3}rl \sin(L + N) + \frac{2}{9}rl^2 \cos(L + N) + \dots$$

Но из треугольника ACD выходят такие равенства:

$$CD \cdot \sin ADC = AC \cdot \sin CAD,$$

$$CD \cdot \cos ADC + AC \cdot \cos CAD = AD,$$

которые по замене угла CAD разностью

$$\pi - (ADC + ACD)$$

и при помощи выше показанного обозначения приводятся к следующим:

$$R \sin N = r \sin(L + N),$$

$$R \cos N - r \cos(L + N) = \rho.$$

На основании этих равенств мы замечаем, что выше найденные разложения числителя и знаменателя формулы (2) приводятся к такому простейшему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3}(R \cos N - \rho)l + \frac{2}{9}R \sin N \cdot l^2 + \dots \\ & \rho - \frac{2}{3}R \sin N \cdot l + \frac{2}{9}(R \cos N - \rho)l^2 + \dots \end{aligned}$$

Замечая же, что частное, получаемое при делении первого из этих рядов на второй, равняется

$$\frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2 + \dots,$$

мы по формуле (2), заключаем, что $\tan g v$ с точностью до вторых степеней включительно имеет такую величину:

$$\tan g v = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2.$$

Но так как с точностью до вторых степеней тангенс дуги v может быть заменен самою дугою, то эта формула приводится к следующему:

$$v = \frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2. \quad (3)$$

Такова должна быть величина угла v , представляющего изменение наклона общей нормали соприкасающихся зубьев при повороте колеса C на угол $ACA_1 = \frac{2}{3}l$, для того чтобы она проходила че-

рез точку соприкосновения первообразных кругов при $ACA_1 = \frac{2}{3}l$,

как это должно быть в рассматриваемом нами зацеплении. На основании этого нетрудно найти уравнение между величинами

$$\rho, \rho_1, N,$$

определяющими дуги DE, DF ; для этого нужно только иметь общее выражение угла v при каких бы то ни было величинах ρ, ρ_1, N . К определению этого выражения мы теперь и приступим.

§ 6. Пусть будут A, B — места центров рассматриваемых нами дуг (фиг. 3), когда они соприкасаются на линии центров и когда по нашему знакоположению

$$ACD = L, \quad ADC = N, \quad CD = R, \quad C_1D = R_1,$$

что по раскрытии скобок приводится к следующему:

$$r_1^2 = (R + R_1)^2 + (\rho + \rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho + \rho_1) \cos(L + N - \lambda - v) - \\ - 2(R + R_1)[r \cos(L - \lambda) + (\rho + \rho_1) \cos(N - v)].$$

В частном предположении $\lambda = 0$, $v = 0$ это уравнение нам дает

$$r_1^2 = (R + R_1)^2 + (\rho + \rho_1)^2 + r^2 + 2r(\rho + \rho_1) \cos(L + N) - \\ - 2(R + R_1)[r \cos L + (\rho + \rho_1) \cos N].$$

Вычитывая это из предыдущего равенства, находим уравнение, которое может быть представлено под таким видом:

$$\frac{\cos(L + N - \lambda - v) - \cos(L + N)}{R + R_1} - \frac{\cos(N - v) - \cos N}{r} - \frac{\cos(L - \lambda) - \cos L}{\rho + \rho_1} = 0.$$

Чтобы вывести отсюда разложение угла v по степеням угла λ , полагаем

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \dots,$$

где K_1, K_2, \dots — искомые коэффициенты.

Внося эту величину v в уравнение и разлагая все члены его по степеням λ , находим, что оно приводится к такому равенству:

$$\left[\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1) - \frac{\sin N}{r} K_1 - \frac{\sin L}{\rho + \rho_1} \right] \lambda + \\ + \left[\frac{2 \sin(L + N) K_2 - \cos(L + N) (K_1 + 1)^2}{R + R_1} - \right. \\ \left. - \frac{2 \sin N \cdot K_2 - \cos N \cdot K_1^2}{r} + \frac{\cos L}{\rho + \rho_1} \right] \frac{\lambda^2}{2} + \dots = 0,$$

откуда для определения коэффициентов K_1, K_2 получаются равенства

$$\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1) - \frac{\sin N}{r} K_1 - \frac{\sin L}{\rho + \rho_1} = 0, \\ \frac{2 \sin(L + N) K_2 - \cos(L + N) (K_1 + 1)^2}{R + R_1} - \frac{2 \sin N \cdot K_2 - \cos N \cdot K_1^2}{r} + \frac{\cos L}{\rho + \rho_1} = 0,$$

которые дают нам

$$K_1 = \frac{\frac{\sin L}{\rho + \rho_1} - \frac{\sin(L + N)}{R + R_1}}{\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} - \frac{\sin N}{r}}, \\ K_2 = \frac{\frac{\cos(L + N)}{R + R_1} (K_1 + 1)^2 - \frac{\cos N}{r} K_1^2 - \frac{\cos L}{\rho + \rho_1}}{2 \left(\frac{\sin(L + N)}{R + R_1} - \frac{\sin N}{r} \right)}.$$

Для исключения из этих формул угла $L = ACD$ и угла $L + N = ADC + ACD$ мы из треугольника ACD выводим, что

$$\sin ACD = \frac{AD}{AC} \sin ADC,$$

$$\sin (ADC + ACD) = \sin CAD = \frac{CD}{AC} \sin ADC,$$

$$\cos ACD = \frac{CD - AD \cos ADC}{AC},$$

$$\cos (ADC + ACD) = -\cos CAD = -\frac{AD - CD \cos ADC}{AC},$$

что по нашему знакоположению представится так:

$$\sin L = \frac{p}{r} \sin N, \quad \sin (L + N) = \frac{R}{r} \sin N,$$

$$\cos L = \frac{R - p \cos N}{r}, \quad \cos (L + N) = -\frac{p - R \cos N}{r}.$$

Внося же величины

$$\sin L, \quad \sin (L + N), \quad \cos L, \quad \cos (L + N)$$

в выше найденные выражения коэффициентов K_1, K_2 , по приведении получаем

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)},$$

$$K_2 = \frac{(\rho - R \cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1) \left[\cos N \cdot K_1^2 + \frac{R - p \cos N}{\rho + \rho_1} \right]}{2 R_1 \sin N}.$$

Так выражаются коэффициенты K_1, K_2 в ряду

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2 + \dots, \quad (4)$$

определяющем величину угла v при всяком значении угла λ и каковы бы ни были ρ, ρ_1, N .

§ 7. Полагая в найденной нами формуле

$$\lambda = \frac{2}{3} l,$$

мы замечаем, что этой величине λ соответствует такая величина v :

$$v = \frac{2}{3} K_1 l + \frac{4}{9} K_2 l^2 + \dots$$

В рассматриваемом же нами зацеплении по формуле (3) (§ 5) этот угол должен иметь такую величину:]

$$\frac{2}{3} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - 1 \right) l + \frac{4}{9} \cdot \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \cdot l^2;$$

приравнявая друг другу эти два выражения одного и того же угла, мы выводим относительно рассматриваемого нами зацепления

уравнение, которое по сокращении на $\frac{2}{3}l$ приводится к такому виду:

$$K_1 - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 + \frac{2}{3} \left[K_2 - \frac{R}{\rho} \left(\frac{R}{\rho} \cos N - \frac{1}{2} \right) \sin N \right] l = 0, \quad (5)$$

где K_1 , K_2 имеют значения, показанные в § 6. Значение K_1 , как видели, дается такою простою формулою:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}. \quad (6)$$

Что же касается формулы, определяющей значение K_2 , то она, при той степени приближения, которою мы ограничиваемся, легко может быть значительно упрощена. Для этого мы замечаем, что при вычислении этой величины можно пренебрегать даже первыми степенями l , так как она входит множителем только при последнем из удерживаемых нами членов. По уравнению же (5), с точностью до первой степени l , мы находим такое равенство:

$$K_1 - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 = 0, \quad (7)$$

при помощи которого выше найденное выражение K_2 можно легко упростить.

В самом деле, внося на основании этого равенства разность

$$\frac{R}{\rho} \cos N - 1$$

вместо K_1 в выражение K_2 , показанное в § 6, мы замечаем, что числитель этого выражения приводится к следующему:

$$(\rho + R_1 \cos N) \frac{R^2}{\rho^2} \cos^2 N - 2(R + R_1) \frac{R}{\rho} \cos^2 N + \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} (R + \rho_1 \cos N).$$

Но по равенству (7), где по (6)

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)}$$

находим

$$\frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)} - \frac{R}{\rho} \cos N + 1 = 0,$$

что приводится к такому равенству:

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} = \frac{RR_1}{\rho\rho_1} \cos N. \quad (8)$$

Заменяя же на основании этого равенства в последнем члене рассматриваемого нами выражения множитель

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1}$$

множителем $\frac{RR_1}{\rho\rho_1} \cos N$, находим, что это выражение приводится к следующему:

$$\left[\frac{R^2 R_1}{\rho^2} \cos^2 N - \frac{(R + R_1) R}{\rho} \cos N + \frac{R^2 R_1}{\rho\rho_1} \right] \cos N,$$

а это, по замене

$$R + R_1$$

через

$$\frac{RR_1(\rho + \rho_1)}{\rho\rho_1} \cos N$$

на основании (8), обращается в такое выражение:

$$\frac{R^2 R_1}{\rho\rho_1} (1 - \cos^2 N) \cos N,$$

или

$$\frac{R^2 R_1}{\rho\rho_1} \sin^2 N \cdot \cos N,$$

что приводится к

$$\frac{R(R + R_1)}{\rho + \rho_1} \sin^2 N$$

заменой по (8) величины

$$\frac{\cos N}{\rho\rho_1}$$

через

$$\frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \frac{1}{RR_1}.$$

Таким образом, мы доходим до замены числителя в выражении коэффициента K_2 , показанного в конце § 6, следующей величиной:

$$\frac{R(R + R_1)}{\rho + \rho_1} \sin^2 N,$$

через что получается такая простая формула для определения этого коэффициента:

$$K_2 = \frac{R}{2R_1} \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \sin N. \quad (9)$$

Внеся найденные нами величины K_1 , K_2 в уравнение (5) и заменяя по (8) в последнем члене его

$$\frac{R \cos N}{\rho}$$

через

$$\frac{R + R_1}{R_1} \frac{\rho_1}{\rho + \rho_1},$$

мы находим, что оно по сокращении приводится к такому виду:

$$\cos N - \frac{R + R_1}{RR_1} \frac{\rho\rho_1}{\rho + \rho_1} + \frac{1}{3R_1} \frac{(R_1 + 2R)\rho_1 - (R + 2R_1)\rho}{\rho + \rho_1} \sin N = 0. \quad (10)$$

и что по нашему обозначению

$$ADC - A_1HC = N - (N - v) = v,$$

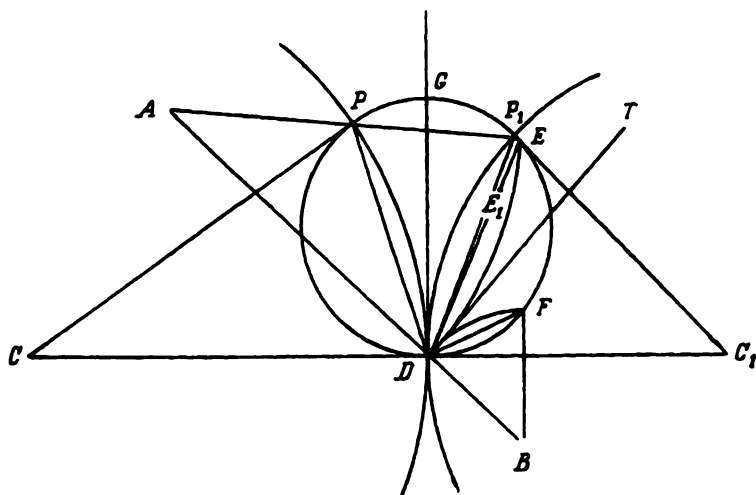
где v найдется по формуле (4), когда в ней положится $\lambda = l$, мы на основании выше показанного заключаем, что угол DAE , определяющий дугу DE , ограничивающую выступ зуба в рассматриваемом нами зацеплении, и который мы будем изображать через ω , имеет такую величину:

$$\omega = l + v = (K_1 + 1)l + K_2 l^2,$$

что по внесении величин K_1 , K_2 , найденных в § 7, приводится к следующему:

$$\omega = \frac{R + R_1}{R_1} \frac{\rho_1}{\rho + \rho_1} l + \frac{R}{2R_1} \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l^2. \quad (11)$$

При помощи этого выражения угла $\omega = DAE$ нетрудно показать, что уравнение (10) представляет такое простое геометрическое свойство дуги DE :



Фиг. 5

„Конец E дуги DE в момент (фиг. 5) соприкосновения зубьев на линии центров лежит на круге, проходящем через D , точку соприкосновения первообразных кругов и через P , P_1 , концы дуг DP , DP_1 , представляющих величину поворота колес C , C_1 в продолжение зацепления дуги DE с дугою DF “.

Чтобы показать это свойство дуги DE , проводим через точки D , P , P_1 круг и, изображая через E_1 точку, где этот круг пересекает хорду дуги DE , ищем длину линии DE_1 . Для определения этой длины мы замечаем, что по нашему обозначению имеем

$$ADC = N, \quad DAE = \omega, \quad DCP = l, \quad CD = R, \quad C_1D = R_1,$$

и что угол DC_1P_1 , представляющий величину поворота колеса C_1 в продолжение всего зацепления дуги DE с дугою DF , будет равняться

$$\frac{R}{R_1} DCP = \frac{R}{R_1} l.$$

Проведя же через точку D перпендикуляр GD к линии CC_1 и перпендикуляр DT к линии AD , мы замечаем, что эти перпендикуляры, будучи касательными к дугам DP , DP_1 , DE , будут составлять с хордами этих дуг такие углы:

$$PDG = \frac{1}{2} DCP, \quad P_1DG = \frac{1}{2} DC_1P_1, \quad EDT = \frac{1}{2} ADE,$$

что по выше показанному обозначению дает

$$PDG = \frac{l}{2}, \quad P_1DG = \frac{Rl}{2R_1}, \quad EDT = \frac{\omega}{2}.$$

Что касается угла GDT , то по перпендикулярности его сторон со сторонами угла ADC находим, что

$$GDT = ADC$$

и, следовательно, по нашему обозначению угла ADC будем иметь

$$GDT = N.$$

Определяя на основании этого углы PDP_1 , P_1DE , PDE , образуемые линиями DP , DP_1 , DE , находим

$$PDP_1 = PDG + P_1DG = \frac{l}{2} + \frac{R}{2R_1} l,$$

$$P_1DE_1 = GDT - GDP_1 - EDT = N - \frac{R}{2R_1} l - \frac{\omega}{2},$$

$$PDE_1 = GDT + PDG - EDT = N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2}.$$

С другой стороны, определяя длину хорд DP , DP_1 по величине углов

$$DCP = l, \quad DC_1P_1 = \frac{R}{R_1} l$$

и длине радиусов

$$DC = R, \quad DC_1 = R_1,$$

находим

$$PD = 2CD \cdot \sin \frac{PCD}{2} = 2R \sin \frac{l}{2},$$

$$DP_1 = 2C_1D \cdot \sin \frac{DC_1P_1}{2} = 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1}.$$

Имея же длину хорд DP , DP_1 и величину углов, образуемых ими и хордою DE_1 , мы легко найдем длину последней на основании уравнения

$$DP \cdot \sin(P_1 DE_1) - DP_1 \cdot \sin(PDE_1) + DE_1 \cdot \sin(PDP_1) = 0,$$

которое имеет место для всяких трех хорд, проведенных из одной точки окружности.

Внеся сюда выше найденные величины линий DP , DP_1 и углов $P_1 DE_1$, PDE_1 , PDP_1 , получаем такое уравнение для определения длины DE_1 :

$$2R \sin \frac{l}{2} \cdot \sin \left(N - \frac{Rl}{2R_1} - \frac{\omega}{2} \right) - 2R_1 \sin \frac{Rl}{2R_1} \cdot \sin \left(N + \frac{l}{2} - \frac{\omega}{2} \right) + DE_1 \cdot \sin \left(\frac{l}{2} + \frac{Rl}{2R_1} \right) = 0. \quad (12)$$

Чтобы вывести отсюда величину DE_1 с точностью до второго порядка, разлагаем первые два члена с точностью до третьего порядка, а множитель при DE_1 с точностью до второго порядка. Таким образом находим

$$\begin{aligned} & \frac{R+R_1}{2R_1} DE_1 \cdot l - \frac{(R+R_1)R}{2R_1} \cos N \cdot l^2 + \\ & + \left[\frac{R_1^2 - R^2}{12R_1^2} Rl - \frac{(R+R_1)R}{4R_1} \omega \right] \sin N \cdot l^2 = 0, \end{aligned}$$

откуда получается такая величина DE_1 :

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \left(\frac{\omega}{2} + \frac{R-R_1}{6R_1} l \right) \sin N \cdot l,$$

что по внесении величины ω (11), с точностью до второй степени l , приводится к следующему:

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \frac{(4R+2R_1) \cdot \rho_1 + (R-R_1) \rho}{6R_1 (\rho + \rho_1)} \sin N \cdot l^2.$$

Так с точностью до второй степени l включительно выражается длина линии DE_1 , определяющей точку E_1 пересечения хорды DE с кругом, проходящим через три точки D , P , P_1 .

Но, определяя на основании выше найденных формул длину хорды DE , мы замечаем, что она с точностью до вторых степеней может быть представлена дугою DE_1 и, следовательно, произведением

$$\rho \cdot \omega,$$

так как по нашему знакоположению радиус есть ρ , а длина ее в частях радиуса есть ω . На основании этого по формуле (11) находим такое выражение для величины хорды DE :

$$DE = \frac{R+R_1}{R_1} \frac{\rho \rho_1}{\rho + \rho_1} l + \frac{R\rho}{2R_1} \frac{R+R_1}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l^2.$$

Сличая эту величину хорды DE с выше найденною длиною линии DE_1 , мы замечаем, что разность их выражается так:

$$DE - DE_1 = \left(\frac{R + R_1}{R_1} \frac{\rho \rho_1}{\rho + \rho_1} - R \cos N \right) l - \\ - \frac{R}{3R_1} \frac{(2R + R_1)\rho_1 - (2R_1 + R)\rho}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l^2.$$

Сравнивая же это выражение разности $DE - DE_1$ с первою частью уравнения (10), мы замечаем, что они отличаются друг от друга только множителем $-lR$, откуда видно, что уравнение (10) приводится к равенству

$$DE - DE_1 = 0,$$

по которому E_1 , точка пересечения хорды DE с рассматриваемым нами кругом, должна совпадать с точкой E , концом хорды DE , что и следовало показать.

§ 9. Повторяя относительно дуги DF , представляющей очертание впадины колеса C_1 , все то, что было выведено нами относительно дуги DE , ограничивающей выступ колеса C , мы получаем те же формулы только с заменю букв, соответствующих колесу C , буквами, соответствующими колесу C_1 , и обратно. Что касается угла l , определяющего величину поворота колеса в продолжение зацепления дуги DE с дугою DF , он заменится величиною

$$- \frac{R}{R_1} l,$$

так как колесо C_1 , в продолжение этого зацепления, должно повернуться на угол $\frac{R}{R_1} l$ и притом в сторону противоположную. Взамен же угла $\omega = DAE$, представляющего взаимное наклонение радиусов AD , AE , проходящих через концы дуги DE , мы будем иметь

$$\omega_1 = DBF$$

со знаком $-$, вследствие обратного положения радиусов DB , BF , проходящих через концы дуги DF . Формула, получаемая таким образом из уравнения (11), приводится к следующему:

$$\omega_1 = \frac{R + R_1}{R} \frac{\rho}{\rho + \rho_1} l - \frac{R}{2R_1} \frac{R + R_1}{\rho + \rho_1} \sin N \cdot l^2; \quad (13)$$

уравнение же (10) остается без изменения, и из этих уравнений относительно дуги DF выходит то же самое, что мы вывели в предыдущем параграфе относительно дуги DE , т. е., что конец ее F лежит тоже на круге, проходящем через точки D , P , P_1 . Таким образом мы доходим до следующего заключения относительно рассматриваемого нами зацепления:

„В момент соприкосновения зубьев на линии центров лежат на одном круге следующие пять точек: концы выступа и действующей части выемки зубьев, соприкасающихся на линии центров, точки первообразных кругов, которые приходят на линию центров при конце зацепления рассматриваемых зубьев, и точка соприкосновения первообразных кругов“.

Так как в формулах наших, при определении положения различных точек, пренебрегались степени l выше второй, то это свойство рассматриваемого нами зацепления верно только до l^3 . Но по незначительности величины l , представляющей поворот колеса при действии одной пары зубьев сверху или снизу линии центров, такая точность для практики совершенно достаточна.

На основании формул (11) и (13) нетрудно показать другое свойство рассматриваемых нами зубчатых колес. Для этого мы замечаем, что эти формулы в сумме дают

$$\omega + \omega_1 = \frac{R + R_1}{R_1} l,$$

а так как по нашему знакоположению

$$\omega = DAE, \quad \omega_1 = DBF, \quad l = DCP,$$

и по выше замеченному

$$\frac{Rl}{R_1} = DC_1 P_1,$$

то это уравнение приводится к следующему:

$$DAE + DBF = DCP + DC_1 P_1.$$

Рассматривая углы, образуемые хордами дуг DP , DP_1 , DE , DF с их касательными DG , DT , находим, что

$$PDG = \frac{1}{2} DCP, \quad P_1 DG = \frac{1}{2} DC_1 P_1,$$

$$EDT = \frac{1}{2} DAE, \quad FDT = \frac{1}{2} DBF,$$

вследствие чего предыдущее равенство дает

$$EDT + FDT = PDG + P_1 DG,$$

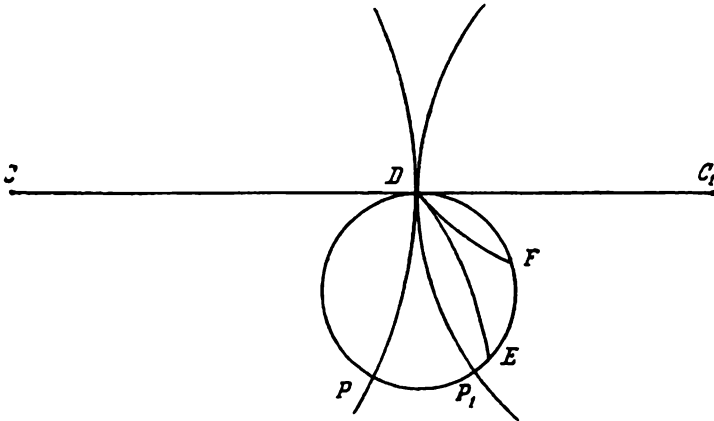
откуда выходит

$$EDF = PDP_1;$$

это показывает нам, что углы, составляемые хордами DP , DP_1 и хордами DE , DF , равны между собою. Замечая же, что точки P , P_1 , F , E по выше показанному должны лежать на одном круге с точкою D , мы из равенства этих углов заключаем о равенстве расстояний P от P_1 и E от F , откуда выходит такое свойство рассматриваемого нами зацепления:

„Расстояние между концами выступа и действующей части впадины двух зубьев, соприкасающихся на линии центров, равно расстоянию точек первообразных кругов, которые приходят на линию центров при конце зацепления этих зубьев“.

Так как при черчении зубчатых колес всегда даются первообразные круги и дуги зацеплений до линии центров и после линии центров, то по выше показанному мы всегда можем найти круг, на котором должны лежать конец выступа зуба одного колеса и конец действующей части впадины другого колеса, и узнать расстояние между этими концами.



Фиг. 6

Пусть будут (фиг. 6) C, C_1 центры первообразных кругов, D точка их соприкосновения. Для определения очертания выступа на колесе C и действующей части впадины колеса C_1 на первообразных кругах C, C_1 откладываем дуги DP, DP_1 , равные дугам зацепления ниже линии центров. Проведя через точки D, P, P_1 круг, мы на основании выше доказанного заключаем, что на этом круге должны лежать и конец зуба колеса C и конец действующей части впадины колеса C_1 в момент, когда соприкосновение происходит на линии центров, и что между этими концами должно быть расстояние, равное линии PP_1 . Выбор места для этих концов на круге DPP_1 будет зависеть от тех или других требований практики: чем дальше от точки D возьмется эти места, тем, очевидно, будет длиннее выступ колеса C , глубже впадина колеса C_1 , а вместе с тем будут уже и конец зуба на колесе C и впадина на колесе C_1 при дне ее. Выбравши эти места на круге DPP_1 , а также и направление нормали соприкасающихся зубьев в точке D , мы найдем требуемые очертания выступа и впадины, проведя через точку D дуги кругов, нормальные в этой точке к известной линии и проходящие через известные точки круга DPP_1 .

§ 10. Переходим теперь к тому случаю, когда, очерчивая выступы и впадины колес дугами кругов, мы можем располагать выбором двух величин для уменьшения по возможности неправильностей в зацеплении, неизбежных по свойству кругов.

Разлагая разность

$$F(\lambda) - \frac{R}{R_1} \lambda$$

в ряд по восходящим степеням λ и ограничиваясь четвертою степенью λ , мы замечаем, что по § 3 эта разность должна приводиться к полиному

$$K_4(\lambda^4 - 1,638 l \lambda^3 + 0,638 l^2 \lambda^2),$$

откуда для определения величин λ , обращающих производную

$$F'(\lambda) - \frac{R}{R_1}$$

в нуль, получается такое уравнение:

$$4\lambda^3 - 1,638 \cdot 3 l \lambda^2 + 0,638 \cdot 2 l^2 \lambda = 0.$$

Решая же это уравнение, находим

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$

Из этого, по § 4, мы заключаем, что общая нормаль соприкасающихся зубьев в рассматриваемом нами зацеплении должна проходить через точку соприкосновения первообразных кругов при следующих величинах угла λ :

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$

Уравнения, которые отсюда вытекают относительно рассматриваемого нами зацепления, как мы увидим, особенно легко получаются при помощи угла v , определяющего (§ 5) изменения наклона общей нормали соприкасающихся зубьев.

Определяя по формуле (4) значения угла v , соответствующие выше найденным величинам λ , мы замечаем, что первая из них есть нуль, а последние найдутся из формулы

$$v = K_1 \lambda + K_2 \lambda^2,$$

когда здесь положим

$$\lambda = 0,365 l, \quad \lambda = 0,865 l.$$

Изображая эти величины v через v_1 , v_2 , мы по выше сказанному будем иметь

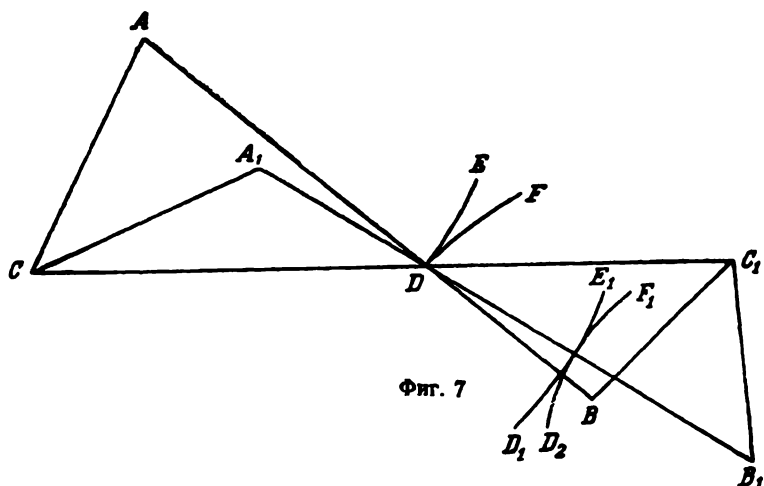
$$v_1 = 0,365 K_1 l + 0,365^2 K_2 l^2,$$

$$v_2 = 0,865 K_1 l + 0,865^2 K_2 l^2.$$

Приступая к выводу уравнений, мы, согласно с прежним обозначением, полагаем (фиг. 7), что C , C_1 суть центры первообразных кругов. $CD = R$, $C_1D = R_1$ — их радиусы; A , B — места центров дуг DE , DF , когда они соприкасаются на линии центров; $\rho = AD$, $\rho_1 = BD$ — радиусы этих дуг; $AC = r$, $BC_1 = r_1$ — расстояния точек A , B от

центров C, C_1 ; $N = ADC$ — угол наклона общей нормали дуг DE, DF к линии центров. Изображая через A_1, B_1 места, занимаемые центрами дуг DE, DF в тот момент, когда угол наклона нормали соприкасающихся зубьев уменьшился на v_1 , мы замечаем, что линия $A_1 B_1$ будет представлять положение этой нормали, соответствующее $\lambda = 0.365 l$ и, следовательно, эта линия, по выше сказанному, должна проходить через D , точку соприкосновения первообразных кругов. Рассматривая же треугольники $CAD, CA_1 D, C_1 B D, C_1 B_1 D$, где по нашему знакому положению

$$\begin{aligned} AC = A_1 C = r, \quad BC_1 = B_1 C_1 = r_1, \\ AD = \rho, \quad BD = \rho_1, \quad AB = A_1 B_1 = \rho + \rho_1, \\ CD = R, \quad C_1 D = R_1, \quad ADC = BDC_1 = N, \\ A_1 D C = B_1 D C_1 = N - v_1, \end{aligned}$$



и полагая

$$AD - A_1 D = B_1 D - BD = h,$$

получаем такие равенства:

$$\begin{aligned} r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos N, \\ r^2 &= (\rho - h)^2 + R^2 - 2(\rho - h)R \cos(N - v_1), \\ r_1^2 &= \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos N, \\ r_1^2 &= (\rho_1 + h)^2 + R_1^2 - 2(\rho_1 + h)R_1 \cos(N - v_1), \end{aligned}$$

что по исключении r, r_1 нам дает

$$\begin{aligned} \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos N &= (\rho - h)^2 + R^2 - 2(\rho - h)R \cos(N - v_1), \\ \rho_1^2 + R_1^2 - 2\rho_1 R_1 \cos N &= (\rho_1 + h)^2 + R_1^2 - 2(\rho_1 + h)R_1 \cos(N - v_1), \end{aligned}$$

Для исключения же из этих уравнений величины h , решаем эти уравнения относительно $\rho - h, \rho_1 + h$ и полученные результаты складываем. Таким образом находим уравнение

$$\begin{aligned} \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos(N - v_1) &= \sqrt{\rho^2 - 2R\rho \cos N + R^2 \cos^2(N - v_1)} + \\ &+ \sqrt{\rho_1^2 - 2R_1\rho_1 \cos N + R_1^2 \cos^2(N - v_1)}, \end{aligned}$$

которое может быть представлено под видом

$$\begin{aligned} & \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos(N - v_1) = \\ & = \sqrt{(\rho - R \cos N)^2 + k^2 [\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N]} + \\ & + \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos N)^2 + k_1^2 [\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N]}. \end{aligned}$$

Полагая для сокращения

$$\frac{\cos^2(N - v_1) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_1 \quad (14)$$

и замечая, что это равенство дает

$$\cos(N - v_1) = \cos N \cdot \sqrt{1 + t_1},$$

мы выше найденное уравнение можем написать так:

$$\begin{aligned} \rho + \rho_1 - (R + R_1) \cos N \sqrt{1 + t_1} = & \sqrt{(\rho - R \cos N)^2 + R^2 \cos^2 N \cdot t_1} + \\ & + \sqrt{(\rho_1 - R_1 \cos N)^2 + R_1^2 \cos^2 N \cdot t_1}. \end{aligned}$$

Разлагая здесь все радикалы по степеням t_1 и сокращая все уравнение на t_1 , находим по перенесении всех членов в первую часть уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{R^2 \cos N}{\rho - R \cos N} + \frac{R_1^2 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} + R + R_1 - \\ & - \frac{1}{4} \left[\frac{R^4 \cos^3 N}{(\rho - R \cos N)^3} + \frac{R_1^4 \cos^3 N}{(\rho_1 - R_1 \cos N)^3} + R + R_1 \right] t_1 + \\ & + \frac{1}{8} \left[\frac{R^6 \cos^5 N}{(\rho - R \cos N)^5} + \frac{R_1^6 \cos^5 N}{(\rho_1 - R_1 \cos N)^5} + R + R_1 \right] t_1^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Деля же для сокращения

$$\frac{R \cos N}{\rho - R \cos N} = X, \quad \frac{R_1 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} = Y, \quad (15)$$

мы это уравнение можем написать так:

$$\begin{aligned} & RX + R_1 Y + R + R_1 - \frac{1}{4} (RX^3 + R_1 Y^3 + R + R_1) t_1 + \\ & + \frac{1}{8} (RX^5 + R_1 Y^5 + R + R_1) t_1^2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Повторяя те же суждения относительно угла v_2 , соответствующего повороту колеса C на угол $\lambda = 0,865 l$, при котором нормаль также должна проходить через точку D , и полагая

$$\frac{\cos^2(N - v_2) - \cos^2 N}{\cos^2 N} = t_2, \quad (17)$$

находим уравнение

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4} (RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1) t_2 + \\ + \frac{1}{8} (RX^5 + R_1Y^5 + R + R_1) t_2^2 + \dots = 0. \quad (18)$$

подобное уравнению (16).

Решая эти уравнения, мы найдем величины X, Y , а по этим величинам формулы (15) нам дадут ρ, ρ_1 , длину радиусов, которыми должны быть описаны дуги в рассматриваемом нами зацеплении.

§ 11. Для облегчения решения уравнений (16), (18) мы сначала пренебрегаем в них членами, содержащими t_1, t_2 в степенях выше первой. Таким образом мы получаем уравнения

$$RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4} (RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1) t_1 = 0, \\ RX + R_1Y + R + R_1 - \frac{1}{4} (RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1) t_2 = 0$$

для определения приближенных величин X, Y , и эти уравнения, как нетрудно заметить, приводятся к следующим:

$$RX + R_1Y + R + R_1 = 0, \\ RX^3 + R_1Y^3 + R + R_1 = 0.$$

Для решения этих уравнений мы выводим из первого

$$Y = -\frac{R}{R_1}X - \frac{R}{R_1} - 1. \quad (19)$$

и эту величину Y вставляем во второе, что дает нам такое уравнение:

$$RX^3 + R_1 \left(-\frac{R}{R_1}X - \frac{R}{R_1} - 1 \right)^3 + R + R_1 = 0,$$

которое по раскрытии скобки и по сокращении на $R(R + R_1)$ приводится к следующему:

$$(R_1 - R)X^3 - 3RX^2 - 3(R + R_1)X - R - 2R_1 = 0.$$

Решая это уравнение мы находим, что оно имеет два корня, равных -1 , и один корень, равный

$$\frac{R + 2R_1}{R_1 - R}.$$

Замечая же по формулам (15), что X может равняться -1 только при обращении радиуса ρ в нуль, мы заключаем, что корни этого уравнения, равные -1 , не соответствуют нашей задаче, а потому за искомую величину X должны взять последний корень

$$\frac{R + 2R_1}{R_1 - R}.$$

Переходя к определению Y , мы полагаем в формуле (19)

$$X = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R},$$

и по этой формуле находим, что

$$Y = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1}.$$

Так определяются первые приближенные величины X, Y . Для определения величин X, Y более точных, полагаем

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} + \alpha, \\ Y &= \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} + \beta, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

изображая через α, β погрешности выше найденных величин X, Y .

Внося эти новые величины X, Y в уравнения (16), (18) и откидывая члены, которые относительно α, β, t_1, t_2 порядка выше второго находим

$$\begin{aligned} R\alpha + R_1\beta - \frac{3}{4} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta \right] t_1 + \\ + \frac{1}{8} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] t_1^2 = 0, \\ R\alpha + R_1\beta - \frac{3}{4} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta \right] t_2 + \\ + \frac{1}{8} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] t_2^2 = 0. \end{aligned}$$

Ограничиваясь при определении величин α, β первыми степенями t_1, t_2 , мы замечаем, что при такой степени приближения оба эти уравнения предполагают

$$R\alpha + R_1\beta = 0.$$

Чтобы получить другое простое уравнение между α, β , мы считаем предыдущие уравнения одно из другого, что дает нам по сокращении на $\frac{3}{4}(t_2 - t_1)$

$$\begin{aligned} R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 \alpha + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \beta = \\ = \frac{1}{6} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^5 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^5 + R + R_1 \right] (t_1 + t_2). \end{aligned}$$

Приступая к определению α, β на основании выведенных нами уравнений, мы из предпоследнего находим

$$\beta = - \frac{R}{R_1} \alpha$$

и эту величину β вносим в последнее уравнение, через что оно обращается в следующее:

$$R \left[\left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^2 - \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^2 \right] \alpha = \\ = \frac{1}{6} \left[R \left(\frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \right)^3 + R_1 \left(\frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \right)^3 + R + R_1 \right] (t_1 + t_2),$$

откуда по сокращении получается такая величина α :

$$\alpha = \frac{R_1(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}{2(R_1 - R)^3} (t_1 + t_2).$$

Вставляя же эту величину α в выше найденное выражение β через α , получаем

$$\beta = \frac{R(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}{3(R_1 - R)^3} (t_1 + t_2).$$

Так находим мы величины α , β с точностью до первых степеней t_1 , t_2 , и эти величины по внесении в формулы (20) нам дают с тою же степенью точности

$$X = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \left[1 + \frac{R_1(R_1 + 2R)}{2(R_1 - R)^3} (t_1 + t_2) \right],$$

$$Y = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \left[1 + \frac{R(R + 2R_1)}{2(R_1 - R)^3} (t_1 + t_2) \right].$$

§ 12. Внося эти величины X , Y в формулы (15), мы находим такие уравнения для определения радиусов ρ , ρ_1 :

$$\frac{R \cos N}{\rho - R \cos N} = \frac{R + 2R_1}{R_1 - R} \left[1 + \frac{R_1(R_1 + 2R)}{2(R_1 - R)^3} (t_1 + t_2) \right].$$

$$\frac{R_1 \cos N}{\rho_1 - R_1 \cos N} = \frac{R_1 + 2R}{R - R_1} \left[1 + \frac{R(R + 2R_1)}{2(R - R_1)^3} (t_1 + t_2) \right].$$

Решая эти уравнения и ограничиваясь членами первого порядка относительно t_1 , t_2 , получаем

$$\rho = \frac{3RR_1 \cos N}{R + 2R_1} \left[1 - \frac{(R_1 + 2R)(t_1 + t_2)}{6(R_1 - R)} \right],$$

$$\rho_1 = \frac{3RR_1 \cos N}{R_1 + 2R} \left[1 - \frac{(R + 2R_1)(t_1 + t_2)}{6(R - R_1)} \right].$$

Для определения величины $t_1 + t_2$, заключающейся в этих формулах, мы замечаем, что формулы (14), (17), будучи разложены в ряды по степеням v , дают с точностью до второй степени

$$t_1 = \frac{2 \cos N \cdot \sin N}{\cos^3 N} v_1 - 2 \tan N \cdot v_1,$$

$$t_2 = \frac{2 \cos N \cdot \sin N}{\cos^2 N} v_2 = 2 \operatorname{tang} N \cdot v_2.$$

Но по § 10, с точностью до второй степени l , имеем

$$v_1 = 0,365 K_1 l, \quad v_2 = 0,865 K_1 l,$$

вследствие чего сумма $t_1 + t_2$, с точностью до второй степени l , выразится так:

$$t_1 + t_2 = 2(0,365 + 0,865) K_1 \operatorname{tang} N \cdot l = 2,460 K_1 \operatorname{tang} N \cdot l,$$

где по (6) множитель K_1 имеет такую величину:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)},$$

что по внесении выше найденных величин ρ , ρ_1 приводится, с точностью до первых степеней t_1 , t_2 не включительно, к следующему

$$K_1 = \frac{R - R_1}{3R_1}.$$

Внося эту величину K_1 в выше найденное выражение суммы $t_1 + t_2$, получаем

$$t_1 + t_2 = \frac{2,460}{3} \frac{R - R_1}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l = 0,820 \frac{R - R_1}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l,$$

а эта величина $t_1 + t_2$ по внесении в выше найденные выражения радиусов ρ , ρ_1 дает

$$\rho = \frac{3RR_1 \cos N}{R + 2R_1} \left[1 + 0,137 \frac{R_1 + 2R}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l \right],$$

$$\rho_1 = \frac{3RR_1 \cos N}{R_1 + 2R} \left[1 - 0,137 \frac{R + 2R_1}{R_1} \operatorname{tang} N \cdot l \right].$$

Так определяются радиусы ρ , ρ_1 , которыми должны быть очерчены в рассматриваемом нами зацеплении выступы колеса C и впадины колеса C_1 .

§ 13. Для определения длины дуг, которыми будут очерчены выступы и впадины колес в рассматриваемом нами зацеплении, мы замечаем, что по (§ 8), с точностью до l^2 , имеем

$$\omega = (K_1 + 1)l + K_2 l^2,$$

где ω — длина дуги, ограничивающей выступ колеса C_1 , выраженная в частях радиуса, а коэффициенты K_1 , K_2 по § 6 имеют такие величины:

$$K_1 = \frac{R\rho_1 - R_1\rho}{R_1(\rho + \rho_1)},$$

$$K_2 = \frac{(\rho - R \cos N)(K_1 + 1)^2 + (R + R_1) \left[\cos N \cdot K_1^2 + \frac{R - \rho \cos N}{\rho + \rho_1} \right]}{2R_1 \sin N}.$$

Внося в эти выражения коэффициентов K_1 , K_2 найденные нами (§ 12) величины радиусов ρ , ρ_1 и, ограничиваясь в выражении K_1 первой степенью l , а в выражении K_2 нулевой степенью, получаем

$$K_1 + 1 = \frac{R + 2R_1}{3R_1} \left(1 - 0,137 \frac{R_1 + 2R}{R_1} \tan N \cdot l \right)$$

$$K_2 = \frac{(R + 2R_1)(R_1 + 2R)}{18R_1^2} \tan N,$$

что по вставке в выше показанную величину ω , с точностью до l^3 , нам дает

$$\omega = \frac{R + 2R_1}{3R_1} \left[1 + \left(\frac{1}{6} - 0,137 \right) \frac{R_1 + 2R}{R_1} \tan N \cdot l \right] l.$$

Заменяя же здесь ω через $-\omega_1$, l через $-\frac{R}{R_1}l$, R через R_1 , ρ через ρ_1 и обратно, мы по § 9 найдем формулу для определения ω_1 , длины дуги, ограничивающей впадину колеса C_1 , выраженную в частях радиуса. Формула эта по сокращении приводится к следующему:

$$\omega_1 = \frac{R_1 + 2R}{3R_1} \left[1 - \left(\frac{1}{6} - 0,137 \right) \frac{R + 2R_1}{R_1} \tan N \cdot l \right] l.$$

На основании выведенных нами формул мы находим, что сумма

$$\omega + \omega_1$$

равняется

$$\frac{R + R_1}{R_1} l$$

и что произведение

$$\rho \cdot \omega$$

с точностью до l^3 приводится к выражению

$$R \cos N \cdot l + \frac{R(R_1 + 2R)}{6R_1} \sin N \cdot l^2,$$

одинаковому с выражением (§ 8) хорды DE_1 , получаемым из формулы

$$DE_1 = R \cos N \cdot l + R \left(\frac{\omega}{2} + \frac{R - R_1}{6R_1} l \right) \sin N \cdot l$$

подстановкою в нее величины угла ω . Откуда, по сказанному в § 8, мы заключаем, что и здесь будут иметь место свойства, доказанные нами (§ 8, § 9) для того случая, когда при выборе дуг, ограничивающих выступы и впадины колес, можно располагать только одною величиною для уменьшения неправильностей зацепления. В этом случае, как видели (§ 9), можно менять согласно каким-либо требованиям прак-

тики направление нормали соприкасающихся зубьев на линии центров без перемены мест, выбранных (фиг. 6) на круге DPP_1 для конца выступа колеса C и конца действующей части выемки колеса C_1 . В случае же, который мы теперь рассматриваем, положение этих концов вполне определяет направление выше поименованной нормали, так как по § 8 (фиг. 5)

$$N = GDT = GDE + EDT = GDE + \frac{\omega}{2},$$

что, по внесении выше найденной величины ω и по вставке в нее значений ρ, ρ_1 , дает уравнение, определяющее угол N по углу GDE . Замечая же, что в этом случае получается высшая степень правильности, которой можно достигнуть в зацеплении с зубьями, ограниченными дугами кругов, мы заключаем, что всякий раз, когда направление нормали AB выбирается согласно каким-либо требованиям практики, надобно стараться, чтобы это направление по возможности менее разнилось с направлением, находимым по выше сказанному.

Так как по выше найденным величинам ω, ω_1 , с точностью до первой степени l , находим

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

а по § 8 (фиг. 5)

$$\omega = DAE = 2EDT,$$

$$\omega_1 = DBF = 2FDT,$$

то, с точностью до l , будем иметь

$$\frac{FDT}{EDT} = \frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1}.$$

Из этого видно, что при выше показанном направлении нормали AB соприкасающихся зубьев общая касательная их DT делит дугу FE на части, которых отношение, с точностью до l , равняется величине

$$\frac{R_1 + 2R}{R + 2R_1},$$

откуда выходит очень простое построение для определения по приближению направления касательной DT , соответствующего тому направлению нормали AB , при котором неправильности рассматриваемого нами зацепления становятся по возможности малыми. Заметим в заключение, что, определяя углы, образуемые (фиг. 5) хордами PD, P_1D с диаметром круга DPP_1 , проходящим через точку D , мы находим, что они, с точностью до l^2 , выражаются так:

$$\frac{R + 2R_1}{6R_1} l, \quad \frac{R_1 + 2R}{6R} l.$$

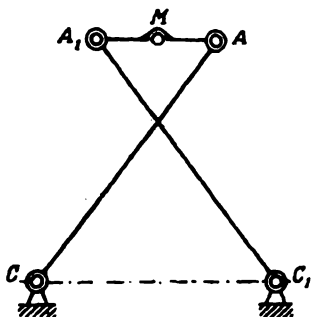
Сличая эти величины с величиною углов

$$PDG = \frac{\omega}{2}, \quad GDP_1 = \frac{\omega_1}{2},$$

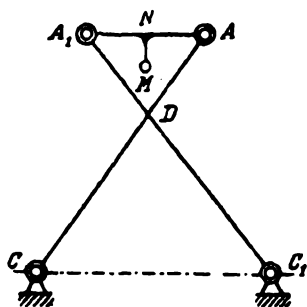
определяемых выше найденными формулами, мы замечаем, что они, до вторых степеней l^2 , одинаковы, откуда видно, что при этой степени приближения диаметр круга DPP_1 , проходящий через точку D , имеет такое наклонение к хордам DP , DP_1 , какое должна иметь DT , касательная дуг DE , DF , к хордам DE , DF для того, чтобы зубья действовали по возможности правильнее.

О ПРОСТЕЙШИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СИММЕТРИЧЕСКИХ ОКОЛО ОДНОЙ ОСИ*

§ 1. На всемирной выставке можно видеть теперь различные приложения сочлененного параллелограма, основанного на теореме относительно функций наиболее приближающихся к нулю. Такой параллелограм, состоя только из трех прямых стержней, доставляет прямолинейное движение с приближением весьма удовлетворительным,



Фиг. 1



Фиг. 2

превосходящим приближение, получаемое помощью параллелограмов, составленных из тех же элементов, т. е. простого параллелограма Уатта и механизма Эванса.

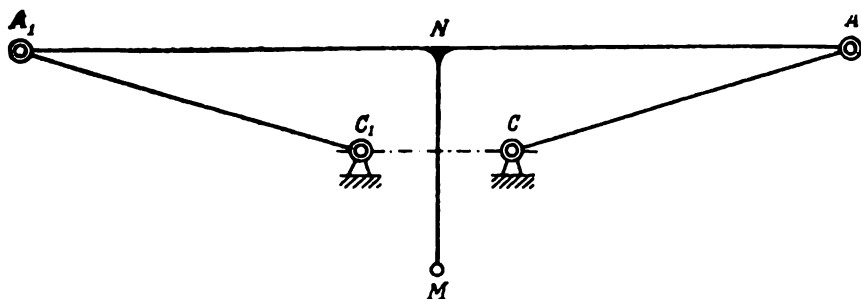
§ 2. Этот параллелограм состоит из двух стержней AC и A_1C_1 одинаковой длины, вращающихся около двух неподвижных точек C и C_1 и сочлененных в их концах A и A_1 третьим стержнем AA_1 (фиг. 1). Средина M этого последнего стержня и описывает прямую линию с значительною точностью, когда длины стержней AC , A_1C_1 и расстояние CC_1 между неподвижными точками C и C_1 удовлетворяют следующим условиям:

* Сообщено 29 авг. 1878 г. на Парижском конгрессе Французской ассоциации развития наук (Association française pour l'avancement des sciences). Опубликовано в журн. „Школа математики чистой и прикладной“, № 3—4, 1885, СПб.; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том II, СПб., 1907. стр. 709—714. — *Ред.*

1) Расстояние CC_1 должно быть строго равно трети суммы длин AC , AA_1 , A_1C_1 .

2) Длина стержня AA_1 должна быть более четверти длины стержней AC и A_1C_1 , но не должна значительно различаться от этого предела.

