

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ИСТОРИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ И ТЕХНИКИ
им. С. И. ВАВИЛОВА

С.Д.Хайтун

**ОТ ЭРГОДИЧЕСКОЙ
ГИПОТЕЗЫ
К ФРАКТАЛЬНОЙ
КАРТИНЕ МИРА**

**Рождение и осмысление
новой парадигмы**



URSS

МОСКВА

Хайтун Сергей Давыдович

От эргодической гипотезы к фрактальной картине мира: Рождение и осмысление новой парадигмы. — М.: КомКнига, 2007. — 256 с.

Наука переживает революцию, связанную с заменой в ее фундаменте «непрерывной» парадигмы на фрактальную (дискретную). Задача монографии — устранить из реконструируемого фундамента некоторые лакуны и несообразности. 1. В области стохастического движения фазовая траектория изменяет свою топологическую природу, переставая быть *линией*. Этого не учитывали эргодическая теория и теория динамического хаоса (до стадии вычислительного эксперимента), чьи результаты пересматриваются в книге под этим углом зрения. 2. Фракталы рождаются в необратимых системах и не рождаются в обратимых. В доказательствах существования *необратимого* динамического хаоса в *обратимых* системах — Хопфа, Крылова, Синяя — обнаруживается одна и та же ошибка — отбрасывается ветвь решения симметричного по времени уравнения, отвечающая обращенному движению. 3. Фракталы могут возникать в изолированных системах, поскольку энтропия реальных систем *не является мерой беспорядка*. 4. Следуя Мандельброту, «отцу» фракталов, принято считать, что фрактальная размерность *больше* топологической, тогда как она *меньше* ее. Отсюда следует, что фракталы, расположенные в нашем трехмерном пространстве, должны иметь нулевую плотность, чего не наблюдается, поэтому реальные системы только фракталоподобны, имея фрактальную структуру в конечном диапазоне масштабов. Это выводит на принцип дополнительности непрерывного (кинетического) и фрактального описаний, исключая друг друга в области необратимых процессов. 5. Единственное исключение — Вселенная, которая, из-за ее бесконечности, может оказаться «настоящим» фракталом с нулевой плотностью, что означало бы пересмотр космологической картины мира. 6. Мир фрактален, потому что это обеспечивает максимальную скорость его эволюции, происходящей с *уменьшением* фрактальной размерности Вселенной.

Фракталы проникают сегодня в самые разные научные дисциплины, поэтому книга может быть полезной широкому кругу читателей, имеющих достаточное физико-математическое образование.

Издательство «КомКнига». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60 × 90/16. Бумага типографская. Печ. л. 16. Зак. № 654.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

13-значный ISBN, вводимый с 2007 г.:

ISBN 978-5-484-00565-9

© КомКнига, 2007

Соотв. 10-значный ISBN, применяемый до 2007 г.:

ISBN 5-484-00565-5

Оглавление

Введение	6
Глава 1	
Эргодическая теория	11
1.1. Уточнение предмета	11
1.2. Первая ветвь: во главе угла эргодичность	16
1.2.1. Больцман, Максвелл и другие: предыстория	18
1.2.2. Эренфесты: задача о черной кошке, которой нет в темной комнате	27
1.2.2.1. Эргодическая система и эргодическое распределение	27
1.2.2.2. Эргодическая и квазиэргодическая гипотезы	30
1.2.2.3. Временное и ансамблевое средние	32
1.2.2.4. Продуктивная ошибка Эренфестов	34
1.2.3. Биркгоф, фон Нейман и другие: эргодичность эквивалентна метрической транзитивности	36
1.2.4. Обсуждение: «туннельный переход»	46
1.3. Вторая ветвь: во главе угла перемешивание	48
1.3.1. Гиббс: рождение схемы перемешивания	48
1.3.2. Связь перемешиваемости с эргодичностью, стохастичностью и необратимостью	53
1.3.3. Хопф, Крылов и другие: перемешивание и экспоненциальная локальная неустойчивость	60
1.3.4. Колмогоров и другие: К-перемешивание	69
1.3.5. Теорема Синая	78
1.4. Резюме	80
Глава 2	
Теория динамического хаоса	83
2.1. Уточнение предмета	83
2.2. Теория устойчивости динамических систем	86
2.2.1. Пуанкаре: предыстория	86
2.2.2. Основные понятия теории динамических систем	89
2.2.3. Интегрируемые/неинтегрируемые системы	94
2.2.4. Стохастичность и неустойчивость динамической системы	103
2.2.4.1. Показатели Ляпунова	104
2.2.4.2. Бифуркации	110
2.2.4.3. Квантовый хаос	112

2.2.4.4. Романовский и другие: некорректное выведение необратимости системы из ее неустойчивости . . .	118
2.2.4.5. Обсуждение	119
2.3. КАМ-теорема	119
2.4. Вычислительные эксперименты	125
2.4.1. Общие положения	126
2.4.2. Нелинейность уравнений движения как необходимое условие динамического хаоса	128
2.4.3. Примеры систем с обратимым динамическим хаосом . . .	130
2.4.4. Основные результаты	132
2.5. Резюме	135
Глава 3	
Синергетика	138
3.1. Уточнение предмета	138
3.2. Исторический очерк	141
3.2.1. Тьюринг и другие: предыстория	141
3.2.2. Лоренц и другие: ранняя история	143
3.2.3. Рюэль и Такенс: бум	147
3.2.4. Школа Пригожина: боковая ветвь	149
3.2.5. Горьковская школа автоколебаний	161
3.2.6. Белоусов, Жаботинский и другие: колебательные химические реакции	162
3.2.7. Руденко и другие: эволюционная химия	164
3.3. Странные аттракторы	166
3.3.1. Примеры синергетических систем	167
3.3.2. Странный аттрактор как необратимый стохастический аттрактор	170
3.3.3. Странный аттрактор как стохастический аттрактор, обладающий структурой	173
3.4. Обобщенная теорема Лиувилля	176
3.5. Анализ синергетических систем	181
3.5.1. Несовместимость уравнений синергетики с гамильтоновой механикой	181
3.5.2. Синергетические системы могут быть изолированными . .	189
3.6. Резюме	190
Глава 4	
Фракталы	191
4.1. Фрактал как множество с необычной размерностью	191
4.2. Фрактальная размерность	194
4.3. Топологическая размерность	198
4.4. Фрактальная размерность меньше топологической	199
4.5. Самоподобны ли фракталы?	203

4.6. Фрактал как множество, размерность которого меньше топологической	204
4.7. Фрактал как множество, мера которого в единицах топологической размерности равна нулю	206

Глава 5

Взаимная дополнительность синергетического и кинетического подходов	208
5.1. Материальные фракталы одновременно и реальные, и нереальны	208
5.2. Непрерывные необратимые явления одновременно и реальные, и нереальны	209
5.3. Синергетический и кинетический подходы исключают друг друга	210
5.4. О попытках совмещения динамического и кинетического подходов в современной физике	213
5.5. Принцип дополнительности непрерывного и дискретного описаний необратимых явлений	214

Глава 6

На пути к фрактальной картине мира	216
6.1. Широкая распространенность фрактальных (фракталоподобных) структур	216
6.2. Вселенная — единственный «настоящий» фрактал	218
6.3. Обобщение на непространственные фракталы	222
6.4. Почему наблюдаемый мир фрактален?	224
Литература	226
Предметный указатель	244
Именной указатель	247

Введение

*Чтобы легко пройти в открытые
двери, надо учитывать тот факт,
что у них есть твердый косяк.*

Роберт Музиль

На протяжении веков наука воспринимала материальные тела как более или менее непрерывные объекты, ограниченные более или менее гладкими поверхностями. Соответствующей была и математика, в которой преобладали гладкие многообразия, т. е. непрерывные дифференцируемые множества. Сегодня выясняется, что все это имеет весьма косвенное отношение к действительности, в которой преобладают фрактальные структуры, характеризующиеся чрезвычайной изрезанностью. Дискретность наблюдаемого мира, воспринимаемая нами как системность, т. е. как большая или меньшая обособленность одних фрагментов мира от других, порождается именно его фрактальностью. Описание фрактальных структур требует принципиально новой математики, к разработке которой математики по сути дела еще только приступают, оставив науку перед лицом фрактальной реальности практически безоружной.

Только один пример. В модели Фридмана, широко применяемой до сих пор при описании Вселенной, последняя полагается однородной и изотропной. Между тем,

«как пишут... Я. Б. Зельдович и И. Д. Новиков, „...модель однородной, изотропной ‘расширяющейся Вселенной’ полностью не удовлетворяет современным наблюдениям. Некий очень важный момент в картине отсутствует — отсутствует распад вещества на скопления галактик, галактики и т. д. Поэтому один из главных вопросов, над которым работают сегодня космологи, — это переход от идеализированной картины строго однородной Вселенной к картине Вселенной, неоднородной в масштабах скоплений галактик“» [Трофименко, 1991. С. 141].

Фракталы изучаются синергетикой, вал работ по которой растет и ширится. Выходят посвященные ей научные журналы, издательство «Шпрингер» с 1977 г. выпустило более 100 книг серии «Синергетика» (в 1997 г. вышел 82-й том, после чего нумерация сбилась), российское издательство URSS публикует серии «Синергетика: от прошлого к будущему» (более 25 книг) и «Синергетика в гуманитарных науках» (около десятка книг), собираются посвященные синергетике конференции и т. д. По сути дела начался перевод всей науки на фрактальный язык, работы здесь — непочатый край.

Настоящая книга — в этом ряду. Не претендуя на освещение всей фрактальной проблематики, автор поставил перед собой более скромную

задачу — устранить в строящемся здании фрактальной науки некоторые лакуны и несообразности, представляющиеся ему существенными.

Фрактальные представления явились неожиданным результатом изучения феномена стохастического движения механической системы, описываемой обычными детерминированными уравнениями, т. е. уравнениями, которые не содержат случайных функций и параметров. На исследование этого феномена были направлены последовательно возникавшие в XX в. эргодическая теория, теория динамического хаоса и синергетика. Сегодняшние историко-научные очерки этих дисциплин напоминают жития святых, персонажи которых идут от победы к победе. Так не могло быть и так не было, новая парадигма никогда не рождается на ровном месте, ей приходится побеждать старую, преодолевая заблуждения и исправляя ошибки.

Рождение фрактальной парадигмы не было исключением. Замечательные умы чуть головы себе не сломали, пытаясь шить реалии динамического хаоса с непригодной для его описания «непрерывной» парадигмой, в которой фазовая траектория динамической системы мыслится в области стохастического движения непрерывной «более или менее гладкой» линией. Рассматривая развитие эргодической теории и теории динамического хаоса, мы попытались «опрокинуть» на них родившиеся позже в синергетике фрактальные представления, последовательно выявляя ошибочные, с позиции этих представлений, утверждения и результаты. Соответственно нами был выбран жанр *активной истории науки*, когда анализ некоторой научной проблемы или дисциплины совмещается с анализом ее истории. Кредо автора этих строк состоит в том, что точка зрения, наиболее продуктивная в историко-научном плане, почти наверное окажется и наиболее верной относительно самой проблемы, и наоборот.

Развитие эргодической теории и теории динамического хаоса оказалось не таким, каким оно должно было бы выглядеть в рамках «антифрактальной» концепции линейного прогресса науки. В историческом развитии этих дисциплин несколько раз воспроизводилась примерно одна и та же схема. Ученые выдвигали тупиковую, как выясняется сегодня, идею (скажем, эргодическую гипотезу или К-перемешивание), прилагая большие усилия в направлении ее развития и обоснования. Не давая желаемого, работа в этом магистральном направлении приносила, однако, замечательные результаты «на полях», которые и оборачивались *de facto* главными.

Что касается современной теории фракталов, то меня прежде всего не устраивает господствующее в ней убеждение, что фрактальная размерность *больше* топологической, тогда как в действительности она *меньше* ее. Эта ошибка идет от отца фракталов Бенуа Мандельброта, который, как это часто бывает с первопроходцами, сам в должной мере не проникся развиваемыми им новыми представлениями. Главным примером природного фрактала ему служит броуновское движение на плоскости, топологическую размерность которого он приравнивает размерности траектории

броуновской частицы, полагая ее (размерность траектории) равной 1. Поскольку же фрактальная размерность плоского броуновского движения больше 1 и меньше 2, постольку Мандельброт и приходит к своему выводу. Между тем траектория, генерирующая «настоящий» фрактал, разрывна в каждой точке, не являясь линией (каждая следующая точка траектории находится на некотором случайном расстоянии от предыдущей в случайном же направлении), почему нельзя считать, что фрактал размещен на траектории размерности 1. Не имея, таким образом, определенного положения на «размытой» траектории броуновской частицы, произвольная точка данного фрактала (броуновское движение на плоскости) может быть фиксирована только значениями *двух* ее координат на плоскости, так что его топологическая размерность равна 2.

Их того факта, что фрактальная размерность фрактала *меньше* топологической его размерности, вытекает важное следствие. А именно, *мера фрактала, измеренная в единичных «кубиках» топологической размерности пространства, в котором он размещен, тождественно равна нулю*. Соответственно нулю должна быть равна и плотность массы материальных фракталов, размещенных в нашем трехмерном пространстве. Однако, если бы реальные конечные объекты, которые сегодня считаются фракталами — угольная сажа, бронхи, галактики и пр., — были «настоящими» фракталами, то их масса была бы равна нулю, чего, как мы знаем, не наблюдается. Отсюда вытекает, что такие объекты не фрактальны, но только *фракталоподобны*, имея фрактальную структуру лишь в *конечном диапазоне масштабов*.

Это выводит на принцип дополнительности непрерывного (кинетического) и дискретного (фрактального, синергетического, динамического) описаний, исключающих друг друга *в области необратимых процессов*. Во-первых, мы можем, как это принято в кинетической теории, считать фазовую жидкость непрерывной, что делает возможным написание для ее плотности дифференциальных (кинетических) уравнений. При этом, однако, фазовая жидкость оказывается сжимаемой/растягиваемой, что означает статистическую связанность степеней свободы и, соответственно, невозможность написания для них уравнений движения, лежащих в основании синергетики. Во-вторых, мы можем, как это делается в синергетике, считать степени свободы статистически независимыми, выписывая для них динамические уравнения. При этом фазовая жидкость оказывается несжимаемой; поскольку же ее объем в ходе необратимого роста энтропии должен расти, постольку она и рвется в каждой точке, образуя всюду разрывную (фрактальную) структуру, что делает невозможным написание для плотности фазовой жидкости кинетических уравнений. В области обратимых процессов эти два подхода сливаются, дифференциальные уравнения действуют здесь одновременно и для степеней свободы (уравнения Гамильтона), и для фазовой плотности (уравнение Лиувилля).

Единственным «настоящим» материальным фракталом может оказаться Вселенная из-за ее бесконечности, имеющая, — если она и на самом

деле фрактальна, на чем сегодня достаточно легкомысленно настаивают космологи, не догадываясь о вытекающих отсюда далеко идущих последствиях, — нулевую плотность, т. е. плотность любого ее фрагмента с устремлением его объема к бесконечности стремится к нулю. Вселенная же с нулевой плотностью *гравитационно устойчива*, так что все ее фрагменты не могут одновременно расширяться или сжиматься. Это значит, что Вселенная, если она фрактальна, не переживала Большого взрыва, который, таким образом, претерпела лишь наша Метагалактика.

Наблюдаемая однородность Космоса на расстояниях порядка или более 300 млн световых лет не противоречит фракталоподобности нашей Метагалактики и гипотетической фрактальности Вселенной. Об их макрооднородности можно говорить, сравнивая фрагменты *равного* объема, и нельзя, соотнося фрагменты *разных* объемов: с ростом объема сравниваемых фрагментов их плотность массы резко падает, достаточно же большие фрагменты равного объема имеют равные плотности, и тем более равные, чем больше объем сравниваемых фрагментов.

Когда в однородной среде или в вакууме взрывается тело *конечных* размеров, будь то сверхновая звезда или тротиловый заряд, то такой взрыв имеет центр и радиальные градиенты давления, плотности и температуры. Ничего подобного при расширении нашей Метагалактики не наблюдается, и это требует объяснения. Авторская точка зрения состоит в том, что макрооднородность нашей Метагалактики и отсутствие у нее центра расширения свидетельствуют о том, что она является (чрезвычайно разреженной из-за ее размеров) черной дырой, внутреннее пространство которой замкнуто гравитацией, будучи конечным по объему, но безграничным.

В качестве геометрической аналогии трехмерного замкнутого безграничного пространства в общей теории относительности используется двумерная поверхность трехмерной сферы. Скажем, поверхность земного шара конечна, но безгранична. В нашем случае сфера еще и расширяется. Поместим на ее поверхность двумерный газ взаимодействующих точек, имитирующий трехмерный «газ» звезд и галактик. Если эти взаимодействия подобны реальным, то подобно тому, как это происходит в наблюдаемом мире, точки будут образовывать фракталоподобные структуры. Из-за симметрии задачи газ на двумерной сферической поверхности не будет иметь выделенных участков и направлений, оставаясь однородным и изотропным в том смысле, что находящиеся на ней равные по площади участки будут иметь примерно одинаковую плотность точек, тогда как участки большей площади будут иметь меньшую плотность. По мере расширения сферы плотность газа на ее поверхности уменьшается, точки разбегаются, не имея центра расширения. Если сфера расширяется с постоянной скоростью, то точки на ее поверхности разбегаются в соответствии с законом Хаббла. Все это, только в трехмерном пространстве, мы и наблюдаем в нашей Метагалактике.

Еще один изъян наук о стохастическом движении, на мой взгляд, состоит в том, что здесь *не разводятся обратимый и необратимый динами-*

ческий хаос. Такое неразведение приводит ученых к ряду ошибок, самыми заметными из которых оказываются ошибки Э. Хопфа, Н. С. Крылова и Я. Г. Синая, допущенные ими при доказательстве существования *необратимого* хаоса в *обратимых* системах, описываемых симметричными по времени уравнениями движения (все эти авторы, не замечая того, отбрасывают в своих соотношениях ветвь, отвечающую обращенному движению). Согласно традиции, например, Синай доказал в своей теореме, что система двух или более упругих шаров является *системой с K-перемешиванием*, т. е. системой, в которой имеет место *необратимая* экспоненциальная локальная неустойчивость фазовых траекторий. После устранения допущенной им ошибки обнаруживается, что он доказал лишь наличие в его системе *обратимой* экспоненциальной локальной неустойчивости.

Возможно более четкое разведение систем с обратимым и необратимым динамическим хаосом существенно по той причине, что фракталы рождаются только в *необратимых* системах, описываемых, как мы доказываем, *негамильтоновыми* уравнениями, гамильтонова же механика действует лишь в *обратимых* системах.

И еще один пункт, отличающий нашу работу от других: в ней доказывается, что синергетическая система, т. е. система, в которой возникают фрактальные структуры, может быть *изолированной*; это не противоречит закону возрастания энтропии, поскольку, как мы утверждаем, энтропия реальных систем не является мерой беспорядка.

Глава 1

Эргодическая теория*

Появление эргодической (от греч. *εργον* — энергия и *οδος* — траектория) теории было вызвано необходимостью разобраться в основаниях статистической физики, нацеленной на изучение механических систем, уравнения которых не содержат случайных функций и параметров и движение которых тем не менее является стохастическим. В этом плане ситуация со статистической физикой достаточно необычна: принято обсуждать проблему ее обоснования [Рюэль, 1971; Вдовиченко, 1986], тогда как о проблеме обоснования, скажем, классической механики, теории необратимых процессов или электродинамики особо не распространяются, возникающие здесь трудности преодолеваются в рабочем порядке. Так почему же ситуация со статистической физикой считается более критической, чем с другими физическими дисциплинами?

1.1. Уточнение предмета

Существует точка зрения, согласно которой эргодическая теория была создана для преодоления трудностей, сложившихся в конце XIX в. с объяснением экспериментальных данных по удельной теплоемкости:

«Одним из двух „облачков на небосклоне динамической теории тепла и света“ в конце XIX в., согласно лорду Кельвину (1901), было расхождение между экспериментальными значениями удельной теплоемкости и предсказаниями кинетической теории, основанной на теореме о равномерном распределении. Это вело к дискуссии о том, может ли быть теорема о равномерном распределении... выведена из чистой (нестатистической) механики» [Brush, 1983. P. 75]. «Пытаясь разрешить эту трудность, физики были вынуждены проверять их основные постулаты и методы вычисления с необычной заботой о ясности и строгости, что со временем ввело их в контакт с современными направлениями математики. Так была создана эргодическая теория» [Brush, 1976. Vol. 2. P. 335].

Если бы это было верно, то интерес к эргодической теории должен был бы угаснуть вместе с проблемой удельной теплоемкости, которая, как известно [Вдовиченко, 1986. Гл. 6], была решена средствами зарождающейся квантовой механики уже во втором десятилетии XX в. Между тем все было прямо наоборот: эргодическая теория как раз и начала формироваться в самостоятельную дисциплину в том же десятилетии XX в., которое принесло решение указанной проблемы. Очевидно, что причины

* [Хайтун, 1996. С. 51–55; 140–145].

появления эргодической теории связаны с проблемой, более фундаментальной, чем проблема удельной теплоемкости. Проблема эта должна быть настолько грандиозной и болезненной для физиков на протяжении всего XX в., чтобы питать эргодическую теорию и проблему обоснования статистической физики в целом все это время.

Такая проблема действительно существует и, более того, всем известна. Обратив центральную для статистической физики формулу Больцмана

$$S = k \ln W \quad (1.1.1)$$

(k — постоянная Больцмана), получаем экспоненциальную зависимость вероятности макросостояния системы W от энтропии S :

$$W = \exp \left\{ \frac{S}{k} \right\}. \quad (1.1.2)$$

Т. е. вероятность макросостояния системы растет с ее энтропией по экспоненте. Поскольку же энтропия в равновесном состоянии максимальна, постольку получается, что вероятность нахождения системы в неравновесном состоянии очень мала по сравнению с вероятностью ее нахождения в равновесном. Между тем в наблюдаемом мире доминируют системы, не только не находящиеся в равновесном состоянии, но и все более удаляющиеся от него, о чем говорит наблюдаемая эволюция в сторону усложнения систем. Вот это фундаментальное противоречие, которое было рано осознано физиками, начиная с Людвига Больцмана, и вызвало, на мой взгляд, устойчивый критический интерес к основаниям статистической физики.

Авторская позиция [Haitun, 1991; Хайтун, 1996. С. 333–346; 2005. Разд. 3.3] состоит в том, что *энтропия не является мерой беспорядка*¹⁾. Точнее, она является такой мерой применительно к отдельно взятому математическому распределению (с усложнением формы распределения его энтропия уменьшается) и не является в случае реальной системы из-за действующих в ней взаимодействий. Энтропия характеризующего реальную систему распределения возрастает только при фиксированных взаимодействиях в системе, реальные же взаимодействия непредсказуемым образом развиваются вместе с системой. Поскольку энтропия реальных систем не является мерой беспорядка, постольку ничто не мешает им эволюционировать с ростом энтропии в сторону усложнения, что и снимает, на мой взгляд, указанное противоречие. Однако эта точка зрения, опубликованная относительно недавно и по сей день далекая, надо признать, от широкого признания, никак не могла повлиять на события, связанные с возникновением эргодической теории в начале XX в., куда мы и возвращаемся.

Кардинально новым, характеризующим статистическую физику в отличие от нестатистической, является *стохастическое движение* механиче-

¹⁾ Автор этих строк пришел к этому выводу независимо от опередивших его Ю. П. Петрова [1970] и К. Денбига [Denbigh, Denbigh, 1985; Denbigh, 1989; Денбиг, 1995].

ской системы, для описания которого были выдвинуты понятие *статистического ансамбля* и основанный на нем *ансамблевый подход* [Boltzmann, 1871b; Maxwell, 1879; Gibbs, 1884, 1902]. Вместо одной механической (микро)системы здесь рассматривается бесконечное множество (ансамбль) таких систем, характеризуемых одним набором степеней свободы и одним гамильтонианом, но находящихся в начальный момент времени в разных (микро)состояниях. Точки, представляющие микросистемы в (фазовом) пространстве всех степеней свободы (q, p) системы (в ее Γ -пространстве), заполняют его с некоторой (фазовой) плотностью $\rho(q, p, t)$, образуя, как говорят, фазовую жидкость.

Заметим, что фазовой траектории отдельной микросистемы требуется бесконечно много времени для заполнения всего фазового объема макросистемы, тогда как ансамбль бесконечного числа микросистем заполнит фазовый объем макросистемы «мгновенно». Очевидно, что изменяющаяся во времени необратимая система, в отличие от неизменяющейся во времени равновесной, такого времени не предоставляет. Это делает ансамблевый подход не обязательным в случае равновесной статистической системы, когда можно довольствоваться временным подходом, и обязательным в случае необратимой, когда временной подход не работает.

Заметим также, что ансамблевый подход предполагает размытость начальных состояний данной механической (макро)системы, поскольку посредством только такой размытости можно ввести ансамбль различающихся начальными состояниями микросистем. Размытость начальных состояний системы можно рассматривать как результат воздействия среды, а можно — как первичный феномен ансамблевого описания.

До последней трети XX в. считалось само собой разумеющимся, что фазовая жидкость непрерывна. Однако, как становится ясно сегодня, это утверждение является постулатом, причем достаточно сильным: в области необратимых процессов в одном из двух альтернативных подходов (реализуемом в синергетике) фазовая жидкость всюду разрывна (см. гл. 4). Для непрерывной же фазовой жидкости, какой она является в равновесной области, а также в области необратимых процессов в рамках альтернативного синергетическому кинетического подхода (см. разд. 5.3), справедливо уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad (1.1.3)$$

где v — скорость элемента фазовой жидкости с компонентами $q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s$. Подставляя сюда уравнения Гамильтона

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (1.1.4)$$

получают теорему Лиувилля

$$\frac{d\rho(q, p, t)}{dt} = 0, \quad (1.1.5)$$

согласно которой фазовая жидкость гамильтоновой системы несжимаема:

$$\rho(q, p, t) = \rho(q(t), p(t), t) = \rho(q(t'), p(t'), t') = \rho(q', p', t'). \quad (1.1.6)$$

Подставляя последнее соотношение в равенство

$$\rho(q, p, t) dq dp = \rho(q', p', t') dq' dp', \quad (1.1.7)$$

выражающее собой неунуничтожаемость частиц фазовой жидкости, получаем соотношение

$$dq dp = dq' dp', \quad (1.1.8)$$

эквивалентное теореме Лиувилля и сохраняющее силу в нестатистической механике. С использованием уравнений Гамильтона (1.1.4) из теоремы Лиувилля (1.1.5) получают уравнение Лиувилля

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \rho}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = \\ &= \sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j} - \frac{\partial \rho}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) = -i\hat{L}\rho, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где $\hat{L}$ — оператор Лиувилля:

$$\hat{L} = -i \sum \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right). \quad (1.1.10)$$

Собственные числа λ_k оператора Лиувилля определяются уравнением

$$\hat{L}\varphi_k = \lambda_k \varphi_k, \quad (1.1.11)$$

где φ_k — собственные функции этого оператора.

В ансамблевом подходе физики и стали искать слабину. Поскольку наблюдаемыми в статистической физике являются только *средние* динамических величин, то и стали проверять законность усреднения по ансамблю, т. е. законность приравнивания ансамблевого среднего временному среднему, поскольку первичными (не вызывающими сомнения) для физиков были тогда идущие от Больцмана представления, согласно которым вероятность пребывания системы в данном элементе фазового объема трактуется как относительная длительность нахождения в нем отдельной (микро)системы в течение достаточно длительного времени. Соответственно обоснование ансамблевого подхода и стали видеть в доказательстве *эргодической гипотезы*, согласно которой среднее по ансамблю равно среднему по времени:

«Целью эргодической теории является строгое обоснование статистической механики. Этой цели можно достигнуть доказательством равенства средних физических величин по времени средним по микроканоническому ансамблю. *Предполагается, что при измерении наблюдаются временные средние* (выделено мной. — С. Х.)» [Честер, 1966. С. 50].

Чтобы можно было говорить о равенстве временного и ансамблевого средних, необходимо предположить, что данная система рассматривается в течение достаточно большого промежутка времени и что фазовая траектория многократно проходит за это время через любой участок фазового объема системы, заполняя его весь (или «почти» весь — уточнение см. далее). Поэтому предметом эргодической теории и стали законы преобразования со временем фазовой траектории системы и произвольного элемента ее фазового объема. Поскольку это преобразование фазового объема со временем называется *поток*ом в фазовом пространстве, то эргодическая теория изучает топологию фазовых потоков, а ее математическим аппаратом является теория множеств.

Существенно, что, говоря об эргодической гипотезе, фазовую траекторию неявно полагают имеющей вид *непрерывной «более или менее гладкой» одномерной линии*, поскольку тогда, в начале XX в., считалось само собой разумеющимся, что решение дифференциальных уравнений движения является непрерывной «более или менее гладкой» функцией своих переменных. Развитие теории динамического хаоса и синергетики средствами вычислительного эксперимента (см. разд. 2.4 и гл. 3–4) показало всю несостоятельность этого «очевидного» допущения. Оказалось, что в системах с динамическим хаосом (в областях стохастического движения — см. следующий абзац) фазовая траектория ветвится или как-то иначе изменяет свою структуру «в каждой точке», так что ее уже нельзя считать *линией*, а в синергетических системах с *необратимым* динамическим хаосом фазовая траектория еще и разрывна в каждой точке, так что ее нельзя считать *одномерной и непрерывной*.

Развитие теории динамического хаоса показало также, что уже в случае равновесной системы неправомерно говорить о заполнении одной фазовой траекторией *всего* фазового объема системы, поскольку этот объем в общем случае оказывается разделенным на несколько (иногда много) областей стохастического и регулярного движения. Это остается в силе, как показало развитие синергетики, и в случае необратимой системы, но здесь добавляется еще один «антиэргодический» фактор: необратимая система, как уже говорилось (см. текст между соотношениями (1.1.2) и (1.1.3)), из-за ее развития во времени не предоставляет времени, необходимого, чтобы можно было вычислять временные средние на предмет их сопоставления с ансамблевыми средними.

Все эти факты постепенно заставили физиков отказаться при обосновании статистической физики от опоры на временные средние:

«...Согласно современной точке зрения представление об ансамбле рассматривается как постулат, не требующий дополнительного обоснования» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 386].

Другими словами, ансамблевый подход — и, на мой взгляд, совершенно справедливо, — стали рассматривать как первичный, т. е. не нуждающийся в каком бы то ни было обосновании. Однако я расхожусь с Р. Балеску,

который считает эргодическую гипотезу справедливой в равновесном состоянии:

«...Только в состоянии равновесия динамические макроскопические величины не зависят от времени. Следовательно, определение Больцмана [временного среднего]... может служить неплохим определением статических (здесь: равновесных. — С. Х.) термодинамических величин, но, по всей вероятности, не может считаться пригодным для обоснования гидродинамики, электродинамики или любой другой отрасли макроскопической физики, для которой фундаментальное значение имеет именно процесс эволюции во времени» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 386].

В равновесном случае, повторяю, фазовый объем системы также распадается в общем случае на несколько областей регулярного и стохастического движения, а фазовая траектория в областях стохастического движения ветвится или как-то иначе меняет свою структуру в каждой точке, переставая быть линией.

Тщетные поиски доказательства эргодической гипотезы составили первую (традиционную) стадию, или ветвь, эргодической теории. Несмотря на тупиковость этой ветви, она принесла свои плоды, хотя и не те, какие от нее ожидали, — в ее недрах созрело объяснение стохастического движения *перемешиванием* (перепутыванием) в фазовом пространстве данной механической (макро)системы, описываемой ансамблем (микро)систем, фазовых траекторий этих микросистем. Перемешивание, введенное в свое время Дж. В. Гиббсом, и оказалось в центре внимания второй ветви эргодической теории. И хотя перемешивание не обязательно для описания равновесного стохастического движения, поскольку здесь не обязателен весь ансамблевый подход, а объяснение им необратимого хаоса оказалось несостоятельным, сама идея перемешивания оказалась конструктивной, обретя новую жизнь в трансформированном виде в синергетике.

Рассмотрим обе ветви эргодической теории. Имея при этом в виду, что

«эргодическая теория не что иное, как отрасль математики. Среднему физiku не под силу чтение оригинальных статей этого направления» [Там же. С. 354],

мы будем обсуждать не столько математические тонкости разрабатываемых здесь конструкций, сколько их физический смысл.

1.2. Первая ветвь: во главе угла эргодичность

Редко бывает, чтобы новая фундаментальная научная идея сразу четко формулировалась одним человеком. Обычно она возникает как трудно идентифицируемое множество размытых во времени достаточно неясных высказываний разных авторов, постепенно корректируемых со временем, так что отождествление конечной формулировки с какой-то из начальных по необходимости содержит произвол. В случае эргодической гипотезы дело осложняется еще и тем, что ее формулировка,

согласно которой временное среднее равно среднему по ансамблю, была выработана в значительной мере под влиянием статьи супругов Пауля и Татьяны Эренфестов [Ehrenfest, Ehrenfest, 1911], пустившей физиков по ложному следу, поскольку, как говорилось в разд. 1.1, ансамблевый подход первичен, не нуждаясь в опоре на временной. При этом, выдвинув эргодическую гипотезу как фундаментальную проблему обоснования статистической физики, Эренфесты многократными ссылками на Больцмана и Максвелла невольно создали ложное впечатление, будто они, Эренфесты, только доносят до читателя идеи классиков. В действительности же Больцман и Максвелл, используя среди других предположение, названное Эренфестами эргодической гипотезой, не видели в нем проблемы, а Больцман так и вовсе, как он полагал, *доказал* его справедливость, статус же гипотезы ему сообщили сами Эренфесты.

Результат оказался неожиданным: физики устремились в указанном «от имени» Больцмана и Максвелла направлении, которое, однако, из-за отсутствия физического содержания сразу же сместилось из области собственно физики в область достаточно формальной математики. Однако «тупик» оказался чрезвычайно плодотворным, породив на выходе синергетику и фракталы. Так часто бывает в науке — магистральное ошибочное направление угасает, выдвигая на первый план маргинальные результаты.

Очерки истории первой ветви эргодической теории можно найти в работах [Brush, 1967; Полак, 1984; Вдовиченко, 1986]. Особенно добротной фактическая часть приводится в очерке Стефана Браша. Наше изложение, однако, будет существенно другим, поскольку мы расходимся с Брашем по ряду важных позиций. И дело даже не в том, что он недостаточно критически отнесся к трактовке эргодической гипотезы как фундамента статистической физики. Все гораздо серьезнее: не видя, в отличие от автора этих строк, в эргодической теории предтечи синергетики и теории фракталов, Браш и другие историки физики, на мой взгляд, в большинстве случаев неверно расставляют акценты при анализе работ персонажей этой занимательной истории, не замечая того, что именно полученные ими побочные результаты зачастую оказываются — с прицелом на синергетику и фракталы — много интереснее и важнее магистральных.

Уточним терминологию. Эргодическая гипотеза сегодня известна в трех формулировках. Положение о равенстве ансамблевых и временных средних составляет содержание первой из них. Тезис, согласно которому фазовая траектория отдельной микросистемы со временем плотно заполняет весь фазовый объем системы, многократно проходя через *каждую точку*, представляет собой вторую формулировку. Со временем стало ясно, что одномерная фазовая траектория в принципе не может пересекать *каждую точку* фазового объема системы, имеющего большую размерность. Поэтому стали утверждать, что она многократно проходит через *окрестность* каждой точки фазового объема системы. Какое-то время эргодической гипотезой называли все три предположения

- 1) ансамблевые средние равны временным средним;
- 2) фазовая траектория многократно проходит через каждую точку фазового объема системы;
- 3) фазовая траектория многократно посещает окрестность каждой точки фазового объема системы.

Иногда название *эргодическая гипотеза* использовалось для обозначения какой-то пары из этих трех формулировок, скажем первой и второй или первой и третьей. К сожалению, такая размытая терминология сохранилась до сих пор в работах некоторых авторов, что затрудняет восприятие их работ. Однако все чаще название *эргодическая гипотеза* закрепляется за первой формулировкой, а *квазиэргодическая гипотеза* — за третьей, от второй же постепенно отказались вовсе. Так будем поступать и мы, поясняя при необходимости, что имеет в виду тот или иной автор.

1.2.1. Больцман, Максвелл и другие: предыстория

Напомним, что о равенстве временного среднего среднему по ансамблю в принципе имеет смысл говорить лишь применительно к *равновесной* системе (см. текст между соотношениями (1.1.2) и (1.1.3)). Трудно сказать, в какой степени ясно это сознавали Людвиг Больцман и Джеймс Клерк Максвелл, но они касались вопросов, связанных с эргодической гипотезой, только в связи с равновесным распределением.

К мысли о том, что фазовая траектория равновесной системы за достаточно большое время заполняет ее фазовый объем, Больцман приближается в работах [Boltzmann, 1871a, b, 1887, 1892].

«Согласно механической теории теплоты, — начинает он первую из них, — любая молекула газа не испытывает заметного воздействия со стороны остальных молекул на протяжении весьма большого промежутка времени, и поэтому ее центр тяжести движется в пространстве прямолинейно и равномерно; лишь когда две молекулы случайно подходят друг к другу очень близко, они действуют друг на друга с определенными силами, и, таким образом, каждая из них оказывает переменное влияние на состояние движения другой. Поэтому *разные молекулы газа будут проходить все возможные состояния движения*, и, разумеется, в высшей степени важно знать вероятности разных состояний движения. Эти вероятности нужны, чтобы подсчитать среднюю живую силу²⁾, средний потенциал, среднюю длину свободного пробега и т. д. (выделено мной. — С. Х.)» [Boltzmann, 1871a; Рус. пер. С. 67].

Н. В. Вдовиченко [1986. С. 29] считает выделенный нами тезис Больцмана первой формулировкой эргодической гипотезы. Однако гипотеза — это предположение, нуждающееся в верификации. Между тем, как свидетельствует приведенное высказывание Больцмана, для него здесь нет предположения, он (ошибочно) полагает этот тезис очевидным, явно не придавая ему большого значения.

²⁾ ЖИВАЯ СИЛА, старинное название кинетической энергии.

Корректнее, мне кажется, первую формулировку эргодической гипотезы связывать, как это делает Браш [Brush, 1983. Р. 67], с другой статьей Больцмана того же 1871 г., в которой говорится:

«...Мы можем, приняв одну гипотезу, применимость которой к нагретым телам мне представляется весьма вероятной, непосредственно подойти к тепловому равновесию многоатомных газовых молекул и даже к еще более общему случаю теплового равновесия произвольных тел, находящихся в соприкосновении с некоторой массой газа. *Полная беспорядочность теплового движения и многообразие сил, которые действуют на тела извне, делают вероятным, что атомы этих тел вследствие движения, которое мы называем теплотой, пробегают все возможные положения и скорости, совместимые с уравнением живой силы...* Примем эту гипотезу (выделено мной. — С. Х.)» [Boltzmann, 1871b; Рус. пер. С. 122].

Как видим, Больцман здесь прямо называет выделенный нами тезис гипотезой. Можно ли отождествить эту гипотезу с эргодической — другой вопрос. Если понимать под ней утверждение о том, что фазовая траектория заполняет весь фазовый объем системы, то можно. Однако видно, что Больцман не считает ее лежащей в основании статистической физики. Для него это предположение — проходное, в этой же статье он указывает, как это может быть реально, чтобы фазовая траектория заполняла фазовый объем.

В качестве примера Больцман рассматривает материальную точку, движущуюся в плоскости под действием силы, описываемой потенциальной функцией $ax^2 + by^2$. Если отношение a к b представляет собой рациональное число (a и b соизмеримы, говорит Больцман), то траектория точки представляет собой замкнутую кривую, не заполняя плоскости. Другая ситуация имеет место, однако, когда отношение a/b представляет собой иррациональное число (a и b несоизмеримы):

«Материальная точка тогда одновременно совершала бы два взаимно перпендикулярных простых гармонических колебания с несоизмеримыми периодами, постепенно заполняя, следовательно, всю площадь некоторого прямоугольника» [Там же. С. 110].

Так же, по Больцману, обстоит дело в случае потенциальной функции $(a/r) + (b/r^2)$. Тогда, говорит он, траектория движения напоминает эллипс, но незамкнута,

«за исключением специального случая, когда угол между двумя последовательными линиями апсид³⁾ находится в некотором рациональном отношении к π ... Теперь материальная точка не описывает замкнутой линии, а постепенно проходит весь участок плоскости» [Там же. С. 109].

³⁾ АПСИД (астроном., от др.-греч. *hapsis* — связь, соединение, свод, арка), прямая, связывающая две экстремальные точки эллиптической орбиты — *апсиды*. Апсидами около-солнечной орбиты служат *афелий* и *перигелий*, околоземной — *апогей* и *перигей*. Линия апсид совпадает с большой осью эллипса.

В 1887 г., обобщая эти рассуждения с помощью представлений о «бесконечнозначных» интегралах движения, Больцман сочтет их достаточными для *доказательства* эргодической гипотезы. А пока его понимание природы эргодического движения носит еще достаточно размытый характер; ответственность за такое движение он возлагает, как мы видели, не только на «полную беспорядочность теплового движения» в самих нагретых телах, но и на «многообразие сил, которые действуют на тела извне». В 1887 г., как мы увидим, намек на внешнее воздействие исчезнет.

Эргодической гипотезы в форме тезиса о равенстве среднего по времени среднему по ансамблю Больцман касается в работах [Boltzmann, 1871b, с, 1881, 1887]. Здесь следует иметь в виду следующее. Среднее по ансамблю динамической величины $A(q(t), p(t))$ определяется выражением

$$\bar{A} = \int A(q, p) \rho(q, p) dq dp. \quad (1.2.1)$$

Среднее по времени —

$$A^* = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(q(t), p(t)) dt. \quad (1.2.2)$$

Эргодическая гипотеза утверждает, что эти два средних равны:

$$\bar{A} = \int A(q, p) \rho(q, p) dq dp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T A(q(t), p(t)) dt = A^*. \quad (1.2.3)$$

Понятно, что мы можем использовать интеграл (1.2.1) в качестве среднего только потому, что величина

$$\rho(q, p) dq dp \quad (1.2.4)$$

имеет смысл вероятности пребывания системы в элементе фазового объема $dq dp$. Аналогично интеграл (1.2.2) может быть использован в качестве среднего только когда смысл вероятности нахождения системы в данном состоянии имеет величина

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt}{T}. \quad (1.2.5)$$

Если, поэтому, две последние величины равны,

$$\rho(q, p) dq dp = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt}{T}, \quad (1.2.6)$$

то справедлива и эргодическая гипотеза (1.2.3). Вот о равенстве (1.2.6) и идет речь в статьях Больцмана [Boltzmann, 1871b, 1881].

При рассмотрении работ Больцмана следует учитывать также, что для него ансамблевый подход, который он сам же и вводит в работе [Boltzmann, 1871b] и который неоднократно использует в дальнейшем, остается

для него, все же, чем-то вторичным, нуждающимся в опоре на временной подход. Первичным для Больцмана остается и определение вероятности состояния системы выражением (1.2.5), тогда как для использования выражения (1.2.4) и всего базирующегося на нем ансамблевого подхода Больцману еще надо показать, что оно эквивалентно определению (1.2.5).

Соответственно Больцман говорит в работе [Boltzmann, 1871b] о соотношении (1.2.6) как *условию*, при соблюдении которого можно использовать фазовую плотность $F(s_1, \dots, s_k)$, где $s_1, \dots, s_k$ — характеризующие данную механическую систему независимые переменные. Обозначая число систем, находящихся в элементе фазового объема $ds_1 \dots ds_k$, как dN , а общее число механических систем, составляющих ансамбль, как M , Больцман пишет:

«Тогда, *если отношение $dN : M$ ведет себя как $dt : \int dt$* , получается распределение фаз движения, причем

$$dt = F(s_1, s_2, \dots) ds_1 ds_2 \dots ds_k \quad (1.2.7)$$

(выделено мной. — С. X.)» [Boltzmann, 1871b; Рус. пер. С. 116].

Как видим, Больцман действительно обсуждает здесь соотношение ансамблевого и временного подходов. Однако говорит при этом, фактически, только то, что ансамблевый подход применим, если временное среднее равно среднему по ансамблю. Это, конечно, заблуждение, для нас же важно, что задачи исследования условий, при которых временное и ансамблевое средние равны, Больцман в этой статье не ставит. В следующей статье он с отсылкой к предыдущей подтверждает, что соотношение (1.2.6), которое он теперь записывает для равновесного случая, справедливо

«при условии принятия некоторой гипотезы» [Boltzmann, 1871c; Рус. пер. С. 84].

Только здесь он добавляет, что соотношение (1.2.6)

«может быть использовано для определения среднего значения какой-либо величины X » [Там же. С. 88],

записывая выражение

$$\bar{X} = \int X dt. \quad (1.2.8)$$

Сослагательное наклонение исчезает в публикации [Boltzmann, 1881], в которой он уже пишет о равенстве (1.2.6) как о чем-то бесспорном. Различие между Максвеллом и Больцманом, пишет Больцман,

«заключается в том, что последний характеризует *вероятность состояния* временем, в течение которого система в среднем находится в этом состоянии, а первый предполагает бесконечно много одинаковых систем со всеми возможными начальными состояниями. Отношение числа систем, которые обладают данным состоянием, ко всему числу систем *определяет тогда упомянутую вероятность* (выделено мной. — С. X.)» [Boltzmann, 1881; Рус. пер. С. 269].

Еще более решительной является статья [Boltzmann, 1887], в которой Больцман *доказывает*, как он полагает, эргодическую гипотезу, закрывая для себя проблему. Он объясняет здесь, развивая идеи статьи [Boltzmann, 1871b], что если для одних уравнений движения фазовая траектория механической системы описывает в фазовом пространстве только некоторую замкнутую кривую, то для других, характеризуемых «бесконечнозначными» интегралами движения, эта траектория заполняет уже некоторый фазовый объем, размерность которого определяется числом таких «бесконечнозначных» интегралов. Слегка видоизменив пример, приведенный в работе 1871 г., Больцман рассматривает теперь

«движение материальной точки с прямоугольными координатами x, y в некоторой плоскости, на которую в направлении координатных осей действуют силы $X = -a^2x$, $Y = -b^2y$... Если периоды колебаний двух камертонов a и b являются соизмеримыми, то материальная точка описывает некоторую замкнутую кривую... Если, напротив, a и b несоизмеримы, то материальная точка в течение некоторого очень большого промежутка времени пробегает всю плоскость, лежащую внутри некоторого прямоугольника, и, раз x является заданным, то y просто заключено между двумя границами.

В этом случае будем говорить, что один из интегралов уравнений будет бесконечнозначным. Совершенно аналогичные случаи имеют место также и при центральном движении; если траектория замкнута, то ни один из интегралов уравнений движения не будет бесконечнозначным, напротив, последний случай имеет место, если траектория не является замкнутой» [Boltzmann, 1887; Рус. пер. С. 281–282].

Затем Больцман переходит к общему случаю системы, обладающей s степенями свободы и характеризуемой «бесконечнозначными» интегралами движения, без колебаний отождествляя их с реальными термодинамическими системами:

«Мы сразу же рассмотрим самый общий случай, принимая, что k интегралов уравнений движения являются бесконечнозначными. Тогда... останется только не более $2s - k - 1$ уравнений для интегралов, которые не являются бесконечнозначными, и *переменные с течением времени могут пробегать все возможные, совместимые с этими $2s - k - 1$ уравнениями значения*. В этом случае мы можем представить себе систему, в которой $k = 2s - 2$, следовательно, *переменные пробегают все возможные значения, совместимые с уравнением живой силы*. Примером этого будет нарушенное с помощью... бесконечно тонкого цилиндра движение Лиссажу⁴⁾ или центральное движение. Еще более простыми оказываются все движения, когда $s = 1$.

Придадим... системе подобного рода такие свойства, которые на опыте обнаруживаются у нагретых тел, а именно, что ее состояние было полностью

⁴⁾ ФИГУРЫ ЛИССАЖУ, замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два гармонических колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Их вид зависит от соотношения между периодами (частотами), фазами и амплитудами обоих колебаний. В простейшем случае равенства двух периодов фигуры Лиссажу представляют собой эллипсы. Если периоды двух колебаний совпадают неточно, то разность фаз все время меняется, вследствие чего эллипс все время деформируется.

определено, если наряду с внешними и внутренними силами будет известна также полная энергия, содержащаяся в ней. Вероятности различных состояний, а также все поведение системы подобного рода можно тогда рассчитать очень легко (выделено мной. — С.Х.)» [Там же. С. 283].

Характерно, что, разъяснив, каким образом уравнения движения (Гамильтона) могут обеспечить пересечение фазовой траекторией всех точек фазового объема системы (т. е. выполнение эргодической гипотезы во второй ее формулировке — см. концовку преамбулы к разд. 1.2), и выдвинув замечательную идею «бесконечнозначных» интегралов движения, приведшую впоследствии к идее неинтегрируемых механических систем (см. разд. 2.2.3), Больцман не считает нужным углубляться далее в исследование условий, при которых реальные системы являются именно такими. По-видимому, любой ученый характеризуется неким «пределом насыщения», не позволяющим ему двигаться далее. На достигнутом Больцманом уровне насыщения для него здесь уже нет проблемы, и он переходит к доказательству (так ему кажется) равенства временного и ансамблевого средних:

«Вместо одной-единственной системы вообразим бесконечно много систем с совершенно одинаковыми свойствами, в каждой из которых содержится также одинаковое количество энергии и которые обладают всеми возможными начальными состояниями. Все они должны испытывать одно и то же увеличение энергии, и для всех них внешние условия также должны изменяться одним и тем же образом. Этому множеству систем тогда должны быть одинаковым образом приданы все свойства систем, которые не зависят от случайных начальных условий. Если бы, например, работа, которую совершает одна из систем против какой-либо внешней силы, или ее средняя энергия, или что-либо подобное зависели бы существенно от начального состояния системы, то, конечно, средние значения этих величин для совокупности систем также не были бы равны их среднему значению для отдельной системы. Если же значения этих величин заметным образом не зависят от начального состояния, то их среднее значение должно быть равным значению этих величин для каждой из отдельных систем. Следовательно, вовсе нет необходимости, чтобы мы вычисляли значения этих величин для каждой отдельной системы при определенных начальных условиях, но достаточно вычислить их средние значения для всей совокупности систем. Это вычисление еще более облегчается благодаря тому, что мы можем образовывать совокупность по нашему свободному выбору; т. е. если N представляет собой общее число систем, а dN — число тех систем, для которых начальные условия лежат между определенными бесконечно близкими границами, то dN может содержать некоторую совершенно произвольную функцию переменных, определяющих начальное состояние. При надлежащем выборе этой функции мы можем обеспечить, чтобы уравнения для совокупности систем обладали такой же простотой, как и для одной системы, которая сама по себе проходит все возможные состояния, совместимые с уравнением живой силы. Так как мы только что *доказали* [nachgewiesen haben], что значения тех величин, которые не зависят от начальных условий, для каждой отдельной системы равны средним значениям этих величин для некоторой произвольно

образованной совокупности систем, то достаточно определить средние значения этих величин для такой совокупности, для которой вычисление будет по возможности простым (выделено мной. — С. Х.)» [Boltzmann, 1887; Рус. пер. С. 284].

Я привел эту длинную цитату, потому что роль этой статьи в истории эргодической гипотезы, на мой взгляд, недооценена. Браш, например, пишет, что

«Максвелл и Больцман *никогда не пытались доказать*, что эргодическая гипотеза справедлива; они использовали ее только как эвристическое оправдание для теоремы о равномерном распределении (выделено мной. — С. Х.)» [Brush, 1983. P. 67].

Между тем Больцман в этой статье именно *доказывает*, как он утверждает, равенство временного среднего среднему по ансамблю, т. е. эргодическую гипотезу в первой и основной ее формулировке. Разумеется, никакого доказательства Больцман при этом не дает, эргодическая гипотеза в ее общем виде, как мы сегодня знаем, не верна (см. концовку разд. 1.2.3). Для нас, однако, здесь существенно другое: Больцман в этой статье проблему для себя окончательно закрыл и никак не может, следовательно, считаться отцом эргодической гипотезы *как проблемы обоснования статистической физики*, т. е. как проблемы, которую предстоит решать всем миром. В работе [Boltzmann, 1892] он уже только приводит вторую формулировку эргодической гипотезы, не различая, как справедливо замечает Браш [Brush, 1967. P. 173–174], эргодическую (фазовая траектория проходит через каждую точку фазового объема системы) и квазиэргодическую ее формулировки.

Второй момент, на котором мы хотим заострить внимание в связи со статьей Больцмана 1887 г.: здесь, в отличие от ранней работы [Boltzmann, 1871b], Больцман проявляет более зрелое понимание природы эргодического движения, уже не упоминая о *внешнем воздействии* как возможной его причине; для него, в отличие от Максвелла (см. далее), должно быть, уже ясно, что эргодическое (точнее — стохастическое) движение вполне объяснимо внутренними процессами в системе. Так что когда Н. В. Вдовиченко пишет, что

«Максвелл... и Больцман считали ее (эргодическую гипотезу. — С. Х.) справедливой только для систем, взаимодействующих со своим окружением» [Вдовиченко, 1986. С. 34],

то это верно, на мой взгляд, лишь в отношении Максвелла.

Переходим к Максвеллу. В работе [Maxwell, 1879] он обсуждает статью Больцмана [Boltzmann, 1868], в которой тот дает свой вывод распределения Максвелла для системы помещенных во внешнее поле материальных точек, называя этот вывод теоремой:

«Единственное предположение, которое необходимо для прямого доказательства [теоремы], состоит в том, что система, будучи предоставленной самой

себе в ее текущем [actual] состоянии движения, *рано или поздно пройдет через каждую фазу*⁵⁾, *совместимую с уравнением энергии*.

Очевидно, что существуют случаи, когда это не имеет места. Движение системы, не подверженной действию внешней силы, удовлетворяет, кроме уравнения энергии, шести уравнениям, так что система не может пройти через те фазы, которые, удовлетворяя уравнению энергии, не удовлетворяют этим шести уравнениям.

Кроме того, возможны частные законы силы, как например такой, согласно которому... все движение повторяется после конечного времени. В таких случаях... фазы, образованные множеством значений переменных, которые не соотносятся [друг с другом], не могут иметь места, хотя они могут удовлетворять семи общим уравнениям.

Но если мы предположим, что материальные частицы, или некоторые из них, случайно столкнутся с неподвижным препятствием, таким как стенки сосуда, содержащего частицы, то, если исключить специальные формы поверхности этого препятствия, каждое столкновение будет вызывать возмущение в движении системы, так что она будет переходить с одной невозмущенной траектории на другую. Две такие траектории должны удовлетворять уравнению энергии и пересекаться в фазе, для которой выполняются условия столкновения с неподвижным препятствием, но они не подчиняются уравнениям для импульсов. В случае такой чрезвычайной сложности... мы можем со значительной уверенностью утверждать, что, за исключением частных форм неподвижной поверхности, *система рано или поздно, после достаточно-го числа столкновений, пройдет через каждую фазу, совместимую с уравнением энергии* (выделено мной. — С. Х.)» [Maxwell, 1890. P. 714–715].

Именно на это высказывание Максвелла ссылаются разные авторы как на одну из первых формулировок эргодической гипотезы. Часто из всего этого пассажа дают только первый абзац [Brush, 1967. P. 170; Кузнецова, 1983. С. 68; Пригожин, 1985. С. 50–51], реже это высказывание цитируется в более полном виде [Вдовиченко, 1986. С. 33–34]. Как видим, Максвелл касается здесь эргодической гипотезы только во второй ее формулировке, выдвигая предположение о том, что механическая система проходит со временем через каждую точку (фазу) энергетической поверхности⁶⁾. Вместо идеи «бесконечнозначных» интегралов движения, предложенной Больцманом через восемь лет, Максвелл выдвигает значительно менее продуктивную идею, согласно которой фазовая траектория заполняет фазовый объем благодаря взаимодействию частиц газа со стенками сосуда. Самого Максвелла, однако, предложенное им объяснение, как видим, удовлетворяет, он достигает в этом вопросе, как нам представляется, своего «предела насыщения», не позволяющего ему задаться вопросом об условиях, при которых эргодическая гипотеза справедлива. Для Максвелла, как впоследствии и для Больцмана, здесь уже нет проблемы.

⁵⁾ Т. е. через каждую точку фазового объема системы.

⁶⁾ Поскольку энергия является изолирующим интегралом движения, постольку фазовая траектория может заполнять всюду плотно в фазовом пространстве системы самое большее $(2s - 1)$ -мерную энергетическую поверхность (см. разд. 2.2.3).

Эргодической же гипотезы в первой ее формулировке, говорящей о равенстве временного и ансамблевого средних, Максвелл вообще не касается. Приведем, тем не менее, то единственное место в его статье, в котором Максвелл сопоставляет подходы ансамблевый (который он называет своим), и временной, который он называет больцмановским. Описывая систему n координатами $q_1, \dots, q_n$ и n импульсами $p_1, \dots, p_n$, Максвелл фиксирует фазу, в которой находится система, набором значений координат и импульсов (q, p) . Мы теперь примем, пишет он далее, более широкое определение,

«говоря, что система находится в фазе (a_1b) , когда значения координат таковы, что q_1 находится между b_1 и $b_1 + db_1$, q_2 — между b_2 и $b_2 + db_2$ и т. д.; также p_1 находится между a_1 и $a_1 + da_1$ и т. д.» [Maxwell, 1927. P. 720].

И далее идет интересующий нас абзац:

«Больцман определяет вероятность нахождения системы в фазе (a_1b) как отношение суммарного времени, в течение которого она находится в этой фазе, ко всему времени движения, длительность которого полагается очень большой. Я предпочитаю полагать, что имеется очень много систем, свойства которых одинаковы, и таких, что каждая из них приведена в движение [is set in motion] с различными совокупностями [set] значений n координат и $n - 1$ импульсов, значение полной энергии E является одинаковым для всех систем, и рассматривать число этих систем, которые на данный момент времени находятся в фазе (a_1b) » [Op. cit. P. 721].

Как видим, дальше констатации существования двух разных статистических подходов Максвелл здесь не идет, эргодической гипотезы не выдвигает. Так что, как и Больцман, он не может считаться отцом этой гипотезы как проблемы обоснования статистической физики.