По мере того как разность $AA_1 - \frac{1}{4}AC$ стремится к нулю, длина чувствительно прямолинейной части кривой, описанной точкою M , уменьшается; но в то же время точность, с которою она представляет прямую линию, возрастает быстрее, чем уменьшается ее длина.



Фиг. 3

§ 3. Я теперь покажу результаты, которые я получил, рассматривая механизм немного сложнее предыдущего. Этот механизм состоит из тех же элементов, но точка, которая описывает приблизительно прямую линию, находится не на линии AA_1 , но на перпендикуляре MN , проведенном из ее середины (фиг. 2).

По упомянутому способу обнаруживается, что для точности хода механизма необходимо, чтобы $c = MN$ имело следующее значение:

$$c = \frac{a}{r \cos^2 \varphi} \left[\left(\frac{3}{2} r \cos \varphi - a \right) \sin \varphi - (r \cos \varphi - a) \sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} \right]. \quad (1)$$

В этой формуле r и a означают длины линий $AC = A_1C_1$ и AA_1 , а φ — общее значение углов ACC_1 , A_1C_1C , A_1AC , AA_1C_1 в среднем положении механизма.

§ 4. Если только место точки M выбрано сообразно формуле (1) и если разность

$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - 2 \sin \varphi \quad (2)$$

не очень удаляется от нуля, этот механизм доставляет прямолинейное движение с значительною точностью. Эта точность увеличивается по мере того, как разность (2) приближается к нулю, но в то же время уменьшается длина дуги, которая обладает этою точностью.

В том случае, когда имеем в точности

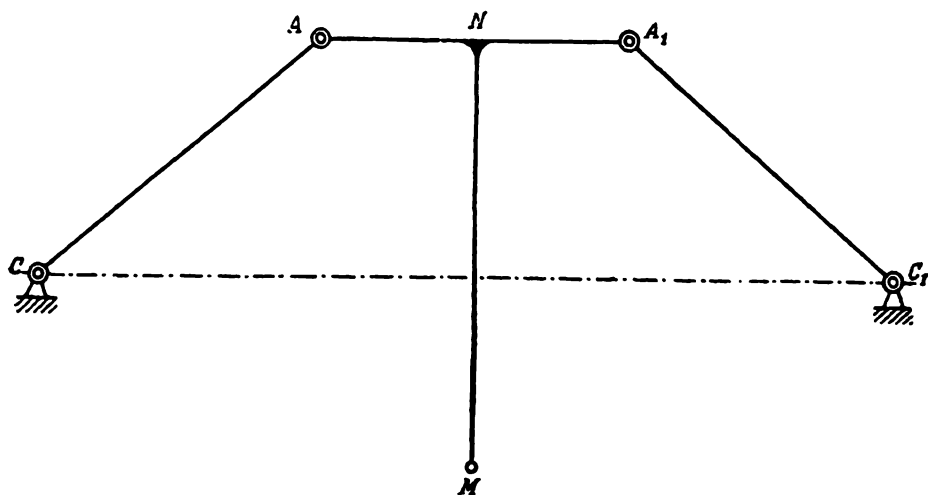
$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - 2 \sin \varphi = 0, \quad (3)$$

эта длина обращается в нуль, и тогда кривая, описанная точкою M , имеет соприкосновение 5-го порядка с прямой линией.

Мы остановимся на этом предельном случае, к которому приближается наш механизм, по мере того как точность его хода увеличивается и от которого он отличается мало, если эта точность будет достаточною.

§ 5. Для этого предельного случая в силу уравнений (1) и (3) найдется

$$a = \frac{2 \cos^3 \varphi \cdot \cos 2 \varphi}{\cos 3 \varphi} r, \quad c = \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos 2 \varphi \cdot \operatorname{tang} 3 \varphi}{\cos 3 \varphi} r.$$



Фиг. 4

Из этих значений $AA_1 = a$, $MN = c$, замечая, что $AC = A_1C_1$, и из треугольников CDC_1 и ADA_1 выведется для определения $CC_1 = b$ следующая формула:

$$b = - \frac{\sin^2 2 \varphi}{\cos 3 \varphi} r.$$

Так как значения количеств a , b , c изменяют свои знаки только при значениях угла φ , обращающих в нуль выражения

$$\sin 2 \varphi, \quad \cos 2 \varphi, \quad \sin 3 \varphi, \quad \cos 3 \varphi$$

и которые будут

$$0^\circ, \quad 30^\circ, \quad 45^\circ, \quad 60^\circ, \quad 90^\circ,$$

то выходит, что наш механизм не может изменять своего вида между указанными пределами, т. е.

$$\begin{array}{ll} \text{от } \varphi = 0^\circ \text{ до } \varphi = 30^\circ; & \text{от } \varphi = 45^\circ \text{ до } \varphi = 60^\circ; \\ \text{„ } \varphi = 30^\circ \text{ „ } \varphi = 45^\circ; & \text{„ } \varphi = 60^\circ \text{ „ } \varphi = 90^\circ. \end{array}$$

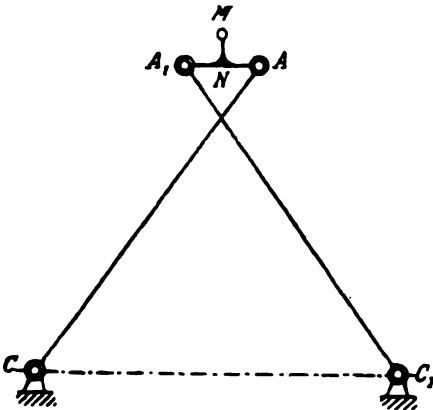
Чтобы вполне отдать себе отчет, каким видоизменениям может подвергнуться этот механизм. мы вычислили по предыдущим

формулам элементы для четырех значений угла φ , взятых на равных расстояниях от этих пределов, именно

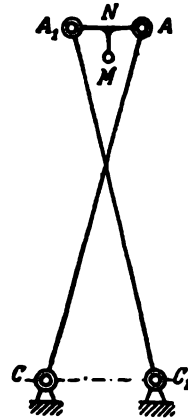
$$\varphi = 15^\circ; \quad 37^\circ 30'; \quad 52^\circ 30'; \quad 75^\circ.$$

Фиг. 3, 4, 5 и 6 изображают наш механизм при элементах, которые найдутся по вышесказанному, если принять r равным 0,05 метра.

Все эти видоизменения доставляют прямолинейное движение с одинаково степенью точности, а именно кривая, описанная точкою M , всегда имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою линиею. В этом отношении все эти видоизменения одинаково хороши; но между ними



Фиг. 5



Фиг. 6

замечается большая разница, когда переходят к случаю, в котором желают получить прямолинейное движение для более или менее значительного хода.

§ 6. В том числе, когда разность

$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} - 2 \sin \varphi$$

не приводится к нулю, но мало отличается от него, сочлененный механизм, для которого c имеет значение (1), доставляет прямолинейное движение с большою точностью и эта точность будет иметь место вдоль кривой некоторой длины. Определение длины этой кривой делается следующим образом. Полагая

$$\sqrt{\frac{2r \cos \varphi - a}{r \cos \varphi - a}} = T$$

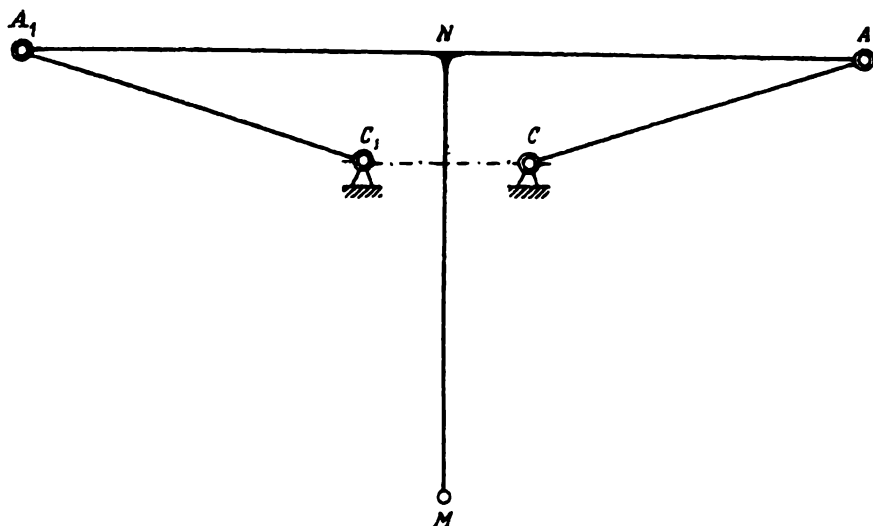
и обозначая через t тот из корней уравнения

$$2 \sin \varphi \cdot (1 + t^2) + t(3 + t^2) - (1 - t^2) T = 0,$$

который наиболее приближается к нулю, ищем угол α_1 по формуле

$$\cos \alpha_1 = 1 - \frac{2(1-T^2)^2}{T^2(2-T^2)} \left[\left(\frac{1+2t \sin \varphi + t^2}{1-2T \sin \varphi + T^2} \right)^2 - 1 \right].$$

Этот угол, взятый со знаками $+$ и $-$, дает предельные наклонения линии AA_1 относительно линии CC_1 для начала и конца хода,



Фиг. 7

о котором идет речь. Определив угол α_1 , получим длину искомого хода из формулы

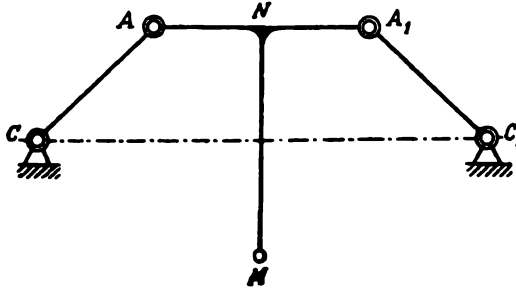
$$l = \frac{2(2-T^2)}{1-T^2} \left[\frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1+2t \sin \varphi + t^2)t}{(1-t^2)^2} \right] r \sin \alpha_1. \quad (4)$$

Во время всего этого хода, уклонения кривой, начерченной точкой M , от прямой остаются заключенными между $+E$ и $-E$, причем значение E определяется отношением

$$E = \frac{2r(1+2t \sin \varphi + t^2)t^2}{(2 \sin \varphi + 3t + 2t^2 \sin \varphi + t^2)^2}. \quad (5)$$

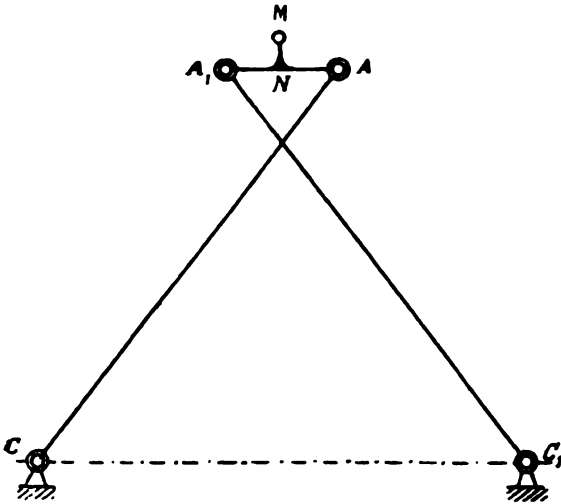
§ 7. В том случае, когда предполагают достигнуть *точности* и *хода*, наперед заданных, для a , r , φ и c следует взять значения, удовлетворяющие уравнениям (1), (4), (5), причем l , E должны иметь данные величины. Так как должны проверяться только три уравнения, то можно будет выбрать угол φ по произволу. В этом случае, давая углу φ значения выше указанные, получим четыре различные формы механизма, с которыми мы уже встретились выше. Все эти формы имеют одинаковую точность во время одного и того же *хода*; но они будут значительно отличаться между собою длиной их элементов и их расположением.

§ 8. Для взаимного сравнения этих четырех видоизменений, найдем приближительные выражения их элементов, предполагая, что

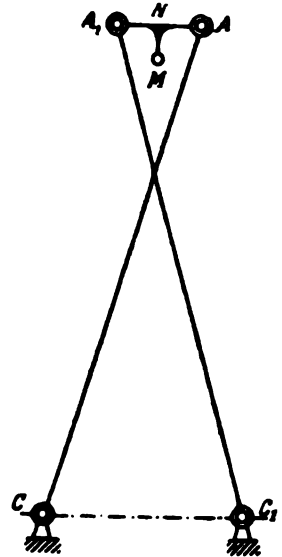


Фиг. 8

отношение $\frac{E}{l}$ имеет весьма малое значение, что всегда имеет место в механизмах большой точности.



Фиг. 9



Фиг. 10

Изыскивая в этом предположении разложения количеств r , a , b , c в ряд, увидим, что эти разложения, остановленные на первых членах, доставляют;

$$r = \frac{l \cos 3\varphi}{8 \sin 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}},$$

$$a = \frac{l \cos^3 \varphi}{4 \tan 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}},$$

$$b = -\frac{l \sin 2\varphi}{8} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}},$$

$$c = \frac{l \cos^2 \varphi \cdot \tan 3\varphi}{8 \tan 2\varphi} \sqrt[5]{\frac{2 \cos 3\varphi}{\cos \varphi \cdot \cos^3 2\varphi} \frac{l}{E}}.$$

Фиг. 7, 8, 9 и 10 изображают четыре формы механизма, о котором идет речь, с их элементами, выведенными из предыдущих формул при

$$\varphi = 15^\circ, \quad 37^\circ 30', \quad 52^\circ 30', \quad 75^\circ$$

и

$$l \sqrt[5]{\frac{l}{E}} = 0,25.$$

=====

О ПРОСТЕЙШИХ СОЧЛЕНЕНИЯХ*

§ 1. В статье под заглавием „Об одном механизме“ ** мы показали, каким образом из трех прямых линий можно составить сочленение, в котором центр средней линии будет описывать дугу значительной длины, мало отличающуюся от прямой линии. Движение, доставляемое таким сочленением, вообще ближе подходит к прямолинейному, чем то, которое получается при помощи других сочленений той же степени простоты, а именно сокращенного параллелограмма Уатта и механизма Эванса. Мы теперь покажем другое сочленение, столь же простое и доставляющее прямолинейное движение с такою же степенью точности. Сочленение это, как мы увидим, получается из прежнего заменю в нем одних линий другими, причем движение, им доставляемое, нисколько не меняется, а потому формулы, показанные нами в выше упомянутой статье, применяются к нему без затруднения. То же мы покажем относительно сочленений, бывших предметом одного из наших сообщений на Парижском конгрессе нынешнего года. ***

§ 2. Сочленение, бывшее предметом выше упомянутой статьи, состоит из двух линий AC , A_1C_1 (фиг. 1) одинаковой длины, вращающихся около неподвижных центров C , C_1 , и линии AA_1 , сочлененной с ними шарнирами в точках A , A_1 . Средине линии AA_1 , как мы показали, будет описывать дугу значительной длины, близко подходящую к прямой, если в сочленении выполнены такие условия:

1) расстояние неподвижных центров вращения CC_1 равно одной трети ломаной линии CAA_1C_1 ;

2) длина линии AA_1 — не менее одной четверти длины AC или A_1C_1 .

По мере удаления AA_1 от $\frac{1}{4}AC$ увеличивается длина хода, на котором получается движение, близкое к прямолинейному; но в то же время увеличиваются, и в большей степени, отклонения от прямой

* Опубликовано в Матем. Сборнике, т. IX, вып. 1, 1878; французский перевод „Les plus simples systèmes de tiges articulées“ — в „Revue Universelle des Mines“, t. XV, 2-e série, 28-e année, 1884. Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сониной, том II, СПб., 1907, стр. 271 — 282. — *Ред.*

** Стр. 10—15 настоящего тома. — *Ред.*

*** Стр. 85—91 настоящего тома. — *Ред.*

линии, как это показывают формулы, данные нами в выше упомянутой статье и по которым, полагая

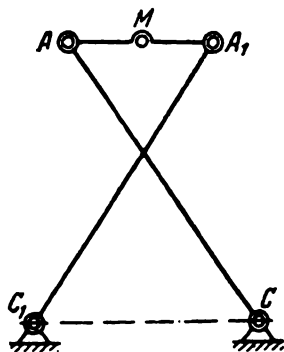
$$\frac{AA_1}{AC} = a,$$

имеем

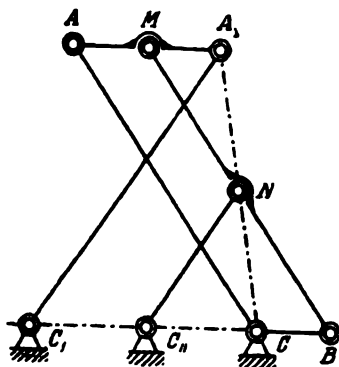
$$l = AC \sqrt{\frac{(5-2a)(1+2a)(4a-1)}{(a+2)^3}},$$

$$E = \frac{AC}{3} \left[\sqrt{1 + \frac{3(4a-1)^3}{16(1-a)(a+2)^3}} - 1 \right] \sqrt{(1-a)(a+2)},$$

где l — длина хода, E — предел уклонений от прямолинейного движения.



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 3. Чтобы преобразовать это сочленение, мы присоединяем к нему еще две линии: линию $BM = AC$ и линию $BC = AM = \frac{1}{2} AA_1$, как показано на фиг. 2-й. Проведя линию A_1C , мы замечаем, что она, вследствие параллельности линий AA_1 и BC и равенства $BC = AM$, будет всегда проходить через N , середину линии MB , и что при всех положениях сочленения

$$NC = \frac{1}{2} A_1C,$$

откуда следует, что N , середина линии MB , и точка A_1 будут описывать подобные кривые, которых соответствующие элементы будут относиться как $\frac{1}{2} : 1$, и эти элементы будут параллельны между собою. А так как в рассматриваемом нами сочленении точка A_1 описывает дугу круга, которого радиус есть C_1A_1 , то N тоже должна описывать дугу круга.

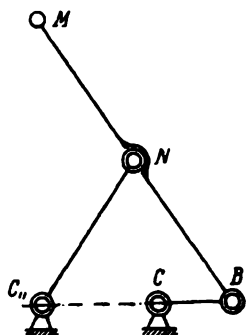
Называя через C_{11} центр этого круга, мы, по выше сказанному относительно соответствующих элементов дуг, описываемых точками A_1 и N , находим, что

$$NC_{11} = \frac{1}{2} A_1 C_1$$

и что линия $C_{11}N$ параллельна линии A_1C_1 , откуда видно, что C_{11} лежит на одной прямой с точками C, C_1 и что

$$CC_{11} = C_1 C_{11}.$$

Убедясь таким образом, что в полученном нами сочленении точка N описывает дугу круга, которого C_{11} есть центр, мы заключаем, что, ни мало не стесняя движений этого сочленения, можно ввести в состав его линию $C_{11}N$, вращающуюся около точки C_{11} и соединенную с N , серединою линии MB . Выкинув же из этого сочленения линии AA_1, AC, A_1C_1 , мы получаем новое сочленение, составленное из трех линий $MB, C_{11}N, CB$ (фиг. 3), где точка M будет описывать ту же кривую, как и в первоначальном сочленении.



Фиг. 3

Так как (фиг. 2)

$$BM = AC, \quad CC_{11} = \frac{1}{2} CC_1, \quad BC = \frac{1}{2} AA_1.$$

то условия

$$CC_1 = \frac{2AC + AA_1}{3}, \quad AA_1 \geq \frac{AC}{4},$$

необходимые для того, чтобы кривая, описываемая точкою M , близко подходила к прямой (§ 2), для этого сочленения приводятся к таким:

$$CC_{11} = \frac{BM + BC}{3}, \quad BC \geq \frac{BM}{8}.$$

Величина же $a = \frac{AA_1}{AC}$, входящая в выражения длины хода l и предела уклонений от прямой линии E (§ 2), найдется по формуле

$$a = 2 \frac{BC}{BM}.$$

§ 4. Переходя к сочленениям, о которых мы делали сообщение на Парижском конгрессе* и в которых точка, доставляющая желаемое движение, лежит не на линии AA_1 (предполагаемой прямою), а на перпендикуляре к ней, мы замечаем, что такие сочленения в общем их виде могут быть рассматриваемы как состоящие (фиг. 4) из треугольника AMA_1 , которого две вершины A, A_1 сочленены с линиями AC, A_1C_1 , вращающимися около неподвижных центров C, C_1 , а третья вершина M доставляет желаемое движение.

* См. стр. 85—91 настоящего тома. — *Ред.*

Чтобы преобразовать такое сочленение, мы вводим в состав его, как и прежде, линии $MB = AC$ и $CB = AM$ (фиг. 5), а затем к линии MB присоединяем такие две линии MN , NB , которые вместе с линией MB образуют треугольник MNB , подобный треугольнику AMA_1 и в котором вследствие того

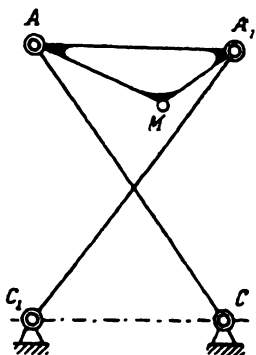
$$MBN = A_1AM, \quad (1)$$

$$\frac{NB}{MB} = \frac{AM}{AA_1}. \quad (2)$$

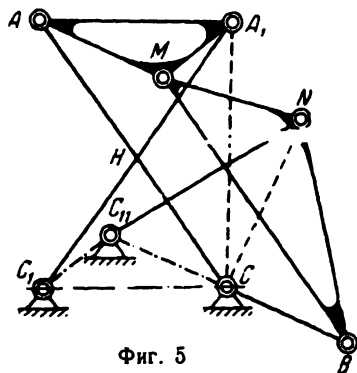
Проведя от неподвижной точки C , как полюса, к точкам A_1 , N радиусы-векторы A_1C , NC , мы замечаем, что в треугольниках A_1AC , NBC углы A_1AC , NBC равны, так как

$$A_1AC = A_1AM + MAC,$$

$$NBC = NBM + MBC,$$



Фиг. 4



Фиг. 5

где $A_1AM = NBM$ по (1), а $MAC = MBC$ по свойству параллелограмма. Заменяя же во (2) линии MB , AM равными AC , CB , находим

$$\frac{NB}{AC} = \frac{CB}{AA_1},$$

что вместе с выше замеченным равенством углов A_1AC , CBN обнаруживает подобие треугольников A_1AC и CBN , вследствие чего имеем

$$\frac{A_1C}{CN} = \frac{AA_1}{CB}, \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} NCB &= AA_1C, \\ CNB &= ACA_1. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Но из треугольника A_1AC выходит такое равенство между углами:

$$AA_1C = \pi - A_1AC - ACA_1 = \pi - A_1AM - MAC - ACA_1;$$

заменяя здесь

$$\pi - MAC$$

через

$$ACB = ACA_1 + A_1CN + NCB,$$

получаем уравнение

$$AA_1C = A_1CN + NCB - A_1AM,$$

которое по выше замеченному равенству углов NCB , AA_1C дает

$$A_1CN = A_1AM.$$

Из этого видно, что при всех положениях рассматриваемого нами сочленения радиусы-векторы точек A_1, N , проведенные из неподвижного центра C , будут составлять постоянно один и тот же угол, равный A_1AM . Заменяя же в пропорции (3) линию CB равной ей AM , мы находим, что эти радиусы-векторы по длине своей будут сохранять одно и то же отношение, определяемое пропорцией

$$\frac{A_1C}{CN} = \frac{AA_1}{AM}.$$

§ 5. Из показанного нами относительно радиусов-векторов точек A_1, N видно, что эти точки будут описывать подобные кривые линии, в которых соответствующие элементы будут иметь одинаковое наклонение к своим радиусам-векторам и по длине своей будут относиться как AA_1 к AM . Так как в рассматриваемом нами сочленении точка A_1 описывает дугу круга, центр которого в точке C_1 , мы заключаем, что и N будет описывать дугу круга. Полагая же, что C_{11} есть центр последнего, мы замечаем, что радиусы $C_1A_1, C_{11}N$, будучи нормальными круговых дуг, описываемых точками A_1, N , по выше показанному относительно наклонения этих дуг и отношения их длины, должны составлять одинаковые углы с радиусами-векторами CA_1, CN и представлять такую пропорцию:

$$\frac{A_1C_1}{C_{11}N} = \frac{AA_1}{AM},$$

что дает нам для определения точки C_{11}

$$\left. \begin{aligned} CNC_{11} &= CA_1C_1 \\ C_{11}N &= \frac{AM}{AA_1} A_1C_1 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Складывая предпоследнее равенство почленно с равенством (4), мы находим

$$CNC_{11} + CNB = CA_1C_1 + ACA_1,$$

что, как нетрудно заметить на фиг. 5, приводится к такому равенству:

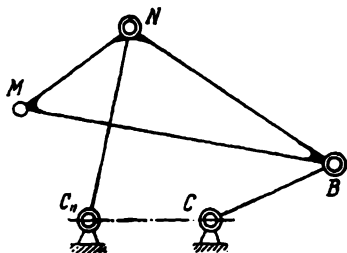
$$BNC_{11} = ANA_1,$$

весьма просто определяющему направление линии NC_{11} .

Место точки C_{11} , центра дуги, описываемой точкой N , найдется на этой линии по уравнению (5).

Определив таким образом C_{11} , центр круговой дуги, описываемой точкою N , мы, не стесняя нисколько движений нашего сочленения, можем ввести в состав его линию $C_{11}N$, вращающуюся около неподвижного центра C_{11} и сочлененную с N , вершиною треугольника NBM .

Выкидывая же из сочленения, таким образом составленного, весь треугольник AMA_1 и линии AC , A_1C_1 , мы получаем сочленение, изображенное на фиг. 6 и в котором вершина M треугольника MNB будет описывать ту же кривую, как и вершина M треугольника AMA_1 в первоначальном сочленении (фиг. 4).



Фиг. 6

§ 6. Преобразовывая таким образом сочленение (фиг. 4) в предположении

$$MAA_1 = MA_1A, \quad MAC = MA_1C_1, \quad AC = A_1C_1,$$

(что имеет место в сочленениях, симметрических около одной оси для среднего их положения), мы находим (фиг. 5), полагая для сокращения

$$HAA_1 = HA_1A = \varphi, \quad MAA_1 = MA_1A = \psi, \quad AC = A_1C_1 = r,$$

что

$$\left. \begin{aligned} MBN = BMN = \psi, \quad MNB = \pi - 2\psi; \\ CBN = \varphi; \quad C_{11}NB = AHA_1 = \pi - 2\varphi, \\ BC = AM = \frac{AA_1}{2 \cos \psi}, \quad MN = NB = \\ = \frac{r}{2 \cos \psi}, \quad C_{11}H = \frac{r}{2 \cos \psi}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Последние два равенства показывают, что в частном случае, нами рассматриваемом (фиг. 7), линии MN , NB , $C_{11}N$ равны, откуда видно, что треугольник $C_{11}NB$ равнобедренный и, следовательно, угол NBC_{11} по углу $C_{11}NB$ определяется так:

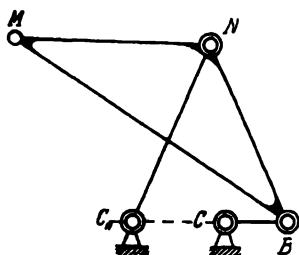
$$NBC_{11} = \frac{\pi - C_{11}NB}{2},$$

что по внесении выше показанной величины угла $C_{11}NB$ дает

$$NBC_{11} = \varphi.$$

Замечая же по (6), что угол CBN имеет ту же величину, мы заключаем, что линия BC идет по одному направлению с линией $C_{11}B$, стороною равнобедренного треугольника $C_{11}NB$, и, следовательно, точка C_{11} лежит на прямой, соединяющей точки C , B .

Из этого видно, что сочленение, составленное из трех элементов и симметрическое около одной оси, может быть всегда заменено сочленением несимметрическим, изображенным на фиг. 7, где MNB — равнобедренный треугольник, линии MN , NB , $C_{11}N$ равны между собою; неподвижные центры вращения линий CB , $C_{11}N$ в среднем положении сочленения лежат на одной прямой с точкою B . Что касается условий, при которых сочленения этого вида доставляют движение, близкое к прямолинейному, они легко получаются на основании равенств (6) из формул, данных нами на Парижском конгрессе*



Фиг. 7

относительно сочленений симметрических.

Так, формулы, показанные нами для симметрических сочленений в предположении бесконечно малого хода, дают

$$AA_1 = \frac{2 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} r, \quad \psi = 3\varphi - \pi.$$

Внося эти величины в равенства (6), мы находим такие формулы для определения элементов соответствующих сочленений нового вида:

$$MNB = \pi - 2\psi = 3\pi - 6\varphi,$$

$$BC = \frac{AA_1}{2 \cos \psi} = - \frac{\cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} r,$$

$$MN = NB = C_{11}N = \frac{r}{2 \cos \psi} = - \frac{r}{2 \cos 3\varphi}.$$

Полагая же здесь

$$MN = NB = C_{11}N = R$$

и исключая r , находим

$$BC = \frac{2 \cos^2 \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} R,$$

что вместе с величиною угла MNB ,

$$MNB = 3\pi - 6\varphi,$$

и замеченным выше относительно среднего положения сочленения, в котором точки C , C_{11} , B лежат на одной прямой и угол CBN равен φ , вполне определяет сочленение рассматриваемого нами вида.

§ 7. Сочленения (фиг. 6), выводимые по выше показанному из сочленений симметрических, могут служить для непосредственного преобразования попеременного прямолинейного движения в непрерывное круговое, так как надлежащим выбором размера его частей и положения неподвижных центров вращения можно достигнуть того, что при полном обороте линии BC около центра C движение

* См. стр. 85—91 настоящего тома. — *Ред.*

точки M будет незначительно отличаться от прямолинейного. Определяя по данным нами формулам соответствующее симметрическое сочленение, удовлетворяющее этому условию, мы находим, что элементы его при помощи вспомогательной величины t получаются из таких уравнений:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{-t(t^2 + 2) + \sqrt{2-t^2}}{2(t^2 + 1)}, \\ \tan \psi &= \frac{(3 - t\sqrt{2-t^2})\sin \varphi + 2(t - \sqrt{2-t^2})}{(1 + t\sqrt{2-t^2})\cos \varphi}, \\ AA_1 &= \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1 + t\sqrt{2-t^2}} \cos \varphi \cdot r.\end{aligned}$$

Определяя по этим формулам величину углов φ , ψ и длину линии AA_1 , мы, на основании равенств (6), для преобразованного сочленения (фиг. 7) находим

$$\begin{aligned}MNB &= \pi - 2\psi, & CBN &= \varphi, \\ C_{11}N &= MN = NB = \frac{r}{2 \cos \psi}, \\ BC &= \frac{AA_1}{2 \cos \psi} = \frac{t\sqrt{2-t^2} \cos \varphi}{1 + t\sqrt{2-t^2} \cos \psi} r.\end{aligned}$$

Полагая же здесь

$$NB = R$$

и исключая r , получаем

$$\begin{aligned}BC &= \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{1 + t\sqrt{2-t^2}} \cos \varphi \cdot R, \\ C_{11}N &= R, & MN &= R,\end{aligned}$$

что вместе с величиною углов

$$MNB = \pi - 2\psi, \quad CBN = \varphi$$

вполне определяет рассматриваемое нами сочленение при какой-либо величине t .

Выбор же этой величины зависит от степени точности, с которою желают иметь прямолинейное движение. Чем меньше t , тем меньше удаляется точка M от прямого пути при полном обороте линии BC около центра C , и предел этого уклонения по формулам, данным нами, представляется так:

$$E = \frac{4 \cos \psi (1 + 2t \sin \varphi + t^2) t^2}{(2 \sin \varphi + 3t + 2t^2 \sin \varphi + t^3)^2} R.$$

Что касается длины хода точки M при полном обороте линии BC , то она также уменьшается, хотя не столь быстро, с уменьшением t .

Величина этого хода найдется по формуле

$$l = \frac{4 \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot t \sqrt{2-t^2}}{1 + t \sqrt{2-t^2}} KR,$$

где K есть наибольшая величина выражения

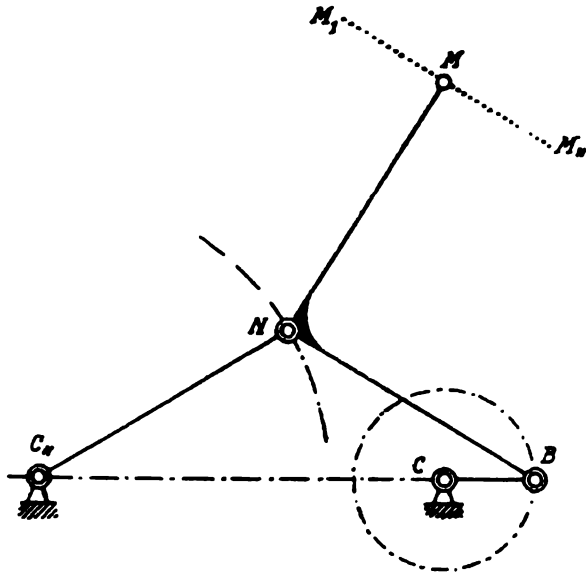
$$\left[\sqrt{\frac{(1 + t \sqrt{2-t^2})^2 \tan^2 \varphi + 2t \sqrt{2-t^2} (1 - \cos \alpha)}{(1 + t \sqrt{2-t^2})^2 - 2t \sqrt{2-t^2} (1 - \cos \alpha)}} - \tan \psi \right] \sin \alpha$$

от $\alpha=0$ до $\alpha=2\pi$.

Полагая, для примера, $t=0,15$, мы по выше показанным формулам находим

$$\varphi = 32^\circ 38', \quad \psi = -44^\circ 43', \quad BC = 0,2934 R,$$

и эти величины φ , ψ , BC нам дают сочленение, изображенное на фиг. 8, в котором точка M при полном обороте линии BC около центра C

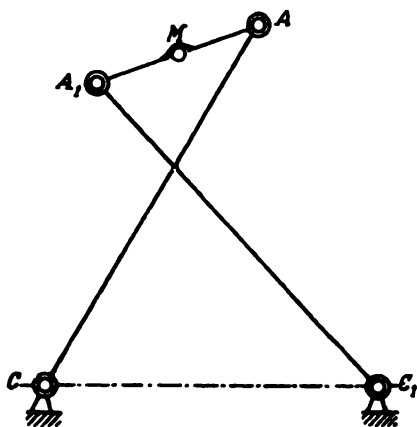


Фиг. 8

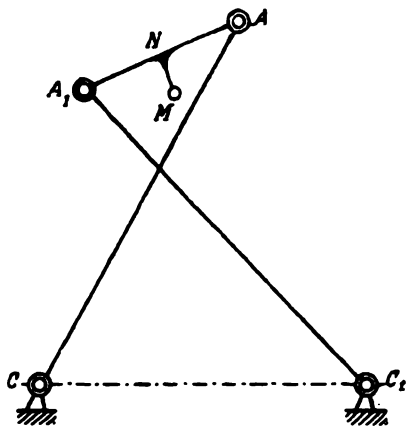
описывает сомкнутую линию, очень мало уклоняющуюся от прямой линии M_1M_{11} . Делая $t=0,15$ и внося найденные величины углов φ , ψ в формулу, определяющую E , мы находим, что E , предел уклонений кривой, описываемой точкою M , от прямой будет равняться $0,00458 R$. По формуле же, определяющей l , мы находим, что длина прямой линии M_1M_{11} , от которой будет мало уклоняться сомкнутая линия, описываемая точкою M , равна $0,842 R$.

О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ОКОЛО ОДНОЙ ОСИ*

§ 1. В записке под заглавием „Об одном механизме“** мы показали условия, при которых самый простой параллелограмм доставляет движение, очень близкое к¹ прямолинейному. Этот параллелограмм состоит из двух стержней AC , A_1C_1 (фиг. 1) одинаковой длины, вращающихся около неподвижных осей C , C_1 , и стержня AA_1 , сочлененного с ними в точках A , A_1 ; точка M , доставляющая желаемое движение, берется на оси стержня AA_1 в равном расстоянии от концов его A , A_1 .



Фиг. 1



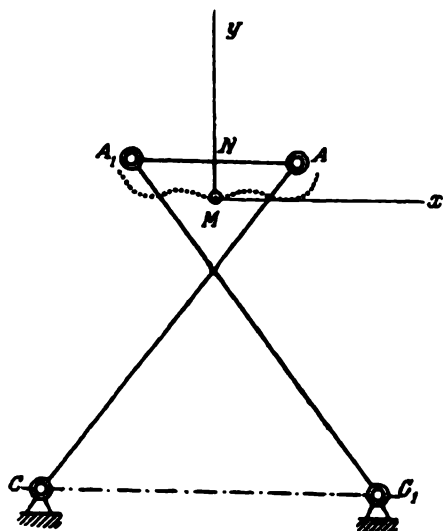
Фиг. 2

Мы теперь покажем такие же условия для случая, когда точка, доставляющая желаемое движение, берется не на оси стержня AA_1 , а на перпендикуляре к ней MN (фиг. 1), равноотстоящем от точек A , A_1 . В этом случае, как нетрудно заметить, механизм, нами рассматриваемый, обнимает все параллелограммы, состоящие из трех элементов и симметрические около одной оси.

* Читано 17 (5) дек. 1878 г. Опубликовано в Приложениях к XXXIV тому Зап. Импер. Акад. Наук, № 3, 1879; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соинина, том II, СПб., 1907, стр. 283—297. — *Ред.*

** Стр. 10—15 настоящего тома. — *Ред.*

Условия, при которых такие параллелограммы в общем их виде доставляют движение, по возможности близкое к прямолинейному, получаются при помощи тех же приемов, которые были употреблены нами при рассмотрении частного случая их, бывшего предметом выше упомянутой записки. Вся разница в большей сложности вычислений, вследствие чего эти условия для общего случая не могут



Фиг. 3

быть сформулированы так просто, как это было сделано нами для выше упомянутого частного случая, в котором длина перпендикуляра MN равняется нулю.

Для того чтобы представить эти условия по возможности проще, мы введем одну вспомогательную величину, при помощи которой все размеры рассматриваемых нами параллелограммов выражаются рационально.

Что касается определения этой вспомогательной величины, она может быть вычислена или по степени точности, с которою желают иметь прямолинейное движение, или по длине хода, на котором желают иметь движение, близкое к прямолинейному. Уравнения, которые при этом встречаются, легко решаются по приближению.

§ 2. Рассматривая наш механизм в среднем его положении (фиг. 3), когда линия AA_1 параллельна линии CC_1 , проходящей через оси вращения стержней, и вследствие того углы ACC_1 , A_1C_1C равны, мы полагаем

$$ACC_1 = A_1C_1C = \varphi.$$

Место, занимаемое при этом точкою M , принимаем за начало координат; ось x -в берем по направлению, параллельному линии CC_1 , ось y -в по направлению перпендикулярному.

Переходя к рассмотрению кривой, описываемой точкою M , мы замечаем, что эта кривая будет симметрична около оси Oy , так как весь механизм симметричен около этой оси, а потому эта кривая, проходя через начало координат, будет в этой точке касаться оси Ox , не пересекая ее; около этого-то места кривая, описываемая точкою M , способна сделаться очень мало отличающейся от прямой. Условия, при которых это имеет место, могут быть представлены так при помощи вспомогательной величины t .

Полагая

$$AC = A_1C_1 = 1, \quad AA_1 = a, \quad NM = c,$$

определяем величины a , c по формулам

$$a = \frac{T^2 - 2}{T^2 - 1} \cos \varphi, \quad (1)$$

$$c = \frac{(2 - T^2) [2T - (T^2 + 1) \sin \varphi]}{2(T^2 - 1)^2}, \quad (2)$$

где

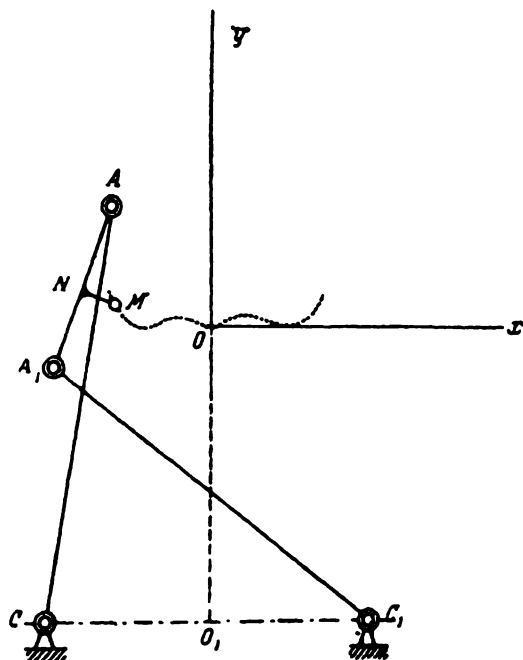
$$T = \frac{2 \sin \varphi (1 + t^2) + t(3 + t^2)}{1 - t^2}. \quad (3)$$

Нетрудно показать, что при выполнении этих условий кривая, описываемая точкою M на некотором протяжении, более или менее значительном, не выходит из пространства, ограниченного двумя параллелями, которых взаимное расстояние равняется

$$\frac{4(1 + 2 \sin \varphi \cdot t + t^2) t^3}{(2 \sin \varphi + 3t + 2 \sin \varphi \cdot t^2 + t^3)^2},$$

величине быстро приближающейся к нулю по мере уменьшения вспомогательной величины t .

§ 3. Для определения положения точки M при различных углах наклона линии AA_1 к линии CC_1 (фиг. 4) мы будем изображать через α переменный угол, составляемый линиями AA_1 , CC_1 , и через β, γ — соответствующие углы ACC_1 , A_1C_1C . Проектируя ломаную линию OO_1CANM на оси координат и замечая, что



Фиг. 4

$$AC=1, \quad AN=\frac{a}{2}, \quad NM=c$$

и что ось Ox параллельна линии CC_1 , находим такие формулы для определения координат точки M :

$$x = -CO_1 + \cos \beta - \frac{a}{2} \cos \alpha + c \sin \alpha,$$

$$y = -OO_1 + \sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha - c \cos \alpha.$$

Прилагая эти формулы к тому случаю, когда линия AA_1 параллельна линии CC_1 , и замечая, что в этом случае по выше сказанному

$$x=0, \quad y=0, \quad \alpha=0, \quad \beta=\varphi,$$

мы находим равенства

$$0 = -CO_1 + \cos \varphi - \frac{a}{2},$$

$$0 = -OO_1 + \sin \varphi - c.$$

Определяя по этим равенствам длину линий CO_1 , OO_1 и внося ее в предыдущие формулы, получаем такие выражения координат точки M :

$$\left. \begin{aligned} x &= \cos \beta + \frac{a}{2}(1 - \cos \alpha) + c \sin \alpha - \cos \varphi, \\ y &= \sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha + c(1 - \cos \alpha) - \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Чтобы найти уравнение, связывающее между собою переменные углы β , α , мы проектируем ломаную линию CAA_1C_1 на оси координат, что дает нам равенства

$$\cos \beta - a \cos \alpha + \cos \gamma - CC_1 = 0.$$

$$\sin \beta - a \sin \alpha - \sin \gamma = 0.$$

Прилагая эти равенства к случаю, когда линия AA_1 параллельна CC_1 и когда, по выше сказанному,

$$\alpha = 0, \quad \beta = \gamma = \varphi,$$

получаем

$$2\cos \varphi - a - CC_1 = 0,$$

вследствие чего предыдущие равенства нам дают

$$\cos \gamma = 2\cos \varphi - \cos \beta - a(1 - \cos \alpha), \quad \sin \gamma = \sin \beta - a \sin \alpha.$$

Возводя же эти уравнения в квадрат и складывая, мы получаем такое уравнение между переменными углами β , α :

$$[2\cos \varphi - \cos \beta - a(1 - \cos \alpha)]^2 + [\sin \beta - a \sin \alpha]^2 = 1.$$

Чтобы исключить из этого уравнения $\cos \beta$, мы раскрываем скобки, причем получаем равенство, которое приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} [2\cos \varphi - a(1 - \cos \alpha)] \cos \beta &= 2\cos^2 \varphi - a \sin \alpha \cdot \sin \beta - \\ &- a(2\cos \varphi - a)(1 - \cos \alpha). \end{aligned} \quad (5)$$

Заменяя же здесь $\cos \beta$ через $\sqrt{1 - \sin^2 \beta}$ и возводя в квадрат, находим

$$\begin{aligned} [2\cos \varphi - a(1 - \cos \alpha)]^2 (1 - \sin^2 \beta) &= \\ &= [a \sin \alpha \cdot \sin \beta - 2\cos^2 \varphi + a(2\cos \varphi - a)(1 - \cos \alpha)]^2, \end{aligned}$$

откуда получается такое уравнение для определения разности $\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha$:

$$2 [2 \cos^2 \varphi + a (a - 2 \cos \varphi) (1 - \cos \alpha)] \left[\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha \right]^2 = \\ = [2 \cos \varphi - a (1 - \cos \alpha)]^2 \left[1 - \cos^2 \varphi - \frac{a (a - 2 \cos \varphi)}{2} (1 - \cos \alpha) \right].$$

Внося сюда величину a по (1) и полагая

$$v = 1 + \frac{1}{2} \frac{T^2 (2 - T^2)}{(T^2 - 1)^2} (1 - \cos \alpha), \quad (6)$$

находим такое уравнение:

$$v \left(\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha \right)^2 T^4 = [1 + (T^2 - 1) v]^2 (1 - \cos^2 \varphi \cdot v). \quad (7)$$

С другой стороны, по (4) мы находим, что

$$\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha = y - c (1 - \cos \alpha) + \sin \varphi;$$

внося же сюда величину c по (2) и величину $1 - \cos \alpha$ по (6), получим

$$\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha = y + \sin \varphi - \frac{2T - (T^2 + 1) \sin \varphi}{T^2} (v - 1),$$

вследствие чего уравнение (7) нам дает

$$v \{ T^2 y + 2T - \sin \varphi - [2T - (T^2 + 1) \sin \varphi] v \}^2 = \\ = [1 + (T^2 - 1) v]^2 (1 - \cos^2 \varphi \cdot v). \quad (8)$$

§ 4. По уравнению (8), полученному нами, нетрудно показать при каких величинах угла α точка M будет находиться на оси Ox .

Так как на этой оси ордината y равняется нулю, то величины v , при которых точка M будет на оси Ox , найдутся из уравнения (8), когда в нем положим

$$y = 0.$$

Таким образом, для определения этих величин получается уравнение

$$v \{ 2T - \sin \varphi - [2T - (T^2 + 1) \sin \varphi] v \}^2 = [1 + (T^2 - 1) v]^2 (1 - \cos^2 \varphi \cdot v).$$

Раскрывая же здесь скобки и перенося все члены в одну сторону, мы находим, что это уравнение приводится к следующему:

$$(v - 1) [(1 - 2 \sin \varphi \cdot T + T^2) v - 1]^2 = 0. \quad (9)$$

Внося корни этого уравнения в уравнение (6) и решая последнее, мы найдем все величины угла α , при которых точка M лежит на оси Ox . Поступая так с корнем

$$v = 1,$$

мы находим

$$\alpha = 0.$$

При этой величине α , как мы видели (§ 2), точка M приходит в начало координат, причем кривая, описываемая точкою M , касается, оси Ox , не пересекая ее. Поступая так же с корнем

$$v = \frac{1}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2}$$

и замечая, что он двойной, мы по уравнению (6) найдем величины α , при которых линия, описываемая точкою M , будет иметь с осью Ox прикосновение первого порядка и, следовательно, не будет ее пересекать.

Из этого видно, что точка M , двигаясь вправо и влево от оси Oy , будет находиться всегда по одну сторону оси Ox .

Переходя к рассмотрению положения точки M относительно прямой, определяемой уравнением

$$y = \frac{4(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t^2}{(2\sin \varphi + 3t + 2\sin \varphi \cdot t^2 + t^3)^2}, \quad (10)$$

мы замечаем, что значения v , при которых точка M лежит на этой линии, найдутся из уравнения

$$v \left\{ \frac{4(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t^2T^2}{(2\sin \varphi + 3t + 2\sin \varphi \cdot t^2 + t^3)^2} + 2T - \sin \varphi - [2T - (1 + T^2)\sin \varphi]v \right\}^2 = \\ = [1 + (T^2 - 1)v]^2 (1 - \cos^2 \varphi \cdot v),$$

которое получаем, внося в уравнение (8) величину y по (10).

Внося же сюда величину T по (3), мы по приведении находим уравнение, которое, по замене выражения

$$\frac{1 + 4\sin \varphi \cdot t + 6t^2 + 4\sin \varphi \cdot t^3 + t^4}{(1 - t^2)^2}$$

равным ему

$$\frac{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2}{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2},$$

может быть представлено под таким видом:

$$\left[v - \left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 \right] \left(v - \frac{1}{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2} \right)^2 = 0.$$

Повторяя о двойном корне этого уравнения то, что было нами сказано о двойном корне уравнения (9), мы замечаем, что только простой корень этого уравнения

$$v = \left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 + 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2$$

может дать величины α , при которых точка M переходит через прямую, определяемую уравнением (10). А потому, изображая через $\alpha_1, -\alpha_1$ ве-

личины угла α , получаемые из уравнения (6) при этой величине v , и через x_1 , $-x_1$ соответствующие им величины координаты x точки M , мы заключаем, что в пределах от $x = -x_1$ до $x = x_1$ точка M будет находиться по одну сторону прямой (10).