Не связывали эргодическую гипотезу с (отсутствующей) необходимостью обоснования ансамблевого подхода на фундаменте временного и ученые, обсуждавшие ее следом за Больцманом и Максвеллом. Реально во второй половине XIX в. в дискуссиях по эргодической гипотезе, которые, надо сказать, имели довольно скромные масштабы, речь шла о том, для всех ли механических систем справедлива эта гипотеза. Мы уже говорили, что она несправедлива для необратимых систем и таких равновесных систем, фазовый объем которых распадается на несколько областей стохастического и регулярного движения. Больцман и Максвелл, естественно, не могли сформулировать это так четко, как это сегодня делаем мы, отталкиваясь от результатов вычислительных экспериментов (см. разд. 2.4 и гл. 3), однако оба они, как мы видели, говорили о «специальных случаях», в которых эргодическая гипотеза несправедлива. Участники дискуссии раскололись на два лагеря. Ученые первого, включая лорда Кельвина [Thomson, 1891], приводили примеры механических систем, для которых одна фазовая траектория не заполняет весь фазовый объем системы. Ученые второго лагеря, в том числе лорд Рэлей [Strutt, 1892, 1900], защищали эргодическую гипотезу.

1.2.2. Эренфесты: задача о черной кошке, которой нет в темной комнате

Выдвижением эргодической гипотезы на первый план статистическая физика обязана Паулю и Татьяне Эренфестам [Ehrenfest, Ehrenfest, 1911]. Пауль Эренфест получил заказ на обзорную статью по основаниям статистической физики для издававшейся тогда в Германии Энциклопедии по математическим наукам. Заказ носил ответственный характер, в авторы статьи первоначально намечался Больцман. Но Больцман умер в 1906 г., Гиббс — за 3 года до того, Максвелла не было уже 25 лет, а новых ученых их калибра, которые бы работали в области статистической физики, еще не появилось (статьи по статистической физике 1902–1905 гг. А. Эйнштейна, сотрудника бюро патентов, пока всерьез не воспринимались). Остановились на Эренфесте, несмотря на его молодость (в 1906 г. ему было 26 лет), потому что, во-первых, он «подавал надежды», а, во-вторых, был младшим коллегой Больцмана и как бы даже его преемником. Эренфест отнесся к заказу со всей ответственностью, отдав статье несколько лет жизни и подключив к работе жену.

Что касается эргодической гипотезы, то ее Эренфест никак не мог обойти, потому что ее действительно обсуждали такие корифеи, как Больцман, Максвелл, Рэлей и Кельвин, последний из которых, как мы видели, выделил проблему удельной теплоемкости, связанную с эргодической гипотезой через теорему о равнораспределении, как одно из двух «облачков на небосклоне» теоретической физики. Эренфест не мог знать, что проблема удельной теплоемкости будет вскоре благополучно разрешена средствами квантовой механики, и поверил Кельвину, тем более что сбылось его (Кельвина) предсказание относительно первого «облачка», под которым имелась в виду проблема излучения черного тела, приведшая к созданию квантовой механики. Преувеличение Кельвином роли проблемы удельной теплоемкости и повлекло за собой, на мой взгляд, преувеличение Эренфестом значимости эргодической гипотезы, что, в свою очередь, увлекло физиков в тупиковое направление, каким оказалась для физики эргодическая теория. Однако, хотя Эренфест и ошибся в главном, поставив во главу угла при рассмотрении проблемы обоснования статистической физики эргодическую гипотезу, эта его ошибка парадоксальным образом способствовала тому, что физика в конце концов вышла на синергетику и фракталы.

1.2.2.1. Эргодическая система и эргодическое распределение

Цитируем Эренфестов:

«*Эргодические механические системы*⁷⁾. Механические системы [данного типа] можно определить следующим свойством: Γ -траектория, описывающая

⁷⁾ Прим. 88 Эренфестов: «Следует аккуратно различать следующие два понятия: (а) эргодическая система, (б) эргодическое распределение плотности в Γ -пространстве».

их движение, является открытой кривой⁸⁾, которая плотно покрывает каждую часть многомерной области⁹⁾. Побуждаемые существованием таких систем, Больцман¹⁰⁾ и Максвелл¹¹⁾ определили класс механических [эргодических] систем следующим образом:

Одинокое [single], невозмущенное движение системы, если оно продолжается без ограничений во времени, пересечет в конечном счете „каждую фазовую точку“, которая совместима с данной общей энергией системы. Механическая система, удовлетворяющая этому условию, названа Больцманом „эргодической системой“¹²⁾ (выделено Эренфестами. — С. Х.) [Ehrenfest, Ehrenfest, 1959. P. 21].

Кроме того Эренфесты, опираясь на Больцмана и Максвелла, вводят понятие эргодического распределения фазовой плотности в Г-пространстве как тождественное современному понятию (равновесного) микроканонического распределения¹³⁾ [Op. cit. P. 22]. Далее они пишут:

«Когда Максвелл и Больцман впервые ввели эти частные (микроканонические. — С. Х.) распределения плотности, они оправдали их, явно отсылая к гипотезе, согласно которой газовые модели являются эргодическими системами.

Этот особый выбор в целом принят в более поздней литературе, если даже эргодическая гипотеза и не упоминается¹⁴⁾» [Op. cit. P. 23].

К приведенным высказываниям Эренфестов дадим три комментария.

⁸⁾ Прим. 89 Эренфестов: в этом и следующем примечаниях Эренфесты со ссылкой на работы Больцмана [Boltzmann, 1871b, 1887] приводят примеры незамкнутой траектории, покрывающей определенный участок фазовой плоскости.

⁹⁾ Прим. 90 Эренфестов: см. о нем в предыдущей сноске.

¹⁰⁾ Прим. 91 Эренфестов: «[Boltzmann, 1871b]. См. также конец статьи [Boltzmann, 1868]».

¹¹⁾ Прим. 92 Эренфестов: «[Maxwell, 1879]».

¹²⁾ Прим. 93 Эренфестов: «εργον — энергия; одος — траектория [the path]: Г-траектория пересекает все точки энергетической поверхности. Эта терминология была впервые использована Больцманом в [Boltzmann, 1887]. Максвелл и с ним другие британские авторы используют в этой связи оборот „предположение о непрерывности траектории“ (подразумеваемая под „траекторией“ Г-траекторию)».

¹³⁾ МИКРОКАНОНИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, каноническое распределение (распределение Гиббса)

$$\rho(q, p) = \exp \left\{ \frac{F - H(q, p)}{kT} \right\} \quad (\text{C.1.1})$$

в случае изолированной системы:

$$\rho(q, p) = \text{const} \cdot \delta(H - H_0), \quad (\text{C.1.2})$$

где $H_0(q, p)$ — фиксированное для данной изолированной системы значение механической энергии.

¹⁴⁾ Прим. 103 Эренфестов: «Сам Больцман в сноске на стр. 92 ч. 2 „Теории газов“ вводит распределение (32) как „простейший случай“ стационарного распределения и называет его „эргодическим“ без ссылки на эргодическую гипотезу где-либо в этом учебнике». Эренфесты имеют в виду распределение (89) [Boltzmann, 1895–1898; Рус. пер. С. 351]; в русском переводе Больцман называет его эргодическим не в (отсутствующей здесь) сноске, а в основном тексте [Там же. С. 352].

Комментарий первый. Эренфесты достаточно корректно определяют здесь *эргодическую систему* как такую, для которой справедлива эргодическая гипотеза в «размытой» форме (фазовая траектория отдельной микро-системы ансамбля плотно заполняет фазовый объем системы), не различая пока вторую и третью формулировки гипотезы из трех приведенных в концовке преамбулы к разд. 1.2. Здесь же они определяют *эргодическое распределение*, под которым понимают микроканоническое равновесное распределение. Видно, что Эренфесты четко разводят эти два понятия.

Комментарий второй. Эренфестов здесь можно понять так, что Больцману с Максвеллом принадлежит не только представление об эргодической системе, но и сам этот термин. Между тем, как справедливо указывает С. Браш [Brush, 1967], это не так, термином Ergoda Больцман [Boltzmann, 1884, 1895–1898] обозначает современный микроканонический (равновесный) ансамбль.

Комментарий третий. Эренфесты утверждают, что когда Больцман и Максвелл вводят (равновесное) микроканоническое (эргодическое) распределение, то они (Больцман и Максвелл) оправдывают его,

«явно [explicitly] отсылая к гипотезе, согласно которой газовые модели являются эргодическими системами».

Эренфесты не указывают при этом соответствующих высказываний этих авторов, ссылка на Больцмана приводится ими здесь лишь в связи с термином «эргодическое распределение». Если верить Эренфестам, Больцман и Максвелл утверждали, что *микроканоническое распределение справедливо, когда система является эргодической*.

В работах Больцмана и Максвелла, однако, не найти столь жесткого утверждения, оно, я полагаю, на совести Эренфестов. Максвелл, видевший источник эргодичности равновесного газа в его взаимодействии со стенками сосуда, не исключал, как мы видели, «специальные формы поверхности» сосуда, при которых газ является неэргодической системой. Больцман также понимал, что движение не всякой механической системы является эргодическим, поскольку не для всякой такой системы уравнения движения характеризуются «бесконечнозначными» интегралами. Другое дело, что Больцман рассматривал

«самый общий случай, принимая, что k интегралов уравнений движения являются бесконечнозначными» [Boltzmann, 1887; Рус. пер. С. 283].

Тем самым он *неявно постулировал*, что равновесные системы, им рассматривавшиеся, в этом «самом общем случае» являются эргодическими. Однако это постулирование осталось «за кадром», физическая интуиция не позволила Больцману произнести вслух столь обязывающее и, как мы теперь знаем, ошибочное утверждение.

Этот момент и является решающим во всей истории эргодической теории: незаметно приписав Больцману и Максвеллу излишне жесткое

собственное утверждение, Эренфесты убедили основную массу физиков в том, что эргодичность будто бы лежит в основании (равновесной) статистической физики. Мы сегодня знаем, что это не так, что статистическая система может быть неэргодической, а (квази)эргодическое движение — нестохастическим (см. концовку разд. 1.2.3) и что фазовому объему статистической системы вовсе не обязательно представлять собой единое целое. Однако дело было сделано, началось обсуждение эргодической гипотезы теперь уже в статусе фундаментальной проблемы статистической физики. И начали его сами Эренфесты.

1.2.2.2. Эргодическая и квазиэргодическая гипотезы

Эренфесты пишут:

«Больцман и Максвелл, выводят из этого (приведенного в разд. 1.2.2.1 — С. X.) определения следующие следствия:

1. Для эргодической системы все движения с одной и той же полной энергией имеют место на одной и той же Γ -траектории.¹⁵⁾
2. Это значит, что все эти движения различаются только значением константы c_{2rN} , которая появляется как постоянная, аддитивная по времени...
3. Все эти движения дают одно и то же значение для временного среднего любой [динамической] функции $A(q, p)$ фазовых переменных¹⁶⁾

Именно из-за этого последнего свойства определение эргодических систем и предположение, согласно которому газовые модели являются эргодическими, появляются в исследованиях Больцмана... Однако существование эргодических систем (т. е. состоятельность [consistency] их определения) сомнительно. До сих пор не известно даже ни одного примера механической системы, для которой отдельная Γ -траектория приближалась бы произвольно близко к каждой точке соответствующей энергетической поверхности. Кроме того, не известно ни одного примера, когда отдельная Γ -траектория действительно пересекала бы все точки соответствующей энергетической поверхности.¹⁷⁾ Тем не менее, хотя последняя [из приведенных] формулировка

¹⁵⁾ Прим. 94 Эренфестов: «Разъяснение примерно следующее: Отдельная Γ -траектория пересекает каждую точку фазового пространства, которая находится на энергетической поверхности. С другой стороны, каждая фазовая точка Γ лежит только на одной Γ -траектории... что и приводит нас к утверждению 1. Ср. особенно [Boltzmann, 1887]».

¹⁶⁾ Прим. 96 Эренфестов: «Это временное среднее определяется выражением

$$\lim_{\substack{T_1 \rightarrow -\infty \\ T_2 \rightarrow +\infty}} \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} A(q, p) dt \text{ »}. \quad (\text{C.1.3})$$

¹⁷⁾ Прим. 98 Эренфестов: «Чтобы прояснить различие между следующими двумя требованиями: (I) „приблизиться произвольно близко к каждой точке энергетической поверхности“ и (II) „пересекать каждую точку энергетической поверхности“, рассмотрим... геодезическую линию тора, для которой отношение двух чисел вращения [turning] в двух направлениях иррационально, например, немного больше $1/2$. Такая геодезическая линия пересекает меридиан в бесконечно большом числе точек P_h , которые плотно распределены повсюду

Максвелла и Больцмана и не является единственной, именно указанная особенность этого определения служит основой для утверждения двух названных авторов, что в газовой модели как эргодической системе все движения с одной и той же полной энергией пересекают одну и ту же A -траекторию и поэтому дают одно и то же временное среднее для каждой $A(q, p)^{18)}$ [Ehrenfest, Ehrenfest, 1959. P. 22].

Наши комментарии.

Комментарий первый. Эренфесты первыми очень четко разводят здесь понятия эргодических и квазиэргодических (терминология Эренфестов) систем. Если для первых траектория многократно проходит через каждую точку фазового объема, то для вторых — через окрестность каждой точки.

Комментарий второй. Если Больцман и Максвелл полагали, что равновесные системы, за исключением «специальных случаев», являются эргодическими, не разводя понятий эргодических и квазиэргодических систем, то Эренфесты обоснованно выражают на этот счет сомнение, говоря, что до сих пор не существует ни одного примера эргодической или квазиэргодической системы. Они поставили вопрос о справедливости эргодической или квазиэргодической гипотезы, не отдавая предпочтения какой-либо из них.

Комментарий третий. Глухо упомянув о возможных возражениях против эргодической гипотезы со ссылкой на дискуссию о ней Рэля, Кельвина и др. [Op. cit. P. 25], Эренфесты не развинули их, так что для читателя аргументы против гипотезы остались неосвещенными. Если бы Эренфесты привели анализируемые в этой дискуссии примеры механических неэргодических систем, то обсуждение эргодической гипотезы пошло бы, мне кажется, по другому пути. Стало бы ясно, что дело не в том, требуем ли мы многократного прохождения фазовой траектории через каждую

по окружности [circumference]. С другой стороны, можно утверждать, что сколько бы раз мы ни обернулись вокруг тора, идя вдоль геодезической линии, мы никогда, выйдя из точки P_h , не попадем в диаметрально ей противоположную точку Q на меридиане. Потому что, если бы нам это удалось, то вдвое большее число оборотов привело бы нас назад в P_h , вопреки нашему исходному предположению. Отсюда легко видеть, что множество тех точек P_h , которые могут быть достигнуты данной геодезической линией, образует счетное подмножество в континууме всех таких точек на окружности, к которым геодезическая линия приближается произвольно близко» [Ehrenfest, Ehrenfest, 1959. P. 90].

ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ, геометрическое понятие, обобщающее понятие прямой евклидовой геометрии на случай пространств более общих, чем евклидово. Достаточно малые дуги геодезической линии на поверхности являются кратчайшими путями между их концами на этой поверхности. Например, геодезические линии на круглом цилиндре — винтовые линии.

¹⁸⁾ Прим. 99 Эренфестов: «Если на некоторое время мы назовем системы, удовлетворяющие требованию (I) прим. 98, „квазиэргодическими“, то вместо утверждений 1), 2) и 3) в [основном] тексте мы должны сказать, что для „квазиэргодической“ системы на каждой поверхности $E(q, p) = E_0$ будет континуум со $^{(2r n - 2)}$ различных Γ -траекторий с различными значениями констант $c_2, \dots, c_{2rN-1}$. Следовательно, принадлежащее Больцману и Максвеллу оправдание утверждения 3) нельзя распространять на квазиэргодические системы» [Ehrenfest, Ehrenfest, 1959. P. 90].

точку фазового объема системы или же только через окрестность каждой такой точки; речь пошла бы о том, не распадается ли в общем случае фазовый объем равновесной (и неравновесной) системы на несвязанные между собой части. Когда бы выяснилось, что в общем случае дело именно так и обстоит, то это необходимо привело бы к выводу, что эргодическая и квазиэргодическая гипотезы вообще не могут служить обоснованием равновесного распределения. Не осветив дискуссии по эргодической гипотезе и сосредоточившись на обсуждении казалось бы несущественных, с физической точки зрения, топологических тонкостей, Эренфесты завели обсуждение этой гипотезы в тупик, что, однако, для физики оказалось благом, поскольку именно эти топологические тонкости вывели в конце концов ее на представления о фракталах с их «странный» топологией.

1.2.2.3. Временное и ансамблевое средние

Продолжаем цитировать Эренфестов:

«Для такого (микроканонического. — С. Х.) фазового распределения множества систем мы можем получить „ансамблевое среднее“ (т. е. среднее по множеству систем) вышеупомянутых [динамических] фазовых функций путем интегрирования по энергетической поверхности ¹⁹⁾:

$$\overline{A(q, p)} = \frac{\int A \sigma ds}{\int \sigma ds}. \quad (1.2.9)$$

Чтобы от этого ансамблевого среднего перейти к среднему по времени, чего желает Больцман, необходима следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \text{ансамблевое среднее} &= \\ &= \text{временному среднему ансамблевого среднего} = \\ &= \text{ансамблевому среднему временного среднего} = \\ &= \text{временному среднему}. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Первое равенство вытекает из стационарного характера фазового [микроканонического] распределения ²⁰⁾, второе справедливо потому, что образование средних коммутативно. Третье равенство, однако, основано на утверждении, что все движения рассматриваемой совокупности дают одно и то же временное среднее для $A(q, p)$.

Это и есть тот пункт, через который входит гипотеза о том, что газовая модель является эргодической. Вследствие сомнений относительно внутренней логичности эргодической гипотезы это исследование [Больцмана] не может рассматриваться как свободное от возражений ²¹⁾» [Op. cit. P. 24–25].

¹⁹⁾ У Эренфестов в этом соотношении $\sigma(q, p)$ — это «поверхностная плотность», т. е. плотность распределения фазовых точек на энергетической поверхности, ds — элемент этой поверхности.

²⁰⁾ Прим. 110 Эренфестов: «Ср. прим. 108». Прим. 108 Эренфестов: «Это утверждение еще не зависит от эргодической гипотезы».

²¹⁾ Здесь Эренфесты и отсылают к работам Рэля, Кельвина и др. участников дискуссии об эргодической гипотезе.

«Используя картину эргодически (здесь: микроканонически. — С. Х.) распределенного ансамбля систем и гипотезу о том, что газовая модель является эргодической²²⁾, Больцман впервые выводит формулу для интервалов времени, которое Г-точка в течение своего неограниченно продолжительно го движения проводит в разных частях энергетической поверхности:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{dt}{T} = \frac{\sigma ds}{\int \sigma ds} \quad (1.2.11)$$

... Для временного среднего фазовой функции $A(q, p)$ эта формула, очевидно, снова дает уравнение (1.2.9)... Следующие замечания касаются уравнения (1.2.11):

1. Если принять эргодическую гипотезу, то уравнение (1.2.11) становится чисто механической теоремой, независимой от всяких „вероятностных“ соображений.
2. Если отказаться от эргодической гипотезы или попытаться сохранить ее в модифицированной форме, то мы лишаемся всяких критериев, чтобы решить, валидно ли еще уравнение (1.2.11) или же оно представляет собой тем или иным образом полезную аппроксимацию.

Если мы принимаем валидность уравнения (1.2.11), то мы можем вывести из него больше, чем просто утверждение о среднем поведении. В действительности, оно также существенным образом определяет относительные интервалы времени, которое газ проводит в разных состояниях» [Op. cit. P. 25-26].

Прокомментируем последнюю порцию выдержек из статьи Эренфестов.

Комментарий первый. Приводя соотношения Больцмана (1.2.9) и (1.2.11), фиксирующие равенство временного и ансамблевого средних, они вводят среднее только для *микроканонического* (равновесного!) ансамбля. Тем самым Эренфесты снова придают конструкциям Больцмана излишне жесткий характер. В статьях, касающихся эргодической гипотезы, Больцман на самом деле рассматривает *de facto* только равновесные системы, однако он нигде при этом не говорит, что ансамбль и ансамблевое среднее динамической величины могут быть введены только для микроканонического, т. е. равновесного, ансамбля. Если Эренфесты намекают нам, что ансамблевый подход применим только к равновесным системам, где ему может служить основанием временной подход, то менее четкие формулировки Больцмана, напротив, допускают возможность применения ансамблевого подхода и к неравновесным системам. Более жесткие формулировки Эренфестов уводят от истины, поскольку, как становится ясно сегодня и как о том говорилось в разд. 1.1, ансамблевый подход применим как к равновесным, так и к неравновесным (необратимым) системам, тогда как временной подход может претендовать только на равновесную область, в которой у фазовой траектории отдельной микросистемы бесконечно много времени на заполнение фазового объема.

²²⁾ Прим. 115 Эренфестов: «[Boltzmann, 1871b. Ch. III]».

Комментарий второй. Ранее (см. разд. 1.2.2.1) Эренфесты приписали Больцману утверждение, что микроканоническое распределение имеет место для эргодической системы. Поскольку теперь они вводят ансамблевое среднее только для микроканонического распределения, то у них получается, что ансамблевое среднее может быть введено, если система является эргодической (фазовая траектория проходит через каждую точку или через окрестность каждой точки фазового объема системы), т. е. тот самый ошибочный тезис, который кладет эргодическую систему в основание ансамблевого подхода и всей статистической физики. Для Эренфестов, как и для Больцмана, выражение «может быть введено ансамблевое среднее» имеет тот смысл, что среднее по ансамблю равно среднему по времени, возможность введения которого не вызывает у них сомнений. И отсюда возникает следующий комментарий.

Комментарий третий. Будучи младшим коллегой Больцмана, Эренфест воспринял и его механическую познавательную модель²³⁾, в которой ансамблевый подход вторичен по отношению к временному. Прослеживаемая с Декарта механическая познавательная модель на протяжении XIX в. вытесняется статистической [Чайковский, 1992, С. 76]. В физике вытеснение механической познавательной модели связано с именем Дж. В. Гиббса [Gibbs, 1902], который первым стал последовательно рассматривать ансамблевый подход как первичный и не нуждающийся в опоре на временной. Так и получилось, что Эренфесты сделали в своей статье то, чего ни в коем случае нельзя было делать и чего они не сделали бы, проникшись они духом книги Гиббса: они положили в основание ансамблевого подхода временной подход, используя при этом эргодическую гипотезу, справедливую, как мы теперь знаем, только для части равновесных систем, тогда как ансамблевый подход работает в общем случае равновесной и неравновесных систем. Ошибочно поставив ансамблевый подход в зависимость от эргодической гипотезы, Эренфесты неправомерно положили ее тем самым в основание статистической физики.

1.2.2.4. Продуктивная ошибка Эренфестов

Как видим, современная постановка вопросов, связанных с эргодической гипотезой, в значительной мере идет именно от статьи Эренфестов, выдвигание которыми вопроса о справедливости эргодической (или квазиэргодической) гипотезы как фундаментальной проблемы обоснования статистической физики до сих пор ставится некоторыми историками науки им в заслугу:

«Таким образом, только в 1911 г. Эренфестами впервые была четко сформулирована эргодическая гипотеза и ее квазиэргодический вариант. В результате физики договорились на том, что для обоснования статистической механики

²³⁾ Термин предложен в 1980 г. А. П. Огурцовым и взят на вооружение Ю. В. Чайковским [1990, 1992].

классическую механику необходимо дополнить элементами вероятностных представлений и принять некоторые гипотезы. Дальше начиналась работа для математиков: поскольку утверждение сформулировано, его надо доказать и определить границы его справедливости» [Вдовиченко, 1986. С. 35].

Несколько более трезво, но также в целом положительно оценивает статью Эрэнфестов С. Браш. Эрэнфесты, полагает он,

«пытаются сказать, что статистическая механика, как она понималась Максвеллом и Больцманом, не имеет твердого обоснования, потому что она полагается на эргодическую гипотезу, которая несправедлива для отдельной идеализированной механической системы, фактически рассматриваемой с этой целью Больцманом достаточно детально (фигуры Лиссажу²⁴). Они оставили без дальнейшего обсуждения альтернативную квазиэргодическую гипотезу и предположение, согласно которому взаимодействие со средой может сделать систему реально эргодической²⁵). Но самым важным их вкладом является то, что они задали математический вопрос: может ли быть всякая детерминистическая механическая система эргодической, насколько она отлична от квазиэргодической? Впервые проблема была ясно поставлена перед математиками, которые теперь должны были решить ее. И они ее решили» [Brush, 1967. P. 177; 1976. Vol. 2. P. 376–377].

Браш, по-видимому, первым решился на критику статьи Эрэнфестов, но лишь в историко-физической ее части:

«В то время как эта статья была сама по себе важным вкладом в развитие эргодической теории в статистической механике, она оставляет желать много лучшего как историческое сообщение о работе Максвелла и Больцмана, и большая часть ошибок позднейших комментаторов, описывающих происхождение эргодической гипотезы, является, вероятно, результатом некритического восприятия некоторых небрежных утверждений Эрэнфестов» [Op. cit. 1967. P. 169; Op. cit. 1976. P. 364].

Беда, однако, в том, что в статье Эрэнфестов не все ладно не только и не столько с историко-физической частью, сколько с собственно физической; они не смогли верно отразить главную тенденцию статистической физики тех лет, состоящую в переходе от временного подхода к ансамблевому как первичному.

Равновесная статистическая физика была создана, по преимуществу, Больцманом и Гиббсом, первый из которых выдвинул практически все основные идеи (за исключением равновесного распределения Максвелла), а второй, добавив к ним уравнение Лиувилля, оформил все в виде

²⁴) О фигурах Лиссажу см. сноску в разд. 1.2.1.

²⁵) Как показало развитие теории динамического хаоса, его могут генерировать уравнения движения, в которых среда никак не представлена. Вместе с тем, как говорилось в разд. 1.1 (см. текст между соотношениями (1.1.2) и (1.1.3)), ансамблевый подход предполагает размытость начальных состояний микросистем, которая может рассматриваться как условный (первичный) феномен ансамблевого описания, а может — как результат воздействия среды.

стройной теории в рамках ансамблевого подхода. Первопроходцам всегда трудно, зачастую многие их конструкции имеют лишь эвристическое значение, не попадая в итоге в теорию, которая строится с их помощью. Такими эвристическими конструкциями, например, были механические (даже механистические) модели, использованные Максвеллом при создании электромагнитной теории. Такой чисто эвристической конструкцией был и временной подход Больцмана. Будучи первопроходцем и исповедуя, естественно, познавательную модель, идущую из нестатистического прошлого классической механики, Больцман необходимо должен был отдать дань этому подходу. Этим и объясняется то, что, придя к принципиально новой идее ансамблевого подхода, адекватного природе статистических систем (систем с динамическим хаосом), Больцман считал его вторичным по отношению к временному. Гиббсу, который шел вторым, этот гандикап позволил прийти к новому пониманию статуса ансамблевого подхода как первичного и не нуждающегося вследствие этой своей первичности в опоре на временной подход.

Эренфесту, который был на 35 лет младше Больцмана, по идее, было много легче воспринять новые идеи Гиббса, книгу которого он, судя по обсуждаемой статье, штудировал. Однако Эренфест не смог оторваться от познавательной модели Больцмана, своего учителя, и воспринять модель Гиббса. Оказавшись не на высоте положения, *Эренфест не понял, что временной подход себя изжил и что ансамблевый подход в подпорках не нуждается. Следствием этого непонимания и явилось выдвигание им эргодической гипотезы на первый план как фундаментальной проблемы обоснования статистической физики.* Следствием этой главной ошибки Эренфестов и стали все остальные ошибки в их статье, физические и историко-физические. Однако, и в этом парадоксальность ситуации, благодаря именно этой фундаментальной ошибке Эренфеста физика вплотную занялась эргодической гипотезой, что впоследствии — неожиданно для всех — привело к «фрактальной революции».

Так или иначе, дело было сделано: физики поверили Эренфестам, которые прикрылись Больцманом и Максвеллом, что в основании ансамблевого подхода, а, следовательно, и всей статистической физики, лежит эргодическая гипотеза. И принялись искать решение проблемы обоснования статистической физики там, где его не было в принципе.

1.2.3. Биркгоф, фон Нейман и другие: эргодичность эквивалентна метрической транзитивности

Занявшись прежде всего определением своего отношения ко второй и третьей формулировкам эргодической гипотезы из трех приведенных в концовке преамбулы к разд. 1.2 — (2) фазовая траектория проходит через каждую точку фазового объема системы (собственно эргодическая гипотеза) и (3) фазовая траектория проходит через окрестность каждой его точки (квазиэргодическая гипотеза), — физики быстро выяснили,

что эта проблема трудностей не представляет. М. Планшероль [Plancherel, 1913] и А. Розенталь [Rosenthal, 1913] математически строго доказали, что фазовая траектория в принципе не может проходить через каждую точку фазового объема.

Поскольку сегодня в этом пункте путаницы уже нет, многие авторы для краткости называют квазиэргодическую гипотезу просто эргодической. Мы же будем далее для максимальной ясности называть эргодической гипотезой предположение о равенстве ансамблевого и временного средних, а квазиэргодической — о многократном посещении фазовой траекторией окрестности каждой точки фазового объема.

Современные комментаторы, находящиеся в тенетах концепции Эренфестов, склонны несколько раздувать значение дискуссии о соотношении эргодической и квазиэргодической гипотез. Подчеркивается, что долгое время физики не создавали принципиального различия между прохождением фазовой траектории через каждую точку фазового объема и через окрестность каждой точки. Называют автора [Hertz, 1910], который первым провел такое различие. В непонимании этой тонкости упрекают [Brush, 1976. Vol. 2. P. 372] даже Анри Пуанкаре. На мой же взгляд, физики просто не углублялись в эти математические тонкости, потому что — на тот момент справедливо — не видели за ними особого физического смысла. Тот же Пуанкаре, например, формулирует свою теорему возврата о возвращении механической системы в начальное состояние математически безупречно, фазовая траектория возвращается у него не в начальную точку, а именно в «любую произвольно выбранную область», содержащую эту точку, «какой бы малой ни была эта область» [Poincaré, 1890; Рус. пер. С. 430]. Если же он иногда и говорит о возвращении в *точку*, то делает это, я уверен, просто для краткости. Точно так же, как сегодня говорят об эргодической гипотезе, имея в виду квазиэргодическую. В физике всегда были и есть люди, которых более всего занимают математические тонкости и которые занимаются получением, как они говорят, строгих результатов (тот же Пуанкаре, Дж. фон Нейман, Д. Рюэль, Я. Г. Синай и др.). И очень хорошо, что такие люди находятся. Наряду с «нормальными» физиками. Однако упрекать последних за то, что они не следят за математической строгостью своих результатов, на мой взгляд, неправильно. Думается, что математиков следует оценивать как математиков, а физиков — как физиков.

Возвращаемся к нашей истории. Некоторое время физики, не огоривая того специально, использовали на равных две формулировки эргодической гипотезы — (1) временные средние динамических величин равны ансамблевым средним и (2) фазовая траектория многократно пересекает окрестность каждой точки на энергетической поверхности систем. Окрыленный успехом Розенталь в работе [Rosenthal, 1914] попытался доказать, что первая из этих формулировок вытекает из второй. А Меламит [Melamit, 1932] показал ошибочность этого доказательства Розенталя. Так или иначе дальнейшие события разворачиваются так, как если бы физики

и помимо Меламита создавали неэквивалентность двух указанных формулировок эргодической гипотезы.

Работа [Fermi, 1923–1924] молодого Энрико Ферми (родился в 1901 г.), выполненная под руководством П. Эренфеста, была одной из крайне нечастых попыток решить эргодическую проблему физическими средствами. В ней Ферми доказывает квазиэргодичность так называемых канонически нормальных систем с более чем двумя степенями свободы²⁶⁾.

В работах Дж. Д. Биркгофа [Birkhoff, 1927, 1931; Birkhoff, Koopman, 1932] и Дж. фон Неймана [Neumann, 1929, 1932a, b] произошел решительный разворот эргодической теории на математику, конкретно — на теорию множеств. Называя эргодическими динамические системы, для которых равны временные и ансамблевые средние, эти авторы постарались понять, что означает эргодичность на языке теории множеств, связав ее с понятием *метрической транзитивности* (неразложимости). Чтобы изложить полученные ими результаты, необходимо предварительно ввести некоторые понятия.

Забегая вперед, скажем, что многие из этих понятий предполагают фазовую траекторию системы непрерывной «более или менее» гладкой линией, а фазовую жидкость — гладким многообразием²⁷⁾. Для фрактальных

²⁶⁾ КАНОНИЧЕСКИ НОРМАЛЬНАЯ СИСТЕМА, впервые рассмотрена А. Пуанкаре; определяется как механическая система, энергия которой не зависит от времени, а гамильтониан H может быть разложен по степеням некоторого параметра β , $H = H_0 + \beta H_1 + \beta^2 H_2 + \dots$, так что H_0 не зависит от α_i , а остальные члены разложения зависят, вообще говоря, как от α_i , так и от J_i . Здесь α_i и J_i — канонически сопряженные переменные, причем все H_k являются периодическими функциями α_i с одним и тем же периодом.

КАНОНИЧЕСКИ СОПРЯЖЕННЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ, наборы переменных (q, p) и (Q, P) , связанные таким образом, что в новых координатах уравнения Гамильтона имеют прежний (канонический) вид (1.1.4):

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \quad (\text{C.1.4})$$

Преобразование, обеспечивающее такой переход, называется каноническим и характеризуется производящей функцией $F(q, Q, t)$ или $W(q, P, t)$:

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t}$$

или

$$p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial W}{\partial P_i}, \quad H = H + \frac{\partial W}{\partial t} \quad (\text{C.1.5})$$

[Ландау, Лифшиц, 1958. С. 179–180].

²⁷⁾ МНОГООБРАЗИЕ, «многомерное обобщение понятий линии и поверхности без особых точек. Топологическим многообразием размерности n называется топологическое пространство M , каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной открытому шару $x_1^2 + \dots + x_n^2 < 1$ n -мерного евклидова пространства R^n » [Математический..., 1988. С. 377]. Проще говоря, многообразие — это континуум, т. е. непрерывное множество. Многообразие может быть одномерным (линия), двумерным (поверхность) и т. д.

множеств, возникающих в необратимом случае *в рамках синергетического (динамического) описания*, когда выписываются уравнения движения для степеней свободы, это просто неверно (см. гл. 4), чего не могли знать фон Нейман и Биркгоф. Фазовая траектория непрерывна вместе с фазовой жидкостью для необратимых систем *в рамках кинетического подхода*, в котором действуют кинетические уравнения и — для гамильтоновых систем — уравнение Лиувилля, однако здесь перестают работать уравнения движения для степеней свободы (см. разд. 5.3), на которые опирается вся эргодическая теория, включая построения Биркгофа-фон Неймана. В области же равновесных процессов в случае стохастического движения фазовая траектория ветвится или как-то иначе изменяет свою структуру «в каждой точке» (см. разд. 1.1, 2.2.4.2 и 2.4.4), из-за чего ее нельзя считать здесь гладкой линией.

Центральными в используемой фон Нейманом и Биркгофом теории множеств являются понятия *объема* фазового пространства и *меры* фазового множества, которые применительно к механической статистической системе вводятся следующим образом. Объемом элемента $dq dp$ фазового пространства системы называют непосредственно эту величину $dq dp$. Объем $V(\nu)$ конечной области ν фазового пространства определяется выражением

$$V(\nu) = \int_{\nu} dq dp. \quad (1.2.12)$$

Этот интеграл по всему фазовому Γ -пространству системы равен бесконечности.

Мерой $d\mu$ множества фазовых точек, занимающих элемент $dq dp$ фазового пространства, называют величину

$$d\mu = \rho(q, p, t) dq dp, \quad (1.2.13)$$

где $\rho(q, p, t)$ — фазовая плотность, т. е. плотность распределения фазовых точек. Мера множества фазовых точек, занимающих конечную область ν фазового пространства системы, определяется выражением

$$\mu(\nu) = \int_{\nu} d\mu = \int_{\nu} \rho(q, p, t) dq dp. \quad (1.2.14)$$

При определении *меры* множества точек его можно «комкать» и «прессовать», удаляя пустые участки пространства, поскольку нас занимает при

ГЛАДКОСТЬ, «свойство функции или геометрической фигуры (кривой, поверхности и т. д.), состоящее в том, что эта функция дифференцируема или у каждой точки данной фигуры имеется окрестность, допускающая дифференцируемую параметризацию, т. е. задание с помощью дифференцируемых функций. В этом смысле говорят о гладкой кривой, гладкой поверхности и т. д. Если рассматриваемые функции k раз дифференцируемы, то говорят о гладкости порядка k » [Там же. С. 159].

этом только «объем» пространства, занимаемый непосредственно точками множества.

Мера всего множества фазовых точек M в фазовом Γ -пространстве системы имеет смысл вероятности ее нахождения в одном из микросостояний. В каком-то из них система обязательно находится, поэтому эта мера нормируется на единицу:

$$\mu(M) = \int_{\Gamma} d\mu = \int_{\Gamma} \rho(q, p, t) dq dp = 1, \quad (1.2.15)$$

так что мера множества фазовых точек, размещенных в любой области фазового пространства, удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \mu(\nu) \leq 1. \quad (1.2.16)$$

Для моментов времени t и t' можно записать равенство

$$d\mu = \rho(q, p, t) dq dp = \rho(q', p', t') dq' dp' = d\mu', \quad (1.2.17)$$

являющееся следствием неунуничтожаемости «частиц» фазовой жидкости (см. соотношение (1.1.7)). Аналогичное равенство имеем и для множества фазовых точек, занимающих конечную область фазового пространства системы:

$$\mu(\nu) = \int_{\nu} d\mu = \int_{\nu} d\mu' = \mu'(\nu). \quad (1.2.18)$$

Другими словами, *мера конечного множества фазовых точек при его перемещении по фазовому пространству системы сохраняется во времени*. При установлении этого факта гамильтонова природа механической системы не была использована.

Для гамильтоновой системы *в предположении непрерывности фазовой жидкости* (что, напоминаем, для синергетических систем несправедливо) действует теорема Лиувилля в нестатистическом (1.1.8) и статистическом (1.1.5) ее вариантах, из которой следует сохранение во времени объема конечной области фазового пространства гамильтоновой системы,

$$V(\nu) = \int_{\nu} dq dp = \int_{\nu} dq' dp' = V'(\nu), \quad (1.2.19)$$

и несжимаемость фазовой жидкости, выражаемая равенством (1.1.6).

Получаемая с помощью уравнений Гамильтона теорема Лиувилля (см. соотношения (1.1.3)–(1.1.5) и связанный с ними текст), точнее, вытекающая из нее несжимаемость фазовой жидкости, — это все, что в эргодической теории в рассматриваемом ее варианте остается от гамильтоновой механики. Впрочем, поскольку эта теория развивается, в основном, математиками, которые не очень держатся за физические реальности, постольку, как ни странно, уравнения Гамильтона в общем случае не предполагаются в ней действующими.

«Ныне мы знаем, что существуют обширные классы динамических (но не гамильтоновых) систем, которые эргодичны. Известно также, что даже сравнительно простые системы могут обладать более сильными свойствами, чем эргодичность. Для таких систем движение в фазовом пространстве становится сильно хаотическим (хотя в полном соответствии с уравнением Лиувилля... объем в фазовом пространстве сохраняется)» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 333–334]²⁸⁾.

Одно из двух — либо вы считаете вашу систему гамильтоновой, и тогда для нее справедлива уравнение Лиувилля, либо вы считаете ее негамильтоновой, и тогда для нее уравнение Лиувилля несправедливо.

Однако авторами эргодической теории делается, все же, существенная уступка физической реальности: здесь справедливо считается, что *множества меры нуль не имеют физического, смысла*. Известным примером такого рода служит множество рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$. Любой сколь угодно малый интервал отрезка содержит бесконечно большое число таких точек, однако если бы мы собрали их вместе, то получили бы отрезок нулевой длины. При анализе физических систем множества имеет смысл фиксировать, как говорят, лишь с точностью до меры нуль. Аналогичный смысл имеют и выражения типа «почти все точки множества»:

«Существенно, что все эти свойства стохастического движения справедливы, как говорят математики, „почти всюду“. Это значит, что даже в „самой стохастической“ системе существуют такие специальные начальные условия, такие точки в динамическом пространстве, для которых движение является не стохастическим, а, скажем, периодическим. Однако площадь (мера) всех этих точек в случае „идеальной“ стохастичности равна нулю, хотя их полное число бесконечно велико и, более того, они образуют всюду плотное множество, наподобие рациональных чисел на прямой» [Чириков, 1982. С. 186].

Перемещение «частиц» фазовой жидкости в фазовом пространстве во времени описывают с помощью понятия *потока*, под которым понимают преобразование, или отображение, фазового пространства самого на себя, когда каждая фазовая точка (q, p) преобразуется в точку (q_t, p_t) посредством *оператора сдвига по времени* $\hat{T}$:

$$(q, p) \rightarrow (q_t, p_t) = (\hat{T}q, \hat{T}p). \quad (1.2.20)$$

Соответственно преобразуется при этом и динамическая функция $A(q, p)$ системы:

$$A(q, p) \rightarrow A(q_t, p_t) = A(\hat{T}q, \hat{T}p). \quad (1.2.21)$$

Поскольку поток фиксируется оператором $\hat{T}$, то этот оператор иногда также называют потоком. Преобразования $\hat{T}$, рассматриваемые для всех значений времени t , образуют *группу*. В соответствии с говорившимся выше, в эргодической теории рассматриваются потоки, сохраняющие меру.

²⁸⁾ См., также [Birkhoff, 1927; Рус. пер. С. 52].

Иногда эргодическую теорию даже определяют как теорию преобразований с инвариантной мерой. Для гамильтоновых систем, как мы видели, поток сохраняет и объем конечной области фазового пространства.

Эргодический поток вводится как определяющий движение, при котором для произвольного t имеет место равенство временных и ансамблевых средних²⁹⁾:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dt' A(\widehat{T}(t' - t)q(t), \widehat{T}(t' - t)p(t)) = \int A(q, p) \rho(q, p, t) dq dp \quad (1.2.22)$$

[Заславский, 1984. С. 27]. Это определение опирается на первую из трех приводившихся в преамбуле к разд. 1.2 формулировок эргодической гипотезы. Если бы мы опирались на третью, то ввели бы эргодический поток как определяющий такое движение в фазовом пространстве, при котором траектория любой фазовой точки пересекает со временем любую область фазового пространства бесконечное число раз. Однако последнее определение является в эргодической теории Биркгофа и фон Неймана только вспомогательным, в роли же основного здесь выступает именно определение с помощью равенства (1.2.22). Эти два определения, как впоследствии выяснилось, не эквивалентны, однако когда Биркгоф и фон Нейман устанавливали связь между эргодическими (ансамблевые средние равны временным) и *метрически транзитивными* потоками, то исходили при этом из образа траектории, плотно заполняющей весь фазовый объем системы и не позволяющей, поэтому, разбить его на независимые части:

«Механическая система называется метрически транзитивной в том случае, когда энергетическая поверхность *не* может быть разделена на конечные области, такие, что если начальная точка какой-либо траектории находится в одной из этих областей, то и вся траектория будет укладываться в этой области (выделено авторами. — С. Х.)» [Уленбек, Форд, 1965. С. 27].

«Интуитивно ясно, что никакая траектория не будет оставаться внутри конечного участка фазового пространства, скорее наоборот — траектория должна „гулять“ по всему пространству. Можно сказать также, что каждое инвариантное подмножество фазового пространства обладает либо мерой нуль, либо мерой единица (в последнем случае оно охватывает почти все (т. е. с точностью до множества меры нуль. — С. Х.) фазовое пространство)» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 380].

²⁹⁾ «Абстрактная динамическая система (M, μ, φ_t) называется *эргодической*, если для любой μ -суммируемой комплекснозначной функции $f \in L_1(M, \mu)$ ее временное среднее равно ее пространственному среднему почти всюду» [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 23]. «Абстрактной динамической системой (M, μ, φ_t) называется набор, состоящий из измеримого пространства M с мерой μ и группы φ_t автоморфизмов $\text{mod } 0$, сохраняющих меру $\mu(\varphi_t A) = \mu(A)$ при всех t и всех измеримых A » [Там же. С. 15]. Здесь $\text{mod } 0$ означает, что автоморфизмы заданы на всем M за исключением, быть может, множества меры 0 [Там же. С. 123].

Биркгоф и фон Нейман доказали теорему, согласно которой, в облегченном изложении Дж. Уленбека и Дж. Форда [1965. С. 26], если механические движения системы ограничены и если любая заданная в ее фазовом пространстве функция $y = f(q, p)$ интегрируема вдоль энергетического слоя, то почти всегда (т. е. с точностью до множества меры нуль) существует ее среднее по времени³⁰⁾. Более же всего интересующий нас результат Биркгофа и фон Неймана является следствием из этой теоремы: *ансамблевые средние равны временным тогда и только тогда, когда данная динамическая система является метрически транзитивной*³¹⁾. Иначе говоря, *классы метрически транзитивных и эргодических систем совпадают*.

С другой стороны, *класс квазиэргодических систем шире класса метрически транзитивных систем*:

«Метрически транзитивная система является, очевидно, квазиэргодической, однако обратное утверждение *не* обязательно справедливо. Может случиться, что энергетическую поверхность можно разделить на две области с конечной мерой, переплетенные настолько, что плотность точек каждой из областей будет достаточно велика в любом месте поверхности. Если орбиты, начинающиеся в точках одной из областей, остаются в той же области, то тогда ясно, что система не является метрически транзитивной, хотя очевидно, что она квазиэргодична (выделено авторами. — С. Х.)» [Уленбек, Форд, 1965. С. 47].

³⁰⁾ Строгая формулировка этой теоремы, в отечественной литературе иногда называемой теоремой Биркгофа—Хинчина: «Пусть (M, μ, φ_t) — абстрактная динамическая система, $f \in L_1(M, \mu)$ — μ -суммируемая комплекснозначная функция на M . Тогда:

- a) $f^*(x)$ существует почти всюду (сокращенно: п. в.), т. е. всюду, за исключением, может быть, множества меры нуль;
- b) $f^*(x)$ — μ -суммируема и инвариантна п. в., т. е. $f^*(\varphi_t x) = f^*(x)$ при всех t , за исключением, может быть, множества меры нуль, независимо от t ;
- c) $\int_M f^*(x) d\mu = \int_M f(x) d\mu$ »

[Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 23]. Здесь $f^*(x)$ — временное среднее, а интеграл в правой части равенства в пункте (с) — ансамблевое среднее.

³¹⁾ «Абстрактная динамическая система эргодична в том и только в том случае, если она неразложима, т. е. если все инвариантные измеримые множества имеют меру 0 или 1» [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 24].

АВТОМОРФИЗМ, изоморфизм некоторой системы объектов на себя [Математический..., 1988. С. 42]. Поток в теории динамических систем осуществляет автоморфизм в фазовом пространстве данной системы, преобразуя в нем множество фазовых точек во времени.

ИЗОМОРФИЗМ, системы объектов S и S' с указанными на них отношениями

$$F_k(x_1, x_2, \dots), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{и} \quad F'_k(x'_1, x'_2, \dots), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

называются изоморфными, если между ними существует такое взаимнооднозначное соответствие $x' = \varphi(x)$, $x = \psi(x')$ (где x — произвольный элемент S , а x' — произвольный элемент S'), что из наличия $F_k(x_1, x_2, \dots)$ вытекает $F'_k(x'_1, x'_2, \dots)$, и наоборот. Отображение ϕ называется изоморфным отображением, или изоморфизмом, системы S в S' [Там же. С. 225].

Соответственно класс квазиэргодических систем шире и класса эргодических систем:

«...Эргодичность имеет место только в том случае, когда траектория попадает во все области фазового пространства, т. е. подходит сколь угодно близко к любой точке бесконечное число раз. Отметим, что обратное утверждение неверно» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 292]³².

Соотношение классов квазиэргодических, метрически транзитивных и эргодических систем показано на рис. 1.2.1.

К исследованиям Биркгофа и фон Неймана присоединились Э. Хопф, А. Я. Хинчин и многие другие³³. Были предложены разные формулировки эргодической теоремы Биркгофа-фон Неймана, различающиеся типом условий, накладываемых на динамическую величину $A(q, p)$, о среднем значении которой идет речь в теореме, предполагаемым типом сходимости в соотношении (1.2.22) и т. д. Ученые ищут и находят примеры метрически транзитивных и, следовательно, эргодических систем.

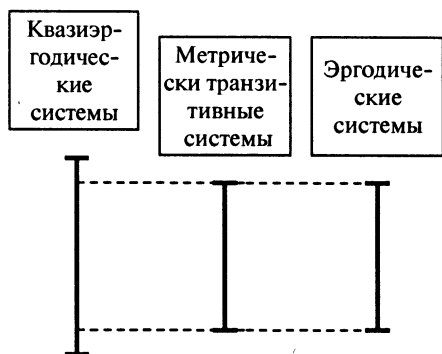


Рис. 1.2.1. Соотношение разных классов динамических систем. Система эргодична (ансамблевые средние равны временным) тогда и только тогда, когда она метрически транзитивна (главный результат теории Биркгофа-фон Неймана). Эргодическая (метрически транзитивная) система квазиэргодична, однако квазиэргодическая система может быть неэргодической (метрически нетранзитивной)

Большую известность получили, в частности, работы Дж. Хедлунга [Hedlung, 1934] и Э. Хопфа [Hopf, 1937, 1939], в которых была доказана метрическая транзитивность движения материальной точки на поверхности с постоянной отрицательной кривизной.

Тем не менее сложная и красивая в математическом плане рассматриваемая ветвь эргодической теории, с физической точки зрения, оказалась малопродуктивной. Биркгофу и фон Нейману, и это оказалось главным достижением этого направления, удалось найти необходимое и достаточное условие эргодичности системы (ансамблевые средние равны временным), что, конечно, замечательно само по себе, но ровным счетом ничего не дало для выяснения реальных условий,

³² Во избежание недоразумений заметим, что А. Лихтенберг и М. Либерман под эргодическими понимают именно системы, для которых ансамблевые средние равны временным [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 291–292].

³³ [Hopf, 1932a–с, 1937, 1939, 1940, 1960; Khintchin, 1932; Oxtoby, Ulam, 1941; Хинчин, 1943; Oxtoby, 1952; Halmos, 1956; Lebowitz, Penrose, 1973].

обеспечивающих выполнение эргодической гипотезы. Как заметил уже Хинчин [1943. С. 9], теорема Биркгофа только заменяет одну — эргодическую — гипотезу другой — «гипотезой метрической транзитивности», которая, добавим, не менее темна и загадочна, чем первая, поскольку

«очень трудно доказать (во всяком случае, этого еще не сделано), что движение системы, гамильтониан которой задан, будет или метрически транзитивным, или не будет таковым; даже примеры, которые допускают точное решение этого вопроса, встречаются довольно редко» [Уленбек, Форд, 1965. С. 27].

Но дело не только и не столько в том, что не существует теоретических методов, которые бы позволяли по гамильтониану данной системы определить, является ли она метрически транзитивной. Тупиковой оказалась вся первая ветвь эргодической теории, нацеленная на решение проблемы обоснования статистической физики путем опоры ансамблевого подхода на временнóй. Ведь чтобы иметь право положить эргодическую гипотезу в основание ансамблевого подхода, нужно быть уверенным, что класс эргодических систем охватывает все виды статистических систем. Выяснилось, однако, что это далеко не так. Посыпались все новые и новые примеры *неэргодических статистических систем*.

Уже фон Нейман [Neumann, 1932c] показал, что квантовые эргодические системы *не вырождены*, т. е. каждому собственному значению энергии отвечает только одна собственная функция. Этот результат

«весьма ощутимо ограничивает возможности эргодического подхода, так как большинство представляющих интерес квантовых систем вырождены. Например, заданная энергия может быть многими способами распределена между возбуждениями в многочастичной системе» [Пригожин, 1985. С. 82].

Неэргодической системой оказался даже всем известный идеальный газ, поскольку описывающая его фазовая траектория не заполняет плотно энергетическую поверхность, будучи стеснена N изолирующими интегралами, какими являются здесь энергии каждой из N составляющих его частиц [Балеску, 1978. Т. 1. С. 171]³⁴⁾.

Оказалось, более того, что *(квази)эргодическое движение может быть нестохастическим*:

«Широко распространенное мнение о том, будто динамические системы в общем случае должны быть эргодическими, было впервые поставлено под сомнение в статье А. Н. Колмогорова [1954]³⁵⁾. Он показал, что для широких классов взаимодействующих динамических систем можно построить перио-

³⁴⁾ Об изолирующих интегралах движения см. в разд. 2.2.3.

³⁵⁾ В этой статье была сформулирована КАМ-теорема (см. разд. 2.3).

дические орбиты, лежащие в некотором подпространстве (на инвариантных торах ³⁶⁾) эргодической поверхности» [Пригожин, 1985. С. 55] ³⁷⁾.

См. также [Балеску, 1978. Т. 2. С. 378].

Констатируем, что физика XX в. прошла путь от поддержки эргодической гипотезы как краеугольного камня в основании статистической физики до отрицания такой ее роли. Сегодня утвердилось идущая от Дж. В. Гиббса познавательная модель, в которой ансамблевый подход рассматривается как первичный. Можно только удивляться тому, что переход от Больцмановской познавательной модели (с опорой на временной подход) к Гиббсовской затянулся на целый век.

1.2.4. Обсуждение: «туннельный переход»

В нашем рассмотрении первой (традиционной) ветви эргодической теории до сих пор доминировали черные краски, мы подчеркивали моменты, являющиеся следствием нацеленности этой теории на ложную мишень — на обоснование ансамблевого подхода с помощью временного. Отсюда и наша отрицательная в целом оценка статьи П. и Т. Эренфестов 1911 г. Однако ограничиваться черными красками было бы неправильно.

Прежде всего неверно было бы думать, что эргодическая теория появилась случайно и что если бы Эренфесты не «придумали» проблему обоснования ансамблевого подхода на базе эргодической гипотезы, то эта теория и не возникла бы. Если бы дело было только в Эренфестах, то их постановка проблемы не встретила бы такого сочувствия среди физиков. Случайностью было то, что роль запала сыграла именно статья Эренфестов, не появившись она, проблему поставил бы кто-нибудь другой.

В разработке первой ветви эргодической теории участвовали большие интеллектуальные силы. И хотя это направление было в целом тупиковым, поскольку решение проблемы обоснования статистической физики оказалось совсем в другом месте, о чем уже кратко говорилось

³⁶⁾ О движении динамической системы на торе см. в разд. 2.2.3.

³⁷⁾ Продолжая это высказывание, Пригожин пишет: «Исследования других авторов также пошатнули нашу уверенность в универсальном характере эргодических систем. Например... Энрико Ферми, Джон Паста и Станислав Улам... выполнили численный эксперимент — проследили за поведением цепочки связанных ангармонических осцилляторов. Приступая к эксперименту, авторы ожидали, что система осцилляторов быстро перейдет в состояние теплового равновесия, но обнаружили периодические осцилляции в энергии различных нормальных мод» [Пригожин, 1985. С. 55–56].

Речь идет о работе [Fermi e. a., 1955], пригожинская оценка которой, на мой взгляд, не совсем корректна, как некорректна и моя собственная ее прежняя оценка [Хайтун, 1996. С. 52], выдержанная в том же ключе. Дело в том, что, как разъясняется в разд. 3.2.1 (см. соотношения (3.2.2)–(3.2.4) и связанный с ними текст), рассматривавшаяся Ферми и др. динамическая система оказалась не только неэргодической, но и *нестатистической*, и потому никак не могла «пошатнуть» нашу уверенность в универсальном характере эргодических систем, поскольку эргодическая гипотеза претендовала лишь на охват статистических систем.

в разд. 1.2.2.4, работа не пропала даром, принесла свои плоды, хотя и не те, каких от нее ожидали.

Во-первых, эргодическая теория появилась как закономерный этап развития статистической физики, связанный с переходом от старой, больцмановской познавательной модели, к новой, гиббсовской. Больцмановская познавательная модель вышла из недр достатистической механики, для которой понятие статистического ансамбля было «чужим», искусственным и потому нуждалось в обосновании. Познавательная модель Гиббса уже более адекватна природе статистических явлений, воспринимая понятие ансамбля как нечто естественное и не нуждающееся в обосновании. Переход от одной познавательной модели к другой потребовал ломки физического сознания, полигоном для которой и послужила эргодическая теория. Когда новая познавательная модель утвердилась, эргодическая теория в традиционном ее варианте исчерпала себя, фактически прекратив свое существование.

Во-вторых, традиционная ветвь эргодической теории продвинула физиков в понимании природы *стохастического движения*. Это объясняется самим содержанием эргодической теории, которая возникла вокруг проблемы обоснования статистической механики на базе нестатистической. Статистическая механика тем и отличается от нестатистической, что изучает стохастическое движение. Естественно, поэтому, что в центре внимания эргодической теории с самого начала находились стохастика и все, что с ней связано. Можно даже утверждать, что понятие эргодичности возникло как некорректная (размытая) рефлексия на стохастику. Постепенно стало ясно, однако, что эргодическая система может быть и нестатистической, а статистическая — неэргодической, и понимание этого созрело именно в недрах традиционной ветви эргодической теории. Отрицательный результат — тоже результат. Оказалось, что за стохастическое движение в большей мере отвечает введенное Гиббсом [Gibbs, 1902] перемешивание, т. е. перепутывание фазовых траекторий микросистем с разными начальными условиями, в основе которого лежит неустойчивость фазовых траекторий. Именно перемешивание оказалось в центре внимания второй ветви эргодической теории.

В-третьих, и это, быть может, самое существенное, традиционная ветвь эргодической теории с ее анализом казалось бы не имеющих большого физического смысла топологических тонкостей, связанных с различием эргодического и квазиэргодического движения, подготовила появление в последней трети XX в. синергетики, описывающей необратимые процессы посредством фрактальных структур с их необычной топологией. Обратив внимание физиков на эти топологические тонкости, Пауль Эренфест оказался провидцем, его (совместная с женой) статья облегчила и ускорила освоение физиками странных аттракторов и фракталов. Заведя физику в «тупик», Эренфест способствовал ее «туннельному переходу» через него к идеям синергетики.

1.3. Вторая ветвь: во главе угла перемешивание*

1.3.1. Гиббс: рождение схемы перемешивания

Понятие перемешивания фазовой жидкости было введено Джозайя Виллардом Гиббсом в 12-й главе монографии «Элементарные принципы статистической механики» [Gibbs, 1902], в которой он построил теорию статистической механики, основанную на симметричных по времени (обратимых) уравнениях Гамильтона и Лиувилля, из которых вытекает несжимаемость фазовой жидкости механической системы (см. соотношения (1.1.5)–(1.1.11) и связанный с ними текст). Считая свою механику справедливой и в области необратимых процессов, Гиббс столкнулся с проблемой необратимости³⁸⁾, поскольку необратимые процессы идут с ростом энтропии, а рост энтропии механической системы означает рост объема ее фазовой жидкости, который ему надо было согласовать с несжимаемостью последней.

Идея Гиббса состоит в описании роста фазового объема необратимой системы при перемешивании [mixing] фазовой жидкости в результате перепутывания фазовых траекторий микросистем с разными начальными состояниями со все большим ее изрезыванием.

Фазовые траектории неявно полагаются Гиббсом непрерывными, что, как о том предварительно говорилось в разд. 1.2.3 и как мы увидим в гл. 4–5, в необратимой области несправедливо в рамках синергетического подхода и справедливо в рамках кинетического, в котором, однако, фазовая жидкость сжимаема/растягиваема, так что здесь не только исчезает озадачившая Гиббса проблема (ничто не мешает здесь фазовой жидкости увеличивать свой объем), но и не действуют лежащие в основе всей эргодической теории уравнения движения для отдельных степеней свободы.

Всего этого Гиббс, естественно, знать не мог. Объем фазовой жидкости, т. е. части фазового пространства, занимаемой частицами фазовой жидкости, остается, по Гиббсу, в ходе ее необратимого перемешивания неизменным (из-за несжимаемости фазовой жидкости), возрастает же, полагает он, занимаемый ею «огибающий» объем фазового пространства за счет возникновения в этой жидкости связанной сети ускользающее

* В разделе помимо оригинальных статей использованы обзоры и монографии [Крылов, 1950; Billingsley, 1965; Аносов, 1967; Аносов, Синай, 1967; Рохлин, 1967; Arnold, Avez, 1968; Вершик, Юзвинский, 1969; Гуревич, Синай, 1969; Динабург, 1971; Sinai, 1973; Гладкие..., 1977; Орнштейн, 1978; Корнфельд и др., 1980; Заславский, 1984; Современные..., 1985].

³⁸⁾ Проблемой необратимости называют противоречие между необратимостью (несимметричностью по времени) реальных процессов и симметричностью по времени распространяемых на них уравнений гамильтоновой механики, включая уравнения Максвелла, квантовой механики, частной и общей теории относительности. Предлагаемое автором [Хайтун, 1996] решение этой проблемы состоит в отказе в области необратимых явлений от симметричных по времени уравнений гамильтоновой механики.

малых лакун³⁹⁾. Точная, или мелкозернистая [fine-grained], фазовая плотность, по Гиббсу, подчиняется уравнению Лиувилля, тогда как грубая, или крупнозернистая [coarse-graining], фазовая плотность, отвечающая грубой фазовой жидкости с растущим объемом, удовлетворяет тому или иному несимметричному по времени кинетическому уравнению.

Математически крупнозернистая фазовая плотность вводится выражением

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{\omega_i} \int \rho(q, p) dq dp. \quad (1.3.1)$$

Здесь индекс i относится к i -й фазовой ячейке, $\omega_i = \delta q_1^i \delta p_1^i \dots$ — ее объем, $\rho(q, p)$ — обычная, т. е. мелкозернистая, фазовая плотность. Нормировка на единицу сохраняется:

$$\sum_i \bar{\rho}_i \omega_i = 1. \quad (1.3.2)$$

Непрерывная крупнозернистая фазовая плотность $\bar{\rho}(q, p)$ вводится, когда мы ее полагаем в пределах каждой i -й ячейки постоянной и равной величине (1.3.1),

$$\int \bar{\rho}(q, p) dq dp = 1. \quad (1.3.3)$$

Соответственно вводятся мелкозернистая

$$S = -k \int \rho(q, p) \ln \rho(q, p) dq dp \quad (1.3.4)$$

и крупнозернистая

$$\bar{S} = -k \sum_i \omega_i \bar{\rho}_i \ln \bar{\rho}_i = -k \int \bar{\rho}(q, p) \ln \bar{\rho}(q, p) dq dp \quad (1.3.5)$$

энтропии, первая из которых, согласно действующей, как полагают, в ходе необратимых процессов теореме Лиувилля, сохраняется во времени (см. сноску, связанную с соотношениями (С. 3.7–9)), а вторая, как утверждают, растет.

Квантовая крупнозернистая плотность вводится выражением, аналогичным классическому (1.3.1):

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{\omega_i} \int \rho(x', x) dx dx'. \quad (1.3.6)$$

³⁹⁾ СВЯЗНОЕ МНОЖЕСТВО, множество, состоящее как бы из одного куска. Множество связно тогда и только тогда, когда всякая непрерывная функция переходит на нем от одного значения к другому, принимая все промежуточные значения [Математический..., 1988. С. 538–539].

Крупнозернистая квантовая энтропия ⁴⁰⁾:

$$\bar{\bar{S}} = -k \sum_i \omega_i \bar{\rho}_i \ln \bar{\rho}_i = -k \int \bar{\rho}(x', x) \ln \bar{\rho}(x, x') dx dx'. \quad (1.3.7)$$

Грубое распределение отличается от точного тем, что в пределах малых ячеек (классовых интервалов) спрямлено до равномерного. Поэтому энтропия такого кусочно-равномерного распределения *больше* энтропии точного:

$$\bar{\bar{S}} \geq S \quad (1.3.8)$$

[Кац, 1965. С. 109–110; Исихара, 1973. С. 47; Wehrl, 1978. Р. 229]. Это неравенство доказывается [Tolman, 1938. Р. 168] с использованием равенства ⁴¹⁾

$$\bar{\bar{S}} = -k \int \rho \ln \bar{\rho} dq dp \quad (1.3.9)$$

и неравенства [Op. cit. Р. 169] ⁴²⁾

$$a \ln a - a \ln b - a + b \geq 0, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad (1.3.10)$$

а также условия нормировки плотностей ρ и $\bar{\rho}$ на единицу:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{S}} - S &= -k \int (\bar{\rho} \ln \bar{\rho} - \rho \ln \rho) dq dp = k \int (\rho \ln \rho - \rho \ln \bar{\rho}) dq dp = \\ &= k \int (\rho \ln \rho - \rho \ln \bar{\rho} - \rho + \bar{\rho}) dq dp \geq 0. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

В монографии [Хайтун, 1996. С. 104–112] показывается, что решение проблемы необратимости посредством гиббсовой схемы перемешивания несостоятельно. Коротко говоря, содержащаяся в решении Гиббса ошибка состоит в объединении под одной крышей двух разных физических моделей — модели обратимой системы, описываемой точной фазовой плотностью, и модели необратимой системы, описываемой грубой плотностью. Один и тот же процесс нельзя описывать одновременно симметричной

⁴⁰⁾ Подробнее о квантовом огрублении см. [Хайтун, 1996. С. 105–108].

⁴¹⁾ $\bar{\rho}$ и $\ln \bar{\rho}$ постоянны по объему i -й ячейки, что дает:

$$\begin{aligned} -k \int \rho \ln \bar{\rho} dq dp &= -k \sum_i \int \rho \ln \bar{\rho} dq dp = \\ &= -k \sum_i \ln \bar{\rho}_i \int \rho dq dp = -k \sum_i \omega_i \bar{\rho}_i \ln \bar{\rho}_i = \bar{\bar{S}}. \end{aligned} \quad (C.1.6)$$

⁴²⁾ Чтобы доказать неравенство (1.3.10), исследуем функцию $y(b) = a \ln a - a \ln b - a + b$ на экстремумы. Ее производная $(dy/db) = 1 - (a/b)$ при $b > a$ положительна, при $b < a$ отрицательна, а в точке $b = a$ равна 0. Таким образом, достигая в точке $b = a$ минимума, равного 0, при остальных значениях b функция $y(b)$ положительна.

и несимметричной по времени функциями. Или — или. Или мы используем точную плотность, считая процесс обратимым, или грубую, считая его необратимым. Более того, удовлетворяя несимметричному по времени кинетическому уравнению и потому не удовлетворяя симметричному по времени уравнению Лиувилля, грубая фазовая плотность описывает негамильтонову систему. Другими словами, вопреки Гиббсу, сохраняющему в необратимой области гамильтоново уравнение Лиувилля, его решение в области необратимых процессов *de facto* отменяет гамильтонову механику.

Другой изъян схемы перемешивания Гиббса связан с ее главной идеей, согласно которой рост энтропии отождествляется с ростом «оглабающего» объема «грубой» фазовой жидкости. Для *конечного* времени перемешивания, чтобы констатировать необратимость, фазовые ячейки также приходится брать *конечных* размеров. Поскольку размеры ячеек связаны с точностью наблюдения, постольку в решении Гиббса подключается наблюдатель, но подключается он здесь противоестественным образом. А именно, с *увеличением* точности наблюдения система становится здесь все более обратимой, тогда как в действительности все происходит прямо наоборот — реальные системы с *уменьшением* точности наблюдения выглядят все более обратимыми. Скажем, при грубом наблюдении столкновения бильярдных шаров могут выглядеть упругими и, следовательно, обратимыми. Увеличив точность, мы заметим возникающие на них при ударах повреждения, что заставит нас считать столкновения необратимыми. Любой экспериментатор знает, однако, что если какой-то эффект наблюдается с уменьшением точности измерения и исчезает с ее увеличением, то он вносится прибором, являясь *артефактом*, или *иллюзией*. Такой иллюзией и оказывается необратимость в схеме перемешивания Гиббса. Это, конечно, неприемлемо, и мы солидарны с И. Пригожиным, который отвергает гиббсово решение проблемы необратимости ровно на том основании, что в нем необратимость оказывается

«иллюзией, вызванной несовершенством органов чувств наблюдателя» [Пригожин, 1985. С. 33].

Аналогичные возражения в адрес решения Гиббса выдвигают и другие авторы [Blatt, 1959; Haken, 1977; Coveney, 1988].

Впрочем, в гиббсовой схеме перемешивания фазовые ячейки не обязательно брать конечными. Сам Гиббс устремляет их размеры к нулю, *предварительно устремив к бесконечности время перемешивания*. В этом случае возражения, связанные с поставленной на попа операциональностью, отпадают [Зубарев, 1971. С. 24]. Однако на этом пути нас ожидает новая ловушка. Ведь устремив время перемешивания к бесконечности, мы лишаемся возможности описывать необратимую релаксацию к равновесному состоянию, отождествляя грубую фазовую плотность с фигурирующей в кинетических уравнениях. Эти уравнения описывают зависимость

фазовой плотности от времени, тогда как гиббсова трактовка необратимого перемешивания из всей этой зависимости оставляет лишь одну — конечную — точку, отвечающую $t = \infty$.

Хотя предложенное Гиббсом решение проблемы необратимости на основе схемы перемешивания несостоятельно, сама идея перемешивания фазовой жидкости с ростом в ходе необратимых процессов ее «огигающего» объема конструктивна. Как о том будет говориться в гл. 4, синергетика реализовала эту идею, существенно ее, правда, трансформировав: вместо образования сети малых лакун обычной (топологической) размерности здесь идет речь о приобретении фазовой жидкостью всюду разрывной структуры, характеризуемой особой (фрактальной) размерностью.

В развитии второй ветви эргодической теории роковую роль сыграло убеждение Гиббса в том, что *перемешивание всегда необратимо*. Представление об обязательной необратимости перемешивания фазовой жидкости подкрепляется им аналогией с перемешиванием красителя в несжимаемой жидкости; перемешивание может идти с диффузией или без нее —

«результат не зависит от наличия этого процесса» [Gibbs, 1902; Рус. пер. С. 459].

Это утверждение Гиббса заведомо ошибочно, поскольку совершенно определено известно, что движение жидкости необратимо именно при наличии диффузии или какого-либо другого процесса переноса, если же таковые отсутствуют, то движение жидкости обратимо⁴³). Обратимо, в частности, и происходящее в такой жидкости перемешивание. Это значит, что если в какой-то момент времени (мысленно) обратить скорости всех частиц, то она вернется в первоначальное неперемешанное состояние. Как о том будет подробно говориться в разд. 1.3.2, *перемешивание фазовой жидкости может быть как необратимым, так и обратимым*.

В эргодическую теорию понятие перемешивания ввели Эберхард Хопф [Hopf, 1940] и Николай Сергеевич Крылов [1950], начиная с работ которых эта теория стала изучать уже *перемешивающие потоки* с инвариантной мерой. Именно перемешивание, а не эргодичность, оказалось связанным со стохастичностью (динамическим хаосом) через *локальную неустойчивость* фазовых траекторий:

«... Свойство перемешивания у механических систем гораздо более важно для понимания статистической механики, нежели просто свойство эргодичности» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 387].

«Глубокий анализ, проведенный Крыловым [1950], показал, что в основе понимания природы появления статистических законов лежит не свойство эргодичности динамической системы, а свойство перемешивания и связанная с ним локальная неустойчивость» [Заславский, 1984. С. 38].

⁴³) Мы говорим здесь для простоты о системе, находящейся вблизи равновесия, когда необратимые процессы исчерпываются линейными процессами переноса.

Если фазовые траектории данной системы локально неустойчивы, то две траектории, бывшие в начальный момент соседними, из-за возмущения начальных условий с течением времени удаляются друг от друга и, если фазовый объем ограничен, перемешиваются, становясь независимыми. Соответствующее механическое движение и отождествляют со стохастическим. Фазовые траектории — подчеркнем это еще раз — мыслятся здесь одномерными непрерывными линиями, что для систем с динамическим хаосом в общем случае не соответствует действительности, о чем предварительно говорилось в разд. 1.2.3 и о чем подробнее будет говориться в следующих главах.

1.3.2. Связь перемешиваемости с эргодичностью, стохастичностью и необратимостью

Прежде чем приступить к изложению основных фактов истории обсуждаемой ветви эргодической теории, кратко обсудим соотношение лежащих в ее основании понятий.

Следуя Гиббсу, перемешивание фазовой жидкости в ходе перепутывания фазовых траекторий разных микросистем ансамбля мыслят в статистической физике равномерным, т. е. любая данная ее часть («капля») равномерно размешивается со временем по всему фазовому объему системы. Если в фазовой жидкости выделить, например, эволюционирующую в соответствии с уравнениями движения область M_1 и, кроме того, фиксированную во времени область M_2 , то эволюционирующая область в результате перемешивания пересечется со временем с фиксированной, причем мера области пересечения окажется пропорциональной мерам этих двух областей.

Математически это формулируется следующим образом [Балеску, 1978. Т. 2. С. 384; Корнфельд и др., 1980. С. 30]. Обозначим меру эволюционирующей области M_1 для момента времени t как $\mu(\hat{T}(t)M_1)$, где $\hat{T}(t)$ — определяющий данный поток оператор сдвига по времени. Поскольку поток сохраняет меру, то $\mu(\hat{T}(t)M_1) = \mu(M_1)$. Пересечение областей $\hat{T}M_1$ и M_2 обозначим как $\hat{T}(t)M_1 \cap M_2$. Данная динамическая система по определению является системой с перемешиванием, если справедливо равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\hat{T}(t)M_1 \cap M_2) = \mu(M_1)\mu(M_2). \quad (1.3.12)$$

Это определение эквивалентно следующему. Данная система называется системой с перемешиванием, если для произвольных динамических функций $A(q, p)$ и $B(q, p)$ имеет место равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} A(\hat{T}(t)q, \hat{T}(t)p) B(q, p) d\mu = \int_{\Gamma} A(q, p) d\mu \int_{\Gamma} B(q, p) d\mu, \quad (1.3.13)$$

где $d\mu = \rho(q, p) dq dp$ ⁴⁴⁾. Другими словами, в системе происходит перемешивание, если ансамблевое среднее произведения двух произвольных динамических функций равно при $t \rightarrow \infty$ произведению их ансамблевых же средних, т. е. выполняется условие, известное как *условие расщепления временных корреляций*.

Перемешиваемость отождествляется некоторыми авторами со *стохастичностью*, т. е. система с перемешиванием полагается стохастической (статистической), и наоборот⁴⁵⁾. Покажем, что такое отождествление не совсем корректно. Начнем с демонстрации того, что соотношение эргодичности (временные средние равны ансамблевым) и перемешиваемости аналогично показанному на рис. 1.2.1 соотношению квазиэргодичности и эргодичности.

В самом деле, из определения перемешиваемости выражением (1.3.12) следует, что система с перемешиванием метрически транзитивна, а следовательно (в силу теоремы Биркгофа), эргодична⁴⁶⁾. Действительно, пусть M — некоторое инвариантное подмножество фазового пространства:

$$\hat{T}(t)M = M. \quad (1.3.14)$$

Имеем, очевидно,

$$\hat{T}(t)M \cap M = M \cap M = M. \quad (1.3.15)$$

Считая поток перемешивающим, используем соотношение (1.3.12), полагая $M_1 = M_2 = M$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu(\hat{T}(t)M \cap M) = [\mu(M)]^2. \quad (1.3.16)$$

Сравнивая (1.3.15) с (1.3.16), получаем при $t \rightarrow \infty$ для перемешивающего потока равенство

$$\mu(M) = [\mu(M)]^2. \quad (1.3.17)$$

Поскольку мера любого множества удовлетворяет в эргодической теории неравенствам (1.2.16), то мера $\mu(M)$ равна либо 0, либо 1. В силу произвольности инвариантного подмножества M , это означает метрическую транзитивность потока, а, следовательно, как это вытекает из теоремы Биркгофа-фон Неймана, и его эргодичность.

Обратное, вообще говоря, не верно, эргодический поток может в общем случае быть неперемешивающим⁴⁷⁾. Соотношение перемешивающих, эргодических, метрически транзитивных и квазиэргодических систем показано на рис. 1.3.1.

⁴⁴⁾ [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 26; Корнфельд и др., 1980. С. 30; Заславский, 1984. С. 28; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 299].

⁴⁵⁾ [Заславский, Чириков, 1971. С. 23; Заславский, 1984. С. 42, 250].

⁴⁶⁾ [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 26–27; Балеску, 1978. Т. 2. С. 384–485; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 299].

⁴⁷⁾ [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 27–28; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 299].

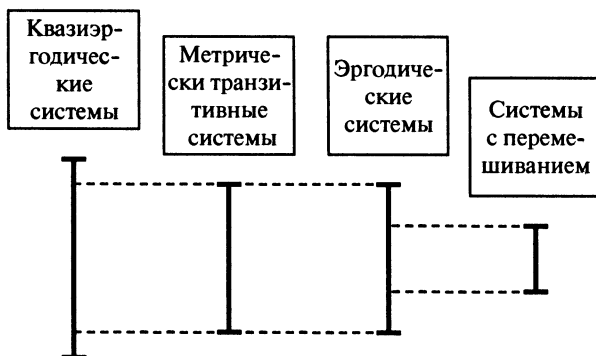


Рис. 1.3.1. Соотношение разных классов динамических систем (расширение рис. 1.2.1). Система с перемешиванием («капля» фазовой жидкости равномерно размещается по всему ее объему) эргодична (ансамблевые средние равны временным), однако эргодическая система может не быть системой с перемешиванием

Как видим, класс эргодических систем включает в себя класс систем с перемешиванием, будучи шире его. Между тем, как говорилось в конце разд. 1.2.3, не все стохастические системы эргодичны, а эргодическое движение может быть нестохастическим. Перемешиваемость и стохастичность, таким образом, имеют разные взаимоотношения с эргодичностью, что и делает *некорректным отождествление перемешиваемости со стохастичностью*. Между тем весь смысл перехода от первой ветви эргодической теории ко второй состоял, как мы видели, в переходе от понятия эргодичности к понятию перемешиваемости как более адекватному понятию стохастичности. Теперь же выясняется, что понятие перемешиваемости, как оно *вводится в эргодической теории*, ничем не лучше в этом плане понятия эргодичности.

Пренебрежем до разд. 2.5, подобно персонажам рассказываемой истории, коренным изменением топологии фазовой траектории в области стохастического движения. Тогда трудности с соотносением стохастичности и перемешивания могут быть представлены как результат неправомерного сужения понятия перемешиваемости при его определении выражениями (1.3.12)–(1.3.13). Фазовый объем статистической системы в общем случае разбивается на несколько (иногда много) несвязанных (с точностью до множеств меры нуль) стохастических областей (см. разд. 2.4.4), тогда как эргодичность, тождественная, в силу теоремы Биркгофа, метрической транзитивности, требует, чтобы этот объем представлял собой единое целое. Этот же изъян понятия эргодичности перенесен теперь на определение перемешиваемости: требуя, чтобы «капля» фазовой жидкости равномерно размещивалась со временем по *всему* фазовому объему, мы снова мыслим фазовый объем системы монолитным. Зачем, спрашивается? Если требовать выполнения соотношений (1.3.12)–(1.3.13) лишь для

конечных областей фазового объема, а не всего этого объема, то получим более широкое определение перемешивающих систем, из которого уже не будет автоматически следовать эргодичность. Причем по-прежнему из эргодичности не будет вытекать и перемешиваемость. Это позволяет отождествить (до разд. 2.5) скорректированную указанным образом перемешиваемость со стохастичностью.

Гиббс, как мы видели в разд. 1.3.1, ввел системы с перемешиванием для описания необратимого процесса релаксации, сохраняющего (из-за распространения Гиббсом уравнения Лиувилля на область необратимых процессов) неизменным объем фазовой жидкости при одновременном росте ее «огигающего» объема за счет образования в ней связанной сети микроскопических лакун, незаметных при огрубленном описании и проявляющихся — при точном. Отсюда и идет всеобщая убежденность в том, что перемешивание всегда необратимо:

«В физической литературе употребляется термин „релаксация“ для описания процессов, при которых система переходит в некое стационарное состояние независимо от того, в каком состоянии она находилась. Используя этот термин, можно сказать, что *в системах с перемешиванием происходит релаксация* (выделено мной. — С. Х.)» [Корнфельд и др., 1980. С. 30]⁴⁸⁾.

Эта точка зрения не может быть верной уже потому, что понятие перемешиваемости «занято» стохастичностью: поскольку перемешиваемость тождественна стохастичности, постольку она не может отвечать за необратимость. Обсуждаемая точка зрения ошибочна и по существу: *перемешиваемой может быть и обратимая, в частности равновесная, система*. Если в фазовой жидкости равновесной системы выделить некоторую малую часть («каплю») D , то она не распределится со временем равномерно по всей фазовой жидкости, но, подобно газу упругих шаров, первоначально находившихся в углу сосуда, будет «пульсировать», время от времени возвращаясь в объем D . Все зависит от того, как это происходит — с лакунами или без. В равновесии лакуны не возникают, «огигающий» фазовый объем системы остается равным точному, грубая энтропия постоянна, все происходит обратимо. В неравновесном случае образуются лакуны, вследствие чего «огигающий» фазовый объем необратимо растет с увеличением грубой энтропии.

Используя слово «лакуны», мы имеем в виду, как уже говорилось, не совсем то, что на протяжении первых трех четвертей XX в. подразумевалось физиками, начиная с Гиббса. Т. е. мы не хотим сказать, что в фазовой жидкости, имеющей размерность, равную размерности энергетической поверхности (фазового объема), которую она заполняет, образуются микроскопические пустоты той же размерности. Как показало развитие теории фракталов (см. гл. 4), в необратимом случае топология фазовой жидкости коренным образом изменяется, она заполняет бо́льший

⁴⁸⁾ См. также аналогичное высказывание Я. Г. Синая в разд. 1.3.5.

фазовый объем, разрываясь в каждой своей точке с уменьшением своей размерности и образованием «странных» фрактальных структур с вообще говоря дробными размерностями, представить себе которые в начале XX в. не могло самое большое воображение.

Точнее говоря, как будет разъяснено в разд. 5.3, лакуны возникают только в рамках одного из двух исключаящих друг друга описаний необратимых явлений. А именно, они появляются при использовании динамического (синергетического) подхода, предполагающего независимость степеней свободы и в необратимом случае, из-за чего фазовая жидкость остается несжимаемой, разрываясь — с увеличением «огигающего» объема — в каждой точке. Возможно и другое — кинетическое (непрерывное) — описание, в рамках которого мы уже не мыслим в необратимом случае степени свободы независимыми, что приводит к сжимаемости/растягиваемости фазовой жидкости, позволяющей ей увеличиваться в объеме, оставаясь непрерывной, т. е. без образования разрывов. Перемешивание, т. е. распределение со временем любой «капли» фазовой жидкости по всему ее объему в результате перепутывания фазовых траекторий разных микросистем ансамбля, происходит при любом из двух возможных описаний необратимых процессов, однако при синергетическом описании фазовая траектория рвется в каждой точке, размываясь и переставая быть одномерной.

Неустойчивость динамической системы и прежде всего локальная неустойчивость ее фазовых траекторий — это именно то свойство, благодаря которому ее движение приобретает стохастический характер, а в механическую теорию проникают вероятность и статистические законы. Отсюда вытекает, что и перемешиваемость тесно связана с локальной неустойчивостью:

«Локальная неустойчивость является первопричиной процесса перемешивания, а значит, и всех статистических свойств динамической системы» [Заславский, Чириков, 1971. С. 23].

На связь между стохастичностью и неустойчивостью механического движения первым обратил внимание Анри Пуанкаре в начале XX в., о чем подробнее будет говориться в разд. 2.2.1. Различают устойчивость/неустойчивость *динамическую*, когда система определенным образом реагирует на малые изменения в ее начальном состоянии, и *параметрическую*, когда речь идет о малых изменениях значений параметров, входящих в описывающую систему уравнения (см. также в разд. 2.2.4). Мы будем здесь обычно говорить о первой из них, конкретно — о *локальной устойчивости* фазовой траектории.

Фазовая траектория называется *локально устойчивой* (по Ляпунову) в точке (q, p) , если для всякого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, при котором δ -окрестность точки (q, p) с течением времени остается в ϵ -окрестности движущейся точки (q_t, p_t) [Синай, 1970. С. 142; Корн, Корн, 1974. С. 294]. Если все фазовые траектории данной динамической системы локально

устойчивы во всех точках ее фазового объема, то любые две траектории, являющиеся соседними в начальный момент времени, таковыми и остаются, несмотря на возмущения начальных состояний. Такое механическое движение отождествляют с *регулярным*.

Локально неустойчивой (по Ляпунову) в точке (q, p) называют фазовую траекторию, которая не является в этой точке локально устойчивой в вышеуказанном смысле. Если фазовые траектории данной системы локально неустойчивы, то две траектории системы, бывшие в начальный момент соседними, из-за возмущения начальных условий с течением времени удаляются друг от друга и становятся независимыми. Соответствующее механическое движение отождествляют со стохастическим.

В эргодической теории большую роль играет *экспоненциальная локальная неустойчивость*, когда расстояние $D(t)$ между двумя точками, находящимися на разных фазовых траекториях, увеличивается со временем по экспоненте,

$$D(t) = D(0) \exp \{at\}, \quad 0 < a < \infty. \quad (1.3.18)$$

Величина a называется *инкрементом неустойчивости* в данной точке фазового пространства системы.

Формально случай регулярного движения охватывается определением (1.3.18) с $a = 0$. Противоположный случай, когда $a = \infty$, Г. Шустер [1988. С. 116] характеризует термином *случайное движение*, тогда как значениям $0 < a < \infty$ он ставит в соответствие *детерминированный хаос*.

Определения, связанные с соотношением (1.3.18), недостаточны, не различая *обратимый* и *необратимый* динамический хаос. Проведем такое различие за разработчиков эргодической теории. Функция (1.3.18) при $a > 0$ несимметрична по времени, описывая *необратимую экспоненциальную неустойчивость*; необратим и генерируемый ею динамический хаос. *Обратимая экспоненциальная неустойчивость* описывается соотношениями

$$D(t) = \frac{1}{2} D(0) (\exp \{at\} + \exp \{-at\})$$

или

$$D(t) = \begin{cases} D(0) \exp \{at\} & \text{при } t > 0, \\ D(0) \exp \{-at\} & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (1.3.19)$$

не меняющими вида при обращении времени. Динамический хаос, отвечающий этим соотношениям, обратим.

Проводимое нами разведение обратимого и необратимого хаоса обнажает несостоятельность характерного для всей эргодической теории убеждения в тождественности *динамического хаоса* и *необратимости*. Всем известным примером системы с обратимым динамическим хаосом является равновесный газ. В математическом плане беда разработчиков эргодической теории, мне кажется, в том, что им не пришли в голову симметричные по времени соотношения (1.3.19). Произошло же это, я полагаю

[Хайтун, 1996], из-за продолжающей господствовать в физике парадигмы, в которой гамильтонова (симметричная по времени) механика полагается действующей и в области необратимых процессов, почему физики и не считают существенной дихотомию симметричные/несимметричные по времени уравнения.

За сложной физической теорией часто стоит иллюстрирующая ее основную идею простая «картинка». В эргодической теории такой «картинкой» служит газ упругих шаров, свойства траекторий которого в обычном трехмерном пространстве совпадают в общих чертах со свойствами фазовых траекторий газа в Γ -пространстве. Считается очевидным, что траектории шаров в таком газе экспоненциально разбегаются, что и обеспечивает его переход в равновесное состояние в ходе необратимой релаксации. Об ошибочности приводимых Н. С. Крыловым и Я. Г. Синаем математических доказательств *необратимого* экспоненциального разбегания упругих шаров будет говориться в разд. 1.3.3 и 1.3.5, а пока приведем общие соображения о несостоятельности этой «картинки».

Отрицать *локальную неустойчивость* траекторий упругих шаров не приходится, именно она и делает их движение стохастическим (с той поправкой, что фазовая траектория в области стохастического движения ветвится или как-то иначе изменяет свою структуру «в каждой точке», не являясь линией — см. разд. 1.1, 1.2.3, 2.2.4.2 и 2.4.4). Однако *необратимой* локальной неустойчивости траекторий в газе упругих шаров быть не может, потому что процессы рассеяния в таком газе обратимы⁴⁹). Если, например, этот газ первоначально находится в углу сосуда, то он вовсе не займет со временем, как принято считать, весь сосуд. Если же такое и произойдет, то на крайне непродолжительное время. Облако упругих шаров будет постоянно менять свою форму, занимая то весь сосуд, то какие-то его части, вновь и вновь возвращаясь в начальный угол. Любые два шара могут в таком газе не только разойтись, но и сойтись снова, среднее же по времени расстояние между ними определяется конфигурацией сосуда, являясь конечной величиной, которая не зависит при достаточно большой длительности движения от времени. Чтобы движение шаров было необратимым, необходимо, чтобы они не были упругими. И тогда, действительно, газ, первоначально находившийся в углу сосуда, необратимо релаксирует на весь сосуд с соответствующим разбеганием траекторий шаров.

1.3.3. Хопф, Крылов и другие: перемешивание и экспоненциальная локальная неустойчивость

Посмотрим теперь, как понятие эргодичности вытесняется в эргодической теории понятием перемешиваемости. После Гиббса (см. разд. 1.3.1)

⁴⁹) Упругие столкновения, сохраняющие механическую энергию и не дающие ей необратимо превращаться в другие формы энергии, в принципе не могут породить в системе необратимость [Хайтун, 1996. С. 88–89, 148–151, 227–228, 238–239].

это понятие появляется в работах некоторых авторов [Poincaré, 1906; Borel, 1925], однако первое время это происходит нечасто и безотносительно к стохастичности. Поскольку, как теперь известно, стохастичность связана с локальной неустойчивостью динамических систем, постольку особый интерес представляют работы, в которых в эргодическую теорию проникает это понятие. Существенно, что локальная неустойчивость, включающая в себя, как разъяснялось в разд. 1.3.2, обратимую и необратимую неустойчивость, возникает и продолжает жить в этой теории по преимуществу как *экспоненциальная локальная неустойчивость в варианте* (1.3.18), отвечающем только за *необратимую* неустойчивость. Поворотными были работы Дж. Хедлунга [Hedlung, 1934, 1940] и Э. Хопфа [Hopf, 1939, 1940], в которых показывалось, что движение динамической системы в *пространстве отрицательной кривизны* связано с экспоненциальной неустойчивостью в форме (1.3.18). Хедлунг установил, что движение материальной точки, определяемое геодезическими линиями⁵⁰⁾ на поверхности отрицательной кривизны, метрически транзитивно и, следовательно, эргодично, Хопф — что движение на такой поверхности является перемешивающим.

Странно, что экспоненциальная неустойчивость в форме (1.3.18), т. е. *необратимая* неустойчивость, возникает, как утверждают Хедлунг, Хопф и их последователи, уже в гамильтоновых системах с их симметричными по времени уравнениями движения. Посмотрим, как обосновывается этот вызывающий недоверие тезис.

«Поверхность отрицательной кривизны, — пишет Хопф, — отличается от других поверхностей прежде всего резкой нестабильностью своих геодезических [линий]. Нормальное расстояние D геодезической [линии] от бесконечно близкой к ней соседней геодезической [линии] удовлетворяет вдоль последней... уравнению

$$\frac{d^2 D}{ds^2} + KD = 0 \quad (1.3.20)$$

(s — длина геодезической линии, заменяющая в анализе Хопфа время. — С. Х.). Если кривизна K заключена... между твердыми отрицательными границами, то по крайней мере в одном направлении $D(s)$ растет как экспоненциальная функция. Это удаление геодезических [линий] друг от друга приводит к предположению, что геодезические [линии], если для этого имеются благоприятные условия... уходят, вообще говоря... в бесконечность, а если для этого нет благоприятных условий (например, на замкнутых поверхностях), — проводят, вообще говоря, в каждой части пространства... время, пропорциональное объему всей этой части, т. е. распределены... равномерно... Главный результат настоящей работы состоит в точной формулировке и доказательстве этого предположения» [Hopf, 1939; Рус. пер. С. 129–130].

Вывод об экспоненциальном (в форме (1.3.18)) разбегании геодезических линий на поверхности отрицательной кривизны базируется у Хопфа

⁵⁰⁾ О понятии геодезической линии см. сноску в разд. 1.2.2.2.

на уравнении (1.3.20) и на утверждении о том, что его решением является экспоненциальная функция

$$D(s) = D(0) \exp \{as\}, \quad 0 < a < \infty, \quad a^2 = -K, \quad (1.3.21)$$

совпадающая с функцией (1.3.18) с точностью до способа введения независимой переменной — в одном случае это время t , в другом — длина геодезической линии s .

Казалось бы, здесь все чисто, функция (1.3.21) с $a^2 = -K$ и на самом деле удовлетворяет уравнению (1.3.20). Обратим, однако, внимание на то, что уравнение (1.3.20) симметрично по s , а функция (1.3.21) несимметрична по нему. Однако несимметричная по переменной функция совершенно определенно не может быть решением симметричного по ней уравнения, его решением является симметричная по s функция

$$D(s) = \frac{1}{2} D(0) (\exp \{as\} + \exp \{-as\})$$

или

$$D(s) = \begin{cases} D(0) \exp \{as\} & \text{при } s > 0, \\ D(0) \exp \{-as\} & \text{при } s < 0 \end{cases} \quad (1.3.22)$$

(ср. с соотношением (1.3.19)).

Функция (1.3.22) существенно отличается от функции (1.3.21). Если расстояние между двумя геодезическими линиями описывается функцией (1.3.21), то со временем это расстояние только растет. Если, например, в начальный момент времени, когда $s = 0$, эти линии находятся на расстоянии $D(0)$ друг от друга, то со временем ($s > 0$) они все более отдаляются друг от друга, а раньше ($s < 0$) находились еще ближе друг к другу, как это показано на рис. 1.3.2а.

Если же расстояние между геодезическими линиями описывается функцией (1.3.22), то однонаправленного роста этого расстояния уже нет. Если в начальный момент ($s = 0$) две линии находятся на расстоянии $D(0)$ друг от друга, то в последующие моменты времени ($s > 0$) они отдаляются друг от друга, однако в моменты времени, предшествующие начальному ($s < 0$), расстояние между линиями было больше, причем тем больше, чем более отдаленные от начального моменты времени мы берем, как это показано на рис. 1.3.2б.

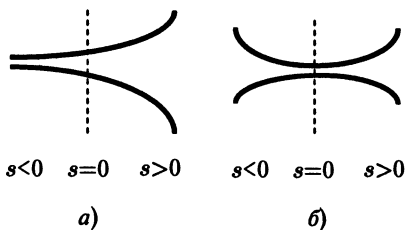


Рис. 1.3.2. Два случая экспоненциального разбегания траекторий: необратимая (а) и обратимая (б) локальная неустойчивость. В первом случае разбегание траекторий является причиной возникновения динамического хаоса, во втором — только его поддержания

Вспомним определение локальной неустойчивости траекторий по Ляпунову (см. разд. 1.3.2). О локальной неустойчивости мы говорим, когда две траектории, бывшие в начальный момент соседними, перестают со временем ими быть. Исходя из этого определения, можно утверждать, что и в случае, описываемом выражением (1.3.21), и в случае, описываемом выражением (1.3.22), налицо локальная неустойчивость. Поскольку же локальная неустойчивость траекторий динамической системы означает ее стохастичность, а, следовательно, и перемешиваемость, то оба эти случая отвечают системе с перемешиванием. Так что утверждение Хопфа о том, что движение на поверхности отрицательной кривизны является перемешивающим, справедливо, в этом — главное значение его работ.

Не прав Хопф, когда из своего уравнения (1.3.20) для поверхности отрицательной кривизны выводит тезис о якобы имеющей здесь место экспоненциальной локальной неустойчивости типа (1.3.18). Этого он не доказал. Ему удалось получить для движения на такой поверхности перемешивание, но не *необратимое* перемешивание. Иначе говоря, он доказал наличие в движении на поверхности с отрицательной кривизной *динамического хаоса*, но не *необратимого* динамического хаоса.

Большой вклад в переход эргодической теории от понятия эргодичности к понятию перемешиваемости внес рано ушедший из жизни Н. С. Крылов (1917–1947), труды которого его учитель акад. В. А. Фок издал посмертно в виде книги [Крылов, 1950], сообщившей начальный импульс советской эргодической школе А. Н. Колмогорова, Я. Г. Синая и др.

«Мы отказываемся, — пишет Крылов, — от принятия эргодической гипотезы: она одновременно и недостаточна и не необходима для статистики» [Там же. С. 169].

Взамен ее он и выдвигает перемешиваемость, утверждая, что

«все системы, подчиняющиеся общим законам физической статистики, являются системами размешивающего типа» [Там же. С. 25].

Систему с перемешиванием Крылов определяет вполне стандартно (см. соотношения (1.3.12)–(1.3.13) и связанный с ним текст):

«Системами размешивающего типа называются системы, обладающие следующим свойством: любая область M_0 фазового пространства системы изменяется в соответствии с уравнениями движения так, что, сохраняя свою меру (т. е. объем по теореме Лиувилля) и свою связность (в силу непрерывности уравнений движения), она деформируется таким образом, что мерой ее части, которая оказывается в любой заранее фиксированной области заданного нам фазового пространства, стремится при возрастании времени к тому, чтобы стать пропорциональной мере этой заранее фиксированной области... Иначе говоря, в размешивающих системах точки начальной области M_0 стремятся при возрастании времени к равномерному распределению на поверхности однозначных интегралов движения» [Там же. С. 25–26].

Как мы видели, из этого определения, требующего равномерного размешивания любой «капли» фазовой жидкости по *всему* объему фазовой жидкости, вытекает эргодичность системы с перемешиванием (см. рис. 1.3.1). Требование размешивания, говорит и Крылов,

«приводит к условиям, включающим в себя эргодичность» [Там же. С. 123].

Такое определение перемешивания, говорили мы, нельзя признать удачным, поскольку оно приводит к невозможности отождествления перемешиваемости со стохастичностью (см. текст, следующий за рис. 1.3.1), а это лишает перемешиваемость тех преимуществ по сравнению с эргодичностью, ради которых в эргодической теории и переходят от эргодичности к перемешиваемости. Скорректированное определение перемешиваемости, требующее размешивания «капли» фазовой жидкости лишь в пределах *конечных независимых (с точностью до множеств меры нуль) областей стохастического движения* динамической системы, снимает, как говорилось, эту трудность.

Отталкиваясь от упомянутых выше в настоящем разделе работ Хедлунга и Хопфа, Крылов указывает на локальную неустойчивость фазовых траекторий системы как источник перемешиваемости. Следом за Хопфом Крылов вводит и экспоненциальную локальную неустойчивость. Однако Крылов, как и Хопф, не разводит понятия обратимого и необратимого перемешивания, отождествляя размешивание с релаксацией, т. е. приходом в равновесное состояние: начальная область («капля») фазовой жидкости, пишет он, должна

«иметь достаточно большую величину и достаточно простую форму, чтобы процесс размешивания, т. е. процесс релаксации, имел монотонный характер (выделено мной. — С. Х.)» [Крылов, 1950. С. 40].

Соответственно не разводит Крылов и понятия обратимой и необратимой локальной неустойчивости, ограничиваясь анализом экспоненциальной неустойчивости типа (1.3.18) или (1.3.21).

Крылова трудно винить в том, что он не оговаривает возможность обратимого перемешивания, имеющего место, например, в равновесном газе. Такое неразведение обратимого перемешивания, обратимой и необратимой стохастичности, как мы видели, идет от Гиббса (см. разд. 1.3.1) и сохраняется в работах современных авторов, Крылов только передает эту эстафету:

«Как сейчас выяснено, стохастическое движение... обладает полным набором статистических свойств. Важнейшим из них, как это неоднократно подчеркивал Крылов, является необратимая релаксация любой крупноструктурной (т. е. усредненной по конечным ячейкам динамического пространства) функции распределения к равновесной» [Чириков, 1982. С. 185].

Беда лично Крылова в том, что он переводит традиционно расплывчатые представления о перемешиваемости в количественные расчеты для газа

упругих шаров, в которых (расчетах) эта расплывчатость выходит наружу в виде прямой ошибки.

Свою задачу Крылов видит прежде всего в том, чтобы с помощью понятия перемешивания описать процесс релаксации:

«Целью настоящей работы является исследование вопросов, относящихся к общим принципам релаксации статистических систем» [Крылов, 1950. С. 15].

Такая постановка проблемы обоснования статистической механики решительно отличается от прежней, когда стремились прежде всего обосновать равновесное распределение, от чего, впрочем, не отказывается и Крылов:

«...Размешивание необходимо для существования релаксации физических систем, т. е. для существования после времени релаксации независимого от начального состояния вероятностного закона распределения состояний, определяемого формулой флуктуаций (т. е. распределением Гиббса. — С. Х.)» [Там же. С. 28].

Описать процесс релаксации — это значит, конечно, получить для него конкретное кинетическое уравнение. Крылов не видит, однако, каким образом рассмотрение размешивания начальной «капли» фазовой жидкости по объему фазовой жидкости может вывести на такое уравнение. И потому выдвигает более скромную задачу — рассчитать *время релаксации*:

«В размешивающихся системах время релаксации определяется как время, в течение которого начальное состояние M_0 „размешивается“ в достаточной степени, т. е. в течение которого исчезнут следы начального состояния в том отношении, что новые состояния будут осуществляться с вероятностями $C \exp \{ \epsilon_i / (kT) \}$, где C не зависит от M_0 » [Там же].

Решение этой задачи предполагает аналитическое рассмотрение динамической системы, которое Крылов, следуя Хопфу, сводит к анализу геодезических линий в римановом пространстве определенной метрики, фиксируемой гамильтонианом. Эта задача не просто оказалась сложной в математическом отношении, но и привела к неразрешимым трудностям. Дело в том, что процедура огрубления, связанная с рассмотрением необратимого перемешивания, необходимо имеет *операциональную* природу. Время релаксации, пишет Крылов,

«зависит и от рассматриваемой физической величины, и от точности, с которой эта величина измеряется, различные возможные результаты измерения этой величины определяют разбиение фазового пространства на области $M_1 \dots$. Каждому определенному выбору рассматриваемой величины и типа ее измерения... соответствует свое разбиение фазового Γ -пространства на области $M_1 \dots$. Следовательно, каждому выбору типа измерения соответствует свое время релаксации... Время релаксации зависит, конечно, в общем случае и от выбора начального состояния M_0 » [Там же].

«...Анализ Крылова показал... что в уравнениях динамики системы не содержится какого-либо механизма огрубления... Процедура огрубления

до сих пор является дополнительным к динамическим уравнениям приемом, который привносится в описание процессов исследователем, а не природой. Вернее, мы не знаем точно, каким именно образом природа „огрубляет систему“. Идеи Крылова в преодолении этой трудности остались, к сожалению, незавершенными. Известно лишь... что разрешение проблемы Крылов искал на пути получения некоторого свойства своеобразной дополнительной между точностью в определении состояния системы и ее макроскопическими переменными (аналогично принципу дополнительной в квантовой механике). Чем максимальнее полнота опыта над макроскопической системой, тем сильнее изменяются ее... свойства в результате опыта» [Заславский, 1984. С. 38].

Фактически же Крылов приходит к выводу о невозможности обоснования статистической механики в пределах классических представлений, возлагая надежды на квантовые представления. Точка зрения, пишет он,

«целиком основанная на представлениях классической механики, не может быть удовлетворительной основой для понимания связи физической статистики и микромеханики» [Крылов, 1950. С. 53].

Попытка Крылова количественно описать процесс релаксации как процесс перемешивания потерпела, таким образом, фиаско. Я не согласен, в этой связи, с Н. В. Вдовиченко, которая заключает свой анализ работ Крылова следующим утверждением:

«Однако, на мой взгляд, главный его результат заключается в том, что ему удалось установить дополнительную микро- и макроописания и тем самым снять вопрос о выводе статистических уравнений из уравнения Лиувилля, хотя до сих пор многие уверены, что это сделать можно» [Вдовиченко, 1986. С. 47].

При рассмотрении необратимых процессов, к которым относится и релаксация системы к равновесному состоянию, ключевой оказывается дополнительность не микро- и макроописания, но описания *кинетического* и *динамического* (см. гл. 5).

Особый интерес вызывает предпринятое впервые Крыловым исследование возникновения перемешивания в конкретной физической системе, в качестве которой он выбирает газ упругих шаров. Крылов доказывает, что движение этих шаров экспоненциально неустойчиво по типу (1.3.18), что и обеспечивает, как он полагает, газу *необратимую* релаксацию в равновесное состояние. При этом он совершает ошибку, аналогичную ошибке Хопфа (см. соотношения (1.3.20)–(1.3.22) и связанный с ними текст).

Доказывая наличие в газе упругих шаров экспоненциальной локальной неустойчивости, Крылов рассматривает упругое (угол падения равен углу отражения) отражение геодезической линии луча от окружности. Иллюстрируя свои выкладки рис. 1.3.3а, Крылов пишет:

«Для рассеяния пучка лучей соответствующий двухмерный случай дает:

$$x_1 + \rho_1 \cos \varphi_1 = r_0 \cos \theta, \quad (1.3.23)$$

$$y_1 + \rho_1 \sin \varphi_1 = r_0 \sin \theta, \quad (1.3.24)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \pi = 2\theta. \quad (1.3.25)$$

Здесь x_1 и y_1 — декартовы координаты начального положения точки, ρ_1 — расстояние этой точки до точки отражения луча от окружности, θ — угол, определяющий положение последней точки относительно центра окружности, r_0 — радиус окружности, φ_1 и φ_2 — углы, определяющие начальное и конечное направление скорости.

Принимаем за независимые переменные x_1 , y_1 и угол φ_1 . Тогда из (1.3.25)

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = 2 \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} - 1. \quad (1.3.26)$$

Дифференцируя (1.3.23), получим

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_1 - \rho_1 \sin \varphi_1 = -r_0 \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1}. \quad (1.3.27)$$

Откуда

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} = \frac{-\frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} \cos \varphi_1 + \rho_1 \sin \varphi_1}{r_0 \sin \theta}. \quad (1.3.28)$$

Теперь определим $\partial \rho_1 / \partial \varphi_1$. Исключая θ из (1.3.23) и (1.3.24)

$$x_1^2 + y_1^2 + 2(x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1)\rho_1 + \rho_1^2 = r_0^2 \quad (1.3.29)$$

и дифференцируя по φ_1 , получим:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} (x_1 \cos \varphi_1 + y_1 \sin \varphi_1 + \rho_1) + \rho_1 (y_1 \cos \varphi_1 - x_1 \sin \varphi_1) = 0. \quad (1.3.30)$$

Исключая x_1 и y_1 при помощи (1.3.26) и (1.3.28):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \varphi_1} = -\rho_1 \operatorname{tg}(\theta - \varphi_1). \quad (1.3.31)$$

Подставляя (1.3.31) в (1.3.28), получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varphi_1} = \frac{\rho_1}{r_0} \frac{1}{\cos(\theta - \varphi_1)} \quad (1.3.32)$$

и, подставляя (1.3.32) в (1.3.26), получим окончательно:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\rho_1}{r_0} \frac{2}{\cos(\theta - \varphi_1)} - 1 \gg \quad (1.3.33)$$

[Крылов, 1950. С. 174–175].

Всегда можно взять $\rho_1 > r_0$, поэтому из (1.3.33) следует неравенство

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} > 1. \quad (1.3.34)$$

Из него Крылов и делает вывод о необратимом возрастании телесного угла, образуемого пучком лучей, при каждом отражении, а подключая

само соотношение (1.3.33), — об экспоненциальном разбегании фазовых траекторий газа упругих шаров. Действительно, согласно (1.3.33),

«телесный угол, образуемый пучком лучей, возрастает при каждом отражении в число раз порядка ρ_1/r_0 ($\partial\varphi_2/\partial\varphi_1$ стремится к ∞ при φ_1 , стремящемся к $\theta - (\pi/2)$), но при интегрировании по углам это, конечно, не дает расходимости, так как число столкновений с данным $\theta - \varphi_1$ пропорционально $\sin 2(\theta - \varphi_1)$).

Так как число столкновений пропорционально времени, то, принимая угол, образуемый двумя исходящими из одной точки конфигурационного пространства траекториями (геодезическими линиями соответствующего риманова пространства), за меру геодезического отклонения, получим, что это отклонение возрастает со временем по экспоненциальному закону. Действительно, за время свободного пробега τ произойдет в среднем столкновение n молекул, и телесный угол, характеризующий неопределенность направления $3n$ -мерного вектора скорости, возрастает в $(\lambda/r_0)^{2n}$ раз (где λ — средняя длина свободного пробега, а r_0 — радиус молекул), и геодезическое отклонение двух данных траекторий возрастает в λ/r_0 раз.

Таким образом, $\varphi_t = \varphi_0(\lambda/r_0)^{t/\tau}$, что... показывает, что ход возрастания нормального линейного геодезического отклонения будет определяться экспоненциальным законом» [Там же. С. 175–176].

Бросается в глаза, однако, что, выписывая исходные соотношения (1.3.23)–(1.3.25), Крылов произвольно выбирает точку (x_1, y_1) в качестве начальной. Мы вправе, однако, изменив направление распространения луча на обратное, выбрать в качестве начальной точку (x_2, y_2) . Соответствующая ситуация показана на рис. 1.3.3б.

В силу упругости столкновений, угол падения геодезического луча равен углу отражения, и потому этот рисунок практически совпадает с рис. 1.3.3а Крылова. С использованием рис. 1.3.3б вместо соотношений (1.3.23)–(1.3.25) получаем соотношения

$$x_2 + \rho_2 \cos \varphi_2 = r_0 \cos \theta, \quad (1.3.35)$$

$$y_2 + \rho_2 \sin \varphi_2 = r_0 \sin \theta, \quad (1.3.36)$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 - \pi = 2\theta. \quad (1.3.37)$$

Воспроизводя дальнейшие выкладки Крылова с заменой индекса 1 на индекс 2, вместо его выражения (1.3.33) приходим к выражению

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2} = \frac{\rho_2}{r_0} \frac{2}{\cos(\theta - \varphi_2)} - 1 \quad (1.3.38)$$

и неравенству

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2} > 1 \quad (1.3.39)$$

вместо неравенства (1.3.34).

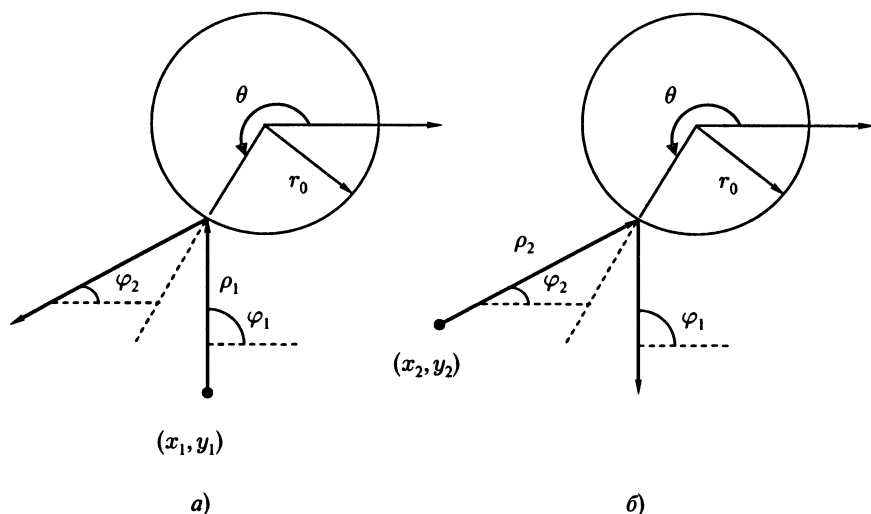


Рис. 1.3.3. Отражение геодезического луча от окружности, отвечающее в модели Крылова столкновению двух частиц рассматриваемого им газа упругих шаров. Приводя рис. *а*, Крылов приходит к выводу, что, двигаясь по данной геодезической линии, мы в результате последовательных столкновений шаров экспоненциально удаляемся от соседней геодезической линии (угол раствора пучка линий растет). Отсюда он делает вывод об экспоненциальной (необратимой) неустойчивости по типу (1.3.18), якобы имеющей место в рассматриваемом газе. Если, однако, направление луча изменить на обратное, то получится ситуация, изображенная на рис. *б*. Для газа упругих шаров угол падения луча равен углу отражения, и потому рис. *а* и *б* имеют одинаковую геометрию, что, если воспроизвести для ситуации *б* выкладки Крылова, приводит к выводу об экспоненциальном удалении от соседней линии и при движении по данной линии в обратном направлении. Поэтому здесь имеет место лишь экспоненциальная (обратимая) неустойчивость по типу (1.3.19). Оно и естественно, поскольку в газе упругих шаров необратимый процесс релаксации идти в принципе не может

Другими словами, вместо соотношений (1.3.33)–(1.3.34) следует писать соотношения

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\rho_1}{r_0} \frac{2}{\cos(\theta - \varphi_1)} - 1 & \text{при } t > 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} = \frac{\rho_2}{r_0} \frac{2}{\cos(\theta - \varphi_2)} - 1 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad (1.3.40)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} > 1 & \text{при } t > 0, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi_2} > 1 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (1.3.41)$$

Эти соотношения, как и в случае Хопфа, описывают *обратимую* экспоненциальную локальную неустойчивость.

Удивительно, что Крылов пришел к выводу о справедливости неравенства (1.3.34), не заметив, что обращение направления геодезического луча приводит к противоположному неравенству (1.3.39). Не менее удивительно и то, что аналогичную ошибку совершил Хопф. На мой взгляд, это объясняется прессом общепринятой по сей день концепции необратимости, согласно которой необратимые процессы описываются симметричными по времени уравнениями механики и могут протекать, в частности, в газе упругих шаров. Обезоруженным этой ошибочной, как я утверждаю [Хайтун, 1996], парадигмой, Хопфу с Крыловым и пришлось выводить необратимость «любой ценой». Читателю, несогласному с моей трактовкой событий, предлагается найти собственное объяснение этим странным ошибкам.

1.3.4. Колмогоров и другие: К-перемешивание

Книга Крылова послужила запалом, взрыв произошел в 1958 г., когда А. Н. Колмогоров [1958, 1959], используя для описания перемешивания фазовой плотности аппарат теории множеств, ввел понятие *динамической*, или *метрической энтропии*, иначе называемой *энтропией Колмогорова*, или *К-энтропией*. Однако метрическую энтропию было бы точнее называть «К-скоростью роста энтропии», потому что она, как мы увидим далее, пропорциональна скорости роста обычной физической энтропии. Системы, для которых К-энтропия постоянна и положительна, были названы *К-системами*. Основным их свойством оказалось так называемое *К-перемешивание*, связанное с *экспоненциальной локальной неустойчивостью*.

Вокруг понятия метрической энтропии и пошло развитие второй ветви эргодической теории⁵¹). Началось систематическое изучение средствами теории множеств К-систем, имеющих своими физическими аналогами, как было позже выяснено, околоравновесные необратимые системы, описываемые основным кинетическим уравнением⁵²).

В основе схемы К-перемешивания лежит все та же схема перемешивания Гиббса в *необратимом* ее варианте, когда система с перемешиванием мыслится релаксирующей к равновесному состоянию с образованием в фазовой жидкости связанной сети микроскопических лакун, за счет которых происходит рост «огигающего» объема фазовой жидкости. Рассматривая эту схему в разд. 1.3.1, мы говорили о ее принципиальном изъяне, который делает необратимый ее вариант некорректным и который связан с участием в процедуре огрубления наблюдателя, выбирающего тот

⁵¹) [Пинскер, 1959, 1960; Синай, 1959а, б, 1961, 1962, 1964; Рохлин, Синай, 1961; Рохлин, 1963, 1967; Аносов, 1967; Аносов, Синай, 1967; Arnold, Avez, 1968; Динабург, 1970, 1971; Benettin et al., 1976; Корнфельд и др., 1980].

⁵²) Об основном кинетическом уравнении см. далее в настоящем разделе сноску, связанную с соотношением (С. 1.9).

или иной размер фазовых ячеек, фиксирующих значение энтропии. Сама по себе операциональность в физике нормальна, беда в том, что в схеме Гиббса она вывернута наизнанку: реально с увеличением точности измерения система становится (для наблюдателя) все более необратимой, а в схеме перемешивания Гиббса, наоборот, с ростом точности измерения система становится все более обратимой. Это, конечно, противостоит естественности, и, устраняя с корнем операциональность, Гиббс устремляет время перемешивания к бесконечности, *прежде чем устремить размеры ячеек к нулю* (аналогичным образом, как мы увидим далее, поступает и школа Колмогорова). При этом, однако, исчезает возможность анализа собственно необратимых процессов, поскольку при $t \rightarrow \infty$ релаксирующая система становится равновесной. Этот изъян схемы перемешивания Гиббса, говорилось в разд. 1.3.1, неустраним и связан с распространением гамильтоновой механики, включая теорему Лиувилля, из которой вытекает несжимаемость фазовой жидкости, на необратимую область⁵³⁾.

Сохраняя иллюзии Гиббса относительно действия гамильтоновой механики в необратимой области, Колмогоров и др. пытаются избавиться от указанного (неустранимого!) изъяна схемы необратимого перемешивания Гиббса, полагая физическую энтропию пропорциональной времени. Ни к чему хорошему, как мы увидим далее, столь искусственное решение проблемы не приводит.