Замечая, что при предельных величинах $x = -x_1$, $x = x_1$ точка M находится на линии (10), параллельной оси Ox , а при $x = 0$ (§ 2) на самой оси Ox , мы заключаем, что между $x = -x_1$, $x = x_1$ она переходит от одной из этих параллелей к другой, а так как в пределах $x = -x_1$, $x = x_1$ точка M , по выше доказанному, не может переходить через эти линии, то она должна оставаться между ними от $x = -x_1$ до $x = x_1$ и, следовательно, не должна удаляться от параллели, средней между осью Ox и линией (10) на половину взаимного расстояния этих параллелей, что составляет

$$\frac{2(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t^2}{(2\sin \varphi + 3t + 2\sin \varphi \cdot t^2 + t^2)^2}.$$

Из этого видно, что между $x = -x_1$, $x = +x_1$ предел уклонения точки M от выше упомянутой средней параллели (который мы будем изображать через E) имеет такую величину:

$$E = \pm \frac{2(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t^2}{(2\sin \varphi + 3t + 2\sin \varphi \cdot t^2 + t^2)^2}. \quad (11)$$

§ 5. Для определения предельных величин $\alpha = \pm \alpha_1$ и $x = \pm x_1$, при которых точка M переходит через линию (10), мы по сказанному в предыдущем параграфе полагаем в уравнении (6)

$$v = \left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2,$$

откуда получаем такое уравнение для определения $\alpha = \pm \alpha_1$:

$$\cos \alpha_1 = 1 - \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 - 1 \right]. \quad (12)$$

Переходя к определению соответствующей величины координаты $x = \pm x_1$, мы вносим величину $\cos \beta$ из уравнения (5) в выражение координаты x по (4), что дает

$$x = -a \left[\frac{\sin \beta - \frac{a}{2} \sin \alpha}{2 \cos \varphi - a(1 - \cos \alpha)} - \frac{c}{a} \right] \sin \alpha;$$

внося же в выражение

$$2 \cos \varphi - a(1 - \cos \alpha)$$

величину a по (1) и величину $1 - \cos \alpha$ по (6), находим

$$2 \cos \varphi - a(1 - \cos \alpha) = \frac{2 \cos \varphi}{T^2} [1 + (T^2 - 1)v].$$

Определяя величину

$$\sin \beta = \frac{a}{2} \sin \alpha$$

по уравнению (7), имеем

$$\sin \beta = \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{1 + (T^2 - 1)v}{T^2} \sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi}.$$

откуда выходит

$$\frac{\sin \beta = \frac{a}{2} \sin \alpha}{2 \cos \varphi - a(1 - \cos \alpha)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi}}{2 \cos \varphi},$$

вследствие чего выше найденное выражение координаты x нам дает

$$x = -a \left[\frac{1}{2 \cos \varphi} \sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi} - \frac{c}{a} \right] \sin \alpha. \quad (13)$$

Так определяется координата x точки M при различных величинах угла α , причем величина v получается из уравнения (6).

По этой формуле мы найдем предельную величину координаты $x = \pm x_1$, полагая в ней по выше показанному

$$\alpha = \pm \alpha_1, \quad v = \left(\frac{1 + 2 \sin \varphi \cdot T + T^2}{1 - 2 \sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2.$$

Так как при этой величине v мы находим

$$\sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\left(\frac{1 - 2 \sin \varphi \cdot T + T^2}{1 + 2 \sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 - \cos^2 \varphi},$$

и внося величину T , по (3) получаем

$$\frac{1 - 2 \sin \varphi \cdot T + T^2}{1 + 2 \sin \varphi \cdot T + T^2} = \frac{1 + 4 \sin \varphi \cdot t + 6t^2 + 4 \sin \varphi \cdot t^3 + t^4}{(1 - t^2)^2},$$

то будем иметь

$$\sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi} = \sqrt{\frac{(1 + 4 \sin \varphi \cdot t + 6t^2 + 4 \sin \varphi \cdot t^3 + t^4)^2}{(1 - t^2)^4} - \cos^2 \varphi}.$$

Раскрывая же здесь скобки и извлекая корень, находим

$$\sqrt{\frac{1}{v} - \cos^2 \varphi} = \frac{(1 + 6t^2 + t^4) \sin \varphi + 4t(1 + t^2)}{(1 - t^2)^2},$$

вследствие чего по выше показанной формуле предельная величина координаты x представится так:

$$x_1 = -a \left[\frac{(1 + 6t^2 + t^4) \sin \varphi + 4t(1 + t^2)}{2(1 - t^2)^2 \cos \varphi} - \frac{c}{a} \right] \sin \alpha_1.$$

Внося же сюда величины a и c по (1), (2), мы находим, что эта формула приводится к следующему:

$$x_1 = \frac{2 - T^2}{1 - T^2} \left[\frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t}{(1 - t^2)^2} \right] \sin \alpha_1,$$

где угол α_1 получается из уравнения (12).

Так найдутся предельные величины координаты $x = \pm x_1$, между которыми точка M не выходит из пространства, ограниченного двумя параллелями

$$y = 0, \quad y = \frac{4(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t^2}{(2\sin \varphi + 3t + 2\sin \varphi \cdot t^2 + t^2)^2},$$

и, следовательно, будет описывать кривую, очень близкую к прямой линии, если t — малая величина. При этом длина хода точки M будет определяться крайними ее положениями, а потому, изображая эту длину через l , мы по выше найденному выражению предельных величин $x = \pm x_1$ будем иметь

$$l = \frac{2(2 - T^2)}{1 - T^2} \left[\frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1} + \frac{2(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t}{(1 - t^2)^2} \right] \sin \alpha_1. \quad (14)$$

§ 6. В том случае, когда точка M должна иметь движение, очень близкое к прямолинейному при изменении угла α в тесных пределах, вспомогательная величина t и угол α_1 , определяющий предел изменений угла α , будут малы, вследствие чего все выведенные нами формулы разлагаются в ряды, удобные для вычислений.

Так, по формуле (3) мы находим, что

$$T = 2 \sin \varphi + 3t + \dots;$$

внося же эту величину T в формулы (1), (2), мы получаем такие ряды:

$$a = \frac{2\cos 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{6\sin 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos^3 3\varphi} t + \dots,$$

$$c = \frac{\tan 3\varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi}{\cos 3\varphi} + 3 \frac{\cos^2 \varphi \cdot (3\cos 2\varphi - \cos 4\varphi)}{\cos^3 3\varphi} t + \dots$$

Разлагая выражение E по формуле (11), находим

$$E = \pm \left(\frac{1}{2\sin^2 \varphi} - \frac{3 - 2\sin^2 \varphi}{2\sin^3 \varphi} t + \dots \right) t^2.$$

Внеся в выражения

$$\frac{(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)}, \quad \left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 - 1$$

выше найденное разложение величины T , замечаем, что эти выражения разлагаются в такие ряды:

$$\frac{(4\sin^2 \varphi - 1)^2}{4\sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \varphi} \left(1 + \frac{3t}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot (4\sin^2 \varphi - 1)} + \dots \right),$$

$$- 8\sin \varphi \cdot t + 16(3\sin^2 \varphi - 1)t^2 + \dots,$$

вследствие чего уравнение (12) нам дает такое разложение $1 - \cos \alpha_1$ в ряд:

$$-2 \frac{(4\sin^2 \varphi - 1)^2}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi} \left(t + \frac{48\sin^6 \varphi - 52\sin^4 \varphi + 18\sin^2 \varphi + 1}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot (4\sin^2 \varphi - 1)} t^2 + \dots \right).$$

Определяя $\sin \alpha_1$ по $1 - \cos \alpha_1$, получаем

$$\sin \alpha_1 = \sqrt{2(1 - \cos \alpha_1) - (1 - \cos \alpha_1)^2},$$

что по внесении выше найденного разложения $1 - \cos \alpha_1$ нам дает

$$\sin \alpha_1 = 2 \sqrt{-\frac{(4\sin^2 \varphi - 1)^2 t}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi} \left[1 + \frac{56\sin^6 \varphi - 50\sin^4 \varphi + 15\sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot (4\sin^2 \varphi - 1)} t + \dots \right]}.$$

Внося эту величину $\sin \alpha_1$ в формулу (14) и замечая, что выражения

$$\frac{2(2 - T^2)}{1 - T^2}, \quad \frac{T - \sin \varphi}{T^2 - 1}, \quad \frac{2(1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2)t}{(1 - t^2)^2}$$

разлагаются в ряды

$$\begin{aligned} & \frac{4\cos \varphi \cdot \cos 2\varphi}{\cos 3\varphi} + \frac{12\cos \varphi \cdot \sin 2\varphi}{\cos^3 3\varphi} t + \dots, \\ & \frac{\sin \varphi}{4\sin^2 \varphi - 1} + \frac{32\sin^4 \varphi - 16\sin^2 \varphi - 1}{(4\sin^2 \varphi - 1)^2} t + \dots \end{aligned}$$

мы по приведении получаем такое разложение длины хода точки M в рассматриваемом нами случае:

$$l = \frac{8\cos \varphi \cdot \sqrt{-\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi} \cdot t}{\cos 3\varphi} \left[1 - \frac{\cos^3 \varphi \cdot (8\sin^4 \varphi - 6\sin^2 \varphi - 1)}{\sin \varphi \cdot \cos 2\varphi \cdot \cos 3\varphi} t + \dots \right].$$

§ 7. В рассмотренном нами случае угол α оставался в пределах близких к нулю; теперь мы перейдем к случаю прямо противоположному, когда угол α принимает все возможные величины, переходя от $-\pi$ до $+\pi$. При этом линия AA_1 по отношению к линии CC_1 будет делать полный оборот и точка M будет описывать сомкнутую линию, которая вся будет помещаться между двумя параллелями, более или менее близкими между собою, смотря по близости величины t к нулю. Принимая $+\pi$ и $-\pi$ за предельные величины угла α , мы полагаем в наших формулах

$$\alpha_1 = \pi.$$

При этой величине α_1 уравнение (12) нам дает

$$-1 = 1 - \frac{2(1 - T^2)^2}{T^2(2 - T^2)} \left[\left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 - 1 \right],$$

откуда выходит

$$\left(\frac{1 + 2\sin \varphi \cdot t + t^2}{1 - 2\sin \varphi \cdot T + T^2} \right)^2 = \frac{1}{(T^2 - 1)^2}.$$

Из этого равенства мы выводим

$$\frac{1 - 2 \sin \varphi \cdot T + T^2}{1 + 2 \sin \varphi \cdot t + t^2} = \pm (T^2 - 1).$$

Внося же сюда величину T по (3), мы находим такое уравнение:

$$t^4 \mp 4 \sin \varphi \cdot t^3 \mp 6 t^2 \mp 4 \sin \varphi \cdot t \mp 1 = \\ = \pm \{[t^3 \mp 2 \sin \varphi \cdot t^2 \mp 3 t \mp 2 \sin \varphi]^2 - (1 - t^2)^2\}.$$

Решая это уравнение относительно $\sin \varphi$ при верхнем и нижнем знаке, находим

$$\sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 2) \pm \sqrt{2 - t^2}}{2(1 + t^2)}, \\ \sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 4) \pm t\sqrt{2t^2 - 1}}{2(1 + t^2)}.$$

Так как последняя формула не дает действительной величины при t малом (меньшем $\sqrt{\frac{1}{2}}$), мы ограничиваемся одною первою. Замечая же, что в этой формуле знак радикала может быть изменен переменою t на $-t$ и φ на $-\varphi$, мы ее возьмем с одним верхним знаком.

Имея таким образом

$$\sin \varphi = \frac{-t(t^2 + 2) + \sqrt{2 - t^2}}{2(1 + t^2)},$$

мы по формуле (3) вычисляем соответствующую величину T , которая приводится к следующему:

$$T = \frac{t + \sqrt{2 - t^2}}{1 - t^2}.$$

Внося же эти величины $\sin \varphi$ и T в формулы (1) и (2), находим

$$a = \frac{2 t \sqrt{2 - t^2}}{1 + t \sqrt{2 - t^2}} \cos \varphi, \\ c = -\frac{(2 - t^2)t}{2(1 + t^2)}.$$

Делая то же с формулою (11), мы получаем выражение величины E , предела уклонений точки M от прямой линии, выражение, которое приводится к следующему:

$$E = \pm \frac{t^2}{1 + t^2}. \quad (15)$$

Эти уклонения будут очень малы в том случае, когда величина t близка к нулю, и в этом случае вся кривая, описываемая точкою M , будет мало удаляться от прямой. Чтобы найти длину этой прямой,

которая с точностью, определяемой формулой (15), может быть заменена кривой, описываемой точкой M , мы замечаем, что концы этой прямой будут определяться наибольшим удалением точки M вправо и влево от оси Oy ; величину же этого удаления мы найдем, отыскивая наибольшую координату x точки M при всех возможных значениях α .

Так как в рассматриваемом нами случае имеем

$$T = \frac{t + \sqrt{2-t^2}}{1-t^2}$$

и при этой величине T находим

$$\frac{T^2(2-T^2)}{(T^2-1)^2} = -\frac{4t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2},$$

то уравнение (6), определяющее v , приводится к следующему:

$$v = 1 - \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2} (1 - \cos \alpha).$$

Внося же эту величину v в формулу (13), мы получаем выражение для x , которое может быть представлено так:

$$x = -\frac{a}{2} \left[\sqrt{\frac{\tan^2 \varphi + \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2} (1 - \cos \alpha)}{1 - \frac{2t\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2} (1 - \cos \alpha)}} - \frac{2c}{a} \right] \sin \alpha,$$

где a , c , φ имеют значения, показанные выше.

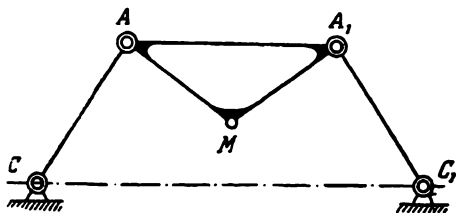
Определяя по этой формуле наибольшую величину координаты x и удваивая ее, мы найдем длину прямой, от которой будет незначительно уклоняться сомкнутая линия, описываемая точкою M при t малом.

О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ КАКИХ-ЛИБО ЭЛЕМЕНТОВ *

§ 1. В записке, читанной 5 декабря 1878 г., „О параллелограмах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси“, ** мы показали условия, при которых такие параллелограммы доставляют прямолинейное движение с возможно большей точностью.

Параллелограммы эти состоят из двух линий (фиг. 1) AC , A_1C_1 , вращающихся около неподвижных точек C , C_1 , и линии AA_1 , соединенной с подвижными концами этих линий; точка M , неизменно соединенная с линией AA_1 , доставляет желаемое движение.

В том случае, когда $AC = A_1C_1$, $AM = A_1M$, механизм этот становится симметрическим около оси, перпендикулярной к линии, проходящей через центры C , C_1 . Этот частный случай простейших параллелограммов и был предметом выше упомянутой записки. По формулам, данным в этой записке, получаются очень простые условия, необходимые и достаточные для того, чтобы такие механизмы давали прямолинейное



Фиг. 1

движение с возможно большей точностью на бесконечно малом ходе. Условия эти могут быть представлены так, если рассматривать параллелограмм в среднем его положении, когда углы A_1AC , AA_1C_1 равны:

1) Углы A_1AC , AA_1C_1 равняются $\frac{A + 2\pi n}{3}$, где A есть величина равных углов A_1AM , AA_1M , а n — какое-нибудь целое число.

2) Отношение длины вращающихся линий AC , A_1C_1 к сторонам $AM = A_1M$ треугольника AA_1M равняется

$$\frac{\cos^3 3\varphi}{\cos 2\varphi \cdot \cos^2 \varphi},$$

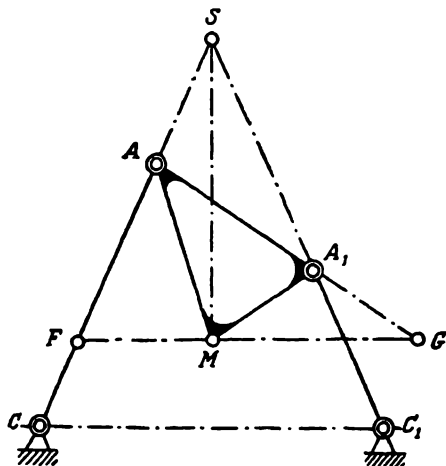
где φ есть величина углов A_1AC , AA_1C_1 .

* Читано 30 (18) дек. 1879 г. в засед. Физ.-Мат. Отд. Имп. Акад. Наук. Опубликовано в Приложении к XXXVI тому Зап. Имп. Акад. Наук, № 3, 1880; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том II, СПб., 1907, стр. 299—331. — *Ред.*

** Стр. 101—112 настоящего тома. — *Ред.*

В том случае, когда эти условия выполнены, точка M описывает кривую линию, которая имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою, параллельной линии, проходящей через центры C, C_1 , и это есть высший предел приближения к прямой линии бесконечно малых дуг, которые могут быть получены при движении рассматриваемого нами механизма.

Случай бесконечно малых движений, для которого общие формулы, данные нами относительно простейших симметрических параллелограмов, приводятся к выше показанным равенствам, заслуживает осо-



Фиг. 2

бенного внимания как предел, к которому приближаются эти параллелограмы при уменьшении длины рассматриваемого хода точки M и от которого вообще мало разнятся случаи, представляющиеся на практике, где обыкновенно имеют в виду сделать по возможности близкою к прямой линии только незначительную часть траектории точки M . Что касается перехода от бесконечно малого хода точки M к конечному, это, как мы показали в мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных

под названием параллелограмов^{а*}, можно всегда сделать при помощи функций *наименее уклоняющихся от нуля*.

§ 2. Мы теперь займемся рассмотрением тех же параллелограмов в общем их виде, когда (фиг. 2) вращающиеся линии AC, A_1C_1 и треугольник AA_1M — какие-нибудь. В этом общем виде, как будет показано, высший предел приближения к прямолинейному движению остается прежний, т. е. кривые, описываемые точкой M , не могут иметь соприкосновения с прямою линиею порядка выше *пятого*. Условия, при которых такое соприкосновение имеет место, как мы увидим, в общем случае приводятся к равенствам, подобным тем, которые получены были нами для параллелограмов симметрических, а именно:

1) Углы A_1AC, AA_1C_1 , при которых точка M приходит на линию FG , имеющую соприкосновение 5-го порядка с кривою, ею описываемую, по углам треугольника AA_1M определяются равенствами

$$A_1AC = \frac{A_1AM + 2\pi}{3}, \quad AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2\pi_1}{3},$$

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51 и 474—485; стр. 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

где n, n_1 — какие-нибудь целые числа, равные или не равные между собою.

2) Отношения линий AC, A_1C_1 к сторонам AM, A_1M треугольника AA_1M определяются равенствами

$$\frac{AC}{AM} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)}, \quad \frac{A_1C_1}{A_1M} = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)},$$

где

$$\varphi = A_1AC = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3}, \quad \varphi_1 = AA_1C_1 = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

а γ есть угол составляемый линиею AA_1 и касательною FG при этих величинах углов A_1AC, AA_1C_1 .

Что касается определения направления линии FG , касательной к кривой, описываемой точкою M , то по свойству кривых, описываемых движением в плоскости точек, неизменно связанных между собою, линия FG должна быть перпендикулярна к линии MS , проведенной из точки M в точку пересечения линий AC, A_1C_1 , чем вполне и определяется направление этой линии.

Чтобы обнять все случаи, когда данный треугольник AA_1M , двигаясь вершинами A, A_1 по кругам, вершиною M описывает кривую, имеющую с прямою линиею соприкосновение пятого порядка, числам n, n_1 должны быть даны такие величины:

$$0, 1, 2,$$

причем, по выше показанным равенствам, получается 9 систем для величины углов A_1AC, AA_1C_1 .

Определяя для каждой из 9 систем углов A_1AC, AA_1C_1 направление касательной FG , мы находим такие две величины угла γ :

$$\gamma = AGM, \quad \gamma = AGM + \pi,$$

доставляющие для каждой системы углов A_1AC, AA_1C_1 две системы линий AC, A_1C_1 . Таким образом получится вообще 18 решений рассматриваемой задачи, когда принимается за данное треугольник AA_1M .

§ 3. Определяя уравнение кривой, описываемой точкою M при движении точек A, A_1 по кругам, мы замечаем, что условия, при которых эта кривая имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою линиею, представляются некоторой системой четырех уравнений степеней более или менее высоких. По сложности этих уравнений трудно было ожидать, чтобы они сводились на равенства столь простые, как выше показанные. Мы этого легко достигаем, замечая, что при бесконечно малых перемещениях треугольника AA_1M в рассматриваемом нами вопросе вершина M , с точностью до бесконечно малых порядка 6-го, будет двигаться по прямой FG . А потому с такою же степенью точности рассматриваемое нами движение треугольника AA_1M может быть

Чтобы найти соотношение между углами α , β , мы проектируем ломаную линию CAM на ось y и, замечая, что эта проекция равна $CF = b$, выводим такое равенство:

$$b = r \sin \beta - m \sin \alpha,$$

которое нам дает

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \frac{m \sin \alpha + b}{r}, \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Внося эти величины $\sin \beta$, $\cos \beta$ в выше найденные выражения координат точки A_1 , получаем

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha), \\ y &= m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) + b. \end{aligned}$$

Изображая через α_0 величину переменного угла α , вблизи которой, согласно с сказанным в предыдущем параграфе, изменения расстояния точки A_1 от C_1 остаются бесконечно малыми порядка не ниже 6-го, и изображая через r_1 величину этого расстояния при $\alpha = \alpha_0$, мы замечаем, что выражение расстояния этих точек

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

при разложении его по восходящим степеням разности $\sin \alpha - \sin \alpha_0$ даст такое равенство:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = r_1 + K (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots \quad (2)$$

Возводя это равенство в квадрат и ограничиваясь шестой степенью $\sin \alpha - \sin \alpha_0$, получаем

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 + 2r_1K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots$$

Внося же сюда выше показанные величины координат точки A_1 , находим равенство

$$\begin{aligned} & [\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha) - x_1]^2 + \\ & + [m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) + b - y_1]^2 = \\ & = r_1^2 + 2r_1K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots \end{aligned}$$

откуда по раскрытии скобок и по разделении всего на $2rx_1$ получается такое уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{a}{x_1} \sin A \cdot \sin \alpha - \frac{a \cos A}{x_1} \cos \alpha \right] \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2} - \\ & - \left[\frac{am \sin A}{rx_1} \sin \alpha + \frac{a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{rx_1} \cos \alpha + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{am \cos A}{rx_1} \sin^2 \alpha - \frac{a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{rx_1} \sin \alpha + \\ + \frac{r_1^2 - r^2 - x_1^2 - y_1(y_1 - 2b) - a^2}{2rx_1} = -\frac{r_1}{rx_1} K(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots \quad (3)$$

§ 5. Этому уравнению мы дадим вид более удобный для нашей цели, полагая

$$\sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d},$$

где

$$d = \sin \alpha_0. \quad (4)$$

При этой величине $\sin \alpha$ находим

$$\sin \alpha - \sin \alpha_0 = \frac{dz + 1}{z + d} - d = \frac{1 - d^2}{z + d} = \frac{1 - d^2}{z} - \frac{d(1 - d^2)}{z^2} + \dots$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{dz + 1}{z + d}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{z + d} \sqrt{z^2 - 1}, \\ \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r}\right)^2} = \frac{\sqrt{r^2(z + d)^2 - [(md + b)z + (m + db)]^2}}{r(z + d)} = \\ = \frac{\sqrt{r^2 - (md + b)^2}}{r(z + d)} \sqrt{\left(z + \frac{rd - m - db}{r - md - b}\right) \left(z + \frac{rd + m + db}{r + md + b}\right)} = \\ = \frac{\sqrt{r^2 - (md + b)^2}}{r(z + d)} \sqrt{(z - g)^2 - h^2}, \quad (5)$$

где положено

$$\left(z + \frac{rd - m - db}{r - md - b}\right) \left(z + \frac{rd + m + db}{r + md + b}\right) = \\ = (z - g - h)(z - g + h) = (z - g)^2 - h^2.$$

Определяя на основании этих формул выражения различных членов уравнения (3) при замене в нем $\sin \alpha$ через $\frac{dz + 1}{z + d}$ и деля все уравнение на коэффициент, стоящий при

$$z\sqrt{(z - g)^2 - h^2},$$

мы замечаем, что это уравнение приводится к такому виду:

$$(z + \lambda + \mu\sqrt{z^2 - 1})\sqrt{(z - g)^2 - h^2} - (P_0 + P_1z)\sqrt{z^2 - 1} + \\ + P_2 + P_3z + P_4z^2 = \frac{L}{z^4} + \dots \quad (6)$$

На основании этого равенства, по которому выражение

$$(P_0 + P_1z)\sqrt{z^2 - 1} - P_2 - P_3z - P_4z^2$$

должно давать величину функции

$$(z + \lambda + \mu\sqrt{z^2 - 1})\sqrt{(z - g)^2 - h^2}$$

с точностью до $\frac{1}{z^1}$, легко найти величину коэффициентов $P_0, P_1, P_2,$

P_3, P_4 по величинам λ, μ, g и h и одно уравнение, которому должны удовлетворять последние.* Чтобы найти уравнения, определяющие коэффициенты

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4,$$

мы разлагаем первую часть уравнения (6) по нисходящим степеням переменной z и приравниваем нулю члены с $z^2, z^1, z_0, \frac{1}{z}, \frac{1}{z^2}$. Это дает нам 5 уравнений, линейных относительно величин P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 и вполне их определяющих. Решая эти уравнения, находим

$$\begin{aligned} P_0 &= gh^2 + h^2 \lambda + (h^2 - 1) g \mu, \\ P_1 &= 4 h^2 g^2 + h^4 + 4 h^2 g \lambda + [4 h^2 g^2 + (h^2 - 1)^2] \mu, \\ P_2 &= -\frac{1}{2} (4 g^2 + h^2 - 1) h^2 - (2 h^2 - 1) g \lambda - \frac{1}{2} (4 g^2 + h^2 - 3) h^2 \mu, \\ P_3 &= (h^2 + 1) g + (h^2 - 1) \lambda + h^2 g \mu, \\ P_4 &= 4 h^2 g^2 + h^4 - 1 + 4 g h^2 \lambda + (4 g^2 + h^2 - 2) h^2 \mu. \end{aligned}$$

Внося же эти величины

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$$

в формулу

$$\begin{aligned} & (z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2} - \\ & - (P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1} + P_2 + P_3 z + P_4 z^2 \end{aligned}$$

и разлагая ее по нисходящим степеням z , находим ряд

$$\begin{aligned} & -\frac{h^2}{8} [(4 g^2 + 3 h^2 - 1) g + (4 g^2 + h^2 - 1) \lambda + (4 g^2 + 3 h^2 - 3) g \mu] \frac{1}{z^1} - \\ & -\frac{h^2}{16} [8 g^4 + 4 (3 h^2 - 1) g^2 + h^4 - h^2 + (8 g^2 + 6 h^2 - 4) g \lambda] \frac{1}{z^2} - \\ & -\frac{h^2}{16} [(8 g^4 + 4 (3 h^2 - 2) g^2 + (h^2 - 1)^2) \mu] \frac{1}{z^3} - \\ & - \dots \dots \dots \end{aligned}$$

что по сличении с уравнением (6) нам дает такие равенства:

$$\left. \begin{aligned} (4 g^2 + 3 h^2 - 1) g + (4 g^2 + h^2 - 1) \lambda + (4 g^2 + 3 h^2 - 3) g \mu &= 0, \\ -\frac{h^2}{16} [8 g^4 + 4 (3 h^2 - 1) g^2 + h^4 - h^2 + (8 g^2 + 6 h^2 - 4) g \lambda] - \\ -\frac{h^2}{16} [(8 g^4 + 4 (3 h^2 - 2) g^2 + (h^2 - 1)^2) \mu] &= L. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

* Все это непосредственно получается при помощи разложения в непрерывную дробь, как мы показали в записке под заглавием: „О приближенных выражениях, линейных относительно двух полиномов“ (том III настоящего Собрания сочинений, стр. 89—107.—*Ред.*).

Первое равенство представляет уравнение, которому количества λ, μ, g, h, d должны удовлетворять; второе нам послужит, как увидим ниже, для определения величины уклонений от прямого пути вершины M треугольника AA_1M , когда вершины A, A_1 движутся по кругам.

§ 6. Для перехода от величин

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4,$$

сейчас нами найденных, к величинам, входящим в наш вопрос, мы замечаем, что по выше показанному формула (6) должна приводиться к формуле (3) при внесении в нее величины z из уравнения

$$\sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d}.$$

Находя по этому уравнению, что

$$z = \frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d},$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d^2} + \frac{d(\sin \alpha - d)^2}{(1 - d^2)^2} + \dots,$$

$$\sqrt{z^2 - 1} = \frac{\sqrt{(1 - d \sin \alpha)^2 - (\sin \alpha - d)^2}}{\sin \alpha - d} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{\sin \alpha - d} \cos \alpha,$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(z - g)^2 - h^2} = \\ &= \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)} \right)^2}}{\sin \alpha - d}, \end{aligned}$$

мы замечаем из сравнения последнего равенства с равенством (5), что

$$\left. \begin{aligned} \frac{m}{r} &= \frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)}, \\ \frac{b}{r} &= \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\sqrt{(z - g)^2 - h^2} = \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2}}{\sin \alpha - d}.$$

Вследствие этих равенств формула (6) по внесении в нее

$$\frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d}$$

вместо z приводится к следующему:

$$\begin{aligned} & \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{(\lambda - d) \sin \alpha + 1 - d\lambda + \sqrt{1 - d^2} \mu \cos \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2} - \\ & - \frac{P_1 - P_0 d + (P_0 - P_1 d) \sin \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} \sqrt{1 - d^2} \cos \alpha + \end{aligned}$$

$$+ \frac{(P_2 - P_3 d + P_4 d^2) \sin^2 \alpha - (2 P_2 d - P_3 (1 + d^2) + 2 P_4 d) \sin \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} +$$

$$+ \frac{P_2 d^2 - P_3 d + P_4}{(\sin \alpha - d)^3} = \frac{L (\sin \alpha - d)^4}{(1 - d^2)^4} + \dots$$

Разделяя это уравнение на

$$\frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{1 - d\lambda}{(\sin \alpha - d)^2}$$

и сличая его затем почленно с формулою (3), находим такие равенства:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{a}{x_1} \sin A &= \frac{\lambda - d}{1 - d\lambda}, \\ -\frac{a}{x_1} \cos A &= \frac{\mu \sqrt{1 - d^2}}{1 - d\lambda}, \\ \frac{am \sin A}{rx_1} &= \frac{P_0 - P_1 d}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}, \\ \frac{a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{rx_1} &= \frac{P_1 - P_0 d}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}, \\ \frac{am \cos A}{rx_1} &= \frac{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}, \\ \frac{a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{rx_1} &= \\ &= \frac{2 P_2 d - P_3 (1 + d^2) + 2 P_4 d^2}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h(1 - d^2)}, \\ \frac{r_1^2 - r^2 - x_1^2 - y_1(y_1 - 2b) - a^2}{2rx_1} &= \frac{P_2 d^2 - P_3 d + P_4}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h(1 - d^2)}, \\ \frac{r_1 K}{rx_1} &= -\frac{L \sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{(1 - d^2)^2 (1 - d\lambda) h}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$(10)$$

Разделяя 1-ое из этих уравнений на 2-ое, а 3-ье на 5-ое и на 1-ое, находим такие равенства:

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\lambda - d}{\mu \sqrt{1 - d^2}}, \\ \tan A &= \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}, \\ \frac{m}{r} &= -\frac{P_0 - P_1 d}{\lambda - d} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Исключая из первых двух равенств $\tan A$ и внося величину $\frac{m}{r}$

по (8) в третье, получаем для уравнения

$$\frac{\lambda - d}{\mu \sqrt{1 - d^2}} = \frac{P_0 - P_1 d}{P_2 - P_3 d + P_4 d^2}, \quad (12)$$

$$(\lambda - d) \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} = P_1 d - P_0, \quad (13)$$

связывающие между собою пять величин λ, μ, g, h, d . Эти два уравнения вместе с уравнением (7) дают возможность определить три из них по остальным двум.

Так как выражения

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$$

представляют линейные функции количеств λ, μ , то уравнение (13), так же как и уравнение (7), будут первой степени относительно этих величин. Определяя из этих уравнений величины λ, μ и внося их в равенство (12), мы получим уравнение, заключающее только три количества g, h, d .

§ 7. Равенство (13), по внесении в него выражений P_0, P_1 , нам дает такое уравнение:

$$\begin{aligned} & gh^2 - h^2(4g^2 + h^2)d - d \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} + \\ & + \left[h^2 - 4gdh^2 + \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} \right] \lambda + \\ & + [(h^2 - 1)g - ((h^2 - 1)^2 + 4g^2h^2)d] \mu = 0. \end{aligned}$$

Решая относительно $\lambda - d$ и μ это уравнение вместе с уравнением (7), находим, что

$$\lambda - d = \frac{N}{D}, \quad \mu = \frac{N_1}{D}, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} N &= (8g^2 - 2(h^2 - 1)^2)gd + (4g^2 + h^2 - 1)g^2 - \\ & - [4(h^2 + 1)g^2 - (h^2 - 1)^2](h^2 - 1)d^2, \\ N_1 &= \left[-h^4(4g^2 - h^2 + 1) + (4g^2 + h^2 - 1) \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} \right] d + \\ & + \left[2h^4 + (4g^2 + 3h^2 - 1) \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} \right] g, \\ D &= [4(h^2 + 1)g^2 - (h^2 - 1)^2](h^2 - 1)d - \\ & - \left[4g^2 + (2h^2 + 1)(h^2 - 1) + (4g^2 + 3h^2 - 3) \sqrt{\frac{h^2 - (g+d)^2}{1-d^2}} \right] g. \end{aligned}$$

Внося эти величины $\lambda - d, \mu$ в уравнение (12) и полагая

$$\frac{g+d}{h} = c, \quad g = ch - d, \quad (15)$$

находим, что оно приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} & [(3c - 4c^3) \sqrt{1-d^2} + (1-4c^2)d \sqrt{1-c^2}] h^4 + \\ & + 8ch^3 \sqrt{1-c^2} - 6(d \sqrt{1-c^2} - c \sqrt{1-d^2}) h^2 - 8dh \sqrt{1-d^2} - \\ & - (1-4d^2)c \sqrt{1-d^2} - (3d-4d^3) \sqrt{1-c^2} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение значительно упрощается внесением в него значений $d = \sin \alpha_0$ и c , которое, как нетрудно показать, равняется $\sin \beta$, где β_0 есть величина переменного угла β , соответствующая $\alpha = \alpha_0$.

В самом деле, по формуле (1), полагая в ней

$$\alpha = \alpha_0, \quad \beta = \beta_0, \quad \sin \alpha_0 = d,$$

находим

$$\sin \beta_0 = \frac{md + b}{r},$$

что по внесении величин $\frac{m}{r}, \frac{b}{r}$, определяемых формулами (8), дает

$$\sin \beta_0 = \frac{g + d}{h} = c.$$

Вычисляя же на основании равенств

$$d = \sin \alpha_0, \quad c = \sin \beta_0$$

величину коэффициентов при различных степенях h в рассматриваемом нами уравнении, находим

$$(3c - 4c^3)\sqrt{1-d^2} + (1-4c^2)\sqrt{1-c^2}d =$$

$$= \sin 3\beta_0 \cdot \cos \alpha_0 + \cos 3\beta_0 \cdot \sin \alpha_0 = \sin(\alpha_0 + 3\beta_0),$$

$$8c\sqrt{1-c^2} = 4\sin 2\beta_0, \quad 8d\sqrt{1-d^2} = 4\sin 2\alpha_0,$$

$$6(d\sqrt{1-c^2} - c\sqrt{1-d^2}) = 6(\sin \alpha_0 \cdot \cos \beta_0 - \cos \alpha_0 \cdot \sin \beta_0) = 6\sin(\alpha_0 - \beta_0),$$

$$(1-4d^2)c\sqrt{1-d^2} + (3d-4d^3)\sqrt{1-c^2} = \sin(3\alpha_0 + \beta_0),$$

вследствие чего оно приводится к следующему:

$$h^4 \sin(\alpha_0 + 3\beta_0) + 4h^3 \sin 2\beta_0 - 6h^2 \sin(\alpha_0 - \beta_0) - \\ - 4h \sin 2\alpha_0 - \sin(3\alpha_0 + \beta_0) = 0.$$

Решая это уравнение относительно h , мы находим, что оно разлагается на такие два уравнения второй степени:

$$h^2 \sin(\alpha_0 + 3\beta_0) + 2h [\sin 2\beta_0 - \sin(\alpha_0 + \beta_0)] = \\ = \sin(\alpha_0 - \beta_0) + \sin 2(\alpha_0 + \beta_0),$$

$$h^2 \sin(\alpha_0 + 3\beta_0) + 2h [\sin 2\beta_0 + \sin(\alpha_0 + \beta_0)] = \\ = \sin(\alpha_0 - \beta_0) - \sin 2(\alpha_0 + \beta_0),$$

которые по разделении на

$$2 \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}, \quad 2 \sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}$$

приводятся к следующим:

$$h^2 \sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} + 2h \sin \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} = \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{2},$$

$$h^2 \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} + 2h \cos \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2} = -\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{2}.$$

Решая же эти квадратные уравнения, мы находим такие четыре величины для h :

$$\begin{aligned} h &= \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}, & h &= -\frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - \pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3\pi}{4}}, \\ h &= \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - 2\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 6\pi}{4}}, & h &= -\frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - 3\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 9\pi}{4}}. \end{aligned}$$

Сравнивая между собою эти четыре величины h , мы замечаем, что они получаются одна из другой уменьшением угла β_0 на π и переменою знака с $+$ на $-$, с $-$ на $+$. Но это, как видно из чертежа (фиг. 3), где

$$ACx = \beta_0, \quad AC = r, \quad AM = m$$

и где по (8)

$$\frac{m}{r} = h \frac{1 - \left(\frac{g+d}{h}\right)^2}{1 - d^2},$$

соответствует перемене направления линии AC на π вместе с переменою той стороны, которая принимается за положительную при определении длины линии AC . Вследствие этого формулы, получаемые при выше показанных четырех величинах h , будут отличаться между собою только тем, что в них вместо β_0 будет входить или $\beta_0 - \pi$, или $\beta_0 - 2\pi$, или $\beta_0 - 3\pi$, откуда видно, что мы обнимаем все возможные случаи, если в формулах, полученных в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}, \quad (16)$$

поставим $\beta_0 - k\pi$ вместо β_0 , где k означает целое число, причем величина h будет определяться уравнением

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

§ 8. Ограничиваясь сначала по выше сказанному предположением

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}$$

и внося эту величину h в формулы предыдущего параграфа, определяющие $\lambda - d$ и μ , по которым

$$\lambda - d = \frac{N}{D}, \quad \mu = \frac{N_1}{D},$$

находим, полагая для сокращения

$$\frac{\sin^2(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3}{2}(\alpha_0 - \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} \cdot \cos \alpha_0} = F,$$

что

$$N = \sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0 \cdot F,$$

$$N_1 = \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot F,$$

$$D = \left[\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \right] F,$$

откуда получаются такие величины для $\lambda - d$ и μ :

$$\left. \begin{aligned} \lambda - d &= \frac{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \cos \alpha_0}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}, \\ \mu &= \frac{\cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Внося же эти величины $\lambda - d$, μ в формулу (11), где по нашему знакоположению $\sqrt{1 - d^2} = \cos \alpha_0$, находим, что она дает

$$\tan A = \tan \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0).$$

Это равенство получено нами в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}.$$

Чтобы перейти к общему случаю, когда

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}, \quad (18)$$

мы, по замеченному в предыдущем параграфе, заменяем в этом равенстве β_0 через $\beta_0 - k\pi$, отчего получается такая величина для $\tan A$:

$$\tan A = \tan \frac{3}{4}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi).$$

Эта формула показывает, что разность углов A и $\frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)$ должна равняться величине π , взятой целое число раз, что предполагает такое равенство:

$$A = \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) + (n - 1)\pi,$$

где n , подобно k , целое число.

Но из чертежа (фиг. 3), где по нашему знакоположению

$$A_1AM = A, \quad AMF = \alpha_0, \quad ACx = \beta_0,$$

видно, что

$$CAM = \pi - AMF - ACx = \pi - \alpha_0 - \beta_0,$$

$$CAA_1 = CAM + A_1AM = \pi - \alpha_0 - \beta_0 + A.$$

Определяя по последнему равенству величину суммы $\alpha_0 + \beta_0$ и внося ее в выше найденное выражение угла A , получаем такое соотношение между углами CAA_1 и A :

$$A = 3CAA_1 - (2n - 3k + 1)\pi. \quad (19)$$

Это равенство показывает, что угол A треугольника AA_1M и утроенный угол CAA_1 , определяющий наклонение вращающейся линии AC к линии AA_1 при $\alpha = \alpha_0$, могут разниться между собою только величиною π , взятой несколько раз. Чтобы сделать наши формулы однообразнее, мы ограничимся предположением, что разность углов $3CAA_1 - A$ заключает в себе π четное число раз.

Этого можно всегда достигнуть, увеличивая угол CAA_1 на 180° , или, что одно и то же, меняя направление линии AC в прямо противоположное. В этом предположении, как видно из предыдущего равенства, число k должно быть нечетное.

Полагая

$$k = 2p + 1, \quad CAA_1 = \varphi,$$

мы по этому равенству будем иметь

$$A = 3\varphi - 2(n - 3p - 1)\pi,$$

причем по (18) величина h будет определяться равенством

$$h = - \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p + 1)\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p + 1)\pi}{4}},$$

которое может быть представлено так:

$$h = \frac{\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p - 1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p - 1)\pi}{4}}.$$

Замечая же, что по (8)

$$\frac{m}{r} = h \frac{1 - \left(\frac{g+d}{h}\right)^2}{1 - d^2},$$

где, как видели,

$$\frac{g+d}{h} = \sin \beta_0, \quad d = \sin \alpha_0,$$

мы находим, что r и m связаны между собою уравнением

$$\frac{m}{r} = \frac{\cos \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - (2p-1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3(2p-1)\pi}{4}} \frac{\cos^3 \beta_0}{\cos^3 \alpha_0}.$$

Выведенные нами формулы относительно углов $A = A_1 AM$, $\varphi = A_1 AC$ и линий $r = AC$, $m = AM$ получены в предположении, что при бесконечно малом движении треугольника AA_1M вершиною M по прямой FG , а вершиною A по кругу C , расстояние вершины A_1 от C_1 с точностью до величин 6-го порядка остается равным $r_1 = A_1 C_1$.

По замеченному в § 3 это вообще должно иметь место, когда при движении вершин A, A_1 по кругам, описанным около центров C, C_1 , вершина M с точностью до 6-го порядка движется по прямой FG , или, что одно и то же, описывает дугу, имеющую соприкосновение 5-го порядка с этою линиею. В этом случае вершина A_1 находится в таких же условиях, как и A , а потому углы и линии при этой вершине должны также удовлетворять уравнениям, выведенным нами относительно углов и линий при вершине A .

На основании этого, полагая (фиг. 4)

$$A_1 E_2 E_1 = \beta_1, \quad AA_1 M = A_1, \quad AA_1 C_1 = \varphi_1, \quad A_1 M = m_1,$$

и заменяя в формулах, выше найденных,

$$\alpha_0, \beta_0, A, \varphi, r, m, n, p$$

через

$$\alpha_1, \beta_1, A_1, \varphi_1, r_1, m_1, n_1, p_1,$$

получаем такие равенства:

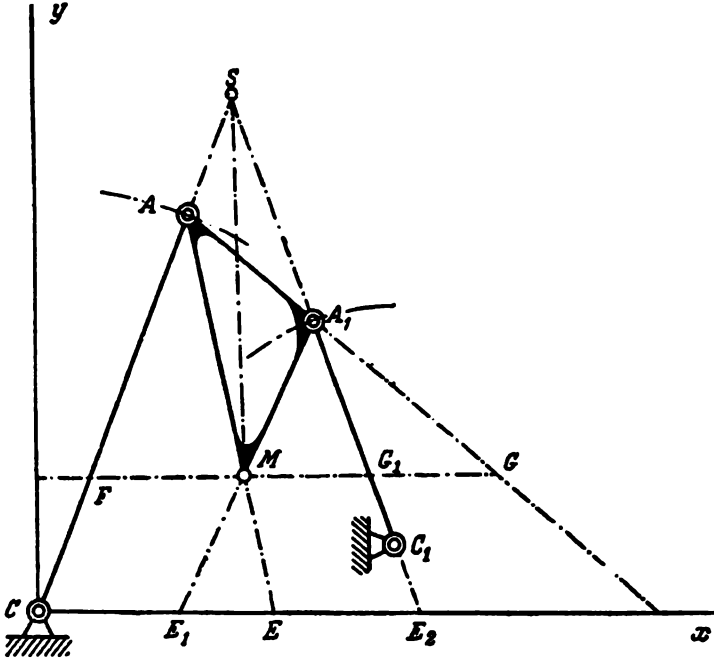
$$A_1 = 3\varphi_1 - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi,$$

$$\frac{m_1}{r_1} = \frac{\cos \frac{3\alpha_1 + \beta_1 - (2p_1 - 1)\pi}{4}}{\cos \frac{\alpha_1 + 3\beta_1 - 3(2p_1 - 1)\pi}{4}} \frac{\cos^3 \beta_1}{\cos^3 \alpha_1}.$$

§ 9. Выведенные нами равенства относительно углов треугольника AA_1M вполне определяют их по углам $\varphi = A_1 AC$, $\varphi_1 = AA_1 C_1$, несмотря на неизвестные числа n, p, n_1, p_1 , в них заключающиеся, так как эти числа входят с множителем 2π . Вследствие этого, если даны углы φ, φ_1 и сторона $AA_1 = a$ треугольника AA_1M , мы при помощи

этих формул, найдя углы A, A_1 , вполне определим его. Зная же этот треугольник и положение его относительно линий AC, A_1C_1 , определяемое данными углами $\varphi = A_1AC, \varphi_1 = AA_1C_1$, мы легко найдем направление линии FG .