Формальное определение К-энтропии довольно сложно. Приводя его, мы опираемся на работы [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 42–47, 158; Корнфельд и др., 1980. С. 203–207; Шустер, 1988. С. 115–116].

Рассмотрим динамическую систему, фазовая жидкость которой характеризуется как гладкое многообразие⁵⁴⁾ M , $\mu(M) = 1$ (см. соотношение (1.2.15)), и движение которой описывается действующим на M оператором сдвига по времени $\hat{T}$. Введем разбиение $\xi = (C_1, C_2, \dots)$ пространства M на конечные непересекающиеся множества (фазовые ячейки) $C_1, C_2, \dots$, имеющие положительные меры $\mu(C_1), \mu(C_2), \dots$:

$$\cup_i C_i = M \pmod{0}, \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq r < \infty \quad (1.3.42)$$

($\pmod{0}$ означает, что разбиение производится с точностью до множеств меры нуль, знаком $\cap$, как всегда, обозначается пересечение множеств, знаком $\emptyset$ — пустое множество). Энтропией разбиения ξ назовем величину

$$H(\xi) = - \sum_i \mu(C_i) \ln \mu(C_i). \quad (1.3.43)$$

Эта величина с точностью до числового множителя совпадает с обычной физической энтропией.

⁵³⁾ Подробнее о необходимости отказа от гамильтоновой механики в области необратимых процессов см. в монографии [Хайтун 1996].

⁵⁴⁾ Термин *гладкое многообразие* разъяснялся в сноске в разд. 1.2.3.

Будем определять состояние системы через интервалы времени τ . Разбиение ξ при $t = 0$ обозначим $\xi^{(0)}$, $\xi^{(0)} = (C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, \dots)$. Через время τ множество $C_i^{(0)}$ преобразуется в множество $C_i^{(1)} = \hat{T}C_i^{(0)}$. Соответствующее разбиение обозначим $\xi^{(1)} = (C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, \dots)$. Через время 2τ множество $C_i^{(0)}$ переходит в множество $C_i^{(2)} = \hat{T}^2 C_i^{(0)}$, а разбиение $\xi^{(0)}$ — в разбиение $\xi^{(2)} = (C_1^{(2)}, C_2^{(2)}, \dots)$. И т. д. Через время $n\tau$ вместо разбиения $\xi^{(0)}$ будем иметь разбиение $\xi^{(n)} = (C_1^{(n)}, C_2^{(n)}, \dots)$, где $C_i^{(n)} = \hat{T}^n C_i^{(0)}$.

Через $\xi_0^n = \xi^{(0)} \vee \xi^{(1)} \vee \dots \vee \xi^{(n)}$ обозначим разбиение пространства M , содержащее все разбиения $\xi^{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$. Соответствующая этому разбиению энтропия $H(\xi_0^n)$ характеризует систему после того, как перемешивание продолжалось время $n\tau$. Устраняя произвол, связанный с длительностью перемешивания, разделим $H(\xi_0^n)$ на $n\tau$, устремив после того время перемешивания к бесконечности, получив *среднюю скорость роста энтропии за время перемешивания*:

$$h(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} H(\xi_0^n). \quad (1.3.44)$$

Теперь устраним произвол, связанный с выбором начального разбиения ξ_0^n . В схеме перемешивания Гиббса от этого произвола избавляются, устремляя размеры ячеек к нулю, причем эта операция производится *после* устремления времени перемешивания к бесконечности (см. разд. 1.3.1). Колмогоров и др., преследуя эту же цель, т. е. чтобы получить из величины $h(T, \xi)$ *метрический инвариант*, поступают аналогично, только вместо устремления размеров ячеек к нулю вычисляют верхнюю грань значений величины $h(T, \xi)$ на множестве всех возможных разбиений ξ с конечной энтропией:

$$h(T) = \sup_{\xi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\tau} H(\xi_0^n). \quad (1.3.45)$$

В пределе, уменьшая τ , получаем определение энтропии по Колмогорову для непрерывного изменения времени:

$$h(T) = \sup_{\xi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t} H(\xi_0^t). \quad (1.3.46)$$

Подчеркнем еще раз, что, характеризуя среднюю скорость перемешивания с момента $t = 0$ и по $t = \infty$, К-энтропия не является функцией времени. Будучи, таким образом, не зависящей от времени константой, К-энтропия является также, как отмечалось, метрическим инвариантом, т. е. не зависит от способа разбиения фазового пространства на ячейки. Для систем с разными операторами сдвига по времени $\hat{T}$ величина $h(T)$ принимает, вообще говоря, разные значения, оставаясь, естественно, *положительной* величиной [Колмогоров, 1959; Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 49].

Определяемая как средняя за процесс перемешивания скорость роста физической энтропии системы, К-энтропия характеризует не просто скорость перемешивания, но среднюю скорость *необратимого* перемешивания. Поскольку же понятие перемешиваемости эквивалентно понятию стохастичности (см. текст, связанный с рис. 1.3.1; уточнение см. в разд. 2.5), постольку К-энтропия характеризует среднюю скорость возникновения стохастичности, будучи

«равна по порядку величины обратному времени расщепления корреляций» [Заславский, Чириков, 1971. С. 20].

Стохастичность *возникает* при *необратимом* разбегании фазовых траекторий (см. соотношения (1.3.18)–(1.3.19) и связанный с ними текст; уточнение см. далее в настоящем разделе). Поэтому

«К-энтропия... равна... средней скорости разбегания траекторий» [Рабинович, 1978. С. 135].

Более определенно: К-системы — это системы с необратимой экспоненциальной локальной неустойчивостью:

«По существу уже после первых работ... стало ясно, что классические динамические системы бывают К-системами, если их движение крайне неустойчиво, т.е. если траектории близких точек разбегаются друг от друга с экспоненциальной скоростью» [Синай, 1966].

Еще конкретнее: К-энтропия представляет собой усредненный по фазовому объему системы коэффициент a , стоящий в показателе экспоненты (1.3.18), определяющей необратимую экспоненциальную локальную неустойчивость [Чириков, 1982. С. 183–184; Шустер, 1988. С. 116–117].

Впрочем, сами работающие в эргодической теории авторы не различают обратимой и необратимой экспоненциальной неустойчивости (см. текст, связанный с соотношением (1.3.19)), что, как мы увидим далее, приводит к обреченным на ошибки попыткам доказательства существования (необратимого!) К-перемешивания в такой заведомо обратимой системе, как газ упругих шаров.

К-энтропия — близкий «родственник» показателей Ляпунова $\sigma_i(q, p)$, которые также были введены для характеристики скорости экспоненциального разбегания фазовых траекторий и о которых подробнее говорится в разд. 2.2.4.1. Число этих показателей равно размерности фазового пространства $2s$, а характеризуют они скорости экспоненциального разбегания фазовых траекторий в точке (q, p) в $2s$ направлениях. Сумма этих показателей определяет локальную скорость связанного с разбеганием траекторий экспоненциального роста $2s$ -мерного фазового объема. К-энтропию связывает с показателями Ляпунова выражение

$$h = \int \left(\sum \sigma_i(q, p) \right) dq dp \quad (1.3.47)$$

[Лихтенберг, Либман, 1984. С. 301]. Интегрирование здесь идет по данной компактной фазовой области. Правда, авторы книги, из которой взято это выражение, добавляя, что в суммировании в нем участвуют только *положительные* показатели Ляпунова; это спорное утверждение и связанные с ним вопросы будут рассмотрены в разд. 2.2.4.1.

Связь К-энтропии и физической энтропии рассматривается в работах [Чириков, 1969; Заславский, 1970, 1984]. Поскольку в К-системе фазовые траектории в среднем разбегаются экспоненциально, поскольку экспоненциально растет и ее фазовый объем:

$$\Delta\Gamma = \Delta\Gamma_0 \exp \{ht\}, \quad (1.3.48)$$

причем параметр h в этой экспоненте — это К-энтропия. Так как физическая энтропия пропорциональна логарифму фазового объема,

$$S = k \ln \Delta\Gamma, \quad (1.3.49)$$

то и получается, в полном соответствии с говорившимся выше, что h равна, с точностью до коэффициента пропорциональности k , скорости роста энтропии:

$$\frac{dS}{dt} = kh. \quad (1.3.50)$$

Более строго связь физической и К-энтропии устанавливается в рамках схемы перемешивания следующим образом. Точный фазовый объем задается в этой схеме неизменяющимся во времени (фазовая жидкость считается несжимаемой),

$$\Delta\Gamma_0(t) = \Delta\Gamma_0, \quad (1.3.51)$$

Изменяется во времени здесь только грубый фазовый объем $\overline{\Delta\Gamma}$:

$$\overline{\Delta\Gamma}(t) = \Delta\Gamma_0 \exp \{ht\}. \quad (1.3.52)$$

Для грубой энтропии $\overline{S}$ это дает⁵⁵⁾:

$$\overline{S} = k \ln \frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\delta q \delta p} = k \ln \frac{\Delta\Gamma_0 \exp \{ht\}}{\delta q \delta p} = kht + k \ln \frac{\Delta\Gamma_0}{\delta q \delta p}. \quad (1.3.53)$$

⁵⁵⁾ Ср. с определением точной энтропии

$$S = k \ln \frac{\Delta\Gamma}{\delta q \delta p}, \quad (C.1.7)$$

где $\delta q \delta p$ — фазовые ячейки (ошибки измерения, классовые интервалы) и $\Delta\Gamma = \Delta q \Delta p$ — фазовый объем системы, определяемый выражением

$$S = -k \ln \rho(q, p) = k \ln \Delta q \Delta p. \quad (C.1.8)$$

К определению (C.1.7) от обычного определения (1.1.8) переходят, чтобы устранить изъясн последнего, состоящий в том, что в нем под знаком логарифма недопустимым образом стоит *размерная* величина. В определении (C.1.7) энтропия пропорциональна логарифму числа ошибок измерения, содержащихся в фазовом объеме системы $\Delta q \Delta p$.

Разделив $\bar{\bar{S}}$ на t (и k), устремляем сначала время t к бесконечности, а затем размеры фазовых ячеек $\delta q \delta p$ к нулю⁵⁶⁾:

$$\lim_{\delta q \delta p \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \frac{\bar{\bar{S}}}{k} = h + \lim_{\delta q \delta p \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta \Gamma_0}{\delta q \delta p} = h. \quad (1.3.54)$$

Эта величина, равная, с точностью до коэффициента k , скорости роста физической энтропии, как видим, действительно равна К-энтропии⁵⁷⁾.

Система с растущей физической энтропией по определению необратима. Таким образом, как и говорилось, К-система, для которой скорость роста физической энтропии отлична от нуля, является необратимой системой. При $h = 0$ система по определению не является К-системой, скорость роста ее физической энтропии равна нулю.

Будучи необратимой, К-система с ее постоянной во времени скоростью роста физической энтропии не может быть отождествлена с традиционно рассматриваемой в неравновесной статистической физике необратимой системой, релаксация которой заканчивается равновесным состоянием. Это вызывает известные трудности в осмыслении понятия К-системы. Г. М. Заславский предлагает следующий путь их преодоления:

«Как энтропия достигает максимума? Ответ на этот вопрос позволяет выявить еще одну особенность определения К-энтропии. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при определении $S(t) = ht$ ($t \rightarrow \infty$) со сколь угодно большой точностью, энтропия S максимума не достигает. Положение меняется, если зафиксировать конечный порядок огрубления ε_0 . Тогда из (1.3.52) можно найти время t_0 , в течение которого область $\Delta \Gamma_0 = \varepsilon_0$ расширяется до значения $\bar{\bar{\Delta \Gamma}} = 1$:

$$t_0 = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{\varepsilon_0}. \quad (1.3.55)$$

За время (1.3.55) фазовая капля ε_0 равномерно растекается по всему фазовому объему, и дальнейший рост энтропии прекращается» [Заславский, 1984. С. 35–36].

Действительно, подстановка в выражение (1.3.52) значений $\bar{\bar{\Delta \Gamma}}_0(t) = 1$, $\Delta \Gamma_0 = \varepsilon_0$ и $t = t_0$ дает выражение (1.3.55). Все это рассуждение Заславского, однако, вызывает возражения. На каком основании начальный фазовый объем системы $\Delta \Gamma_0$ отождествляется здесь с фазовой ячейкой

⁵⁶⁾ Слагаемое

$$\lim_{\delta q \delta p \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta \Gamma_0}{\delta q \delta p}$$

равно нулю вследствие выбранной здесь, в духе Гиббса (см. разд. 1.3.1), последовательности взятия пределов.

⁵⁷⁾ Г. М. Заславский, из книги которого заимствован этот вывод [Заславский, 1984. С. 33–34], отталкивается от выражения для физической энтропии (1.3.49), почему ему приходится принимать $\Delta \Gamma_0 = \delta q \delta p$ (у Заславского вместо $\delta q \delta p$ стоит «точность огрубления» ε), что, на мой взгляд, лишено физического смысла.

(ошибкой измерения!) $\varepsilon_0 = \delta q_0 \delta p_0$?! Почему конечный (при $t \rightarrow \infty$) «огнивающий» фазовый объем $\overline{\Delta\Gamma}$ полагается равным единице?! Если исходить, например, из традиционного определения энтропии выражением (1.3.49), то ее отличие от нуля достигается именно за счет отличия $\Delta\Gamma$ от единицы. И с каких это пор, вообще, математический объект (К-система) приобретает физический смысл только *при конечной точности измерения*?! Такая жертва, на мой взгляд, чересчур велика, да она здесь и не нужна, потому что физический прототип К-системы уже найден, причем вне операциональных представлений.

Речь идет о теореме Мисры—Пригожина [Misra, Prigogine, 1980], согласно которой *класс К-систем совпадает с классом необратимых марковских систем, описываемых основным кинетическим уравнением*⁵⁸⁾. Будучи линейным, это уравнение действует вблизи равновесия, когда протекают необратимые процессы переноса. Так что, как и говорилось, К-системы могут быть отождествлены только с околоравновесными необратимыми системами, в общем же случае необратимая система не обязана быть К-системой. Имея, к тому же, постоянную скорость роста физической энтропии, околоравновесная система, очевидно, может поддерживать этот рост только за счет среды. Понятно, что столь экзотическому математическому объекту трудно подыскать прототип в физической реальности.

К-перемешивание, как мы видели, отвечает характерному для околоравновесных же состояний (необратимому) экспоненциальному разбеганию фазовых траекторий. В общем случае

«закон расщепления корреляций не обязательно должен быть экспоненциальным» [Заславский, 1984. С. 41].

Поэтому заведомо ошибочна, на мой взгляд, теорема Алексеева—Брудно [Alekseev, Yakobson, 1981], согласно которой

«необходимым и достаточным условием для такого (динамического. — С. Х.) хаоса является положительная (ненулевая) энтропия Колмогорова—Синая (КС) h , т. е. экспоненциальная локальная неустойчивость движения» [Chirikov, Shepelyansky, 1986. С. 3].

⁵⁸⁾ Основным кинетическим уравнением [master equation] называют действующее в околоравновесной области кинетическое уравнение для функции распределения $\rho(q, p)$ в Γ -пространстве (кинетическое уравнение Больцмана — это кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения в μ -пространстве, т. е. фазовом пространстве одной молекулы). Первоначально оно было получено для квантовой системы [Pauli, 1928] в виде

$$\frac{d\rho_n}{dt} = \sum_m (W_{mn}\rho_m - W_{nm}\rho_n), \quad (\text{C.1.9})$$

где $\rho_n = \rho_{nn}$ — диагональный элемент матрицы плотности. Классическую версию основного кинетического уравнения можно найти в работах [Пригожин, 1964; Честер, 1966]. См. также [Хайтун, 1996. С. 47–48, 123–126]. Основное кинетическое уравнение, распространенное на системы, сколь угодно далекие от равновесия, называют *обобщенным основным кинетическим уравнением* [generalized master equation] [Там же. С. 126–131].

Для *поддержания* динамического хаоса вообще не требуется необратимой неустойчивости, экспоненциальной или какой угодно еще. Для *возникновения* же динамического хаоса *экспоненциальная* локальная неустойчивость не обязательна, с этой задачей справится необратимая локальная неустойчивость и любого другого вида.

Не прав, на мой взгляд, в этой связи, и Г. Шустер, когда утверждает, что К-энтропия — это

«действительно пригодная мера хаоса: она равна нулю для регулярного движения, бесконечна для случайных системы, положительна и постоянна для систем с детерминированным хаосом» [Шустер, 1988. С. 116].

Во-первых, К-системами не являются стохастические обратимые системы с экспоненциальной локальной неустойчивостью, описываемые выражением (1.3.19). Тем более не являются К-системами обратимые системы с какой-то иной формой локальной неустойчивости. Во-вторых, не может быть охарактеризован с помощью К-энтропии необратимый динамический хаос в системах, находящихся далеко от равновесия, когда необратимые процессы не сводятся к линейным процессам переноса и когда соответственно локальная неустойчивость не является экспоненциальной. В-третьих, не является К-системой и околоравновесная статистическая изолированная система, релаксирующая к равновесию с уменьшающейся во времени скоростью роста физической энтропии.

Относительно общего соотношения эргодических, перемешивающих и К-перемешивающих систем в литературе, на мой взгляд, существует определенная путаница. Так, тот же И. Пригожин, который в том же 1980 г., в котором он совместно с Б. Мисрой вполне корректно отождествил К-системы с околоравновесными необратимыми системами, описываемыми основным кинетическим уравнением, в своей индивидуальной книге пишет:

«Существуют потоки, обладающие еще более сильными свойствами, чем перемешивание. Такие потоки изучались в работах А. Н. Колмогорова и Я. Г. Сина... Особый интерес представляют К-потоки, свойства которых особенно близки к свойствам стохастических систем. При переходе от эргодических потоков к потокам с перемешиванием и, далее, к К-потокам движение в фазовом пространстве становится все более непредсказуемым. Мы все далее и далее отходим от идеи детерминизма, долго считавшегося характерной чертой классической динамики» [Пригожин, 1985. С. 54].

Т. е. здесь он высказывает мысль о том, что будто бы отличие систем с К-перемешиванием от систем с обыкновенным перемешиванием состоит в большей стохастичности первых по сравнению со вторыми.

В принципе, конечно, верно, что система с К-перемешиванием является и системой с перемешиванием. Но только К-система совершенно определено не более стохастична, чем система с перемешиванием. Их различие, как уже указывалось, в другом — в том, что перемешивание может иметь место как в обратимой, так и в необратимой системе, тогда

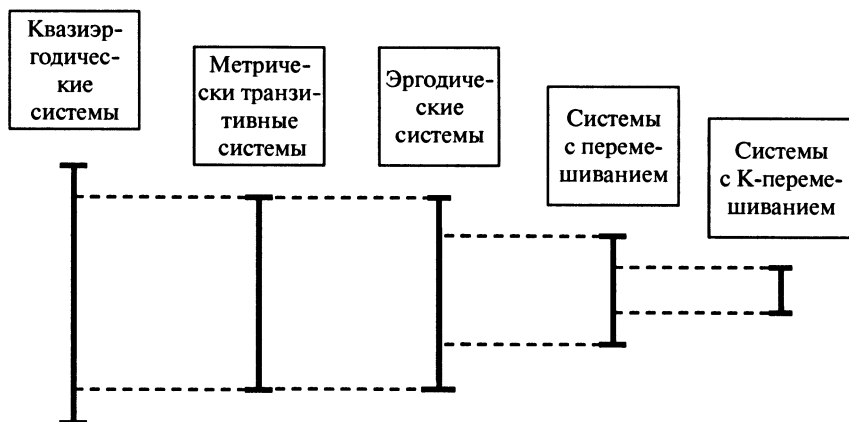


Рис. 1.3.4. Соотношение разных классов динамических систем (расширение рис. 1.3.1). К-перемешивание является перемешиванием, однако перемешивание может не быть К-перемешиванием

как К-перемешивание происходит в необратимой околоравновесной системе, причем не во всякой, а только в системе с постоянной скоростью роста физической энтропии.

Соотношение К-перемешивающих, перемешивающих, эргодических, метрически транзитивных и квазиэргодических систем показано на рис. 1.3.4.

Некоторые авторы⁵⁹⁾ используют для потоков разного вида классификацию, опирающуюся на уравнение Лиувилля (1.1.9) и аппарат собственных чисел λ_k оператора Лиувилля $\hat{L}$ (см. соотношение (1.1.11)). Эргодическая система трактуется при этом как система, для которой нуль является простым (невырожденным) собственным значением оператора $\hat{L}$ (т. е. отвечающее ему решение $\rho = \rho(H)$ единственно), причем, в общем случае $\hat{L}$ может иметь и другие дискретные и непрерывные собственные значения. В случае эргодической системы без перемешивания спектр λ_k строго дискретен. Система с перемешиванием является эргодической (см. рис. 1.3.4), однако для нее спектр ненулевых значений λ_k может быть уже только непрерывным, причем на степень вырожденности решений уравнения Лиувилля (т. е. на число решений, отвечающих данному λ_k) ограничения не накладываются. К-система является перемешивающей, однако для нее на степень вырожденности значений λ_k накладываются некоторые ограничения. По Пригожину,

«К-потоки обладают тем свойством, что... степень вырождения решений... постоянна» [Пригожин, 1985. С. 55],

⁵⁹⁾ [Заславский, 1984. С. 28–29; Пригожин, 1985. С. 54–55; Шустер, 1988. С. 176].

по Шустеру —

«Спектр оператора $\widehat{L}$ бесконечнократный» [Шустер, 1988. С. 176].

Заметим, однако, что уравнение Лиувилля, на которое опирается обсуждаемая классификация, симметрично по времени, что делает его применимым, как мы утверждаем [Хайтун, 1996], только для обратимых систем. Между тем, как разъяснялось, К-системы существенно необратимы, система с перемешиванием может быть как необратимой, так и обратимой, а эргодическая — только обратимой (см. текст между соотношениями (1.1.2) и (1.1.3)). Так что изложенные соображения, основанные на уравнении Лиувилля, применимы к эргодическим и перемешивающим системам, если в случае последних ограничиться обратимым случаем, и не применимы к К-системам. Однако и к эргодическим, и перемешивающим системам эти соображения приложимы лишь с оговоркой: система эргодична в том же смысле, в каком она перемешивается (см. текст, связанный с ним рис. 1.3.1). Если перемешивание происходит порознь в конечных независимых (с точностью до множеств меры нуль) областях фазового объема системы, то и эргодичность осуществляется в этих частях порознь, без того чтобы одна фазовая траектория заполняла весь фазовый объем.

1.3.5. Теорема Синая

Я. Г. Синай [1963, 1970] опубликовал доказательство теоремы, согласно которой система двух или более упругих шаров представляет собой систему с К-перемешиванием, а, следовательно, и систему с перемешиванием. Важность этой теоремы состоит в обнаружении того факта, что перемешивающей, т. е. стохастической, может оказаться система уже с очень небольшим числом степеней свободы. Аналогичный вывод содержался в тогда же опубликованных работах [Lorenz, 1963; Hénon, Heiles, 1964], в которых динамический хаос исследовался средствами вычислительного эксперимента (см. разд. 2.4.3 и 3.2.2). Все эти работы имели эффект разорвавшейся бомбы, поскольку разрушали царившие до того в физике представления, согласно которым статистические законы действуют только в случае большого числа степеней свободы. Теперь выяснилось, что стохастическими могут быть и очень простые механические системы и что, следовательно, стохастичность связана не с большим числом степеней свободы, но имеет иную природу.

Положительно оценивая теорему Синая в части, касающейся *перемешиваемости* газа упругих шаров, мы вынуждены отвергнуть ее в части, касающейся *К-перемешиваемости*, т. е. *необратимой* экспоненциальной локальной неустойчивости этой системы, поскольку упругие столкновения, как уже не раз говорилось, в принципе не могут породить в системе необратимость. Ошибка Синая аналогична разобранным в разд. 1.3.3 ошибкам Хопфа и Крылова: подобно им Синай не разводит обратимую и необратимую неустойчивость движения, обратимое и необратимое перемешивание:

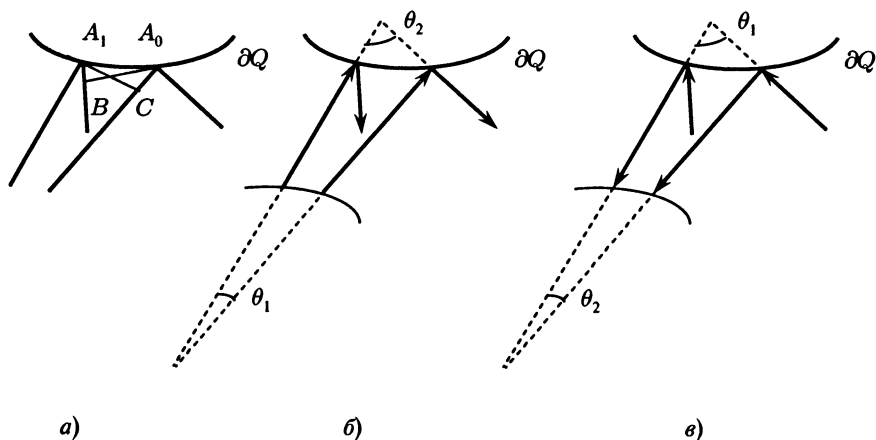


Рис. 1.3.5. Отражение пучка лучей от выпуклой поверхности. Рис. а Синай [1970] иллюстрирует его тезис о возникновении в бильярде со всюду выпуклым краем ∂Q необратимой экспоненциальной локальной неустойчивости: угол раствора пучка лучей в результате упругого (угол падения равен углу отражения) отражения от края бильярда, по Синаю, всегда растет. Синай, однако, не учитывает возможности обращения луча, предусмотренной скорректированными нами рис. б (прямое направление распространения лучей) и рис. в (обратное направление лучей). Рассеивающая ($\theta_1 < \theta_2$) роль выпуклого бильярда заменяется при обращении движения на собирающую ($\theta_1 > \theta_2$). Это делает некорректными используемое Синаем для бильярда с выпуклым краем наименование *рассеивающего* и его теорему в части, касающейся К-перемешиваемости газа упругих шаров: в таком газе имеет место *обратимое* перемешивание

«...В уже довольно простых консервативных динамических системах бывает так, что ячейки, имевшие первоначально правильную форму, с течением времени все более искривляются, приобретают весьма запутанный вид и очень сложным образом располагаются в фазовом пространстве. Это явление может рассматриваться как свойство необратимости динамических систем классической механики: области правильной формы с течением времени превращаются в области чрезвычайно сложной формы. Идея о такой необратимости была очень четко выражена Н. С. Крыловым... *необратимость и статистические свойства связаны с неустойчивостью движения* (выделено мной. — С. Х.)» [Синай, 1970. С. 142].

Как видим, Синай действительно не проводит различия между обратимым и необратимым перемешиванием. Соответственно и его доказательство того, что в газе упругих шаров имеет место *перемешивание*, оборачивается доказательством того, что в таком газе происходит *К-перемешивание*.

При описании газа упругих шаров Синай использует образ бильярда, рассматривая движение материальной точки в пространстве, ограниченном сферическими поверхностями неподвижных шаров, выпуклыми

по отношению к этой точке. Ключевой оказывается заимствованная Синаем у Крылова идея, согласно которой упругое (угол падения равен углу отражения) отражение пучка лучей от *выпуклой* поверхности (края бильярда) носит непременно *рассеивающий* характер, т. е. увеличивает угол раствора пучка лучей (см. рис. 1.3.5 а).

Вспомним, однако, о геометрической оптике, изучающей, в частности, упругое отражение лучей от поверхностей (зеркал) разной формы. Обратившись к этому разделу физики, убеждаемся, что выпуклые и вогнутые зеркала являются одновременно и рассеивающими, и собирающими, играя ту или другую роль в зависимости от местоположения источника лучей относительно зеркал. Если отражающая поверхность является по отношению к данному пучку лучей *рассеивающей* (рис. 1.3.5 б), то, обратив лучи, получим пучок, по отношению к которому та же поверхность является уже *собирающей* (рис. 1.3.5 в). И наоборот. Смена разбегания траекторий в результате обращения движения на их сближение и приводит к тому, что в газе упругих шаров, вопреки Синаю, имеет место только *обратимая* экспоненциальная локальная неустойчивость (см. соотношения (1.3.19) и связанный с ними текст). Игнорируя собирающую роль бильярда с выпуклым краем, Синай, не замечая того, отбрасывает в своих соотношениях ветвь, отвечающую обращенному движению.

1.4. Резюме

Эргодическая теория возникла как рефлексия на возникающее в динамических системах стохастическое движение. Природу этого явления и предстояло постичь. Как это часто бывает в науке, рефлексия поначалу оказалась размытой (неточной) — стохастичность системы стали объяснять ее *эргодичностью*, т. е. равенством ансамблевых и временных средних. Однако поиски доказательства эргодической гипотезы завели в тупик. Во-первых, постепенно утвердилась идущая от Гиббса познавательная модель, воспринимающая понятие ансамбля как первичное и не нуждающееся в обосновании средствами достатистической механики, описывающей регулярное движение. Во-вторых, эргодическая гипотеза оказалась попросту несправедливой, поскольку многие статистические системы являются неэргодическими, а некоторые эргодические — нестатистическими.

Дальнейшее осмысление феномена стохастичности вывело эргодическую теорию на идущее от Гиббса же понятие *перемешивания фазовой жидкости*, которое и на самом деле оказалось более адекватным этому феномену. Однако на этом пути теорию ожидали неразрешимые трудности, связанные с внутренней противоречивостью схемы *необратимого* перемешивания Гиббса, связанной с неоправданным распространением симметричной по времени гамильтоновой механики, включая теорему Лиувилля, из которой вытекает несжимаемость фазовой жидкости, на необратимую область. Проявляется эта противоречивость в том, что в схеме

перемешивания Гиббса система становится все более обратимой с уменьшением фазовых ячеек, т. е. с ростом точности наблюдения, тогда как реально всегда с увеличением точности наблюдения (измерения) система становится (для наблюдателя) все более необратимой. Стремясь избавиться от этого изъяна своей схемы, Гиббс устремляет время перемешивания к бесконечности, *прежде чем устремить размеры ячеек к нулю* (аналогичным образом поступает и школа Колмогорова). При этом, однако, исчезает возможность анализа собственно необратимых процессов, поскольку, переходя со временем из одного состояния в другое, необратимые системы в принципе не позволяют — при описании текущего состояния — мыслить время перемешивания сколько-нибудь большим, не говоря уже об его устремлении к бесконечности. Релаксирующая система, например, при $t \rightarrow \infty$ становится равновесной.

Сохраняя иллюзии Гиббса относительно действия гамильтоновой механики в необратимой области, Колмогоров и др. пытаются избавиться от указанного изъяна его схемы необратимого перемешивания, полагая физическую энтропию пропорциональной времени. Ничего хорошего из этого не получается — класс вводимых ими систем с К-перемешиванием совпадает с классом околоравновесных статистических систем, описываемых основным кинетическим уравнением и имеющих постоянную скорость роста физической энтропии за счет взаимодействия со средой. Столь экзотическому математическому объекту трудно отыскать реальный прототип. Ни обычные для традиционной физики релаксирующие системы с уменьшающейся во времени скоростью роста энтропии, ни какие-либо иные необратимые системы с изменяющейся во времени скоростью роста энтропии не являются К-системами. Кроме того, питаемое тем же внутренним противоречием схемы необратимого перемешивания Гиббса неразведение обратимого и необратимого перемешивания, обратимой и необратимой локальной неустойчивости фазовых траекторий приводит Хопфа, Крылова и Сина к прямым ошибкам, когда они, доказывая существование *необратимого* динамического хаоса в *обратимых* системах, отбрасывают ветвь решения исходного симметричного по времени уравнения, отвечающую обращенному движению

Все эти изъяны эргодической теории объясняются тем, что она оказалась далека от понимания природы необратимого динамического хаоса, неявно полагая фазовую жидкость динамической системы в необратимой области, с одной стороны, несжимаемой (как того требует гамильтонова теорема Лиувилля), а, с другой стороны, — непрерывной (характеризуя ее как гладкое многообразие). Развитие теории динамического хаоса и синергетики показало несостоятельность этих неявных предположений. Оказалось, что фазовая жидкость одновременно непрерывна и несжимаема только в обратимой области, в области же необратимых процессов статистическое описание распадается на два исключających и дополняющих друг друга подхода, в рамках которых фазовая жидкость либо

непрерывна, будучи при этом сжимаемой/растягиваемой, либо несжимаема, но тогда она дискретна в каждой точке (см. гл. 4–5).

Далека оказалась эргодическая теория и от понимания природы обратимого и необратимого динамического хаоса, неявно полагая фазовую траекторию непрерывной одномерной «более или менее гладкой» линией. Как мы увидим в следующих главах, в областях стохастического движения и в обратимом, и в необратимом случае фазовую траекторию нельзя считать *линией*, а в необратимом случае (в рамках синергетического подхода) ее нельзя считать к тому же *непрерывной и одномерной*. Это представляется несущественным для *локальной неустойчивости* фазовой траектории, при определении которой не задействованы какие-либо предположения относительно топологии фазовой траектории (см. разд. 1.3.2), однако в большой мере лишает смысла определение *экспоненциальной* локальной неустойчивости как происходящей с плавным нарастанием расстояния между двумя траекториями по закону $D(t) = D(0) \exp \{at\}$.

Оказалось, кроме того, что уже в обратимом случае фазовый объем динамической системы распадается на несколько (иногда много) несвязанных друг с другом (с точностью до множеств нулевой меры) стохастических областей.

Незнание всех этих фактов, добываемых, начиная с 60-х гг. XX в., средствами вычислительного эксперимента, самым негативным образом сказалось на содержании сложившейся до их открытия эргодической теории, но в том нет ничьей персональной вины — наука так и развивается, вся она соткана из ошибок.

Глава 2

Теория динамического хаоса *

Теория, рассматриваемая в этой главе, занимается выяснением природы стохастического движения в механических системах. Т. е. в ней решается та же задача, что и в эргодической теории, решение которой входит в компетенцию еще одной дисциплины — синергетики. Границы между этими тремя дисциплинами пока проводятся в литературе недостаточно четко.

2.1. Уточнение предмета

Наиболее интересно возникновение динамического хаоса в системах, уравнения движения которых не содержат случайных функций и параметров. Когда система описывается уравнением, содержащим случайную функцию, примером чего служит уравнение Ланжевена для броуновского движения¹⁾, то движение такой системы стохастично, так сказать, по определению, однако это описание носит феноменологический характер. Столь же феноменологично и предлагаемое Максом Борном [Born, 1958] описание статистической системы путем постулирования распределения Гаусса для распределения значений параметров в начальном состоянии. В эргодической теории, теории динамического хаоса и синергетике рассматриваются обычные, вполне детерминированные по форме уравнения движения, содержащие обычные, неслучайные функции и параметры, решение которых (уравнений), однако, оказывается стохастическим.

Если эргодическая теория изучает эту проблему средствами *теории множеств*, анализируя преобразование со временем фазовой траектории и произвольного элемента фазовой жидкости системы, т. е. фазовые потоки, в результате чего центральными понятиями здесь оказываются *эргодичность* и *перемешиваемость*, то теория динамического хаоса сосредоточилась на изучении того, как решение тех или иных конкретных

* [Хайтун, 1996. С. 55–57].

¹⁾ Уравнение Ланжевена [Langevin, 1909]:

$$\dot{v} = -\zeta v + A(t), \quad (\text{C.2.1})$$

где v — скорость броуновской частицы; $\zeta = 6\pi\mu R/M$, где μ — коэффициент вязкости среды, R — радиус частицы, M — ее масса; $A(t)$ — случайная функция времени t . Это уравнение является простой записью второго закона Ньютона; первое слагаемое в правой части представляет собой силу трения частицы о среду, обусловленную вязкостью среды как «монолитного» образования, а слагаемое $A(t)$ Ланжевен ввел, чтобы учесть воздействие среды, вызываемое хаотическими ударами молекул.

уравнений движения срывается в стохастическое движение. Соответственно в основу здесь положена теория устойчивости динамических систем, а центральным является понятие *устойчивости/неустойчивости движения*.

Во многих работах динамический хаос рассматривается как результат возмущения интегрируемых систем²⁾, а при анализе систем, близких к интегрируемым, наряду с теорией устойчивости используется аппарат *теории возмущений*. Поскольку же результаты, получаемые с помощью теорий устойчивости и возмущений, носят по преимуществу качественный характер, постольку при рассмотрении конкретных систем теория динамического хаоса широко использует сегодня методы вычислительного (компьютерного) эксперимента. Именно прорыв в вычислительном эксперименте обеспечил бурное развитие этой теории в последние десятилетия³⁾.

В отличие от синергетики, изучающей динамический хаос в *необратимых* механических системах, описываемых несимметричными по времени уравнениями, теория динамического хаоса исследует динамический хаос в *обратимых* механических системах, описываемых симметричными по времени уравнениями. Применительно к обратимой системе речь может идти только о *поддержании* динамического хаоса, *возникнуть* он в такой системе не может, так как это было бы сопряжено с необратимым ростом энтропии.

Предлагаемым здесь разграничением предметов теории динамического хаоса, и синергетики корректируется укоренившееся в литературе 80-х гг. XX в. определение теории динамического хаоса как науки, изучающей хаос в *консервативных* системах, в отличие от синергетики, изучающей его в системах *диссипативных*. Под диссипативными при этом понимаются открытые системы с уменьшающимся во времени фазовым объемом (подробнее о диссипативных структурах см. в разд. 3.2.4), а под консервативными — системы с сохраняющимся во времени фазовым объемом:

«Различают *консервативные системы*, для которых элемент в фазовом пространстве... только изменяет форму, но сохраняет объем... и *диссипативные системы*, для которых объем элемента фазового пространства сокращается с течением времени (выделено Г. Шустером. — С. X.)» [Шустер, 1988. С. 24]⁴⁾.

В механике используется другое определение консервативной системы — как системы, гамильтониан которой не зависит явно от времени (в теории динамического хаоса такую систему называют *автономной*) [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 59]). Дело, мне кажется, в упорном нежелании физиков признать, что необратимость и гамильтонова механика, как я утверждаю

²⁾ Об интегрируемых/неинтегрируемых системах см. в разд. 2.2.1 и 2.2.3.

³⁾ [Dynamical Systems..., 1975; Helleman, 1980; Order..., 1983; Заславский, 1984; Лихтенберг, Либман, 1984; Chaos and ..., 1984; Chaos and..., 1985; Chaotic..., 1985; Chirikov, Shepelyansky, 1986; Lighthill, 1986; Nicolis, 1986; Chaotic..., 1987; Шустер, 1988; Gleick, 1988; Ottino, 1989; Chaos and..., 1990; Малинецкий, 1997; Малинецкий, Потапов, 2000; Безручко и др., 2005; Данилов, 2006].

⁴⁾ См. также [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 43–45; Кадомцев, 1987. С. 46].

[Хайтун, 1996], несовместимы. Отсюда и идет объяснение необратимого изменения фазового объема исключительно (негамильтоновым) воздействием на систему среды. Так как в механике взаимодействие системы со средой часто характеризуют явной зависимостью гамильтониана от времени, то отсюда же идет и трактовка необратимых систем как открытых, а обратимых — как консервативных. Что было бы, задаются, например, вопросом Г. Николис и И. Пригожин,

«если бы в мире существовали одни лишь консервативные динамические системы?» [Николис, Пригожин, 1990. С. 227].

И поясняют свой вопрос в сноске:

«В том смысле, что макроскопические переменные подчинялись бы обращаемой во времени консервативной динамике» [Там же].

Такой способ мышления представляется непродуктивным: если источник необратимости данной механической системы находится в среде, то что тогда служит источником необратимого поведения самой среды? Переносом источника в среду проблему необратимости не разрешить; расширяя систему, мы рано или поздно придем к консервативной необратимой системе, пусть даже только на уровне всей Вселенной. Впрочем, в столь далеко идущем расширении системы нет нужды. Достаточно указать на изолированный газ неупругих шаров, который приходит в равновесие в результате столкновений. Изолированными необратимыми системами являются также космические черные дыры, к числу которых, возможно, относится даже наша Метагалактика [Хайтун, 2005. Разд. 6.6–8]. Совершенно определенно среда не отвечает за необратимость.

С другой стороны, некорректно определение диссипативной системы как такой, фазовый объем которой со временем сокращается. Сокращаться фазовый объем системы может и за счет *обратимого* взаимодействия со средой (процессы такого рода рассматриваются в равновесной статистической механике), однако такие системы, очевидно, не являются диссипативными, так как в них не происходит диссипация механической энергии с ее превращением в другие формы энергии. Центральным в определении диссипативных систем, на мой взгляд, должно быть обычно опускаемое требование *необратимости*. И тогда корректным следует признать определение диссипативных систем как таких, фазовый объем которых со временем *необратимо* сокращается. Но и в этом случае непонятно, почему синергетика должна ограничиваться случаем необратимого *уменьшения* фазового объема. Это ограничение при рассмотрении необратимых систем, конечно, странно, и идет оно от ошибочной трактовки энтропии реальных систем как меры беспорядка, о чем подробнее говорится в разд. 3.1.

Таким образом, за определением теории динамического хаоса как дисциплины, изучающей консервативные системы, стоит отождествление таких систем с обратимыми. Поскольку такое отождествление некорректно, постольку некорректно и это определение. Некорректно также

отождествление консервативных систем с системами, фазовый объем которых сохраняется во времени, так как фазовый объем может сохраняться и в случае необратимой системы, рост энтропии которой компенсируется потоком отрицательной энтропии извне.

Теория устойчивости динамических систем играла большую роль на первом этапе развития теории динамического хаоса, начавшемся с работ Анри Пуанкаре рубежа XIX–XX вв. Теория возмущений наиболее яркое воплощение получила в КАМ-теореме, с формулировки которой в 1954 г. мы отсчитываем второй этап развития этой теории. Начало третьего этапа, на котором лидирующие позиции захватил вычислительный эксперимент, отсчитывается с 1963 г. Этим трем накладывающимся друг на друга этапам и посвящены следующие далее разделы главы.

2.2. Теория устойчивости динамических систем

2.2.1. Пуанкаре: предыстория

Первым стохастичность механического движения стал объяснять его неустойчивостью Анри Пуанкаре. Для неустойчивой системы, пишет он,

«совершенно ничтожная причина, ускользающая от нас по своей малости, вызывает значительное действие, которого мы не можем предусмотреть, и тогда мы говорим, что это явление представляет собой результат случая» [Poincaré, 1908; Рус. пер. С. 323].

Ответственность за это Пуанкаре возлагает на всегда в той или иной степени присутствующую *размытость начального состояния*:

«Если бы мы знали точно законы природы и состояние Вселенной в начальный момент, то мы могли бы точно предсказать состояние Вселенной в любой последующий момент. Но даже и в том случае, если бы законы природы не представляли собой никакой тайны, мы могли бы знать первоначальное состояние только приближенно... иногда небольшая разница в первоначальном состоянии вызывает большое различие в окончательном явлении. Небольшая погрешность в первом вызвала бы огромную ошибку в последнем. Предсказание становится невозможным, мы имеем перед собой явление случайное» [Там же].

В подтверждение Пуанкаре приводит несколько примеров. *Пример первый*: конус, стоящий на вершине, находится в состоянии неустойчивого равновесия. Малейшее отклонение от равновесия, вызванное, скажем, пылинкой, приводит к его падению, причем нельзя предсказать, в какую сторону он упадет.

Пример второй: метеорология (совсем как в работе 1963 г. отца синергетики Э. Н. Лоренца — см. разд. 3.2.2). Большие пертурбации, говорит Пуанкаре,

«бывают обыкновенно в тех местах, где атмосфера находится в состоянии неустойчивого равновесия. Метеорологи часто хорошо видят, что равновесие

неустойчиво, что образуется циклон, но где именно, они не в состоянии сказать. Лишняя десятая градуса в какой-нибудь точке — и циклон разражается здесь, а не там; он бушует над странами, которые были бы пощажены, если бы не эта десятая» [Там же].

Пример третий: распределение малых планет по зодиаку⁵⁾:

«Их начальные долги́ты могли быть какими угодно, но их средние движения были различны, и они двигались уже так долго, что в настоящее время можно спокойно сказать, что они распределены вдоль зодиака совершенно случайно. Незначительные разности в их начальных расстояниях от Солнца... в конце концов дали огромное различие в долги́тах, которые они теперь имеют... Перед нами опять ничтожная причина и большой эффект» [Там же. С. 323–324].

Заметим, что у Пуанкаре, когда он обсуждает корни случайности в механике, размытость начального состояния фигурирует всегда в тандеме с неустойчивостью динамической системы, из-за которой малая причина порождает большие следствия. Если, например, тот же конус поставить не на вершину, а на основание, то размытость начального состояния уже не приводит к стохастичности, поскольку, будучи слегка наклонен, он не упадет, но вернется в начальное положение. Это весьма существенный момент: сама по себе размытость начального состояния еще не достаточна для стохастичности, динамический хаос возникает только в случае неустойчивого движения. Поэтому и не прав, например, М. Борн [Born, 1958], вводящий, как говорилось в разд. 2.1, стохастiku одним лишь постулированием гауссового распределения значений параметров системы в начальном состоянии.

В тесной связи с проблемой стохастичности механического движения находятся и исследования Пуанкаре о неинтегрируемости системы трех тел [Poincaré, 1892–1899]. Интегрируемыми называют системы с аналитическими интегралами движения, т. е. системы, уравнения движения которых интегрируются, т. е. решаются в аналитическом виде (уточнение см. в разд. 2.2.3).

«Одним из наиболее изученных примеров может служить задача трех тел, которую с полным основанием можно назвать наиболее важной задачей в истории динамики. Одним из частных случаев задачи трех тел является движение Луны, испытывающей притяжение как со стороны Земли, так и со стороны Солнца. Были предприняты бесчисленные попытки свести эту систему к интегрируемой, но в конце XIX в. Брунс⁶⁾ и Пуанкаре доказали,

⁵⁾ ЗОДИАК, зона на небе шириной по 9° в обе стороны от эклиптики, содержащая видимые пути Солнца, Луны и основных планет в течение года. Она проходит через 13 созвездий и делится на 12 знаков зодиака. ЭКЛИПТИКА, видимый путь Солнца на небесной сфере в течение тропического года; большой круг в плоскости земной орбиты. ТРОПИЧЕСКИЙ ГОД, служит основой календаря. Интервал времени между двумя последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия; равен 365.2422 суток.

⁶⁾ БРУНС ГЕНРИХ ЭРНСТ, немецкий астроном и математик, 1848–1919.

что это невозможно. Их результат был полной неожиданностью для современников и, по существу, возвестил о наступлении бесповоротного конца всех простых экстраполяций динамики на основе интегрируемых систем» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 121].

Иначе говоря, Пуанкаре доказал, что

«большинство наиболее интересных проблем классической динамики, начиная с проблемы трех тел... не сводится к интегрируемым системам» [Пригожин, 1985. С. 50].

Этот результат

«в известном смысле... означал конец классической динамики» [Там же].

Согласно самому Пуанкаре, он установил,

«что за исключением некоторых особых случаев... уравнения... [Гамильтона] не допускают никаких других аналитических однозначных интегралов, кроме интеграла» энергии $E = \text{const}$ [Poincaré, 1892–1899; Рус. пер. Т. 1. С. 205].

Не умаляя достижений Пуанкаре, который ведет рассмотрение в переменных действие—угол⁷⁾, заметим, следом за комментаторами русского перевода его работы [Там же. С. 751–752], что в общем случае несуществование интеграла движения в задаче трех тел строго не доказано и по сей день. Тем не менее неинтегрируемость в общем случае системы трех тел, а, следовательно, и более сложных динамических систем, считается сегодня установленным фактом. Ситуация, в которой динамическая система не обладает интегралами движения и когда, следовательно, непрерывное изменение внешних условий вызывает в поведении системы скачок, с точки зрения классической механики, выглядит катастрофической. Она так и называется *катастрофой Пуанкаре* и изучается специальной дисциплиной, именуемой *теорией катастроф*⁸⁾.

В контексте настоящей главы анализ неинтегрируемых систем представляет интерес по той причине, что такие системы родственны стохастическим. Пуанкаре, будучи первопроходцем в области теории динамического хаоса⁹⁾, не сформулировал основные понятия этой теории так четко, как это требуется сегодня. Но, судя по всему, он отождествлял системы с неаналитическими интегралами движения со стохастическими. Однако все не так просто. Как впоследствии показали исследования, связанные с КАМ-теоремой (см. разд. 2.3), система может быть неинтегрируемой, совершая регулярное движение, что делает отождествление неинтегрируемых систем со стохастическими некорректным.

⁷⁾ Более подробно об исследовании Пуанкаре задачи трех тел и переменных действие—угол см. в разд. 2.2.3.

⁸⁾ [Thom, 1972; Structural..., 1979; Постон, Стьюарт, 1980; Арнольд, 1983].

⁹⁾ Напомним также о Л. Больцмане с его «бесконечнозначными» интегралами (см. разд. 1.2.1).

Как бы то ни было, импульс был задан, и физики устремились в обоих заданных Пуанкаре направлениях исследования феномена стохастического движения — анализ динамических систем на (1) интегрируемость/неинтегрируемость и (2) на устойчивость/неустойчивость, — изучая этот феномен в рамках общей теории динамических систем¹⁰⁾. Начнем с краткого рассмотрения некоторых используемых здесь понятий.

2.2.2. Основные понятия теории динамических систем

Сначала дадим некоторые идущие от Пуанкаре [Poincaré, 1881–1886; 1892–1899] понятия качественной теории дифференциальных уравнений (движения).

В согласии с говорившимся в разд. 2.1, здесь рассматриваются системы, уравнения движения которых в общем случае имеют вид

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2.1)$$

где V_i — непрерывная функция, не содержащая явной зависимости от времени. В простейшем случае одной степени свободы имеем систему двух уравнений

$$\frac{dq}{dt} = Q(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = P(q, p), \quad (2.2.2)$$

где

$$Q(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p}, \quad P(q, p) = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q}. \quad (2.2.3)$$

Решение $q = q(t)$, $p = p(t)$ системы (2.2.2) геометрически может быть представлено семейством ориентированных фазовых траекторий на плоскости (q, p) , соответствующих разным начальным точкам (q_0, p_0) и удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dq} = \frac{P(q, p)}{Q(q, p)}, \quad (2.2.4)$$

которое получается из (2.2.2) путем исключения времени t . Это уравнение ставит в соответствие каждой точке (q, p) наклон проходящей через нее кривой, являющейся решением уравнений (2.2.2). Получающееся таким образом поле направлений может служить изображением системы уравнений на фазовой плоскости, позволяющим судить о характере зависимости $p(q)$, а отсюда — и о $q(t)$ с $p(t)$. Иногда при этом строят геометрическое место точек постоянного наклона $(dp/dq) = \text{const}$.

Известный *метод сечения Пуанкаре* дадим в ясном изложении А. Лихтенберга и М. Либермана:

¹⁰⁾ [Bendixon, 1901; Birkhoff, 1927; Whittaker, 1927; Немыцкий, Степанов, 1947; Ляпунов, 1950; Андронов и др., 1959; Андронов и др., 1966, 1967; Былов и др., 1966; Smale, 1967; Арнольд, 1975].

«Метод сечения Пуанкаре является одним из основных методов анализа гамильтоновой динамики. Для автономных систем с двумя степенями свободы фазовое пространство четырехмерно. Выберем в фазовом пространстве некоторую двумерную поверхность Σ_R ... и рассмотрим последовательные пересечения ее траекторий. Пересечение происходит каждый раз, когда траектория проходит сквозь поверхность в некотором определенном направлении (например, слева направо).

В частности, удобно выбрать поверхность сечения Σ_R следующим образом. Заметим, прежде всего, что траектория лежит на трехмерной энергетической поверхности $H(p_1, p_2, q_1, q_2) = H_0$ в четырехмерном фазовом пространстве... Это уравнение определяет любую из четырех переменных, скажем p_2 , как функцию трех остальных

$$p_2 = p_2(p_1, q_1, q_2). \quad (2.2.5)$$

Рассмотрим проекцию траектории на трехмерный объем (p_1, q_1, q_2) ... Если движение ограничено, то траектория будет все время пересекать определенную плоскость $q_2 = \text{const}$ внутри этого объема. Эту плоскость, заданную координатой q_1 и сопряженным импульсом p_1 , удобно выбрать в качестве поверхности сечения Σ_R . В общем случае последовательные пересечения траектории с поверхностью будут произвольно распределены в некоторой ограниченной области Σ_R . В случае существования дополнительного (помимо H_0) интеграла движения

$$I(p_1, p_2, q_1, q_2) = \text{const} \quad (2.2.6)$$

из (2.2.5) и (2.2.6) следует

$$p_1 = p_1(q_1, q_2). \quad (2.2.7)$$

Поэтому последовательные пересечения должны лежать на некоторой инвариантной кривой, определяемой уравнением (2.2.7) с $q_2 = \text{const}$. Таким образом, существование интегралов движения можно определить из анализа пересечений траекторий с поверхностью Σ_R . После того как существование интеграла установлено, можно исследовать локальную устойчивость и другие интересные свойства инвариантных кривых.

Отметим, что рассматриваемая поверхность сечения (p_1, q_1) как раз и является *сокращенным фазовым пространством* исходной гамильтоновой системы, а последовательные пересечения получаются друг из друга путем канонического преобразования, определяемого уравнениями Гамильтона¹¹⁾. Поэтому площадь, ограниченная замкнутой кривой, на поверхности сечения сохраняется... Метод сечения Пуанкаре можно обобщить и на системы с числом степеней свободы $s > 2$. Для не зависящего от времени гамильтониана системы с s степенями свободы размерность энергетической поверхности в фазовом пространстве равна $2s - 1$... Исключим, как и раньше, одну из переменных, например p_s , и рассмотрим последовательные пересечения траектории с $(2s - 2)$ -мерной поверхностью $q_s = \text{const}$ с координатами $p_1, \dots, p_{s-1}, q_1, \dots, q_{s-1}$... При этом поверхность сечения по-прежнему представляет собой сокращенное фазовое пространство с сохраняющимся объемом. В случае существования одного или более интегралов

¹¹⁾ О каноническом преобразовании см. сноску, связанную с соотношениями (С. 1.4–5).

движения все пересечения будут лежать на одной поверхности, размерность которой меньше $(2s - 2)$. В противном случае они будут заполнять некоторый $(2s - 2)$ -мерный объем (выделено авторами. — С. Х.)» [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 31–34].

Если через данную фазовую точку проходит единственная траектория, то такая точка называется *обыкновенной*, в противном случае — *особой*. Для теории динамического хаоса наибольший интерес представляют именно особые точки, потому как именно в них регулярное движение может сорваться в стохастическое. В двухмерном случае, когда уравнения движения динамической системы имеют вид (2.2.2), фазовая точка (q_0, p_0) называется особой, если

$$Q(q_0, p_0) = 0, \quad P(q_0, p_0) = 0. \quad (2.2.8)$$

Угол наклона фазовой траектории, определяемый соотношением (2.2.4), для такой точки является, очевидно, неопределенным, почему в ней и могут пересекаться несколько (и даже бесконечно большое число) траекторий. Особая точка является точкой равновесия, которое может быть устойчивым или неустойчивым, в зависимости от характера поведения фазовых траекторий в окрестности этой точки. Это поведение может быть исследовано следующим образом [Николис, Пригожин, 1979. С. 89–93; Романовский и др., 1984. С. 11].

Раскладывая правые части уравнений (2.2.2) в ряд Тейлора около точки (q_0, p_0) и ограничиваясь линейными членами, получаем линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dq'}{dt} &= \left. \frac{\partial Q}{\partial q} \right|_{q_0, p_0} q' + \left. \frac{\partial Q}{\partial p} \right|_{q_0, p_0} p' = a_{11}q' + a_{12}p', \\ \frac{dp'}{dt} &= \left. \frac{\partial P}{\partial q} \right|_{q_0, p_0} q' + \left. \frac{\partial P}{\partial p} \right|_{q_0, p_0} p' = a_{21}q' + a_{22}p', \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

где

$$q' = q - q_0, \quad p' = p - p_0. \quad (2.2.10)$$

Система (2.2.9) имеет решение [Математической..., 1988. С. 316]

$$q' = q'_0 \exp \{\pm bt\}, \quad p' = p'_0 \exp \{\pm bt\} \quad (2.2.11)$$

с b — корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - b & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - b \end{vmatrix} = 0. \quad (2.2.12)$$

Значения b_1 и b_2 , получаемые из уравнения (2.2.12), и определяют характер поведения фазовых траекторий в окрестности особой точки (q_0, p_0) . Характер же самих этих значений b_1 и b_2 определяется значением дискриминанта

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = T^2 - 4\Delta \quad (2.2.13)$$

квадратного уравнения (2.2.12).

Когда $\Delta \neq 0$, особая точка называется *простой*. Если при этом $D \geq 0$, значения b_1 и b_2 действительны. При $b_1 < 0$, $b_2 < 0$ имеем *устойчивый узел*, при $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ — *неустойчивый узел*, а когда b_1 и b_2 имеют разные знаки, особая точка называется *седловой*. Седловая точка всегда неустойчива, две асимптоты, проходящие через нее, называются *сепаратрисами*.

Когда $\Delta \neq 0$, а $D < 0$, значения b_1 и b_2 комплексно сопряжены, т. е. их вещественные части совпадают. При $\operatorname{Re} b < 0$ имеем *устойчивый фокус*, а при $\operatorname{Re} b = 0$ особая точка называется *центром*.

Когда $\Delta = 0$, особая точка носит название множественной. В двухмерном случае такая точка оказывается комбинацией узла и седловой точки.

Особые точки могут группироваться в особые линии, коими являются, например, *предельные циклы*. Такой цикл соответствует периодическому решению $q(t)$, представляя собой замкнутую траекторию C с окрестностью из обыкновенных точек, в которой все фазовые траектории или приближаются к C (*устойчивый предельный цикл*), или удаляются от C (*неустойчивый предельный цикл*), или приближаются к C с одной стороны и удаляются с другой (*полуустойчивый предельный цикл*). В случае устойчивого предельного цикла фазовые траектории как бы наматываются на замкнутую траекторию C . Эта ситуация отвечает регулярному (нестохастическому) движению с постоянными амплитудой и частотой, иногда называемому *автоколебанием*.

В двухмерном случае существуют только названные здесь типы особых точек и предельных циклов. Это утверждение составляет содержание теоремы Пуанкаре—Бендиксона. Для динамических систем, фазовое пространство которых имеет большую размерность, ситуация может быть значительно более сложной. Здесь могут появляться другие типы множественных точек, которые всегда можно рассматривать, однако, как комбинации простых особых точек. Здесь могут иметь место, кроме того, периодические и квазипериодические фазовые траектории с двумя и более основными частотами, наматывающиеся на торы, движение на которых, как и в случае предельного цикла, является регулярным (см. разд. 2.2.3). Возможны здесь множества особых точек и значительно более сложной структуры.

Различные множества особых устойчивых точек объединяются термином *аттрактор* (от англ. to attract — притягивать). Аттрактор, т. е. множество устойчивых точек, будь то отдельная такая точка, предельный цикл или что-то более сложное, притягивает к себе соседние траектории, так что, какова бы ни была начальная фазовая точка, траектория либо уйдет со временем на бесконечность, либо окажется притянутой соседним аттрактором. Если же движение происходит в конечной области фазового пространства, то остается только вторая возможность. Более строго аттрактор определяется как

«такое подмножество X фазового пространства, которое удовлетворяет следующим условиям:

- 1) X инвариантно относительно потока (т. е. ни одна фазовая точка этого подмножества не попадает при движении системы в другое подмножество. — $C. X$);
- 2) существует (открытая) окрестность X , которая сжимается [при движении системы] к $X \dots$;
- 3) никакая часть X не является переходной¹²⁾;
- 4) X нельзя разложить на два непересекающихся инвариантных множества» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 414]¹³⁾.

Областью притяжения аттрактора X

«является множество состояний в фазовом пространстве, которое стремится к X при $t \rightarrow \infty$ » [Там же].

Если данная динамическая система характеризуется большим числом степеней свободы, то у нее может быть много аттракторов, причем,

«С точностью до меры нуль все начальные состояния лежат в области притяжения одного из» аттракторов [Там же].

Аттракторы, возникающие при описании необратимых систем и имеющие весьма странную (фрактальную) структуру и, вообще говоря, дробную размерность, так и называют *странными*. Об этих аттракторах будет подробно говориться в разд. 3.3, а пока сделаем замечание относительно следующего высказывания Г. Шустера [1988. С. 157–158]:

«Из сохранения фазового объема немедленно следует, что *в фазовом пространстве консервативных систем (в отличие от диссипативных) нет притягивающих областей*, т. е. нет ни притягивающих неподвижных точек, ни притягивающих предельных циклов, ни странных аттракторов (выделено мной. — $C. X$).».

В разд. 2.1 мы видели, что термин *консервативная система* в современной теории динамического хаоса применяется как неудачный эвфемизм вместо термина *обратимая система*, а в разд. 3.2.4 мы увидим, что термином *диссипативная структура* в Брюссельской школе Ильи Пригожина неудачно подменяют термин *необратимая система*. По Шустеру получается, таким образом, что аттракторы бывают только в необратимых системах и не бывают в обратимых. Как вытекает из говорившегося выше об аттракторах, это не так, и, например, предельные циклы имеют место и в системах, совершающих регулярное обратимое движение. Возможно, Шустера смутило то обстоятельство, что при наличии в фазовом пространстве системы аттрактора в ее движении существует начальная стадия

¹²⁾ Т. е. траектория не уходит из нее при $t \rightarrow \infty$ (сноска редактора русского перевода Б. В. Чирикова).

¹³⁾ См. также [Guckenheimer, Holmes, 1983. P. 256].

втягивания фазовой траектории в аттрактор, на котором и происходит все дальнейшее движение. Вот это движение на начальной стадии (втягивание траектории в аттрактор), я полагаю, Шустер и отождествляет с необратимым, невозможным в случае обратимой системы.

В этом рассуждении, однако, упускается из виду, что в физике имеют смысл только *наблюдаемые* события, т. е. события, вероятность которых отлична от нуля, и потому не имеют смысла множества меры нуль, о чем уже говорилось выше (см. текст между соотношениями (1.2.19) и (1.2.20)). Не имеет, поэтому, физического смысла и фаза втягивания фазовой траектории в аттрактор, эта фаза — не более чем математические бирюльки, *все наблюдаемое движение динамической системы происходит на аттракторе*. Поэтому при рассмотрении вопроса об обратимости/необратимости движения данной динамической системы следует принимать во внимание только (наблюдаемое) движение на аттракторах, не принимая во внимание (ненаблюдаемую) фазу втягивания траектории в аттрактор.

2.2.3. Интегрируемые/неинтегрируемые системы

Вплоть до конца XIX в. господствовало убеждение, что для любой механической системы уравнения движения в принципе решаются в аналитическом виде, или интегрируемы в квадратурах, т. е. их решения $q(t), p(t)$ существуют в виде однозначных функций либо, на худой конец, в форме каких-то определенных интегралов, допускающих применение приближенных (квадратурных) формул¹⁴. Ясно, однако, что движение механической системы, представимое в виде однозначных аналитических функций $q(t), p(t)$ ¹⁵, представляет собой в фазовом пространстве системы одномерную траекторию, имея *регулярный* характер, так что динамический хаос в ней отсутствует. Поэтому вопрос о том, когда в механической системе возникает такой хаос, тесно связан с вопросом о том, когда она является интегрируемой и когда она таковой не является. В XX в. выяснилось, что большая часть

«механических систем неинтегрируема. Это не просто неумение найти решение в конечном виде, а факт сложного поведения динамической системы, поведения, похожего на хаотическое, случайное. Такое поведение, получившее название динамического хаоса, показано и проанализировано на боль-

¹⁴ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА, приближенное равенство вида

$$\int_a^b p(x)f(x) dx \cong \sum_{j=1}^N C_j f(x_j), \quad (\text{C.2.2})$$

в левой части которого стоит интеграл, подлежащий вычислению; сумма в правой части носит название квадратурной, числа x_j именуется узлами квадратурной формулы, а C_j — ее коэффициентами. При вычислении квадратурной суммы значения узлов и коэффициентов берутся из таблиц [Математический..., 1988. С. 264].

¹⁵ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ, функция, которая может быть представлена степенным рядом [Математический..., 1988. С. 68].

шом числе частных примеров и представляется достаточно универсальным» [Кадомцев, 1987. С. 45].

В проблеме интегрируемости/неинтегрируемости динамических систем центральное место занимает теорема Жозефа Лиувилля [Liouville, 1855], которую не следует путать с более ранней [Liouville, 1838] и более знаменитой его теоремой о несжимаемости фазовой жидкости гамильтоновой системы (см. соотношения (1.1.5)–(1.1.8)). В теореме 1855 г., которую мы будем далее называть 2-й теоремой Лиувилля, не только дается условие, при котором гамильтонова система интегрируема, но и характеризуется совершаемое ею движение.

Пусть гамильтонова система с s степенями свободы совершает финитное движение. Пусть, далее, для нее существуют s (сохраняющихся во время движения системы) интегралов движения, которые могут быть представлены аналитически в виде однозначных функций координат и импульсов системы $F_i(q, p)$, $i = 1, \dots, s$. Интегралы движения полагаются функционально независимыми, т. е. скобки Пуассона для них попарно равны нулю¹⁶⁾,

$$[F_i, F_k] = 0. \quad (2.2.14)$$

Тогда, говорит 2-я теорема Лиувилля, уравнения движения Гамильтона данной системы интегрируемы в квадратурах, а ее движение является квазипериодическим, происходя на s -мерном торе¹⁷⁾, инвариантном от-

¹⁶⁾ СКОБКИ ПУАССОНА, определяются для динамических величин $A(q, p, t)$ и $B(q, p, t)$ выражением

$$[A, B] = \sum \left(\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right). \quad (C.2.3)$$

Для координат и импульсов механической (не обязательно гамильтоновой) системы действуют коммутационные соотношения

$$[q_i, q_k] = 0, \quad [p_i, p_k] = 0, \quad [p_i, q_k] = \delta_{ik}. \quad (C.2.4)$$

Для гамильтоновой системы

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + [H, A]. \quad (C.2.5)$$

Для консервативной системы (отсутствует явная зависимость динамических величин от времени)

$$\frac{dA}{dt} = [H, A]. \quad (C.2.6)$$

Как показывает это соотношение, если система консервативна, то динамическая величина, для которой скобки Пуассона с гамильтонианом равны нулю, сохраняется во время движения системы, являясь ее интегралом движения. С помощью скобок Пуассона могут быть записаны и уравнения Гамильтона:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = [H, q_i], \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = [H, p_i]. \quad (C.2.7),$$

¹⁷⁾ ТОР, в трехмерном случае — тело, образуемое вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга, но не пересекающей его. Ограничивающую его поверхность часто также называют тором. Образом трехмерного тора служит бублик.

носителем фазового потока, и характеризуясь s частотами

$$\omega_i = \omega_i(F_1, \dots, F_s), \quad (2.2.15)$$

причем угловые переменные α_i , характеризующие положение фазовой точки на торе, удовлетворяют уравнениям

$$\dot{\alpha}_i = \omega_i, \quad (2.2.16)$$

т. е.

$$\alpha_i = \omega_i t + \delta_i \quad (2.2.17)$$

[Арнольд, 1974. С. 235; Заславский, 1984. С. 22–23].

На первый взгляд, можно заключить, как это и делали ученые до Пуанкаре, что проблемы интегрируемости механических систем вообще не существует. В самом деле, для гамильтоновой консервативной (гамильтониан не зависит явно от времени) системы решение уравнений движения всегда может быть записано в виде

$$q(t) = \exp \{t[H]\} q(t_0), \quad p(t) = \exp \{t[H]\} p(t_0), \quad (2.2.18)$$

где экспонента обычным образом раскладывается по степеням $[H]^k$ оператора $[H]$, определяемым с помощью скобок Пуассона:

$$[H]A = [H, A], \quad [H]^2 A = [H, [H, A]] \dots \quad (2.2.19)$$

Поскольку гамильтониан всегда полагается однозначной аналитической функцией своих аргументов, то может показаться, что таковыми всегда являются и функции (2.2.18). Это, однако, не так. Возьмем, например, систему с одной степенью свободы, определяемую уравнениями (2.2.2)–(2.2.3). Для нее, очевидно,

$$[H]q = \frac{\partial H}{\partial p} = Q(q, p), \quad [H]p = -\frac{\partial H}{\partial q} = P(q, p). \quad (2.2.20)$$

И, если, как говорилось, в какой-то точке функции $Q(q, p)$ и $P(q, p)$ одновременно равны нулю, то эта точка является особой, т. е. в ней функции $q(t)$ и $p(t)$ перестают быть однозначными. Так что, действительно, однозначность и аналитичность гамильтониана не гарантируют однозначности и аналитичности решений уравнений движения (2.2.18).

Из 2-й теоремы Лиувилля вытекает определяющее значение в вопросах, касающихся интегрируемости/неинтегрируемости механической системы, ее *интегралов движения*. Для интегрируемости системы с s степенями свободы, описываемой s независимыми уравнениями движения¹⁸⁾, говорит теорема, достаточно, чтобы s ее функционально независимых интегралов движения были однозначными аналитическими функциями своих аргументов. Поясним, как они (интегралы движения) проникли в эту теорему.

¹⁸⁾ См. сноску, связанную с соотношениями (С. 5.6–7).

Динамическая величина $F(q, p)$ сохраняется во время движения системы, являясь интегралом движения, если скобки Пуассона $[H, F]$ равны нулю (см. соотношение (С. 2.6) и связанную с ним сноску). Для системы с s степенями свободы может быть самое большее $2s - 1$ функционально независимых интегралов движения $F_i(q, p)$ [Ландау, Лифшиц, 1958. С. 23], одним из которых является сам гамильтониан:

$$F_i(q, p) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2s - 1. \quad (2.2.21)$$

Представим себе, что решение уравнений движения данной системы единственно и что все ее интегралы движения заданы аналитически.

«Каждое из $2s - 1$ уравнений (2.2.21) при заданном a_i определяет $(2s - 1)$ -мерную „гиперповерхность“ в $2s$ -мерном фазовом пространстве. Траектория данной системы должна целиком лежать на каждой из этих поверхностей, а в силу этого представляет собой не что иное, как пересечение $2s - 1$ поверхностей... Знание некоторого интеграла [движения] для данной системы позволяет наложить ограничение на область в фазовом пространстве, где может располагаться траектория: мы „избавляемся от одного измерения“. Определяя следующие интегралы, мы продолжаем уменьшать число измерений, пока не получим одномерную линию, которая и представляет собой траекторию» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 355–356].

Таким образом, аналитически заданные интегралы движения системы однозначно определяют траекторию ее движения, т. е. решение уравнений движения. Это и объясняет, почему 2-я теорема Лиувилля связывает интегрируемость механической системы с аналитичностью именно интегралов движения. Другое дело, что для интегрируемости гамильтоновой системы с s степенями свободы оказывается достаточным задать аналитически не $2s - 1$, но только s интегралов движения [Заславский, 1984. С. 23], остальные $s - 1$ оказываются в этом случае аналитическими (интегрируемыми в квадратурах) автоматически.

Чрезвычайное значение имеет и содержащееся в обсуждаемой теореме заключение о том, что *движение интегрируемой гамильтоновой системы, совершающей финитное движение, является квазипериодическим*. Это поистине удивительный результат, который делает возможным для такой системы переход к *переменным действие–угол* с их весьма специфическими свойствами. Обобщенными импульсами здесь служат *переменные действия* J_i , которые сохраняются постоянными при движении системы и могут быть, поэтому, выбраны в качестве независимых интегралов движения. Обобщенными координатами здесь служат *угловые переменные* α_i , линейно зависящие от времени¹⁹⁾ Гамильтониан системы зависит в этих

¹⁹⁾ Переменные действия J_i определяются выражениями [Ландау, Лифшиц, 1958. С. 194–195; Пригожин, 1964. С. 32–33]

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = \frac{1}{2\pi} \oint \frac{W(q, P)}{\partial q_i} dq_i, \quad (С. 2.8)$$

переменных только от переменных действия,

$$H = H(J_1, \dots, J_s), \quad (2.2.22)$$

так что энергия системы сводится к кинетической. Выражения

$$J_i = \text{const}, \quad \alpha_i = \omega_i t + \delta_i, \quad \text{где} \quad \omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i} \quad (2.2.23)$$

и являются искомым решением уравнений движения интегрируемой системы в переменных действие–угол, наглядно демонстрирующим ее интегрируемость.

Интегрируемая система с s степенями свободы совершает при этом квазипериодическое движение на s -мерном инвариантном торе. Инвариантность тора означает, что фазовая траектория не выходит за его пределы. Характер движения на нем проиллюстрируем сначала на примере системы с двумя степенями свободы, когда движение происходит на двухмерной поверхности в трехмерном энергетическом пространстве, а затем перейдем к общему случаю.

Итак, в случае двух степеней свободы движение на двухмерной поверхности может быть параметризовано с помощью двух частот, отвечающих каждой из двух степеней свободы,

$$\alpha_i = \omega_i t + \alpha_{i0}, \quad \alpha_2 = \omega_2 t + \alpha_{20}. \quad (2.2.24)$$

«Зададим некоторую энергию E и рассмотрим одну из двух степеней свободы, скажем первую. Тогда J_1 параметризует инвариантные поверхности, т. е. „радиусы окружностей“, а угол α_1 характеризует положение системы на окружности. Для полного описания необходимо учесть угол α_2 , так что инвариантная поверхность оказывается тором... Задание J_1 и E определяет также J_2 , а вместе с ним и отношение

$$\beta = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (2.2.25)$$

поскольку $\omega_1 = \omega_1(J_1, J_2)$ и $\omega_2 = \omega_2(J_1, J_2)$. При $\beta = m/n$, где m, n — взаимно простые целые числа, частоты соизмеримы, и движение на торе вырождается в периодическую траекторию, которая замыкается после m

в которых интеграл берется по одному периоду изменения координаты q_i и где $W(q, P)$ — производящая функция (см. соотношения (С. 1.4–5)). Обращая выражение (С. 2.8), получим W как функцию q, J :

$$W = W(q_1, \dots, q_s, J_1, \dots, J_s). \quad (С. 2.9)$$

Обобщенные координаты α_i , канонически сопряженные переменным J_i , определяются выражениями

$$\alpha_i = \frac{\partial W}{\partial J_i}. \quad (С. 2.10)$$

Уравнения Гамильтона в переменных действие–угол могут быть получены с помощью обычных уравнений (1.1.4), имея вид:

$$\dot{\alpha}_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad \dot{J}_i = -\frac{\partial H}{\partial \alpha_i} = 0. \quad (С. 2.11).$$

оборотов по α_1 и n оборотов по α_2 . В общем случае β — иррациональное число, и траектория покрывает всю поверхность тора. Поскольку m и n могут быть очень большими, периодические траектории расположены в фазовом пространстве всюду плотно» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 177–178].

«Представление движения на торе... можно обобщить и на системы с более чем двумя степенями свободы. Сохранение каждой из переменных действия уменьшает размерность инвариантной поверхности на единицу. Так, если у системы с s степенями свободы в $2s$ -мерном фазовом пространстве все s переменных действия сохраняются, движение происходит по s -мерной поверхности. Топологически эта поверхность является s -мерным тором... а s фазовых (угловых. — С. Х.) переменных взаимно ортогональны» [Там же. С. 178].

Когда отношения частот, соответствующих разным степеням свободы, рациональны, движение интегрируемой системы регулярно и периодически (траектория замкнута), когда иррационально — регулярно и квазипериодично (траектория незамкнута). В последнем случае траектория плотно заполняет со временем всю поверхность s -мерного тора, т. е. посещает окрестности всех точек этой поверхности. Другими словами, *квазипериодическое движение является квазиэргодическим*. Именно этой ситуации отвечают бесконечнозначные интегралы Больцмана, о которых шла речь в разд. 1.2.1. Существенно, что, будучи (квази)эргодическим, квазипериодическое движение остается при этом регулярным, не являясь стохастическим.

Сегодня уже ясно, что класс интегрируемых систем достаточно узок. В общем случае траектория механической системы

«может заполнять в $2s$ -мерном фазовом пространстве сложные множества размерности больше s ; траектория может даже быть всюду плотной и равномерно распределенной на всем $(2s - 1)$ -мерном [энергетическом] многообразии... Термин „неинтегрируемые“ в применении к этим системам оправдан, так как они не допускают однозначных первых интегралов (т. е. интегралов движения. — С. Х.), не зависящих от H » [Арнольд, 1974. С. 252].

В случае, когда s -мерный инвариантный тор разрушается, движение и становится стохастическим.

Как говорилось в разд. 2.2.1, первым стал изучать неинтегрируемые системы Анри Пуанкаре [Poincaré, 1881–1886; 1892–1899], установивший неинтегрируемость в общем случае уже системы трех тел. Отталкиваясь от 2-й теоремы Лиувилля, он берет сначала интегрируемую систему трех тел, которая, вследствие этой теоремы, имеет соответствующее количество (равное числу степеней свободы s) однозначных аналитических интегралов движения и может быть описана в переменных действие–угол. И доказывает, используя эти переменные, что в результате сколь угодно малого возмущения этой интегрируемой системы ее интегралы движения, за исключением интеграла энергии, перестают быть однозначными аналитическими функциями своих аргументов.

Точнее, Пуанкаре доказывает следующее. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$, $J = (J_1, \dots, J_s)$ — переменные действие–угол для интегрируемой системы с гамильтонианом $H_0(J)$,

$$\dot{\alpha}_i = \omega_i(J), \quad \dot{J}_i = 0, \quad \omega_i(J) = \frac{\partial H_0}{\partial J_i}. \quad (2.2.26)$$

В качестве возмущенной Пуанкаре рассматривает систему

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \alpha) + \varepsilon^2 H_2(J, \alpha) + \dots, \quad (2.2.27)$$

$$\dot{\alpha}_i = \omega_i(J) + \varepsilon f_{i1}(J, \alpha) + \varepsilon^2 f_{i2}(J, \alpha) + \dots, \quad (2.2.28)$$

$$\dot{J}_i = \varepsilon g_{i1}(J, \alpha) + \varepsilon^2 g_{i2}(J, \alpha) + \dots. \quad (2.2.29)$$

И доказывает, что если функция

$$F = F_0(J) + \varepsilon F_1(J, \alpha) + \varepsilon^2 F_2(J, \alpha) + \dots \quad (2.2.30)$$

является однозначной и аналитической, то она не может быть интегралом движения системы (2.2.27)–(2.2.29). За исключением некоторых особых случаев, говорит Пуанкаре, уравнения движения возмущенной системы

«не допускают никаких других аналитических однозначных интегралов [движения], кроме интеграла $H = \text{const}$ » [Poincaré, 1892–1899; Рус. пер. Т. 1. С. 205].

Так что, действительно, интегралы движения механической системы не являются в общем случае однозначными аналитическими функциями своих аргументов, что эквивалентно, в соответствии со 2-й теоремой Лиувилля, ее (системы) неинтегрируемости.

Для теории динамического хаоса ценность этого, вообще говоря, чрезвычайно важного результата Пуанкаре снижается двумя отмеченными выше обстоятельствами. Во-первых, мы так и не имеем до сих пор общих аналитических методов исследования систем на интегрируемость/неинтегрируемость. Во-вторых, со стохастичностью оказалась связанной не столько неаналитичность интегралов движения (система с неаналитическими интегралами может совершать регулярное движение), сколько их *неизолирующий* характер.

Каждый из *изолирующих интегралов движения* делит фазовое пространство системы на две разобщенные части:

«Рассмотрим гамильтонову систему с s степенями свободы», для которой «уравнение Гамильтона—Якоби²⁰⁾ разделяется на s независимых уравнений, по одному на каждую степень свободы... Постоянные разделения α ; называются изолирующими... интегралами движения, поскольку каждый такой интеграл „отделяет“ одну степень свободы» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 38].

²⁰⁾ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ, уравнение гамильтоновой механики

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, \dots, q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 \quad (C.2.12)$$

В результате фазовая траектория не может попасть из одной части в другую, что уменьшает на единицу размерность фазового подпространства системы, которое она в принципе могла бы всюду плотно заполнить, породив в нем динамический хаос. Самым известным интегралом движения такого рода является энергия.

Неизолирующие интегралы движения — это современная версия «бесконечнозначных» интегралов движения Больцмана (см. разд. 1.2.1), высказывание которого о таких интегралах можно сопоставить с аналогичным высказыванием Р. Балеску о системе двух несвязанных гармонических осцилляторов с рациональным и иррациональным отношением частот. Во втором случае, пишет он,

«траектория в пространстве (q_1, q_2) ... проходит сколь угодно близко к любой точке в пределах прямоугольника, определяемого... максимальными амплитудами... Таким образом... интеграл движения... представляет собой многозначную функцию с бесконечным числом ветвей. Такой интеграл называется неизолирующим» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 359].

Если энергия — единственный изолирующий интеграл, а остальные $k = (2s - 1) - 1$ интегралов неизолирующие, то квазиэргодическим может быть движение только на энергетической $(2s - 1)$ -мерной поверхности. В случае k неизолирующих интегралов движения фазовая траектория может всюду плотно заполнить самое большее $(k + 1)$ -мерную поверхность в фазовом пространстве.

Возвращаемся ко 2-й теореме Лиувилля. В ней рассматривается система, движение которой происходит на всюду плотно заполняемом s -мерном торе, что говорит о наличии у такой системы $s - 1$ неизолирующих интегралов и s изолирующих:

«Для системы s несвязанных осцилляторов лишь s интегралов [движения] являются изолирующими; остальные $s - 1$ являются, вообще говоря, неизолирующими. Отсюда следует, что траектория системы плотно заполняет s -мерную область фазового пространства. В переменных действие–угол эта область имеет форму s -мерного тора» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 361].

Поэтому указанная теорема иногда формулируется в таком виде:

«Система с s степенями свободы интегрируема тогда и только тогда, когда существует s независимых изолирующих интегралов» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 38].

Изолирующими интегралами здесь служат s переменных действия J_i , сохраняющихся постоянными при движении системы:

для действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad \frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i = L \quad (\text{C.2.13})$$

[Ландау, Лифшиц, 1958. С. 173, 184]. Напомним, что $H(q, p) = \sum p_i \dot{q}_i - L$.

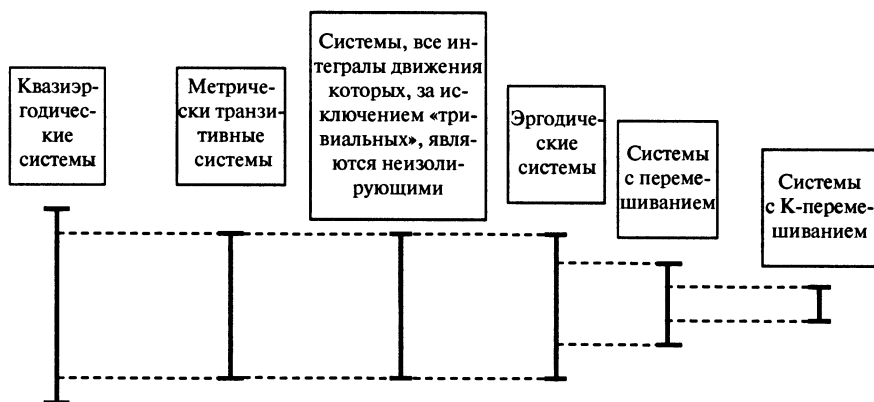


Рис. 2.2.1. Соотношение разных классов динамических систем (расширение рис. 1.3.4). Будучи метрически транзитивными, системы, все интегралы движения которых, за исключением «тривиальных», являются неизоллирующими, эргодичны (ансамблевые средние равны временным), и наоборот

«...Изменение импульсов во времени в силу канонических уравнений зависит от производной гамильтониана по координатам. Если эта производная обращается в нуль (ср. соотношения (С. 2.11). — С. X.), то импульсы (переменные действия J_i как раз и играют здесь роль обобщенных импульсов. — С. X.) становятся интегралами движения. С аналогичной ситуацией мы сталкиваемся при рассмотрении системы „свободная частица“. Для того чтобы перейти к этой системе, необходимо с помощью подходящего преобразования „исключить“ взаимодействие [степеней свободы]... Таким образом, любую интегрируемую систему можно представить в виде совокупности подсистем. Каждая из таких подсистем изменяется в полной изоляции от других, независимо от них» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 120].

Согласно Р. Балеску [1978. Т. 2. С. 381],

«строго не показано, что если все интегралы, за исключением „тривиальных“, являются неизоллирующими, то движение обязательно будет эргодическим».

На мой взгляд, Балеску ошибается, поскольку не учитывает теоремы Биркгофа об эквивалентности эргодических (ансамблевые средние равны временным) и метрически транзитивных систем. Как говорилось в разд. 1.2.3, динамическая система метрически транзитивна, когда ее энергетическая поверхность в фазовом пространстве не может быть разделена на изолированные друг от друга конечные области. Но точно таким же свойством характеризуется динамическая система, все интегралы движения которой, за исключением «тривиальных», являются неизоллирующими, почему движение такой системы, в силу теоремы Биркгофа, имеет эргодический характер (см. рис. 2.2.1).

Другое дело, что

«В настоящее время не существует какого-либо метода, позволяющего определить все изолирующие интегралы произвольной гамильтоновой системы или хотя бы установить их полное число. Поэтому не существует и никакого общего способа проверки на интегрируемость (s изолирующих интегралов) для системы с s степенями свободы. Если в системе нет очевидной симметрии, то догадаться о существовании скрытого изолирующего интеграла и обнаружить его часто удается только при помощи численных экспериментов» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 47].

По этой причине направление исследований феномена динамического хаоса, связанное с исследованием систем на их интегрируемость/неинтегрируемость, оказалось тупиковым.

2.2.4. Стохастичность и неустойчивость динамической системы

В разд. 2.2.1 говорилось, что за стохастичность движения данной системы несут ответственность размытость начального состояния и неустойчивость ее движения. Поскольку, однако, выбор некоторого момента времени в качестве начального условен, то размытым следует считать не только начальное, но и любое другое состояние системы. В разных случаях эта размытость микросостояний может вызываться разными комбинациями разных факторов, прежде всего — взаимодействием со средой:

«...В условиях стохастического движения и экспоненциальной неустойчивости... ни одна система — за исключением мира как целого — не является замкнутой. Это можно показать на следующем примере. Рассмотрим движение молекул газа... В качестве наиболее слабого внешнего возмущения примем гравитационное (приливное) взаимодействие молекулы этого газа с протоном на „другом конце Вселенной“, т. е. на расстояниях порядка 10^{10} световых лет. Можно показать, что даже столь ничтожное взаимодействие полностью изменяет движение молекулы всего за ~ 60 ее столкновений с другими молекулами газа (при нормальных условиях), т. е. за время $\sim 10^{-8}$ сек (выделено Б. В. Чириковым. — С. Х.)» [Чириков, 1982. С. 186].

Среди других факторов, вызывающих неопределенность микросостояний динамической системы, назовем неопределенность, связанную с изменением значений координат и импульсов системы, которые фиксируют ее состояние (в этом случае, как было сказано в разд. 1.3.2, говорят о *динамической* устойчивости/неустойчивости), и неопределенность, связанную с определением значений параметров системы, которые входят в описывающие ее движения уравнения (соответствующую устойчивость/неустойчивость называют *параметрической*, о чем также было сказано в разд. 1.3.2).

В разд. 2.2.1 говорилось также о том, что размытость микросостояния присутствует всегда, и потому не она, а именно устойчивость/неустойчивость системы главенствует в определении характера ее движения: если фазовые траектории устойчивы, то движение регулярно,

если неустойчивы — стохастично. Поэтому в теории динамического хаоса большое место и занимает теория устойчивости динамических систем. Ее основы были заложены, наряду с Анри Пуанкаре, российским математиком Александром Михайловичем Ляпуновым, основной работой которого явилась докторская диссертация 1892 г. «Общая задача об устойчивости движения» [Ляпунов, 1950]. Устойчивость/неустойчивость данной системы он определяет по отношению к возмущениям ее начального состояния. Именно ему принадлежит приведенное в разд. 1.3.2 определение локальной неустойчивости фазовой траектории. Ему же принадлежат и носящие его имя показатели.

2.2.4.1. Показатели Ляпунова

Характеризуя скорость разбегания неустойчивых фазовых траекторий, показатели Ляпунова широко используются в теории динамического хаоса при оценке степени стохастичности системы²¹⁾. Мы немного говорили об этих показателях в разд. 1.3.4 в связи с К-энтропией (см. соотношение (1.3.47) и связанный с ним текст), здесь же расскажем о них более детально.

«Грубо говоря, показатели Ляпунова характеризуют среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 294].

Пусть динамическая система с s степенями свободы описывается уравнениями движения

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, 2s, \quad (2.2.31)$$

где в случае гамильтоновой системы

$$\vec{x} = (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s), \quad (2.2.32)$$

$$\vec{V} = \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_s}; -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_s} \right). \quad (2.2.33)$$

«Рассмотрим две близкие траектории с начальными условиями $\vec{x}_0$ и $\vec{x}_0 + \Delta\vec{x}_0$... Их временная эволюция задает касательный вектор $\Delta\vec{x}(\vec{x}_0, t)$ с длиной

$$d(\vec{x}_0, t) = |\Delta\vec{x}(\vec{x}_0, t)|. \quad (2.2.34)$$

Для удобства введем обозначение $\vec{w} = \Delta\vec{x}$. Динамику $\vec{w}$ можно определить, линеаризуя (2.2.31):

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = \vec{M}(\vec{x}(t))\vec{w}, \quad (2.2.35)$$

где

$$\vec{M} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{x}} \quad (2.2.36)$$

²¹⁾ [Benettin et al., 1976; Песин, 1977; Ledrappier, 1981; Лихтенберг, Либерман, 1984; Шустер, 1988].

— матрица Якоби для $\vec{V}^{22}$). Введем среднюю скорость экспоненциальной расходимости близких траекторий:

$$\sigma(\vec{x}_0, \vec{w}_0) = \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ d(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \frac{d(\vec{x}_0, t)}{d(\vec{x}_0, 0)}. \quad (2.2.37)$$

Можно показать, что предел скорости σ существует и она ограничена. Далее, существует полная система $2s$ фундаментальных решений уравнений (2.2.35), для каждого из которых скорость $\{\vec{e}_i\}$ имеет определенное (вообще говоря, различное) значение:

$$\sigma_i(\vec{x}_0) = \sigma(\vec{x}_0, \vec{e}_i). \quad (2.2.38)$$

Это и есть характеристические показатели Ляпунова. Они не зависят от выбора метрики фазового пространства... и их можно упорядочить по величине:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{2s} \quad (2.2.39)$$

[Там же. С. 296].

Здесь $\{\vec{e}_i\}$ — набор собственных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{2s}$.

«Для любой непрерывной траектории, заданной [в общем случае негамильтоновыми] дифференциальными уравнениями (например, (2.2.31)), по крайней мере один из показателей Ляпунова, соответствующий собственному вектору вдоль траектории, равен нулю... У гамильтоновой системы по крайней мере два показателя Ляпунова равны нулю. Однако на энергетической поверхности... один из них, соответствующий смещению перпендикулярно поверхности, отсутствует» [Там же. С. 297].

Показатели Ляпунова (2.2.38) и усредняющий их показатель (2.2.37) для векторов $\vec{w}$, характеризующие разбегание одномерных фазовых траекторий, называют также *показателями Ляпунова первого порядка*. Они были обобщены

«для описания средней скорости экспоненциального роста k -мерного [фазового] объема V_k , построенного на векторах $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$ ($k \leq 2s$). Тогда величина

$$\sigma^{(k)}(\vec{x}_0, V_k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{V_k(\vec{x}_0, t)}{V_k(\vec{x}_0, 0)} \quad (2.2.40)$$

есть показатель Ляпунова порядка k » [Там же].

Показано,

²²) МАТРИЦА ЯКОБИ, квадратная матрица $(\frac{\partial y_i}{\partial x_k})$, составляемая из частных производных первого порядка данной векторной функции $y_i = y_i(x_1, \dots, x_n)$. Ее определитель

$$\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \equiv \det \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_k} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \quad (C.2.14)$$

называется *якобианом*, или *определителем Якоби* [Корн, Корн, 1974. С. 112].

«что $\sigma^{(k)}(\vec{x}_0, V_k)$ выражается через сумму k показателей первого порядка. Аналогично тому как почти для всех $\vec{w}$ справедливо соотношение $\sigma(\vec{x}_0, \vec{w}) = \sigma_1(\vec{x}_0)$, так и для почти всех V_k величина $\sigma^{(k)}$ определяется суммой наибольших показателей

$$\sigma^{(k)} = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k. \quad (2.2.41)$$

Это соотношение используется для численного определения показателей Ляпунова... При $k = 2s$ получаем среднюю скорость экспоненциального роста фазового объема:

$$\sigma^{(2s)} = \sum_{i=1}^{2s} \sigma_i(\vec{x}_0) \quad (2.2.42)$$

[Там же. С. 297–298].

Для гамильтоновых систем, для которых фазовый объем сохраняется,

$$\left\langle \sum_{i=1}^{2s} \sigma_i(\vec{x}_0) \right\rangle = 0, \quad (2.2.43)$$

в то время как для диссипативной системы [с ее уменьшающимся фазовым объемом] эта сумма должна быть отрицательной» [Там же. С. 298].

А. Лихтенберг и М. Либерман, которых мы здесь в основном придерживались, трактуют показатели Ляпунова так, как это принято в современной литературе. Эта трактовка вызывает достаточно острые вопросы.

Вопрос первый. Для гамильтоновой системы должно выполняться равенство (2.2.43), фиксирующее неизменность фазового объема системы. В случае стохастического движения, когда заведомо не все показатели Ляпунова равны нулю, это равенство может быть выполнено, очевидно, только в том случае, если часть этих показателей положительна, а часть — отрицательна. Поскольку все они могут быть выстроены в порядке убывания (см. соотношение (2.2.39)), то, очевидно, в этом случае $\sigma_1 > 0$. Но тогда мы получаем странную вещь: с одной стороны, фазовый объем системы сохраняется, а, с другой стороны, средняя скорость экспоненциального разбегания фазовых траекторий положительна, поскольку (см. текст между соотношениями ((2.2.40) и (2.2.41)) $\sigma(\vec{x}_0) = \sigma_1 > 0$. Как может фазовый объем не расти, когда фазовые траектории в среднем разбегаются с положительной скоростью?! И вообще, что можно сказать о соотношении положительных и отрицательных показателей Ляпунова? Почему в выражении (1.3.47) для К-энтропии

«суммирование производится по всем *положительным* показателям Ляпунова (выделено мной. — С. Х.)» [Там же. С. 301].

Вопрос второй. С одной стороны, показатели Ляпунова считают мерой стохастичности:

«Удобным практическим критерием стохастичности в заданной области фазового пространства служит численное определение показателей Ляпунова. Максимальный показатель σ_1 широко используется в качестве критерия стохастичности в ряде работ» [Там же. С. 312]. «Для регулярного движения $\sigma_1 = 0$, в то время как на стохастической компоненте $\sigma_1 > 0$ и не зависит от $\vec{x}$ » [Там же. С. 313].

С другой стороны, показатели Ляпунова принято считать и мерой *необратимости*, характеризуя с их помощью скорость изменения фазового объема системы:

«Среднюю скорость сжатия фазового объема можно выразить через показатели Ляпунова» [Там же. С. 413].

О том же говорит и упоминавшееся определение с помощью показателей Ляпунова такой характеристики скорости роста фазового объема околоравновесной системы, как К-энтропия. *Каким образом, спрашивается, одни и те же величины могут служить мерой одновременно и стохастичности, и необратимости?!*

Противоречия, связанные с показателями Ляпунова, возникают, на мой взгляд, из-за неразведенности при их определении обратимого и необратимого случаев. В этом отношении современная теория этих показателей наследует ошибки Хопфа, Крылова и Синая, о которых рассказывалось в разд. 1.3. Как мы видели, эти авторы, игнорируя *симметричность по времени* используемых ими уравнений (скажем, у Хопфа это уравнение (1.3.20)), выписывают для них *несимметричные* по времени решения (у Хопфа — (1.3.21)), тогда как решения этих уравнений также симметричны по времени (для уравнения Хопфа это (1.3.22)). При определении показателей Ляпунова также (в случае гамильтоновой системы) отталкиваются от симметричного по времени уравнения, а в качестве его частных решений берут несимметричные по времени экспоненты. Убедимся в этом.

Начнем с линеаризации уравнений движения (2.2.31), полагаемых нами гамильтоновыми, а, следовательно, симметричными по времени. Обозначая

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i0} + \Delta \mathbf{x}_i(\vec{x}_0, t) \quad (2.2.44)$$

и ограничиваясь в разложении $V_i(\vec{x})$ в ряд Тейлора

$$V_i(\vec{x}) = V_i(\vec{x}_0) + \sum_j \frac{\partial V_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} \Delta x_j(\vec{x}_0, t) + \dots \quad (2.2.45)$$

линейными членами, получаем из (2.2.31) однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \sum_j \frac{\partial V_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} \Delta x_j(\vec{x}_0, t), \quad (2.2.46)$$

или, обозначая $\Delta x_i = w_i$,

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_j \frac{\partial V_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j} w_j. \quad (2.2.47)$$

Это и есть уравнения (2.2.35) Лихтенберга и Либермана.

Хотя коэффициенты $\partial V_i(\vec{x}_0)/\partial x_k$ в правой части (2.2.47) и берутся в точке $\vec{x}_0$, величинам $V_i(\vec{x}_0)$, чтобы сумма, стоящая в правой части тождества (2.2.45), обладала той же симметрией по времени, что и левая часть, должны обладать той же симметрией по времени, что и функции $V_i(\vec{x})$.

Запишем, далее, уравнения (2.2.47) в виде (см. соотношения (2.2.9)–(2.2.12))

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_j a_{ij} w_j, \quad (2.2.48)$$

где

$$a_{ij} = \frac{\partial V_i(\vec{x}_0)}{\partial x_j}. \quad (2.2.49)$$

Считая кратность корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & \dots & a_{1(2s)} \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & \dots & a_{2(2s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(2s)1} & a_{(2s)2} & \dots & a_{(2s)(2s)} - \sigma \end{vmatrix} = 0 \quad (2.2.50)$$

этой системы равной 1, ее частные решения записываем в виде

$$w_i(\vec{x}_0, t) = w_i(\vec{x}_0, 0) \exp \{ \sigma_i t \} \quad (2.2.51)$$

[Математический..., 1988. С. 316]. Это и дает для σ_i выражение

$$\sigma_i = \frac{1}{t} \ln \frac{w_i(\vec{x}_0, t)}{w_i(\vec{x}_0, 0)} = \frac{1}{t} \ln \frac{\Delta x_i(\vec{x}_0, t)}{\Delta x_i(\vec{x}_0, 0)}, \quad (2.2.52)$$

служащее Лихтенбергу и Либерману базовым при определении коэффициентов Ляпунова $\sigma_i(x_0)$.

В случае гамильтоновой системы, когда имеют место равенства (2.2.32)–(2.2.33) с симметричным по времени гамильтонианом $H(q, p)$, уравнения (2.2.46) симметричны по времени, в чем несложно убедиться непосредственно, учитывая, что величины $V_i(\vec{x}_0)$, как говорилось, при инверсии времени ведут себя так же, как и функция $V_i(\vec{x})$. Поскольку же коэффициентами Ляпунова называют числа σ_i , не изменяющие знака при инверсии времени, то экспоненты (2.2.51) несимметричны по времени и потому не могут быть в рассматриваемом обратимом случае решениями

уравнений (2.2.46). Их решения следует брать здесь в виде симметричных по времени функций

$$w_i(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{2} w_i(\vec{x}_0, 0) (\exp \{\sigma_i t\} + \exp \{-\sigma_i t\})$$

или

$$w_i(\vec{x}_0, t) = \begin{cases} w_i(\vec{x}_0, 0) \exp \{\sigma_i t\} & \text{при } t > 0, \\ w_i(\vec{x}_0, 0) \exp \{-\sigma_i t\} & \text{при } t < 0 \end{cases} \quad (2.2.53)$$

(ср. с выражением (1.3.19)). Описывая *обратимую* локальную неустойчивость, эти решения не дают одностороннего разбегания фазовых траекторий; с равной вероятностью они и «сбегаются», что обеспечивает в итоге *обратимое* перемешивание траекторий, т. е. *обратимую стохастичность движения* (см. рис. 1.3.2 и связанный с ним текст).

Таким образом, в обратимом случае коэффициенты Ляпунова $\sigma_i(\vec{x}_0)$ могут быть как положительными, так и отрицательными, однако каждому из них отвечают *две* экспоненты — $\exp \{\sigma_i t\}$ и $\exp \{-\sigma_i t\}$. Каждый из этих $2s$ коэффициентов $\sigma_i(x_0)$ характеризует скорость перемешивания фазовых траекторий в одном из $2s$ направлений фазового пространства и потому, действительно, может служить мерой обратимой стохастичности, соответствующей данному направлению. Усредненный же показатель Ляпунова $\sigma(\vec{x}_0)$ характеризует скорость обратимого перемешивания, усредненную по всем направлениям, будучи, поэтому, усредненной мерой обратимой стохастичности.

В необратимом случае, когда уравнения движения несимметричны по времени, несимметричны по времени и линеаризованные уравнения движения (2.2.46). В качестве частных решений этих линеаризованных уравнений следует брать уже несимметричные по времени экспоненты (2.2.51). Здесь коэффициенты Ляпунова $\sigma_i(\vec{x}_0)$ также могут быть как положительными, так и отрицательными, однако каждому из них отвечает уже *одна* экспонента, описывающая разбегание *или* сближение фазовых траекторий, соответствующее i -му направлению в фазовом пространстве. Если перевешивают положительные показатели Ляпунова, необратимые процессы протекают с возрастанием фазового объема, если отрицательные — с его уменьшением (последнее, естественно, должно обеспечиваться окружающей системой средой). Отдельные показатели Ляпунова $\sigma_i(\vec{x}_0)$ можно считать в этом случае мерами стохастичности, отвечающими соответствующим направлениям в фазовом пространстве, усредненный же показатель $\sigma(x_0)$, характеризуя усредненную скорость экспоненциального разбегания траекторий и тем самым — скорость изменения фазового объема системы, стохастичность ее движения уже, строго говоря, не характеризует. Можно представить себе, например, две системы, в первой из которых перемешивание по отдельным направлениям происходит быстрее, чем во второй (коэффициенты $\sigma_i(\vec{x}_0)$ больше), однако суммар-

ное изменение фазового объема происходит медленнее (коэффициенты Ляпунова разных знаков в большей степени уравнивают друг друга).

Итак, мы ответили на второй из двух заданных выше вопросов. Что касается равенства (2.2.43), о котором идет речь в первом вопросе, то ему в обратимом случае, как вытекает из предыдущего, соблюдаться нет необходимости. Имеет место другое: фазовый объем сохраняется здесь за счет того, что каждому из $2s$ показателей Ляпунова $\sigma_i(\vec{x}_0)$ отвечают по две экспоненты $\exp\{\sigma_i t\}$ и $\exp\{-\sigma_i t\}$, описывающие обратимое локальное разбегание траекторий, которое отвечает одному из $2s$ направлений фазового пространства, давая нулевой вклад в изменение фазового объема системы.

Равенства же (2.2.41)–(2.2.42) справедливы и для необратимых, и для обратимых систем. Только, на мой взгляд, неверно, что в выражении (2.2.41) участвуют *наибольшие* показатели Ляпунова: k -мерный фазовый объем V_k охватывает k измерений фазового пространства, каждое из которых и должно быть представлено в выражении (2.2.41), независимо от величины отвечающих этим измерениям показателей Ляпунова. Величина $\sigma^{(2s)}$ равна средней локальной скорости экспоненциального роста $2s$ -мерного фазового объема системы, и поэтому в выражении (2.2.42) для нее участвуют все $2s$ показателей Ляпунова $\sigma_i(\vec{x}_0)$.

Будучи локальными, показатели Ляпунова характеризуют скорость разбегания траекторий в данном элементе фазового объема, причем это разбегание описывается экспоненциальной зависимостью только в рамках определенного приближения, которое применительно к реальным системам с динамическим хаосом достаточно далеко от действительности (см. концовку разд. 1.4). Если все же траектории разбегаются экспоненциально и необратимо, то экспоненциально изменяется (растет) и весь фазовый объем системы, которая является в этом случае K -системой, характеризуясь определенным значением K -энтропии. Если траектории разбегаются необратимо, но неэкспоненциально, то система не является K -системой, и K -энтропия для нее не может быть введена. Как говорилось в разд. 1.3.4, класс K -систем совпадает с классом околоравновесных систем, описываемых основным кинетическим уравнением и поддерживающих скорость роста энтропии постоянной за счет среды. Однако показатели Ляпунова могут быть введены и вне околоравновесной области, а вместе с ними может быть введена и величина (1.3.47), не являющаяся в этом общем случае K -энтропией.

2.2.4.2. Бифуркации

Большое значение в теории динамического хаоса имеет понятие *бифуркации* (от лат. *bifurcatio* — раздвоение). Первоначально точкой бифуркации называли значение параметра системы, при котором ее фазовая траектория раздваивается. Сегодня под бифуркацией чаще понимают всякое изменение топологической структуры динамической системы в ее

фазовом пространстве вследствие изменения значений параметров. Значения параметров, при которых происходит это изменение структуры, называют *бифуркационными*.

В качестве второго примера приведем *бифуркацию Хопфа*, когда особая точка превращается в предельный цикл [Норф, 1942]. Пусть, например, система описывается уравнениями

$$\frac{dr}{dt} = \mu r - r^2, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_0 > 0, \quad (2.2.54)$$

где r, θ — полярные координаты [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 416]. При $\mu < 0$ имеем $\dot{r} < 0$, вследствие чего фазовая траектория системы свортывается к устойчивому фокусу в точке $r = 0$. При $\mu > 0$ ситуация вблизи $r = 0$ иная: $\dot{r} > 0$ для $r < \mu$, $\dot{r} < 0$ для $r > \mu$ и $\dot{r} = 0$ для $r = \mu$. Это значит, что фазовая траектория представляет собой в этом случае устойчивый предельный цикл $r(t) = \mu$, $\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$ (см. определения устойчивого фокуса и предельного цикла, следующие в разд. 2.2.2

за соотношением (2.2.13); в данном конкретном случае предельный цикл представляет собой окружность). Таким образом, при переходе через бифуркационное значение параметра $\mu_0 = 0$ фазовая «картинка» данной системы сменяется: устойчивый фокус превращается в предельный цикл.

Термин *бифуркация* фигурирует уже в работах Карла Якоби (1804–1851), задачу же исследования основных типов бифуркации первым четко поставил в конце XIX в. все тот же Анри Пуанкаре. Этим занята и современная теория бифуркаций²³⁾.

Значение бифуркаций в теории динамического хаоса определяется тем обстоятельством, что именно с ними связан переход системы от регулярного движения к стохастическому, при котором фазовая траектория, изменяя свою топологию, перестает быть «более или менее» гладкой линией. Таков, к примеру, достаточно универсальный механизм Фейгенбаума перехода к хаосу в системах, совершающих периодическое колебание, через каскад бифуркаций удвоений периода (см. разд. 2.4.4).

В общем случае, таким образом, динамическая система, фиксируемая системой уравнений движения определенного вида, может совершать как регулярное, так и стохастическое движение, в зависимости от значений параметров, фигурирующих в этих уравнениях. И задача теории состоит

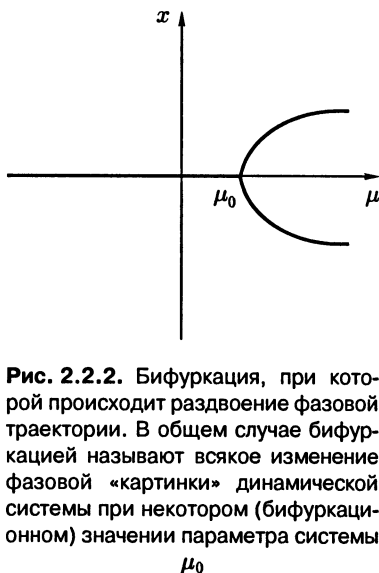


Рис. 2.2.2. Бифуркация, при которой происходит раздвоение фазовой траектории. В общем случае бифуркацией называют всякое изменение фазовой «картинки» динамической системы при некотором (бифуркационном) значении параметра системы μ_0

²³⁾ [Андронов и др., 1967; Sattinger, 1973; Марсден, Мак-Крaken, 1980; Iooss, Joseph, 1981].

в выявлении областей значений этих параметров, в пределах которых имеет место динамический хаос. Вот почему исследование динамической системы на регулярность/стохастичность движения включает в себя как составную часть анализ системы на предмет выявления ее точек бифуркации и установление их типа.

2.2.4.3. Квантовый хаос

Существует миф, согласно которому динамический хаос в квантовых системах, совершающих финитное движение, невозможен:

«Динамические системы с дискретным спектром не обладают перемешиванием» [Синай, 1961].

«В квантовой механике динамический хаос невозможен из-за дискретности спектра ограниченной в фазовом пространстве замкнутой системы [Крылов, 1950] и дискретности самого фазового пространства» [Чириков, 1983. С. 361].

«Общая теорема квантовой механики (? — С. Х.) утверждает, что квантово-механическая система, заключенная в *конечный* объем, имеет дискретный спектр. Следовательно, если мы хотим получить непрерывный спектр, то нам необходимо перейти к пределу и рассмотреть бесконечную систему. Такое поведение квантовых систем отличается от поведения классических систем... Различие связано с тем, что классический оператор Лиувилля (см. соотношение (1.1.10). — С. Х.) действует на фазовом пространстве, содержащем скорости (или импульсы), которые всегда являются непрерывными переменными, в то время как [квантовый] оператор Гамильтона действует на координатном пространстве (или на импульсном пространстве), но не на координатном и импульсном пространстве одновременно (выделено И. Пригожиным. — С. Х.)» [Пригожин, 1985. С. 85].

Дальнейшее рассмотрение потребует небольшого экскурса в квантовую механику. Наряду с *операторной* и *матричной* формами здесь применяется *фазовая*. Если мы располагаем набором собственных функций $\Psi_n(x)$ некоторого динамического оператора $\hat{B}$, то матрица A_{mn} оператора $\hat{A}$ в представлении оператора $\hat{B}$ вводится выражением

$$A_{mn} = \int \Psi_n^*(x) \hat{A} \Psi_m(x) dx. \quad (2.2.55)$$

В операторной форме среднее значение динамической величины $\bar{A}$ определяется с помощью статистического оператора $\hat{\rho}$ выражением

$$\bar{A} = Sp(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (2.2.56)$$

в матричной —

$$\bar{A} = \sum_{m,n} \rho_{mn} A_{nm}. \quad (2.2.57)$$

Фазовая динамическая величина $A(x', x)$ определяется выражением

$$A(x', x) = \sum_{m,n} \Psi_n^*(x') A_{mn} \Psi_m(x), \quad (2.2.58)$$

фазовая плотность $\rho(x', x)$ —

$$\rho(x', x) = \sum_{m,n} \Psi_n^*(x') \rho_{mn} \Psi_m(x). \quad (2.2.59)$$

В отличие от классического случая, квантовые величины $A(x', x)$ и $\rho(x', x)$, вообще говоря, комплексны, вещественно лишь среднее $\bar{A}(x', x) = \bar{A}$, для которого с использованием соотношений (2.2.57) и (2.2.58)–(2.2.59) получаем выражения

$$\bar{A} = \int \rho(x', x) A(x, x') dx dx' = \int \rho(x, x') A(x', x) dx dx'. \quad (2.2.60)$$

Из вещественности среднего следует эрмитовость операторных, матричных и фазовых величин:

$$\hat{A}^* = \widetilde{\hat{A}}, \quad \hat{\rho}^* = \widetilde{\hat{\rho}}, \quad (2.2.61)$$

$$A_{mn}^* = A_{nm}, \quad \rho_{mn}^* = \rho_{nm}, \quad (2.2.62)$$

$$A^*(x', x) = A(x, x'), \quad \rho^*(x', x) = \rho(x, x') \quad (2.2.63)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение, тильда — транспонирование).

Фазовая форма квантовой механики используется сегодня значительно менее широко, чем операторная и матричная. Фазовое определение среднего (2.2.60) нами, по-видимому, было выписано вообще впервые [Хайтун, 1996. С. 25]; ключевым в нем является перекрестное расположение штрихов. Незвестным, насколько я могу судить, является и тот представляющий фундаментальным факт, что *в квантовой механике действует теорема Лиувилля* для фазовой жидкости, из которой следует квантовое уравнение Лиувилля, дающее, в свою очередь, уравнение Шрёдингера.

Положить в основание квантовой механики теорему Лиувилля мешает широко распространенное представление о *дискретности фазового пространства квантовой системы*, т.е. о наличии в нем ячеек объемом $(2\pi\hbar)^s$ (s — число степеней свободы системы), позволяющих, в соответствии с принципом неопределенности, фиксировать микросостояния лишь с конечной точностью. Рассмотрение соотношений (2.2.58)–(2.2.59), связывающих матричные величины A_{mn} и ρ_{mn} с фазовыми $A(x', x)$ и $\rho(x', x)$, показывает, однако, что это представление ошибочно: возможная дискретность первых прекрасно уживается в этих соотношениях с непрерывностью вторых. *Дискретность квантового фазового пространства оказывается мифом*. Оно было бы дискретным, если бы речь шла об отдельном измерении значений координат и импульсов *микросистемы*. Сетки же квантовых ячеек $(2\pi\hbar)^s$, отвечающих *всем возможным* измерениям значений координат и импульсов ансамбля, которые учитываются в $\rho(x', x)$, взаимно размываются, накладываясь друг на друга.

Считая фазовую плотность и описываемую ею фазовую жидкость квантовой системы непрерывными, можно записать для нее уравнение непрерывности и получить из него в гамильтоновом варианте теорему и уравнение Лиувилля. Непрерывными могут считаться в квантовой механике и фазовые динамические величины, что также позволяет получить для них уравнения, аналогичные классическим.

При получении квантовых уравнений из классических можно идти от классических скобок Пуассона (см. соотношения (С. 2.3–7)), переходя от них к квантовым:

$$[A, B] \rightarrow \begin{cases} [\hat{A}, \hat{B}] = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}), \\ [\hat{A}, B(x', x)] = \frac{i}{\hbar}(\hat{A}(x)B(x', x) - B(x', x)\hat{A}(x')). \end{cases} \quad (2.2.64)$$

Здесь оператор $\hat{A}(x)$ действует на переменные x , а оператор $\hat{A}(x')$ — на переменные x' . Уравнения Гамильтона (С. 2.7) принимают при этом вид:

$$\begin{aligned} \frac{dq_j(x', x, t)}{dt} &= [\hat{H}, q_j(x', x, t)], & \frac{d\hat{q}_j}{dt} &= [\hat{H}, \hat{q}_j], \\ \frac{dp_j(x', x, t)}{dt} &= [\hat{H}, p_j(x', x, t)], & \frac{d\hat{p}_j}{dt} &= [\hat{H}, \hat{p}_j]. \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

Квантовый аналог классической теоремы Лиувилля (1.1.5):

$$\frac{d\rho(x', x, t)}{dt} = 0, \quad \frac{d\hat{\rho}}{dt} = 0. \quad (2.2.66)$$

Квантовый аналог классического уравнения Лиувилля (1.1.9):

$$\frac{\partial \rho(x', x, t)}{\partial t} = [\rho(x', x, t), \hat{H}], \quad \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{\rho}, \hat{H}] = -i\hat{L}\hat{\rho}. \quad (2.2.67)$$

В квантовой механике различают случаи *чистого ансамбля*, когда фазовая плотность (2.2.59) распадается на произведение волновой функции $\Psi(x)$ и комплексно ей сопряженной:

$$\rho(x', x) = \left(\sum_n \Psi_n^*(x') a_n^* \right) \left(\sum_m \Psi_m(x) a_m \right) = \Psi^*(x') \Psi(x), \quad (2.2.68)$$

т. е. когда

$$\rho_{mn} = a_m a_n^*, \quad (2.2.69)$$

и *смешанного ансамбля*, когда сведение фазовой плотности к произведению волновых функций невозможно. Для чистого ансамбля теорема Лиувилля принимает форму

$$\frac{d\Psi(x, t)}{dt} = 0, \quad (2.2.70)$$

а уравнение Лиувилля переходит в уравнения Шрёдингера для волновой функции $\Psi(x)$

$$\frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} \hat{H} \Psi(x, t) \quad (2.2.71)$$

и комплексно ей сопряженной $\Psi^*(x)$.

Впервые, по-видимому, было выписано нами и определение квантовой фазовой энтропии [Хайтун, 1996. С. 28]

$$\begin{aligned} S &= -k \int \rho(x', x) \ln \rho(x', x) dx dx' = \\ &= -k \int \rho(x, x') \ln \rho(x, x') dx dx' \end{aligned} \quad (2.2.72)$$

(здесь также существенно перекрестное расположение штрихов). Подставляя сюда разложение (2.2.59), получаем традиционные выражения

$$S = - \sum_{m,n} \rho_{mn} \ln \rho_{mn} = -k Sp(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -k \sum_n \rho_n \ln \rho_n \quad (2.2.73)$$

(ρ_n — диагональные элементы матрицы плотности ρ_{mn} в диагональном представлении)²⁴).