Так как в рассматриваемом нами движении треугольника AA_1M линии CA, C_1A_1 представляют нормали к дугам, описываемым вершинами его A, A_1 , линия MS , проведенная из точки M в точку пересечения



Фиг. 4

чения линий AC, A_1C_1 , должна быть перпендикуляром к линии FG , по которой вершина M движется. Определив таким образом направление линии FG , и замечая, что в нашей системе координат ось x параллельна этой линии, мы легко находим углы

$$\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1,$$

составляемые линиями AM, AC, A_1M, A_1C_1 с осью x при том положении треугольника AA_1M , когда вершина его M находится на линии FG . Изображая угол, составляемый при этом линией AA_1 с FG , через γ , мы выводим из треугольников AGF, AGM, A_1GM, A_1GG_1 такие равенства:

$$\begin{aligned} AMF &= MAG + AGM = A + \gamma, \\ AFM &= \pi - FAG - AGM = \pi - \varphi - \gamma, \\ A_1MG &= AA_1M - AGM = A_1 - \gamma, \\ A_1G_1M &= \pi - C_1A_1A + AGM = \pi - \varphi_1 + \gamma, \end{aligned}$$

откуда по равенству углов

$$\begin{aligned} AMF = AEC &= \alpha_0, & AFM = ACE &= \beta_0, \\ A_1 MG = A_1 E_1 x &= \alpha_1, & A_1 E_1 C = A_1 G_1 M &= \beta_1 \end{aligned}$$

выходит

$$\alpha_0 = A + \gamma, \quad \beta_0 = \pi - \varphi - \gamma, \quad \alpha_1 = A_1 - \gamma, \quad \beta_1 = \pi - \varphi_1 + \gamma,$$

что по внесении выше найденных величин углов A, A_1 нам дает

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi, & \beta_0 &= \pi - \varphi - \gamma, \\ \alpha_1 &= 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi, & \beta_1 &= \pi - \varphi_1 + \gamma. \end{aligned}$$

Внося же эти величины $\alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1$ в формулы (§ 8), определяющие отношения $\frac{m}{r}, \frac{m_1}{r_1}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{r}{m} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma - (3n - 8p)\pi}{2} \right)} \frac{\cos^3(3\varphi + \gamma)}{\cos^3(\varphi + \gamma)}, \\ \frac{r_1}{m_1} &= \frac{\cos \frac{\gamma - n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + (3n_1 - 8p_1)\pi}{2} \right)} \frac{\cos^3(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^3(\varphi_1 - \gamma)}. \end{aligned}$$

А так как

$$\begin{aligned} \cos \frac{\gamma - n_1\pi}{2} &= \cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \cdot \cos n_1\pi, \\ \cos \left(2\varphi + \frac{\gamma - (3n - 8p)\pi}{2} \right) &= \cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right), \\ \cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + (3n_1 - 8p_1)\pi}{2} \right) &= \cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right) \cos n_1\pi, \end{aligned}$$

эти формулы приводятся к следующему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{m} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^3(3\varphi + \gamma)}{\cos^3(\varphi + \gamma)}, \\ \frac{r_1}{m_1} &= \frac{\cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^3(3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^3(\varphi_1 - \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

§ 10. Для определения величины угла γ , входящего в эти формулы, мы замечаем, что по известному свойству линий, проведенных из одной точки к углам треугольника, как это имеет место относи-

тельно линий SA , SM , SA_1 (фиг. 4), должно существовать такое равенство:

$$\frac{\sin AMS}{\sin A_1 MS} = \frac{\sin MAS}{\sin A_1 AS} \cdot \frac{\sin AA_1 S}{\sin MA_1 S},$$

где, как видно из чертежа,

$$AMS = FMS - FMA = \frac{\pi}{2} - \alpha_0,$$

$$A_1 MS = GMS - A_1 MG = \frac{\pi}{2} - \alpha_1,$$

$$MAS = \pi - CAA_1 + A_1 AM = \pi - \varphi + A,$$

$$A_1 AS = \pi - CAA_1 = \pi - \varphi,$$

$$AA_1 S = \pi - C_1 A_1 A = \pi - \varphi_1,$$

$$MA_1 S = \pi - C_1 A_1 A + AA_1 M = \pi - \varphi_1 + A_1,$$

вследствие чего это равенство нам дает

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\sin (A - \varphi)}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin (A_1 - \varphi_1)}.$$

Внося же сюда выше найденные величины углов A , A_1 , получаем

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi_1}{\sin 2\varphi_1},$$

что по замене $\sin 2\varphi$, $\sin 2\varphi_1$ через $2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi$, $2 \sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1$ приводится к такой простой формуле:

$$\frac{\cos \alpha_0}{\cos \alpha_1} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1}. \quad (21)$$

Замечая, что по выше показанному (§ 9)

$$\alpha_0 = 3\varphi + \gamma - 2(n - 3p - 1)\pi,$$

$$\alpha_1 = 3\varphi_1 - \gamma - 2(n_1 - 3p_1 - 1)\pi,$$

мы отсюда выводим уравнение

$$\frac{\cos (3\varphi + \gamma)}{\cos (3\varphi_1 - \gamma)} = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_1},$$

определяющее угол γ по углам φ , φ_1 . Этому уравнению мы дадим вид более удобный для вычисления угла γ , представляя его так:

$$\frac{\cos (3\varphi + \gamma) - \cos (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos (3\varphi + \gamma) + \cos (3\varphi_1 - \gamma)} = \frac{\cos \varphi - \cos \varphi_1}{\cos \varphi + \cos \varphi_1},$$

что приводится к равенству

$$\frac{\operatorname{tang} \left[\frac{3}{2} (\varphi - \varphi_1) + \gamma \right]}{\operatorname{cotang} \frac{3}{2} (\varphi + \varphi_1)} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}}{\operatorname{cotang} \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}. \quad (22)$$

§ 11. Определяя по уравнению (22) угол γ , мы найдем для него пределах 0 и 2π две величины, разнящиеся между собою на π . Нетрудно показать, что, давая в наших формулах углу γ эти две величины и принимая числа n, n_1 за нули, мы обнимем все решения нашей задачи. Для этого мы сначала покажем, что эти два числа не могут разниться между собою числом нечетным. Это можно заметить из выражения величины

$$\frac{x_1}{a},$$

получаемого из выше найденных формул. Так как в нашей системе координат начало находится в точке C и ось x параллельна линии FG , то величина x_1 , представляющая абсциссу точки C_1 , будет равняться проекции расстояния точек C, C_1 на линию FG . В нашем вопросе эта проекция, так же как и линия $a = AA_1$, имеет одинаковое значение по отношению вершин A, A_1 треугольника AA_1M ; а потому формула, определяющая $\frac{x_1}{a}$, не должна менять величины при перемене

$$\varphi, \alpha_0, n, \gamma$$

на

$$\varphi_1, \alpha_1, n_1, -\gamma,$$

имеющие одинаковые значения по отношению вершин A, A_1 треугольника AA_1M ; а это, как мы увидим, предполагает, что $n - n_1$ есть число четное.

В самом деле, по формуле (9) находим

$$\frac{x_1}{a \sin A} = -\frac{1-d\lambda}{\lambda-d} = d - \frac{1-d^2}{\lambda-d}.$$

Так как по нашему закоположению

$$d = \sin \alpha_0, \quad 1-d^2 = \cos^2 \alpha_0,$$

а по (17), в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}},$$

$$\lambda - d = \frac{\sin \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cos \alpha_0}{\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4} - \cos \frac{3}{2}(\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}},$$

то величина

$$\frac{x_1}{a \sin A}$$

представляется формулой

$$\sin \alpha_0 + \frac{\cos \alpha_0 \cdot \cos \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0)}{\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0)} - \frac{\cos \alpha_0 \cdot \sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}{\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0) \cdot \sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4}},$$

где первые два члена по соединении дают

$$\frac{\cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2}}{\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0)},$$

а последний, по замене в нем выражений

$$\sin^2 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}, \quad \sin \frac{\alpha_0 - \beta_0}{4} \cdot \sin \frac{\beta_0 + 3\alpha_0}{4}$$

равными им

$$\frac{1}{2} \left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right), \quad \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0 \right)$$

приводится к

$$\frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right) \cdot \cos \alpha_0}{\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0) \left[\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0 \right]},$$

вследствие чего эта формула нам дает

$$\frac{x_1 \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0)}{a \sin A} = \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} - \frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{2} \right) \cos \alpha_0}{\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0}{2} - \cos \alpha_0}.$$

Это вывели мы в предположении

$$h = \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0}{4}}.$$

Чтобы перейти к общему случаю, когда

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}},$$

мы, по сказанному в § 7, должны поставить здесь $\beta_0 - k\pi$ на место β_0 .

Таким образом получаем формулу

$$\frac{x_1 \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)}{a \sin A} = \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{2} - \frac{\left(1 - \cos \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{2} \right) \cos \alpha_0}{\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2} - \cos \alpha_0}.$$

Находя по величинам k, A, α_0, β_0 , показанным в §§ 8 и 9, что

$$\sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) = \sin (3\varphi - 3n\pi + 3\pi) = -(-1)^n \sin 3\varphi,$$

$$\cos \frac{(\alpha + 3\beta_0 - 3k\pi)}{2} = \cos (\gamma + n\pi - \pi) = -(-1)^n \cos \gamma,$$

$$\sin A = \sin (3\varphi - 2(n - 3p - 1)\pi) = \sin 3\varphi,$$

$$\cos \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2} = \cos (\varphi - n\pi + \pi) = -(-1)^n \cos \varphi,$$

мы из этой формулы выводим

$$\frac{x_1}{a} = \cos \gamma - \frac{(-1)^n + \cos \gamma}{1 + (-1)^n \frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_0}}.$$

Меняя здесь $\alpha_0, \varphi, \gamma, n$ на $\alpha_1, \varphi_1, -\gamma, n_1$, мы по выше сказанному для той же величины $\frac{x_1}{a}$ находим еще такую формулу:

$$\frac{x_1}{a} = \cos \gamma - \frac{(-1)^{n_1} + \cos \gamma}{1 + (-1)^{n_1} \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha_1}}.$$

Сличая между собою эти две величины $\frac{x_1}{a}$, где по (21)

$$\frac{\cos \varphi}{\cos \alpha_0} = \frac{\cos \varphi_1}{\cos \alpha_1},$$

мы замечаем, что они становятся тождественными только при равенстве

$$(-1)^n = (-1)^{n_1},$$

а это предполагает разность $n - n_1$ числом четным.

Убедясь таким образом, что в наших формулах числа n, n_1 могут разниться только числом четным, и заметив по составу формул

$$\frac{r}{m} = \frac{\cos \frac{\gamma + n\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)},$$

$$\frac{r_1}{m_1} = \frac{\cos \frac{\gamma + n_1\pi}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma + n_1\pi}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)},$$

что в них числа n, n_1 могут быть сделаны > -1 и < 2 , мы заключаем, что относительно этих чисел возможны только два предположения:

или оба они равны 0, или оба они равны 1. Но оба эти случая мы обнимаем одною системою формул

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{m} &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi + \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi + \gamma)}{\cos^2 (\varphi + \gamma)}, \\ \frac{r_1}{m_1} &= \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2\varphi_1 - \frac{\gamma}{2} \right)} \cdot \frac{\cos^2 (3\varphi_1 - \gamma)}{\cos^2 (\varphi_1 - \gamma)}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

допуская в них замену угла γ углом $\gamma + \pi$, или, что одно и то же, давая углу γ две величины его, получаемые из уравнения (22) в пределах 0 и 2π .

Так, по углам φ , φ_1 и углу γ , определенному уравнением (22), найдется величина отношений

$$\frac{r}{m}, \quad \frac{r_1}{m_1},$$

откуда по длине $m = AM$, $m_1 = A_1M$, сторон треугольника AA_1M , получится длина линий $r = AC$, $r_1 = A_1C_1$.

В том случае, когда дан треугольник AA_1M , мы найдем углы φ , φ_1 , входящие в наши формулы, заметив, что по сказанному в § 8. об определении углов A , A_1 треугольника AA_1M , те же углы A , A_1 будут получаться при таких различных величинах φ , φ_1 :

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{A}{3}, & \varphi &= \frac{A + 2\pi}{3}, & \varphi &= \frac{A + 4\pi}{3}, \\ \varphi_1 &= \frac{A_1}{3}, & \varphi_1 &= \frac{A_1 + 2\pi}{3}, & \varphi_1 &= \frac{A_1 + 4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Комбинируя между собою эти величины углов φ , φ_1 , мы найдем 9 различных систем величин φ , φ_1 . Определяя для каждой из этих систем углов φ , φ_1 угол γ по (22), мы найдем для него две величины, вследствие чего число решений нашей задачи в том случае, когда предполагается данным треугольник AA_1M , будет вообще 18.

§ 12. Мы теперь займемся определением величины уклонений вершины M треугольника AA_1M от прямой линии, когда вершины A , A_1 движутся по кругам, определенным по выше сказанному. При этом мы будем рассматривать только положения треугольника, бесконечно близкие к тому, когда вершина M находится на касательной, имеющей соприкосновение 5-го порядка с ее траекториею, и везде в положениях будем ограничиваться первыми членами.

Мы начнем опять с предположения, что вершина M движется точно по прямой FG , а вершина A_1 описывает кривую, близкую к дуге круга C_1 (фиг. 5).

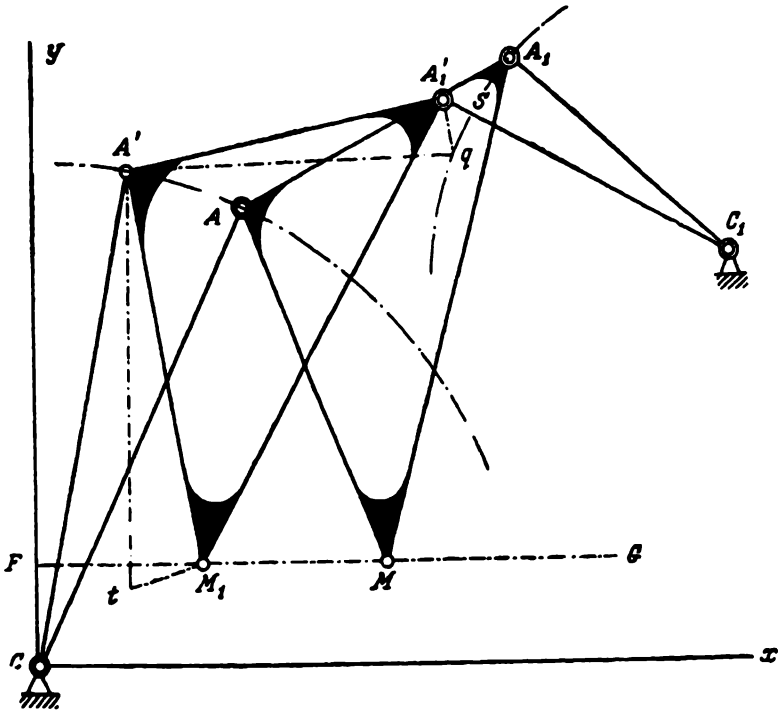
Пусть будет $A'A_1M_1$ какое-нибудь положение треугольника AA_1M при этом движении, бесконечно близкое к тому, в котором вершина A_1 лежит на круге C_1 , и в котором по нашему знакоположению

$$\begin{aligned} CAA_1 &= \varphi, & C_1A_1A &= \varphi_1, \\ \alpha &= AMF = \alpha_0, & \beta &= ACx = \beta_0. \end{aligned}$$

При этом точка A'_1 не будет находиться на круге C_1 и расстояние ее от центра C_1 будет разниться с радиусом его $r_1 = A_1C_1$ величиною A'_1S , для определения которой по (2) получается такая формула:

$$A'_1S = K (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^2 + \dots$$

Чтобы перейти к тому случаю, когда вершина A_1 движется точно по кругу C_1 , а вершина M по прямой FG приближенно, мы предполагаем, что треугольник $A'A_1M_1$ вращается около точки A' до тех



Фиг. 5

пор, пока вершина его A'_1 не придет на окружность C_1 . Полагая, что при этом вершина A'_1 приходит в точку q окружности C_1 , а вершина M_1 , лежавшая на прямой FG , приходит в точку t , мы замечаем, что при этом бесконечно малые линии A'_1S , A'_1q , M_1t будут связаны между собою такими равенствами:

$$A'_1S = A'_1q \cdot \cos qA'_1S, \quad \frac{M_1t}{A'_1q} = \frac{A'M_1}{A'A'_1}.$$

А так как

$$A'M_1 = AM = m, \quad A'A'_1 = AA_1 = a, \\ qA'_1S = A'A'_1C_1 - A'A'_1q = A'A'_1C_1 - \frac{\pi}{2},$$

и угол $A'A'_1C_1$ бесконечно мало разнится от угла $AA_1C_1 = \varphi_1$, то эти равенства нам дают

$$A'_1S = A'_1q \cdot \sin \varphi_1, \quad \frac{M_1t}{A'_1q} = \frac{m}{a},$$

откуда, исключая A'_1q , выводим

$$M_1t = \frac{m}{a} \frac{A'_1S}{\sin \varphi_1},$$

что по внесении выше показанной величины A'_1S приводится к следующему:

$$M_1t = K \frac{m}{a} \frac{(\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6}{\sin \varphi_1} + \dots$$

С другой стороны, определяя удаление точки t от прямой линии FG , мы находим, что оно равняется

$$M_1t \cdot \sin FM_1t,$$

а так как угол FM_1t равняется $\frac{\pi}{2} - FM_1A'$, а угол FM_1A' бесконечно мало разнится от угла $FMA = \alpha_0$, это выражение приводится к такому:

$$M_1t \cdot \cos \alpha_0,$$

что по внесении выше найденной величины M_1t нам дает следующую формулу для определения величины удаления точки t от линии FG :

$$K \frac{m}{a} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots,$$

откуда видно, что при движении треугольника AA_1M , нами рассматриваемом, ордината y точки M при α бесконечно близком к α_0 будет иметь такую величину:

$$y = CF - K \frac{m}{a} \frac{\cos \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^6 + \dots$$

Заменяя же здесь разность

$$\sin \alpha - \sin \alpha_0$$

через

$$(\alpha - \alpha_0) \cos \alpha_0 + \dots,$$

находим

$$y = CF - K \frac{m}{a} \frac{\cos^7 \alpha_0}{\sin \varphi_1} (\alpha - \alpha_0)^6 + \dots$$

Эта формула показывает, как изменяется ордината y точки M при изменении угла α . Чтобы найти соотношение между изменениями x , y точки M , мы теперь выведем формулу, определяющую величину

x точки M при величинах α , близких к α_0 . Для этого мы замечаем, что величина x равняется проекции ломаной линии CAM на ось x , а потому

$$x = AC \cdot \cos ACx + AM \cdot \cos AMF.$$

Внося же сюда величины

$$AC = r, \quad ACx = \beta, \quad AM = m, \quad AMF = \alpha,$$

находим

$$x = r \cos \beta + m \cos \alpha.$$

Дифференцируя эту величину x относительно α и замечая, что по (1)

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{m \cos \alpha}{r \cos \beta},$$

находим

$$\frac{dx}{d\alpha} = -r \sin \beta \frac{d\beta}{d\alpha} - m \sin \alpha = -m \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}.$$

На основании этого заключаем, что в смежности с точкою

$$x = FM, \quad y = FC,$$

где $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, абсцисса x будет иметь такую величину:

$$x = FM - m \frac{\sin(\alpha_0 + \beta_0)}{\cos \beta_0} (\alpha - \alpha_0) + \dots$$

Выводя из этого уравнения величину разности $\alpha - \alpha_0$ и внося ее в выше найденное выражение ординаты y , получаем следующее соотношение между x , y :

$$y = CF - \frac{\cos^2 \alpha_0 \cdot \cos^2 \beta_0 K}{am^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin^2(\alpha_0 + \beta_0)} (x - FM)^2 + \dots,$$

которое мы представим так:

$$y = y_0 + K_0 (x - x_0)^2 + \dots,$$

полагая

$$x_0 = FM, \quad y_0 = CF,$$

$$K_0 = - \frac{\cos^2 \alpha_0 \cdot \cos^2 \beta_0 K}{am^2 \sin \varphi_1 \cdot \sin^2(\alpha_0 + \beta_0)}.$$

Это нам дает уравнение кривой, описываемой вершиною M треугольника AA_1M в смежности с точкою $x = x_0$, $y = y_0$, где она имеет соприкосновение 5-го порядка с прямою.

§ 13. Для определения величины коэффициента K_0 , входящего в это уравнение, мы замечаем, что по (10), где

$$1 - d^2 = \cos^2 \alpha_0, \quad \frac{\sqrt{h^2 - (d + g)^2}}{h} = \cos \beta_0,$$

коэффициенты K и L связаны равенством

$$K = - \frac{rx_1 \cos \beta_0 L}{r_1 \cos^{10} \alpha_0 (1 - d\lambda)},$$

вследствие чего выше показанное выражение K_0 приводится к такому:

$$K_0 = \frac{rx_1 \cos^7 \beta_0 L}{am^3 r_1 \cos^3 \alpha_0 \sin \varphi_1 \sin^4 (\alpha_0 + \beta_0) (1 - d\lambda)}.$$

Внося сюда величину x_1 по (9) и величины углов A, α_0, β_0 по формулам § 9, получаем

$$K_0 = \frac{r \cos^7 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi}{m^3 r_1 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^2 2\varphi \sin \varphi_1} \frac{L}{\lambda - d}.$$

Переходя к определению отношения

$$\frac{L}{\lambda - d},$$

входящего в это выражение коэффициента K_0 , мы вычисляем величину L по формуле § 5, внося в нее величины λ, μ , найденные в § 7, и принимая

$$h = (-1)^k \frac{\sin \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4}}{\sin \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4}}.$$

Разделяя величину L , таким образом получаемую, на величину $\lambda - d$ при том же значении h , мы находим по приведении в простейший вид такую формулу для определения отношения L к $\lambda - d$:

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\sin^2 \frac{3\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{4} \cdot \sin^2 (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi)}{\cos \alpha_0 \cdot \sin \frac{3}{2} (\alpha_0 + \beta_0 - k\pi) \cdot \sin^4 \frac{\alpha_0 + 3\beta_0 - 3k\pi}{4} \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \beta_0 - k\pi}{2}}.$$

Внося сюда величину $k = 2p + 1$ и величину углов A, α_0, β_0 , показанную в § 9, получаем

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{1}{32} \frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right) \sin^2 2\varphi}{\cos (3\varphi + \gamma) \cdot \sin 3\varphi \cdot \cos^4 \frac{\gamma + n\pi}{2} \cdot \sin \varphi}.$$

Замечая же по уравнению (20), что

$$\frac{\cos^2 \left(2\varphi + \frac{\gamma + n\pi}{2} \right)}{\cos^2 \frac{\gamma + n\pi}{2}} = \frac{m^2}{r^2} \frac{\cos^4 (3\varphi + \gamma)}{\cos^4 (\varphi + \gamma)},$$

мы из этой формулы выводим

$$\frac{L}{\lambda - d} = \frac{m^2 \cos^3 (3\varphi + \gamma) \sin^2 2\varphi}{32 r^2 \cos^4 (\varphi + \gamma) \sin 3\varphi \sin \varphi \cos^2 \frac{\gamma}{2}},$$

где по § 11 мы поставили γ вместо $\gamma + n\pi$, вследствие чего выше найденное выражение коэффициента K_0 нам дает

$$K_0 = \frac{1}{32r_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3.$$

§ 14. На основании этой формулы нетрудно показать, что при r, r_1, m, m_1 конечных коэффициент K_0 в уравнении

$$y = y_0 + K_0(x - x_0)^6 + \dots$$

не может обращаться в 0 и, следовательно, кривая, описываемая вершиною M треугольника AA_1M в рассматриваемом нами вопросе, не может иметь соприкосновение с прямой линией порядка выше 5-го.

Чтобы показать это, мы замечаем, что коэффициент K_0 имеет то же значение по отношению к вершине A_1 треугольника AA_1M , как и по отношению к вершине A , а потому в выражении его, найденном нами, величины

$$\varphi, m, r, r_1, \gamma$$

могут быть заменены величинами

$$\varphi_1, m_1, r_1, r, -\gamma.$$

Таким образом, получается новое выражение для K_0 :

$$K_0 = \frac{1}{32r_1 r \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi_1 - \gamma)}{m_1 \sin 2\varphi_1} \right)^3.$$

По этим двум выражениям коэффициента K_0 видно, что, при r, r_1, m, m_1 конечных, он может обратиться в нуль только при удовлетворении двух уравнений

$$\cos(\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(\varphi_1 - \gamma) = 0, \quad (24)$$

из которых выходит

$$\varphi + \gamma = \frac{2q + 1}{2} \pi, \quad \varphi_1 - \gamma = \frac{2q' + 1}{2} \pi,$$

где q, q' — какие-нибудь целые числа. Складывая и вычитая эти два равенства, находим

$$\left. \begin{aligned} \varphi + \varphi_1 &= (q + q' + 1) \pi, \\ \varphi - \varphi_1 + 2\gamma &= (q - q') \pi. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Но по (23) видно, что равенства (24) при r, m, r_1, m_1 конечных предполагают или равенство

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 0,$$

или такие два равенства:

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0.$$

В первом случае мы находим, что

$$\gamma = (2q'' + 1)\pi,$$

где q'' — целое число. Внося эту величину γ в уравнения (25), получаем из них такие величины для углов φ , φ_1 :

$$\varphi = \left(q - 2q'' - \frac{1}{2}\right)\pi, \quad \varphi_1 = \left(q' + 2q'' + \frac{3}{2}\right)\pi.$$

Определяя же углы треугольника AA_1M , соответствующие этим величинам φ , φ_1 , мы по § 8 находим, что каждый из углов его A , A_1 должен содержать нечетное число $\frac{\pi}{2}$, что невозможно.

Переходя к предположению

$$\cos(3\varphi + \gamma) = 0, \quad \cos(3\varphi_1 - \gamma) = 0,$$

мы замечаем, что эти равенства вместе с равенствами (24) предполагают

$$\varphi = \frac{q}{2}\pi, \quad \varphi_1 = \frac{q'}{2}\pi,$$

где q , q' — числа целые. Если оба числа q , q' нечетные, углы A , A_1 треугольника AA_1M опять оказываются невозможными. Если одно из них нечетное, а другое четное, первое из уравнений (25) не удовлетворяется. Наконец, если оба числа q , q' четные, то по (24) угол γ должен иметь такую величину:

$$\gamma = \frac{2q_0 + 1}{2}\pi,$$

где q_0 — число целое,

Но при таких величинах φ , φ_1 , γ в уравнении (22), написанном под видом

$$\frac{\cotang \frac{3}{2}(\varphi + \varphi_1)}{\cotang \frac{\varphi + \varphi_1}{2}} = \frac{\tang \left[\frac{3}{2}(\varphi - \varphi_1) + \gamma \right]}{\tang \frac{\varphi - \varphi_1}{2}},$$

первая часть будет обращаться в $\frac{\infty}{\infty}$ или в $\frac{0}{0}$, смотря по тому будет ли сумма $\varphi + \varphi_1$ приводиться к величине π , повторенной четное или нечетное число раз; а вторая к $\frac{0}{\infty}$ или к $\frac{\infty}{0}$, смотря по тому будет ли разность $\varphi - \varphi_1$ приводиться к π , взятому нечетное или четное число раз. Определяя же величину первой части при величинах φ , φ_1 , близких к $\frac{q}{2}\pi$, $\frac{q'}{2}\pi$ в предположении q , q' числами четными, мы находим,

что предел ее при этих величинах есть или $\frac{3}{1}$, или $\frac{1}{3}$, откуда видно, что при этих величинах φ , φ_1 , γ [уравнение (22) не удовлетворяется и, следовательно, последнее предположение также невозможно.

§ 15. По уравнению

$$y = y_0 + K_0(x - x_0)^6 + \dots$$

мы находим, что в пределах от $x = x_0 - \frac{l}{2}$ до $x = x_0 + \frac{l}{2}$ удаление от прямой линии вершины M треугольника AA_1M не будет превосходить

$$\frac{K_0}{2^6} l^6.$$

При этом мы пренебрегаем высшими степенями l , предполагая вообще l малою величиною. Внося сюда найденную нами величину K_0 , мы получаем такое выражение:

$$\frac{1}{2048rr_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6$$

для предела отклонений от прямолинейного пути вершины M треугольника AA_1M при длине хода, равной l .

Эти отклонения могут быть сделаны значительно меньше на основании того, что мы показали в мемуаре под заглавием „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“. * Для этого нужно, определив по выше показанному величины линий AC , A_1C_1 и места точек вращения C , C_1 , искать, какие изменения следует сделать в тех и других, чтобы кривая, описываемая вершиною M треугольника AA_1M , пересекала прямую в точках, которых абсциссы имеют такие величины:

$$\begin{aligned} x_0 - \frac{l}{2} \cos 15^\circ, & \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 45^\circ, & \quad x_0 - \frac{l}{2} \cos 75^\circ, \\ x_0 + \frac{l}{2} \cos 15^\circ, & \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 45^\circ, & \quad x_0 + \frac{l}{2} \cos 75^\circ. \end{aligned}$$

Когда это условие будет выполнено, отклонения от прямого пути вершины M треугольника AA_1M на всей длине хода l , как показывает анализ, будут заключаться в таких пределах:

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{65536rr_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6, \\ & + \frac{1}{65536rr_1 \sin \varphi \cdot \sin \varphi_1 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}} \left(\frac{\cos(\varphi + \gamma)}{m \sin 2\varphi} \right)^3 l^6. \end{aligned}$$

* Том II настоящего Собрания сочинений. стр. 23—51 и 474—485; стр. 238—250 настоящего тома. — *Ред.*

ТЕОРЕМА ОТНОСИТЕЛЬНО КРИВОЙ УАТТА *

Если две вершины A и A_1 треугольника AA_1M скользят соответственно по двум окружностям с центрами C и C_1 , то кривая, описанная вершиною M , может иметь с своей касательной касание 5-го порядка (предел, которого нельзя превзойти) только в случае, когда углы $\widehat{CAA_1}$ и $\widehat{C_1A_1A}$ имеют величины

$$\widehat{CAA_1} = \frac{A_1AM + 2n\pi}{3}, \quad \widehat{C_1A_1A} = \frac{AA_1M + 2n_1\pi}{3},$$

где n, n_1 — какие-нибудь целые числа.

При этих величинах углов $\widehat{CAA_1}, \widehat{C_1A_1A}$ прикосновение всегда 5-го порядка, коль скоро радиусы AC, A_1C_1 двух кругов имеют следующие величины:

$$AC = AM \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2CAA_1 + \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{\cos^3 (3CAA_1 + \gamma)}{\cos^3 (CAA_1 + \gamma)},$$

$$A_1C_1 = A_1M_1 \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \left(2C_1A_1A - \frac{\gamma}{2} \right)} \frac{\cos^3 (3C_1A_1A - \gamma)}{\cos^3 (C_1A_1A - \gamma)},$$

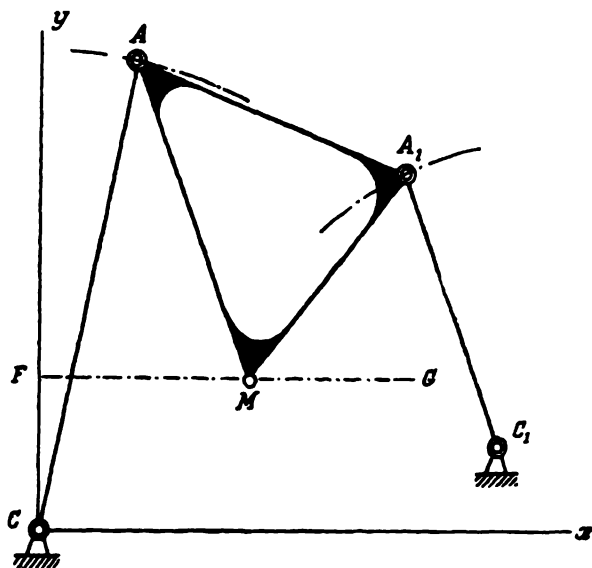
где γ означает угол, под которым пересекается прямая AA_1 с касательною в M .



* Опубликовано в Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, II série, t. V, 1881, p. 216; русский перевод — в Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том II, СПб., 1907, стр. 715. — *Ред.*

О ПРОСТЕЙШИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, ДОСТАВЛЯЮЩИХ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ *

§ 1. В записке „О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов“, читанной 18 декабря 1879 г., ** было показано, каким образом, рассматривая движение треугольника одною вершиною по кругу, а другою по прямой, можно найти условия, необхо-



Фиг. 1

димые и достаточные для того, чтобы всякий данный треугольник, двигаясь двумя вершинами своими по кругам, третьею вершиною описывал кривую, имеющую соприкосновение с прямой 5-го порядка. Это представляет полное решение вопроса о простейших параллелограмах, доставляющих прямолинейное движение на бесконечно малом пути с наибольшею степенью точности. Формулы, выведенные в этой

* Читано 6 дек. (24 нояб.) 1881 г. Опубликовано в Приложении к XL тому Зап. Имп. Акад. Наук, № 1, 1882; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сониной, том II, СПб., 1907, стр. 357—374.— *Ред.*

** Стр. 113—141 настоящего тома. — *Ред.*

записке, могут служить также, как мы теперь покажем, для определения всех простейших параллелограмов, доставляющих прямолинейное движение с точностью на одну степень ниже, т. е. таких, в которых получается кривая, имеющая соприкосновение с прямою только 4-го порядка. Мы этого достигаем, рассматривая условия, при которых треугольник, двигаясь одною вершиною по кругу, другою по прямой, третьею вершиною описывает кривую, имеющую соприкосновение 4-го порядка с каким-либо кругом.

§ 2. Сохраняя знакоположение выше упомянутой записки, мы предполагаем, что треугольник AA_1M (фиг. 1) вершиною A движется по кругу, которого центр в точке C , принятой за начало координат, а вершиною M — по прямой FG , с которой параллельна ось x , и что C_1 есть центр круга, имеющего соприкосновение 4-го порядка с кривою, описываемою вершиною A_1 , и которого радиус обозначаем через r_1 . Называя через α_1 величину переменного угла $\alpha = AMF$, соответствующую тому положению треугольника AA_1M , когда вершина его A_1 находится на круге C_1 в точке соприкосновения его с кривою, описываемою этою вершиною, мы замечаем, что это прикосновение может простирается до 4-ой степени только в том случае, когда величина расстояния A_1C_1 , при α близком к α_1 , по степеням разности $\sin \alpha - \sin \alpha_1$ разлагается в такой ряд:

$$A_1C_1 = r_1 + K_0(\sin \alpha - \sin \alpha_1)^5 + \dots$$

Изображая же [через x, y переменные [координаты точки A_1 , а через x_1, y_1 координаты неподвижного центра C_1 , мы находим, что

$$A_1C_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Переходя к определению координат x, y , полагаем

$$\begin{aligned} AA_1 &= a, & AC &= r, & CF &= b, \\ AM &= m, & MA A_1 &= A, & ACx &= \beta. \end{aligned}$$

Проектируя ломаную линию CAA_1 на оси координат, выводим

$$\begin{aligned} x &= r \cos \beta + a \cos (A - \alpha), \\ y &= r \sin \beta + a \sin (A - \alpha); \end{aligned}$$

проектируя же на ось y ломаную CAM , находим такое соотношение между переменными углами $\beta = ACx$ и $\alpha = AMF$:

$$CF = b = r \sin \beta - m \sin \alpha.$$

Определяя по этому равенству величины $\sin \beta$ и $\cos \beta$, находим

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{m \sin \alpha + b}{r}, \\ \cos \beta &= \sqrt{1 - \left(\frac{m \sin \alpha + b}{r} \right)^2}, \end{aligned}$$

что по внесении в выражения координат x, y нам дает

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha), \\y &= m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) - b.\end{aligned}$$

Внося же эти величины x, y в выражение квадрата расстояния $A_1 C_1$ по формуле

$$A_1 C_1^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2,$$

находим

$$\begin{aligned}A_1 C_1^2 &= [\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + a \cos (A - \alpha) - x_1]^2 + \\&+ [m \sin \alpha + a \sin (A - \alpha) + b - y_1]^2,\end{aligned}$$

откуда по раскрытии скобок выходит

$$\begin{aligned}A_1 C_1^2 &= 2[a \sin A \cdot \sin \alpha + a \cos A \cdot \cos \alpha - x_1] \sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + \\&+ 2[am \sin A \cdot \sin \alpha + a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A] \cos \alpha + \\&+ 2[a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1] \sin \alpha - 2am \cos A \cdot \sin^2 \alpha + \\&+ r^2 + x_1^2 + y_1(y_1 - 2b) + a^2.\end{aligned} \quad (1)$$

Так будет определяться квадрат расстояния вершины A_1 от точки C_1 , какова бы ни была кривая, описываемая вершиною A_1 ; в том же случае, когда эта кривая в точке, соответствующей $\alpha = \alpha_1$, будет иметь соприкосновение 4-го порядка с кругом, описанным из центра C_1 радиусом r_1 , это выражение, как видели, должно разлагаться в такой ряд:

$$r_1^2 + 2r_1 K_0 (\sin \alpha - \sin \alpha_1)^5 + \dots,$$

что дает нам для рассматриваемого нами случая следующее равенство:

$$\begin{aligned}&2[a \sin A \cdot \sin \alpha + a \cos A \cdot \cos \alpha - x_1] \sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2} + r^2 + x_1^2 + \\&+ 2[am \sin A \cdot \sin \alpha + a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A] \cos \alpha + y_1(y_1 - 2b) - \\&- 2am \cos A \cdot \sin^2 \alpha + 2[a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1] \sin \alpha + a^2 = \\&= r_1^2 + 2r_1 K_0 (\sin \alpha - \sin \alpha_1)^5 + \dots\end{aligned} \quad (2)$$

§ 3. Для приведения этого равенства к виду более удобному мы введем в него вместо переменной α переменную z , связанную с α уравнением

$$\sin \alpha = \frac{dz + 1}{z + d}, \quad (3)$$

где

$$d = \sin \alpha_1.$$

Определяя по этому уравнению выражение $\cos \alpha$ и $\sqrt{r^2 - (m \sin \alpha + b)^2}$ и внося их равенство (2), мы замечаем, что оно по уничтожении знаменателя приводится к такому виду:

$$\begin{aligned}&(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2} - (P_0 + Pz) \sqrt{z^2 - 1} + P_2 + \\&+ P_3 z + P_4 z^2 = \frac{L_0}{z^2} + \dots,\end{aligned} \quad (4)$$

где $\lambda, \mu, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$ — постоянные, которых величина легко найдется по величинам постоянных $A, a, m, r, r_1, b, x_1, y_1$, входящих в равенство (2). Также нетрудно найти уравнения для определения прежних постоянных

$$A, a, m, b, r, r_1, x_1, y_1$$

через новые

$$\lambda, \mu, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4,$$

заметив, что равенство (4) по внесении в него величины z из (3) должно приводиться к равенству, тождественному с (2).

Так как по (3) мы находим, что

$$z = \frac{1 - d \sin \alpha}{\sin \alpha - d},$$

а потому

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{\sin \alpha - d}{1 - d \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha - d}{1 - d^2} + \frac{d(\sin \alpha - d)^2}{(1 - d^2)^2} + \dots, \\ \sqrt{z^2 - 1} &= \frac{\sqrt{(1 - d \sin \alpha)^2 - (\sin \alpha - d)^2}}{\sin \alpha - d} = \frac{\sqrt{1 - d^2}}{\sin \alpha - d} \cos \alpha, \\ &= \frac{\sqrt{(z - g)^2 - h^2}}{\sin \alpha - d} = \\ &= \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \sqrt{1 - \left[\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - d^2 + gh + 1)d}{h(1 - d^2)} \right]^2}. \end{aligned}$$

то равенство (4) приводится к следующему:

$$\begin{aligned} &\frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{(\lambda - d) \sin \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} \times \\ &\times \sqrt{1 - \left[\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)} \right]^2} + \\ &+ \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{\sqrt{1 - d^2} \cdot \mu \cos \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} \times \\ &\times \sqrt{1 - \left[\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)} \right]^2} + \\ &+ \frac{h(1 - d^2)}{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}} \frac{1 - d\lambda}{(\sin \alpha - d)^2} \times \\ &\times \sqrt{1 - \left[\frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)} \sin \alpha + \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)} \right]^2} + \\ &+ \frac{(P_2 - P_3 d + P_4 d^2) \sin^3 \alpha - [2P_2 d - P_3(1 + d^2) + 2P_4 d] \sin \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} + \frac{P_2 d^2 - P_3 d + P_4}{(\sin \alpha - d)^2} - \\ &- \frac{P_1 - P_0 d + (P_0 - P_1 d) \sin \alpha}{(\sin \alpha - d)^2} \sqrt{1 - d^2} \cdot \cos \alpha = \frac{L_0 (\sin \alpha - d)^2}{(1 - d^2)^3} + \dots \end{aligned}$$

Сличая это равенство с равенством (2), мы замечаем, что для тождества их между собою должны удовлетворяться такие уравнения:

$$\frac{m}{r} = \frac{h^2 - (g + d)^2}{h(1 - d^2)}, \quad (5)$$

$$\frac{b}{r} = \frac{g + (g^2 - h^2 + gd + 1)d}{h(1 - d^2)}, \quad (6)$$

$$-\frac{a}{x_1} \sin A = \frac{\lambda - d}{1 - d\lambda}, \quad (7)$$

$$-\frac{a}{x_1} \cos A = \mu \frac{\sqrt{1 - d^2}}{1 - d\lambda}, \quad (8)$$

$$\frac{am \sin A}{rx_1} = \frac{P_0 - P_1 d}{1 - d\lambda} \mu \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}, \quad (9)$$

$$\frac{a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{rx_1} = \frac{P_1 - P_0 d}{1 - d\lambda} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}}, \quad (10)$$

$$\frac{am \cos A}{rx_1} = \frac{P_2 - P_3 d + P_4 d^2 \sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{1 - d\lambda} \frac{1}{h(1 - d^2)}, \quad (11)$$

$$\frac{a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{rx_1} = \frac{2P_2 d - P_3(1 + d^2) + 2P_4 d \sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{1 - d\lambda} \frac{1}{h(1 - d^2)}, \quad (12)$$

$$\frac{r_1^2 - r^2 - x_1^2 - y_1(y_1 - 2b) - a^2}{2rx_1} = \frac{P_2 d^2 - P_3 d + P_4 \sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{1 - d\lambda} \frac{1}{h(1 - d^2)}. \quad (13)$$

§ 4. При помощи выведенных нами формул нетрудно показать, что определение по величинам

$$d, m, r, b$$

величин

$$A, a, r_1, x_1, y_1,$$

доставляющих решение нашей задачи, приводится к системе нескольких уравнений первой степени и одному квадратному уравнению.

Для этого мы сначала определим вспомогательные величины

$$g, h, P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \lambda, \mu,$$

закрывающиеся в наших формулах. Приступая к этому, мы замечаем, что величины g, h определяются непосредственно уравнениями (5) (6), из которых получаются такие выражения для g и h :

$$g = \frac{(1 - d^2)m(md + b)}{r^2 - (md + b)^2} - d,$$

$$h = \frac{(1 - d^2)mr}{r^2 - (md + b)^2};$$

внеся эти величины g и h в формулу (4) и оставляя неизвестными λ , μ , мы из нее легко получаем выражения величин

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$$

через λ и μ .

В самом деле, по этой формуле между полиномом

$$P_2 + P_3 z + P_4 z^2$$

и выражением

$$(P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1} - (z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2}$$

содержит члены только с отрицательными степенями z , откуда следует, что

$$P_2, P_3, P_4$$

равняются коэффициентам при z^0 , z , z^2 в разложении этого выражения по нисходящим степеням z . На основании этого получаются такие равенства:

$$P_4 = P_1 - 1 - \mu,$$

$$P_3 = P_0 - \lambda + g(1 + \mu),$$

$$P_2 = -\frac{1}{2} P_1 + \lambda g + \frac{(1 + \mu)h^2}{2} + \frac{\mu}{2}.$$

Что касается величин

$$P_0, P_1,$$

они по формуле (4) определяются тем, что ряд, получаемый разложением выражения

$$(z + \lambda + \mu \sqrt{z^2 - 1}) \sqrt{(z - g)^2 - h^2} - (P_0 + P_1 z) \sqrt{z^2 - 1},$$

не должен содержать членов с $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2}$. Это дает нам два уравнения, из которых получаются такие величины для P_0 , P_1 :

$$P_0 = gh^2 + h^2 \lambda + (h^2 - 1) g \mu,$$

$$P_1 = 4h^2 g^2 + h^4 + 4h^2 g \lambda + [4h^2 g^2 + (h^2 - 1)^2] \mu.$$

Внеся же эти величины P_0 , P_1 в предыдущие равенства, находим такие величины для P_2 , P_3 , P_4 :

$$P_2 = -\frac{1}{2} (4g^2 + h^2 - 1) h^2 - (2h^2 - 1) g \lambda - \frac{1}{2} (4g^2 + h^2 - 3) h^2 \mu,$$

$$P_3 = (h^2 + 1) g + (h^2 - 1) \lambda + h^2 g \mu,$$

$$P_4 = 4h^2 g^2 + h^4 - 1 + 4gh^2 \lambda + (4g^2 + h^2 - 2) h^2 \mu.$$

Для определения последних вспомогательных величин

$$\lambda, \mu$$

мы замечаем, что уравнения (7) и (9), (8) и (11) по разделении одного на другое дают такие два уравнения, не содержащие в себе искомого A , a , r_1 , x_1 , y_1 :

$$-\frac{m}{r} = \frac{P_0 - P_1 d}{\lambda - d} \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h \sqrt{1 - d^2}},$$

$$-\frac{m}{r} = \frac{P_2 - P_3 d - P_3 d^2}{\mu} \cdot \frac{\sqrt{h^2 - (g + d)^2}}{h (1 - d^2)^{\frac{3}{2}}},$$

которые по внесении величины $\frac{m}{r}$ из (5) приводятся к такому виду:

$$(\lambda - d) \sqrt{h^2 - (g + d)^2} = (P_1 d - P_0) \sqrt{1 - d^2},$$

$$\mu \sqrt{1 - d^2} \sqrt{h^2 - (g + d)^2} = -P_2 + P_3 d - P_3 d^2.$$

Эти уравнения, по внесении в них выше найденных величин h , g , P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , приводятся, как нетрудно заметить, к уравнениям первой степени относительно λ , μ . Решая эти уравнения относительно λ , μ и внося их величины в выше показанные выражения количеств P_0 , P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , мы найдем все вспомогательные величины, по которым искомые величины

$$A, a, r_1, x_1, y_1$$

определяются уравнениями (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13),

К определению этих неизвестных мы теперь и приступим.

§ 5. Для определения угла A мы замечаем, что уравнения (7), (8) по разделении друг на друга дают

$$\operatorname{tang} A = \frac{\lambda - d}{\mu \sqrt{1 - d^2}}.$$

Этим равенством вполне определяется тангенс угла A . Что же касается двух углов, имеющих такой тангенс и различающихся между собою 180° , мы будем принимать за A угол, содержащийся между 0 и 180° , выбирая, согласно этому, направление, по которому длина линии $a = AA_1$ в угле A_1AM считается положительною величиною.

Переходя к определению величин a , x_1 , y_1 , мы замечаем, что те же уравнения (7), (8) по возведении в квадрат и сложении дают

$$\frac{a^2}{x_1^2} = \frac{(\lambda - d)^2 + (1 - d^2) \mu^2}{(1 - d\lambda)^2},$$

откуда выходит

$$\frac{a}{x_1} = \pm \sqrt{\frac{(\lambda - d)^2 + (1 - d^2) \mu^2}{(1 - d\lambda)^2}}.$$

Из двух знаков при величине отношения

$$\frac{a}{x_1},$$

таким образом получаемой, мы должны оставить тот, который соответствует сделанному нами предположению об угле A . Так как этот угол предполагается содержащимся между 0 и 180° , то синус его

будет величина положительная; а это по (7) может иметь место только в том случае, когда величина отношения

$$\frac{a}{x_1}$$

имеет знак противоположный отношению

$$\frac{\lambda - d}{1 - d\lambda}.$$

Таким образом определяются и числовая величина и знак отношения

$$\frac{a}{x_1}.$$

Для сокращения величину этого отношения мы будем обозначать через f , что даст нам такое равенство:

$$\frac{a}{x_1} = f. \quad (14)$$

Полагая также для сокращения

$$\frac{r(P_1 - P_0 d)}{1 - d\lambda} \frac{V \overline{h^2 - (g + d)^2}}{h V \overline{1 - d^2}} = N_1,$$

$$\frac{r[2P_2 d - P_2(1 + d^2) + 2P_4 d]}{1 - d\lambda} \frac{V \overline{h^2 - (g + d)^2}}{h(1 - d^2)} = N_2,$$

мы уравнения (10), (12) представляем под видом

$$\frac{a(b - y_1) \sin A - ax_1 \cos A}{x_1} = N_1,$$

$$\frac{a(y_1 - b) \cos A - ax_1 \sin A - my_1}{x_1} = N_2,$$

откуда, внося по (14) величину $a = fx_1$, мы выводим такие два уравнения для определения x_1 , y_1 :

$$f(b - y_1) \sin A - fx_1 \cos A = N_1, \quad (15)$$

$$f(y_1 - b) \cos A - fx_1 \sin A - \frac{my_1}{x_1} = N_2. \quad (16)$$

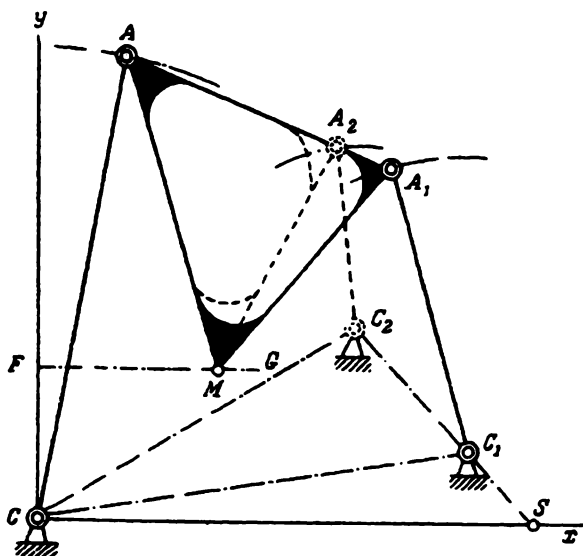
Решая эти уравнения, мы находим по первому из них, что y_1 выражается так через x_1 :

$$y_1 = b - \cotang A \cdot x_1 - \frac{N_1}{f \sin A}; \quad (17)$$

внося же эту величину y_1 во второе, получаем следующее квадратное уравнение:

$$x_1^2 + \frac{(N_1 - m) \cos A + N_2 \sin A}{f} x_1 + \frac{(fb \sin A - N_1) m}{f^2} = 0.$$

Определяя по этому уравнению величину x_1 и внося ее в формулы (14), (17), мы найдем величины x_1 , y_1 , a , представляющие решение нашей задачи, когда за данные приняты r , m , b и $d = \sin \alpha_1$. Каждому из корней этого уравнения будет соответствовать особое решение. Если же это уравнение не имеет действительных корней, мы заключим, что при данных величинах d , r , m , b задача наша не может иметь решения.



Фиг. 2

§ 6. Не останавливаясь на выполнении выкладок, представляющихся по выше показанному при решении нашей задачи, мы займемся теперь рассмотрением соотношения между двумя ее решениями, когда они имеют место. Это соотношение, как мы увидим, показывает изменения, которые допускают в составе своем простейшие параллелограммы без изменения степени приближения, с которою они дают прямолинейное движение.

Обозначаем через x'_1 , x''_1 две величины x_1 , получаемые решением предыдущего уравнения, и через

$$y'_1, y''_1, \\ a', a''$$

соответствующие им величины y_1 , a и полагаем, что

$$x_1 = x'_1, \quad y_1 = y'_1, \quad a = a'$$

принадлежат решению нашей задачи, представляемому (фиг. 2) точкою A_1 и центром C_1 , а

$$x_1 = x''_1, \quad y_1 = y''_1, \quad a = a''$$

решению, представляемому точкою A_2 и центром C_2 .