В чистом состоянии, когда в диагональном представлении матрица плотности имеет только один отличный от нуля элемент, квантовая энтропия тождественно равна нулю, будучи отличной от нуля в смешанном состоянии. Это происходит по той не всегда проговариваемой сегодня причине, что *чистый ансамбль является квантовым аналогом классической нестатистической системы*, т.е. системы, совершающей регулярное движение, а *смешанный ансамбль — классической статистической системы*, т.е. системы с динамическим хаосом. В случае чистого состояния измерение дает с достоверностью определенное собственное значение A_n динамической величины A , в случае же смешанного состояния имеем ансамбль систем, находящихся в чистых состояниях, и измерение может дать любое собственное значение A_n с вероятностью, определяемой соответствующим диагональным элементом матрицы плотности.

Возвращаемся к вопросу о реальности квантового динамического хаоса. Поскольку смешанный ансамбль, являющийся квантовым аналогом классической системы с динамическим хаосом, является неизменным

²⁴) Определение (2.2.72) позволяет утвердиться в правильности идущего от Дж. фон Неймана определения квантовой энтропии выражениями (2.2.73). Отсюда следует вывод об ошибочности определения квантовой энтропии выражением

$$S = -k \sum_n \rho_{nn} \ln \rho_{nn} \quad (C.2.15)$$

(ρ_{nn} — диагональные элементы матрицы плотности в произвольном представлении), которое было использовано автором этих строк при рассмотрении квантового парадокса Гиббса [Хайтун, 1986. С. 115–116].

атрибутом квантового описания, постольку мы приходим к выводу, что квантовая дискретность не препятствует возникновению динамического хаоса. Если бы процитированные в начале настоящего раздела авторы были правы, то смешанные состояния, для которых матрица плотности не может быть заменена описывающей регулярное движение волновой функцией, были бы возможны только для бесконечных систем, для конечных же систем было бы лишено смысла самое введение матрицы плотности.

Абсурдность этого вывода, вытекающего из тезиса о невозможности динамического хаоса в квантовой дискретной системе, вызывает у физиков естественную защитную реакцию, помогающую его смягчить. Например, Б. В. Чириков выдвигает идею переходного квантового хаоса на некотором диффузионном масштабе времени. Продолжая вышеприведенное высказывание, он пишет:

«Однако принцип соответствия требует перехода к классической механике, в том числе и к динамическому хаосу. Это противоречие разрешается... с помощью понятия о временном, или переходном, хаосе, т. е. путем введения различных масштабов времени, на которых имитируются или иные свойства динамического хаоса» [Чириков, 1983. С. 361].

Другой вариант защиты: для конечных квантовых систем отрицается только динамическая неустойчивость системы (связанная с размытостью ее начального состояния), но не параметрическая (связанная с размытостью значений параметров уравнений движения):

«В классических системах эти два типа неустойчивости, как правило, связаны: наличие динамической неустойчивости означает, что имеет место и параметрическая, и наоборот... В квантовой механике ситуация иная. Динамическая неустойчивость в квантовой механике отсутствует [Вигнер, 1971]... Физический смысл результата прост — он связан со структурой фазового пространства: при изменении только начальных условий положение уровней системы E_j не меняется... энергетические слои не смешаются, и структура фазового пространства остается прежней. При изменении параметров системы ситуация иная» [Чернавская, Чернавский, 1980. С. 32–33].

Отсылка к Е. Вигнеру, однако, здесь некорректна, поскольку он утверждает, что неопределенность результатов измерения не изменяется во времени не только для квантовой, но и для классической системы:

«Согласно квантово-механической теории, степень предсказуемости результатов всевозможных измерений, производимых над системой, не убывает с увеличением промежутка времени, в течение которого система предоставлена самой себе: непосредственно после наблюдения степень предсказуемости так же велика, как и много времени спустя... В классической механике аналогом этого утверждения служит теорема Лиувилля. Она говорит нам следующее: если известно, что в некоторый момент времени точка, изображающая в фазовом пространстве состояние рассматриваемой системы, находится в элементе объема определенной величины, то для любого момента времени в будущем можно указать равный по величине элемент объема,

который будет содержать точку, изображающую состояние рассматриваемой системы. Аналогично неопределенность в результате измерения в момент времени 0 величины Q_0 равна неопределенности измерения в момент времени t величины $Q_t = \exp \{-iHt/\hbar\} Q_0 \exp \{iHt/\hbar\}$ [Вигнер, 1971. С. 143].

Вигнер просто забывает о перемешивании фазовой жидкости, увеличивающей во времени неопределенность результатов измерения.

Возвращаясь к квантовому хаосу, подчеркнем, что трудности с ним носят существенный характер. Проблема возникла из убеждения в дискретности фазового пространства квантовой системы, откуда и делается вывод о невозможности перемешивания микросостояний, требующего сколь угодно тесного расположения фазовых траекторий, а, следовательно, и динамического хаоса в конечных квантовых системах. Надуманность этой проблемы сегодня становится все более ясной, и квантовый хаос все чаще обсуждается в литературе [Parmenter, Yu, 1993; Saito, Shudo, 1993].

Перемешивание отсутствует в квантовой системе лишь в случае описываемого волновой функцией регулярного движения, когда у матрицы ρ_{mn} в ее диагональном представлении отличен от нуля только один элемент и когда, следовательно, все измерения дают одно-единственное значение энергии. В случае же смешанного ансамбля измерение может дать любое из собственных значений энергии, что и означает перемешивание стационарных состояний. Точно так же для смешанного ансамбля имеет место перемешивание микросостояний, отвечающих разным собственным значениям A_n оператора $\hat{A}$ любой динамической величины. Если в классическом случае динамический хаос выражается в перемешивании всех микросостояний, находящихся в данной стохастической области фазового пространства, то в квантовом речь идет о перемешивании микросостояний, описываемых разными собственными функциями Ψ_n данного динамического оператора $\hat{A}$. Классическое перемешивание непрерывных фазовых траекторий переходит в квантовом случае в перемешивание дискретных микросостояний.

Таким образом, квантовая дискретность вещества не мешает квантовому описанию быть непрерывным. Реально работают в координатном или импульсном представлении, в которых соответствующие фазовые функции $\rho(q', q)$, $A(q', q)$ и $\rho(p', p)$, $A(p', p)$ непрерывны, так что ничто не мешает фазовым траекториям быть в этих представлениях бесконечно близкими. Что же касается квантовой дискретности вещества, то она проявляется — скажем это еще раз — в возможности написания дискретных матриц ρ_{mn} и A_{mn} , прекрасно сочетающихся с непрерывными фазовыми функциями $\rho(x', x)$ и $A(x', x)$. Соотношение неопределенности реально приводит не к дискретности фазового пространства квантовой системы, но к изменению его состава: координатно-импульсное классическое пространство (q, p) переходит в квантовом случае либо в координатно-координатное пространство (q', q) , либо в импульсно-импульсное пространство (p', p) .

2.2.4.4. Романовский и др.: некорректное выведение необратимости системы из ее неустойчивости

В теории устойчивости динамических систем общее для всей современной теории динамического хаоса неразведение обратимого и необратимого хаоса проявляется как неразведение понятий обратимой и необратимой неустойчивости. В качестве примера сошлемся на книгу [Романовский и др., 1984], авторов которой такое неразведение приводит к ошибочному объяснению необратимости неустойчивостью. Основная идея предлагаемого ими решения проблемы необратимости²⁵⁾

«связана не с отрицанием какого-либо положения механики, а с вопросом о соответствии между вычисляемыми и наблюдаемыми переменными... Если решение какой-либо динамической задачи неустойчиво (будь то движение или стационарное состояние), реальные наблюдения наверняка приведут к результату, сильно отличающемуся от решения. Ясно, например, что невозможно наблюдать карандаш, сколь угодно долго стоящий на острие, хотя решение, соответствующее такому состоянию, существует... механический процесс может стать необратимым по времени, если он сам или обратный ему процесс неустойчивы... В неустойчивых процессах исчезающе малая „причина“ может вести к большому „следствию“. В этом случае разумнее считать причиной явления не исчезающе малые возмущения, а саму неустойчивость. Можно сказать, что *причиной нарушения обратимости является свойство системы — ее неустойчивость*» (выделено мной. — С. Х.) [Романовский и др., 1984. С. 260–261].

Соглашаясь с Ю. М. Романовским и др. в том пункте, что состояния неустойчивого равновесия трудно реализуемы, мы вынуждены тем не менее заявить, что объяснение необратимости одной лишь неустойчивостью недостаточно. В случае обратимого динамического хаоса, каковой имеет место, например, в случае равновесного газа, фазовые траектории системы неустойчивы, однако эта их неустойчивость обратима (см. соотношения (1.3.18)–(1.3.19) и связанный с ними текст). Ошибка Романовского и др. идет от неверно истолкованного примера с карандашом²⁶⁾. Из того факта, что поставленный на острие карандаш неизбежно падает, отнюдь не следует необратимость этого падения. Нельзя же считать необратимым, скажем, падение камня в поле тяжести Земли на том основании, что камни всегда падают вниз! И в том, и в другом случае движение может описываться симметричными по времени уравнениями механики и быть, поэтому, обратимым.

Обратимым в механике называют движение, которое *может быть обращено*. В данном случае это означает, что *если* упавшему на стол карандашу сообщить импульс, в точности равный по абсолютной величине тому, что он имел при касании стола, но противоположно направленный, то,

²⁵⁾ См. об этой проблеме первый абзац и сноску к нему в разд. 1.3.1.

²⁶⁾ Образ стоящего на острие карандаша идет от А. Пуанкаре — см. в разд. 2.2.1 его пример со стоящим на вершине конусом.

повторив траекторию падения, карандаш вернется в начальное положение. То же и с камнем, упавшим на Землю: его движение, если пренебречь трением о воздух и прочими необратимыми явлениями, также может быть соответствующим образом обращено. Так что падение карандаша, стоящего на острие, может быть обратимым, если происходит в идеальных условиях, и необратимым, если падение происходит в реальных условиях. В первом случае равновесие неустойчиво обратимо, во втором — необратимо. Так что истолкование Романовским и др. этого примера некорректно.

2.2.4.5. Обсуждение

Если подвести итоги представленного в разд. 2.2.4 развития теории устойчивости динамических систем на сегодняшний день, то следует сказать, что, объяснив, каким образом уравнения динамики дают динамический хаос, она ликвидировала пропасть между динамикой и статистической физикой. Оказалось, что регулярное движение становится стохастическим из-за всегда присутствующей *размытости микросостояний* плюс из-за появляющейся в определенных случаях *неустойчивости фазовых траекторий*.

2.3. КАМ-теорема

Особый интерес для теории динамического хаоса представляет то, каким образом происходит переход от регулярного движения к стохастическому. Другими словами, — системы, являющиеся переходными между системами с регулярным и стохастическим движением, или *слабо стохастические* системы. На анализ именно таких систем и нацелена знаменитая КАМ-теорема, продолжающая и в определенном смысле завершающая линию исследований Лиувилля—Пуанкаре интегрируемых/неинтегрируемых систем, о которых говорилось в разд. 2.2.3. Напомним основные этапы этих исследований.

Лиувилль установил, что если для данной механической системы с s степенями свободы могут быть аналитически заданы s однозначных и функционально независимых интегралов движения, то она интегрируема и совершает регулярное периодическое или квазипериодическое движение на s -мерном торе, фиксируемом значениями этих s интегралов движения.

Пуанкаре, используя методы теории возмущений, рассмотрел систему, мало отличающуюся от интегрируемой, доказав, что для такой сколь угодно мало возмущенной системы ее интегралы движения (за исключением энергии) уже не являются однозначными аналитическими функциями своих аргументов.

Напомним также об Э. Ферми (см. разд. 1.2.3), предпринявшем попытку напрямую отождествить движение, совершаемое близкими к интегрируемым системами Пуанкаре (следуя Пуанкаре, Ферми называет их канонически нормальными) со стохастическим. Его попытка не удалась,

Ферми удалось доказать только квазиэргодичность таких систем. Между тем квазиэргодической может быть не только система, совершающая стохастическое движение, но и интегрируемая система, осуществляющая квазипериодическое регулярное движение на многомерном торе, когда фазовая траектория плотно заполняет всю его поверхность.

В КАМ-теореме вопрос о том, что происходит с интегрируемыми системами при их возмущении, формулируется точнее. Что делается, спрашивается в ней, с s -мерным тором, на котором происходит движение интегрируемой системы, при ее возмущении? Понятно, что когда возмущение велико, тор полностью разрушается, и имеет место динамический хаос. Но вот разрушается ли тор, когда возмущение мало, но все же отлично от нуля?

Поскольку в общем случае приходится говорить о *вероятности* разрушения тора (понимание этого — само по себе достижение), в КАМ-теореме переходят к рассмотрению ансамбля систем, движение каждой из которых происходит в общем для всех них $2s$ -мерном фазовом пространстве на собственном торе, фиксируемом характеризующим данную отдельную систему набором значений s изолирующих интегралов движения. При достаточно малом возмущении, говорит КАМ-теорема, большинство этих торов не разрушается, а лишь слегка деформируется.

КАМ-теорема названа по фамилиям А. Н. Колмогорова [1954], сформулировавшего теорему и предложившего идею ее доказательства, и А. И. Арнольда [1963] и Ю. Мозера [Moser, 1961, 1962], доказавших ее независимо друг от друга. Смысл и приложения КАМ-теоремы обсуждаются в целом ряде работ²⁷⁾.

Итак, пусть $H_0(J_1, \dots, J_s)$ — гамильтониан интегрируемой (невозмущенной) системы в переменных действие–угол. Будем считать, что движение фазовой точки этой системы на s -мерном инвариантном торе

$$J_i = \text{const}, \quad i = 1, \dots, s \quad (2.3.1)$$

является квазипериодическим с частотами

$$\omega_i = \dot{\alpha}_i = \frac{\partial H_0(J_1, \dots, J_s)}{\partial J_i}. \quad (2.3.2)$$

(см. соотношение (2.2.23)). Квазипериодичность движения означает, что отношения ω_i/ω_j разных частот выражаются иррациональными числами; такие торы называются *нерезонансными*.

Рассмотрим, далее, в качестве возмущенной систему с гамильтонианом

$$H = H_0(J_1, \dots, J_s) + \varepsilon H_1(J_1, \dots, J_s, \alpha_1, \dots, \alpha_s), \quad (2.3.3)$$

где ε — безразмерный параметр, характеризующий возмущение, $\varepsilon \ll 1$.

²⁷⁾ [Moser, 1966, 1967, 1973; Чириков, 1969; Siegel, Moser, 1971; Арнольд, 1974; Whiteman, 1977; Заславский, 1983, 1984; Лихтенберг, Либерман, 1984; Арнольд и др., 1988; Шустер, 1988; Мухин, 2005].

Наложим на систему три условия. *Условие первое*: невозмущенный гамильтониан предполагается невырожденным в следующем смысле:

$$\det \left| \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \right| = \det \left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_i \partial J_j} \right| \neq 0. \quad (2.3.4)$$

Условие второе: возмущение $H_1(J, \alpha)$ будем считать имеющим достаточно большое число непрерывных производных (гладкость возмущения).

Условие третье: система должна находиться достаточно далеко от резонанса, так что

$$|m_1 \omega_1 + \dots + m_s \omega_s| \geq \gamma |m|^{-\tau} \quad (2.3.5)$$

для всех наборов целых чисел $m = (m_1, \dots, m_s)$. Здесь τ зависит от числа степеней свободы системы, а γ — от величины возмущения.

Тогда движение возмущенной системы происходит для большинства начальных условий на нерезонансных инвариантных торах, лишь немного отличающихся от невозмущенных. Торы, неразрушающиеся при возмущении, составляют в общем множестве инвариантных торов большинство в том смысле, что они

«образуют нигде не плотное (из-за резонансных торов; см. далее. — С. X.) замкнутое множество, дополнение к которому имеет малую с ε меру» [Арнольд, 1963. С. 16].

Движение системы на неразрушенных торах остается квазипериодическим, т. е. регулярным. Разрушается малая часть торов, причем их мера стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Смысл первого условия, фигурирующего в КАМ-теореме, может быть раскрыт следующим образом [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 188]. В общем случае частоты $\omega_1, \dots, \omega_s$ связаны соотношением

$$f(\omega_1, \dots, \omega_s) = 0. \quad (2.3.6)$$

Дифференцируя, получаем

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \omega_i} d\omega_i = \sum_{i,j} \frac{\partial \omega_i}{\partial J_j} \frac{\partial f}{\partial \omega_i} dJ_j = 0 \quad (2.3.7)$$

для любых $dJ_1, \dots, dJ_s$. Это уравнение удобно записать в матричной форме

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial \vec{J}} \frac{\partial f}{\partial \vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \omega_1}{\partial J_1} & \dots & \frac{\partial \omega_1}{\partial J_s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \omega_s}{\partial J_1} & \dots & \frac{\partial \omega_s}{\partial J_s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \omega_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial \omega_s} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.8)$$

Если определитель матрицы $\partial \vec{\omega} / \partial \vec{J}$ не равен нулю, т. е. если справедливо условие (2.3.4) теоремы, то единственное решение этого уравнения имеет

вид

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\omega}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \omega_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial \omega_s} \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3.9)$$

Это означает, что не существует справедливого для всех $\vec{J}$ линейного соотношения

$$f = m_1 \omega_1 + \dots + m_s \omega_s. \quad (2.3.10)$$

Таким образом, условие (2.3.4) означает, что частоты невозмущенных колебаний связаны между собой *нелинейно*. Как говорит в сноске редактор русского перевода книги А. Лихтенберга и М. Либермана Б. В. Чириков,

«это условие необходимо для компенсации сдвига частот из-за возмущения ($\Delta \vec{\omega}$) путем изменения начальных условий ($\Delta \vec{J}$), т. е. для разрешимости системы линейных уравнений $\Delta \vec{\omega} = (\partial \vec{\omega} / \partial \vec{J}) \Delta \vec{J}$ относительно $\Delta \vec{J}$ » [Там же].

Второе условие, при котором справедлива КАМ-теорема, в расшифровке не нуждается. Третье же условие несет двойную нагрузку. Поскольку

«неравенство (2.3.5) не может выполняться при слишком большом значении γ , которое растет с $|\varepsilon H_1| \dots$ инвариантные торы существуют лишь при достаточно малой величине возмущения» [Там же. С. 185].

Кроме того, в сочетании с первым условием третье условие требует *умеренной нелинейности* зависимости частот невозмущенных колебаний [Там же], т. е. система должна находиться умеренно близко от резонансных частот, когда их отношения выражаются рациональными числами.

Еще раз подчеркнем, что в общем случае интегрируемой системы ее движение на инвариантном торе происходит с частотами, отношения которых могут выражаться как рациональными числами (резонансный тор), так и иррациональными (нерезонансный тор), однако в КАМ-теореме речь идет только о втором случае. Это связано с тем, что

«при рациональном отношении частот систему нельзя проинтегрировать с помощью теории возмущений. Причина этого — сильные резонансы в системе» [Шустер, 1988. С. 163].

В этом, впрочем, нет большой беды, поскольку, как говорилось²⁸⁾, в фазовом пространстве имеют физический смысл только множества точек ненулевой меры, так как только им отвечают ненулевые и потому наблюдаемые вероятности. Между тем *множество резонансных торов имеет меру нуль*:

²⁸⁾ См. текст между соотношениями (1.2.19) и (1.2.20).

«Можно показать, что нерезонансные торы образуют в фазовом пространстве множество полной меры, так что мера Лебега объединения всех резонансных торов невозмущенной системы равна нулю. Тем не менее резонансные инвариантные торы существуют и перемежаются с нерезонансными таким образом, что они также образуют всюду плотное множество... Заметим все же, что вероятность попасть на резонансный тор при случайном выборе начальной точки в фазовом пространстве невозмущенной системы равна нулю (так же как вероятность попасть на рациональное число при случайном выборе вещественного числа). Таким образом, пренебрегая множествами меры нуль, можно сказать, что почти все инвариантные торы в невырожденной невозмущенной системе нерезонансные» [Арнольд, 1974. С. 368–369].

Характер изменения резонансных торов под воздействием возмущения также хорошо изучен. Оказалось,

«что в этом случае исходные торы расщепляются на все меньшие и меньшие торы... некоторые из этих возникших торов оказываются также устойчивыми. Однако движение между устойчивыми торами полностью нерегулярно» [Шустер, 1988. С. 165]. «...При любом рациональном отношении [частот] размеры... устойчивых торов все более и более уменьшаются. Между этими торами возникают неподвижные... точки и, как следствие, нерегулярные траектории» [Там же. С. 169].

В результате

«исходный тор с рациональным отношением частот под действием возмущения разрушается лишь частично, оставаясь неразрушенным в четном числе неподвижных точек (теорема Пуанкаре—Биркгофа» [Там же. С. 167].

В общем случае системы с числом степеней свободы, большим 2,

«существование инвариантных торов для возмущенного движения еще не является гарантией его устойчивости в целом... нерегулярные траектории могут блуждать по всему фазовому пространству и подходить сколь угодно близко к любому тору» [Там же. С. 170].

Это явление носит название *диффузии Арнольда* [Арнольд, 1964].

Продолжая обсуждение КАМ-теоремы, следует сказать, что, как и говорилось, инвариантные торы, на которых происходит квазиэргодическое движение интегрируемых систем, разрушаются при возмущении, когда к интегрируемому гамильтониану присовокупляется неинтегрируемая добавка, но не все и не сразу; множество торов, остающихся при таком возмущении инвариантными, имеет конечную меру, стремящуюся, естественно, к нулю с ростом возмущения. Это значит, что *система может иметь неаналитические интегралы движения и быть при этом неинтегрируемой, оставаясь еще нестохастической*, т. е. совершая квазипериодическое движение, которое является, с другой стороны, квазиэргодическим.

Таким образом, регулярность/стохастичность движения не определяется интегрируемостью/неинтегрируемостью системы; Это означает, что начатые Пуанкаре поиски обоснования статистической механики на пути

исследования интегрируемых/неинтегрируемых систем (см. разд. 2.2.1), были обречены на неуспех:

«Вопрос о существовании интегралов движения при включении малого взаимодействия между различными степенями свободы исследовался Пуанкаре... практически при тех же условиях, что и в теореме КАМ. Результатом этих исследований явилась известная теорема Пуанкаре об отсутствии аналитических интегралов движения при сколь угодно малых [значениях параметра возмущения] ϵ . В дальнейшем были попытки в работах Ферми и Пригожина (см. [Пригожин, 1964]) использовать результаты этой теории для обоснования статистической механики. Безуспешность этих попыток стала очевидной только после теоремы КАМ. Действительно, система резонансных торов является всюду плотной в фазовом пространстве. Эти торы разрушаются в результате взаимодействия. Поэтому инвариантным торам „приходится“ очень сложным образом обходить области разрушения. Это приводит к тому, что *инвариантные торы существуют, но оказываются неаналитическими функциями своих переменных* (выделено мной. — С. Х.)» [Заславский, 1984. С. 40–41].

В целом КАМ-теорема сыграла большую роль в теории динамического хаоса. Используемый в ней аппарат теории возмущений оказался оптимальным для теоретического изучения перехода от регулярного движения к стохастическому. Оказалось, что этот переход осуществляется плавно, с ростом значения параметра возмущения ϵ все большая часть инвариантных поначалу торов разрушается. Не существует, строго говоря, порогового значения ϵ_0 , выше которого систему можно считать стохастической, а ниже — регулярной. Иногда, впрочем, в качестве такого порогового значения принимается значение ϵ , определяемое моментом, когда разрушается большинство (более половины) торов [Чириков, 1983. С. 360]. Впрочем, строгое определение этого значения ϵ_0 оказывается невозможным, обычно его определяют, используя соображения полукачественного порядка или численные методы.

КАМ-теория находит применение в ряде областей. Например, в небесной механике, поскольку

«в этой задаче все условия КАМ-теоремы превосходно удовлетворяются: система состоит из относительно массивного Солнца и малого числа легких планет, достаточно слабо возмущающих орбиты друг друга» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 364],

почему орбиты планет и оказываются устойчивыми. Используется КАМ-теорема также в задачах о движении частиц в ускорителях и магнитных ловушках, в динамике сплошной среды, при изучении колебаний молекул и т. д.

Применения КАМ-теоремы, однако, существенно ограничены тем обстоятельством, что в принципе ограниченными оказываются возможности используемой в ней теории возмущений. Во-первых, эта теория, как уже отмечалось, неприменима *вблизи резонансов*:

«Под действием возмущения регулярные траектории в некоторой окрестности резонансов изменяют свою топологию. Возникает характерная резонансная структура, напоминающая „острова“... причем, их фазовый объем также конечен. Эти острова являются „микромирами“ исходной возмущенной системы, содержащими собственные хаотические и регулярные траектории. Обычная теория возмущений не отражает изменения топологии фазового пространства, и для описания регулярного движения вблизи определенного резонанса или ограниченной системы резонансов была разработана специальная *резонансная теория возмущений* (выделено авторами. — С. Х.)» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 81].

Во-вторых, КАМ-теорема доказана только для системы с *конечным числом степеней свободы*.

«Однако для системы многих тел может вполне произойти накопление малых эффектов, дающее „катастрофическое“ поведение при $N \rightarrow \infty$. Такой вариант не освещается КАМ-теоремой» [Балеску, 1978. Т. 2. С. 372].

Наконец, КАМ-теория заведомо бесполезна, когда движение динамической системы далеко от регулярности:

«При анализе нелинейных задач широко используются методы теории возмущений (к которой относится и КАМ-теория. — С. Х.): вместо исходной динамической системы изучается близкая к ней интегрируемая система, на которую действует [малое] „возмущение“... В этой схеме неявно предполагается, что исследуемая система является интегрируемой... обычно это не так, и большинство многомерных динамических систем не интегрируемы. В таких системах хаотические траектории... занимают конечный фазовый объем, а их распределение среди регулярных траекторий оказывается всюду плотным. Теория возмущений не в состоянии описать всю сложность такого хаотического движения, что формально выражается в расходимости соответствующих рядов» [Лихтенберг, Либерман, 1983. С. 81].

Аналитических средств, которые были бы в общем случае пригодны для анализа динамических систем, совершающих стохастическое движение, не дает и никакая другая современная теория. Вот почему прогресс в изучении таких систем сегодня обеспечивают, главным образом, вычислительные эксперименты, которые показали, в частности, что реальные механизмы возникновения динамического хаоса иные, нежели те, что предлагаются КАМ-теорией.

2.4. Вычислительные эксперименты

Используемые в теории динамического хаоса вычислительные эксперименты сочетают компьютерные расчеты с аналитическими. Численно интегрируя уравнения движения данной динамической системы, здесь «руками» («в компьютере») воссоздают картину заполнения ее фазового пространства решением уравнений, т. е. «фазовой траекторией». «Фазовая

траектория» здесь забрана в кавычки потому, что, как показали эти эксперименты, само это понятие в области динамического хаоса в значительной степени теряет свой смысл. В эргодической и КАМ-теории фазовая траектория неявно полагается *непрерывной «более или менее гладкой» линией*, поскольку считается само собой разумеющимся, что решение дифференциальных уравнений движения является непрерывной «более или менее дифференцируемой» функцией своих переменных. Оказалось, однако, что в областях стохастического движения фазовая траектория ветвится или как-то иначе изменяет свою структуру «в каждой точке», что не позволяет считать ее линией.

Первым компьютерный эксперимент применил для изучения динамического хаоса Э. Н. Лоренц в 1963 г., однако использованные им уравнения движения несимметричны по времени, так что хаос в его системе *необратим*. Поскольку в настоящей книге принята классификация, согласно которой необратимый динамический хаос подведомственен синергетике, то статья Лоренца рассматривается в следующей главе (см. разд. 3.2.2). Первой же работой, в которой вычислительный эксперимент был использован для изучения *обратимого* динамического хаоса, была статья М. Хенона и К. Хейлеса [Hénon, Heiles, 1964]. За прошедшие после ее публикации десятилетия обратимый динамический хаос исследовался средствами вычислительного эксперимента в большом количестве работ²⁹).

2.4.1. Общие положения

При численном интегрировании динамической системы текущее положение фиксирующей ее состояние фазовой точки определяется через дискретные промежутки времени. Решение уравнений движения

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\vec{x}), \quad \vec{x} = (q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) \quad (2.4.1)$$

может быть записано в общем виде как преобразование, или отображение [map],

$$\vec{x}(t_0 + T) = \hat{T}\vec{x}(t_0). \quad (2.4.2)$$

Явный вид векторного оператора сдвига по времени $\hat{T}$ определяется уравнениями движения (2.4.1), т. е. векторной функцией $\vec{V}(\vec{x})$. В дискретной шкале времени, в которой реально выполняются компьютерные расчеты,

$$x_{n+1} = \hat{T}x_n. \quad (2.4.3)$$

Данная динамическая система может быть, фиксирована, таким образом, двумя эквивалентными способами: во-первых, дифференциальными уравнениями движения, т. е. явным видом векторной функции $\vec{V}(\vec{x})$, во-

²⁹) [Заславский, 1970, 1984; Chirikov, 1979, 1987; Чириков, 1982; Chirikov, Shepelyansky, 1986; Шустер, 1988; Безручко и др., 2005].

вторых, — явным видом оператора отображения $\hat{T}$, фиксирующего данный фазовый поток (в случае дискретного времени вместо термина *поток* часто используют термин *каскад*). Исследования динамической системы

«путем численного интегрирования уравнений Гамильтона очень трудоемки, поскольку шаг интегрирования должен быть много меньше характерного периода движения. В отличие от этого прямое итерирование заданного на том же периоде отображения может быть легко выполнено на сотни тысяч периодов и дает в существенных чертах ту же картину движения, что и уравнения Гамильтона» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 204].

По этой причине при рассмотрении стохастического движения, требующем трудоемких вычислений, обычно удобнее использовать отображения, тогда как при анализе регулярного движения, когда выкладки менее громоздки, часто довольствуются интегрированием уравнений движения. Добавим, что если уравнения движения симметричны по времени, то симметрично по нему и соответствующее уравнениям отображение, и наоборот.

«Как правило, в эксперименте удастся измерить не все характеристики системы, а лишь некоторые из них. Поэтому задача исследователя — воспроизвести аттрактор в фазовом пространстве, имея неполные данные... Была предложена методика, которую строго обосновал Ф. Такенс, позволяющая воссоздать фазовое пространство и реконструировать хаотический аттрактор. Вот как описывается эта методика (часто называемая сейчас методом Такенса, или методом задержанных координат) в обзорной статье [Крайтчфилд и др., 1987].

„Ее основная идея состоит в том, что эволюция отдельной компоненты системы определяется другими компонентами, с которыми она взаимодействует. Таким образом, информация о таких компонентах неявно содержится в ‘истории’ отдельной компоненты. Чтобы воссоздать ‘эквивалентное’ фазовое пространство, мы берем просто одну компоненту и обращаемся с измеренными значениями при фиксированных запаздываниях (например, секунду назад, две секунды назад и т. д.) так, как будто это новые размерности.

Эти ‘запоздалые’ значения можно рассматривать как новые координаты, задающие точку в многомерном пространстве. Повторяя процедуру с другими интервалами запаздывания, можно получить много таких точек. Затем другими приемами можно проверить, лежат или не лежат эти точки на хаотическом аттракторе. Хотя такое представление во многих отношениях произвольно, оказалось, что оно сохраняет большинство важных свойств аттрактора, которые, как выяснилось, не зависят от деталей реконструкции» [Безручко и др., 2005. С. 258–260].

Многочисленные компьютерные эксперименты в области динамического хаоса подтвердили полученные ранее теоретические выводы и дали картину стохастических областей в фазовом пространстве для многих конкретных систем. И, прежде всего, подтвердился полученный Я. Г. Сином (см. разд. 1.3.5) фундаментальный вывод о том, что стохастическое движение может происходить уже в системах с весьма небольшим числом степеней свободы (см. также в разд. 2.4.3 о статье М. Хенона и К. Хейлеса). Подтверждают экспериментальные данные и тезис, согласно которому динамический хаос может иметь место только в нелинейных системах.

2.4.2. Нелинейность уравнений движения как необходимое условие динамического хаоса

Этот тезис присутствует в качестве проходного у многих авторов. Например, в такой форме:

«Нелинейность — необходимое, но не достаточное условие для возникновения хаотического движения» [Шустер, 1988. С. 13.].

Б. В. Чириков добавляет, что нелинейность динамической системы необходима для хаоса, *чтобы ограничить локально неустойчивое движение* [Chirikov, 1987]. Раскроем это утверждение.

Уточним, прежде всего, понятие линейной/нелинейной динамической системы. Одни авторы [Guckenheimer, Holmes, 1983] судят о линейности/нелинейности динамической системы по форме описывающих ее дифференциальных *уравнений движения*. Другие [Ахромеева и др., 1985; Campbell, 1989] — по форме *решений* этих уравнений:

«Любые два решения линейного уравнения могут быть сложены вместе, чтобы образовать новое решение; это есть принцип суперпозиции... Напротив, два решения нелинейного уравнения не могут быть сложены вместе, чтобы образовать другое решение. Суперпозиция терпит неудачу [fails]» [Campbell, 1989. P. 219].

Эти два определения не противоречат друг другу. Математики называют линейным дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y = f(x), \quad (2.4.4)$$

в которое неизвестная функция $y(x)$ и ее производные $y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'$ входят в первой степени, т. е. линейно [Математический..., 1988. С. 316]. Систему дифференциальных уравнений называют линейной, если она имеет вид

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(x) y_k + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.5)$$

[Там же]. Уравнение (2.4.4) переходит в систему (2.4.5) при подстановке

$$y = y_1, \quad \frac{dy}{dx} = y_2, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y_3, \quad \dots, \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = y_n. \quad (2.4.6)$$

Решение системы (2.4.5), когда она однородна, т. е. при $f_i(x) = 0$, имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^n C_k y_{ik}(x), \quad (2.4.7)$$

где $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{in}$ — линейно независимые частные решения однородной системы, т. е. такие, что определитель $|y_{ik}(x)|$ отличен от нуля хотя бы в одной точке [Там же]. Таким образом, действительно, суперпозиция решений линейного дифференциального уравнения также является его решением.

Рассмотрим теперь обратимую систему, описываемую линейными уравнениями

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_k a_{ik} x_k. \quad (2.4.8)$$

Чтобы она была симметричной по времени, постоянные коэффициенты a_{ik} должны обладать соответствующей симметрией по времени, подобно тому как ею обладают коэффициенты $a_{ij} = \partial V_i(\vec{x}_0)/\partial x_j$ в уравнениях (2.2.47). Мы видели, что в общем случае механической системы, описываемой нелинейными уравнениями (2.2.31), могут введены показатели Ляпунова, отличие которых от нуля свидетельствует об экспоненциальном разбегании фазовых траекторий, т. е., если система ограничена, о хаотичности движения. Однако показатели Ляпунова, носящие в общем случае локальный характер, вводятся путем *линеаризации* уравнений движения (2.2.31). Понятно, поэтому, что если уравнения движения линейны изначально, то для них также могут быть введены показатели Ляпунова. В самом деле, кратко воспроизведем цепочку соотношений (2.2.44)–(2.2.53), приводящую к показателям Ляпунова, исходя из линейных уравнений (2.4.8).

Обозначая

$$x_i = x_{i0} + \Delta x_i(\vec{x}_0, t), \quad (2.4.9)$$

получаем из (2.4.8) однородную систему линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dw_i}{dt} = \sum_k a_{ik} w_k, \quad (2.4.10)$$

где $w_i = \Delta x_i$. Мы снова получили однородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая решается с помощью характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & a_{12} & \dots \\ a_{21} & a_{22} - \sigma & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (2.4.11)$$

(см. соотношения (2.2.48)–(2.2.53)). Если кратность корней этого уравнения равна 1, то частные решения системы (2.4.10) имеют вид

$$w_i(\vec{x}_0, t) = \frac{1}{2} w_i(\vec{x}_0, 0) (\exp \{\sigma_i t\} + \exp \{-\sigma_i t\}) \quad (2.4.12)$$

(напоминаем, что сумма двух экспонент здесь появляется из-за симметричности по времени уравнений движения нашей обратимой системы (2.4.8)). Т. е. мы снова получили экспоненциальное (обратимое) разбегание фазовых траекторий с показателями Ляпунова σ_i , характеризующими скорость этого разбегания.

Таким образом, и в случае линейных уравнений движения фазовые траектории могут быть неустойчивыми. Обратим, однако, внимание на то, что неустойчивость фазовых траекторий приводит к стохастическому движению системы только при условии *ограниченности* этого движения в фазовом пространстве. Суть дела и заключается в том, что решения линейной системы (2.4.8) в принципе *не являются ограниченными*. Эта система совпадает по форме с системой (2.4.10), так что ее решения также имеют экспоненциальный вид:

$$x_i(t) = \frac{1}{2} x_i(0) (\exp \{\sigma_i t\} + \exp \{-\sigma_i t\}). \quad (2.4.13)$$

Легко видеть, что с возрастанием t $x_i(t)$ стремится к бесконечности. Так что экспоненциальное разбегание фазовых траекторий приводит здесь не к перемешиванию, но лишь ко все большему их отдалению друг от друга на бесконечности.

Итак, если данная динамическая система линейна, то хаос не может в ней иметь места даже при неустойчивости фазовых траекторий из-за неограниченности движения такой системы. Поскольку, следовательно, ограниченным может быть движение только нелинейной системы, то и получается, что нелинейность является необходимым условием стохастичности движения. Это условие становится достаточным, если его дополнить условием неустойчивости фазовых траекторий.

2.4.3. Примеры систем с обратимым динамическим хаосом

Первой работой, в которой с использованием средств вычислительного эксперимента наблюдали обратимый динамический хаос, была, как упоминалось в преамбуле к разд. 2.4, статья М. Хенона и К. Хейлеса [Hénon, Heiles, 1964]. В ней рассматривалось движение динамической системы с двумя (!) степенями свободы, которая описывается гамильтонианом H , представляющим собой сумму гамильтониана H_0 невозмущенной (интегрируемой) системы и возмущения εH_1 :

$$H = H_0 + \varepsilon H_1, \quad (2.4.14)$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2), \quad (2.4.15)$$

$$\varepsilon H_1 = x^2 y - \frac{1}{3} y^3. \quad (2.4.16)$$

Уравнения движения этой (нелинейной) динамической системы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x, & \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -x - 2xy, & \frac{dp_y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} = -y - x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

С ростом параметра возмущения ϵ растет и энергия системы E , так что, увеличивая E , мы рассматриваем все более возмущенную систему. Как показали расчеты Хенона и Хейлеса, с ростом возмущения хаос в системе действительно нарастает. Этот процесс нарастания стохастичности А. Лихтенберг и М. Либерман описывают следующим образом: для слабо возмущенной системы

«тонкие стохастические слои отделены друг от друга инвариантными поверхностями, а стохастические колебания переменных действия внутри слоя оказываются экспоненциально малыми (по возмущению). С увеличением возмущения возможен переход, при котором изолирующие инвариантные поверхности разрушаются и стохастические слои сливаются, приводя к глобальному стохастическому движению. Фазовое пространство можно разделить при этом на три области. Одна связана [траекториями движения] со второй областью, значительную часть которой составляет по-прежнему стохастическая компонента движения, но внутри ее уже имеются большие острова регулярного движения. Третья область содержит главным образом регулярные траектории и отделена от первых двух инвариантными поверхностями» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 16].

В качестве другого примера системы с обратимым динамическим хаосом приведем *упрощенное преобразование Ферми*

$$q_{n+1} = q_n + \frac{2\pi M}{p_{n+1}}, \quad p_{n+1} = |p_n + \sin q_n|, \quad (2.4.18)$$

соответствующее уравнениям движения

$$\frac{dq}{dn} = \frac{2\pi M}{p}, \quad \frac{dp}{dn} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\exp \{i2\pi nk\}) \sin q \quad (2.4.19)$$

системы с гамильтонианом

$$H = 2\pi M \ln p + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\exp \{i2\pi nk\}) \cos q, \quad (2.4.20)$$

где n играет роль переменной времени [Там же. С. 224, 235]. За этой моделью стоит предложенный Э. Ферми в 1949 г. механизм ускорения космических частиц за счет их столкновения с движущимися магнитными полями.

«С уменьшением M происходит целый каскад последовательных бифуркаций устойчивых периодических точек с периодами $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 16$ и т. д. Этот процесс продолжается, пока M не достигает некоторого предельного значения, ниже которого все траектории становятся неустойчивыми» [Там же. С. 234–235].

В теории динамического хаоса определенную роль играют нефизические, иногда весьма условные системы, на которых отрабатываются понятия этой теории и используемые в ней вычислительные процедуры. Так, хорошо известно, например, *преобразование пекаря* — отображение, которое

напоминает действия месящего тесто пекаря³⁰⁾. В обратимом случае оно задается соотношением

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \begin{cases} \left(\frac{2x_n}{y_n}, \frac{y_n}{2} \right) & \text{при } 0 \leq x_n \leq \frac{1}{2}, \\ \left(\frac{2x_n - 1}{y_n + 1}, \frac{y_n + 1}{2} \right) & \text{при } \frac{1}{2} \leq x_n \leq 1, \end{cases} \quad (2.4.21)$$

сохраняющим двумерный фазовый объем (площадь) системы.

«Движение этой системы является неустойчивым и обладает свойством перемешивания» [Там же. С. 71].

В необратимом случае ее фазовый объем (площадь) не сохраняется.

2.4.4. Основные результаты

Уже пионерская работа Хенона и Хейлеса дала представление об общей картине хаоса в обратимой динамической системе; последующие исследования лишь уточняли те или иные детали этой картины. Отпали последние сомнения в том, что за стохастическими явлениями не стоят никакие «стохастические» силы и что при описании этих явлений можно обойтись обычными детерминированными уравнениями движения.

«Отличительной чертой систем, близких к интегрируемым, является присутствие причудливо перемешанных друг с другом областей как регулярного, так и стохастического движения» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 59].

В случае систем с двумя степенями свободы, к числу которых относится и система Хенона—Хейлеса, стохастические области отделены друг от друга областями с регулярными траекториями, сохраняющимися при возмущении благодаря резонансам, вблизи которых

«топология невозмущенных инвариантных поверхностей изменяется и образуется характерная резонансная структура, похожая на „цепочку островов“. Внутри островов топология также изменяется, приводя к еще более мелкой резонансной структуре и т. д. Однако вся эта структура — только часть полной картины движения, которая включает также плотную систему тонких слоев со стохастическим движением» [Там же. С. 15–16].

Для систем с более чем двумя степенями свободы отдельные стохастические области оказываются связанными друг с другом благодаря блужданию по всему фазовому пространству нерегулярных траекторий. Стохастические слои образуют в этом случае плотную паутину, на которой

³⁰⁾ [Arnold, Avez, 1968; Рус. пер. С. 15; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 71; Шустер, 1988. С. 111].

«стохастическое движение идет вдоль слоев, приводя к глобальной диффузии, не ограниченной инвариантными поверхностями. Этот механизм принято называть диффузией Арнольда. Она может быть быстрой или медленной в зависимости от толщины стохастических слоев. Такая диффузия существует (в принципе) для сколь угодно малых возмущений интегрируемых систем» [Там же. С. 18].

Установлено, также, что в системах, близких к интегрируемым, области хаотического движения возникают вблизи сепаратрис³¹⁾ резонансов. С ростом возмущения толщина стохастических слоев растет, что приводит к перекрытию первичных резонансов и движению поперек слоев,

«инвариантные кривые, разделяющие соседние резонансы и их стохастические слои, сильно искажаются и в конце концов разрушаются. В результате происходит слияние хаотических слоев и возникает *глобальная, или сильная, стохастичность* (выделено А. Лихтенбергом и М. Либерманом. — С. Х.)» [Там же. С. 63].

Суммарный объем стохастических областей определяется величиной возмущения: стремится к нулю, когда возмущение устремлено к нулю, и растет с его ростом.

Таким образом, глобальная стохастичность, когда весь фазовый объем системы представляет собой одну стохастическую область, возникает только при достаточно большом возмущении, в общем же случае области стохастического движения занимают лишь какую-то часть фазового объема. Это делает несправедливой в этом общем случае *гипотезу беспорядочных фаз*³²⁾. Предположение о случайности фаз, говорят Лихтенберг и Либерман,

«несправедливо при наличии инвариантных кривых, ограничивающих область изменения фаз. Даже в случае полной эргодичности, когда движение

³¹⁾ См. определение термина в разд. 2.2.2 (текст после соотношения (2.2.13)).

³²⁾ ГИПОТЕЗА СЛУЧАЙНЫХ ФАЗ, предположение, помещаемое некоторыми авторами в основание вывода околоравновесного основного кинетического уравнения (С. 1.9). У В. Паули, первым получившего это уравнение [Pauli, 1928], обсуждаемое предположение прозвучало в форме гипотезы о том, что, если мы диагонализировали матрицу плотности в некоторый начальный момент времени в представлении $\hat{H}_0$, то она остается диагональной и в последующие моменты времени. Как заметил Л. Ван-Хоф, тем самым «предполагается, что фазы волновых функций, принадлежащих различным собственным значениям $\hat{H}_0$, распределены беспорядочно... Эта гипотеза беспорядочных фаз относится не только к начальному состоянию, но используется и после каждого из очень большого числа последовательных интервалов времени» [Van Hove, 1955; Рус. пер. С. 11]. Другими словами, Паули фактически «предполагает, что если состояние системы, зависящее от времени, разложено по набору невозмущенных состояний системы, то фазы комплексных амплитуд разложения будут в любой момент времени случайно распределены по всем возможным значениям» [Честер, 1966. С. 18]. Поскольку же фазы системы случайно распределены во все моменты времени только тогда, когда система находится в состоянии *полного равновесия*, постольку, резюмирует Ван-Хоф, это предположение Паули для системы, только еще релаксирующей к равновесию, некорректно и «при выводе (С. 1.9) излишне» [Van Hove, 1955; Рус. пер. С. 11].

охватывает всю энергетическую поверхность, необходимо еще определить масштаб времени, на котором фазы становятся случайными» [Там же. С. 18].

В случае глобальной стохастичности конечное распределение в фазовом пространстве, получаемое в результате численных расчетов, не зависит от начальных условий. Т. е., от какой бы начальной фазовой точки мы ни начинали расчеты, траектория затягивается в стохастическую область, представляющую здесь собой весь фазовый объем системы, плотно заполняя ее всю целиком. В общем же случае, когда фазовое пространство системы представляет собой сложную сеть областей стохастического и регулярного движения, фазовые траектории, начинающиеся в разных точках фазового пространства, притягиваются, вообще говоря, разными областями, среди которых могут быть и такие простые аттракторы, как неподвижные точки, замкнутые траектории и торы. Все эти области притяжения зачастую весьма сложной конфигурации являются аттракторами динамической системы. Поскольку рассматриваемые здесь системы совершают *обратимое* движение, постольку характеризующие это их движение аттракторы не являются странными. Странные же аттракторы, характеризующие необратимые стохастические системы, имеют, как мы увидим в разд. 3.3, структуру, резко отличающую их в топологическом плане от нестранных.

Практически динамический хаос далеко не всегда возникает так, как это предполагается традиционной теорией устойчивости динамических систем (см. разд. 2.2–2.3), т. е. в результате вызываемого возмущением интегрируемой системы разрушения квазипериодического движения на торе. Для большого класса динамических систем, совершающих периодическое движение, действует механизм, установленный Митчеллом Фейгенбаумом [Feigenbaum, 1978, 1979]. Когда значение параметра системы переходит через некоторый порог, период удваивается, при переходе через следующий порог удваивается вновь и т. д. В результате быстро сходящейся последовательности бифуркаций удвоения периода система и переходит к хаотическому движению:

«...Последовательность удвоений обладает свойством универсальности, которое не зависит от конкретных особенностей системы, а во многих случаях и от размерности фазового пространства... расстояние между значениями параметра λ_n , при котором рождается цикл периода 2^n , и значением $\lambda_{кр}$, вслед за которым в системе возникает хаос, удовлетворяет условию $(\lambda_{кр} - \lambda_n) = \text{const} \delta^{-n}$, где $\delta = 4,6692016 \dots$ — универсальная постоянная Фейгенбаума... Экспериментально дальше $f_0/8$ новые удвоения увидеть трудно — спектр становится сплошным» [Безручко и др., 2005. С. 257–258].

Именно таков, к примеру механизм рождения хаоса в системе «упрощенное преобразование Ферми», о которой шла речь в разд. 2.4.3 (см. соотношения (2.4.18)–(2.4.20) и связанный с ними текст). Открытое Фейгенбаумом явление универсальности охватывает

«не только квадратичные, но и все унимодальные („одногорбые“) отображения, удовлетворяющие условию $Sf < 0$, где $Sf = (f'''/f') - (2/3)(f''/f')^2$ — производная Шварца» [Данилов, 2006. С. 35].

По-видимому, ветвление «траектории развития» характерно не только для механических систем, но и для систем самой разной природы, имеющих фрактальное устройство (см. разд. 6.1 и 6.3). Еще один сценарий возникновения хаоса:

«Наиболее часто встречающийся в приложениях переход к хаосу — перемежаемость (его обнаружили французские физики П. Манневиль и И. По-мо, 1980). На осциллограмме перемежаемость выглядит как постепенное (при изменении параметра) исчезновение периодических колебаний за счет их прерывания хаотическими всплесками» [Трубецков, 2004. С. 134].

2.5. Резюме

Теория динамического хаоса, под которой, напомним, в настоящем исследовании понимается дисциплина, изучающая *обратимое* стохастическое движение, привела к существенному продвижению в понимании феномена стохастики. Эргодическая теория, как мы видели, выработала для его осмысления понятия эргодичности, квазиэргодичности, метрической транзитивности, перемешивания и К-перемешивания, а теория динамического хаоса добавила понятие неизолирующих интегралов движения. Большие усилия были предприняты для установления взаимоотношений, которые связывают эти понятия и которые, как показывает рис. 2.2.1, оказались достаточно сложными. Однако в эту систему понятий, выработанных для осмысления феномена стохастичности, никак не удавалось включить саму стохастичность, поскольку каждый раз оказывалось, что между вновь введенным понятием — эргодичности, квазиэргодичности и т. д. — и понятием стохастичности существует некий зазор, не позволяющий «понять» и/или «обосновать» феномен стохастичности.

Тот установленный посредством вычислительных экспериментов факт, что фазовое пространство системы с динамическим хаосом распадается в общем случае на несколько (иногда много) областей регулярного и стохастического движения, позволил нам в разд. 1.3.2 отождествить со стохастичностью *скорректированную перемешиваемость*, отнесенную не ко всему фазовому объему системы, как это предполагается традиционной трактовкой перемешиваемости, но к *отдельной области стохастического движения*. Это дает возможность перейти от рис. 2.2.1 к рис. 2.5.1.

На этом можно было бы и успокоиться, если бы не вычислительные эксперименты М. Хенона и К. Хейлеса и др. и не выявленная ими феноменология стохастического движения, которой никто не ожидал и которая требует переосмысления сделанного до сих пор в этой области. Вся эта увлекательная сама по себе игра на складывание внутренне непротиворечивого пазла из понятий квазиэргодичности, метрической транзитивности

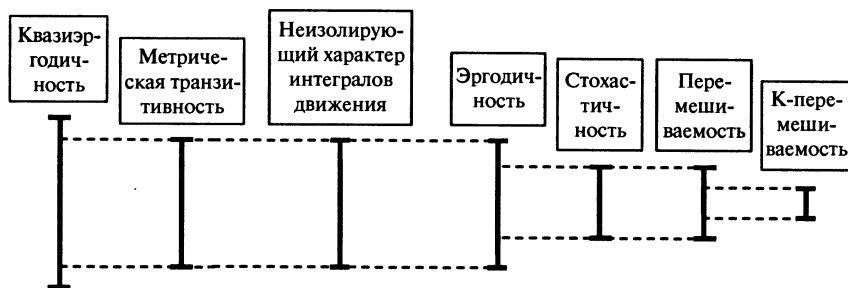


Рис. 2.5.1. Соотношение разных понятий, родственных понятию стохастичности (расширение рис. 2.2.1). Все понятия отнесены к отдельной области стохастического или квазистохастического движения в фазовом пространстве динамической системы. Стохастическая область (область с перемешиванием) эргодична (фазовое среднее на ней равно временному среднему) и метрически транзитивна, однако эргодическая (метрически транзитивная) область может не быть стохастической

и т. д., которая отражена рисунками 1.2.1, 1.3.1, 1.3.4, 2.2.1 и 2.5.1 и которая была нами предпринята в рамках традиционных представлений эргодической теории и теории динамического хаоса, как оказалось, имеет очень малое отношение к реальности. Прежде всего потому, что в области стохастического движения фазовая траектория ветвится или как-то иначе изменяет свою структуру «в каждой точке», что не позволяет считать ее *линией*.

Генерирование в стохастическом случае фазовой траекторией «фазового древа», означающее, что микросистема статистического ансамбля дробится в лавинообразно нарастающее множество микросистем³³⁾, фактически лишает смысла временный подход даже в равновесном случае. Этот подход предполагает слежение за линейной фазовой траекторией отдельной микросистемы, тогда как в стохастической области уже нельзя говорить о заполнении фазового объема динамической макросистемы *одной* фазовой траекторией, отвечающей *одной* микросистеме.

Вместе с временным подходом здесь теряют смысл и понятия квазиэргодичности (фазовая траектория пересекает окрестность каждой точки фазового объема системы), эргодичности (временные средние равны ансамблевым средним), *перемешивания* (перепутывание фазовых траекторий микросистем с разными начальными состояниями), метрической транзитивности (имеющей смысл постольку, поскольку она эквивалентна эргодичности), неизоллирующего характера интегралов движения (это понятие также эквивалентно понятию эргодичности, теряя смысл вместе с ним).

Применительно же к необратимым системам временный подход не имеет смысла уже потому, что, как о том говорилось в разд. 1.1, изменяющаяся во времени необратимая система не предоставляет от-

³³⁾ Без изменения меры всего множества фазовых точек, имеющей смысл нормированной на единицу вероятности нахождения системы в одном из микросостояний.

дельной фазовой траектории времени, необходимого для заполнения ею данной области стохастического движения. К этому надо добавить, что в необратимом случае фазовые траектории (вместе с фазовой жидкостью) синергетической системы разрывны в каждой точке (см. гл. 4), из-за чего о них нельзя говорить уже и как об *одномерных* множествах.

Из-за ветвления фазовой траектории, связанного с «размножением» микросистем, временной подход и в равновесном, и в необратимом случае трансформируется в ансамблевый, первичность которого, таким образом, получает в теории динамического хаоса дополнительное подтверждение.

Ветвление фазовой траектории, как отмечалось в разд. 1.4, в большой мере лишает также смысла определение *экспоненциальной локальной неустойчивости*, возникающей, как предполагается, с плавным нарастанием расстояния между двумя линейными траекториями по закону $D(t) = D(0) \exp \{at\}$. Что же касается К-энтропии, то она характеризует лишь более чем экзотические околоравновесные системы, в которых идут описываемые основным кинетическим уравнением линейные процессы переноса и которые поддерживают скорость роста энтропии постоянной за счет взаимодействия со средой.

При всем прогрессе, достигнутом теорией динамического хаоса благодаря вычислительным экспериментам, она по сути дела остается феноменологической дисциплиной. Компьютеры позволяют лишь рисовать интересные сами по себе картинки заполнения фазового пространства конкретных систем фазовыми точками, однако уже с количественной характеристикой выдаваемых компьютерами фазовых структур дела обстоят далеко не блестяще. До создания же общей количественной теории обратимых стохастических систем, которая бы позволяла *предсказывать* их поведение при разных начальных условиях и значениях параметров уравнений движения, еще далеко.

Тем не менее значение теории динамического хаоса чрезвычайно велико. И состоит оно в том, что она подготовила появление синергетики и теории фракталов, на наших глазах изменяющих картину мира.

Глава 3

Синергетика*

Синергетика — младшая сестренка теории динамического хаоса, обе они рассматривают хаос в системах, описываемых детерминированными уравнениями, которые не содержат случайных функций и параметров, и решение которых, тем не менее, оказывается стохастическим. Однако границы между этими дисциплинами проводятся в литературе недостаточно четко; предмет, границы и место синергетики в общей структуре науки остаются непроясненными. Литература переполнена размытыми определениями синергетики вроде следующих:

«Синергетика — это поиск новой модели научной рациональности, модели во многом антропоцентрической, пытающейся снять противопоставление человека и мира. Методологическое достоинство синергетики в ее общности, направленности на целое» [Делокаров, 2003. С. 19].

«...Синергетику можно рассматривать как междисциплинарное движение в современной науке, знаменующее собой становление нового взгляда человека на мир и на самого себя в этом мире. Синергетика — это новый диалог человека с природой, новый синтез человеческого знания и мудрости. Синергетика — это новый подход к познанию кризисов, нестабильности и хаоса, к созданию средств управления ими» [Князева, Курдюмов, 2005. С. 18]¹⁾.

Герман Хакен, с именем которого часто связывают рождение синергетики, практически отождествляет ее с теорией самоорганизации:

«Принципы, управляющие самоорганизацией, были раскрыты в достаточно полной и строгой математической теории, которая опубликована в ряде моих книг» [Хакен, 2003. С. 107].

Ему следуют многие авторы. Нас, однако, такого рода определения не устраивают.

3.1. Уточнение предмета

Термин *синергетика*, предложенный Г. Хакеном [Haken, 1977], произведен им от греч. *σιν* — вместе и *εργον* — работающий, действующий и отражает то обстоятельство, что, согласно современным воззрениям (которые мы собираемся далее оспорить), необратимое возникновение

* [Хайтун, 1996. С. 58–60, 64–66; 1999, 2003].

¹⁾ Впрочем, Е. Н. Князева и С. П. Курдюмов дают и более четкие характеристики синергетики (см. начало разд. 3.1).

упорядоченных структур обеспечивается исключительно взаимодействием системы со средой. Следуя этим воззрениям, многие авторы понимают под синергетикой дисциплину, изучающую возникновение упорядоченных структур в *открытых* системах за счет взаимодействия со средой при уменьшении их фазового объема:

«Синергетика рассматривается... как теория нестационарных быстро развивающихся структур в открытых нелинейных средах (системах)» [Князева, Курдюмов, 2005. С. 17]. «Если искать предельно краткую характеристику синергетики как новой научной парадигмы, то такая характеристика включила бы всего три ключевые идеи: самоорганизация, открытые системы, нелинейность» [Там же. С. 37].

В такой трактовке синергетики проявляется традиционный взгляд на энтропию как меру беспорядка, согласно которому рост упорядоченности в реальной системе непременно сопровождается уменьшением ее энтропии. Поскольку же, согласно локальной формулировке закона возрастания энтропии, ее производство в каждом макроскопическом элементе объема реальных систем вследствие протекающих в них внутренних процессов положительно, постольку отсюда и делают вывод, что процессы самоорганизации систем, будь то живые организмы или, скажем, пространственные неоднородности в плазме, происходят за счет их взаимодействия со средой, в которую сбрасываются излишки энтропии. Именно синергетика реализует главную идею концепции Эрвина Шрёдингера [Schrödinger, 1944] и др. об определяющей роли в процессах структурирования дихотомии система/среда [Хайтун, 1996. С. 311–324; 2005. Разд. 3.2.4–3.2.7]. Так как с уменьшением энтропии системы ее фазовый объем сокращается, то считается, что синергетика рассматривает динамические системы с *уменьшающимся* фазовым объемом, в отличие от теории динамического хаоса, в ведении которой находятся системы с *постоянным* фазовым объемом.

Если, однако, очерчивать границы предметов синергетики и теории динамического хаоса указанным образом, то вне рассмотрения обеих дисциплин остаются необратимые процессы, протекающие, например, с ростом энтропии в изолированной системе. Такое ограничение предмета синергетики представляется неоправданным, а основание, на котором оно покоится, — зыбким.

В самом деле, переносить источник роста энтропии, компенсирующий процессы самоорганизации рассматриваемых систем, в среду не дальновидно, потому что возникает аналогичный вопрос об источнике самоорганизации в самой среде. Весь этот узел проблем разрубается, если мы признаём, что трактовка энтропии реальных систем как меры беспорядка лишена оснований (см. разд. 1.1) и что, следовательно, процессы упорядочения могут протекать и в изолированной системе. Отсюда следует, что при изучении необратимых процессов самоорганизации нет необходимости ограничиваться рассмотрением открытых систем с уменьшающимся фазовым объемом.

В развитие давней идеи Вильяма Томсона [Thomson, 1874] и Людвига Больцмана [Boltzmann, 1896] иногда утверждается, что изолированных систем в природе не бывает и что, например, притяжения одного протона, находящегося на другом конце галактики, достаточно, чтобы за 60 столкновений данной молекулы с ее товарками неопределенным образом изменить направление ее движения (см. в преамбуле к разд. 2.2.4 высказывание Б. В. Чирикова). Сами по себе подобные расчеты, может статься, и верны, однако выводить необратимость только из воздействия среды было бы, на мой взгляд, неправильно. Возникновение необратимого хаоса в «синергетически изолированных» системах, т. е. в системах, уравнения движения которых содержат только переменные, к ним относящиеся, говорит в пользу отстаиваемого нами тезиса (см. разд. 3.5.2). Возникновение хаоса, возможно, без участия среды не обходится (см. разд. 1.1 и преамбулу к 2.2.4), однако возникновение *необратимого* хаоса участия среды не требует, являясь следствием несимметричности уравнений движения данной системы по времени.

Другими словами, не исключено, что именно фактическая неизолированность реальных динамических систем обеспечивает размытость их микросостояний, которая — в сочетании с неустойчивостью систем — и вызывает динамический хаос. Последний, однако, может быть как необратимым, так и обратимым, и, по всей видимости, за возникновение *необратимого* динамического хаоса среда ответственности не несет. Во всяком случае, мне не известны доказательства противного.

Поэтому мы трактуем синергетику расширительно по сравнению с установившейся практикой. Как уже говорилось в разд. 2.1, мы считаем, что синергетика анализирует *необратимые* системы, т. е. системы, описываемые *несимметричными* по времени уравнениями, тогда как уравнения для динамических систем, относящиеся к теории динамического хаоса, симметричны по времени. Если в обратимых системах динамический хаос только *поддерживается*, то в необратимых он *возникает*. Причем системы, изучаемые синергетикой, могут быть как открытыми, так и закрытыми, как с уменьшающимся фазовым объемом, так и с увеличивающимся. Короче говоря, мы называем *синергетикой дисциплину, изучающую необратимый динамический хаос*. Поскольку же фазовая жидкость систем с необратимым динамическим хаосом представляет собой определенным образом упорядоченную структуру («детерминированный хаос»), то оправдана и трактовка синергетики как науки о возникновении упорядоченных структур в необратимых динамических системах.

Будучи младшей сестрой теории динамического хаоса, синергетика включила в свой арсенал средств все понятия и методы этой теории. Имея, однако, своим истоком знаменитую статью американского метеоролога Э. Н. Лоренца [Lorenz, 1963], которая вышла годом ранее работы М. Хенона и К. Хейлеса [Hénon, Heiles, 1964], ознаменовавшей для теории динамического хаоса начало эпохи вычислительного эксперимента, си-

нергетика сосредоточилась на таких экспериментах, миновав разгонную фазу качественной теории устойчивости.

Сверх того синергетика вернулась к теории множеств, активно использовавшейся в эргодической теории. Это объясняется тем, что фазовая жидкость необратимых систем, в отличие от обратимых, имеет особую (*фрактальную*) структуру, в которой неожиданное развитие получила идея Дж. В. Гиббса о необратимом росте «огигающего» объема несжимаемой фазовой жидкости за счет образования в ней связной сети лакун и которая изучается особым разделом синергетики — *теорией фракталов*. Этому разделу синергетики из-за его важности посвящена гл. 4.

Необратимые (несимметричные по времени) уравнения «движения», анализируемые синергетикой, — динамические в широком смысле этого слова, они не обязательно являются при этом *механическими*, т. е. написанными для пространственных координат и отвечающих им импульсов. Не обязательно им быть даже и физическими, синергетика анализирует уравнения, возникающие в самых разных дисциплинах и областях явлений — физических, химических, биологических, социальных. Собственно, ей все равно, о чем идет речь, лишь бы была задана система уравнений, генерирующая фрактальную структуру. Литература по синергетике, поэтому, чрезвычайно обширна.

3.2. Исторический очерк

3.2.1. Тьюринг и другие: предыстория

Будучи продолжением теории динамического хаоса в фазе вычислительного эксперимента на область необратимых процессов, синергетика имеет, тем не менее, собственные корни. Первой здесь была, по-видимому, работа Алана Матисона Тьюринга [Turing, 1952], который, отталкиваясь от конкретных «уравнений движения», численно показал, что сочетание химических реакций с диффузией, вообще говоря, приводит к образованию пространственных структур. Задним числом работа Тьюринга обсуждается сегодня синергетиками [Ахромеева и др., 1985; Самарский и др., 1985], однако при ее появлении она не была замечена физиками. Между тем, с точки зрения современной синергетики, Тьюринг поставил и решил задачу вполне грамотно.

Заинтересовавшись морфогенезом²⁾, Тьюринг решил установить, могут ли химические реакции, участвующие в развитии организма, приводить к возникновению пространственных структур в поначалу однородной органической ткани. Решив, что в процессах пространственного распределения вещества должны быть существенными диффузионные процессы,

²⁾ МОРФОГЕНЕЗ, развитие структур организма в ходе индивидуального развития и эволюции органического мира.

Тьюринг записывает уравнения для концентраций веществ X , ускоряющего рост клеток, и Y , замедляющего его, в виде

$$\frac{\partial X}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + Q_1(X, Y, \lambda), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = D_2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + Q_2(X, Y, \lambda), \quad (3.2.1)$$

где D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии, а нелинейные функции $Q_1(X, Y, \lambda)$ и $Q_2(X, Y, \lambda)$ ответственны за химические реакции. Начальные распределения $X_0(x)$ и $Y_0(x)$ считаются здесь близкими к пространственно однородным, но содержащими малые случайные возмущения. Исследуя, как развиваются эти возмущения во времени, и численно решая для этого систему (3.2.1), Тьюринг показывает, что для значений параметра λ , больших некоторого порогового λ_0 , возмущения растут, и возникает устойчивая пространственная структура, в которой чередуются области больших и малых концентраций вещества.

Поразительно, что Тьюринг получил верный результат, не располагая еще компьютером и интегрируя свою систему уравнений вручную. В этом ему помогло то обстоятельство, что, будучи автором идеи абстрактной вычислительной машины (*машины Тьюринга*), он обладал ясным представлением о вычислительном алгоритме. Вполне логично, что автором первой работы по синергетике, этой науки о решении на компьютере уравнений, описывающих необратимые процессы, оказался автор идеи вычислительной машины, который искал примеры для иллюстрации ее продуктивности.

Собственно синергетика началась, все же, после появления компьютеров. И здесь возникает соблазн включить в число первых работ по синергетике известную статью Энрико Ферми с сотрудниками [Fermi et al., 1955], поскольку в ней с использованием одного из первых компьютеров, появившегося к тому времени у работавших в Лос-Аламосе (США) авторов статьи, численно решались динамические уравнения, моделирующие движение атомов в кристаллической решетке, чтобы количественно описать необратимый переход упорядоченного движения в тепловое в реальных кристаллах. К удивлению авторов, вычислительный эксперимент показал, что здесь

«имеет место перекачка энергии из одной степени свободы в другую и обратно, а не непрерывно усиливающееся деление энергии между ними» [Op. cit.; Рус. пер. С. 654].

Другими словами, оказалось, что динамический хаос в данной системе, вопреки ожиданиям, не возникает, что и породило так называемую *проблему Ферми—Пасты—Улама*.

Авторы работы [Данилов, Кадомцев, 1983] следом за М. Крускалом и Н. Забуски, опубликовавшими свои результаты в начале 60-х гг., утверждают, что всему виной *солитон* (локализованное в пространстве возмущение), который нестохастическим образом передает энергию от одной

группы степеней свободы к другой и который появляется здесь как результат решения известного уравнения Кортевега—де Фриса, эквивалентного системе уравнений Ферми—Пасты—Улама.

Проблема, однако, в том, что уравнения Ферми—Пасты—Улама симметричны по времени, а уравнение Кортевега—де Фриса — несимметрично по нему. В самом деле, модель Ферми с соавторами [Fermi et al., 1955; Рус. пер. С. 650; Ахромеева и др., 1985. С. 5–6] представляет собой одномерную цепочку из 64 точечных масс, соединенных невесомыми пружинами. Только вместо закона Гука $F(x_n, x_{n+1}) = k(x_{n+1} - x_n)$, который давал бы для n -й массы уравнение

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} - x_n) - k(x_n - x_{n-1}), \quad (3.2.2)$$

здесь полагается справедливым закон $F(x_n, x_{n+1}) = k(x_{n+1} - x_n) + k\alpha(x_{n+1} - x_n)^3$, дающий уравнение

$$m \frac{d^2 x_n}{dt^2} = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) + k\alpha[(x_{n+1} - x_n)^3 - (x_n - x_{n-1})^3] \quad (3.2.3)$$

(такая кристаллическая решетка иногда называется кубической). Уравнение же Кортевега—де Фриса, описывающее, скажем, длинные волны на воде, имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (3.2.4)$$

[Кудряшов, 1997. С. 88]. Поскольку координаты симметричны по времени, постольку уравнение (3.2.3), действительно, симметрично по времени, а уравнение (3.2.4) — несимметрично.

Отсюда вытекает, что система Ферми—Пасты—Улама *не* описывается уравнением Кортевега—де Фриса, находясь в ведении не синергетики, уравнения движения которой несимметричны по времени, но теории динамического хаоса, анализирующей симметричные по времени уравнения. В силу обратимости этой системы, динамический хаос не может в ней *возникать*, он может в ней только *поддерживаться*. Динамический хаос в ней и наблюдается, как показали в 1966 г. Ф. М. Израйлев и Б. В. Чириков, но лишь при достаточно интенсивном возбуждении. Ферми с коллегами просто не достигли области стохастического движения.

3.2.2. Лоренц и другие: ранняя история

1963–1964 гг. были в исследованиях динамического хаоса переломными. В 1963 г. Я. Г. Синай доказал теорему о возможности перемешивания, т. е. динамического хаоса, в системе с малым числом степеней свободы (см. разд. 1.3.5), а в 1964 г. М. Хенон и К. Хейлес, используя средства вычислительного эксперимента, наблюдали (обратимый) динамический хаос в четырехмерном фазовом пространстве гамильтоновой системы с двумя

степенями свободы (см. разд. 2.4.3). Однако Хенон и Хейлес были здесь вторыми, первым был Э. Н. Лоренц [Lorenz, 1963].

Появление статьи Лоренца было решающим в истории синергетики. Он не только впервые сформулировал в общем виде синергетическую задачу, но и решил ее с использованием компьютера для конкретной системы уравнений. Записав в общем виде систему уравнений движения системы в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2.5)$$

Лоренц стал путем ее численного интегрирования следить за тем, как траектория решения заполняет фазовое пространство системы, образуя фазовую структуру. Внешне его постановка задачи совпадает с постановкой задач для теории динамического хаоса, различие проявляется на стадии записи конкретных уравнений: система уравнений Лоренца

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x - \sigma y, \quad \frac{dy}{dt} = rx - y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = -bz + xy \quad (3.2.6)$$

несимметрична по времени.

Она была получена в результате упрощения системы уравнений, полученной за год до того в работе [Saltzman, 1962] путем упрощения несимметричных по времени уравнений Навье—Стокса, описывающих движение вязкой жидкости или газа [Физика..., 1999. С. 443]. Лоренц использует систему (3.2.6) для анализа *термоконвекции Рэлея—Бенара* (см. о ней в разд. 3.2.4 и 3.3.2) в тонком слое вязкой жидкости, между верхней и нижней поверхностями которого посредством нагревания искусственно поддерживается постоянная разность температур ΔT . Все величины, входящие в уравнения (3.2.6), включая время t , берутся в безразмерном виде; x, y, z — переменные, пропорциональные соответственно скорости конвективного движения, разности температур между восходящими и нисходящими потоками и отклонению вертикального профиля температуры от линейного; σ и b — константы, обычно берущиеся равными соответственно 10 и $8/3$; параметр r , пропорциональный задаваемому перепаду температур ΔT , — *управляющий*, изменяя его значения, изменяют режим течения жидкости.

Будучи метеорологом, Лоренц ставит своей целью показать, что часто возникающая в атмосфере турбулентность может быть в принципе описана уравнениями Навье—Стокса. И добивается своего, демонстрируя, что с ростом r регулярное движение системы, которому соответствует конвективный поток, срывается в стохастическое, имеющее все атрибуты турбулентного. Сам Лоренц численно исследует поведение фазовой траектории при $r = 28$. Выбирая для момента времени t_0 начальную точку (x_0, y_0, z_0) , он находит фазовые точки (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , ..., (x_n, y_n, z_n) , ..., отвечающие промежуткам времени $\Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t, \dots$

Фазовую траекторию Лоренц строит, используя *алгоритм двойной аппроксимации*:

$$X_{i,n+1} = x_{in} + \frac{1}{2} [V_i(x_n, y_n, z_n) + V_i(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})] \Delta t. \quad (3.2.7)$$

Оказалось, что фазовая траектория затягивается в область (*аттрактор Лоренца*), представляющую собой два «вихря», имеющие своими центрами две разные неподвижные точки. Траектория попадает в окрестность одной из них, совершает около нее некоторое количество оборотов и затем, удаляясь от нее, перемещается в окрестность второй неподвижной точки, описывает теперь уже около нее какое-то количество оборотов, удаляется, попадает в окрестность первой неподвижной точки и т. д. [Лэнфорд, 1981].

Лоренц доказывает, что фазовые траектории его системы неустойчивы. Это проявляется в сильной зависимости расчетной траектории от начальных условий (от выбора начальной точки), так что невозможно предсказать вперед, ни в окрестность какой из двух неподвижных точек окажется в первый раз затянута данная траектория, ни какое число оборотов она совершит в каждой отдельной серии. Будучи неустойчивым и ограниченным в фазовом пространстве, движение данной системы, действительно, оказывается стохастическим и имеющим четко выраженную турбулентную структуру. Так что уравнениями Навье—Стокса, как и предполагал Лоренц, оказалось возможным описать не только конвективное, но и турбулентное движение.

В дальнейшем аттрактор Лоренца подвергся всестороннему изучению. Была исследована его структура для разных значений параметра r . Оказалось, что здесь имеет место своеобразный гистерезис: если мы увеличиваем r , то конвективный (регулярный) поток срывается в турбулентный (стохастический) при $r = 24,74$, если же, наоборот, уменьшаем r , то турбулентное движение переходит в конвективное при $r = 24,06$. В узкой области значений $24,06 < r < 24,74$ в системе Лоренца существуют три аттрактора, два из которых отвечают регулярному движению, а третий — стохастическому [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 78]. Оказалось также, что переход к стохастическому движению происходит в ней через ряд бифуркаций [Афраймович и др., 1977].

В том, что уравнения Лоренца несимметричны по времени, легко убедиться непосредственно. Это и естественно, поскольку получены они из несимметричных по времени уравнений Навье—Стокса. Так что динамический хаос, возникающий в данной системе, является *необратимым*. Это обуславливает особую топологическую природу аттрактора Лоренца, кардинально отличающую его от стохастических аттракторов, возникающих в обратимых системах. Эта особая природа делает аттрактор Лоренца, если воспользоваться термином, который появится только через восемь лет после статьи Лоренца, *странным*. Сам Лоренц, естественно, не мог заметить этого отличия своего аттрактора от появившихся *после* 1963 г. обратимых стохастических аттракторов, хотя и сделал весьма глубокие

наблюдения относительно его топологии, к которым мы вернемся при обсуждении топологической природы фракталов в разд. 4.1.

Пионерская работа Лоренца была опубликована в журнале, посвященном атмосферным наукам, и потому не была сразу замечена специалистами по эргодической теории и теории динамического хаоса, которым, по сути дела, была адресована; на это ушло десять лет. А до тех пор исследования динамического хаоса средствами численного эксперимента практически не велись. Мы можем назвать в этой связи только две работы.

В одной из них [Ford, Lunsford, 1970] система взаимодействующих осцилляторов с гамильтонианом

$$H = H_0 + H_1 = \sum_{k=1}^N \frac{\omega_k}{2} (p_k^2 + q_k^2) + \gamma(V_3 + V_4 + \dots) \quad (3.2.8)$$

(N — число осцилляторов, ω_k — их частоты, γ — параметр взаимодействия, $V_3, V_4, \dots$ — кубичные и т. д. многочлены относительно переменных q_k и p_k), в которой исследуется динамический хаос, является необратимой только по заявлению авторов статьи Дж. Форда и Г. Лансфорда. Все же их численные расчеты проводятся для *симметричного* по времени гамильтониана

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \gamma K, \\ K &= \alpha(2^{-1/2} q_2) \left[J_1 - (p_2^2 + q_2^2) - \frac{3}{2}(p_3^2 + q_3^2) \right] + \\ &+ \beta \left[J_1 - (p_2^2 + q_2^2) - \frac{3}{2}(p_3^2 + q_3^2) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

(α, β и J_1 — константы). Это поразительное несоответствие исполнения заявлению объясняется, мне кажется, нечетким разведением авторами понятий *необратимости* и *стохастичности*:

«Цель настоящего исследования — продемонстрировать, что макроскопическая необратимость является неотъемлемым свойством физических, близких к линейным, осцилляторных систем даже в пределе, когда γ стремится к нулю. Необратимость имеет место для таких систем вследствие появления перекрытий резонансов, которые заставляют траектории системы блуждать более или менее случайно по части или почти по всей [most] энергетической поверхности» [Op. cit. P. 59].

Когда траектория блуждает по некоторой области фазового пространства, то это означает только *стохастичность* движения системы в этой области, которое может быть при этом как необратимым, так и обратимым.

Вторая статья [Cook, Roberts, 1970] действительно исследует средствами вычислительного эксперимента хаос в *необратимой* системе. Причем анализируемые здесь несимметричные по времени уравнения

$$\frac{dy}{dt} = -\mu x + yz, \quad \frac{dy}{dt} = -Ax - \mu y - xz, \quad \frac{dz}{dt} = 1 - xy \quad (3.2.10)$$

очень похожи на лоренцовские, хотя и описывают совсем другую физическую систему — так называемое *динамо Рикитаке*, состоящее из двух определенным образом соединенных дисков динамо, которыми здесь моделируют два возбуждающих друг друга электромагнитных вихря в ядре Земли. А. Кук и П. Робертс, в отличие от Форда и Лансфорда, уже знакомы со статьей Лоренца и констатируют большое сходство аттрактора, возникающего в фазовом пространстве своей системы, с лоренцовским. Впрочем, и эта статья осталась незамеченной до общего синергетического бума.

3.2.3. Рюэль и Такенс: бум

Событием, переломившим ситуацию в исследованиях необратимого хаоса, стала статья Д. Рюэля и Ф. Такенса [Ruelle, Takens, 1971], в которой рассматривается то же физическое явление, что и в статье Лоренца, но только с совершенно другой точки зрения. Лоренц, как мы видели, изучает возникновение турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями Навье—Стокса и подогреваемой извне, когда значение параметра, характеризующего этот подогрев, превосходит некое пороговое. Рюэль и Такенс также рассматривают возникновение турбулентности в вязкой несжимаемой жидкости, описываемой уравнениями Навье—Стокса и подвергаемой извне

«устойчивому воздействию (накачке, нагреванию и т. д.), характеризуемому параметром μ , при возрастании μ » [Op. cit.; Рус. пер. С. 117].

Но если Лоренц, используя средства вычислительного эксперимента, «руками» строит свой аттрактор, то Рюэль и Такенс, используя чисто теоретические средства теории множеств, получают вывод о возможности возникновения в общем случае специфических *странных аттракторов*, с которыми и отождествляют аттракторы, возникающие при турбулентном движении.

К представлению о странных аттракторах Рюэль и Такенс приходят в рамках общей теории динамических систем, которая широко используется в эргодической теории и теории динамического хаоса, рассматривая разрушение многомерного тора в результате последовательных бифуркаций. Термин *странный аттрактор* впервые появляется в следующем пассаже:

«При $t \rightarrow +\infty$ интегральная кривая $x(t)$ векторного поля X может притягиваться к неподвижной точке или замкнутой траектории векторного поля, или к аттрактору более общего типа. Она, по-видимому, не может притягиваться к квазипериодическим траекториям, поскольку последние встречаются редко. Возможно, однако, что траектория притягивается к множеству, которое не является многообразием³⁾. Чтобы проиллюстрировать эту ситуацию в размерности n , вообразим, что интегральные кривые векторного поля проходят

³⁾ Как разъяснялось в сноске в разд. 1.2.3, многообразие — это континуум, т. е. непрерывное множество. Фрактальная структура, будучи всюду дискретной, многообразием не является.

приблизительно параллельно и пересекают трансверсально⁴⁾ некоторый кусок $(n-1)$ -мерной поверхности $S...$ Пусть $P(x)$ обозначает первую точку пересечения интегральной кривой, проходящей через x с поверхностью S (P — отображение Пуанкаре⁵⁾).

Возьмем теперь $n-1 = 3$ и предположим, что P отображает полноторий Π_0 в себя... $P\Pi_0 = \Pi_1 \subset \Pi_0$. Множество $\bigcap_{n>0} P^n\Pi_0$ является аттрактором;

локально оно представляется произведением канторова множества⁶⁾ и отрезка прямой (Smale, 1967, § 1.9)⁷⁾. Возвращаясь вновь к векторному полю X , мы получим в этом случае „странный“ аттрактор, который локально представляется как произведение канторова множества и куска двумерного многообразия. Отметим, что картина сохранится, если заменить векторное поле X векторным полем Y , которое достаточно близко к X в норме банахова пространства⁸⁾, выбранного подходящим образом. Поэтому аттракторы только что рассмотренного типа не могут быть изъяты из рассмотрения под тем предлогом, что они представляют собой нетипичное явление» [Там же. С. 121–122].

В приведенном определении странного аттрактора как *произведения многообразия на канторово множество* существенно, что канторово множество *разрывно в каждой точке*, так что, умножая на него (непрерывное) многообразие, получаем множество, разрывное в каждой точке. Таким образом, Рюэль и Такенс хотят здесь сказать, что странный аттрактор — это *множество, разрывное в каждой точке*. Как разъясняется в разд. 4.6, это определение (так часто бывает с первопроходцами) несколько размыто, поскольку странный аттрактор — это еще и *стохастическое* множество, что из определения Рюэля и Такенса выпадает, поскольку канторово множество по самому его построению имеет существенно нестохастическую природу. Добавим также, что из-за перенасыщенности терминами теории множеств статья Рюэля и Такенса труднодоступна для «среднестатистического» физика; синергетика шла к осмыслению феномена странных аттракторов, используя более наглядные соображения (см. разд. 3.3).

Показав, что разрушение многомерного тора, на котором происходит в интегрируемом случае квазипериодическое движение, может приводить к движению на странных аттракторах, Рюэль и Такенс выдвинули предположение, что именно на таких аттракторах и происходит турбулентное движение. Они

«построили пример, когда при разрушении квазипериодического движения на многомерном торе рождается некоторое притягивающее гиперболическое

⁴⁾ От лат. transversus — поперечный.

⁵⁾ Сноска переводчика на русский язык: «В русской литературе наряду с отображением Пуанкаре употребляется термин „отображение последования“».

⁶⁾ О канторове множестве см. в разд. 4.1.

⁷⁾ О Ст. Смейле см. далее в настоящем разделе.

⁸⁾ БАНАХОВО ПРОСТРАНСТВО, «полное нормированное пространство» [Математический..., 1988. С. 83].

(? — С. Х.) множество. Сам по себе этот пример ничем не выделяется среди многих других примеров бифуркаций, появившихся в последнее время. Но он получил особый резонанс, ибо его авторы высказали предположение, что он может служить моделью возникновения турбулентности при потере устойчивости ламинарного течения» [Аносов, 1977. С. 8].

В жизни науки происходят порой удивительные вещи, которые и делают столь занимательным изучение ее истории. Таким событием в истории синергетики стала встреча статей Лоренца и Рюэля и Такенса, которая произошла при участии трех человек [Gleick, 1988. P. 65–67]: безымянного эксперта, раскопавшего статью Лоренца, но не знавшего, что с ней делать, математика Джеймса Йорка, которому эксперт передал статью, и работавшего в области теории динамического хаоса Стивена Смейла, получившего статью от Йорка и знавшего статью Рюэля и Такенса (которые ссылаются в ней, как мы видели, на Смейла). Смейл понял, что аттрактор Лоренца и есть тот самый странный аттрактор, возникновение которого в турбулентном движении предсказали Рюэль и Такенс. Сделав со статьи Лоренца много фотокопий, он разослал их коллегам по теории динамического хаоса.

Три года ушло на переписку и осмысление ситуации, а с 1975 г. косяком пошли работы, в которых исследовался странный аттрактор⁹⁾. Начался синергетический бум, который наблюдается по сей день. В 1977 г. опубликована первая монография по синергетике, автором которой был Г. Хакен [Haken, 1977], предложивший, как отмечалось в разд. 3.1, и термин *синергетика*. Следом за этой книгой вышло много других, вал работ по синергетике растет и ширится.

3.2.4. Школа Пригожина: боковая ветвь

В потоке синергетических исследований можно выделить несколько ветвей. Наиболее известная из них, пожалуй, связана с Брюссельской школой Ильи Пригожина¹⁰⁾. При всем разнообразии рассматриваемых ею вопросов она остается, тем не менее, школой *неравновесной термодинамики*. Отсюда не только постоянное подчеркивание того факта, что порядок порождается неравновесностью, но и явственный уклон в сторону *макроскопического* описания. Ни то, ни другое не характерно для основного потока работ по синергетике, выросшей, как мы видели, из численного анализа временной эволюции необратимых *микросистем*. Характерно, в этой связи, как Пригожин подводит читателя к синергетической проблематике:

⁹⁾ [Hénon, 1976; Афраймович и др., 1977; Williams, 1977; Симонов, 1978; Питаевский, Рабинович, 1979; Ruelle, 1980, 1992; Странные..., 1981; Ott, 1981; Eckmann, Ruelle, 1985].

¹⁰⁾ [Пригожин, 1960, 1964, 1985, 1999, 2003, 2005; Гленсдорф, Пригожин, 1973; Пригожин, Николис, 1973; Николис, Пригожин, 1979, 1990; Математическое..., 1986; Пригожин, Стенгерс, 1986, 1994; Пригожин, Кондепуди, 2002].

«Даже в классической физике встречается немало явлений, в которых неравновесное состояние может порождать порядок. Создав температурный градиент в смеси двух различных газов, мы будем наблюдать увеличение концентрации одного газа у горячей стенки, а другого — у холодной стенки. Это явление, наблюдавшееся еще в XIX в., получило название термодиффузии. В стационарном состоянии энтропия смеси обычно имеет меньшее значение, чем в однородном составе. Следовательно, неравновесность может быть источником порядка. Это замечание послужило отправным моментом для развития концепции Брюссельской школы» [Пригожин, 1985. С. 96–97].

Как видим, понятия, которыми здесь оперирует Пригожин — неравновесность, энтропия, термодиффузия, температура, — имеют макроскопическую природу.

Макроскопичность описания брюссельцами процессов самоорганизации проявляется уже в том значении, какое они придают энтропии:

«По мнению Пригожина и Стенгерс, энтропия — не просто безостановочное соскальзывание систем к состоянию, лишенному какой бы то ни было организации. При определенных условиях *энтропия становится прародительницей порядка* (выделено мной. — С. Х.)» [Тоффлер, 1986. С. 25].

Упор, производимый в Брюссельской школе на понятие энтропии, вовсе не характерен для синергетики в целом, вступая в противоречие, например, с установкой «отца синергетики» Г. Хакена:

«Хотя в термодинамике и в так называемой термодинамике необратимых процессов понятие энтропии и связанные с ним понятия чрезвычайно полезны, они оказываются слишком грубы при рассмотрении самоорганизующихся структур. В общем случае в таких структурах энтропия изменяется лишь на очень малую величину. Кроме того, из статистической механики известно, что энтропия может флуктуировать. Таким образом, необходимы другие подходы» [Haken, 1977; Рус. пер. С. 30].

«По-видимому, применять энтропийный-негэнтропийный язык для анализа мира нестационарных нелинейных процессов означает практически то же самое, что идти в микромир с песочными часами и рулеткой... Для нелинейного мира справедливы иные принципы направленности течения процессов, принципы формирования, объединения и развития структур, принципы экономии и ускорения эволюции. И эти принципы не могут быть получены... за счет подгонки классического языка» [Князева, Курдюмов, 2005. С. 32].

Своеобразный характер приобретает в работах Брюссельской школы и анализ устойчивости систем, являющийся, как мы видели, необходимым элементом теории динамического хаоса и выросшей из нее синергетики:

«Одна из наших основных задач состоит в том, чтобы установить, как связана теория устойчивости с термодинамикой необратимых процессов, и отсюда получить как можно больше информации» [Гленсдорф, Пригожин 1973. С. 10].

Анализ устойчивости фазовых траекторий, т. е. *микроскопической* устойчивости систем, брюссельцы заменяют анализом *термодинамической*, т. е. *макроскопической*, устойчивости, связывая энтропию с функцией Ляпунова, фигурирующей в теории устойчивости дифференциальных уравнений.

Функцией Ляпунова для решения данной системы дифференциальных уравнений называется действительная функция $L(x, t)$ независимых переменных $x = (x_1, x_2, \dots)$ и времени t , удовлетворяющая следующим требованиям: она непрерывно дифференцируема, равна нулю в некоторой точке x_0 и

$$L(x, t) > 0 \quad \text{при} \quad x \neq x_0, \quad \frac{d}{dt}L(x, t) = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum \frac{\partial L}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt} \leq 0 \quad (3.2.11)$$

в некоторой окрестности точки x_0 [Корн, Корн, 1974. С. 410–413]. Здесь $dL(x, t)/dt = dL(x(t), t)/dt$ — производная функции L , вычисляемая вдоль траектории $x(t)$ данной системы. Применение функции Ляпунова основано на *теореме Ляпунова* об устойчивости, согласно которой *решение системы устойчиво в точке x_0 в том и только в том случае, если существует соответствующая функция Ляпунова.*

Вот эту функцию Ляпунова Брюссельская школа и отождествляет, когда это возможно, либо с *избыточной* энтропией $\Delta S = S - S_{eq}$ (S_{eq} — равновесная энтропия), либо с *производством* энтропии $d_i S/dt$, обеспечиваемым происходящими в системе внутренними процессами. Это заведомо возможно для равновесного состояния изолированной системы, для которой $d_i S/dt = dS/dt$:

«В изолированной системе равновесие глобально устойчиво (т. е. устойчиво по отношению к сколь угодно большому начальному возмущению. — С. Х.), и это отражается в существовании некоторой функции — энтропии, или, точнее, избыточной энтропии $\Delta S = S - S_{eq}$, обладающей следующими свойствами...:

$$\Delta S \leq 0, \quad \frac{d}{dt} \Delta S \geq 0 \quad (3.2.12)$$

(в изолированных системах).

Величину ΔS мы называем *функцией Ляпунова*. В математической литературе показано, что соотношения (3.2.12) равносильны глобальной устойчивости (выделено авторами. — С. Х.)» [Николис, Пригожин, 1990. С. 87].

Соотношения (3.2.11), определяющие функцию Ляпунова, показывают, что точнее было бы отождествлять с ней *отрицательную* избыточную энтропию, т. е. величину $-\Delta S$, поскольку именно эта величина равна в равновесии нулю, а около него положительна и убывает со временем:

$$-\Delta S \geq 0, \quad \frac{d}{dt}(-\Delta S) \leq 0 \quad (3.2.13)$$

(в изолированных околоравновесных системах).

Таковыми же свойствами обладает здесь и производство энтропии, которое также равно в равновесии нулю, а около него убывает, оставаясь положительным:

$$\frac{dS}{dt} \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{dS}{dt} \leq 0 \quad (3.2.14)$$

(в изолированных околоравновесных системах) (*теорема Глендорфа—Пригожина*, вытекающая из того простого факта, что энтропия в равновесном состоянии достигает своего максимума, предполагающего равенство здесь нулю первой производной энтропии по времени и отрицательность — второй). Существование для равновесного состояния неизолзированной системы функции Ляпунова ($-\Delta S$ или dS/dt) и говорит об устойчивости этого состояния.

Для равновесного состояния открытой системы по определению $d_i S/dt = 0$, а около него —

$$\frac{d_i S}{dt} \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{d_i S}{dt} \leq 0 \quad (3.2.15)$$

(в открытых околоравновесных системах) (*теорема Глендорфа—Пригожина для неизолзированной системы*). Так что и для равновесного состояния открытой системы существует функция Ляпунова ($d_i S/dt$), откуда следует его устойчивость.

Ситуация с открытой неравновесной системой в линейной околоравновесной области, где действуют соотношения Онсагера, также не вызывает тревоги. Здесь оказываются устойчивыми состояния, характеризующиеся минимальным производством энтропии, совместимым с наложенными на систему внешними условиями, и названные Пригожиным *стационарными*. Устойчивы они благодаря действующей в этой области *теореме Пригожина о минимуме производства энтропии*¹¹⁾, из которой следует, что

¹¹⁾ В этой теореме идет речь об открытой системе, близкой к равновесию и описываемой линейной термодинамикой необратимых процессов. Если заданные граничные условия, фиксируемые значениями термодинамических сил, не дают системе достичь равновесия при нулевом производстве энтропии, говорит теорема, то система переходит в стационарное состояние (о стационарных неравновесных состояниях см. текст, включающий соотношения (3.2.17)–(3.2.19), минимизирующее производство энтропии ($d_i S/dt$) = $\int \sigma dV$ при данных значениях этих сил на уровне некоторого отличного от нуля постоянного во времени значения (σ — производство энтропии, отнесенное к единице объема).

Более строго. В случае n термодинамических сил $X_1, \dots, X_n$, из которых k сил $X_1, \dots, X_k$ остаются постоянными, для стационарного состояния имеет место

$$J_{k+1} = \dots = J_n = 0 \quad (C.3.1)$$

(J_j — термодинамические потоки), причем (C. 3.1) эквивалентно равенствам

$$\frac{\partial \sigma}{\partial X_j} = 0, \quad J = k + 1, \dots, n. \quad (C.3.2)$$

Поскольку в теореме Пригожина идет речь о соотношении

$$\sigma = \min, \quad (C.3.3)$$

величина $d_i S/dt$ (точнее $(d_i S/dt) - (d_i S/dt)_0$, где индекс «0» отвечает стационарному состоянию) и в этом случае обладает свойствами, необходимыми для ее отождествления с функцией Ляпунова:

«Поскольку в этой (околоравновесной. — С. Х.) области феноменологические соотношения линейны и кинетические уравнения симметричны...¹²⁾ выражаемое равенством...¹³⁾ производство энтропии становится положительно определенной квадратичной формой переменных состояния X_k , отражающих внешние ограничения. Более того, можно показать, что любое отклонение от стационарного состояния приводит к развитию таких процессов, что величина $d_i S/dt$ стремится уменьшиться со временем. Иными словами, ситуация здесь аналогична той, которая выражается соотношениями (3.2.12), причем в этой ситуации *производство энтропии играет роль функции Ляпунова*, гарантируя глобальную устойчивость стационарных состояний, близких к равновесному (выделено мной. — С. Х.)» [Николис, Пригожин, 1990. С. 87].

Таким образом, в общем случае околоравновесной системы величина $(d_i S/dt) - (d_i S/dt)_0$ обладает свойствами функции Ляпунова. Т. е., она равна нулю в стационарном состоянии (которое может оказаться равновесным, и тогда эта величина равна $(d_i S/dt) - (d_i S/dt)_{eq} \equiv d_i S/dt$, т. е. производству энтропии) и, оставаясь в его окрестности положительной, убывает во времени:

$$\frac{d_i S}{dt} - \left(\frac{d_i S}{dt} \right)_0 \geq 0, \quad \frac{d}{dt} \left[\frac{d_i S}{dt} - \left(\frac{d_i S}{dt} \right)_0 \right] \leq 0 \quad (3.2.16)$$

(в околоравновесных системах).

постольку сегодня распространена ее трактовка как вариационного принципа. Однако, как мы доказываем [Хайтун, 1996. С. 282–283; 2005. Разд. П. 3.3], теорема Пригожина вариационным принципом не является. В самом деле, о чем говорит этот принцип? О том, что система выбирает путь, отвечающий *минимальному на каждый текущий момент времени* производству в ней энтропии. Теорема Пригожина говорит о другом — о том, *каким реально оказывается этот выбранный системой путь вблизи равновесия*. Поскольку в равновесном состоянии не только максимизируется энтропия, но и минимизируется (попросту равно нулю) производство энтропии, постольку этот путь оказывается здесь таким, что производство энтропии уменьшается во времени, достигая в конечном стационарном состоянии минимума, а в равновесном — нуля вообще.

¹²⁾ Здесь авторы отсылают к соотношению

$$J_j = \sum_k L_{jk} X_k, \quad (C.3.4)$$

где L_{jk} — коэффициенты Онсагера, для которых справедливо соотношение взаимности

$$L_{jk} = L_{kj}. \quad (C.3.5)$$

¹³⁾ А здесь авторы отсылают к соотношению

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum X_j J_j. \quad (C.3.6)$$

Эту величину Пригожин с соавторами называют *excess entropy production*, что в отечественной литературе иногда переводится как *производство избыточной энтропии* [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 12] и что по аналогии с избыточной энтропией $\Delta S = S - S_{eq}$ правильнее, представляется, переводить как *избыточное производство энтропии* [Николис, Пригожин, 1990. С. 87], так как производство (т. е. скорость роста) избыточной энтропии равно просто производству энтропии: $d(S - S_{eq})/dt = dS/dt$.

Ситуация резко изменяется, когда система далека от равновесия и когда избыточное производство энтропии уже не обладает свойствами функции Ляпунова. В случае изолированной системы избыточное производство энтропии переходит, как говорилось, в производство энтропии dS/dt , которое, оставаясь здесь, в силу закона возрастания энтропии, положительной величиной, в общем случае уже не убывает во времени. В случае далекой от равновесия открытой системы все состояния могут оказаться нестационарными, и тогда нельзя, естественно, ввести и избыточное производство энтропии. Если же здесь *de facto* и существует стационарное состояние с соответствующим ему положительным избыточным производством энтропии, то нет гарантий, что эта величина окажется в окрестности этого стационарного состояния убывающей во времени. Так или иначе для системы, далекой от равновесия,

«универсальной функции Ляпунова не существует, и это *порождает проблему устойчивости* состояний, далеких от равновесия. Возможность потери устойчивости при определенных условиях открывает путь переходным явлениям, что может привести к внутренней дифференциации и сложному поведению (выделено авторами. — С. Х.)» [Там же].

Большую роль в концепции Пригожина и др. играют *диссипативные структуры*, понятие о которых было специально введено, чтобы более наглядно состыковать эволюционный рост сложности с ростом энтропии, и которые потому так и были названы, что по определению рассеивают (диссипируют) в среде возникающую в них энтропию, благодаря чему усложняются¹⁴⁾.

«Ныне мы знаем, что вдали от равновесия могут спонтанно возникать новые типы структур. В сильно неравновесных условиях может совершаться переход от беспорядка, теплового хаоса, к порядку. Могут возникать новые динамические состояния материи, отражающие взаимодействие данной системы с окружающей средой. Эти новые структуры мы назвали *диссипативными структурами*, стремясь подчеркнуть конструктивную роль диссипативных процессов в их образовании (выделено авторами. — С. Х.)» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 54].

Особое внимание уделяется Брюссельской школой предельным состояниям, соответствующим переходу между устойчивостью и неустойчивостью,

¹⁴⁾ О диссипативных структурах/системах говорилось в разд. 2.1.

когда избыточное производство энтропии исчезает [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 12] и когда система достигает

«порога устойчивости *термодинамической ветви*» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 216–217].

В таких предельных состояниях термодинамическая система оказывается на распутье, и ее дальнейшее развитие может пойти разными путями. При этом возрастает роль *термодинамических флуктуаций*, которым Брюссельская школа уделяет в своих построениях большое место, возлагая на них ответственность за возникновение новых структур и вводя понятие *порядка через флуктуации* [Пригожин, 1985. С. 140].

«Следует отметить, что флуктуации могут иметь как внутреннее, так и внешнее происхождение; например, они могут быть результатом временного нарушения граничных условий. Однако в макроскопической системе с большим числом степеней свободы всегда существуют *спонтанные флуктуации*. Условие *затухания флуктуаций* становится условием устойчивости данного процесса.

Проблема реакции системы на спонтанные флуктуации тесно связана с известным принципом Ле Шателье—Брауна в классической термодинамике (или принципом „демпфирования“). Этот принцип гласит: „В любой системе, находящейся в химическом равновесии, при изменении одного из факторов, управляющих этим равновесием, возникают компенсирующие процессы, стремящиеся ослабить влияние этого изменения“.

Для равновесного случая этот принцип демпфирования легко может быть доказан для интенсивных величин (давление, температура, молярные доли).

Возникает вопрос, что происходит, когда мы применяем этот принцип к неравновесным явлениям? Начало обсуждения таких проблем было положено доказательством... теоремы о минимуме производства энтропии...: когда стационарное состояние характеризуется минимумом производства энтропии, флуктуации убывают точно так же, как и при термодинамическом равновесии, и принцип демпфирования выполняется.

Само существование термодинамической неустойчивости показывает, что это утверждение не выполняется для состояний, *далеких* от равновесия (выделено авторами. — С. Х.)» [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 10–11].

Для таких состояний

«определенные флуктуации вместо того, чтобы затухать, усиливаются и захватывают всей системой, вынуждая ее эволюционировать к новому режиму, который может быть качественно отличным от стационарных состояний, соответствующих минимуму производства энтропии» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 195].

«Наше утверждение состоит в том, что новая „структура“ всегда является результатом неустойчивости и возникает из флуктуаций» [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 9].

Тезис Пригожина и его школы об определяющей роли термодинамических флуктуаций в самоорганизации диссипативных структур произ-

растает из флуктуационной гипотезы Больцмана¹⁵). Какая сила, однако, заставляет цепочку флуктуаций выстраиваться в определенном направлении — в сторону усложнения, а не в сторону упрощения? Этим вопросом Пригожин с коллегами не задаются. На мой же взгляд, флуктуация играет здесь отнюдь не упорядочивающую, но только *триггерную* роль: в точках ветвления система выбирает через флуктуации один из путей усложнения, и только.

Неустойчивости, возникающие в термодинамических системах далеко от равновесия, Брюссельская школа изучает средствами *теории бифуркаций*, используемой в теории динамического хаоса (см. разд. 2.2.4.2). Только если в последней речь идет о бифуркациях (ветвлениях) решений *микроскопических* уравнений движения динамической системы, то в Брюссельской школе делают упор на бифуркации решений описывающих термодинамические системы *макроскопических* уравнений. На аппарате теории бифуркаций это, впрочем, не сказывается, для этой теории имеет значение только явный вид дифференциальных уравнений, которыми описывается данная система, а не микро- или макроскопическая их природа, существенная с физической точки зрения. Впрочем,

«Математическая теория бифуркации обычно очень сложна» и только «в некоторых случаях удается получить точные решения» [Пригожин, 1985. С. 119].

Заметим, что если Лоренц, о статье которого рассказывалось в разд. 3.2.2, пришел к своему упорядоченному аттрактору в поисках условий возникновения в динамической необратимой системе *хаоса*, то Пригожина с самого начала интересуют условия возникновения *порядка*. Эта полярированность их посылов интересно проявляется, например, в разной трактовке ими *конвекции Бенара*, анализ которой занимает важное место в работах не только этих двух ученых, но и в статье Рюэля и Такенса, также сыгравшей большую роль в становлении синергетики (см. разд. 3.2.3).

Лоренц, как мы видели, рассматривает течение в подогреваемом снизу слое жидкости, которое при достаточно большом перепаде температур срывается в турбулентное, много внимания уделяя доказательству его стохастичности. Пригожин также анализирует подогреваемый снизу слой жидкости, но только первоначально покоящейся, в которой при достаточно большом градиенте температуры возникает конвективное течение

¹⁵ Согласно этой гипотезе [Boltzmann, 1897, 1895–1898], окружающая нас макроскопическая область Вселенной является гигантской флуктуацией, тогда как Вселенная в целом находится в равновесном состоянии. Человек, по Больцману, потому только и имеет возможность наблюдать эту чрезвычайно маловероятную флуктуацию, что представляет собой ее порождение. Будучи существенно антиэволюционной, флуктуационная гипотеза сегодня непопулярна. И не потому, что вероятность больцмановской флуктуации нашего макроскопического мира, размеры которого чрезвычайно раздвинула современная астрономия, исчезающе мала. И не потому даже, что появляются все новые данные, говорящие о неравновесности Вселенной. Дело в том, что побеждает эволюционный подход как таковой [Хайтун, 1996. С. 101–104, 307–308; 2005. Разд. 3.2.2].

в форме так называемых *ячеек Бенара*, упорядоченный характер которого прежде всего и подчеркивает Пригожин:

«Неустойчивость Бенара — явление весьма впечатляющее. Конвективное движение жидкости порождает сложную пространственную организацию системы. Миллионы молекул движутся согласованно, образуя конвективные ячейки в форме правильных шестиугольников некоторого характерного размера» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 196].

Турбулентности возникают и в случае покоящейся поначалу жидкости, но только когда перепад температур достигает значений больших, чем это нужно для образования ячеек Бенара, которые наблюдаются

«на определенном расстоянии от равновесия. При дальнейшем удалении от теплового равновесия конвективный поток начинает колебаться во времени. Чем дальше мы уходим от равновесия, тем больше частот появляется в колебаниях, пока, наконец, не произойдет переход в турбулентный режим» [Там же. С. 225].

Однако упоминания в связи с конвекцией Бенара о турбулентности появляются в относительно более поздних работах Пригожина и его учеников, когда концепция Брюссельской школы уже в основных чертах сформирована.

Установка Пригожина на изучение условий возникновения упорядоченных структур может быть связана с его постоянной нацеленностью на объяснение средствами неравновесной термодинамики феномена жизни. Характерным для него, в этой связи, является следующее высказывание:

«Роль необратимых процессов становится еще более заметной, если мы обратимся к биологическим или социальным явлениям. Метаболическая функция даже простейших клеток включает несколько тысяч взаимосвязанных химических реакций и, следовательно, требует тонкого механизма для их координации и управления ими. Иначе говоря, необходима чрезвычайно тонкая и сложная *функциональная* организация. Кроме того, метаболические реакции требуют специфических катализаторов — энзимов. Это — гигантские молекулы, обладающие пространственной организацией, и организм должен уметь синтезировать их. Напомню, что катализатором мы называем вещество, которое ускоряет некую химическую реакцию, но не расходуется в ходе ее. Каждый энзим, или катализатор, выполняет одну специфическую задачу. Если мы посмотрим, каким образом клетка выполняет сложную последовательность операций, то обнаружим, что операции организованы так же, как на сборочном конвейере современного завода... Генеральное химическое превращение подразделяется на последовательные элементарные этапы, каждый из которых катализируется своим специфическим энзимом... „Сидящие“ на каждой мембране энзимы производят над веществом определенную операцию, после чего продукт поступает для дальнейшей переработки на следующей стадии. Такая организация, очевидно, не есть результат эволюции к молекулярному беспорядку! Биологический порядок является одновременно и архитектурным, и функциональным. Кроме того, на клеточном и надклеточном уровнях биологический порядок проявляется в серии структур

и взаимосвязанных функций все возрастающей сложности и иерархического упорядочения. Такая ситуация противоположна концепции эволюции, описываемой термодинамикой изолированных систем, которая приводит просто к состоянию с максимальным числом „комплексов“ и, следовательно, к „беспорядку“ (выделено Пригожиным. — С. Х.)» [Пригожин, 1985. С. 97–99].

С термодинамической точки зрения, живые организмы могут рассматриваться как открытые системы, находящиеся в стационарных состояниях. Отсюда, видимо, и устойчивый интерес Брюссельской школы к *стационарным неравновесным состояниям открытых систем*:

«Интересно описать биологические структуры как открытые химические системы, действующие за пределом устойчивости термодинамической ветви» [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 260].

Стационарным неравновесным состоянием Пригожин называет в общем нелинейном случае такое состояние неравновесной системы, в котором имеет место равенство

$$\left\langle \frac{dS}{dt} = \frac{d_i S}{dt} + \frac{d_e S}{dt} = 0. \right. \quad (3.2.17)$$

Но так как

$$\frac{d_i S}{dt} > 0, \quad (3.2.18)$$

то по необходимости

$$\frac{d_e S}{dt} < 0. \quad (3.2.19)$$

Стационарные неравновесные состояния *не могут возникать в изолированных системах*, так как для поддержания стационарного состояния необходимо наличие потока энтропии (выделено Пригожиным. — С. Х.)» [Пригожин, 1960. С. 96–97].

Всегда

«энтропия течет из системы, находящейся в стационарном [неравновесном] состоянии, во внешнюю среду и, таким образом, увеличивает энтропию внешней среды» [Там же. С. 98].

Последнее высказывание подводит к еще одной, на мой взгляд, главной причине, по которой Брюссельская школа рассматривает возникновение упорядоченных структур исключительно в открытых системах. Дело в том, что Пригожин и его сотрудники придерживаются общепринятой, но, как мы настаиваем (см. разд. 1.1), ошибочной *трактовки энтропии реальных систем как меры беспорядка*:

«...Нарушение симметрии порождает упорядоченность и, следовательно, снижает энтропию системы» [Николис, Пригожин, 1979. С. 228].

Считая, что возникновение в системе упорядоченной структуры необходимо сопряжено с уменьшением ее энтропии, невозможным для изолированной системы, они и ограничиваются, рассматривая процессы упорядочения, анализом открытых систем.

Еще раз подчеркнем, что неравновесная система может быть стационарной лишь при условии, что ей есть куда сбрасывать излишки возникающей в ней энтропии. Упорядоченные структуры, возникающие и сохраняющиеся в открытых неравновесных системах благодаря обмену энергией и веществом со средой, Пригожин и называет *диссипативными*. Будучи изолированной от среды, диссипативная структура разрушается, что подтверждается наблюдением окружающих нас живых систем. Кроме диссипативных структур в окружающем нас мире присутствуют и структуры иной природы, которые могут существовать и в *изолированной* системе:

«С макроскопической точки зрения необходимо различать два типа структур:

- 1) равновесные структуры;
- 2) диссипативные структуры.

Равновесные структуры могут образоваться и поддерживаться в ходе *обратимых* превращений, протекающих при незначительном отклонении от равновесия. Типичный пример равновесной структуры — кристалл (нашу точку зрения см. в разд. 3.6. — С.Х.). Диссипативные структуры имеют совершенно другую природу: они образуются и сохраняются благодаря обмену энергией и веществом с внешней средой в неравновесных условиях (выделено авторами. — С.Х.)» [Гленсдорф, Пригожин, 1973. С. 11].

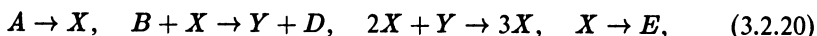
Однако вплотную этими равновесными структурами Брюссельская школа не занимается. Возможно, это связано с тем, что они имеют иную природу, нежели живые системы, находящиеся, как указывалось, в центре внимания этой школы. Свою концепцию диссипативных структур, отталкивающуюся от наблюдения живых систем, Пригожин к ним же и прилагает, стремясь устранить противоречие между жизнью и законом возрастания энтропии [Хайтун, 1996. С. 317; 2005. Разд. 3.2.5].

Лоренц, как мы видели, пришел к синергетике в поисках необратимого *хаоса*, Пригожин — неравновесного *порядка*, однако это различие их путей оказалось в итоге несущественным, потому что в необратимых системах эти две ипостаси «детерминированного хаоса» неотделимы друг от друга. К пониманию этого пришел и Пригожин. Одна из его книг (написанная в соавторстве с И. Стенгерс) так и называется: «Порядок из хаоса [Order out of Chaos]». Читаем в ней:

«Во многих случаях довольно трудно провести четкую границу между такими понятиями, как „хаос“ и „порядок“. К каким системам следует отнести, например, тропический лес: к упорядоченным или хаотическим? История любого вида животных может показаться случайной, зависящей от других видов и флуктуаций окружающей среды. Тем не менее трудно отделить от впечатления, что общая структура тропического леса, например все многообразие встречающихся в нем видов животных и растений, соответствует некоторому архетипу порядка. Какой бы конкретный смысл мы ни вкладывали в термины „порядок“ и „хаос“, ясно, что в некоторых случаях последовательность бифуркаций приводит к необратимой эволюции и детерминированность характеристических частот порождает все большую

случайность, обусловленную огромным числом частот, участвующих в процессе» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 225–226].

Проводятся Брюссельской школой и численные исследования фазовой структуры решений конкретных систем уравнений. Известность получила модель «брюсселятор», или модель Лефевра–Николиса–Пригожина¹⁶⁾. «Брюсселятор» — это модель химической системы, в которой происходит автокаталитическая реакция (см. разд. 3.2.5)



характеризуемая химическими константами k_1, k_2, k_3, k_4 и описываемая реакционно-диффузионными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial t} &= k_1 A - (k_2 B + k_4) X + k_3 X^2 Y + D_1 \Delta X, \\ \frac{\partial Y}{\partial t} &= k_2 B X - k_3 X^2 Y + D_2 \Delta Y. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Здесь изучается изменение во времени концентраций веществ X и Y при заданных концентрациях веществ A, B, D и E . Поведение системы исследуется при возрастающих значениях управляющего параметра B . D_1 и D_2 — коэффициенты диффузии соответственно веществ X и Y ; содержащие эти коэффициенты члены отвечают за диффузию этих веществ в химическом реакторе. Если мы пренебрегаем диффузией, опуская слагаемые с оператором Лапласа Δ , и производим замену переменных

$$\begin{aligned} t' &= k_4 t, \quad X' = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{1/2} X, \quad Y' = \left(\frac{k_3}{k_4} \right)^{1/2} Y, \\ A' &= \left(\frac{k_1^2 k_3}{k_4^3} \right)^{1/2} A, \quad B' = \frac{k_2}{k_4} B, \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

в результате которой k_i оказываются равными единице [Кудрявцев, 1987. С. 127], то система (3.2.21) принимает простой вид (штрихи опускаем):

$$\frac{dX}{dt} = A - (B + 1)X + X^2 Y, \quad \frac{dY}{dt} = BX - X^2 Y. \quad (3.2.23)$$

В результате численного решения несимметричной по времени нелинейной системы уравнений «брюсселятора» получаются фазовые структуры, обладающие всеми чертами странных аттракторов.

Брюссельская школа представляет собой одно из крупнейших явлений современной науки. Если же говорить конкретно о синергетике, то эта школа не может быть признана здесь центральной. Центральным

¹⁶⁾ [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 187–188, 200–208; Chaos, 1986. P. 31; Кудрявцев, 1987. С. 127].

в синергетике является сегодня направление, связанное с анализом странных аттракторов и продолжающее линию Лоренца—Рюэля и Такенса—Хакена—Мандельброта (см. о последнем в гл. 4). Между тем в книгах Пригожина трудно найти ссылки на работы этих ученых, а вся Брюссельская школа наблюдает за обсуждением фрактальной природы странных аттракторов в основном со стороны. Не характерен для центрального массива работ по синергетике, связанного с именами Лоренца, Хакена и др., и проявляемый Брюссельской школой интерес к энтропии, в которой Пригожин с учениками видят источник порядка и которую Хакен, как отмечалось, считает слишком грубой для изучения самоорганизующихся систем. Не сошелся также свет клином на центральном для Брюссельской школы понятии диссипативной структуры, поскольку стационарные состояния необратимой открытой системы, к которым относится это понятие, хотя и характерны для живых организмов, не исчерпывают всего разнообразия состояний необратимой (вообще говоря, не обязательно открытой — см. разд. 3.5.2) системы.

3.2.5. Горьковская школа автоколебаний

Ветвью синергетики, отличной от Брюссельской школы, является ветвь, связанная с изучением необратимых процессов как *автоволновых*¹⁷⁾:

«Возможны различные типы упорядоченного поведения сильнонеравновесных открытых систем. Прежде всего в таких системах могут наблюдаться стационарные структуры, которые И. Пригожин предложил называть диссипативными. В отличие от равновесных структур (типичный пример — кристалл)¹⁸⁾ диссипативные структуры образуются и сохраняются благодаря обмену энергией и веществом с внешней средой в неравновесных условиях. Иным типом регулярного поведения являются периодические автоколебания или их аналоги для распределенных систем — автоволновые процессы» [Полак, Михайлов, 1983. С. 7].

Эта ветвь развивается во многом Горьковской школой нелинейных колебаний, продолжающей традиции Л. И. Мандельштама и А. А. Андропова и стремящейся описать в терминах теории колебаний возможно более широкий круг явлений. Турбулентность, например, рассматривается здесь как стохастические автоколебания на странных аттракторах [Рабинович, 1978]. В общем случае распределенной системы протекающие в ней необратимые процессы моделируются в этой ветви синергетики посредством

¹⁷⁾ [Рабинович, 1978; Васильев и др., 1979; Полак, Михайлов, 1983; Арансон и др., 1985; Гапонов-Грехов, Рабинович, 1987; Рабинович, Трубецков, 1992; Рыскин, Трубецков, 2000; Трубецков, 2003].