В этом предположении мы будем иметь

$$a' = AA_1, \quad a'' = AA_2,$$

и выведенные нами уравнения (14), (15), (16) будут удовлетворяться такими двумя системами величин x_1, y_1, a :

$$x_1 = x_1', \quad y_1 = y_1', \quad a = a'$$

$$x_1 = x_1'', \quad y_1 = y_1'', \quad a = a'',$$

что предполагает следующие равенства:

$$\frac{a'}{x_1'} = f, \quad \frac{a''}{x_1''} = f, \quad (18)$$

$$f(b - y_1') \sin A - f x_1' \cos A = N_1,$$

$$f(b - y_1'') \sin A - f x_1'' \cos A = N_1,$$

$$f(y_1' - b) \cos A - f x_1' \sin A - \frac{m y_1'}{x_1'} = N_2,$$

$$f(y_1'' - b) \cos A - f x_1'' \sin A - \frac{m y_1''}{x_1''} = N_2,$$

откуда выходят уравнения

$$\frac{a'}{x_1'} = \frac{a''}{x_1''},$$

$$f(b - y_1') \sin A - f x_1' \cos A = f(b - y_1'') \sin A - f x_1'' \cos A,$$

$$f(y_1' - b) \cos A - f x_1' \sin A - \frac{m y_1'}{x_1'} = f(y_1'' - b) \cos A - f x_1'' \sin A - \frac{m y_1''}{x_1''}.$$

Последние два равенства по сокращении в их частях одинаковых членов и по разделении на f приводятся к следующему:

$$y_1' \sin A + x_1' \cos A = y_1'' \sin A + x_1'' \cos A,$$

$$y_1' \cos A - x_1' \sin A - \frac{m y_1'}{f x_1'} = y_1'' \cos A - x_1'' \sin A - \frac{m y_1''}{f x_1''},$$

что иначе может быть представлено так:

$$\frac{y_1'' - y_1'}{x_1 - x_1'} = \cotang A,$$

$$(y_1' - y_1'') \cos A - (x_1' - x_1'') \sin A = \frac{m}{f} \left(\frac{y_1'}{x_1'} - \frac{y_1''}{x_1''} \right).$$

Находя по первому из этих равенств

$$\left. \begin{aligned} x_1' - x_1'' &= x_1' \frac{\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'}}{1 + \frac{y_1''}{x_1''} \tan A} \tan A, \\ y_1' - y_1'' &= -x_1' \frac{\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'}}{1 + \frac{y_1''}{x_1''} \tan A} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

и внося эти величины разностей $x_1' - x_1''$, $y_1' - y_1''$ во второе, мы замечаем, что оно приводится к следующему:

$$\left[f x_1' - m \left(1 + \frac{y_1''}{x_1''} \tan A \right) \cos A \right] \left(\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'} \right) = 0,$$

что разлагается на два уравнения:

$$\frac{y_1''}{x_1''} - \frac{y_1'}{x_1'} = 0,$$

$$f x_1' - m \left(1 + \frac{y_1''}{x_1''} \tan A \right) \cos A = 0.$$

Так как по (19) первое из этих уравнений предполагает равенства $x_1'' = x_1'$, $y_1'' = y_1'$, то величины x_1' , y_1' , x_1'' , y_1'' в двух различных решениях нашей задачи должны удовлетворять второму, а это уравнение по внесении $\frac{a'}{x_1'}$ вместо f на основании (18) приводится к виду

$$a' - m \cos A - m \frac{y_1''}{x_1''} \sin A = 0,$$

откуда выходит

$$\frac{y_1''}{x_1''} = \frac{a' - m \cos A}{m \sin A}.$$

Повторяя те же суждения с переменю только x_1 , y_1 , a' на x_1' , y_1'' , a'' и обратно, мы из предыдущих уравнений находим также, что

$$\frac{y_1'}{x_1'} = \frac{a'' - m \cos A}{m \sin A}.$$

Замечая, что отношения

$$\frac{y_1'}{x_1'}, \frac{y_1''}{x_1''}, \frac{y_1' - y_1''}{x_1' - x_1''}$$

равняются тангенсам углов наклона к оси x линий CC_1 , CC_2 , C_2C_1 , соединяющих центры

$$\begin{aligned} &C, C_1, \\ &C, C_2, \\ &C_2, C_1, \end{aligned}$$

а отношения

$$\frac{a'' - m \cos A}{m \sin A}, \quad \frac{a' - m \cos A}{m \sin A},$$

где по нашему знакоположению

$$a'' = AA_2, \quad a' = AA_1, \quad m = AM$$

равны котангенсам углов AA_2M и AA_1M , мы заключаем, что найденные нами уравнения выражают равенство углов наклона линий CC_1 , CC_2 , C_1C_2 к оси x или к линии FG , параллельной ей, с дополнениями до $\frac{\pi}{2}$ углов наклона линий AM , A_1M , A_2M к линии AA_1 .

На основании этого по одной из точек A_1 , A_2 и соответствующему ей центру C_1 или C_2 , представляющих решение нашей задачи, легко найти другую и соответствующий ей центр, так как по выше показанному каждая из точек A_1 , A_2 и соответствующий ей центр вполне определяют треугольник CC_1C_2 , а этот треугольник, с своей стороны, определяет наклонение линий A_1M , A_2M к линии AA_1 .

§ 7. Показанный нами переход от одной из точек, A_1 , A_2 , к другой, описывающих при рассматриваемом нами движении треугольника бесконечно малые дуги, близкие к дугам круговым, может быть применен во всех тех случаях, когда имеется в виду при таком движении треугольника получить кривую, которой несколько точек лежат на одном круге в расстоянии более или менее близком друг от друга. В самом деле, нетрудно показать, что для точек A_1 , A_2 и центров C_1 , C_2 , при которых имеют место равенства

$$C_2SC = \frac{\pi}{2} - MAA_1,$$

$$C_2Cx = \frac{\pi}{2} - MA_1A,$$

$$C_1Cx = \frac{\pi}{2} - MA_2A,$$

разность

$$AA_2 \cdot A_1C_1^2 - AA_1 \cdot A_2C_2^2$$

при рассматриваемом нами движении треугольника сохраняет одну и ту же величину, вследствие чего всякий раз, когда одно из расстоя-

ний A_1C_1 , A_2C_2 возвращается к какой-либо прежней величине своей, то же случается и с другим расстоянием, а потому точки A_1 , A_2 будут одновременно приходить на круги, описанные из центров C_1 , C_2 некоторыми радиусами.

Приступая к доказательству неизменяемости разности

$$AA_2 \cdot A_1C_1^2 - AA_1 \cdot A_2C_2^2$$

в сделанных нами предположениях, оставляем прежнее знакоположение, по которому

$$MAA_1 = A,$$

и полагаем

$$MA_1A = A_1,$$

$$MA_2A = A_2;$$

при этом предыдущие равенства представляются так:

$$C_2SC = \frac{\pi}{2} - A, \quad C_2Cx = \frac{\pi}{2} - A_1, \quad C_1Cx = \frac{\pi}{2} - A_2.$$

Определяя по этим величинам углов C_2SC , C_2Cx , C_1Cx углы треугольника C_1CC_2 , находим

$$C_1CC_2 = C_2Cx - C_1Cx = A_2 - A_1,$$

$$CC_1C_2 = C_1Cx + C_2SC = \pi - A - A_2,$$

$$CC_2C_1 = \pi - C_2Cx - C_2SC = A + A_1.$$

По этим величинам углов треугольника, полагая для сокращения

$$C_1C_2 = l,$$

мы находим такие выражения для длины его сторон CC_1 , CC_2 :

$$CC_1 = \frac{\sin(A + A_1)}{\sin(A_2 - A_1)} l, \quad CC_2 = \frac{\sin(A + A_2)}{\sin(A_2 - A_1)} l.$$

Определяя по длине этих линий координаты x'_1 , y'_1 , x''_1 , y''_1 центров C_1 , C_2 , получаем

$$x'_1 = CC_1 \cos C_1Cx = \frac{\sin(A + A_1)}{\sin(A_2 - A_1)} \cos C_1Cx \cdot l,$$

$$y'_1 = CC_1 \sin C_1Cx = \frac{\sin(A + A_1)}{\sin(A_2 - A_1)} \sin C_1Cx \cdot l,$$

$$x''_1 = CC_2 \cos C_2Cx = \frac{\sin(A + A_2)}{\sin(A_2 - A_1)} \cos C_2Cx \cdot l,$$

$$y''_1 = CC_2 \sin C_2Cx = \frac{\sin(A + A_2)}{\sin(A_2 - A_1)} \sin C_2Cx \cdot l,$$

что по внесении выше показанных величин углов C_1Cx , C_2Cx нам дает

$$\begin{aligned} x'_1 &= \frac{\sin(A + A_1)}{\sin(A_2 - A_1)} \sin A_2 \cdot l, & y'_1 &= \frac{\sin(A + A_1)}{\sin(A_2 - A_1)} \cos A_2 \cdot l. \\ x''_1 &= \frac{\sin(A + A_2)}{\sin(A_2 - A_1)} \sin A_1 \cdot l, & y''_1 &= \frac{\sin(A + A_2)}{\sin(A_2 - A_1)} \cos A_1 \cdot l. \end{aligned}$$

С другой стороны, определяя стороны AA_1 , AA_2 треугольников AA_1M , AA_2M по стороне $AM = m$, находим

$$AA_1 = \frac{\sin AMA_1}{\sin MA_1A} m, \quad AA_2 = \frac{\sin AMA_2}{\sin MA_2A} m,$$

что по внесении величины углов $MA_1A = A_1$, $MA_2A = A_2$, $AMA_1 = \pi - A - A_1$, $AMA_2 = \pi - A - A_2$ приводится к следующему:

$$AA_1 = \frac{\sin(A + A_1)}{\sin A_1} m, \quad AA_2 = \frac{\sin(A + A_2)}{\sin A_2} m.$$

Переходя к определению квадратов расстояний A_1C_1 , A_2C_2 , мы замечаем, что они получаются из формулы (1), когда в ней за x_1 , y_1 возьмется найденные нами величины координат центров C_1 , C_2 , а за a длины линий AA_1 , AA_2 .

Перемножая величины $A_1C_1^2$, $A_2C_2^2$, таким образом получаемые, на выше показанные величины AA_2 , AA_1 и вычитая произведения, мы находим, что разность

$$AA_2 \cdot A_1C_1^2 - AA_1 \cdot A_2C_2^2$$

приводится к выражению

$$\begin{aligned} & - \frac{\sin A \cdot \sin(A_2 - A_1)}{\sin A_1 \cdot \sin A_2} mr^2 - \frac{\sin(A + A_1) \cdot \sin(A + A_2) \cdot \sin(A + A_1 + A_2)}{\sin A_1 \cdot \sin A_2 \cdot \sin(A_2 - A_1)} ml^2 + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\sin(A + A_1) \cdot \sin(A + A_2)}{\sin A_1 \cdot \sin A_2} blm - \frac{\sin(A + A_1) \cdot \sin(A + A_2) \cdot \sin(A_1 - A_2) \cdot \sin A}{\sin^2 A_1 \cdot \sin^2 A_2} m^2, \end{aligned}$$

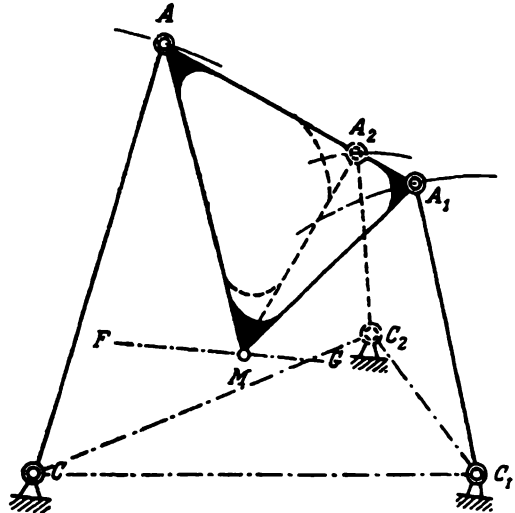
которое, не заключая в себе переменного угла α , будет сохранять одну и ту же величину при рассматриваемом нами движении треугольника.

§ 8. По доказанному нами относительно точек треугольника, которые при движении его одною вершиною по кругу, а другою по прямой одновременно приходят на окружности некоторых кругов, можно найти во всяком параллелограмме, состоящем из треугольника и двух радиусов, точку, которая приближенно описывает дугу круга и притом с такою же степенью точности, с которою параллелограмм дает прямолинейное движение. В самом деле, пусть будет (фиг. 3) параллелограмм, состоящий из треугольника AA_1M и радиусов AC , A_1C_1 , вращающихся около центров C , C_1 ; FG — та прямая, с которою имеет несколько общих точек кривая, описываемая вершиною M , и пусть будут A_2 , C_2 — точка треугольника AA_1M и соответствующий ей центр,

определенные, как было показано, в предположении, что треугольник AA_1M движется вершиною M по прямой FG , вершиною же A по кругу C .

При движении треугольника AA_1M в параллелограме те положения его, при которых вершина M находится на прямой FG , очевидно, могут быть рассматриваемы как происшедшие от движения его вершиною M по прямой FG , а при таком движении треугольника, как видели, точки A_1, A_2 одновременно приходят на круги, описанные из центров C_1, C_2 .

А потому всякий раз, когда в рассматриваемом параллелограме точка M будет на прямой FG , точка A_2 будет на окружности, описанной из центра C_2 некоторым радиусом: и, следовательно, кривая, описываемая точкою A_2 , будет иметь столько же общих элементов с кругом, сколько будет иметь общих элементов с прямою FG кривая, описываемая вершиною M . Так как при движении треугольника AA_1M вершинами A, A_1 , по кругам C, C_1 , одновременно будут приходить на прямую FG вершина M , а на круг C_2 точка A_2 , то те положения его при рассматриваемом нами движении, в которых вершина M находится на прямой FG , будут также получаться при движении его точкою A_2 по кругу C_2 и одной из вершин A, A_1 по кругу C или C_1 . Откуда видно, что при движении треугольников AA_2M, A_2A_1M , отдельно взятых, вершинами



Фиг. 3

$A, A_2,$
 A_2, A_1

по кругам

$C, C_2,$
 C_2, C_1

вершина M будет описывать кривые, которых точки пересечения с прямою FG будут те же, как и для кривой, получаемой при движении треугольника AA_1M вершинами A, A_1 по кругам C, C_1 . Это показывает нам, что при перемене в данном параллелограме треугольника AA_1M на треугольник AA_2M или A_2A_1M и соответственно с этим при замене вращающегося радиуса A_1C_1 или AC радиусом A_2C_2 ни число точек, в которых кривая, описываемая вершиною M , пересекает прямую FG ни места этих точек не переменятся.

СЧЕТНАЯ МАШИНА С НЕПРЕРЫВНЫМ ДВИЖЕНИЕМ*

(Перевод К. Э. Рериха)

Как ни просто правило сложения, его не легко выполнить при помощи механизмов. Трудность, встречаемая при этом, заключается в прерывном изменении цифр суммы, которое может быть произведено лишь при помощи сложных и деликатных органов. Многочисленные попытки построить машину, могущую выполнять прерывное изменение нескольких цифр суммы, как произведенные ранее доктора Рота (Roth), так и сама машина доктора Рота, которая могла выполнять такое изменение, ясно показали, как важно для упрощения складывателей избавиться от необходимости прерывно изменять их показания. Несомненно, машины эти, которые, так же как и все другие счетные машины, только повторяют сложения или вычитания, было бы гораздо легче строить, если бы можно было удовлетвориться непрерывными изменениями их показаний. Но так как при этом чтение цифр становится более трудным, то является следующий вопрос: нельзя ли ослабить неудобство, происходящее от непрерывной смены в показаниях складывателя, не рискуя результатом ввиду выгод, представляемых этой непрерывностью для построения машины?

В машине для сложения, которую я имел честь представить конгрессу в Клермон-Ферране и которая в настоящее время дополнена механизмом для умножений и делений, это неудобство почти устранено. В окошечках этой машины видны белые полосы, между которыми легко различить главную, видную во всех окошечках. Так как в первом окошечке справа видно только начало этой полосы, то за нею легко проследить, идя справа налево. Эта-то полоса и содержит все цифры суммы.

Перейдем теперь к условиям, которым должны быть подчинены движения барабанов, несущих на себе цифры суммы. Условимся называть *приемниками* зубчатые колеса, которые надо вращать для сложения чисел и из которых каждое соответствует единицам опре-

* Опубликовано в La Revue Scientifique de la France et de l'étranger. Troisième Série, Tome IV (XXX de la collection). Numéro 13 du 23 septembre 1882; русский перевод К. Э. Рериха — в Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соянина, том II, СПб., 1907, стр. 721—724.— *Ред.*

деленного порядка. Согласно правилам сложения, движение каждого барабана должно слагаться из двух следующих: из движения, определяемого цифрой соответственного порядка прибавляемого числа, и из движения, происходящего от переноса цифр низшего порядка. Скорость первого движения должна быть в постоянном соотношении со скоростью соответственного приемника; это соотношение будет равно отношению числа зубцов приемника к полному числу цифр, вырезанных на барабане. Для выполнения второго движения барабан должен повернуться на угол, равный расстоянию между двумя цифрами каждый раз, когда предшествующий барабан повернется на угол в десять раз больший. Следовательно, в случае непрерывного и равномерного движения это второе перемещение каждого барабана должно совершаться в десять раз медленнее движения барабана, ему предшествующего. Итак, скорость каждого барабана должна состояться из скорости соответствующего приемника, умноженной на постоянный коэффициент, и из десятой части скорости предшествующего барабана. Такое составное движение барабанов легко выполнить при помощи *эпициклических механизмов*, если насадить все *колеса-приемники* и все барабаны на одну общую ось и если каждый приемник находится между барабанами, ему соответствующим и ему предшествующим. Для этого достаточно снабдить каждое колесо-приемник эпициклическим механизмом, зубцы которого сцепляются с соответственными колесами барабанов, между которыми оно расположено.

По свойствам такого сцепления известно, что для сообщения барабанам скорости, составленной сообразно ранее изложенному, необходимо и достаточно выполнить следующие два условия:

- 1) Число зубцов колес-приемников и число цифр на барабанах должны быть в отношении 9 к 10.
- 2) Отношение чисел зубцов колес, составляющих каждый эпициклический механизм, должно быть в десять раз больше отношения зубцов в колесах, с которыми они сцепляются.

Условия эти очень легко выполнимы.

В машине, построенной мною, для выполнения первого условия колеса-приемники снабжены 27 зубцами, а на барабане выгравированы три раза десять цифр 0, 1, 2, ...; 9. Сообразно второму условию колеса, составляющие эпициклические механизмы, имеют 48 и 12 зубцов, а колеса, с которыми они сцепляются, имеют 24 и 60 зубцов. Таким образом части механизмов, производящих прерывные изменения цифр суммы при переносе, заменены эпициклическими механизмами, производящими то же действие постепенно.

Разница между истинной величиной переноса и величиной, даваемой эпициклическими механизмами, всегда меньше единицы, так как угловые расстояния между положением барабанов в этой машине и тем, которое они занимали бы в машине с прерывным движением, всегда менее расстояния между двумя цифрами. Следовательно, если сделать окошечки достаточно большими, так чтобы в них были видимы

одновременно две цифры барабана, то истинные цифры суммы. очевидно, должны быть в них видны. Что же касается двойственности, представляющей всякий раз, когда в одном и том же окошечке видны две различные цифры, то она легко устраняется благодаря ранее упомянутым полоскам, проведенным на каждом барабане, если, кроме того, обратить еще внимание на угловые отклонения в положении цифр следующего барабана.

Таковы существеннейшие части машины для сложения. Добавочные органы суть следующие:

1) Задержки с пружинками, заставляющие колеса-приемники всегда возвращаться в их нормальные положения и там оставаться до тех пор, пока их не повернут, что имеет значение для правильного действия машины.

2) Штанга с захватками, при помощи которых последовательно устанавливают все барабаны на нуль, начиная с первого правого, и которые приводят в действие притягиванием к себе пуговки с левой стороны машины. Ею пользуются для установки на нуль числа, указываемого барабанами, после чего нужно пуговки отодвинуть назад, чтобы освободить движение всех барабанов и всех приемников.

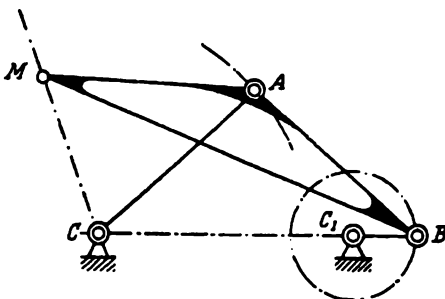
Рассматривая движение барабанов, мы говорили только о сложении; но очевидно, для выполнения вычитания достаточно вращать колеса-приемники в обратную сторону.

Дополняя эту машину механизмом, позволяющим прибавлять или вычитать данное число желаемое количество раз, можно будет пользоваться ею для выполнения умножений и делений. Такой механизм легко составить из зубчатых колес, могущих сцепляться с колесами-приемника; на продолжения осей этих зубчатых колес насажены шестерни, могущие скользить вдоль осей и с своей стороны сцепляющиеся, смотря по занимаемому ими месту с колесами с 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 зубцах, собранными вместе так, чтобы представлять собой зубчатый барабан. Ясно, что при поворачивании этого барабана один раз в том или ином направлении прибавится или вычтется число, цифры различных порядков которого равны числам зубцов, толкающих соответственные шестерни.

Для точного действия этого механизма важно, чтобы шестерни останавливались тотчас же после того, как зубцы цилиндра перестали их толкать. Пытаясь сделать совершенно невозможными ошибки, происходящие от того, что шестерни не всегда останавливаются одинаково скоро, даже при действии пружин, мы придали зубцам шестерен и цилиндра такую форму, что шестерни никогда не остаются свободными и, следовательно, перестают вращаться в тот момент, когда зубцы цилиндра их больше не толкают.

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ДВИЖЕНИЕ ПО НЕКОТОРЫМ ЛИНИЯМ ПРИ ПОМОЩИ СОЧЛЕНЕННЫХ СИСТЕМ*

1. Пусть будут (фиг. 1) ABC , ABM два равнобедренных треугольника, имеющие общий бок AB , равный сторонам AC , AM . Если заставим двигаться вершины A , B треугольника ABM по кругам, описанным из вершины C треугольника ABC и из какой-либо точки C_1 , взятой на его боке BC , то вершина M треугольника ABM опишет, в чем нетрудно убедиться, кривую, расположенную симметрично около оси, проходящей через точки M и C . Если линия BC_1 не слишком длинна, то она может совершить полный оборот около центра C_1 , и тогда точка M опишет кривую сомкнутую, симметричную около оси, как это было сейчас сказано. Это-то нам и представляет весьма простое преобразование вращательного движения в движение по сомкнутым линиям, крайне разнообразным и симметричным около осей.



Фиг. 1

Подобное преобразование вращательного движения могло бы быть с выгодой употреблено в практике, если бы нашли условия, под которыми кривая, описанная точкою M , приближается достаточно близко к тем, которые доставляют решение некоторых кинематических задач. Вот это-то мы и исполним теперь относительно случаев, простейших и употребительнейших в практике, так, например, когда имеется в виду получить движение по кругу или по прямой линии.

2. Остановимся сначала на том случае, когда точка M должна описывать приблизительно полный круг, причем линия BC_1 обращается один раз около центра C_1 . Данными мы предположим длины $AC=AB$,

* Опубликовано в Bulletin de la société mathématique de France, t. XII, 1884, p. 179—187; Школа математики чистой и прикладной, № 1, 1885, СПб; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Соина, том II, СПб., 1907, стр. 726—732.—Ред.

BC_1 и расстояние CC_1 центров C и C_1 , а станем искать круг, к которому приличным выбором угла BAM наиболее приближается кривая, описанная точкою M . По выражению предела для уклонений, представляемых этою кривою от круга, к которому она как только возможно приближается, легко будет видеть условия, которые должны быть выполнены длиною линий $AC=AB$, BC_1 и расстоянием центров C и C_1 , чтобы эти уклонения можно было допустить в практике.

Для достижения этой цели вычислим сперва наклонения линии AC к CC_1 (линии центров C , C_1) для двух положений, соответствующих моментам, когда точка B находится на линии CC_1 или на ее продолжении.

Обозначая через φ_1 , φ углы этих наклонений, найдем при помощи формул

$$\cos \varphi = \frac{CC_1 + BC_1}{2AC}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{CC_1 - BC_1}{2AC}.$$

По углам φ и φ_1 отыщутся два вспомогательных угла θ , ψ , определяющиеся следующим образом

$$\sin(2\theta - \varphi_1) = \frac{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}}, \quad \cos \psi = \frac{\cos^2 \theta}{\cos \varphi_1}.$$

А при знании углов φ , φ_1 , θ , ψ найдется все, что важно в вопросе: 1) угол BAM , при котором треугольник ABM своею вершиною M описывает кривую, возможно близкую к кругу; 2) радиус круга, к которому наиболее приближается эта кривая; 3) расстояние его центра от точки C ; 4) наконец, предел уклонений этого круга от кривой, описанной вершиною M . Все это достигается при помощи следующих формул

$$\begin{aligned} BAM &= 2\pi - 2\theta - \varphi - \psi, \\ R &= \frac{\sin \frac{2\theta - \varphi_1 + \psi}{2}}{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2}} BC_1, \\ OC &= \frac{\cotang \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cdot \cos \psi}{\tang \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \cdot \cos \frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} BC_1, \\ E &= \pm \frac{\sin \frac{\psi + \varphi_1 - 2\theta}{2} \cdot \sin \frac{2\theta + \varphi + \psi}{2}}{\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cdot \tang \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \cdot \cos \frac{2\theta + \varphi - \psi}{2}} BC_1, \end{aligned}$$

где R (фиг. 2) есть радиус круга, описанного приблизительно вершиною M , OC есть расстояние его центра O от точки C и E есть предел уклонений этой кривой.

3. В силу значения количества E и уравнений, определяющих вспомогательные углы θ и φ , ясно, что кривая, описанная вершиною M , приближается весьма близко к кругу каждый раз, как разность углов φ_1 , φ будет весьма мала. Для приложения предыдущих формул к этому частному случаю, интереснейшему в практике, сделаем

$$\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} = \varphi_0, \quad \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} = \delta$$

и предположим, что δ имеет малое значение. Из этих равенств имеем

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta, \quad \varphi = \varphi_0 - \delta.$$

Внося эти значения количеств φ , φ_1 в предыдущие формулы, развывая в ряд и удерживая при этом первые члены с δ , получим

$$BAM = 2\pi - 4\varphi_0 - \frac{3\tang^2 \varphi_0 - 1}{4\tang \varphi_0} \delta^2, \quad R = \left(1 + \frac{3\tang^2 \varphi_0 - 1}{8\tang^2 \varphi_0} \delta^2\right) BC_1,$$

$$OC = \left(\frac{\cotang \varphi_0}{\delta} + \frac{5 - 3\tang^2 \varphi_0}{24\tang \varphi_0} \delta\right) BC_1, \quad E = \pm \frac{\delta}{\sin 2\varphi_0} BC_1.$$

Эти формулы, приблизительно до δ^2 , доставляют

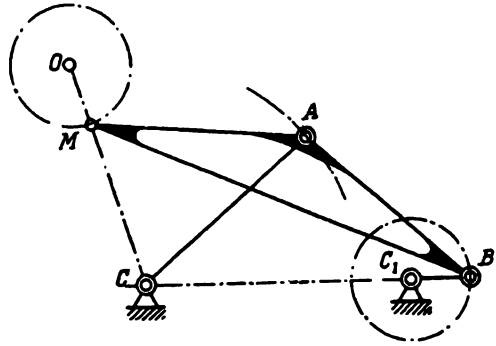
$$\frac{E}{R} = \pm \frac{\delta}{\sin 2\varphi_0}.$$

С другой стороны, отыскивая разность

$$\cos \varphi - \cos \varphi_1,$$

по формулам, определяющим углы φ , φ_1 , получим

$$\cos \varphi - \cos \varphi_1 = \frac{BC_1}{AC},$$



Фиг. 2

откуда, подставляя значение количеств φ , φ_1 , выведем, приблизительно до δ^2 ,

$$\frac{BC_1}{AC} = 2\delta \sin \varphi_0.$$

На этом основании видно, что отношения

$$\frac{E}{R}, \quad \frac{BC_1}{AC}$$

стремятся к нулю в то же время, когда сама разность $\varphi_1 - \varphi = \delta$ приближается к нулю, и так как по разделении одного из этих отношений на другое получается

$$\frac{E}{R} : \frac{BC_1}{AC} = \pm \frac{1}{2\sin 2\varphi_0 \cdot \sin \varphi_0},$$

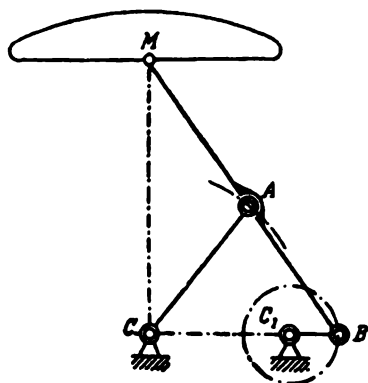
где α означает переменный угол, составляемый линией BC_1 во время вращения с продолжением линии центров CC_1 , а F есть постоянное количество, равное

$$\frac{2\sqrt{2-t^2}}{(1+t\sqrt{2-t^2})^2}.$$

В силу этой формулы нетрудно назначить пределы, между которыми остается точка M во время своего движения и которые определяют длину прямой линии, приблизительно описанной.

С другой стороны, эта формула показывает, что движения вперед и назад точки M не соответствуют тем же углам вращения линии BC_1 около центра C_1 и что разность между этими двумя углами тем более, чем количество t более удаляется от 0; следовательно, эта система представляет прямое преобразование непрерывного вращательного движения в

прямолинейное движение попеременное и *vice versa*, в котором движения вперед и назад совершаются в неравные времена, причем скорость вращения будет постоянною. Эта система может быть употреблена как *механизм со скорым возвратом*. Сверх того, так как точка M совершает один из своих путей, почти прямолинейный, в то время, когда линия BC_1 делает около центра C_1 более



Фиг. 4

полуоборота, то эта система может быть выгодно употреблена, чтобы заставить вертеться ось при помощи одной ноги. Прилагая такие системы к двум рукояткам, направленным к оси под углом 180° , получим механизм для вращения оси двумя ногами, имеющий то преимущество, что он не представляет мертвых точек.

5. В предыдущем случае мы постарались приблизить как можно только больше к прямой линии всю сомкнутую кривую, описанную точкою M , когда вращающаяся линия BC_1 совершает полный оборот около центра C_1 . Теперь займемся случаем, когда изыскивается то же приближение для части этой кривой, соответствующей полуобороту линии BC_1 около центра C_1 , а именно от $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ до $\alpha = +\frac{\pi}{2}$.

Ограничиваемся простейшим случаем, когда треугольник MAV приводится к прямой линии MAV (фиг. 4), что сводится к тому, что углу MAV дается значение $=180^\circ$. В этом случае линия $AC=AB=AM$, CC_1 и предел уклонений E определяются следующими формулами:

$$AC=AB=AM=\frac{3+\sqrt{7}}{2} BC_1, \quad CC_1=\frac{4+\sqrt{7}}{3} BC_1,$$

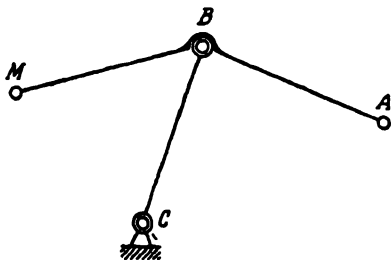
$$E=\pm \frac{\sqrt{272+104\sqrt{7}}-\sqrt{305+92\sqrt{7}}}{12} BC_1.$$

По уравнению кривой, которую описывает точка M в этой системе, легко обнаруживается, что часть, соответствующая вращению линии BC_1 на четверть оборота вверх и вниз относительно первоначального положения, будет почти прямолинейная. Пройдя эту часть своей траектории, точка M поднимается и совершает возвратный ход, возвышаясь мало-помалу до середины своего хода и опускаясь по тому же закону по достижении этой середины. Такое движение точки M , в которое прямо преобразовывается вращательное движение линии BC_1 в нашей системе, может иметь полезные приложения. Если применим подобные системы к двум рукояткам, расположенным к оси под углом 180° , получится механизм, в котором вращение оси преобразовывается в движение двух точек, которые попеременно пробегают ту же линию, почти прямую, и из которых каждая поднимается над этой линией, пробежав ее, когда другая спускается на нее, чтобы в свою очередь пройти ее.

Рассматривая только пространство, где находится почти прямолинейная часть траектории этих точек, легко открывается, что они приблизительно производят то же действие, как точки равноудаленные от окружности вертящегося колеса, которого радиус бесконечно велик. Следовательно, в этом отношении система, о которой шла речь, может хорошо играть роль бесконечно большого колеса.

О ПРОСТЕЙШЕЙ СУСТАВЧАТОЙ СИСТЕМЕ, ДОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЯ, СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОКОЛО ОСИ*

§ 1. Для преобразования движения на плоскости простейшим средством представляется суставчатая система, составленная из линии, вращающейся около неподвижного центра, и линии, сочлененной с нею. Все точки первой линии могут двигаться только по концентрическим кругам; точки же второй линии могут двигаться по различным кривым, причем кривые, описываемые одновременно ее точками, значительно разнятся между собою по виду. Вследствие этого при движении одной из ее точек по какой-либо кривой в других точках ее получают движения по кривым иного вида. При таком преобразовании движения особенного внимания заслуживают точки второй линии, которых расстояния от оси сочленения ее с первой линией равны расстоянию этой оси от неподвижного центра вращения последней линии. Нетрудно показать, что при движении одной из таких точек по кривой, симметрической около оси, проходящей через неподвижный центр вращения, другая описывает кривую, имеющую то же свойство. Из этого видно, что всякая ломаная линия ABM (фиг. 1), сочлененная с прямою BC , вращающейся около неподвижного центра C , при равенстве



Фиг. 1

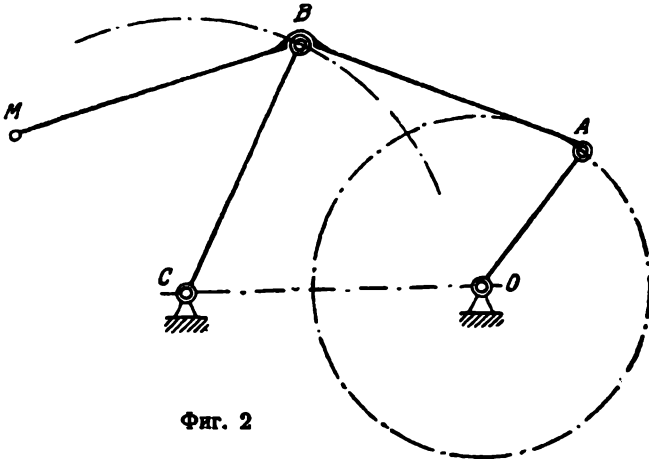
$$AB=BM=BC,$$

доставляет средство преобразовывать движение по кривой, симметрической около оси, проходящей через центр C , в движение по кривой другого вида, имеющей то же свойство. Вид и положение последней кривой будет меняться при перемене угла ABM и места центра

* Читано 27 (15) ноября 1883 г. в заседании Физ.-Мат. Отд. Имп. Акад. Наук. Опубликовано в Приложении к LX тому Зап. Имп. Акад. Наук, № 1, 1889; Собр. соч. П. Л. Чебышева под ред. А. А. Маркова и Н. Я. Сонина, том II; СПб., 1907, стр. 493—540.— *Ред.*

вращения C , который, согласно выше сказанному, должен находиться на оси симметрии первой кривой.

Преобразовывая таким образом движение точки A , когда она представляет конец радиуса OA (фиг. 2), вращающегося около центра O , мы получаем составчатую систему, в которой точка M описывает кривую, симметрическую около оси, проходящей через центр C . Если при этом расстояние центров C, O превосходит длину радиуса OA , для него возможно сделать полный оборот около центра O , по окончании которого точка M возвращается на свое первоначальное место, описав некоторую сомкнутую линию, симметрическую около оси, проходящей через центр C .



Фиг. 2

Такое преобразование вращательного движения может иметь полезное применение там, где представляется надобность дать точке движение, к которому достаточно близко подходит движение точки M в рассматриваемой нами системе при каких-либо размерах ее частей и положениях неподвижных центров вращения. Вся трудность в определении тех и других согласно с видом движения, которое желают получить.

Здесь мы займемся рассмотрением случаев, наиболее простых и наичаще представляющихся на практике, а именно когда имеется в виду получить движение по кривой, которой некоторая часть, более или менее значительная, мало разнится от дуги круга или от прямой линии.

§ 2. В рассматриваемой нами системе (фиг. 3) точки A, B движутся по кругам, которых центры суть O, C , причем длина линий AB, BM и величина угла ABM не меняются; вследствие этого имеют место такие равенства:

$$ABM = A_0B_0M_0,$$

$$OA = OA_0, \quad CB = CB_0.$$

Из последнего равенства следует равенство между собою шести линий

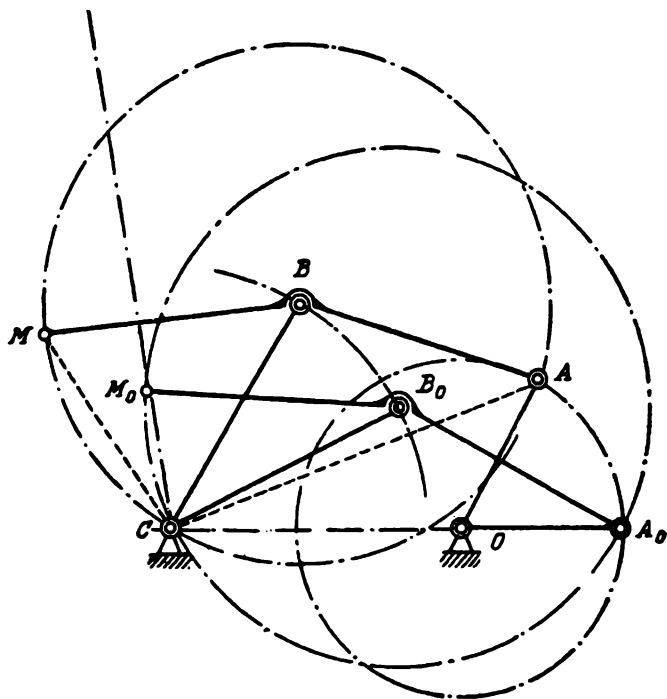
$$A_0B_0, B_0M_0, B_0C, AB, BM, BC,$$

так как по сказанному в § 1

$$A_0B_0=B_0M_0=B_0C, \quad AB=BM=BC,$$

откуда ясно, что точки A_0, C, M_0 лежат на круге, описанном из центра B_0 , а точки A, C, M — на круге, описанном из центра B ; а потому углы $ACM, ABM, A_0CM_0, A_0B_0M_0$ связаны между собою равенствами

$$2ACM + ABM = 2\pi, \quad 2A_0CM_0 + A_0B_0M_0 = 2\pi,$$



Фиг. 3

которые дают

$$2ACM + ABM = 2A_0CM_0 + A_0B_0M_0.$$

Замечая, что

$$ABM = A_0B_0M_0,$$

$$ACM = ACM_0 + M_0CM, \quad A_0CM_0 = ACM_0 + A_0CA,$$

мы из последнего равенства выводим

$$M_0CM = A_0CA. \quad (1)$$

На основании этой формулы и полагая

$$OA_0 = OA = r, \quad OC = d,$$

$$AB = BM = BC = A_0B_0 = B_0M_0 = B_0C = 1,$$

$$ABM = A_0B_0M_0 = \omega,$$

мы теперь найдем длину радиуса-вектора CM и угол наклонения его к линии CM_0 , определяющие место точки M при каком-нибудь наклонении радиуса OA к линии центров COA_0 . Эти величины особенно просто выражаются через угол ABC , которого переменную величину мы будем изображать через φ и по которому легко находится соответствующее положение радиуса OA .

Из равнобедренного треугольника CBM , где

$$CB=1, \quad BM=1,$$

выводим

$$CM=2\sin\frac{CBM}{2}, \quad (2)$$

что по равенству

$$CBM=ABM-ABC=\omega-\varphi$$

дает такую формулу для определения радиуса-вектора CM :

$$CM=2\sin\frac{\omega-\varphi}{2}.$$

Переходя к определению угла наклонения его к линии CM_0 , мы по (1) находим

$$MCM_0=ACA_0,$$

а из треугольника ACO выводим

$$\cos ACA_0=\frac{AC^2+CO^2-AO^2}{2AC\cdot OC},$$

вследствие чего для определения угла MCM_0 получается такая формула:

$$\cos MCM_0=\frac{AC^2+CO^2-AO^2}{2AC\cdot OC}.$$

Замечая же, что равнобедренный треугольник ABC , где

$$AB=1, \quad BC=1, \quad ABC=\varphi,$$

дает

$$AC=2\sin\frac{\varphi}{2}$$

и что по нашему знакоположению

$$AO=r, \quad CO=d,$$

мы по этой формуле находим

$$\cos MCM_0=\frac{4\sin^2\frac{\varphi}{2}-r^2+d^2}{4d\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

При определении угла MCM_0 по этому уравнению остается неизвестным его знак. Этот знак мы легко узнаем, замечая по (1), что

угол MCM_0 равняется углу ACA_0 ; угол же ACA_0 имеет величину положительную или отрицательную, смотря по тому, выше или ниже линии центров COA_0 лежит точка A . Вследствие этого одной и той же величине угла φ будет соответствовать два положения и точки A и точки M ; в одном точка A будет выше линии центров COA_0 , а точка M будет по левую сторону линии CM_0 , в другом точка M ниже линии COA_0 , а точка M направо от линии CM_0 . Что касается определения угла AOA_0 по углу $ACB=\varphi$, то из треугольника AOC выходит

$$\cos AOA_0 = \frac{AC^2 - AO^2 - OC^2}{2AO \cdot OC}.$$

Замечая, что

$$AC = 2 \sin \frac{\varphi}{2}, \quad AO = r, \quad OC = d,$$

мы из этого равенства выводим

$$\cos AOA_0 = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - r^2 - d^2}{2dr}.$$

Так как по выше показанному одной и той же величине угла φ будут соответствовать два положения и радиуса OA и радиуса-вектора CM , различающиеся между собою только знаками углов AOA_0 , MCM_0 , то при вращении радиуса OA вверх и вниз от линии центров COA_0 на один и тот же угол точка M опишет кривую, симметрическую около оси CM_0 . Изображая через α предельную величину угла AOA_0 при рассматриваемом нами движении системы и через

$$\varphi_0, \varphi_1$$

величины угла $ABC=\varphi$, соответствующие

$$AOA_0=0, \quad AOA_0=\pm \alpha,$$

мы замечаем, что при переходе угла AOA_0 от 0 до $+\alpha$ или $-\alpha$ угол φ будет переходить от φ_0 до φ_1 .

Прилагая формулу, сейчас нами выведенную, к частному случаю

$$AOA_0=\alpha, \quad \varphi=\varphi_1,$$

мы находим такое уравнение между предельными величинами углов AOA_0 и $ABC=\varphi_1$:

$$\cos \alpha = \frac{4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} - d^2 - r^2}{2dr},$$

откуда выходит

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(d+r)^2 - 4 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}}{4dr}. \quad (3)$$

§ 3. Переходя к определению условий, при которых кривая, описываемая точкою M в выше показанных пределах, по возможности

Мы теперь займемся определением условий, при которых эта разность наименее удаляется от 0, когда угол φ , согласно выше сказанному, не выходит за пределы

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1.$$

§ 4. Полагая в выведенной нами формуле

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = x,$$

мы замечаем, что она приводится к следующему:

$$MO_1^2 - R^2 = K \left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 \right], \quad (4)$$

где

$$K, p_1, p_2, p_3$$

потсоюзные, которых величина по

$$r, d, \omega, O_1 C, R$$

определяется так:

$$K = - \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}{d}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 4 \frac{\sin \omega \cdot d + \sin \frac{\omega}{2} \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}, \\ p_2 &= -4 \frac{\cos \omega \cdot d + \cos \frac{\omega}{2} \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$p_3 = \frac{(R^2 - 2 + 2 \cos \omega - O_1 C^2) d - \cos \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}{\sin \frac{\omega}{2} \cdot (d^2 - r^2) \cdot O_1 C}. \quad (7)$$

Из формулы (4) видно, что при той же величине коэффициента K разность

$$MO_1^2 - R^2$$

будет оставаться тем ближе к нулю, чем менее удаляется от нуля функция

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3,$$

а потому для уменьшения по возможности предельной величины разности

$$MO_1^2 - R^2$$

при значениях φ , заключающихся между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$, мы должны сделать функцию

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

наименее удаляющуюся от нуля между $x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$.

Для достижения этого мы прикладываем к функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

теорему, доказанную нами вообще о функциях наименее удаляющихся от нуля в мемуаре под заглавием „Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций“.*

На основании этой теоремы и изображая через

$$+L, -L$$

предельные значения функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

между

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

мы заключаем, что она должна не менее четырех раз достигать предельных величин $-L$, $+L$ при значениях x , не выходящих за пределы $x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$.

Мы теперь покажем, каким образом по этому свойству функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

она может быть найдена.

§ 5. Для этого мы замечаем, что все величины x , при которых функция

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3$$

в пределах

$$x \leq \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x \geq \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

достигает величин $+L$, $-L$, не переходя за них, должны равняться кратным корням уравнения

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 151—235.— Ред.

$$\left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L \right] \left[x - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right] \times \\ \times \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L \right] \left[x - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right] = 0. \quad (8)$$

В самом деле, по составу этого уравнения видно, что оно удовлетворяется при всякой величине x , делающей

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 = -L$$

или

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 = +L.$$

Если это случается при x , равном $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$ или $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, эти величины, как видно также по составу уравнения, будут его кратные корни.

Что же касается корней этого уравнения, лежащих между $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, они не могут быть не кратными, потому что при простых корнях уравнений

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0,$$

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L = 0$$

функция

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3,$$

достигнувши величины $-L$ или $+L$, переходит за эти величины.

Откуда видно, что в рассматриваемом нами случае уравнение (8) должно иметь по крайней мере четыре кратных корня, не выходящих за пределы

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

а это может иметь место только в том случае, когда оно имеет четыре двойных корня в пределах

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

так как оно по уничтожении радикалов приводится к уравнению 8-й степени. Два из этих корней видны по составу уравнения, они суть

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

Что касается остальных двух, то они, заключааясь между $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$, $\sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$, могут быть представлены так:

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}.$$

где φ_2, φ_3 некоторые углы, заключающиеся между φ_0, φ_1 .

§ 6. Мы теперь покажем, как найдутся функции

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L,$$

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L$$

по углам

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

и как определяются неизвестные углы φ_2, φ_3 .

По выше показанному относительно уравнения (8) видно, что уравнение

$$\left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L \right] \times$$

$$\times \left[(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L \right] = 0$$

будет иметь два простых корня

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

и два двойных

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}.$$

Так как это уравнение разлагается на два

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0,$$

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L = 0,$$

не имеющие общих корней и приводящиеся к кубическим, каждое из них будет иметь один простой корень и один двойной.

Остановливаясь на уравнении

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0$$

и полагая, что ему принадлежит простой корень

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

и двойной

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2},$$

мы замечаем, что произведение трех разностей

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2},$$

$$\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x},$$

$$\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x},$$

будучи приравнено нулю, дает уравнение

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 = 0.$$

имеющее также простой корень, равный $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$ и двойной корень, равный $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$. Но это уравнение, которого первая часть представляет функцию вида

$$(P_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + P_2x + P_3,$$

не может иметь три общих корня с уравнением

$$(p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = 0,$$

не будучи ему тождественным, а потому должно иметь место такое равенство:

$$\begin{aligned} & (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 + L = \\ & = \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Подобным образом находим

$$\begin{aligned} & (p_1x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2x + p_3 - L = \\ & = \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_1}{2} \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2. \end{aligned}$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получаем

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 - \\ - \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_1}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_3}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2 = 2L. \quad (10)$$

Это равенство, имеющее место при всяком x , дает, как мы увидим уравнения для определения неизвестных углов φ_2, φ_3 .

§ 7. Раскрывая скобки в последнем равенстве и заменяя котангенсы отношениями косинусов к синусам, мы находим, что оно по сокращении приводится к следующему:

$$2L = \left[\frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\sin \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}} \right] \sqrt{x(1-x)} + \frac{\cos \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} + \\ + 2 \frac{\cos \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_3}{2}} - \left[\frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \frac{\cos \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}} \right] x - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}},$$

откуда видно, что для возможности его при всякой величине x должно быть

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} &= \frac{\sin \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}, \\ \frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} &= \frac{\cos \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти равенства послужат нам для определения углов φ_2, φ_3 . Деля эти равенства друг на друга, получаем

$$\tan \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \tan \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right)$$

Так как углы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ заключаются между 0 и π , то это уравнение предполагает одно из двух: или равенство

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2},$$

или равенство

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \pm \pi.$$

Замечая же, что в последнем случае по (11) получается уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = - \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2},$$

которое невозможно при $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ положительных, не превосходящих π , мы заключаем, что должно быть

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}, \quad (12)$$

вследствие чего уравнения (11) дают

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}. \quad (13)$$

Из последних двух уравнений нетрудно вывести формулы для определения неизвестных углов φ_2, φ_3 .

В самом деле, по (12) имеем

$$\cos \varphi_3 = \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)$$

и вследствие того

$$\sin^2 \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)}{2},$$

что по внесении в уравнение (13) дает

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - \cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right)}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2},$$

откуда по раскрытии скобок и по разделении на $\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$ получается такое уравнение:

$$\sin^2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cotang^2 \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \cotang \frac{\varphi_2}{2} - \frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} + \cos^2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = 0.$$

Решая это уравнение относительно $\cotang \frac{\varphi_2}{2}$ и ограничиваясь одним положительным корнем, находим

$$\cotang \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \left[\sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} - \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}} \right]. \quad (14)$$

Так определяется угол φ_2 по данным углам φ_0, φ_1 .

Этот угол будет служить нам как вспомогательная величина для упрощения формул. Что касается угла φ_3 , то по (12) величина его легко получается, когда найден угол φ_2 .

§ 8. По углам

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$

нетрудно определить величины

$$L, p_1, p_2, p_3,$$

входящие в наши формулы.

Полагая в уравнении (10)

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2},$$

находим

$$2L = \left(\cotang \frac{\varphi_1}{2} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \right)^2.$$

что дает такую простую формулу для определения L :

$$L = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}.$$

Замечая же, что произведение

$$\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} \right) \left(\cotang \frac{\varphi_2}{2} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{1-x} \right)^2$$

после замены в нем котангенсов отношениями косинусов к синусам приводится к выражению

$$\left[\frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} x + 1 \right] \sqrt{\frac{1-x}{x}} - \frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot x - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}},$$

мы по (9) заключаем, что $p_1, p_2, p_3 + L$ имеют такие величины:

$$p_1 = \frac{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_2 = - \frac{\cos \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}},$$

$$p_3 + L = - \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} - 2 \frac{\cos \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_2}{2}}.$$

Последнее равенство по внесении в него выше найденной величины L дает

$$p_3 = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} - \cotang \frac{\varphi_0}{2} - 2 \cotang \frac{\varphi_2}{2}.$$

Так определяется величина коэффициентов

$$p_1, p_2, p_3,$$

с которыми функция

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

наименее удаляется от нуля между

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.$$

При этом, как видели, уклонения функции

$$(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3$$

от нуля не выходят за пределы

$$-L = -\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}, \quad L = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}};$$

этих же пределов она достигает четыре раза: при

$$x^2 = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$$

она достигает первого предела; при

$$x = \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \quad x = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}$$

второго.

§ 9. Переходя к определению величин

$$r, d, O_1 C, R,$$

при которых по § 4 разность

$$MO_1^2 - R^2$$

приводится к функции

$$K \left[(p_1 x + 1) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 \right],$$

мы вносим найденные нами величины коэффициентов

$$p_1, p_2$$

в уравнения (6), что дает нам

$$\frac{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = 4 \frac{d \sin \omega + O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2) O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}},$$

$$\frac{\cos\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = 4 \frac{d \cos \omega + O_1 C \cdot \cos \frac{\omega}{2}}{(d^2 - r^2) O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}.$$

Кроме того, из треугольника $A_0 B_0 C$ фиг. (4), где

$$A_0 B_0 = 1, \quad CB_0 = 1, \quad A_0 B_0 C = \varphi_0, \quad CA_0 = CO + OA_0 = d + r,$$

выходит

$$d + r = 2 \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Решая это уравнение вместе с двумя предыдущими относительно

$$r, d, O_1 C,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} r &= \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}, \\ d &= \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}, \\ O_1 C &= \frac{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin\left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2}\right)} \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Внося же эти величины в уравнение (3), получаем такую формулу для определения угла ω :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2\left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2}\right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (16)$$

Что касается радиуса R , то он найдется из уравнения (7) по внесении в него выше показанных величин

$$p_3, d, r, O_1 C.$$

§ 10. При величинах

$$r, d, O_1C, R,$$

таким образом получаемых, разность

$$MO_1^2 - R^2$$

приводится к функции

$$K \left[\left(p_1 x + 1 \right) \sqrt{\frac{1-x}{x}} + p_2 x + p_3 \right],$$

где по (5)

$$K = - \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

вследствие чего по сказанному выше об этой функции разность

$$MO_1^2 - R^2$$

между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ не будет выходить за пределы

$$\begin{aligned} & + \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d}, \\ & - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d} \end{aligned}$$

и будет достигать первого предела при

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_2,$$

а второго при

$$\varphi = \varphi_1, \quad \varphi = \varphi_3.$$

Откуда видно, что при движении рассматриваемой нами системы в пределах

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1$$

точка M (фиг. 5) не будет удаляться от центра O_1 на расстояние больше M_0O_1 , которого она достигает при $\varphi = \varphi_0$, и не будет приближаться к O_1 на расстояние меньше M_1O_1 , на котором она находится при $\varphi = \varphi_1$. Вследствие этого точка M будет оставаться между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 радиусами

$$R_0 = M_0O_1, \quad R_1 = M_1O_1. \quad (17)$$

Эти радиусы будут представлять предельные величины расстояния точки M от центра O_1 . Так как по выше сказанному расстояние MO_1 будет достигать предельной величины $R_0 = M_0O_1$, не переходя за нее при

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_2,$$

то первый круг будет касаться траектории точки M на оси симметрии CM_0 , где

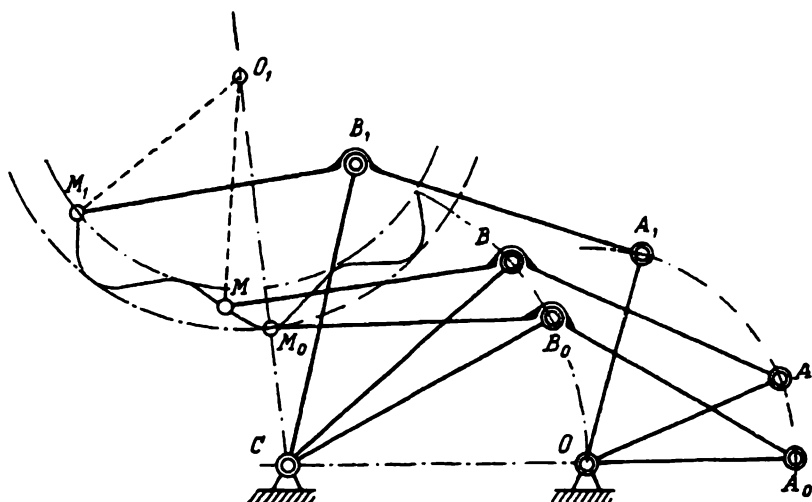
$$\varphi = \varphi_0,$$

и в двух местах по обе стороны этой оси, где

$$\varphi = \varphi_2.$$

Относительно второго круга мы замечаем, что он также будет касаться траектории точки M в двух местах по обе стороны оси симметрии там, где

$$\varphi = \varphi_3.$$



Фиг. 5

так как при этой величине угла φ расстояние O_1M достигает предела $R_1 = M_1O_1$, не переходя за него. Кроме того, на этом круге будут лежать концы траектории точки M , которых она достигает при предельной величине $\varphi = \varphi_1$, так как при этой величине φ расстояние MO_1 равняется $R_1 = M_1O_1$. Что касается радиусов R_0, R_1 , они связаны между собою очень простым уравнением, которое легко выводится из показанного нами относительно предельных величин разности

$$MO_1^2 - R^2.$$

В самом деле, по формулам (§ 10), определяющим эти величины, видно, что между $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_1$ наибольшая величина разности

$$MO_1^2 - R^2$$

есть

$$+ \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

а наименьшая

$$- \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d}.$$

Замечая по выше сказанному, что первая величина получается при

$$MO_1 = R_0,$$

а вторая при

$$MO_1 = R_1,$$

мы заключаем на основании этого, что

$$R_0^2 - R^2 = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

$$R_1^2 - R^2 = - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d},$$

откуда через исключение R^2 выводим

$$R^2 = R - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) \cdot O_1 C \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{d}. \quad (18)$$

§ 11. Мы теперь займемся приложением выведенных нами формул к некоторым частным случаям и начнем с тех, в которых ломаная линия ABM приводится к прямой, что по нашему знакоположению случается при равенстве

$$\omega = \pi.$$

Так как угол ω не входит в уравнение (14), определяющее угол φ_2 , то она остается без изменения; прочие же формулы по внесении π вместо ω упрощаются и приводятся к следующему:

$$\left. \begin{aligned} r &= \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \\ d &= \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_1 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$CO_1 = - \left[\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)} \right] \tan \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right), \quad (20)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (21)$$

Из этих формул получаются очень простые результаты в двух частных предположениях, а именно:

1) когда предполагается

$$CO_1 = \infty,$$

и 2) когда предполагается

$$\alpha = \pi.$$

В первом случае рассматриваемая нами система дает движение, близкое к прямолинейному, во втором — близкое к круговому.

Остановившись на первом случае, мы по (20) замечаем, что CO_1 обращается в ∞ только при равенстве

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2}, \quad (22)$$

которое дает

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}.$$

Внеся эту величину φ_2 в уравнения (19), находим

$$r = \frac{3}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{1}{2}, \quad d = \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}, \quad (23)$$

откуда по исключении $\sin \frac{\varphi_0}{2}$ получается такое простое уравнение:

$$2 + r = 3d,$$

которому должны удовлетворять величины r, d в рассматриваемой нами системе для того, чтобы она, состоя из трех прямых, могла давать движение, близкое к прямолинейному в пределах более или менее широких.

Так как при равенстве

$$O_1 C = \infty$$

центр O_1 удаляется в ∞ , то дуги концентрических кругов, между которыми по § 10 будет оставаться точка M при своем движении, обращаются в параллели, перпендикулярные к оси симметрии CM_0 и удаленные друг от друга на расстояние, равное предельной величине

$$R_0 - R_1$$

при

$$CO_1 = \infty.$$

Определяя же этот предел по уравнению (18) и замечая (фиг. 5), что отношение

$$\frac{O_1 C}{R_0} = \frac{O_1 C}{M_0 O_1} = \frac{O_1 C}{O_1 C - CM_0}$$

при

$$O_1 C = \infty$$

приводится к 1, находим, что этот предел равняется

$$\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} d}.$$

Вследствие этого, изображая через D взаимное расстояние параллелей, между которыми в рассматриваемом нами случае будет заключаться траектория точки M , мы находим для определения D формулу

$$D = \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) \sin \frac{\omega}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} d},$$

которая по внесении выше показанных величин ω , φ_2 , r , d дает

$$D = 2 \frac{\left(1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 - 2\varphi_1}{4}}{\left(1 + \sin \frac{\varphi_0}{2}\right) \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4}\right)}. \quad (24)$$

Что касается угла α , то по уравнению (21), внося в него $\frac{\pi}{2}$ вместо $\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}$, находим

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4}\right)}. \quad (25)$$

§ 12. В полученные нами формулы, кроме угла φ_0 , предполагаемого данным, входит еще угол φ_1 , который должен быть найден.

Для определения этого угла мы из равенств (22), (12) выводим

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2},$$

что дает

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_2}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2} = \frac{1 - \cos \varphi_3}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_1}{2}}{2}.$$

Внеся же эти величины

$$\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \sin^2 \frac{\varphi_3}{2}$$

в формулу (13), мы получаем уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin \frac{\varphi_1}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right),$$

из которого выходит

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = 1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

На основании этого равенства и уравнения (23), которое дает

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+2r}{3},$$

выводим

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1-r}{3};$$

по равенствам же

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+2r}{3}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1-r}{3} \quad (26)$$

находим

$$\cos \frac{\varphi_0}{2} = \frac{2}{3} \sqrt{(1-r)(2+r)}, \quad \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1}{3} \sqrt{(5-2r)(1+2r)},$$

$$\cos \varphi_0 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = \frac{7-8r-8r^2}{9}, \quad \cos \varphi_1 = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} = \frac{1+16r-8r^2}{9},$$

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4} \right) = \frac{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{2} = \frac{1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2} = \frac{1-r}{3},$$

$$\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} = \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_0}{2} = \frac{1}{3} (4r - 1),$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi - \varphi_0 - 2\varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} &= \frac{1}{2} \cos \varphi_1 - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \\ &= \frac{\cos \varphi_1 - \sin \frac{\varphi_0}{2}}{2} = \frac{(4r-1)(1-r)}{9}. \end{aligned}$$

На основании последних равенств и уравнений (26), которые дают

$$1 - \sin \frac{\varphi_0}{2} = 2 \frac{1-r}{3}, \quad 1 + \sin \frac{\varphi_0}{2} = 2 \frac{2+r}{3}, \quad \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \frac{1-r}{3},$$

мы можем формулу (24) представить так:

$$D = \frac{1}{27} \frac{(1-r)(4r-1)^2}{(2+r) \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4}},$$

где числитель не содержит углов φ_0, φ_1 .

Для исключения их из знаменателя мы замечаем, что

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \left[1 - \cos \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{2} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + 2 \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right] \cos \frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \left[1 + \sin \frac{\varphi_0}{2} \right] \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0}{2}, \end{aligned}$$

откуда по внесении выше показанных величин

$$\sin \frac{\varphi_0}{2}, \sin \frac{\varphi_1}{2}, \cos \frac{\varphi_0}{2}, \cos \frac{\varphi_1}{2}$$

выводим

$$\begin{aligned} \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\pi - \varphi_0 + 2\varphi_1}{4} &= \\ &= \frac{1-r}{27} \left[V(5-2r)^2(1+2r) + 4 V(2+r)^2(1-r) \right], \end{aligned}$$

вследствие чего предыдущее выражение расстояния D приводится к формуле

$$D = \frac{(4r-1)^2}{(2+r) [V(5-2r)^2(1+2r) + 4 V(2+r)^2(1-r)]}.$$

Так определяется взаимное расстояние двух параллелей, между которыми остается точка M при движении рассматриваемой нами системы, когда угол φ не выходит за пределы $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$.

В этом случае, как видели, предельная величина угла A_0OA получается из уравнения (25). Внося сюда выше показанные величины

$$\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}, \quad \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{4} \right)$$

и замечая по (26), что

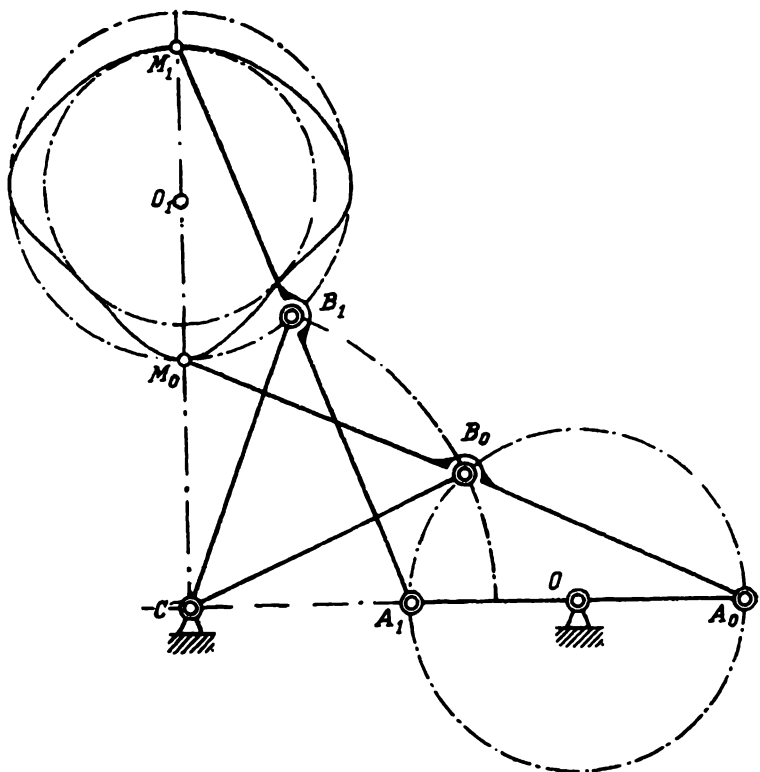
$$\sin \frac{\varphi_0}{2} = \frac{1+2r}{3},$$

получаем такое уравнение для определения α , предельной величины угла A_0OA :

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{4r-1}{r(2+r)},$$

откуда ясно, что в рассматриваемой нами системе радиус r должен превосходить $1/4$ и что по мере приближения r к $1/4$ уменьшается угол вращения радиуса AO , при котором точка M остается между

двумя выше показанными параллелями; вместе с тем, как видно из формулы, определяющей величину расстояния D , эти параллели быстро сближаются между собою, вследствие чего быстро уменьшаются предельные уклонения точки M от прямой линии.



Фиг. 6

§ 13. Переходя к предположению

$$\alpha = \pi,$$

мы замечаем, что при такой величине α предельные положения радиуса AO по обе стороны линии центров COA_0 совпадают на ней (фиг. 6) и вследствие того предельные положения точки M по обе стороны оси симметрии CM_0 должны совпадать на этой оси. Так как по § 10 концы траектории точки M лежат на круге, описанном из центра O_1 радиусом $R_1 = M_1O_1$, то совпадение их должно произойти на этом круге, и там, где оно произойдет, этот круг будет касаться траектории. На основании этого и принимая в соображение то, что было показано в § 10 вообще о траектории точки M , мы заключаем, что в частном случае, когда

$$\alpha = \pi,$$

точка M будет двигаться по сомкнутой кривой, оставаясь между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 радиу-

сами $R_1 = M_1 O_1$, $R_0 = M_1 O_1$, причем будет касаться каждого из них в трех местах: один раз на оси симметрии MO_0 и два раза по обеим сторонам этой оси. Кривая эта, как нетрудно заметить, будет удаляться от круга, описанного из центра O_1 радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$ на расстояние не более $\frac{R_0 - R_1}{2}$, а потому она будет мало отличаться от него, если $\frac{R_0 - R_1}{2}$ близко к нулю.

Чтобы приложить к этому случаю формулы, выведенные нами в § 11, полагаем

$$\alpha = \pi.$$

При этом величине α уравнение (21) дает

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_2}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1,$$

откуда выходит

$$\left[\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \right] \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^4 \frac{\varphi_2}{2},$$

что по замене произведения

$$\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2}$$

разностью

$$\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}$$

приводится к уравнению

$$\sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^4 \frac{\varphi_2}{2},$$

которое предполагает одно из двух: или

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2},$$

или

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = -\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}.$$

Так как по (19) при последнем равенстве получается

$$r > d$$

и вследствие того радиус r не может совершить полного оборота около центра O , остается возможным одно первое:

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}. \quad (27)$$

из которого, замечая по (12), (13), что

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2},$$

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}},$$

получается уравнение

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}. \quad (28)$$

На основании двух последних равенств нетрудно найти формулу для определения угла

$$\theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2} \quad (29)$$

по углу

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad (30)$$

при помощи которого, как мы увидим, получаются очень простые выражения всех величин, представляющихся при рассмотрении настоящего случая.

В самом деле, уравнения (27), (28) по внесении в них θ вместо

$$\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2}, \quad \varphi_3 + \frac{\varphi_1}{2}$$

и

$$\theta - \frac{\varphi_0}{2}, \quad \theta - \frac{\varphi_1}{2}$$

вместо φ_2 , φ_3 дают

$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \theta &= \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right), \\ \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \theta &= \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Вычитая эти равенства одно из другого, находим

$$\left(\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \sin \theta = \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right) - \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right),$$

что приводится к следующему:

$$\left(\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \theta = \left(\cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \right) \cos \theta.$$

Откуда выходит

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2}} = -\operatorname{tang} \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

что предполагает

$$\theta + \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = n\pi,$$

где n — целое число. Для определения этого числа мы замечаем, что при $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ положительных, не превосходящих π , угол

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, а угол

$$\theta = \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} = \varphi_3 - \frac{\varphi_1}{2}$$

между 0 и $\frac{3\pi}{2}$, вследствие чего сумма

$$\theta + \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}$$

должна быть больше 0 и меньше 2π , а потому в выведенном равенстве для числа n возможна только одна величина

$$n = 1,$$

при которой оно дает

$$\theta = \pi - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

что по (30) приводится к равенству

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \psi. \quad (32)$$

Обращаясь снова к уравнениям (31), мы заменяем в них

$$\sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_0}{4} \right), \quad \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\varphi_1}{4} \right)$$

через

$$\frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{2}, \quad \frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{2}$$

и потом делим одно на другое. Это дает нам

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right)}{1 - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right)},$$

откуда выходит

$$\begin{aligned}\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} &= \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0}{2} \right) \sin \frac{\varphi_0}{2} - \cos \left(\theta - \frac{\varphi_1}{2} \right) \sin \frac{\varphi_1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin (\theta - \varphi_1) - \sin (\theta - \varphi_0) \right]\end{aligned}$$

и вследствие того

$$\sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \right) \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

что дает

$$\cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \cos \left(\theta - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \right) \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}.$$

Так как по (30) и (32)

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

это равенство приводится к следующему:

$$\sin \psi = \sin 3\psi \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

из которого получаем

$$\left. \begin{aligned}\cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} &= \frac{\sin \psi}{\sin 3\psi}, \\ \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} &= \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \psi}{\sin^2 3\psi}} = \frac{\sin 2\psi \cdot 1/2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi}.\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

§ 14. Для определения величин

$$r, d, CO_1C$$

мы замечаем, что в рассматриваемом нами случае вследствие равенства (27) уравнения (19), (20) дают

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

$$CO_1 = - \left(\sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \tan \theta = - 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \tan \theta,$$

откуда по внесении выше показанных величин

$$\theta, \quad \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}$$

выходит

$$r = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad d = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}, \quad CO_1 = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi}.$$

Последней формулой определяется место центра O_1 двух концентрических кругов, между которыми заключается траектория точки M . Радиусы R_0 , R_1 этих кругов по § 10 имеют такие величины:

$$R_0 = O_1 M_0, \quad R_1 = O_1 M_1.$$

Замечая, что в рассматриваемом нами случае (фиг. 6)

$$O_1 M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1 M_1 = CM_1 - CO_1,$$

мы из этих равенств выводим

$$R_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = CM_1 - CO_1,$$

что дает нам

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}.$$

Внося же сюда выше показанную величину CO_1 и находя из равнобедренных треугольников $CB_0 M_0$, $CB_1 M_1$, где

$$CB_0 = B_0 M_0 = CB_1 = B_1 M_1 = 1,$$

$$CB_0 M_0 = \pi - A_0 B_0 C = \pi - \varphi_0, \quad CB_1 M_1 = \pi - A_1 B_1 C = \pi - \varphi_1,$$

что

$$CM_0 = 2 \cos \frac{\varphi_0}{2}, \quad CM_1 = 2 \cos \frac{\varphi_1}{2},$$

получаем

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \cos \frac{\varphi_1}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi} - \cos \frac{\varphi_0}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} = \frac{2 \cos^2 \psi}{\sin 3\psi} - 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4},$$

что по внесении величин

$$\frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \quad \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}$$

приводится к таким формулам:

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \cos \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{2 \cos 2\psi}{\sin 3\psi},$$

откуда видно, что угол ψ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$ и что с приближением угла ψ к $\frac{\pi}{4}$ уменьшается и величина $\frac{R_0 - R_1}{2}$ и величина $\frac{R_0 + R_1}{2}$.

При этом первая величина приближается к нулю гораздо быстрее, чем вторая, так что отношение первой ко второй с увеличением угла ψ до $\frac{\pi}{4}$ приближается к нулю, вследствие чего при ψ , близком

к $\frac{\pi}{4}$, траектория точки M представляет кривую, мало отличающуюся от круга.

С уменьшением же угла ψ отношение

$$\frac{R_0 - R_1}{2} : \frac{R_0 + R_1}{2}$$

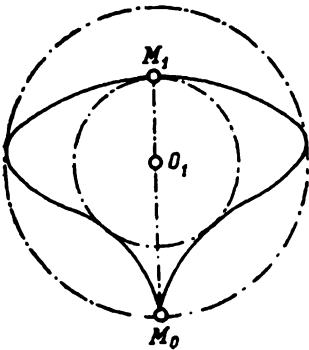
увеличивается и траектория точки M меняет постепенно свой вид, переходя из кривой, мало отличающейся от круга, в кривую сердцевидную (фиг. 7).

§ 15. В предыдущих параграфах мы показали приложения общих формул к частным случаям, когда ломаная линия ABM обращается в прямую. Мы теперь займемся приложением их к различным случаям, в которых линия ABM остается ломаной, и начнем с случая, когда

$$O_1C = \infty,$$

что по (15) имеет место при равенстве

$$\omega = 2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right). \quad (34)$$



Фиг. 7

Внеся эту величину ω в формулы (15), (16), находим

$$\left. \begin{aligned} r &= \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \\ d &= \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}}, \quad (36)$$

где φ_2 есть вспомогательный угол, который по углам φ_0, φ_1 определяется уравнениями, показанными в § 7.

Переходя к частному предположению

$$\alpha = \pi,$$

вносим эту величину α в формулу (36), что дает нам

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}} = 1.$$

Замечая, что это уравнение одинаково с тем, которое мы нашли в § 13 для случая $\omega = \pi$ и при помощи которого из общих формул вывели

$$\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right) = \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}, \quad \theta = \varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} = \frac{\pi}{2} + \psi,$$

$$\cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{\sin \psi}{\sin 3\psi}, \quad \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{\sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

где

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4},$$

мы заключаем, что все эти равенства будут иметь место и в настоящем случае. Вследствие же этих равенств из уравнений (34), (35) выходит

$$\omega = \pi + 2\psi,$$

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \frac{2 \sin \psi \cdot \sin 2\psi \cdot \sqrt{2 \cos 2\psi}}{\sin 3\psi},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} = \frac{\sin 2\psi}{\sin 3\psi}.$$

В рассматриваемом нами случае, когда

$$\alpha = \pi,$$

предельные положения радиуса AO при вращении его в ту и другую сторону совпадают на линии центров OC (фиг. 8), вследствие чего здесь, как и в предшествующем случае, концы траектории точки M будут совпадать на оси симметрии CM_0 и она представит сомкнутую кривую. Из показанного в § 10 видно, что эта кривая будет заключаться между двумя параллелями, в которые при равенстве

$$CO_1 = \infty$$

обращаются дуги кругов, описанных из центра O_1 радиусами R_0, R_1 , и что каждая из этих параллелей будет касаться траектории точки M в трех местах: на оси симметрии CM_0 и по обеим сторонам этой оси. Эта кривая будет тем меньше отличаться от прямой, чем ближе будут друг от друга параллели, между которыми она заключается.

Для определения взаимного расстояния их мы замечаем, что оно равняется расстоянию точек M_0, M_1 , в которых параллели пересекаются с осью симметрии CM_0 и в которых они касаются рассматриваемой

Из этой формулы видно, что угол ψ не должен превосходить $\frac{\pi}{4}$ и что с приближением его к $\frac{\pi}{4}$ уменьшается взаимное расстояние параллелей, между которыми движется точка M при вращении радиуса AO около центра O , вследствие чего при ψ , близком к $\frac{\pi}{4}$, точка M мало уклоняется от прямой, лежащей между этими параллелями в одинаковом расстоянии от каждой.

§ 16. Говоря о случае, когда радиус AO совершает полный оборот около центра O , мы делали частные предположения или относительно угла, образуемого двумя частями ломаной линии ABC , или относительно расстояния центров C, O_1 . Теперь мы покажем приложение к этому случаю общих формул, не делая никакого частного предположения. Уравнения, которые при этом получаются, сложнее прежних; но они представляются под видом, удобным для вычисления.

Чтобы приложить формулы, выведенные в § 9, к случаю, когда радиус AO совершает полный оборот около центра O , делаем

$$\alpha = \pi.$$

При такой величине α уравнение (16) дает

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_2}{2}} = 1.$$

Определяя по этому уравнению величину

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

находим

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \pm \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}.$$

Так как по (15) при отрицательной величине

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

выходит

$$r > d,$$

вследствие чего радиус r не может совершить полного оборота, мы оставляем в полученном равенстве один знак $+$, что дает нам

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}}. \quad (38)$$

Внеся эту величину $\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$ в уравнения (15), находим

$$\left. \begin{aligned} r &= \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4}, \\ d &= \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \\ O_1 C &= 2 \frac{\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} \cdot \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

где φ_2 есть вспомогательный угол, которого величина по углам φ_0, φ_1 определяется уравнениями, данными в § 7; угол же ω получается из уравнения (38). Так как для угла ω возможны все значения от 0 до 2π , то по этому уравнению найдутся две величины ω , из которых одна дает

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

а другая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0.$$

При той и другой величине ω получаются системы, в которых траектория точки M остается между двумя концентрическими кругами, описанными из центра O_1 и касающимися к ней в трех местах.

Но эти траектории представляют кривые двух различных видов, смотря по тому, будет ли

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

или

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0.$$

Разница в виде этих кривых ясно обнаруживается при определении положения центра O_1 относительно точек пересечения их с осью симметрии CM_0 .

§ 17. Для определения разности

$$CO_1 - CM_0,$$

показывающей положение центра O_1 относительно точки M_0 (фиг. 9), мы выводим из равнобедренного треугольника CB_0M_0 , где

$$CB_0 = B_0M_0 = 1,$$

$$CB_0M_0 = A_0B_0M_0 - A_0B_0C = \omega - \varphi_0,$$

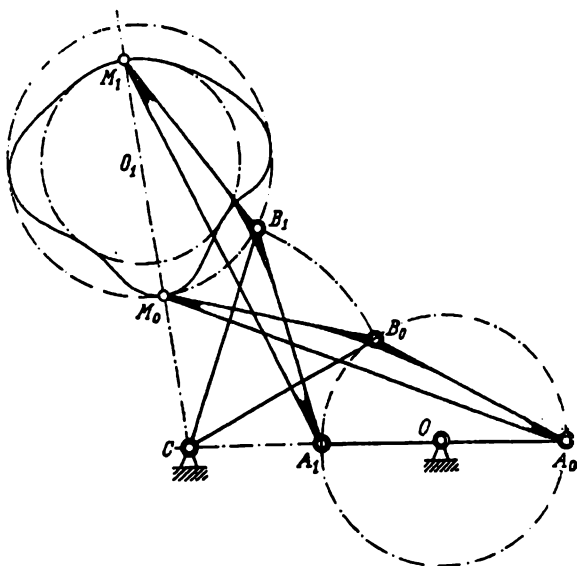
что

$$CM_0 = 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}.$$

Это равенство вместе с величиною CO_1 по (39) дает

$$CO_1 - CM_0 = \frac{2\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} - 2\sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} =$$

$$= \frac{2\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - 2\sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$



Фиг. 9

Для упрощения этой формулы мы замечаем, что

$$2\sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right) = \cos (\omega - \varphi_2 - \varphi_0) - \cos \varphi_2 =$$

$$= \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) \cdot \cos \frac{\varphi_0}{2} + \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) \cdot \sin \frac{\varphi_0}{2} - \cos \varphi_2,$$

$$2\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \sin \frac{\varphi_1}{2},$$

вследствие чего она приводится к такому виду:

$$CO_1 - CM_0 = \frac{\sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) + \cos \varphi_2 - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

откуда, заменяя по (38)

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

через

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}},$$

выводим

$$O_1C - CM_0 = \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2} + \cos \varphi_2 - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

что дает

$$O_1C - CM_0 = \frac{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \quad (40)$$

Подобным образом находим

$$O_1C - CM_1 = \frac{\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \quad (41)$$

Из этих формул прямо видно, что при

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0$$

разности

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

имеют знаки одинаковые. Замечая, что это не может иметь места, если центр O_1 лежит между точками M_0, M_1 , мы заключаем, что эти точки должны лежать по одну сторону его, если

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0.$$

Что касается случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

то по составу формул (40), (41) видно, что при положительных величинах

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

знаки разностей

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

зависят от пределов, между которыми заключаются эти величины. Чтобы найти эти пределы, мы замечаем, что по сказанному в § 5 углы φ_2 , φ_3 должны заключаться между углами φ_0 , φ_1 , где $\varphi_0 > \varphi_1$, вследствие чего будем иметь

$$\varphi_0 > \varphi_3, \quad \varphi_1 < \varphi_2.$$

откуда выходит

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \sin \frac{\varphi_2}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} > \sin \frac{\varphi_3}{2}, \quad \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} = \sin \frac{\varphi_3}{2} \frac{\sin \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}} < \sin \frac{\varphi_2}{2},$$

и так как по (13)

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2}},$$

последнее неравенство дает

$$\frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}} < \sin \frac{\varphi_3}{2}.$$

Замечая же по (38), что

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_2}{2}}{\sin \frac{\varphi_1}{2}},$$

мы из этих неравенств выводим

$$\sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \sin \frac{\varphi_3}{2}, \quad \sin \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \sin \frac{\varphi_2}{2},$$

что, в предположении

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

дает

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \cos \frac{\varphi_3}{2}, \quad \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \cos \frac{\varphi_2}{2}.$$

По этим неравенствам, доставляющим высший и низший пределы величины

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right),$$

находим

$$\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

$$\cos^2 \frac{\varphi_3}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < \cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2},$$

откуда следует

$$\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

$$\cos^2 \frac{\varphi_2}{2} - \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

так как $\varphi_2 < \varphi_0, \varphi_2 > \varphi_1$.

Выведенные нами неравенства показывают, что при определении разностей

$$CO_1 - CM_0, \quad CO_1 - CM_1$$

по формулам (40), (41), в случае

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

получаются величины с знаками противоположными; по составу же этих разностей видно, что для этого центр O_1 должен лежать между точками M_0, M_1 (фиг. 9).

На основании этого мы заключаем, что положение центра O_1 относительно точек M_0, M_1 меняется с переменою знака $\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$.

Если

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

центр O_1 лежит между точками M_0, M_1 ; если же

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

точки M_0, M_1 лежат по одну сторону центра O_1 .

§ 18. Останавливаясь на случае

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

когда точки M_0, M_1 лежат по одну сторону от центра O_1 , и полагая, что они лежат ниже его (фиг. 10), находим

$$O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1M_1 = CO_1 - CM_1,$$

вследствие чего по сказанному в § 10 относительно концентрических кругов, между которыми заключается рассматриваемая траектория, получаем для определения их радиусов R_0, R_1 такие равенства:

$$R_0 = O_1M_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = O_1M_1 = CO_1 - CM_1,$$

откуда выходит

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}.$$

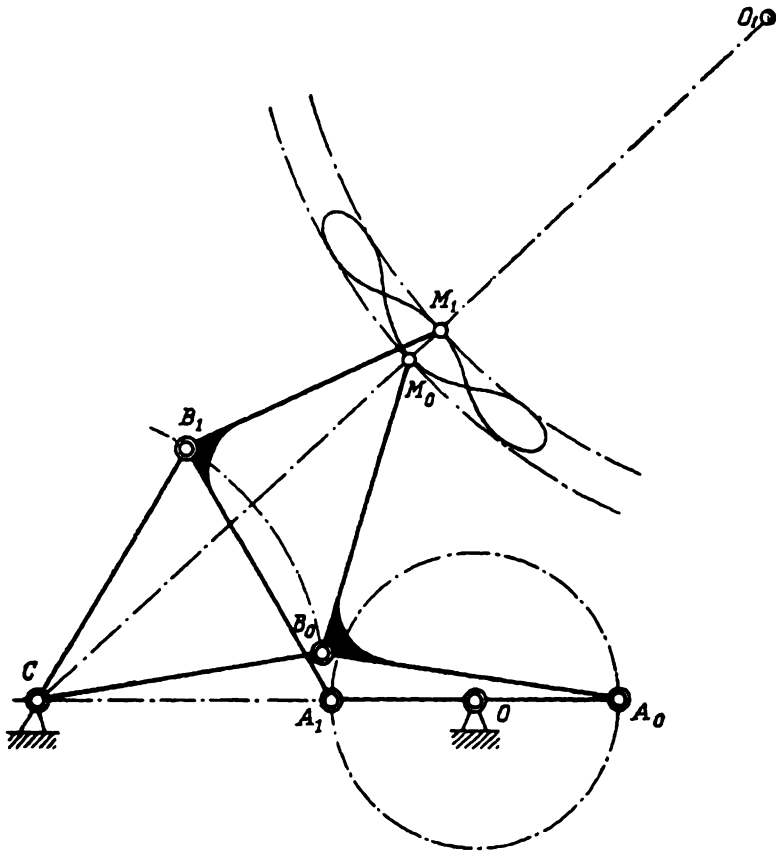
Внося же сюда величины

$$CO_1, CM_0, CM_1,$$

по (37), (39) получаем

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} - \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} - \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \sin \frac{\omega - \varphi_1}{2} - \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2},$$



Фиг. 10

что приводится к следующему:

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right).$$

Это найдено нами в предположении, что точки M_0, M_1 лежат ниже центра O_1 . Делая обратное предположение, мы получаем те же формулы с знаком $-$. Вследствие этого, чтобы обнять оба случая, мы возьмем их с двойным знаком \pm . В формулах

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \pm \frac{2 \sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right),$$

таким образом получаемых, должен быть оставлен или верхний знак или нижний; причем выбор знака определяется тем, что полусумма $\frac{R_0 + R_1}{2}$ не может быть меньше нуля.

Переходя к случаю

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

когда по § 17 центр O_1 лежит между точками M_0, M_1 , и предполагая (фиг. 9), что точка M_0 ниже точки M_1 , находим

$$O_1 M_0 = CO_1 - CM_0, \quad O_1 M_1 = CM_1 - CO_1,$$

вследствие чего по § 10 имеем

$$R_0 = CO_1 - CM_0, \quad R_1 = CM_1 - CO_1,$$

что дает

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = \frac{CM_1 - CM_0}{2}, \quad \frac{R_0 - R_1}{2} = CO_1 - \frac{CM_0 + CM_1}{2}.$$

Сличая эти равенства с теми, которые были получены для случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

замечаем, что здесь полусумма

$$\frac{R_0 + R_1}{2}$$

определяется так, как прежде определялась полуразность

$$\frac{R_0 - R_1}{2}$$

и обратно. Вследствие этого выше найденные формулы в приложении к рассматриваемому нами случаю дают

$$\frac{R_0 + R_1}{2} = 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right).$$

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Это получается в предположении, что точка M_1 лежит выше точки M_0 . При обратном положении точек M_0, M_1 получается то же со знаком —; а потому мы будем иметь вообще

$$\begin{aligned} \frac{R_0 + R_1}{2} &= \pm 2 \sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{4} \right), \\ \frac{R_0 - R_1}{2} &= \pm 2 \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_2 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{4} \right)}{\sin \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}, \end{aligned}$$

где должен быть оставлен верхний или нижний знак, смотря по тому, с каким знаком получается для полусуммы $\frac{R_0 + R_1}{2}$ положительная величина.

Выведенные нами формулы заключают в себе как частные случаи те, которые мы нашли в § 13 и 14, предполагая угол ABC равным двум прямым, и в § 15, предполагая бесконечно большим расстояние O_1C . Первые получаются из общих формул, имеющих место при

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

вторые из формул, найденных нами для случая

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0.$$

При этом первые получаются в предположении

$$\omega = \pi,$$

вторые в предположении

$$\omega = 2 \left(\varphi_2 + \frac{\varphi_0}{2} \right).$$

В этих частных случаях, как видели, траектория точки M представляет кривые двух различных видов (фиг. 6, 8).

В общем случае получаются тоже траектории двух различных видов, смотря по знаку $\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)$.

Если

$$\cos \left(\varphi - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) > 0,$$

траектория имеет вид кривой, о которой мы говорили в § 13 и 14.

Если же

$$\cos \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) < 0,$$

траектория представляет кривую, подобную той, о которой было говорено в § 15, с тою только разницею, что здесь (фиг. 10) параллели заменяются дугами концентрических кругов, описанных из центра O_1 радиусами R_0, R_1 .

§ 19. В предыдущих параграфах мы рассмотрели частный случай, когда угол A_0OA меняется в самых широких пределах, переходя от $-\pi$ до $+\pi$. Теперь мы займемся случаем прямо противоположным, предполагая, что угол A_0OA остается в пределах, бесконечно близких к нулю. Для этого мы положим, что α , предельная величина угла A_0OA , имеет величину бесконечно малую.

При α бесконечно малом по уравнению (16) получается для разности

$$\varphi_0 - \varphi_1$$

величина бесконечно малая, а потому, пренебрегая бесконечно малыми величинами перед конечными, в рассматриваемом нами случае будем иметь

$$\varphi_1 = \varphi_0$$

и вследствие того

$$\varphi_2 = \varphi_0.$$

так как по § 5 угол φ_2 должен заключаться между углами φ_0, φ_1 .

Внеся эти величины φ_1, φ_2 в уравнения (15), получаем такие формулы для определения r, d, CO_1 :

$$r = \sin \frac{\varphi_0}{2} - \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

$$d = \sin \frac{\varphi_0}{2} + \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

$$CO_1 = \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Замечая же, что при этих величинах φ_1, φ_2 выходит

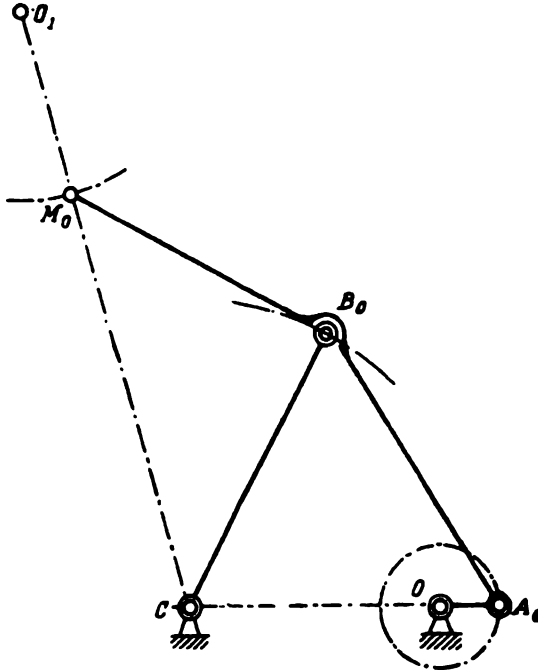
$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 + \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \varphi_2 - \frac{\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}} = \frac{\sin \varphi_0 \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}},$$

мы из уравнения (16) выводим такое соотношение между бесконечно малыми величинами α и $\varphi_0 - \varphi_1$:

$$\frac{\alpha^2}{4} = \frac{\sin \varphi_0 \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)}{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}} \cdot \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2},$$

что дает

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \frac{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right) - \sin^4 \frac{\varphi_0}{2}}{2 \sin \varphi_0 \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} \alpha^2 = \frac{\sin (\omega - \varphi_0) \cdot \sin (\omega - 2\varphi_0)}{4 \cotang \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^2 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)} \alpha^2. \quad (42)$$



Фиг. 11

Переходя к определению радиуса R_0 по § 10 и предполагая (фиг. 11) центр O_1 выше точки M_0 , находим, что

$$R_0 = O_1 M_0 = CO_1 - CM_0.$$

Внеся сюда выше найденную величину CO_1 и заменяя CM_0 по (37) через $2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2}$, получаем

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{2 \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \cos \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right) \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{\varphi_0}{2} \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} - 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Мы это вывели, предполагая центр O_1 выше точки M_0 . Делая противное предположение, мы находим ту же формулу с знаком $-$, а потому, чтобы обнять оба случая, мы возьмем ее с двойным знаком.

В формуле

$$R_0 = \pm 2 \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \frac{\cos \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{\omega}{2} - \varphi_0 \right)}{\sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}, \quad (43)$$

таким образом полученной, должен быть оставлен тот из двух знаков, с которым она дает положительную величину.

По радиусу R_0 , как видели (18), радиус R_1 определяется уравнением

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) \cdot CO_1 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \cdot d.$$

В рассматриваемом нами случае разности $\varphi_0 - \varphi_1$, $\varphi_2 - \varphi_1$ имеют величины бесконечно малые. Чтобы найти отношение их, полагаем

$$\varphi_0 - \varphi_1 = \Delta, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta_1,$$

что дает

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \Delta, \quad \varphi_2 = \varphi_0 - \Delta + \Delta_1,$$

и вследствие того по (14) получается такое уравнение между бесконечно малыми величинами Δ, Δ_1 :

$$\cotang \frac{\varphi_0 - \Delta + \Delta_1}{2} = \frac{1}{\sin \frac{\Delta}{4}} \left[\sqrt{\frac{\sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \frac{\varphi_0 - \Delta}{2}}} - \cos \frac{\Delta}{4} \right].$$

Разлагая по степеням Δ, Δ_1 и ограничиваясь бесконечно малыми первого порядка, мы из этого уравнения получаем

$$\Delta_1 = \frac{1}{4} \Delta,$$

что по нашему знакоположению дает

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{1}{4} (\varphi_0 - \varphi_1).$$

Внося же эту величину разности $\varphi_2 - \varphi_1$ в выражение

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} \frac{(d^2 - r^2) CO_1}{d}$$

и замечая по выше показанным величинам $\varphi_1, \varphi_2, r, d, CO_1$, что

$$\frac{(d^2 - r^2) CO_1}{d \sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2}} = \frac{4}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

находим с точностью до третьей степени $\varphi_0 - \varphi_1$ включительно

$$\frac{\sin \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (d^2 - r^2) \cdot CO_1 \cdot \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_2}{2} \cdot d} = \frac{1}{32} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)},$$

вследствие чего с тою же степенью точности уравнение, определяющее K_1^2 , дает

$$R_1^2 = R_0^2 - \frac{1}{32} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)}, \quad R_1 = R_0 - \frac{1}{64} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} R_0.$$

Из последнего равенства выходит

$$\frac{R_0 - R_1}{2} = \frac{1}{128} \frac{(\varphi_0 - \varphi_1)^3 \sin \frac{\omega}{2}}{\sin \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \left(\frac{3\varphi_0}{2} - \frac{\omega}{2} \right)} R_0,$$

что представляет высший предел отклонения точки M от круга, описанного радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$ из центра O_1 при движении рассматриваемой нами системы, когда угол α остается между $\varphi = \varphi_0, \varphi = \varphi_1$.

Внося сюда величину $\varphi_0 - \varphi_1$ по (41) и величину радиуса R_0 по (43), находим такое выражение для этого предела:

$$\pm \frac{1}{16384} \frac{\sin \frac{\omega}{2} \cdot \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin^3 (\omega - \varphi_0) \cdot \sin^3 (\omega - 2\varphi_0) \alpha^6}{\cos^4 \frac{\varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\omega - \varphi_0}{2} \cdot \sin \frac{\omega - 2\varphi_0}{2} \cdot \sin^6 \left(\omega - \frac{3\varphi_0}{2} \right)},$$

где α — предельная величина угла A_0OA , откуда видно, что с приближением угла α к нулю эти отклонения очень быстро уменьшаются и вследствие того при α малом траектория точки M незначительно разнится от дуги круга, описанного из центра O_1 радиусом $\frac{R_0 + R_1}{2}$.

Показанные здесь формулы представляют предел, к которому приближаются общие формулы при уменьшении угла α до нуля, и они могут служить для приближенного решения различных задач относительно рассматриваемой системы, когда угол α не велик.

МОДЕЛИ МЕХАНИЗМОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

(Статья И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского)

В Академии Наук СССР и в Ленинградском университете хранятся модели механизмов, созданные П. Л. Чебышевым. В настоящей статье приведены схемы и фотографии этих механизмов с краткими описаниями их. Кроме того, для каждого механизма указаны соотношения между размерами его звеньев.

Более подробное описание и анализ механизмов П. Л. Чебышева имеются в работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского,* где для наиболее интересных в практическом отношении механизмов даны расчетные таблицы и графики, при помощи которых можно быстро определить необходимые параметры механизмов.

1. Механизм четырехзвенной противовращательной рукоятки

На фиг. 1 приведена копия фотоснимка, сохранившегося в архиве Чебышева, модели механизма четырехзвенной противовращательной рукоятки, построенной Чебышевым (сама модель не сохранилась). Кинематическая схема механизма изображена на фиг. 2.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB=BC=BM=1,$$

$$AC'=0,136,$$

$$CC'=1,409.$$

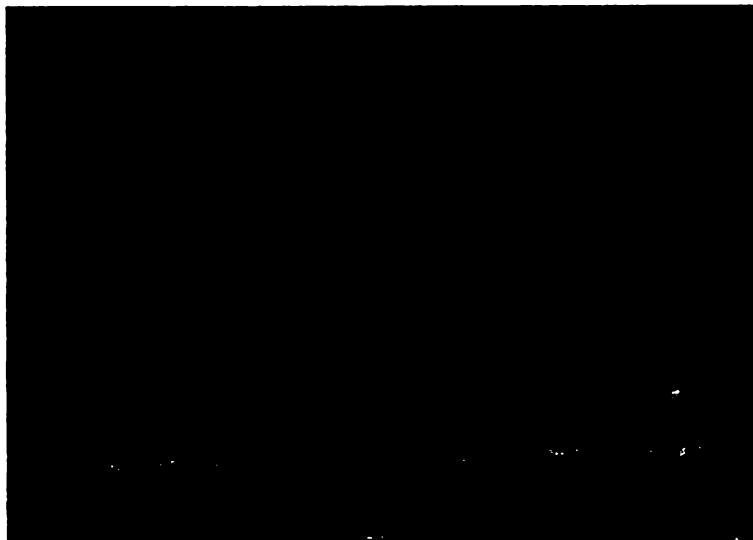
Точка M описывает траекторию, мало отличающуюся от окружности радиуса R , равного

$$R \approx 0,136.$$

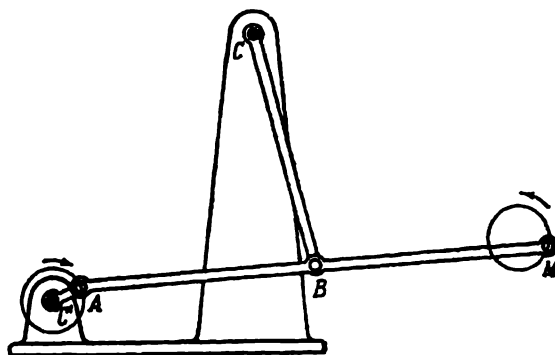
Направление движения точки M по ее траектории обратное по отношению к направлению движения точки A кривошипа AC' , а по

* И. И. Артоболевский и Н. И. Левитский. Механизмы П. Л. Чебышева. Статья в сборнике „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II, изд. АН СССР, М.—Л., 1945.

тому данный механизм может служить в качестве противовращательной рукоятки.



Фиг. 1



Фиг. 2

2. Механизм самокатного кресла

На фиг. 3 приведена копия фотоснимка самокатного кресла, снабженного механизмом Чебышева, а на фиг. 4 — кинематическая схема этого механизма. Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

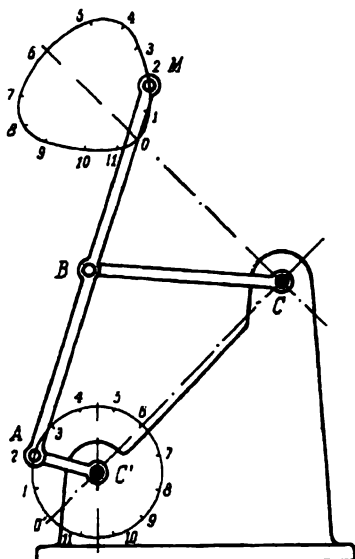
$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1, \\ AC' &= 0,325, \quad CC' = 1,385. \end{aligned}$$

Если ведущим звеном сделать шатун AB и перемещать точку M по ее траектории, то кривошип AC' будет делать полный оборот, что и было использовано Чебышевым при конструировании им своего

самокатного кресла, в котором каждое из двух колес приводится во вращение при помощи механизма, кинематическая схема которого дана на фиг. 4.



Фиг. 3



Фиг. 4

3. Механизм шестизвеной противовращательной рукоятки

На фиг. 5 приведен фотоснимок модели механизма шестизвеной противовращательной рукоятки, а на фиг. 6 — кинематическая схема этого механизма. Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB=BC=BM=1;$$

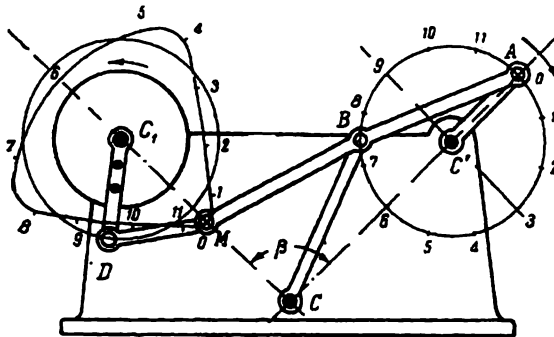
$$AC'=0,54; \quad CC'=1,33; \quad MD=C_1D=0,57; \quad C_1C=1,39;$$

$$\beta=90^\circ.$$

При вращении кривошипа AC' ведомое звено C_1D , снабженное маховиком, совершает полный оборот за один оборот кривошипа. Так



Фиг. 5



Фиг. 6

как вращение ведомого звена C_1D происходит в направлении, обратном вращению кривошипа AC' , то данный механизм может служить в качестве противовращательной рукоятки.

4. „Парадоксальный“ механизм

На фиг. 7 приведен фотоснимок модели „парадоксального“ механизма, а на фиг. 8—его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB=BC=BM=1;$$

$$AC'=0,557; CC'=1,324; C_1C=1,387;$$

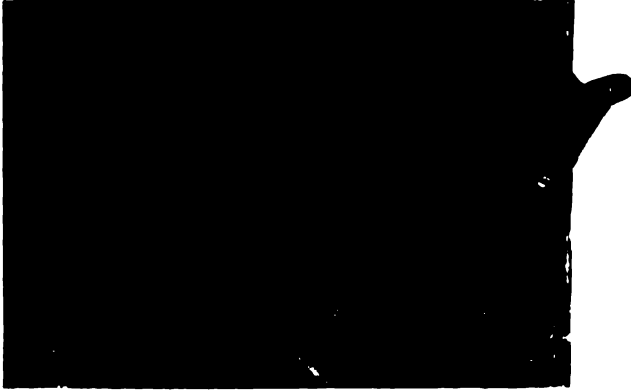
$$MD=0,584; C_1D=0,123;$$

$$\beta=90^\circ.$$

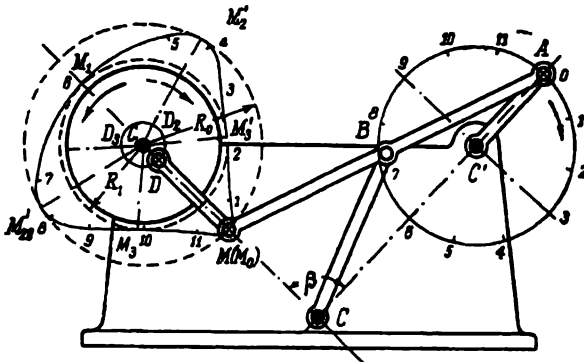
Размеры звеньев C_1D и MD выбраны так, что сумма длин их равна радиусу окружности, описанной вокруг траектории точки M , а их разность равна радиусу окружности, вписанной в эту траекторию, т. е.

$$C_1D + MD = R_0 \text{ и } MD - C_1D = R_1.$$

Окружность радиуса R_0 касается траектории точки M в трех точках: M_0 , M_2 и M'_2 . Окружность радиуса R_1 также касается этой траектории



Фиг. 7



Фиг. 8

в трех точках: M_1 , M_2 и M'_2 . Когда точка M приходит в положения M_0 , M_1 , M_2 , M'_2 , M_3 и M'_3 , то звенья MD и C_1D вытягиваются в одну линию, т. е. ведомое звено C_1D находится в предельных положениях. За один оборот кривошипа AC' предельных положений будет *шесть*: три *внешних* (длины звеньев C_1D и MD складываются) и три *внутренних* (длины звеньев C_1D и MD вычитаются). Так как из каждого предельного положения звено C_1D может выйти, вращаясь как в одну, так и в другую сторону, то для определенности движения механизма ведомое звено C_1D снабжено маховиком.

Парадоксальность механизма заключается в том, что при постоян-

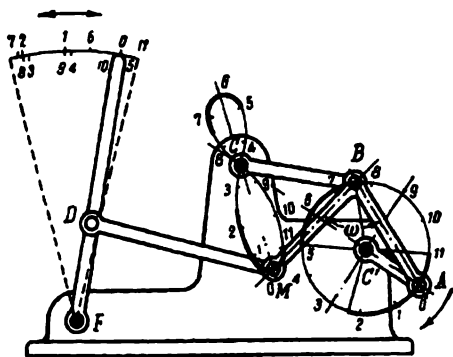
ном вращении ведомого звена C_1D в направлении, противоположном направлению вращения кривошипа AC' , оно совершает *четыре* оборота за *один* оборот кривошипа. При вращении ведомого звена C_1D в направлении, совпадающем с направлением вращения кривошипа AC' , оно совершает *два* оборота за *один* оборот кривошипа.

5. Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа

На фиг. 9 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 10 — его кинематическая схема.



Фиг. 9



Фиг. 10

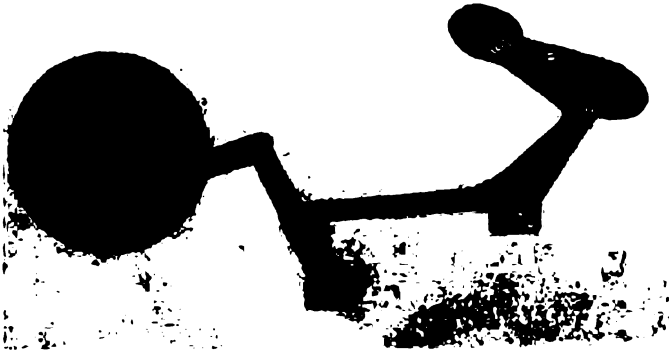
Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= 0,54; CC' = 1,29; \omega = 80^\circ; \\ MD &= 1,6; DF = 0,81; CF = 1,92; C'F = 2,57. \end{aligned}$$

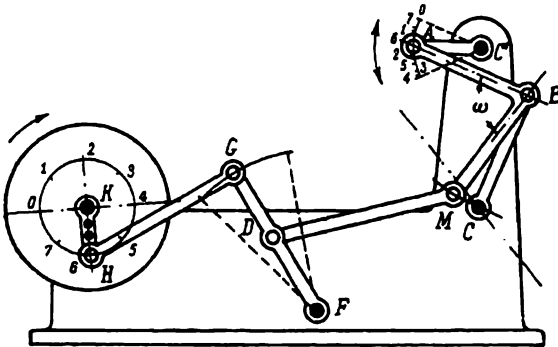
Ведомое звено DF совершает два полных качания за один оборот кривошипа: одно *медленное* и другое *быстрое*. На фиг. 10 участки траектории точки M , проходимые ею при движении ведомого звена DF справа налево, показаны жирными линиями; так же показаны и соответствующие участки, проходимые точкой A кривошипа.

6. Механизм для преобразования качательного движения во вращательное

На фиг. 11 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 12 — его кинематическая схема.



Фиг. 11



Фиг. 12

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= 0,545; CC' = 1,325; \omega = 80^\circ; \\ MD &= 1,61; FD = 0,71; GF = 1,33; GH = 1,36; \\ KH &= 0,39; CF = 1,6; C'F = 2,6; KF = 2,11; \\ CK &= 3,29. \end{aligned}$$

Соотношения между размерами звеньев выбраны так, что звено KH может делать *полный оборот*, в то время как звено AC' совершает одно *полное качание* на некоторый угол. Прямой и обратный ход

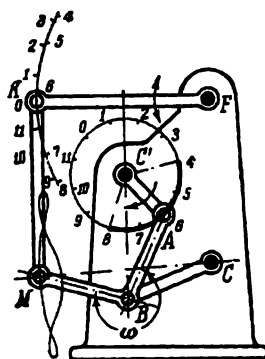
точка A совершает в приблизительно равные промежутки времени. Если звено AC' принять за ведущее (механизм „выпрямителя движения“), то для определенности направления вращения при переходе через предельные положения ведомое звено KN должно быть снабжено маховиком, что и выполнено в модели.

7. Механизм „велосипеда“

На фиг. 13 приведена копия фотоснимка модели механизма, известного под названием „велосипеда“, а на фиг. 14 — кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления.



Фиг. 13



Фиг. 14

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= 0,55; CC' = 1,38; \omega = 267^\circ; \\ MK &= KF = 1,84; C'F = 1,23; FC = 1,77. \end{aligned}$$

При движении звена KF сверху вниз, от одного крайнего положения к другому, кривошип AC' совершает более полуоборота. Участок траектории точки A кривошипа AC' , соответствующий обратному ходу звена KF , обозначен жирной линией.

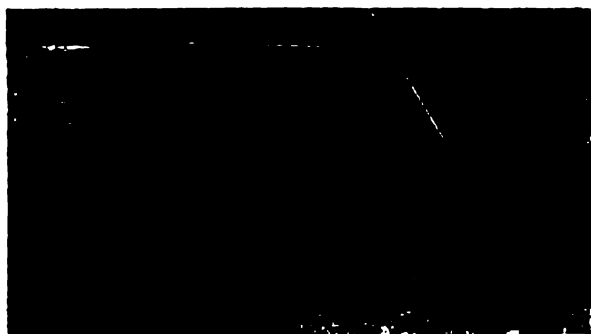
Присоединяя к оси C' второй подобный механизм с кривошипом, смещенным относительно кривошипа AC' на угол в 180° (на фиг. 14

не показан), получаем возможность, нажимая попеременно на ведущие звенья обоих механизмов, привести во вращение ведомое звено AC' (механизм „выпрямителя движения“).

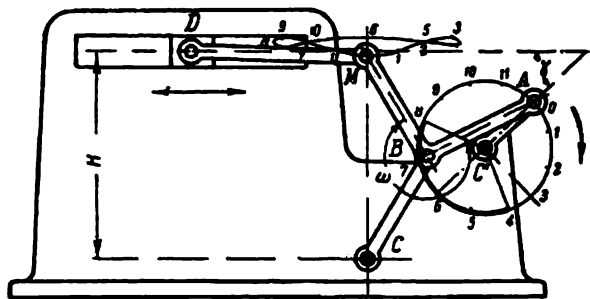
По характеру модели можно предположить, что данный механизм предназначался не для передвижения велосипеда, а для использования в качестве *ножного привода*.

8. Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом

На фиг. 15 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 16 — его кинематическая схема.



Фиг. 15



Фиг. 16

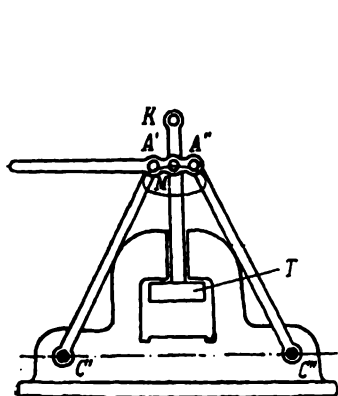
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения;

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= 0,55; \quad CC' = 1,38; \\ \omega &= 267^\circ; \quad \gamma = 43,5^\circ; \\ MD &= 1,5; \quad H = 1,79. \end{aligned}$$

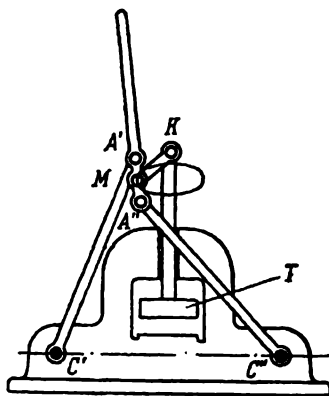
Ведомое звено этого механизма (ползун D),двигающееся поступательно, имеет ускоренный обратный ход. Участок траектории точки A , соответствующий обратному ходу ползуна D , показан жирной линией.

9. Механизм прессы

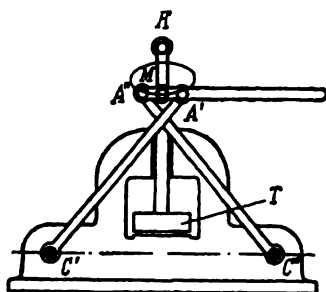
Механизм показан в трех положениях, соответствующих наивысшему подъему ползуна (фиг. 17), среднему его положению (фиг. 18) и наинизшему (фиг. 19).



Фиг. 17



Фиг. 18



Фиг. 19

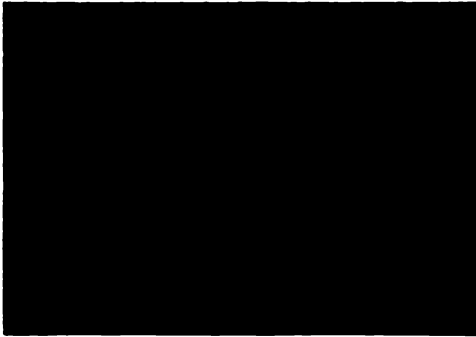
Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = 1; A'A'' = 0,198; \\ C'C'' = 1,105; MK = 0,211.$$

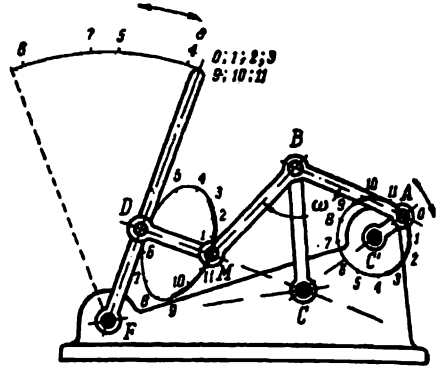
Ведущим звеном является шатун $A'A''$. Таким образом, сложное движение шатуна преобразуется в поступательное движение ползуна T .

10. Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода

На фиг. 20 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 21 — его кинематическая схема.



Фиг. 20



Фиг. 21

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB=BC=BM=1; AC'=0,305; CC'=0,76;$$

$$\omega=114^{\circ};$$

$$MD=0,66; FD=0,8; CF=1,66; C'F=2,36.$$

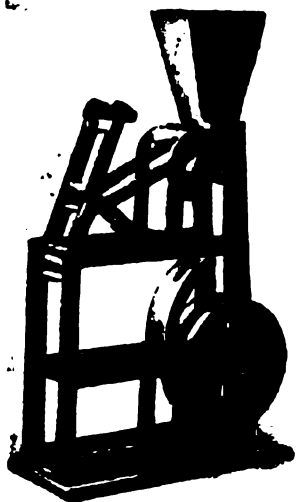
Длина звена MD равна радиусу окружности, к которой приближена траектория точки M на некотором участке, а положение центра F выбрано таким образом, что в одном из крайних положений звена FD точка D совпадает с центром этой окружности. Вследствие этого ведомое звено FD имеет в одном из крайних положений остановку, продолжительность которой равна времени прохождения точкой M участка траектории, приближенного к окружности (обозначен на схеме жирной линией).

При данных соотношениях длин звеньев продолжительность остановки приблизительно равна половине оборота кривошипа или времени полного качания звена FD .

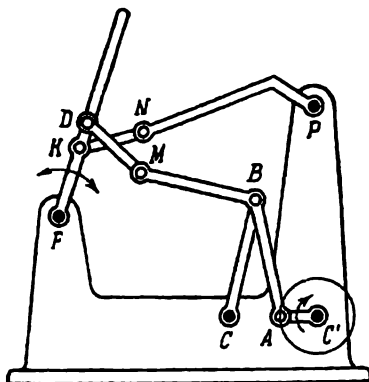
11. Механизм „сортировальщи“

На фиг. 22 приведена копия фотоснимка приспособления, известного под названием „сортировалька“, а на фиг. 23 — кинематическая схема механизма, лежащего в основе этого приспособления. Относительные размеры звеньев основного механизма те же, что и предыдущего (механизм 10).

Принцип работы приспособления заключается в следующем. При крайнем правом положении коромысла DF зерно из бункера поступает в лоток, укрепленный в верхней части коромысла. Так как остановка коромысла DF в этом положении продолжительна и соответ-



Фиг. 22



Фиг. 23

ствует полуобороту кривошипа AC' (см. механизм 10), то зерно успевает полностью заполнить лоток. За следующую половину оборота кривошипа AC коромысло DF с лотком, наполненным зерном, быстро совершает полное качание. При этом зерна, отделяясь от лотка, падают ближе или дальше, в зависимости от величины их массы. Звено NP закрывает выходное отверстие бункера, открывая его лишь в момент, соответствующий остановке коромысла DF .

12. Механизм с остановкой ведомого звена на полпути

На фиг. 24 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 25 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = 1; \\ AC' &= 0,54; CC' = 1,3; \\ \omega &= 80^\circ; \\ MD &= 1,603; FD = 0,695; \\ CF &= 1,8; C'F = 2,78. \end{aligned}$$

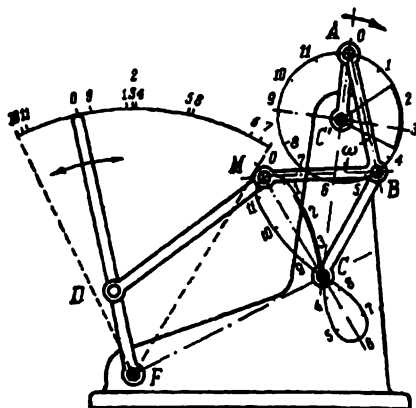
Траектория точки M на участке, обозначенном жирной линией, мало отличается от дуги окружности. Длина звена MD принята равной радиусу этой окружности, а положение центра F выбрано так, что в одном из средних положений коромысла DF точка D при-

ходит в центр указанной окружности. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' коромысло DF совершает колебательное движение с остановкой в середине рабочего хода.

Обратный ход коромысла — ускоренный и без остановки.



Фиг. 24



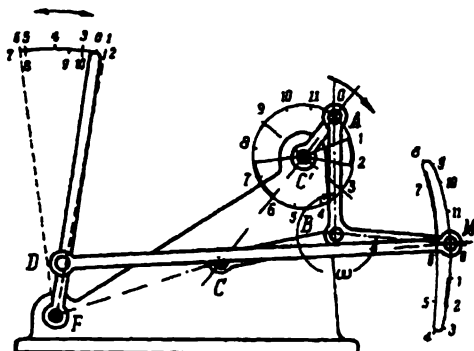
Фиг. 25

13. Шестизвенный механизм с остановками в крайних положениях

На фиг. 26 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 27 — его кинематическая схема.



Фиг. 26



Фиг. 27

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB=BC=BM=1; AC'=0,43; CC'=1,15;$$

$$\omega=265^\circ;$$

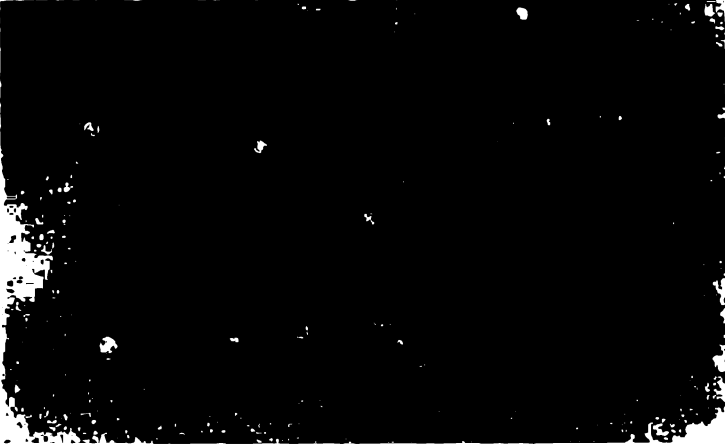
$$MD=3,34; FD=0,41; CF=1,47; C'F=2,51.$$

Траектория точки M имеет два участка приблизительно равной кривизны (на схеме эти участки обозначены жирной линией). Длина звена MD принята равной величине радиуса окружностей, с которыми совпадают указанные участки, а положение центра F выбрано так, что в крайних положениях точка D приходит в центры этих

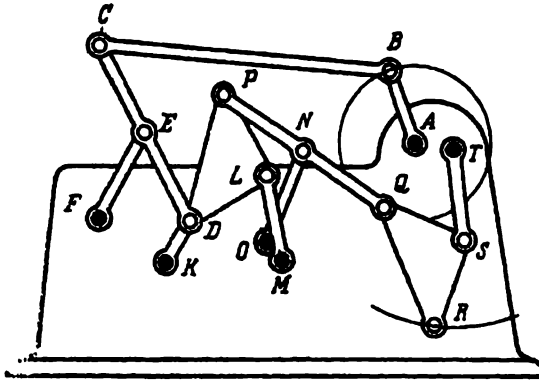
окружностей. Вследствие этого при непрерывном вращении кривошипа AC' звено DF совершает *колебательное движение с остановками* в своих крайних положениях.

14. Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях

На фиг. 28 приведен фотоснимок модели этого механизма; а на фиг. 29 — кинематическая схема его.



Фиг. 28



Фиг. 29

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB &= 1; BC = 4,01; TM = 2,8; AF = 4,44; \\ CE &= ED = EF = PN = NQ = NO = 1,31; \\ DL &= LM = LP = QS = SR = ST = 1,2; \\ PD &= QR = 1,74; DK = 0,68; AT = 0,5; \\ MO &= 0,28; FK = 1,08; KM = 1,56; \\ AM &= 2,43; AK = 3,67; AO = 2,4. \end{aligned}$$

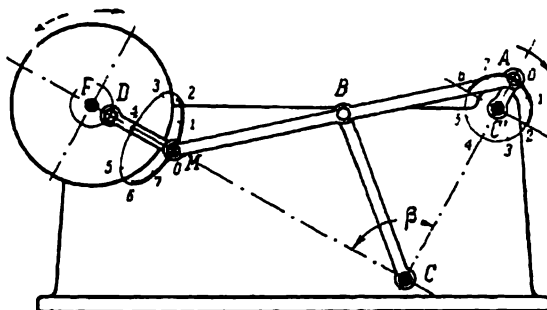
При вращении кривошипа AB точка R ведомого звена движется приблизительно по дуге окружности с остановками в крайних положениях.

15. Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена

На фиг. 30 приведен фотоснимок модели этого механизма, а на фиг. 31 — его кинематическая схема.



Фиг. 30



Фиг. 31

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} AB=BC=BM=1; \quad AC'=0,19; \quad CC'=1,11; \\ \beta=90^\circ; \\ MD=0,403; \quad FD=0,12; \quad CF=2,05. \end{aligned}$$

Траектория точки M приближена к окружности на участке, соответствующем углу поворота кривошипа AC' на 180° (на схеме этот участок обозначен жирной линией). Длина звена MD равна радиусу окружности, к которой приближена траектория точки M , а положение центра F и длина звена FD выбраны в одном из положений механизма так, что точка D приходит в центр этой окружности, при этом оси звеньев MD и FD вытягиваются в одну линию, т. е. находятся в *предельном* положении. Для определенности движения при переходе через предельные положения ведомое звено FD снабжено маховиком.

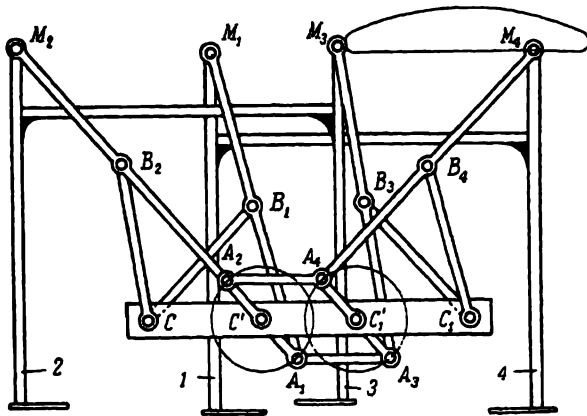
При вращении ведомого звена FD в направлении, совпадающем с направлением движения кривошипа AC' , оно движется с *остановкой*, продолжительность которой равна приблизительно времени половины оборота кривошипа. При вращении ведомого звена FD в направлении, противоположном направлению движения кривошипа AC' , механизм представляет собой обычную противовращательную рукоятку.

16. „Переступающий механизм“ („Стопоходящая машина“)

На фиг. 32 приведен фотоснимок этого механизма, а на фиг. 33 — его кинематическая схема.



Фиг. 32



Фиг. 33

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$A_1B_1 = B_1C = B_1M_1 = A_2B_2 = B_2C = B_2M_2 = A_3B_3 = B_3C_1 = B_3M_3 = A_4B_4 = \\ = B_4C_1 = B_4M_4 = 1;$$

$$A_1C' = A_2C' = A_3C' = A_4C_1' = 0,355;$$

$$CC' = C_1C_1' = 0,785; A_2A_4 = A_1A_3 = C'C_1' = 0,634.$$

Механизм состоит из четырех лямбдообразных прямил, соединенных так, что кривошпы их образуют шарнирный параллелограм $A_1A_2A_3A_4$ (звено A_1C' жестко соединено со звеном A_2C' , а звено A_3C' — со звеном A_4C_1'). Точки M_1 и M_4 принадлежат звену, с которым жестко скреплены ноги 1 и 4 механизма, точки M_2 и M_3 принадлежат другому звену, с которым жестко скреплены ноги 2 и 3. На фиг. 33 показана траектория точки M_4 в ее движении относительно корпуса, т. е. звена $CC'C_1' C_1$. Траектория близка к кривой, которую описывает конец ноги идущего человека или животного по отношению к его корпусу, а именно прямолинейная часть траектории точки M соответствует положению конца ноги на земле, остальная же часть траектории — движению конца ноги над землей.

Если из положения, указанного на фиг. 33, перемещать корпус $CC'C_1' C_1$ прямолинейно в ту или другую сторону, то, пока точки M_4 и M_1 остаются на прямолинейных участках своих относительных траекторий, ноги 1 и 4 неподвижны, а ноги 2 и 3 перемещаются по направлению движения корпуса. В тот момент, когда точки M_1 и M_4 должны покинуть прямолинейный участок, точки M_2 и M_3 приходят в начало своего прямолинейного участка, так как при выбранных размерах звеньев угол поворота кривошпы, соответствующий перемещению точки M по прямолинейному участку, равен 180° . При дальнейшем движении корпуса, ноги 2 и 3 будут некоторое время оставаться неподвижными, а ноги 1 и 4 начнут перемещаться по направлению движения корпуса, и, таким образом, при непрерывном перемещении корпуса ноги механизма переступают подобно ногам животного.

17. Гребной механизм

На фиг. 34 приведен фотоснимок модели гребного механизма, а на фиг. 35 — кинематическая схема этого механизма.

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$AB = BC = BM = A_1B_1 = B_1C_1 = B_1M_1 = 1;$$

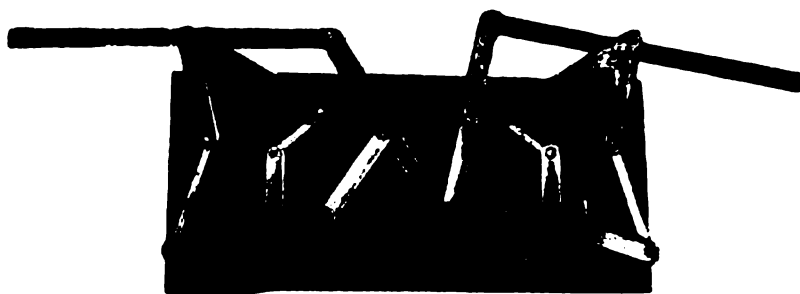
$$AC' = 0,297; CC' = 0,765; A_1C_1' = 0,528; C_1C_1' = 1,21;$$

$$\omega = 270^\circ;$$

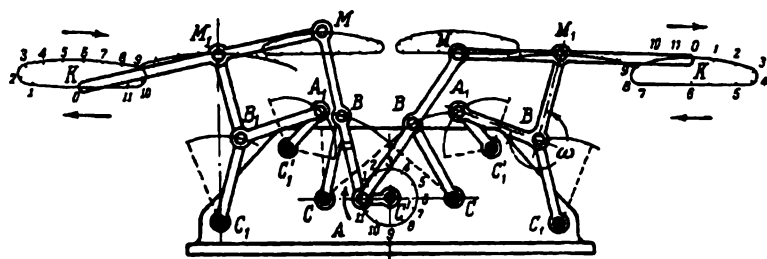
$$MM_1 = 1,275; CC_1' = 0,74; C'C_1' = 1,335; CC_1 = 1,3;$$

$$MK = 1,6.$$

При вращении кривошпы AC' весло, соединенное жестко со звеном MM_1K , имеет движение, близкое к поступательному, по траекториям, указанным для точек M и K . Движению весла под водой



Фиг. 34



Фиг. 35



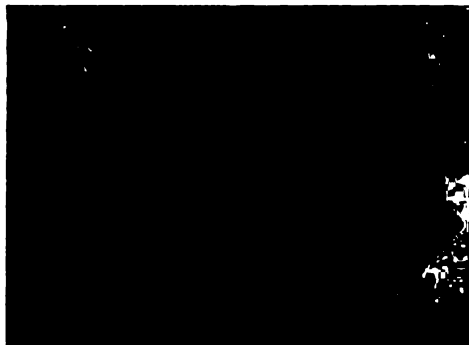
Фиг. 36

соответствуют прямолинейные участки траектории точек M и K . Вход и выход из воды совершается почти отвесно и с *небольшой* скоростью.

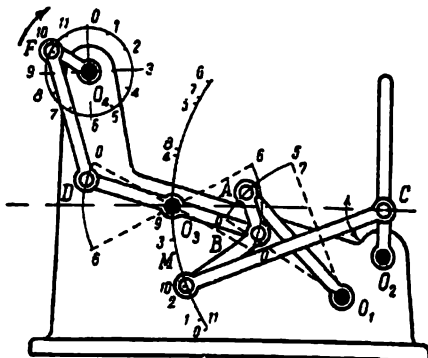
На фиг. 36 приведена копия фотоснимка, показывающего устройство лодки с гребным механизмом.

18. Механизм, направляющий по дуге окружности

На фиг. 37 приведен фотоснимок этого механизма, а на фиг. 38 — его кинематическая схема.



Фиг. 37



Фиг. 38

Размеры звеньев механизма имеют следующие соотношения:

$$\begin{aligned} O_3B=O_3D=1; \\ O_1A=1,55; AB=0,418; O_1O_3=2,18; BM=0,983; \\ AM=1,23; CM=2,46; CO_3=0,526; O_1O_3=0,608; \\ O_3O_2=2,51; FD=1,51; O_4F=0,92; O_4O_3=1,795; \\ O_4O_1=3,82. \end{aligned}$$

При указанных размерах звеньев точка M описывает траекторию, мало отличающуюся от дуги окружности. Радиус этой окружности равен длине звена MC , а центр вращения совпадает с положением точки C . Вследствие этого звено O_2C неподвижно во все время движения кривошипа O_4F .

19. Механизм кулисы паровой машины

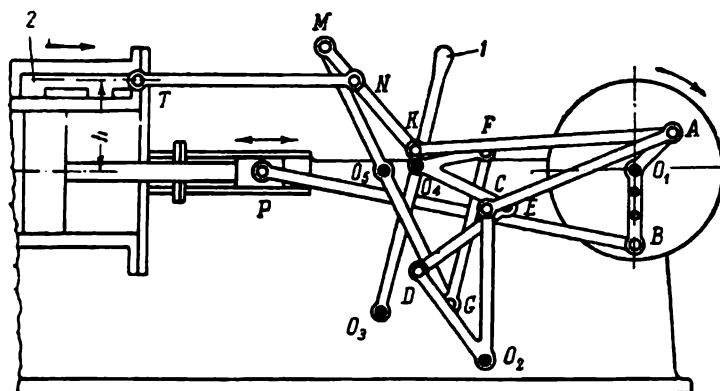
На фиг. 39 приведен фотоснимок чернового проекта модели этого механизма, а на фиг. 40 — его кинематическая схема.

Размеры звеньев, определенные по этому черновому проекту, имеют следующие соотношения:

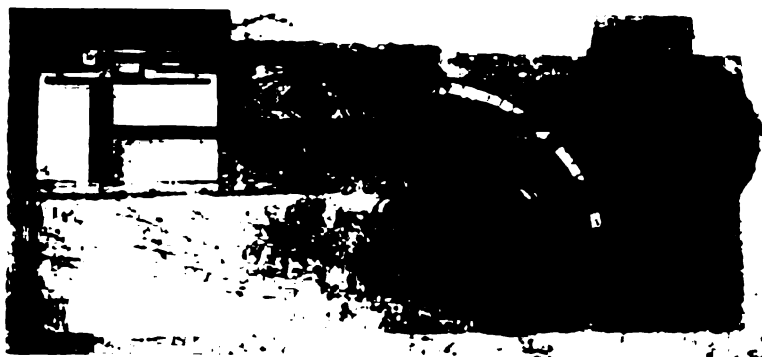
$$\begin{aligned} O_1B=1; PB=5,38; O_1A=0,755; AC=2,82; \\ EO_2=2,08; O_2D=1,58; DC=1,29; DF=1,54; \\ O_4E=1,36; O_4F=1,03; EF=0,78; FG=2,19; \\ GO_5=2,08; MO_5=MK=1,89; MN=0,62; AK=3,7; \\ MT=3,09; h=1,27; O_1O_3=3,38; O_1O_5=3,56; \\ O_1O_2=3,95; O_5O_3=1,94; O_5O_2=3,04; O_3O_4=2,09. \end{aligned}$$



Фиг. 39



Фиг. 40

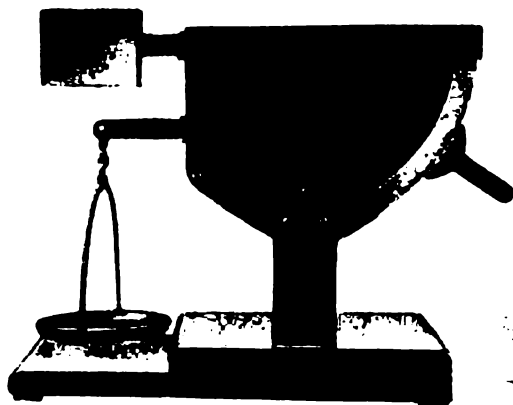


Фиг. 41

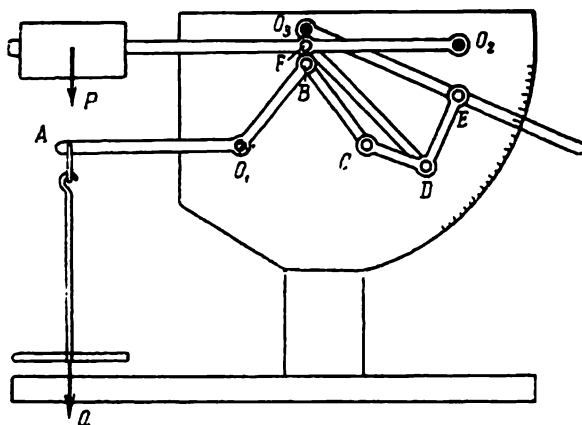
Центр O_4 укреплен на рычаге 1 (фиг. 40), который можно установить в различных положениях. При этом изменяется траектория точки N и, следовательно, характер движения золотника 2. На схеме рычаг 1 показан в крайнем левом положении, при котором длина хода золотника 2 наибольшая. На фиг. 41 приведена копия фотоснимка другой модели этого же механизма.

20. Механизм весов

На фиг. 42 приведен фотоснимок модели весов, а на фиг. 43 — ее кинематическая схема.



Фиг. 42



Фиг. 43

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

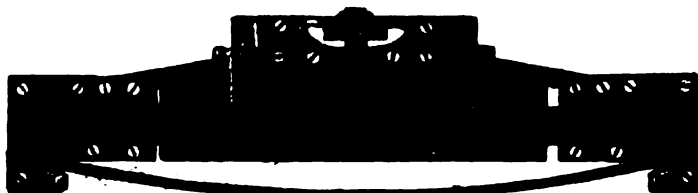
$$\begin{aligned} O_1A &= 1; \\ O_1B &= 0,692; \quad AB = 1,5; \quad BC = 0,693; \quad CE = 0,626; \\ CD &= 0,353; \quad DF = 0,442; \quad O_3E = 0,941; \quad O_1O_3 = 0,692; \\ DF &= 0,98; \quad O_2F = 0,892; \quad O_2O_3 = 0,892; \quad O_1O_2 = 1,42. \end{aligned}$$

На звено O_1A действует сила тяжести взвешиваемого груза Q , а на звено O_2P — сила тяжести противовеса P . Так как механизм имеет степень подвижности, равную двум, то для определения положений всех звеньев механизма следует задаваться двумя независимыми условиями. В данном случае такими условиями являются: 1) условие равновесия системы под действием сил P и Q и 2) условие горизонтальности звена O_2P в положении равновесия. Оба условия удовлетворяются при некотором положении звена O_3E , причем это положение, очевидно, изменяется с изменением величины взвешиваемого груза.

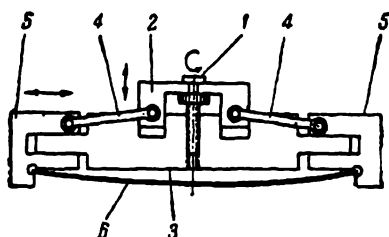
Рычаг O_3E снабжен установочным приспособлением и нониусом, а на корпусе весов укреплена шкала. Противовес P выполнен сменным. Каждой величине противовеса должна соответствовать особая градуировка шкалы.

21. Измеритель кривизны

На фиг. 44 приведен фотоснимок модели этого устройства, а на фиг. 45 — его схема.



Фиг. 44



Фиг. 45

При вращении винта 1 ползун 2 перемещается в направляющих корпуса 3, а ползуны 5 сближаются или удаляются друг от друга, что вызывает больший или меньший прогиб упругой пластинки 6.

Так как при малых величинах прогиба упругая линия пластинки в данных условиях мало отличается от дуги окружности, то это приспособление может быть использовано как для измерения кривизны, так и для черчения дуг окружностей больших радиусов.

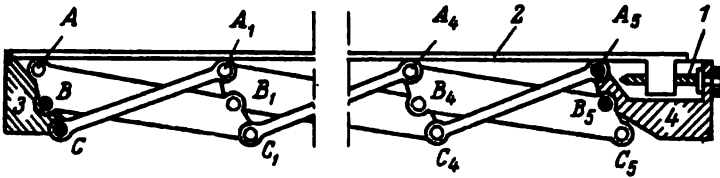
Величина прогиба, а следовательно, и величина радиуса кривизны, измеряемой кривой, определяются по перемещению ползуна 2. С этой целью ползун 2 снабжен нониусом, а корпус 3 имеет шкалу.

22. Линейка для измерения кривизны

На фиг. 46 приведен фотоснимок линейки для измерения кривизны, а на фиг. 47 — кинематическая схема этого устройства.



Фиг. 46



Фиг. 47

Размеры звеньев в этой модели имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} AB &= A_1B_1 = \dots = A_5B_5 = 18 \text{ мм} \\ BC &= B_1C_1 = \dots = B_5C_5 = 18 \text{ мм} \\ AB_1 &= A_1B_2 = \dots = A_4B_5 = 104,5 \text{ мм} \\ BC_1 &= B_1C_2 = \dots = B_4C_5 = 110 \text{ мм} \\ CA_1 &= C_1A_2 = \dots = C_4A_5 = 94 \text{ мм} \end{aligned}$$

При вращении винта 1 гибкая линейка 2, скрепленная со звеном 3 и шарнирами A, A_1, A_2, \dots, A_5 , перемещается относительно звена 4, изгибаясь по дуге окружности.

Зависимость между радиусом этой дуги и перемещением линейки относительно звена 4 выражается формулой, данной Чебышевым,

$$R = \frac{19817}{J} \cdot \frac{586 + J}{762 + J},$$

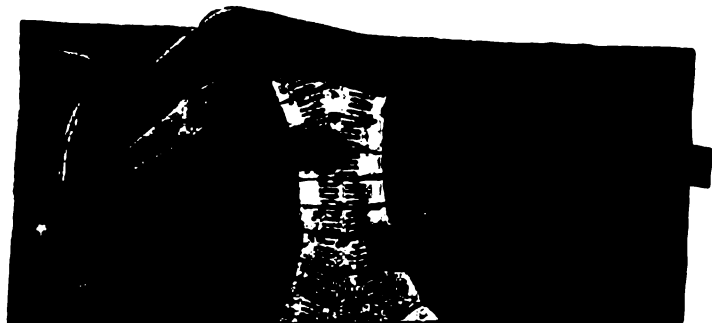
где R — радиус окружности (в мм), а J — перемещение (в мм) линейки 2 относительно звена 4.

Более подробное описание этой линейки имеется в книге В. Г. Бооля*.

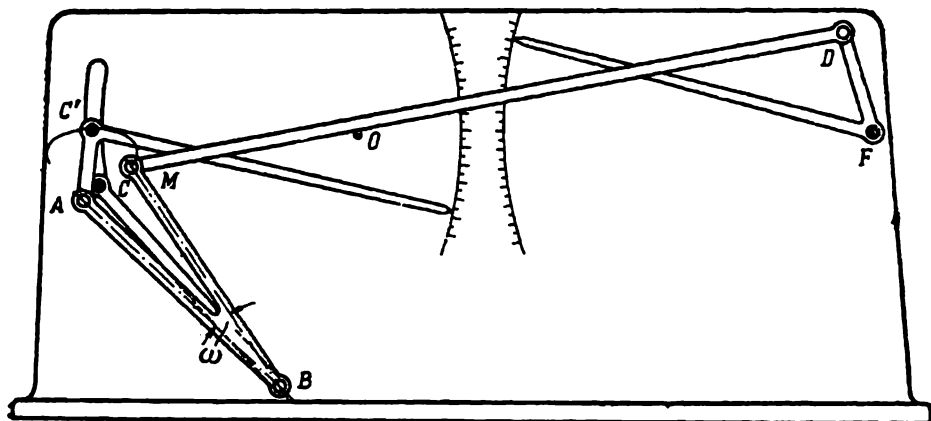
* В. Г. Бооль. Инструменты и аппараты для геометрического черчения. М., 1893.

23. Механизм с изменяемым ходом

На фиг. 48 приведен фотоснимок чернового проекта модели этого механизма, выполненный собственноручно Чебышевым, а на фиг. 49 — кинематическая схема.



Фиг. 48



Фиг. 49

Размеры звеньев имеют следующие соотношения:

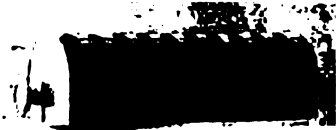
$$\begin{aligned} AB &= BC = BM = OC' = 1; \\ AC' &= 0,246; CC' = \text{variable}; AM = 0,246; \\ \omega &= 14^\circ; \\ MD &= 2,82; FD = 0,376; C'F = 2,84. \end{aligned}$$

Неподвижный центр C можно переставлять по дуге окружности, описанной из центра O , т. е. величина $CC' = d$ сделана переменной, что дает возможность получать различные по виду траектории точки M . При этом будет меняться также и соотношение между углами поворота звеньев AC' и DF . Так как звенья AC' и DF соединены жестко с указателями, движущимися по градуированным

шкалам, то эти углы поворота и изменение их соотношений могут быть показаны весьма наглядно.

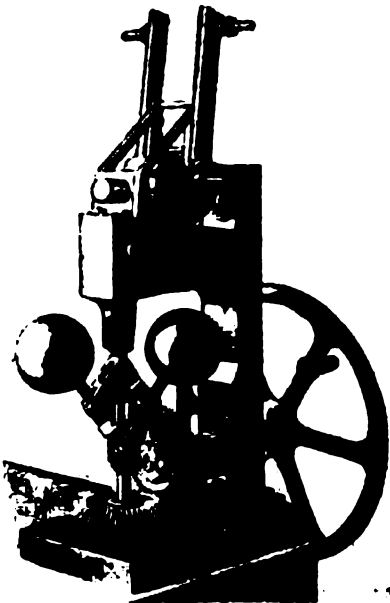
24. Арифмометр (счетная машина с непрерывным движением)

На фиг. 50 приведен фотоснимок арифмометра. Более совершенная модель этого арифмометра хранится в Conservatoire des Arts et Métiers в Париже.

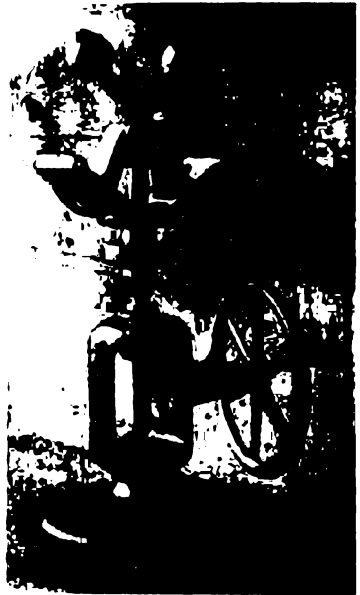


Фиг. 50

Конструкция арифмометра подробно описана Чебышевым в статье „Счетная машина с непрерывным движением“*.



Фиг. 51



Фиг. 52

25 Центробежный регулятор

На фиг. 51 и 52 приведены копии фотоснимков центробежных регуляторов, изготовленных по указанию Чебышева.

В мемуаре „О центробежном уравнителе“ Чебышев излагает метод определения основных размеров этих регуляторов при условии получения наилучшего изохронизма**. Модели, изображенные на фиг. 51 и 52, и были построены по размерам, определенным при помощи указанного метода.

* См. стр. 158—160 настоящего тома.—Ред.

** См. стр. 37—53 настоящего тома —Ред.

ПЕРЕЧЕНЬ МОДЕЛЕЙ МЕХАНИЗМОВ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

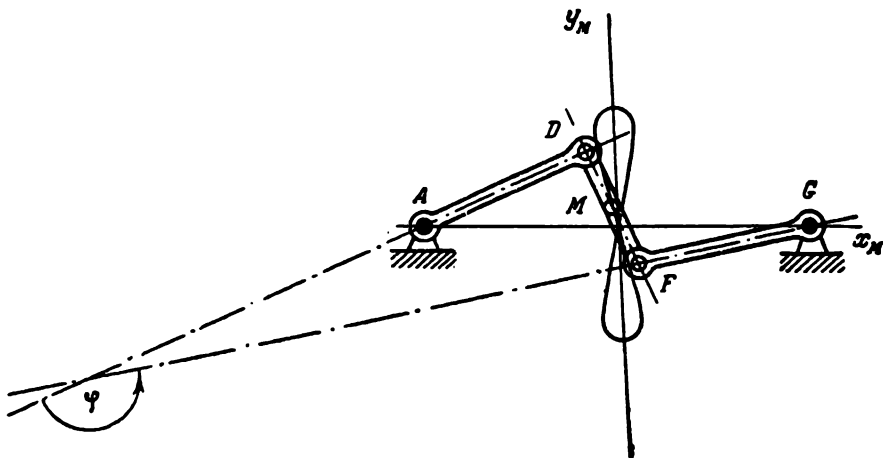
№ п. п.	Наименование	№ фиг.	Стр.
1	Механизм четырехзвенной противовращательной рукоятки	1, 2	213
2	Механизм самокатного кресла	3, 4	214
3	Механизм шестизвенной противовращательной рукоятки	5, 6	215
4	„Парадоксальный“ механизм	7, 8	216
5	Механизм, дающий два качания ведомого звена за один оборот кривошипа	9, 10	217
6	Механизм для преобразования качательного движения во вращательное	11, 12	218
7	Механизм „велосипеда“	13, 14	219
8	Механизм для преобразования вращательного движения в поступательное с ускоренным обратным ходом	15, 16	220
9	Механизм пресса	17, 18, 19	221
10	Механизм с длительной остановкой ведомого звена в конце его хода	20, 21	222
11	Механизм „сортировальки“	22, 23	223
12	Механизм с остановкой ведомого звена на полпути	24, 25	224
13	Шестизвенный механизм с остановками в крайних положениях	26, 27	224
14	Многозвенный механизм с остановками в крайних положениях	28, 29	225
15	Механизм противовращательной рукоятки с остановкой ведомого звена	30, 31	226
16	„Переступающий“ механизм („Стопоходящая машина“)	32, 33	227
17	Гребной механизм	34, 35, 36	229
18	Механизм, направляющий по дуге окружности	37, 38	230
19	Механизм кулисы паровой машины	39, 40, 41	231
20	Механизм весов	42, 43	232
21	Измеритель кривизны	44, 45	233
22	Линейка для измерения кривизны	46, 47	234
23	Механизм с изменяемым ходом	48, 49	235
24	Арифмометр (счетная машина с непрерывным движением)	50	236
25	Центробежный регулятор	51, 52	236

КОММЕНТАРИИ

(Составители Н. И. Артоболевский и Н. И. Левитский)

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ, ИЗВЕСТНЫХ ПОД НАЗВАНИЕМ ПАРАЛЛЕЛОГРАМОВ **

Пафнутий Львович Чебышев в продолжение всей своей жизни постоянно интересовался теорией механизмов. В первые же годы своей педагогической деятельности он читает лекции по практической механике в С.-Петербургском университете и в Александровском лицее. Несомненно, уже в этот период Чебышев предпринимает изыскания в области шарнирных механизмов, так как в своем отчете о заграничной командировке 1852 года ** он пишет, что для него было интересно сравнить резуль-



Фиг. 1

таты своих исследований с практикой машиностроительных заводов. Изучая различные конструкции машин и механизмов, Чебышев останавливает свое внимание на параллелограмах Уатта.

Под именем параллелограмов во времена Чебышева были известны прямолинейно-направляющие механизмы Уатта, т. е. шарнирные механизмы для воспроизведения движения по прямой линии, применявшиеся в некоторых конструкциях паровых машин.

Различают *полный* параллелограм Уатта и *сокращенный*.

* Эта работа помещена во II томе настоящего Собрания сочинений, стр. 23—51; там же помещен комментарий, составленный В. Л. Гончаровым (стр. 474—485). — *Ред.*

** Отчет будет опубликован в V томе настоящего Собрания сочинений. — *Ред.*

Сокращенный параллелограмм Уатта представляет собою шарнирный четырехзвено-ник $ADFG$ (фиг. 1), в котором точка M описывает траекторию, мало отличающуюся на некотором участке от прямой линии. Если принять $AD = FG$, то точка M находится на середине шатуна DF , а расстояние между неподвижными центрами A и G будет равно

$$AG = \sqrt{4(AD)^2 + (DF)^2}. \quad (1)$$

Полный параллелограмм Уатта (фиг. 2) образуется из сокращенного путем присоединения пентаграфа, а именно, к основному механизму $ADFG$ присоединены два звена FC и BC так, что образуется параллелограмм $DBCF$ (отсюда и произошло название механизма). Если принять

$$FC = DB = AD = FG \text{ и } DF = BC,$$

то траектория точки C будет подобна траектории точки M , т. е. точка C будет также на некотором участке своей траектории двигаться приблизительно прямолинейно.

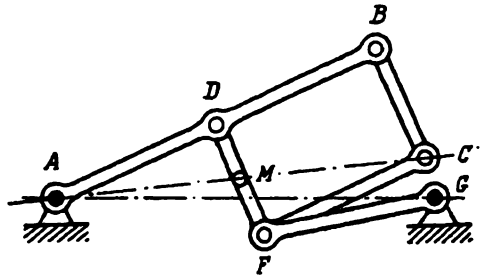
Параллелограмм Уатта применялся в балансирах паровых машинах для преобразования возвратно-поступательного движения поршня в непрерывное вращение кривошипа OK (фиг. 3). Траектория точки M использовалась для направления движения штока насоса или поршня второго цилиндра. Звено AB в машине называлось *коромыслом* или *баланси-ром*, а звено FG — *отводным радиу-сом* или *контрбаланси-ром*.

Практика применения этого механизма в различных конструкциях паровых машин привела к необходимости в некоторых случаях делать длину отводного радиуса FG отличной от длины коромысла AB . Но тогда точка M , движущаяся приблизительно по прямой линии, уже не будет находиться на середине линии DF .

Для нахождения положения точки M были выработаны особые правила и дополнительно к ним составлены таблицы поправок, уточняющие эти правила. Такой метод определения наивыгоднейших размеров параллелограмма Уатта был явно несовершенен, что и было отмечено Чебышевым в его отчете о командировке за границу.

Вскоре после возвращения из-за границы Чебышев представил в Академию Наук первую часть своей работы, посвященной теории параллелограмов, в которой он ставит задачу о нахождении размеров параллелограмма Уатта из условий наименьшего отклонения траектории точки M на некотором участке от прямой линии. В этой работе, озаглавленной „Теория механизмов, известных под названием параллелограмов“, заложены основы метода, при помощи которого можно решить не только частную задачу о параллелограмах, но и многие другие задачи прикладной механики. Дальнейшее развитие математических идей, изложенных в этой работе, привело Чебышева к созданию оригинальной теории наилучшего приближения функций, занимающей теперь одно из центральных мест в теории функций.

Во вступительной части Чебышев указывает, что существующие эмпирические методы нахождения размеров параллелограмов Уатта не обеспечивают достаточно высокой степени точности приближения траектории точки M к прямой линии. Отклонения от прямолинейности при движении точки M вредно отражаются на долговечности машины, так как вызывают появление дополнительных боковых усилий, действующих на шток поршня T и вызывающих быстрый износ салыника S . Между тем при надлежащем выборе размеров механизма эти отклонения могут быть сделаны

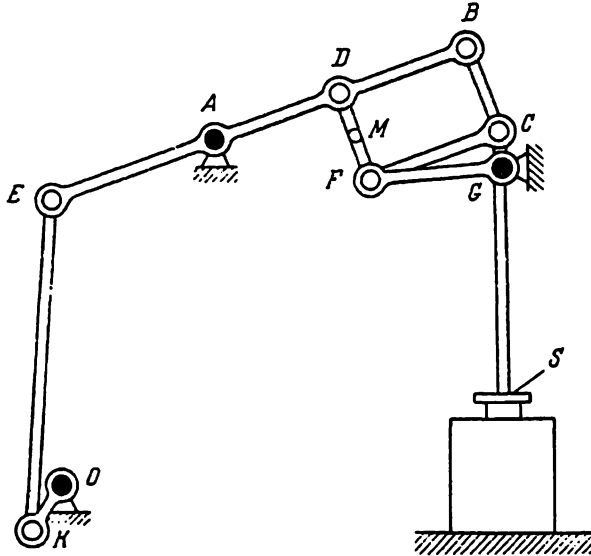


Фиг. 2

столь малыми, что практически движение точки M не будет отличаться от прямолинейного.

Далее Чебышев указывает, что для нахождения наивыгоднейших размеров параллелограмма Уатта необходимо решить следующую задачу:

*„Определить изменения, которые надо произвести в приближенном выражении функции $f(x)$, данном ее разложением по степеням $x - a$, если требуется сделать наименьшим предел его погрешности между $x = a - h$ и $x = a + h$, где h — величина не очень значительная“.**



Фиг. 3

Изложим кратко содержание этой задачи. Дана некоторая функция $f(x)$, которая может быть представлена в окрестности точки $x = a$ степенным рядом

$$f(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \dots + k_m(x-a)^m + \dots, \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} k_0 &= f(a), \\ k_1 &= f'(a), \\ k_2 &= \frac{1}{2} f''(a) \\ &\dots \dots \dots \\ k_m &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(a). \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Ограничиваясь конечным числом $n + 1$ членов ряда, получим приближенное выражение функции $f(x)$

$$S_n(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \dots + k_n(x-a)^n. \quad (4)$$

Максимальное отклонение многочлена $S_n(x)$ от функции $f(x)$ на отрезке

$$a - h \leq x \leq a + h$$

с точностью до величин порядка h^{n+1} равно

$$L_s = k_{n+1} h^{n+1}. \quad (5)$$

* Том II настоящего Собрания сочинений, стр. 26.

Если величина h есть бесконечно малая величина *первого* порядка, то многочлен $S_n(x)$ представляет функцию $f(x)$ на этом отрезке с точностью до бесконечно малых величин порядка $n+1$ и является наилучшим приближенным выражением функции $f(x)$ в виде многочлена степени n .

Но если h имеет некоторое конечное значение, то можно найти другой многочлен степени n

$$Q_n(x, h) = k_0 + \delta_0 + (k_1 + \delta_1)(x-a) + (k_2 + \delta_2)(x-a)^2 + \dots + (k_n + \delta_n)(x-a)^n, \quad (6)$$

который на отрезке

$$a-h \leq x \leq a+h$$

представляет функцию $f(x)$ лучше, чем многочлен $S_n(x)$, т. е. максимальная абсолютная величина отклонения многочлена $Q_n(x, h)$ от функции $f(x)$

$$|Q_n(x, h) - f(x)|$$

на этом отрезке будет меньше, чем отклонение приближенного выражения $S_n(x)$ от $f(x)$.

В многочлене $Q_n(x, h)$ величины $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ представляют собою те поправки, которые следует прибавить к соответствующим коэффициентам многочлена $S_n(x)$, чтобы повысить точность его приближения к данной функции $f(x)$ на рассматриваемом отрезке.

Обозначим

$$V_n(x, h) = \delta_0 + \delta_1(x-a) + \dots + \delta_n(x-a)^n. \quad (7)$$

Тогда разность между функцией $f(x)$ и многочленом $Q_n(x, h)$ может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} R(x, h) &= f(x) - Q_n(x, h) = f(x) - S_n(x) - V_n(x, h) = \\ &= -V_n(x, h) + k_{n+1}h^{n+1} + k_{n+2}h^{n+2} + \dots \end{aligned} \quad (8)$$

Эта разность должна наименее уклоняться от нуля на отрезке

$$a-h \leq x \leq a+h$$

т. е. коэффициенты $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ должны быть подобраны таким образом, чтобы максимальное абсолютное значение разности $R(x, h)$ было бы наименьшим возможным.

Если при определении этих коэффициентов учитывать влияние только одного отброшенного члена разложения (2)

$$k_{n+1}h^{n+1},$$

то разность $R(x, h)$ будет многочленом степени $n+1$

$$R_{n+1}(x, h) = k_{n+1}h^{n+1} - \delta_n(x-a)^n - \delta_{n-1}(x-a)^{n-1} - \dots - \delta_0 \quad (9)$$

и задача сводится к нахождению коэффициентов многочлена степени $n+1$ с заданным коэффициентом при x в старшей степени из условия наименьшего уклонения этого многочлена от нуля.

Искомые коэффициенты могут быть вычислены на основании того, что многочлен $R_{n+1}(x, h)$ должен достигать на заданном отрезке своих предельных значений не менее чем $n+2$ раза, последовательно меняя знак.*

Предварительно Чебышев, применяя подстановку

$$\frac{x-a}{h} = x, \quad (10)$$

* Доказательство этого утверждения, известного теперь под названием „теоремы Чебышева“, дано Чебышевым позднее в работе „Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций“ (том II настоящего Собрания сочинений, стр. 151—225).

преобразовывает разность $R(x, h)$ к следующему виду:

$$R_{n+1}(x, h) = k_{n+1}h^{n+1}x^{n+1} - \delta_n h^n x^n - \delta_{n-1} h^{n-1} x^{n-1} - \dots - \delta_0. \quad (11)$$

Тогда вычисление неизвестных коэффициентов $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ и условия наименьшего отклонения от нуля разности $R_{n+1}(x, h)$ на отрезке

$$-1 \leq x \leq 1$$

приводит к следующему результату:

$$R_{n+1}(x, h) = k_{n+1}h^{n+1} \frac{T_{n+1}(x)}{2^n}, \quad (12)$$

где, как теперь принято, положено

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n] = \cos(n \arccos x). \quad (13)$$

Многочлен $T_n(x)$ широко известен под названием *полинома Чебышева*.

Максимальное абсолютное значение многочлена $R_{n+1}(x, h)$ на отрезке $(-1, 1)$ равно

$$L = \frac{k_{n+1}h^{n+1}}{2^n}. \quad (14)$$

Следовательно, в этом случае отклонение многочлена $Q_n(x, h)$ от функции $f(x)$ в 2^n раз меньше, чем отклонение многочлена $S_n(x)$. Это соотношение справедливо, однако, только при условии, что h величина достаточно малая и поэтому в разложении (2) можно пренебречь членами, содержащими h в степени выше $n+1$.

В качестве примера вычислим поправки для случая $n = 4$. Многочлен Чебышева пятой степени T_5 определяется из формулы (13):

$$T_5 = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Следовательно,

$$R_5(x, h) = \frac{k_5 h^5}{2^4} (16x^5 - 20x^3 + 5x),$$

или

$$R_5(x, h) = k_5(x-a)^5 - \frac{5}{4} k_5 h^3 (x-a)^3 + \frac{5}{16} k_5 h^4 (x-a).$$

Отсюда искомые поправки равны

$$\delta_4 = 0,$$

$$\delta_3 = \frac{5}{4} k_5 h^3,$$

$$\delta_2 = 0,$$

$$\delta_1 = -\frac{5}{16} k_5 h^4,$$

$$\delta_0 = 0,$$

т. е. приближенное выражение функции $f(x)$ в виде многочлена четвертой степени с поправками, учитывающими влияние отброшенного члена $k_5(x-a)^5$, имеет вид

$$\begin{aligned} f(x) \approx Q_4(x, h) &= k_0 + (k_1 - \frac{5}{16} k_5 h^4)(x-a) + k_2(x-a)^2 + \\ &+ (k_3 + \frac{5}{4} k_5 h^3)(x-a)^3 + k_4(x-a)^4. \end{aligned}$$

Далее Чебышев вычисляет поправки за счет суммы нескольких отброшенных членов разложения (2), придавая вычислительному процессу рекуррентный характер.

Например, для приближенного выражения $f(x)$ в виде многочлена четвертой степени поправки имеют следующий вид:

$$\delta_4 = \frac{7}{4} k_5 h^2 + \frac{36 k_5^2 k_6 + 2 k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{16 k_5^2} h^4 + \dots;$$

$$\delta_3 = \frac{5}{4} k_5 h^2 + \frac{22 k_5 k_7 - k_6^2}{16 k_5} h^4 + \dots;$$

$$\delta_2 = -\frac{13}{16} k_5 h^4 - \frac{87 k_5^2 k_6 + 10 k_5 k_6 k_7 - 5 k_6^3}{64 k_5^2} h^6 + \dots;$$

$$\delta_1 = -\frac{5}{16} k_5 h^4 - \frac{31 k_5 k_7 - 3 k_6^2}{64 k_5} h^6;$$

$$\delta_0 = \frac{1}{16} k_5 h^6 + \frac{7 k_5^2 k_6 + 2 k_5 k_6 k_7 - k_6^3}{64 k_5^2} h^8 + \dots$$

Указав метод вычисления поправок к коэффициентам степенного ряда, Чебышев не дает непосредственного приложения этого метода к нахождению размеров параллелограмма Уатта. В заключительной части своей работы он пишет: „В следующих параграфах мы покажем приложения выведенных нами формул к нахождению элементов параллелограмов, удовлетворяющих условиям, при которых точность хода наибольшая“. Однако эти параграфы не были опубликованы Чебышевым; не были обнаружены и рукописные материалы, относящиеся к ним. Поэтому вполне уместно в настоящей статье дать решение задачи об определении размеров параллелограмма Уатта на основании изложенного Чебышевым метода вычисления поправок.

Покажем предварительно, что этот метод применим не только к задаче о параллелограмме Уатта, но и к другим задачам приближенного синтеза механизмов.

Пусть заданная кинематическая или динамическая зависимость, которую нужно воспроизвести при помощи механизма, представлена в виде некоторой функции

$$y = f(x).$$

Эта заданная зависимость в большинстве случаев не может быть воспроизведена механизмом точно. Обозначим ту функцию, которую может воспроизвести механизм, через

$$y_m = \psi(x).$$

Например, в задачах о воспроизведении заданной кривой при помощи механизмов с иными парами функция $y = f(x)$ выражается в виде уравнения заданной кривой, а функция $y_m = \psi(x)$ — в виде уравнения шатунной кривой.

Для того чтобы механизм воспроизводил заданную зависимость наиболее точно, необходимо, чтобы функция $y_m = \psi(x)$ возможно мало отличалась от функции $y = f(x)$. Другими словами, нужно приблизить функцию $y = f(x)$ при помощи функции $y_m = \psi(x)$.

Приближаемая функция $y = f(x)$ нам задана и изменить ее по условию задачи мы обычно не можем. Приближающая же функция $y_m = \psi(x)$ содержит неизвестные коэффициенты, зависящие от параметров механизма, например от размеров звеньев механизма. Решая задачу о приближении функции $y = f(x)$ при помощи функции $y_m = \psi(x)$, т. е. определяя неизвестные коэффициенты приближающей функции таким образом, чтобы она возможно мало отличалась от заданной функции, мы тем самым устанавливаем зависимость, которым должны удовлетворять искомые параметры механизма.

Для аналитического решения этой задачи необходимо составить выражение функции, характеризующей отклонение от заданной зависимости. В простейших случаях это будет разность между заданной функциональной зависимостью $f(x)$ и той зависимостью, которую может воспроизвести механизм

$$\Delta(x) = f(x) - \psi(x),$$

причем под разностью $\Delta(x)$ можно понимать не только разность ординат, но и вообще расстояние между графиками функций, измеренное по определенному направлению, например по нормали к заданной кривой.

Более общим выражением является так называемая взвешенная разность, т. е. выражение вида

$$\Delta_q(x) = q(x) [f(x) - \psi(x)],$$

где вес $q(x)$ — произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$0 < m \leq q(x) \leq M \text{ или } 0 > m \geq q(x) \geq M.$$

Если пределы m и M достаточно близки между собою, т. е. вес $q(x)$ незначительно отличается от постоянной величины, то взвешенная разность может характеризовать собою отклонение от заданной зависимости.

В тех случаях, когда полученное выражение разности $\Delta(x)$ или $\Delta_q(x)$ имеет достаточно простой вид, можно определить неизвестные параметры механизма из условия наименьшего уклонения этой разности от нуля.

Однако во многих практически важных задачах синтеза механизмов не удастся получить аналитическое выражение разности $\Delta(x)$ или $\Delta_q(x)$ в приемлемом для практических вычислений виде. В этих случаях можно ограничиться приближенным решением задачи, заменяя действительное выражение разности $\Delta(x)$ или взвешенной разности $\Delta_q(x)$ их приближенными выражениями, получаемыми, например, из разложения в степенные ряды.

Пусть функция $\Delta(x)$, которую следует сделать наименее уклоняющейся от нуля, представлена в окрестности точки $x = a$ степенным рядом

$$\Delta(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + \dots + k_n(x-a)^n + \dots \quad (15)$$

Если требуется определить условия наименьшего уклонения от нуля этой функции в бесконечно малых пределах изменения x с точностью до величин порядка $n+1$, то следует положить

$$k_0 = k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0. \quad (16)$$

Так как коэффициенты k_0, k_1, \dots, k_n являются функциями параметров механизма, то система $n+1$ уравнений (16) и определит искомые соотношения между параметрами механизма.

При выполнении этих соотношений максимальное отклонение от заданной зависимости с точностью до величин h^{n+1} равно

$$L = k_{n+1}h^{n+1}. \quad (17)$$

Чем больше число уравнений (16), тем выше порядок малости величины L . Однако число нетождественных между собою уравнений (16) не может быть больше числа независимых параметров, определяющих механизм. Поэтому при решении задач приближенного синтеза механизмов число членов в приближенном выражении разности $\Delta(x)$

$$\Delta_n(x) = k_0 + k_1(x-a) + \dots + k_n(x-a)^n$$

всегда ограничено и для повышения точности приближения к заданной зависимости следует определить поправки к коэффициентам k_0, k_1, \dots, k_n , учитывающие влияние отброшенных членов разложения (15) на отрезке $a-h \leq x \leq a+h$.

Вычислив поправки $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ при помощи метода, разработанного Чебышевым, можно затем определить размеры механизма из системы уравнений

$$\begin{aligned} k_0 + \delta_0 &= 0, \\ k_1 + \delta_1 &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ k_n + \delta_n &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Применим теперь метод вычисления поправок к решению задачи о нахождении размеров параллелограмма Уатта.

Заданная функциональная зависимость в этой задаче выражается в виде уравнения прямой линии, проходящей через начало координат

$$y = ax. \quad (19)$$

Зависимость, воспроизводимая механизмом, может быть представлена в виде уравнения шатунной кривой [5], * описываемой точкой M (фиг. 1),

$$\begin{aligned} y_M^6 + x_M^6 + 3y_M^4 x_M^2 + 3y_M^2 x_M^4 + 2(d^2 + r^2 - 4)y_M^4 - 2(d^2 - r^2 + 4)x_M^4 - \\ - 4(4 - r^2)x_M^2 y_M^2 + [(d^2 - r^2 + 4)^2 - 16d^2]y_M^2 + (d^2 - r^2 + 4)^2 x_M^2 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где r и d — относительные размеры звеньев механизма

$$r = \frac{DF}{AD}, \quad d = \frac{AG}{AD}.$$

Отклонение от заданной зависимости, измеренное как разность ординат, равно

$$\Delta(x) = y_M - ax. \quad (21)$$

Из уравнения (20) можно получить ординату y_M в виде явной функции абсциссы x , так как оно приводится к уравнению третьей степени относительно y^2 . Подставив найденное выражение в (21), получим разность $\Delta(x)$ в виде функции абсциссы x , но определить размеры механизма из условий наименьшего уклонения от нуля этой разности на отрезке

$$-h \leq x \leq h$$

не представляется возможным ввиду сложности ее аналитического выражения.

Ограничиваясь приближенным решением задачи, можно заменить действительное выражение разности $\Delta(x)$ его приближенным выражением, полученным из разложения в степенной ряд. Но коэффициенты этого ряда представляются в виде довольно сложных функций размеров механизма ** (в особенности для коэффициентов при x в степенях выше третьей).

Значительно проще можно получить решение поставленной задачи, если воспользоваться параметрическим представлением шатунной кривой, описываемой точкой M [5],

$$y_M = \frac{2}{d} \sqrt{x(1-z)} + \frac{d^2 - r^2}{2d} \sqrt{\frac{1-z}{z}}, \quad (22)$$

$$x_M = \pm \sqrt{4(1-z) - y_M^2}, \quad (23)$$

где

$$z = \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (24)$$

и угол φ есть угол между направлениями стержней AD и FG .

* Здесь и далее цифрами в квадратных скобках даны ссылки на литературу, список которой помещен на стр. 254 настоящего тома.

** См. Комментарий В. Л. Гончарова, помещенный во II томе настоящего Собрания сочинений, стр. 474—485.

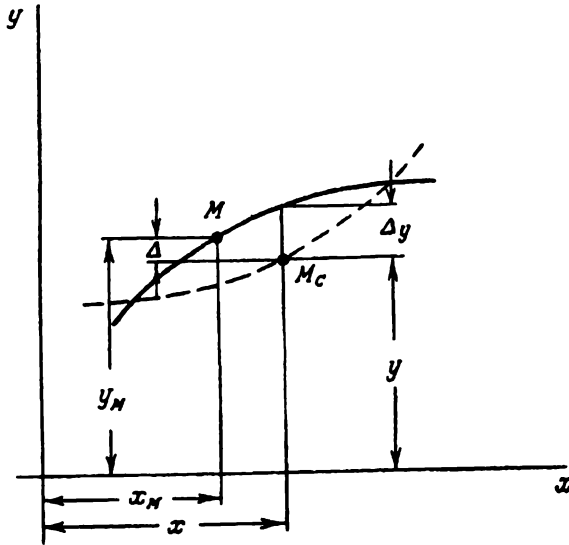
Уравнение заданной кривой (19) также представим в параметрической форме, приняв в качестве переменного параметра величину

$$z_0 = 1 - \frac{x^2 + y^2}{4}. \quad (25)$$

Имеем

$$y = \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \sqrt{1-z_0}, \quad (26)$$

$$x = \pm \sqrt{4(1-z_0) - y^2}. \quad (27)$$



Фиг. 4

Отклонение от заданной зависимости будем измерять как разность ординат при $z = z_0$

$$\Delta(z) = \frac{2}{d} \sqrt{z(1-z)} + \frac{d^2 - r^2}{z} \sqrt{\frac{1-z}{z}} - \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} \sqrt{1-z}. \quad (28)$$

Принятый способ измерения разности Δ графически представлен на фиг. 4. Точки M и M_c соответствуют значениям $z = z_0$. Абсциссы этих точек определяются из формул (23) и (27). Нетрудно видеть, что при $z = z_0$ и при значениях y , близких к y_M , абсциссы x и x_M мало различаются между собою и разность Δ приблизительно равна разности Δy , измеренной при значениях $x = x_M$. Введем обозначение

$$u = \sqrt{1-z} = \cos \frac{\varphi}{2}. \quad (29)$$

Тогда разность $\Delta(z)$ примет вид

$$\Delta(u) = \frac{2}{d} u \sqrt{1-u^2} + \frac{d^2 - r^2}{2d} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} u. \quad (30)$$

Раскладывая функцию $\Delta(u)$ в ряд Маклорена, получаем

$$\Delta(u) = k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3 + \dots, \quad (31)$$

где

$$k_1 = \frac{4 + d^2 - r^2}{2d} - \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad (32)$$

$$k_2 = \frac{d^2 - r^2 - 4}{4d}, \quad (33)$$

$$k_3 = \frac{3(d^2 - r^2) - 4}{16d}. \quad (34)$$

Если требуется определить соотношения между параметрами механизма, при которых функция $\Delta(u)$ наименее уклоняется от нуля в бесконечно малом промежутке изменения аргумента u , то следует положить

$$k_1 = \frac{4 + d^2 - r^2}{2d} - \frac{2a}{\sqrt{1 + a^2}} = 0, \quad (35)$$

$$k_3 = \frac{d^2 - r^2 - 4}{4d} = 0. \quad (36)$$

Из уравнения (36) получаем искомое соотношение между относительными размерами звеньев механизма

$$d^2 - r^2 = 4. \quad (37)$$

Из уравнения (35), принимая во внимание соотношение (37), получаем угловой коэффициент прямой, к которой приближена траектория точки M ,

$$a = \frac{2}{r}. \quad (38)$$

Эта прямая есть касательная в начале координат, причем из разложения (31) следует, что касание в данном случае — четвертого порядка.

Максимальное отклонение траектории точки M от этой прямой на отрезке

$$-h \leq u \leq h$$

может быть приближенно с точностью до величин h^5 вычислено по формуле

$$\tilde{L}_n = k_3 h^5. \quad (39)$$

Подставляя в формулу (39) соотношение (37), получаем

$$\tilde{L}_n = \frac{h^5}{2d}. \quad (40)$$

Более точно можно подсчитать отклонение как разность ординат при $x = x_m$ и $u = h$. Имеем

$$L_y = \frac{2}{d} h \sqrt{1 - h^2} + \frac{d^2 - r^2}{2d} \cdot \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} - a \sqrt{4h^2 - \left(\frac{2}{d} h \sqrt{1 - h^2} + \frac{d^2 - r^2}{2d} \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} \right)^2}. \quad (41)$$

Подставляя в формулу (41) соотношения (37) и (38) и производя преобразования, получаем

$$L_y = \frac{2h(2 - h^2 - a\sqrt{r^2(1 - h^2) - h^4})}{d\sqrt{1 - h^2}}. \quad (42)$$

Наконец, можно определить максимальное L_n отклонение, измеренное по нормали к заданной прямой (фиг. 5),

$$L_n = L_y \cos \psi = L_y \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}. \quad (43)$$

Из формулы (23) видно, что расстояние от начала координат до любой точки, лежащей на шатунной кривой, описываемой точкой M , равно

$$\rho = 2\sqrt{1-z} = 2h.$$

Поэтому длина приближенно-прямолинейного участка l , на котором отклонение не превышает величины L_n , может быть определена по формуле

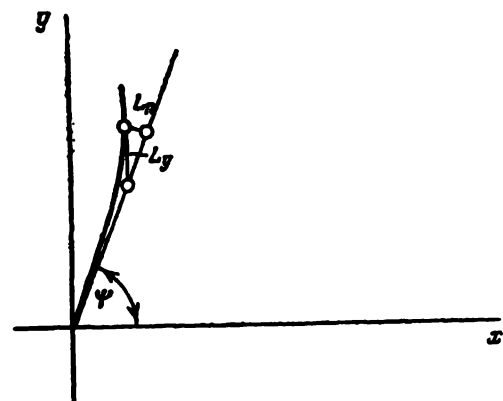
$$l = 4h. \quad (44)$$

Для повышения точности приближения к заданной прямой нельзя использовать условие

$$k_2 = 0, \quad (45)$$

так как не существует механизма, удовлетворяющего одновременно условиям (36) и (45). Это следует также из того, что шатунная кривая шарнирного четырехзвенника есть кривая шестого порядка и не может поэтому иметь соприкосновение выше пятого порядка.

Однако приближение к заданной прямой можно значительно улучшить, если, ограничиваясь прибли-



Фиг. 5

женным выражением $\Delta(u)$ в виде многочлена степени не выше четвертой

$$\Delta(u) \approx k_1 u + k_3 u^3,$$

вычислить поправки за счет отброшенного члена $k_5 u^5$.

Как было показано ранее, * величины этих поправок равны

$$\delta_1 = -\frac{5}{16} k_5 h^4,$$

$$\delta_3 = \frac{5}{4} k_5 h^2.$$

Приближенное выражение $\Delta(u)$ с этими поправками имеет вид

$$\Delta(u) \approx \left(k_1 - \frac{5}{16} k_5 h^4\right) u + \left(k_3 + \frac{5}{4} k_5 h^2\right) u^3.$$

Приравняв нулю коэффициенты при u и u^3 , получим систему уравнений для определения искомых параметров механизма

$$\frac{4+d^2-r^2}{2d} - \frac{2a}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{5h^4}{16} \frac{3(d^2-r^2)-4}{16d} = 0, \quad (46)$$

$$\frac{d^2-r^2-4}{4d} + \frac{5h^2}{4} \frac{3(d^2-r^2)-4}{16d} = 0, \quad (47)$$

* См. стр. 242 настоящего тома.

Из уравнения (47) получаем искомое соотношение между относительными размерами звеньев механизма

$$d^2 - r^2 = 4 \frac{16 + 5h^2}{16 + 15h^2}. \quad (48)$$

Из уравнения (46), принимая во внимание соотношение (48), получаем угловой коэффициент прямой, к которой приближена траектория точки M ,

$$a = \frac{2 + \frac{5}{4}h^2 - \frac{5}{64}h^4}{\sqrt{d^2 \left(1 + \frac{15}{16}h^2\right)^2 - \left(2 + \frac{5}{4}h^2 - \frac{5}{64}h^4\right)^2}}. \quad (49)$$

Прямая с угловым коэффициентом a , вычисляемым по формуле (49), по отношению к траектории точки M будет уже не касательной, как в предыдущем случае, а секущей.

Если угловой коэффициент a этой прямой задан, то относительные размеры звеньев r и d определяются по формулам

$$d = \frac{\sqrt{1+a^2} \cdot 128 + 80h^2 - 5h^4}{a}, \quad (50)$$

$$r = \sqrt{d^2 - 4 \frac{16 + 5h^2}{16 + 15h^2}}. \quad (51)$$

Отклонение траектории точки M от заданной прямой при h достаточно малом можно подсчитать приближенно по формуле

$$\tilde{L}_n = \frac{k_s h^5}{16} = \frac{h^5}{2d(16 + 15h^2)} \quad (52)$$

или, более точно, по формуле (41).

Отклонение по нормали к заданной прямой при $a = h$ можно определить по формуле (43), в которой L_y есть разность ординат, вычисленная по формуле (41).

Длина приближенно-прямолинейного участка определяется по формуле (44).

Рассмотрим числовой пример. Дано: $r = 1$, $l = 2$. Если определять размеры механизма из условия касания четвертого порядка шатунной кривой с касательной в начале координат, то размер d найдется из соотношения (37)

$$d = \sqrt{5} \approx 2,2361.$$

Величина h при заданной длине l определится из формулы (44)

$$h = 0,5.$$

Угловой коэффициент прямой, к которой приближена траектория точки M , вычисляется из формулы (38)

$$a = 2.$$

Максимальная разность ординат траектории точки M и прямой линии на длине $l = 2$ по формуле (42) равна

$$L_y = 0,02367.$$

Максимальное отклонение, измеренное по нормали к прямой линии, по формуле (43) равно

$$L_n = 0,01059.$$

Если применить метод поправок, то размер d определится из соотношения (48)

$$d = 2,1198.$$

Угловой коэффициент прямой, к которой приближена траектория точки M , вычисляется из формулы (49)

$$a = 1,87104.$$

Максимальная разность ординат траектории точки M и прямой линии достигается при $u = h$. По формуле (41) эта разность равна

$$L_y = 0,01129.$$

Максимальное отклонение, измеренное по нормали к прямой линии, по формуле (43) равно

$$L_n = 0,00532.$$

Следовательно, применение метода поправок дало возможность уменьшить максимальное отклонение приблизительно в два раза при тех же значениях длины l и размера r .

В рассмотренном примере длина приближенно-прямолинейного участка l была выбрана весьма значительной. Если ограничиться меньшей длиной l , то применение метода поправок даст еще большее уменьшение максимального отклонения от заданной завязисмости. Например, при $h^* = 0,1$ и $r = 1$ в случае касания четвертого порядка имеем: $l = 4\sqrt{0,1} = 1,265$; $d = 2,2361$; $a = 2$; $L_y = 0,00394$; $L_n = 0,00176$.

Применение метода поправок дает следующие результаты: $d = 2,1844$; $a = 1,9495$; $L_y = 0,00055$; $L_n = 0,00026$, т. е. отклонение уменьшается приблизительно в семь раз.

Сопоставляя полученные результаты с числовыми данными, указанными Чебышевым во вступительной части его работы, можно предполагать, что Чебышев имел решение задачи об определении размеров параллелограмма Уатта. То обстоятельство, что Чебышев не опубликовал полученных им формул, может быть объяснено тем, что, применяя условия наилучшего приближения шатунной кривой к прямой линии, он получил свой оригинальный механизм,* который, так же как и параллелограм Уатта, является симметричным шарнирным четырехзвенником, но дает значительно лучшее приближение шатунной кривой к прямой линии.

„О НЕКОТОРОМ ВИДОИЗМЕНЕНИИ КОЛЕНЧАТОГО ПАРАЛЛЕЛОГРАМА УАТТА“

Коленчатым или *полным* параллелограмом Уатта называют предложенный Уаттом прямолинейно-направляющий механизм с пантографом (см. фиг. 2 на стр. 239). В этом механизме точки M и C описывают подобные траектории, мало отличающиеся на некотором участке от прямой линии.

Применяя метод разложения в ряды, Чебышев указывает видоизмененную схему полного параллелограмма Уатта и соотношения между размерами звеньев, при которых для траектории точки C уменьшается максимальное отклонение от прямолинейности. Вывод этих соотношений имеется в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 161).

Следует отметить, что в механизме Чебышева в отличие от полного параллелограмма Уатта имеется лишь одна точка, траектория которой приближена к прямой линии, так как для повышения точности хода точки C Чебышев отступил от соотношений, необходимых для образования пантографа.

„ОБ ОДНОМ МЕХАНИЗМЕ“

Симметричный прямолинейно-направляющий механизм, описанный в этой статье, может быть преобразован по теореме Робертса — Чебышева в другой четырехзвенный механизм, известный под названием „лямбдообразного“ ([4], стр. 187). Поэтому соотно-

* См. „Об одном механизме“, стр. 10—15 настоящего тома.

шения между размерами звеньев, указанные Чебышевым в рассматриваемой статье без вывода, могут быть получены из формул для лямбдообразного механизма (стр. 186 настоящего тома), подробный вывод которых дан Чебышевым на основании теории наилучшего приближения функций.

Формулы для длины прямолинейного участка и величины максимального отклонения от прямолинейности также могут быть получены на основании зависимостей, данных Чебышевым в последующих его статьях, как это показал З. Ш. Блох ([2], стр. 141). Таблицы и графики, облегчающие пользование этими формулами, имеются в работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([1], стр. 96).

„О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ“

Выведенное в этой работе уравнение, связывающее число подвижных звеньев m , число подвижных шарниров n и число неподвижных шарниров v при условии определенности траекторий, описываемых звеньями, тождественно с уравнением, известным под названием „формулы Грюблера“ ([4], стр. 184). Так как Чебышев получил это уравнение на 13 лет раньше Грюблера, то структурную формулу плоских механизмов следует называть не формулой Грюблера, а *формулой Чебышева*.

Формулы для определения параметров шестизвенного механизма, дающего приближение всей шатунной кривой к прямой линии, и соответствующий числовой пример * даны в настоящем Собрании сочинений П. Л. Чебышева в редакции А. А. Маркова и Н. Я. Соинина, которые исправили неточность, имевшую место в первом издании этой статьи.

Как показал З. Ш. Блох ([2], стр. 165), соотношения между размерами звеньев прямолинейно-направляющих механизмов, упоминаемых в этой статье, получены Чебышевым из разложения в ряды координат точки, совершающей приближенно-прямолинейное движение.

Кроме того, З. Ш. Блох установил ([1], стр. 105), что в формулы, определяющие размеры одного из этих механизмов, ** вкралась опечатка. В настоящем издании формулы для этого механизма даны с исправлениями З. Ш. Блоха.

Отметим, что термин „мотыль“, употребляемый Чебышевым в этой статье, равнозначен термину „кривошип“.

„О ЦЕНТРОБЕЖНОМ УРАВНИТЕЛЕ“

Упоминаемый в постановке задачи полином 5-й степени (стр. 42 настоящего тома), который наименее уклоняется от нуля, постоянно возрастаая или убывая, может быть получен на основании общего решения, данного Чебышевым в работе „О функциях, наименее уклоняющихся от нуля“. *** Некоторые частные значения этих полиномов имеются в работе Н. И. Левитского ([5], стр. 44).

Практическое решение задачи об определении размеров регулятора основывается, однако, на разложении в ряды. Указанные Чебышевым значения величин A, B, m, ψ и φ (стр. 40 настоящего тома) могут быть найдены из системы уравнений, которые получаются, если приравнять нулю коэффициенты при $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2$ и α^4 ([3], стр. 166—168).

„О ЗУБЧАТЫХ КОЛЕСАХ“

Метод, которым пользуется в этой работе Чебышев, основан на замене действительного выражения отклонения от заданной зависимости его приближенным выраже-

* См. стр. 34—36 настоящего тома.

** См. стр. 20 настоящего тома.

*** Том III настоящего Собрания сочинений, стр. 24—48 и 391—393.

нием, причем искомые параметры определяются из условий наименьшего отклонения от нуля этой разности на конечном отрезке изменения аргумента. Сравнение этого метода с методом, основанным на приравнении нулю коэффициентов в ряде Тейлора показывает, что в тех случаях, когда нужно получить приближение к заданной зависимости на конечном отрезке изменения аргумента, предпочтительнее пользоваться методом, предложенным Чебышевым в работе „О зубчатых колесах“ ([5], стр. 61).

Вывод значений коэффициентов тех полиномов, которые использует Чебышев при решении задачи о зубчатых колесах, имеется в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 170).

„О ПРОСТЕЙШИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СИММЕТРИЧЕСКИХ ОКОЛО ОДНОЙ ОСИ“

Содержание этой заметки представляет собою в основном краткое изложение результатов, подробно изложенных Чебышевым в работе: „О параллелограмах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси“ (стр. 101—112 настоящего тома). Преобразования, при помощи которых могут быть получены формулы, указанные Чебышевым в этой заметке, приведены в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 129).

„О ПРОСТЕЙШИХ СОЧЛЕНЕНИЯХ“

В этой работе Чебышев доказал, независимо от английского ученого Робертса, теорему о возможности воспроизведения одной и той же шатунной кривой различными шарнирными четырехзвенниками. Эта теорема известна теперь под названием „теоремы Робертса — Чебышева“ ([4], стр. 188).

Кроме того, в этой работе Чебышев указал соотношения между размерами звеньев прямолинейно-направляющего механизма, в котором вся траектория некоторой точки шатуна приближена к прямой линии. Этот механизм известен под названием „непрерывного трансформатора Чебышева“. Вывод соотношений между размерами его звеньев дан З. Ш. Блохом ([2], стр. 139). В работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([1], стр. 100) имеются таблицы и графики, облегчающие выбор параметров этого механизма по заданным условиям.

„О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИММЕТРИЧЕСКИХ ОКОЛО ОДНОЙ ОСИ“

Соотношения между размерами звеньев, которые указываются Чебышевым для рассмотренных им в этой работе прямолинейно-направляющих механизмов, могут быть получены из зависимостей, выведенных им в работе „О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси“ (стр. 167—211 настоящего тома).

Преобразования, при помощи которых могут быть получены эти соотношения, даны в работе З. Ш. Блоха ([2], стр. 129). Для облегчения выбора размеров прямолинейно-направляющих механизмов Чебышева по заданным условиям в работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([1], стр. 81) имеются таблицы и графики, указывающие зависимости между размерами звеньев, длиной прямолинейного участка и максимальным отклонением от прямолинейности.

Чебышев рассматривал только прямолинейно-направляющие механизмы, в которых траектория некоторой точки шатуна приближена к прямой на одном участке. Как показано в работе Н. И. Левитского ([5], стр. 88), на основании зависимостей, имеющихся в работах Чебышева, можно получить также прямолинейно-направляющие механизмы с траекторией, приближенной к прямой на двух участках.

„О ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, СОСТОЯЩИХ ИЗ ТРЕХ КАКИХ-ЛИБО ЭЛЕМЕНТОВ“

Как указывает Чебышев в этой работе; число возможных решений при заданном шатунном треугольнике равно 18. В работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского ([2], стр. 102) имеется числовой пример, которым показаны 18 различных прямолинейно-направляющих механизмов, получаемых по формулам Чебышева.

„ТЕОРЕМА ОТНОСИТЕЛЬНО КРИВОЙ УАТТА“

Кривой Уатта современники Чебышева называли шатунную кривую, т. е. траекторию произвольной точки шатуна механизма плоского шарнирного четырехзвенника.

Формулированная в этой заметке теорема доказана Чебышевым в работе „О параллелограмах, состоящих из трех каких-либо элементов“ (стр. 113—141 настоящего тома).

„О ПРОСТЕЙШИХ ПАРАЛЛЕЛОГРАМАХ, ДОСТАВЛЯЮЩИХ ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ“

В этой работе Чебышев дал решение задачи об определении размеров прямолинейно-направляющего механизма, в котором траектория, описанная некоторой точкой шатуна, имеет с прямой касание четвертого порядка, и, кроме того, указал способ приближенного преобразования прямолинейно-направляющих механизмов. В работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского имеется пример преобразования по этому способу симметричного прямолинейно-направляющего механизма ([1], стр. 60).

„СЧЕТНАЯ МАШИНА С НЕПРЕРЫВНЫМ ДВИЖЕНИЕМ“

Во времена Чебышева счетные машины с прерывным изменением цифр суммы обладали еще значительными конструктивными недостатками. Это, очевидно, и побуждало Чебышева к созданию счетной машины с непрерывным движением.

Если в машинах с прерывным изменением сумм цифр колесо высшего разряда подвигается сразу на одно деление, когда колесо низшего разряда переходит с 9 на 0, то при непрерывной передаче соседнее колесо постепенно поворачивается на одно деление, пока младшее совершает полный оборот. В модели Чебышева эта непрерывная передача цифр суммы достигается применением планетарной передачи.

Фотография одного из ранних экземпляров арифмометра Чебышева приведена на стр. 226 настоящего тома (фиг. 50). Более совершенная модель хранится в Conservatoire des Arts et Métiers в Париже.

„О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В ДВИЖЕНИЕ ПО НЕКОТОРЫМ ЛИНИЯМ ПРИ ПОМОЩИ СОЧЛЕНЕННЫХ СИСТЕМ“

В этой заметке указаны соотношения между размерами звеньев механизма, когда вся траектория некоторой точки шатуна приближена к окружности.

Эти соотношения могут быть получены на основании общих зависимостей, данных Чебышевым в работе „О простейшей составчатой системе, доставляющей движения симметрические около оси“ (стр. 167—211 настоящего тома).

Кроме того, указаны соотношения между размерами звеньев прямолинейно-направляющего механизма, с траекторией, приближенной полностью к прямой линии, и прямолинейно-направляющего механизма, в котором к прямой линии приближен участок, соответствующий половине оборота кривошипа ([2], стр. 129). В работе И. И. Артоболевского и Н. И. Левитского имеются таблицы и графики, облегчающие выбор параметров этих механизмов по заданным условиям ([1], стр. 78).

„О ПРОСТЕЙШЕЙ СУСТАВЧАТОЙ СИСТЕМЕ, ДОСТАВЛЯЮЩЕЙ ДВИЖЕНИЯ, СИММЕТРИЧЕСКИЕ ОКОЛО ОСИ“

В этой работе Чебышев дал подробный вывод всех необходимых зависимостей для механизмов, в которых симметричная шатунная кривая приближена к окружности или к прямой линии. Все полученные ранее Чебышевым формулы могут быть выведены на основании содержащихся здесь зависимостей ([2], стр. 129). Кроме того, указанная Чебышевым постановка задачи, соответствующая взвешенному приближению, дала возможность в дальнейшем дать широкое определение общей постановки задачи о синтезе механизмов с применением теории наилучшего приближения функций ([5], стр. 48).

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. и Левитский Н. И. Механизмы П. Л. Чебышева. Статья в сборнике „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II, изд. АН СССР, М.-Л., 1945.
 2. Блох З. Ш. Основные результаты работ П. Л. Чебышева по метрическому синтезу плоских механизмов. Статья в сборнике „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II, изд. АН СССР, М.-Л., 1945.
 3. Блох З. Ш. Приближенный синтез плоских механизмов. Машгиз, 1948.
 4. Добровольский В. В. Вопросы структуры механизмов в работах П. Л. Чебышева. Статья в сборнике „Научное наследие П. Л. Чебышева“, вып. II, изд. АН СССР, М.-Л., 1945.
 5. Левитский Н. И. Синтез механизмов по Чебышеву. Изд. АН СССР, 1946.
-

СОДЕРЖАНИЕ

	<i>Стр.</i>
От редакции	3
О некотором видоизменении коленчатого параллелограмма Уатта	5
Об одном механизме	10
О параллелограммах	16
О центробежном уравнителе	37
О зубчатых колесах	54
О простейших параллелограммах, симметрических около одной оси	85
О простейших сочленениях	92
О параллелограммах, состоящих из трех элементов и симметрических около одной оси	101
О параллелограммах, состоящих из трех каких-либо элементов	113
Теорема относительно кривой Уатта	142
О простейших параллелограммах, доставляющих прямолинейное движение с точностью до четвертой степени	143
Счетная машина с непрерывным движением	158
О преобразовании вращательного движения в движение по некоторым линиям при помощи сочлененных систем	161
О простейшей суставчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси	167
Модели механизмов П. Л. Чебышева. (Статья <i>И. И. Артоболевского</i> и <i>Н. И. Левитского</i>)	212
Комментарии (Составители <i>И. И. Артоболевский</i> и <i>Н. И. Левитский</i>)	238



*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Академии Наук СССР*

✱

Редактор издательства *Н. В. Еремеев*
Технический редактор *Н. П. Лузан*
Корректор *Л. К. Николаева*

✱

РИСО АН СССР № 3375. А-11272. Издат. № 1521.
Тя п. заказ № 1111. Подп. к печ. 7.XII 1948 г.
Формат бум. 70×108³/₁₆. Печ. л. 16+1 вклейка. Уч.-
издат. л. 19,5 Тираж 5000. Цена в переплете 20 руб.

2-я типография Издательства Академии Наук СССР
Москва, Шубинский пер., д. 10