¹⁸⁾ Подчеркнем, что кристаллы также возникают в ходе *необратимых* процессов (см. разд. 3.6).

несимметричных по времени уравнений

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = V_i(x_1, \dots, x_n, \vec{r}) + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial x_j}{\partial \vec{r}} \right), \quad (3.2.24)$$

частным случаем которых являются, например, и уравнения Тьюринга (3.2.1). Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор; $x_i(\vec{r}, t)$ — величины, характеризующие взаимодействующие компоненты, например, их температуры и концентрации; $V_i(\vec{x}, \vec{r})$ — нелинейные функции, отвечающие за взаимодействие компонент; D_{ij} — коэффициенты диффузии и теплопроводности, а содержащие их члены суммы учитывают потоки компонент, возникающие под действием градиентов концентраций и температуры.

Фазовая структура решений уравнений (3.2.24) исследуется здесь обычными средствами вычислительного эксперимента, однако используемая терминология несет на себе печать «колебательной» идеологии. Говорят, например, о том, что в существенно неравновесной системе возникает

«дискретный ансамбль осциллирующих структур, взаимодействующих друг с другом» [Арансон и др., 1985. С. 92],

и об *автоструктурах*, под которыми понимаются

«локализованные пространственные образования, устойчиво существующие в диссипативных неравновесных средах и не зависящие (в конечных пределах) от граничных и начальных условий» [Гапонов-Грехов, Рабинович, 1987. С. 8].

«Подчеркнем, что для установления автоколебательного режима внешний диффузионный поток вовсе не обязан быть постоянным. Более того, он может вообще отсутствовать в течение определенных интервалов времени» [Полак, Михайлов, 1983. С. 185].

Так как в уравнениях (3.2.24) присутствуют диффузионные члены, то величины $x_i(\vec{r}, t)$ необходимо имеют в них смысл локальных *макроскопических* величин. Если мы, как это делается, скажем, в модели «брюсселятора», отбросим диффузионные члены и соответственно уберем в функциях V_i и величинах x_i зависимость от радиус-вектора $\vec{r}$, то получим уравнения

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\vec{x}), \quad (3.2.25)$$

совпадающие с уравнениями (3.2.5), в которых величины $x_i(t)$ уже могут быть истолкованы и как *микроскопические* координаты и импульсы динамической системы.

3.2.6. Белоусов, Жаботинский и другие: колебательные химические реакции

В самостоятельную ветвь синергетики могут быть выделены исследования, в которых изучаются упорядоченные во времени и/или пространстве колебательные структуры, возникающие в первоначально однородной

смеси химических реагентов при протекании между ними некоторых реакций, прежде всего, автокаталитических¹⁹⁾, в которых какие-то продукты реакции являются одновременно катализаторами, ускоряющими ее течение [Жаботинский, 1974; Кудрявцев, 1987; Колебания..., 1988]. Эта ветвь исследований отталкивается от тех же уравнений (3.2.24), только функции $V_i(\vec{x}, \vec{r})$ имеют здесь специфическое наполнение, описывая химические реакции.

Первым о таких реакциях сообщил, по-видимому, В. Оствальд в 1899 г.; исследования продолжили его зять Э. Брауэр (1901) и А. Адлер (1912); Э. С. Хеджес и Дж. Э. Майерс в книге 1926 г. дали обзор литературы о периодических процессах в физической химии [Круг, Польман, 1994]. Все эти работы, однако, большого интереса в научном сообществе не вызвали.

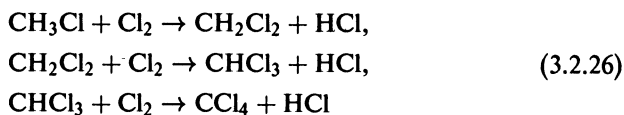
Колебательная химическая реакция была переоткрыта Б. П. Белоусовым [1951], статья которого была отклонена химическим журналом, так что первое сообщение о реакции Белоусова появилось только в 1959 г., а сама реакция была исследована А. М. Жаботинским еще позже [Жаботинский, 1974]. Белоусов

«обнаружил, что при окислении лимонной кислоты броматом, катализируемым ионами церия, раствор регулярно меняет свою окраску от бесцветной к желтой, затем снова к бесцветной и т. д.» [Колебания..., 1988. С. 7].

Оказалось также, что с реакцией Белоусова связано и пространственное упорядочение. Как продемонстрировала эта реакция, упорядоченные структуры могут возникать в *изолированных* системах, что противоречило господствующим по сию пору воззрениям на энтропию как меру беспорядка, чем и объясняется, на мой взгляд, столь долгий и сложный путь работ Оствальда, Белоусова и др. к их признанию.

С 1955 г. исследование колебательных химических реакций ведет И. Пригожин, по-видимому, не знавший поначалу о работе Белоусова и сосредоточивший внимание, в соответствии со своей изложенной в разд. 3.2.4 концепцией, на *стационарных* диссипативных структурах, возникающих в открытых химических системах [Там же. С. 8]. Предложила, как отмечалось, Брюссельская школа Пригожина и собственную химическую реакцию рассматриваемого типа — *брюсселятор*, описываемый уравнениями (3.2.20)–(3.2.23).

Реакция Белоусова—Жаботинского [Жаботинский, 1974. С. 11]



¹⁹⁾ Термин *автокатализ* был введен в 1890 г. В. Оствальдом [Круг, Польман, 1994].

описывается динамической моделью [Кудрявцев, 1987. С. 141]

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= k_1 AY - k_2 XY + k_3 AX - 2k_4 X^2, \\ \frac{dY}{dt} &= -k_1 AY - k_2 XY + f k_5 Z, \\ \frac{dZ}{dt} &= 2k_3 AX - k_5 Z\end{aligned}\quad (3.2.27)$$

(f – стехиометрический коэффициент²⁰⁾), аналогичной брюсселятору и получившей название *орегонатор* по месту работы (штат Орегон, США) исследовавших ее ученых. Производя замену переменных

$$\begin{aligned}t' &= k_1 A t, \\ X' &= \frac{k_2}{k_1 A} X, \quad Y' = \frac{k_2}{k_3 A} Y, \quad Z' = \frac{k_2 k_5}{2 k_1 k_3 A^2} Z, \\ \varepsilon &= \frac{k_1}{k_3}, \quad p = \frac{k_1 A}{k_5}, \quad q = \frac{2 k_1 k_4}{k_2 k_3},\end{aligned}\quad (3.2.28)$$

можно записать эту систему в виде (штрихи опускаем)

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{dX}{dt} &= X + Y - XY - q X^2, \\ \frac{dY}{dt} &= -Y + 2f Z - XY, \\ p \frac{dZ}{dt} &= X - Z,\end{aligned}\quad (3.2.29)$$

где $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-1}$, $p = 3,1 \cdot 10^2$ и $q = 8,4 \cdot 10^{-6}$ [Там же].

Исследуются уравнения, возникающие в этой ветви синергетики, с помощью обычных для нее средств — теории устойчивости Ляпунова, теории бифуркаций, вычислительного эксперимента.

3.2.7. Руденко и другие: эволюционная химия

Еще одной ветвью синергетики, примыкающей к предыдущей, являются исследования, посвященные теории химической эволюции, призванной объяснить феномен происхождения жизни. Здесь изучаются автокаталитические реакции определенного типа, в ходе которых не просто вырабатываются катализаторы, ускоряющие течение реакций, но эти катализаторы еще со временем и совершенствуются, способствуя выработке все более сложных продуктов. Химические реакции, протекающие

²⁰⁾ СТЕХИОМЕТРИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ, численные коэффициенты перед формулами химических реагентов в записываемых химических реакции уравнениях.

при участии самосовершенствующихся катализаторов, и лежат в основе самоорганизации химических систем.

Явление самосовершенствования катализаторов в химических реакциях было открыто в конце 50-х гг. XX в. американцами А. Гуотми и Р. Каннингемом [Гуотми, Каннингем, 1960; Кузнецов, 1994]. Их работы, однако, не были замечены. Следующий этап в развитии эволюционной химии связан с именем советского химика Александра Петровича Руденко [1969, 1983–1987, 2000], пришедшего к выводу, что в процессе саморазвития элементарных открытых каталитических систем (ЭОКС) происходит *естественный отбор* центров катализа, которые обладают *наибольшей активностью* и на которых все более сосредоточивается базисная реакция. При этом, утверждает Руденко,

«Эволюция каталитических систем идет по пути отбора систем с *наименьшей* энтропией организации, т. е. систем, наилучшим образом приспособленных для упорядоченной передачи энергии базисной реакции на все процессы, совершаемые в сложной каталитической системе» [Руденко, 1969. С. 162]. «...Эволюция каталитических систем неизбежно приводит к образованию систем с *минимумом* энтропии организации, т. е. систем с высокой организацией (выделено оба раза мной. — С. X.)» [Там же. С. 154].

Развитая Руденко концепция эволюционного саморазвития каталитических систем представляется более чем здравой, если освободить ее от ошибочной, как мы утверждаем (см. разд. 1.1), трактовки энтропии как меры беспорядка и не менее ошибочной, как это признается сегодня все большим числом авторов [Чайковский, 1990, 2003; Назаров, 2005; Хайтун, 2005. Разд. 4.7.2 и гл. 5], теории естественного отбора, который не следует отождествлять с борьбой за существование (см. далее в настоящем разделе).

Более широкую известность получила концепция химической эволюции М. Эйгена [Eigen, 1971a, b; Эйген, Винклер, 1979; Эйген, Шустер, 1982], основным элементом которой служит введенное Эйгеном понятие *гиперцикла*:

«Эйген и его сотрудники показали, что только система одного типа обладает способностью сопротивляться „ошибкам“, постоянно совершаемым автокаталитическими популяциями, — а именно полимерная система, структурно устойчивая относительно появления любого полимера-„мутанта“. Такая система состоит из двух множеств полимерных молекул. Молекулы первого множества выполняют функцию „нуклеиновых кислот“. Каждая молекула обладает способностью к самовоспроизведению и действует как катализатор при синтезе молекул второго множества, выполняющих функцию „протеинов“. Каждая молекула второго множества катализирует самовоспроизведение молекул первого множества. Такая кросс-каталитическая связь между молекулами двух множеств может превращаться в цикл (каждая „нуклеиновая кислота“ воспроизводит себя с помощью „протеина“). Этот цикл обеспечивает устойчивое выживание „нуклеиновых кислот“ и „протеинов“,

защищенных от постоянно возникающих с высоким коэффициентом воспроизводства новых полимеров: ничто не может вмешиваться в самовоспроизводящийся цикл, образуемый „нуклеиновыми кислотами“ и „протеинами“. Таким образом, эволюция нового типа начинает расти на прочном фундаменте, предвосхищающем появление химического кода» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 252].

«...Белковонуклеотидный комплекс, в котором белок способствует комплементарной²¹⁾ авторепродукции, а полинуклеотид „катализирует“ синтез белка» [Романовский и др., 1984. С. 27],

Эйген и называет гиперциклом, утверждая, что среди разных гиперциклов может протекать естественный отбор, благодаря которому которого они способны эволюционировать:

«Теория Дарвина оказывается оптимальным принципом, вытекающим из определенных физических предпосылок, а не „несводимым“ феноменом, который относится только к биосфере» [Eigen, 1971a; Рус. пер. С. 204].

Именно гиперциклы, по Эйгену, являются структурами, промежуточными между неживыми и живыми системами.

В модели Эйгена—Шустера конкуренция гиперциклов за некоторый субстрат описывается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(\vec{x}) - \frac{x_i}{c_0} \sum_{j=1}^n F_j(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2.30)$$

[Эйген, Шустер, 1982. С. 96]. Здесь x_i — концентрация i -го вида гиперциклов, $c_0 = \sum_i x_i$, функция $F_i(\vec{x})$ характеризует скорость возникновения гиперциклов данного вида, а второе слагаемое в правой части как раз и отвечает за конкурентную борьбу гиперциклов.

Отмеченная выше несостоятельность теории естественного отбора не отменяет уравнения (3.2.30), поскольку конкуренция (борьба за существование), в отличие от естественного отбора, играет определенную эволюционную роль, причем, не только в органическом мире, но и далеко за его пределами [Хайтун, 2005. Разд. 4.4.3, 4.7.2—4.7.3]²²⁾.

²¹⁾ «КОМПЛЕМЕНТАРНОСТЬ, пространственная взаимодополняемость (взаимное соответствие) поверхностей взаимодействующих молекул или их частей» [Биология..., 1999. С. 275].

²²⁾ Борьба за существование — только одна из трех компонент естественного отбора, которую часто некорректно отождествляют со всем естественным отбором. Две другие компоненты — возникновение множества наследуемых малых случайных мутаций и аккумуляция выживающих на протяжении ряда поколений малых мутаций в новые признаки. Вот эти две компоненты, в отличие от борьбы за существование, и признаются все большим числом ученых не имеющими отношения к реалиям эволюции.

3.3. Странные аттракторы

Разнообразие уравнений, фазовая структура решений которых изучается современной синергетикой, очень велико. Чтобы получить о нем более полное представление, приведем в дополнение к уже рассмотренным уравнениям Тьюринга (3.2.1), Лоренца (3.2.6), Кука и Робертса (3.2.10), «брюсселятора» (3.2.21)–(3.2.23), автоволновым (3.2.24), «ореогонатора» (3.2.27)–(3.2.29), Эйгена—Шустера (3.2.30) еще несколько.

3.3.1. Примеры синергетических систем

Уравнение теплопроводности для среды с объемным источником тепла (возникающим, например, в результате горения) и коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры $T(x, t)$ по степенному закону:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_0 T^\alpha \frac{\partial T}{\partial x} \right) + q_0 T^\beta, \quad (3.3.1)$$

$$\kappa_0 > 0, \quad q_0 > 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

[Курдюмов и др., 1986. С. 1192; Галактионов и др., 1988. С. 3].

Возмущенное уравнение синус-Гордона, описывающее распространение возбуждения в неравновесной среде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = \varepsilon \left[\alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^3 + A \sin(\omega t - kx) \right], \quad (3.3.2)$$

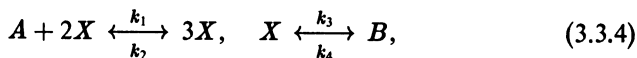
$$\varepsilon \ll 1$$

[Гапонов-Грехов, Рабинович, 1987. С. 17].

Модель Шлёгеля

$$\frac{dX}{dt} = k_1 A X^2 - k_2 X^3 - k_3 X + k_4 B \quad (3.3.3)$$

описывает изменение во времени концентрации промежуточного продукта X в ходе химической реакции



превращающей вещество A в вещество B , при постоянных концентрациях этих веществ A и B [Кудрявцев, 1987. С. 108].

Система Рёслера:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z, \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b - cz + xz \quad (3.3.5)$$

[Лихтенберг, Либман, 1984. С. 416; Chaos, 1986. P. 21].

Система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -9x_2 + 3x_1x_3, \\ \frac{dx_3}{dt} &= -5x_3 - 7x_1x_2 + R, \\ \frac{dx_4}{dt} &= -5x_4 - x_1x_5, \\ \frac{dx_5}{dt} &= -x_5 - 3x_1x_2,\end{aligned}\tag{3.3.6}$$

полученная из уравнений Навье—Стокса для двухмерной несжимаемой жидкости [Franceschini, Tebaldi, 1979]. Здесь R — число Рейнольдса ²³⁾.

Уравнения Вольтерра

$$\frac{dX}{dt} = aX(1 - Y), \quad \frac{dY}{dt} = Y(X - 1),\tag{3.3.7}$$

описывающие изменение во времени численности двух конкурирующих за пищу биологических видов [Volterra, 1926; Кудрявцев, 1987. С. 123].

Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -xy^2, \quad \frac{dy}{dt} = xy^2 - y\tag{3.3.8}$$

[Chaos, 1986. P. 32].

Система уравнений

$$\frac{dx}{dt} = a + x^2y - bx - x + A \cos \omega t, \quad \frac{dy}{dt} = bx - x^2y\tag{3.3.9}$$

[Op. cit.]. Здесь $A \cos \omega t$ — внешняя сила.

Многие авторы рассматривают фазовую структуру решений уравнений, описывающих движение осцилляторов разных видов. Линейный затухающий осциллятор, подверженный действию силы F , скорость изменения которой нелинейно зависит от осциллирующей величины x :

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x = F, \quad \dot{F} = bx(1 - x)\tag{3.3.10}$$

[Полак, Михайлов, 1983. С. 139]. Эти уравнения легко приводятся к стандартной форме

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - ax_2 + x_3, \quad \frac{dx_3}{dt} = bx_1(1 - x_1).\tag{3.3.11}$$

²³⁾ ЧИСЛО РЕЙНОЛЬДСА, характеризует соотношение между инерционными силами и силами вязкости: $Re = \rho vl/\mu$, где ρ — плотность, μ — коэффициент динамической вязкости, v — характерная скорость потока, l — характерный линейный размер [Физика..., 1999. С. 631].

Нелинейный затухающий осциллятор с кубическим членом, находящийся под действием периодической внешней силы (уравнение типа Дюффинга):

$$\ddot{x} + a\dot{x} + x^3 = A \cos \omega t, \quad (3.3.12)$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -ax_2 - bx_1^3 + A \cos \omega t \quad (3.3.13)$$

[Chaos, 1986. P. 28].

Нелинейный затухающий осциллятор с синусоидальным членом, находящийся под действием периодической внешней силы:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = A \cos \omega t, \quad (3.3.14)$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -b \sin x_1 - ax_2 + A \cos \omega t \quad (3.3.15)$$

[Шустер, 1988. С. 21].

Нелинейный осциллятор, находящийся под действием внешнего возмущения в виде плоской волны:

$$\ddot{x} + a \sin x = A \sin (kx - \omega t), \quad (3.3.16)$$

или

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = -a \sin x_1 + A \sin (kx_1 - \omega t) \quad (3.3.17)$$

[Заславский и др., 1986. С. 3].

Последняя система, которую мы здесь приведем, описывается в переменных действие–угол²⁴⁾ уравнениями

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega(J), \quad \frac{dJ}{dt} = -\gamma(J - J_0) - \varepsilon \frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} f(t), \quad (3.3.18)$$

где

$$\omega(J) = \omega_0 \left(1 + \alpha \frac{J - J_0}{J_0} \right), \quad V(\theta) = \frac{J_0}{T} \cos \theta, \quad (3.3.19)$$

$$f(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT),$$

а вся величина $\varepsilon(\partial V/\partial \theta)f(t)$ описывает действие на систему внешних периодических толчков [Заславский, 1984. С. 251–252]. Здесь параметр ε характеризует величину внешнего возмущения, γ — коэффициент диссипации, имеющей место в системе и в отсутствие внешнего возмущения.

²⁴⁾ Об этих переменных см. в разд. 2.2.3.

Обозначая $\theta = x$, систему (3.3.18)–(3.3.19) легко преобразовать в дифференциальное уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + a = b \sin x \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (3.3.20)$$

с $a = -\gamma\omega_0$ и $b = \omega_0\alpha\varepsilon$.

3.3.2. Странный аттрактор как необратимый стохастический аттрактор

Еще раз обратим внимание на тот факт, что все исходные уравнения синергетики *несимметричны* по времени. Соответственно все изучаемые ею системы являются системами с *необратимым* хаосом. Уравнения же, изучаемые теорией динамического хаоса, всегда *симметричны* по времени, а ее системы являются соответственно системами с *обратимым* хаосом. Конечно, синергетика подобно теории динамического хаоса исследует, как регулярное движение динамической системы срывается при определенных значениях ее управляющих параметров в стохастическое.

«Условие перехода от устойчивого ламинарного движения к турбулентному, по существу, есть условие возникновения стохастичности, или перемешивания в фазовом пространстве» [Заславский, 1984. С. 250].

В этом плане необратимые динамические системы вполне аналогичны обратимым.

Необратимый хаос, однако, имеет ту специфику, что его возникновение в динамической системе с потерей фазовой траекторией устойчивости всегда связано с *возникновением* в фазовом пространстве системы *упорядоченной структуры*. Таковы все живые системы (которые, впрочем, не являются динамическими в узком смысле этого слова, не описываясь на языке пространственных координат и импульсов), отталкиваясь от которых Пригожин пришел к понятию диссипативной структуры. Таковы и ячейки Бенара, о которых говорилось в разд. 3.2.4. Возникающее в последнем случае

«с установлением конвекции движение жидкости организовано более высоко, чем микроскопические движения в состояниях покоя: чтобы возникла наблюдаемая невооруженным глазом картина течения, огромное число молекул должно достаточно долго когерентно двигаться на наблюдаемых расстояниях» [Пригожин, 1985. С. 103–104].

Высокоорганизованным является и турбулентное течение, устанавливающееся, в частности, при разрушении ячеек Бенара:

«Долгое время турбулентность отождествлялась с хаосом или шумом. Сегодня мы знаем, что это не так. Хотя в макроскопическом масштабе турбулентное течение кажется совершенно беспорядочным, или хаотическим, в микроскопическом масштабе оно высокоорганизовано. Множество пространственных и временных масштабов, на которых разыгрывается турбулентность,

соответствует когерентному поведению миллионов и миллионов молекул. С этой точки зрения переход от ламинарного течения к турбулентности является процессом самоорганизации. Часть энергии системы, которая в ламинарном течении находилась в тепловом движении молекул, переходит в макроскопическое организованное движение» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 195–196].

Еще пример неравновесной упорядоченной структуры — кольца Сатурна:

«Эта... система... образуется в неравновесной системе вращающегося вокруг планеты вещества за счет игры сил притяжения вещества к Сатурну и взаимодействия отдельных частиц вещества между собой» [Кадомцев, Рязанов, 1983. С. 6].

Широко известен приведенный Г. Хакеном [Haken, 1977] пример с лазером непрерывного действия, который

«представляет собой сильно неравновесную открытую систему, образованную активными атомами и модами электромагнитного поля в резонаторе. Эта система выводится из равновесия благодаря постоянному притоку энергии от внешнего некогерентного источника оптической накачки. Поступающая энергия не накапливается в лазерной системе, а непрерывно покидает ее в форме электромагнитного излучения и потока тепла... если... повышать мощность накачки, то после достижения некоторого порога лазерное излучение становится когерентным, т. е. начинает представлять собой как бы один гигантский волновой пучок, где фазы волны жестко скоррелированы на макроскопических расстояниях. Переход к когерентной генерации, сопровождающийся установлением порядка в лазерной системе, может интерпретироваться как эффект самоорганизации» [Полак, Михайлов, 1983. С. 5–6].

Примерами неравновесных структур могут служить также

«неустойчивости, возникающие при плавлении и затвердевании, вызванных пульсирующим лазерным облучением кристаллов; пространственное и временное упорядочение на границе раздела жидких фаз при механической деформации; структуры, возникающие в слое на границе раздела жидкость–твердое тело при росте кристалла; диссипативные структуры, возникающие при однонаправленном росте бинарных сплавов из расплава; пространственные неоднородности в виде доменов с различной концентрацией химических компонент в горных породах и т. д.» [Кудрявцев, 1987. С. 3].

У одной и той же химической системы в различных экспериментальных условиях

«могут наблюдаться различные формы самоорганизации — химические часы, устойчивая пространственная дифференциация или образование волн химической активности на макроскопических расстояниях» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 208].

И т. д. и т. п. Возникновение порядка в неравновесной системе некоторые авторы связывают с тем, что в такой системе удастся

«выделить конечное, а иногда и очень небольшое число переменных, к которым „подстраиваются“ остальные. Эти переменные называют иногда *параметрами порядка*. Это можно пояснить на таком примере. Возьмем функцию $u(x)$, заданную на интервале от 0 до 1. Ее можно разложить по гармоникам (математики говорят — в ряд Фурье) и найти амплитуду каждой гармоники... Если процесс идет так, что количество гармоник большой амплитуды уменьшается [со временем], то в системе будет возникать некоторая упорядоченность, будет происходить *самоорганизация* (выделено авторами. — С. Х.)» [Ахромеева и др., 1985. С. 17–18].

Подчеркнем, что возникновение порядка в необратимых динамических системах, изучаемых синергетикой, не отменяет того факта, что в таких системах возникает хаос с потерей фазовой траекторией устойчивости. Хаос и порядок в необратимых системах настолько неотделимы друг от друга, что имеет смысл говорить о *степени упорядоченности* хаотических структур:

«Интуитивно понятие структуры противопоставляется понятию хаоса как состоянию, полностью лишенному всякой структуры. Однако, как показал более тщательный анализ, такое противопоставление... неверно... хаос может быть различным, обладать разной степенью упорядоченности, разной структурой» [Данилов, Кадомцев, 1983. С. 10].

Нерасторжимость хаоса и порядка в изучаемых синергетикой необратимых системах некоторыми авторами осознается как *нерасторжимость статистического и динамического (регулярного) движения*:

«Другая интересная проблема: законы какого типа являются более фундаментальными — динамические или статистические? Эргодическая теория отдает в этом смысле предпочтение динамическим законам. Однако вопрос этот гораздо сложнее. Сейчас мы знаем или, точнее сказать, наконец, поняли, что подобно тому, как в динамической системе при определенных условиях могут проявляться статистические законы, в статистической системе могут возникать динамические процессы... Если попробовать вообразить себе общую картину соотношения динамических и статистических законов, то получится нечто вроде иерархии последовательно чередующихся динамических и статистических режимов движения, так что каждый последующий является частным случаем предыдущего. Мы плохо представляем себе, чем может закончиться эта иерархия, и совсем не знаем, что лежит в ее основе, и есть ли она... Динамическое движение... охватывает, как правило, лишь ничтожное число степеней свободы, тогда как остальные характеризуются по-прежнему статистическим поведением» [Чириков, 1982. С. 192–193].

А. В. Гапонов-Грехов с коллегами говорят о том же другими словами:

«В неравновесных диссипативных средах в результате развития пространственных неустойчивостей часто устанавливаются регулярные образования в виде ансамблей тождественных (или подобных) элементарных ячеек или динамических структур... При повышении надкритичности — степени неравновесности среды — ее стационарное состояние в виде набора таких неизменных структур становится неустойчивым и, вообще говоря, разрушается.

Во многих случаях, однако, полному разрушению регулярных пространственных образований и возникновению в неравновесной среде развитой турбулентности или полного хаоса препятствует еще несколько стадий постепенного усложнения и преобразования структур, связанных с увеличением их автономности. Одним из наиболее типичных путей такого усложнения является возбуждение на фоне регулярного ансамбля структур индивидуальных или коллективных степеней свободы» [Арансон и др., 1985. С. 92].

3.3.3. Странный аттрактор как стохастический аттрактор, обладающий структурой

Взаимосвязанность статистического и динамического (регулярного) движения в случае необратимой системы, о которой говорят процитированные авторы, фактически означает, что фазовая структура такой системы представляет собой в общем случае сложную сеть областей регулярного и стохастического движения, на которые распространяются, вообще говоря, регулярные и/или статистические законы. В этом отношении, однако, необратимый хаос аналогичен обратимому. Тем не менее отличие необратимого хаоса от обратимого существует. И связано оно с различием самих этих областей стохастического движения, т.е. *стохастических аттракторов*, в необратимом и обратимом случаях. Именно за эту их специфичность необратимые стохастические аттракторы и называют *странными*. Так чем же странные (необратимые) стохастические аттракторы отличаются от нестранных (обратимых)?

Несмотря на то что природа странных аттракторов обсуждается в целом ряде работ, до сих пор

«не существует общепринятого формального определения странного аттрактора» [Шустер, 1988. С. 110].

В литературе встречаются разные, в том числе и заведомо ошибочные, на мой взгляд, толкования этого понятия. Некоторые авторы [Hénon, 1976; Рус. пер. С. 152] довольствуются приведенным в разд. 3.2.3 первоначальным определением странного аттрактора Рюэля и Такенса как *произведения многообразия на канторово множество*. Как разъясняется в разд. 4.6 и как предварительно говорилось в разд. 3.2.3, это определение некорректно, не распространяясь, из-за нестохастичности канторова множества, на *стохастические* фракталы, к которым относятся странные аттракторы. Определение Дж. Гукенхеймера и Ф. Холмса носит, на мой взгляд, слишком абстрактный характер:

«Мы будем называть аттрактор странным, если он содержит трансверсальную²⁵⁾ гомоклиническую орбиту²⁶⁾» [Guckenheimer, Holmes, 1983. P. 256].

²⁵⁾ От лат. transversus — поперечный.

²⁶⁾ ГОМОКЛИНИЧЕСКАЯ ТРАЕКТОРИЯ, траектория динамической системы, стремящейся при $t \rightarrow \infty$ к одной и той же периодической траектории или к одному и тому же положению стационарного состояния. Наличие гомоклинической траектории часто считают

Так или иначе, других исследователей эти определения не устраивают, и они пытаются найти более удобоваримые. При этом многие идут по заведомо ошибочному пути, *отождествляя странный аттрактор со стохастическим*. Одни авторы определяют при этом странный аттрактор просто как такой, который отличается от неподвижной точки и предельного цикла. Согласно А. С. Монину, например, странные аттракторы — это множества,

«которые отличаются от неподвижных точек и предельных циклов и к которым асимптотически притягиваются... некоторые фазовые траектории» [Монин, 1978. С. 97].

В аналогичном духе высказываются Пригожин и Стенгерс:

«...В трехмерных системах появляются так называемые *странные аттракторы*, которым уже не соответствует периодическое движение (выделено авторами. — С.Х.)» [Пригожин, Стенгерс, 1986. С. 207].

Многие авторы связывают странность аттрактора непосредственно со стохастичностью:

«Рюэль и Такенс использовали для аттрактора с хаотическим движением термин „странный аттрактор“» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 19]. «Грубое говоря, странный аттрактор — это такой аттрактор, на котором близкие траектории расходятся экспоненциально» [Там же. С. 74].

«Сам термин „странный аттрактор“ (strange attractor) впервые появился в работе Рюэля и Такенса [1971], которые назвали таким образом притягивающие множества в фазовом пространстве, не являющиеся многообразиями. Сейчас, однако, термин СА связывается не столько с топологией притягивающего множества, сколько со случайностью поведения динамической системы на аттракторе» [Питаевский, Рабинович, 1979. С. 176].

«Странный аттрактор отличается от простых аттракторов (устойчивых особых точек и предельных циклов) тем, что все его траектории неустойчивы и с течением времени перемешиваются, оставаясь в пределах области аттрактора» [Романовский и др., 1984. С. 13].

Сюда же могут быть отнесены определения странных аттракторов как *чувствительных к начальным условиям*:

«Мы... определяем странный аттрактор как аттрактор с чувствительной зависимостью от начальных условий» [Eckmann, Ruelle, 1985. P. 625].

«Свойство, делающее аттрактор странным, — чувствительность к начальным условиям... *расстояния между первоначально сколь угодно близкими точками на аттракторе через достаточно большое время становятся конечными* (выделено Г. Шустером. — С.Х.)» [Шустер, 1988. С. 110].

критерием стохастичности динамической системы, так что данное определение странного аттрактора смыкается с обсуждаемыми в следующих абзацах основного текста.

В приведенных высказываниях, как видим, действительно с разной степенью определенности проводится отождествление странных аттракторов со стохастическими. Между тем стохастические аттракторы существуют и в фазовых пространствах *обратимых* динамических систем, не будучи при этом странными и являясь предметом изучения теории динамического хаоса. Такими обратимыми (нестранными) стохастическими аттракторами являются здесь просто области стохастического движения, к которым притягиваются соседние траектории. Так что сама по себе *стохастичность аттрактора еще не делает его странным*. Тенденция же к отождествлению стохастических и странных аттракторов является, на мой взгляд, следствием недостаточно четкого разведения в современной литературе обратимых и необратимых процессов.

Совершенно определенно различие между странными и нестранными аттракторами пролегает не по границе стохастичность/нестохастичность, в основе этого различия лежит что-то другое. Что же? Чтобы подвести к ответу на этот вопрос, приведем еще одну цитату:

«Простые нелинейные уравнения... могут описывать очень сложные процессы. Кроме особых точек и предельных циклов, в них могут наблюдаться *аттракторы, имеющие очень сложную структуру. Сейчас их называют странными аттракторами* (выделено мной. — С. Х.)» [Ахромеева и др., 1985. С. 34].

Согласно этому определению/описанию, странный аттрактор имеет «очень сложную структуру», тогда как нестранный аттрактор, по-видимому, имеет структуру менее сложную. Авторы этого определения, я полагаю, вплотную подошли к действительному различию странных и нестранных аттракторов. *Дело не в том, что странный аттрактор имеет «очень сложную» структуру, но в том, что он ее вообще имеет, тогда как нестранный стохастический аттрактор не имеет никакой структуры.*

В самом деле, фазовые структуры обратимых динамических систем, рассматриваемых теорией динамического хаоса, в общем случае имеют очень сложный характер, образуя запутанную сеть областей регулярного и стохастического движения. Однако отдельные области стохастического движения (нестранные стохастические аттракторы) представляют здесь собой области фазового пространства, заполняемые фазовыми точками абсолютно случайно. Увеличение числа фазовых точек (т. е. числа микросистем ансамбля) до бесконечности приведет к всюду плотному равномерному заполнению такой области фазового пространства без образования какой-либо структуры.

Фазовые структуры рассматриваемых синергетикой необратимых динамических систем также образуют в общем случае сложные сети областей регулярного и стохастического движения. Однако *отдельные области стохастического движения (странные стохастические аттракторы) представляют здесь собой области фазового пространства, заполняемые фазовыми точками не случайно, но с образованием определенных структур*, не исчезающих при сколь угодно малом масштабе рассмотрения фазовой картины.

Как ни увеличивай здесь число фазовых точек, область фазового пространства, соответствующая данному странному аттрактору, заполняется не вся, в ней возникают лакуны, совокупность которых образует определенную, характеризующую данный конкретный аттрактор, структуру.

Напомним, что в физике имеют смысл только *наблюдаемые* события, т. е. события, вероятность которых отлична от нуля, и потому *не имеют смысла множества меры нуль* (см. текст между соотношениями (1.2.19) и (1.2.20)). Не имеет поэтому за собой физической реальности и фаза втягивания фазовой траектории в аттрактор, эта фаза — чисто математический феномен. Все *наблюдаемое движение системы происходит на аттракторах* (см. концовку разд. 2.2.2). Поэтому при рассмотрении вопросов об обратимости/необратимости движения системы и о том, наличествует ли у ее аттракторов структура, (ненаблюдаемую) фазу втягивания траектории в аттрактор принимать во внимание не следует.

Итак, вопреки А. С. Питаевскому и М. И. Рабиновичу, высказывание которых в числе прочих было приведено выше в настоящем разделе, особая природа странных аттракторов определяется вовсе не *случайностью* движения динамической системы на аттракторе, но именно что его (аттрактора) *топологией*. О том, что означает странность необратимого стохастического аттрактора математически (топологически), мы поговорим в гл. 4.

3.4. Обобщенная теорема Лиувилля

В следующем разделе уравнения движения, изучаемые синергетикой, будут проанализированы на гамильтоновость/негамильтоновость. При этом существенной окажется теорема, обобщающая *теорему Лиувилля* о несжимаемости элемента объема фазовой жидкости гамильтоновой системы на системы, описываемые общими уравнениями движения вида

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(\vec{x}). \quad (3.4.1)$$

Начиная со статьи Лоренца 1963 г. *обобщенная теорема Лиувилля* широко применяется в синергетике при анализе странных аттракторов. Сначала приведем вместе с доказательством *нестатистическую* формулировку теоремы, следуя А. Лихтенбергу и М. Либману [1984. С. 412].

Вычислим изменение малого элемента объема $\Delta\vec{x}$ в точке $\vec{x}_0$:

$$\Delta\vec{x}(\vec{x}_0, t) = \prod_i \Delta x_i, \quad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots), \quad \vec{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots), \quad (3.4.2)$$

где

$$\Delta x_i(\vec{x}_0, t) = \frac{\partial x_i(\vec{x}_0, t)}{\partial x_{i0}} \Delta x_{i0}. \quad (3.4.3)$$

Относительная скорость $\Lambda(\vec{x})$ изменения объема $\Delta\vec{x}$ составляет:

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{x}) &= \frac{1}{\Delta\vec{x}} \frac{d(\Delta\vec{x})}{dt} = \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots} \frac{d(\Delta x_1)}{dt} \Delta x_2 \Delta x_3 \dots + \\ &+ \frac{1}{\Delta x_1 \Delta x_2 \dots} \frac{d(\Delta x_2)}{dt} \Delta x_1 \Delta x_3 \dots + \dots = \frac{1}{\Delta x_1} \frac{d(\Delta x_1)}{dt} + \\ &+ \frac{1}{\Delta x_2} \frac{d(\Delta x_2)}{dt} + \dots = \sum_i \frac{1}{\Delta x_i} \frac{d(\Delta x_i)}{dt}.\end{aligned}\quad (3.4.4)$$

Используя (3.4.3), находим

$$\frac{d(\Delta x_i)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial x_{i0}} x_i(\vec{x}_0, t) \right] \Delta x_{i0} = \frac{\partial}{\partial x_{i0}} \left[\frac{d}{dt} x_i(\vec{x}_0, t) \right] \Delta x_{i0}. \quad (3.4.5)$$

Подставляя теперь (3.4.5) в (3.4.4), при $t \rightarrow 0$ с учетом (3.4.1) получаем искомую обобщенную теорему Лиувилля:

$$\begin{aligned}\Lambda(\vec{x}) &= \frac{1}{\Delta\vec{x}} \frac{d(\Delta\vec{x})}{dt} = \sum_i \frac{1}{\Delta x_i} \frac{\partial}{\partial x_{i0}} \frac{dx_i(\vec{x}_0, t)}{dt} \Delta x_{i0} = \\ &= \sum_i \frac{\partial V(\vec{x}_0)}{\partial x_{i0}} = \operatorname{div} \vec{V}(\vec{x}).\end{aligned}\quad (3.4.6)$$

«Локальная величина Λ зависит от $\vec{x}(t)$ и может быть как положительной (растяжение), так и отрицательной (сжатие). Однако под диссипативными мы понимаем такие системы, для которых фазовый объем в среднем сжимается» [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 412].

Если уравнения движения системы заданы в форме отображения

$$\vec{x}_{n+1}^i = f_i(\vec{x}_n), \quad \vec{x}_n = (x_n^1, x_n^2, \dots), \quad (3.4.7)$$

то, рассматривая его как переход от переменных $\vec{x}_n$ с элементом объема $\Delta\vec{x}$ к переменным $\vec{x}_{n+1}$ с элементом объема $\Delta\vec{x}'$, находим, что этот элемент объема изменяется за одну итерацию в $|\det M(\vec{x})|$ раз, т.е.

$$\frac{\Delta\vec{x}'}{\Delta\vec{x}} = |\det M(\vec{x})|, \quad (3.4.8)$$

где

$$M = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots)}{\partial(x_n^1, x_n^2, \dots)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_n^1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n^2} & \dots \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_n^1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n^2} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (3.4.9)$$

— матрица Якоби²⁷⁾ для данного отображения. Вычитая из обеих частей (3.4.8) единицу, находим

$$\frac{\Delta \vec{x}' - \Delta \vec{x}}{\Delta \vec{x}} = |\det M(\vec{x})| - 1. \quad (3.4.10)$$

Стоящая здесь в левой части величина представляет собой, очевидно, искомую относительную скорость изменения элемента объема $\Delta \vec{x}$:

$$\frac{\Delta \vec{x}' - \Delta \vec{x}}{\Delta \vec{x}} \approx \frac{1}{\Delta \vec{x}} \frac{d(\Delta \vec{x})}{dn} = \Lambda(\vec{x}), \quad (3.4.11)$$

где n — число итераций. Получаем, таким образом,

$$\Lambda(\vec{x}) \approx |\det M(\vec{x})| - 1 \approx \ln |\det M(\vec{x})| \quad (3.4.12)$$

[Там же. С. 412], так как

$$y - 1 \approx \ln y, \quad (3.4.13)$$

если y мало отличается от единицы, как то и имеет место в нашем случае, поскольку изменение элемента фазового объема за одну итерацию мало.

Обобщенная теорема Лиувилля в *статистической* формулировке выражается соотношением

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V} \quad (3.4.14)$$

[Николис, Пригожин, 1990. С. 105], или

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\operatorname{div} \vec{V}. \quad (3.4.15)$$

Здесь $\rho(x, t)$ — фазовая плотность, т. е. (нормированное) число фазовых точек (микросистем ансамбля) на единицу объема фазового пространства. Сравнение соотношений (3.4.6) и (3.4.15) показывает, что величины $(1/\rho)(d\rho/dt)$ и $(1/\Delta \vec{x})(d(\Delta \vec{x})/dt)$ различаются знаками. Это и естественно, поскольку вторая величина, в отличие от первой, представляет собой относительную скорость изменения малого объема $\Delta \vec{x}$ фазового пространства, содержащего фиксированное число фазовых точек. Удельная плотность и удельный объем фазовой жидкости изменяются, очевидно, противоположным образом. Поэтому, когда, например, имеет место локальное растяжение фазовой жидкости, то ее удельная плотность $\rho(\vec{x})$ (количество фазовой жидкости на единицу объема) уменьшается, тогда как ее удельный объем (объем единицы «массы»), а вместе с ним и объем $\Delta \vec{x}$, наоборот, растут.

Соотношение (3.4.14) проще всего доказывается с помощью уравнения непрерывности для фазовой жидкости

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\rho \frac{d\vec{x}}{dt} \right) = 0. \quad (3.4.16)$$

²⁷⁾ См. выражение (С. 2.14) и связанную с ним сноску.

Это уравнение вкупе с (3.4.1) дают выражение

$$\sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \operatorname{div} \vec{V}, \quad (3.4.17)$$

подставляя которое в тождество

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}, \quad (3.4.18)$$

мы и получаем (3.4.14).

Обобщенная теорема Лиувилля характеризует изменение фазового объема системы. Но что такое фазовый объем синергетической системы? Это не может быть объем самой *фазовой жидкости*, которая остается в случае синергетической системы *несжимаемой* (из-за независимости динамических переменных — см. разд. 5.3), что делает ее объем неизменным. Так что величина $\operatorname{div} \vec{V}$ характеризует скорость изменения «огнивающего» объема *фазового пространства*, занимаемого фазовой жидкостью, который совпадает с объемом фазовой жидкости лишь в случае *непрерывности* последней, что имеет место в кинетическом подходе, в котором, как мы увидим в разд. 5.3, фазовая жидкость сжимаема/растягиваема. Или в случае гамильтоновой системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (3.4.19)$$

когда обобщенная теорема Лиувилля вырождается в теорему Лиувилля, поскольку здесь

$$\operatorname{div} \vec{V} = \sum_i \left[\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] = 0, \quad (3.4.20)$$

так что проблема, о которой мы здесь говорим, вообще не возникает.

Зато она возникает, когда фазовая жидкость не является непрерывной. Именно таковы, как мы видели, изучаемые синергетикой системы с их странными аттракторами. Ведь странность этих аттракторов в том и состоит, что фазовое пространство заполняется ими с образованием сети лакун, не исчезающей при устремлении числа фазовых точек к бесконечности. Именно поэтому для систем, движение которых происходит на странных аттракторах, локальные скорости изменения объема фазовой жидкости и объема фазового пространства, этой жидкостью занимаемого, не совпадают.

Как о том еще будет говориться в разд. 5.1 и 5.3, фазовая плотность на странном аттракторе не просто разрывна в каждой точке, но разрывна в такой степени, что это делает ее тождественно равной нулю в пространстве обычной (топологической) размерности. Это делает невозможным написание для нее здесь каких бы то ни было дифференциальных уравнений, включая кинетические уравнения.

О несовместимости кинетического описания с синергетическим мы будем говорить в разд. 5.3–5.4, а пока заметим, что, сформулировав этот вывод, мы сразу наталкиваемся на дифференциальные соотношения для фазовой плотности, выражающие обобщенную теорему Лиувилля. Рассмотрим с этой точки зрения три ее варианта — нестатистический в форме (3.4.6), нестатистический же в форме (3.4.12) и статистический (3.4.14)–(3.4.15).

При доказательстве соотношения (3.4.6) фазовая плотность не фигурирует вовсе, дифференцируются только функции $x_i(\vec{x}_0, t)$ и $\Delta x_i(\vec{x}_0, t)$, что и придает данному варианту теоремы нестатистический характер. Между тем развилка из кинетического и синергетического подходов возникает лишь при статистическом описании (см. разд. 5.3), вне которого, таким образом, о характерной для странных аттракторов всюду разрывной фазовой траектории говорить не приходится. Поэтому фазовую траекторию здесь можно считать непрерывной, а дифференцирование функций $x_i(\vec{x}_0, t)$ и $\Delta x_i(\vec{x}_0, t)$ — корректным независимо от того, идет ли речь о странном или нестранном аттракторе. Так что приведенное доказательство соотношения (3.4.6) представляется математически корректным. Такова, во всяком случае, точка зрения автора этих строк.

Корректно, на мой взгляд, и доказательство приближенного соотношения (3.4.12), так как здесь дифференцируются функции f_i , предполагаемые при записи отображений (3.4.7) непрерывными. В этом легко убедиться на примере отображения М. Хенона [Hénon, 1976]:

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2, \quad y_{n+1} = bx_n, \quad (3.4.21)$$

для которого функции $f_1 = y_n + 1 - ax_n^2$ и $f_2 = bx_n$ действительно непрерывны, так что вычисление величины $|\det M|$ для этого отображения не связано с какими-либо затруднениями:

$$|\det M| = \left| \det \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} \right| = b \quad (3.4.22)$$

[Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 420].

Что же касается *статистического* выражения теоремы соотношениями (3.4.14)–(3.4.15) для фазового пространства обычной (топологической) размерности, то на странном аттракторе они вообще не могут быть написаны из-за тождественного равенства здесь нулю фазовой плотности $\rho(\vec{x}, t)$, в силу которого тождественно равны нулю частные производные $\partial \rho / \partial x_i$ и $\partial \rho / \partial t$ и вычисляемая с их помощью полная производная (3.4.18).

Формально соотношения (3.4.14)–(3.4.15) не могут быть написаны и в кинетическом подходе из-за отсутствия в нем уравнений динамики для отдельных степеней свободы (см. разд. 5.3). Представляется, однако, что обобщенная теорема Лиувилля остается справедливой в этом подходе во всех ее редакциях, просто величина $V_i(\vec{x})$ не имеет здесь смысла правой части уравнений движения.

3.5. Анализ синергетических систем

3.5.1. Несовместимость уравнений синергетики с гамильтоновой механикой

В синергетике встречаются уравнения движения двух видов. Во-первых, это дифференциальные уравнения в *частных* производных, к которым из приведенных выше относятся уравнения Тьюринга (3.2.1), «брюсселятора» (3.2.21), автоволновые (3.2.24), а также уравнения (3.3.1)–(3.3.2). Уравнения этого вида являются существенно *макроскопическими*, что делает их *немеханическими*, и не могут быть отождествлены с *микроскопическими* по своему характеру уравнениями Гамильтона.

Во-вторых, в синергетике изучаются системы уравнений вида (3.4.1) для *полных* производных по времени переменных x_i (зависящих не только от времени t , но и от начальных условий $x_i = x_i(\bar{x}_0, t)$). К системам уравнений этого вида из приведенных выше относятся уравнения Лоренца (3.2.6), Кука и Робертса (3.2.10), «брюсселятора» (3.2.23), «орегонатора» (3.2.29), Эйгена—Шустера (3.2.30), а также уравнения разд. 3.3.1 за исключением (3.3.1)–(3.3.2). Системы этого типа мы и будем далее исследовать на гамильтоновость/негамильтоновость.

Заметим, прежде всего, что все уравнения движения в синергетике, включая и непосредственно интересующие нас уравнения вида (3.4.1), как подчеркивалось в разд. 3.1, *несимметричны по времени* и уже по одной этой причине не могут оказаться уравнениями движения гамильтоновой механики, симметричность которых по времени делает ее мир обратимым. При этом гамильтониан, как это обычно и бывает в гамильтоновой механике, предполагается симметричным по времени.

Остается, однако, идущая от Германа Гельмгольца [Helmholtz, 1884a, b] идея описания необратимых процессов посредством уравнений Гамильтона с *несимметричным по времени гамильтонианом*. В принципе гамильтониан может быть несимметричным по времени, если его кинетическая составляющая не является квадратичной функцией импульсов, однако физикам такие системы не встречались, почему сам Гельмгольц возложил ответственность за необратимые процессы на ненаблюдаемое, или скрытое, движение, отвечающее особым (циклическим) координатам [Хайтун, 1996. С. 187–188]. Гамильтониан может быть также несимметричным по времени за счет явной зависимости от времени, отвечающей в механике за внешнее воздействие. Не являются ли синергетические системы с уравнениями движения вида (3.4.1) гамильтоновыми по Гельмгольцу?

Здесь и вступает в игру обобщенная теорема Лиувилля, которая делает это предположение недействительным для подавляющего большинства систем, анализируемых синергетикой. Для установления этого факта достаточно *нестатистической* формулировки этой теоремы (3.4.6), справедливой, как говорилось в разд. 3.4, и на странных аттракторах, т. е. для синергетических систем.

Мы видели, что для уравнений Гамильтона справедливо равенство

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (3.5.1)$$

(см. соотношение (3.4.20)). Вид гамильтониана при этом не существует, он может быть (абстрагируемся на минуту от реальности) и несимметричным по времени. Для подавляющего же большинства синергетических систем, описываемых уравнениями вида (3.4.1),

$$\operatorname{div} \vec{V} \neq 0, \quad (3.5.2)$$

что и означает невозможность их представления в виде уравнений Гамильтона.

В самом деле, определим $\operatorname{div} \vec{V}$ для приведенных выше уравнений данного вида (см. табл. 3.5.1).

Из всех приведенных уравнений единственное исключение составляет, как видим, система (3.3.16)–(3.3.17), для которой $\operatorname{div} \vec{V} = 0$, что означает возможность их представления в виде уравнений Гамильтона. Нетрудно написать и гамильтониан этой системы

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} - am \cos x + \frac{A}{k} m \cos(kx - \omega t), \quad (3.5.3)$$

подстановка которого в уравнения Гамильтона (3.4.19) дает уравнения (3.3.17) с $x_1 = x$. Этот гамильтониан описывает, как говорилось, нелинейный (из-за присутствия в уравнении (3.3.16) синуса) осциллятор, находящийся под воздействием внешнего возмущения в виде плоской волны. Это внешнее возмущение представлено в гамильтониане (3.5.3) несимметричным по времени слагаемым

$$\frac{A}{k} m \cos(kx - \omega t), \quad (3.5.4)$$

которое делает несимметричным по времени и весь гамильтониан.

В силу своей нелинейности, данная система совершает в общем случае стохастическое движение и в силу этого характеризуется, вообще говоря, отличным от нуля значением энтропии. Поскольку же данная система удовлетворяет уравнениям Гамильтона, то ее энтропия *постоянна во времени*²⁸⁾, что согласуется и с имеющим для нее место равенством $\operatorname{div} \vec{V} = 0$.

²⁸⁾ Обычно постоянство энтропии $S = -k \int \rho(q, p) \ln \rho(q, p) dq dp$ гамильтоновой системы доказывают, следуя А. Пуанкаре [Poincaré, 1906], который, используя уравнение Лиувилля (1.1.9), заменяет интеграл

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int F(\rho) dq dp = \int \frac{\partial F(\rho)}{\partial t} dq dp = \int \frac{dF}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} dq dp, \quad (C.3.7)$$

где $F(\rho) = -k\rho \ln \rho$, интегралом

$$\frac{dS}{dt} = \int \frac{dF}{d\rho} \left[\sum \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \right] dq dp, \quad (C.3.8)$$

Таблица 3.5.1

Системы уравнений	$\operatorname{div} \vec{V}$
(3.2.6)	$-\sigma - 1 - b$
(3.2.10)	-2μ
(3.2.23)	$-(B + 1) + 2XY - X^2$
(3.2.29)	$a - c - 1 - (2b + 1)X - aY$
(3.2.30)	$\operatorname{div} F - \frac{n}{c_0} \sum_j F_j - \sum_{i,j} \frac{x_i}{c_0} \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$
(3.3.3)	$2k_1 AX - 3k_2 X^2 - k_3$
(3.3.5)	$a - c + x$
(3.3.6)	-22
(3.3.7)	$a(1 - Y) + X - 1$
(3.3.8)	$-1 + 2xy - y^2$
(3.3.9)	$-b - 1 - x^2 + 2xy$
(3.3.10)–(3.3.11)	$-a$
(3.3.12)–(3.3.13)	$-a$
(3.3.14)–(3.3.15)	$-a$
(3.3.16)–(3.3.17)	0
(3.3.18)	$-\gamma$

а затем прибегает к интегрированию по частям. Используя то обстоятельство, что на границе фазовой жидкости системы $\rho = 0$, Пуанкаре и приходит к выводу, что интеграл (С. 3.8) равен нулю.

Заметим, что у Пуанкаре *полная* производная по времени проникает под знак интеграла как *частная*. На взгляд автора этих строк, это ошибка, которая идет от Л. Больцмана, продифференцировавшего так энтропию в μ -пространстве [Boltzmann, 1972; Рус. пер. С. 138], правильно же считать, что, проникая здесь под знак интеграла, полная производная по времени остается *полной*. И тогда постоянство энтропии для гамильтоновой системы доказывается с помощью теоремы Лиувилля (1.1.5) совсем просто:

$$\frac{dS}{dt} = -k \frac{d}{dt} \int \rho \ln \rho \, dq \, dp = -k \int (1 + \ln \rho) \frac{d\rho}{dt} \, dq \, dp = 0. \quad (\text{С.3.9})$$

Подобным образом (проникая под знак интеграла, полная производная по времени остается *полной*) дифференцируют энтропию и некоторые другие авторы [Tolman, 1938. Р. 137; Davies, 1977. Р. 49; Заславский, 1984. С. 32]. Подробнее см. [Хайтун, 1996. С. 78–80].

Посмотрим теперь на дело с другой стороны. Обсуждаемая система относится к системам Гельмгольца с несимметричным по времени гамильтонианом. Гамильтониан механической системы, как известно, в общем случае распадается на кинетическую энергию, произвольным образом зависящую от координат и квадратично — от импульсов, и потенциальную энергию, зависящую только от координат. Координаты не меняют знака при инверсии времени, так что несимметричным по времени гамильтониан может быть только за счет *явной зависимости от времени* (мы отказываемся от предположения Гельмгольца о скрытом движении как фантастическом). Это и имеет место в случае системы (3.3.16)–(3.3.17). Однако, как упоминалось, в механике явная зависимость гамильтониана от времени связана исключительно с *внешним воздействием*.

Таким образом, вся необратимость гамильтоновой системы с несимметричным по времени гамильтонианом происходит от воздействия *среды*, сама же система, если выключить внешнее поле, оказывается обратимой. Это справедливо и в отношении системы (3.3.16)–(3.3.17): ее удалось сделать гамильтоновой за счет удаления члена $a\dot{x}$, присутствующего, например, в системах (3.3.12) и (3.3.14). И именно из-за удаления этого члена система (3.3.16)–(3.3.17) в отсутствие внешнего возмущения обратима. Это делает ее, на наш взгляд, чрезмерно искусственной. Энтропия системы (3.3.16)–(3.3.17) остается постоянной не только тогда, когда мы учитываем внешнее поле, но и *без него*, т.е. когда мы убираем из гамильтониана (3.5.3) отвечающее за это поле последнее слагаемое. Просто потому, что и в этом случае система описывается уравнениями Гамильтона (нетрудно проверить также, что и без слагаемого $A \sin(kx_1 - \omega t)$ для системы (3.3.16)–(3.3.17) $\text{div } \vec{V} = 0$).

Получается, таким образом, что *включение необратимого внешнего воздействия не сказывается на энтропийном балансе системы*. Но так не может быть, мы хорошо знаем, что необратимые процессы в реальных системах всегда связаны с производством энтропии. Если в системе (3.3.16)–(3.3.17) этого нет, то это значит, что *вся производимая в ней энтропия выкачивается наружу*. Такая система имеет ненатуральный характер, представляя собой не более чем не имеющий отношения к реальности плод игры ума. Повидимому, именно по этой причине гамильтоновы системы с несимметричным по времени гамильтонианом и соответственно $\text{div } \vec{V} = 0$ редко встречаются в синергетической литературе.

Итак, за исключением не имеющих реальных прототипов гельмгольцевых систем с несимметричным по времени гамильтонианом, *изучаемые синергетикой необратимые системы негамильтоновы*. Этот факт трудно оспорим и признается некоторыми авторами:

«Специфика появления турбулентности в гидродинамической среде обусловлена диссипативным характером уравнений движения. Динамическая система теперь *не является гамильтоновой*, и фазовый объем не сохраняется со временем (выделено мной. — С.Х.)» [Заславский, 1984. С. 250].

«В отличие от гамильтоновых систем с их фундаментальным законом сохранения фазового пространства, для диссипативных систем характерно его постоянное уменьшение со временем... При этом уравнения движения уже *не являются каноническими* (т. е. уравнениями Гамильтона; выделено мной. — С. Х.), но их можно записать, вообще говоря, в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка» (3.4.1) [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 73–74].

Тем не менее в физике удивительным образом продолжает господствовать убеждение, что и в области необратимых процессов действует гамильтонова механика с ее симметричными по времени уравнениями движения. В том числе, и среди специалистов по синергетике, для которых численное решение *негамильтоновых* по своей форме уравнений является повседневным делом. Полагая, по-видимому, применимость гамильтоновой механики к (необратимым) синергетическим системам бесспорной, физики в подавляющем большинстве случаев даже не устаивают обсуждением вопрос о том, как же может быть она увязана с фактической негамильтоновостью уравнений синергетики.

Понять эту странную логику нам помогут косвенные «улики», присутствующие в синергетической литературе. Вспомним, прежде всего, об обсуждавшейся в разд. 2.1 подмене понятий, которая практикуется в теории динамического хаоса и синергетике. В классической механике *консервативной* называют систему, в гамильтониане которой отсутствует *явная зависимость от времени*, в синергетике же и теории динамического хаоса систему, гамильтониан которой не содержит явной зависимости от времени, называют *автономной*, а консервативной именуют систему с *несжимаемой фазовой жидкостью*. Чтобы проиллюстрировать такую подмену понятий, более чем существенную в настоящем контексте, приведем в дополнение к говорившемуся в разд. 2.1 соответствующее высказывание Г. Николиса и И. Пригожина. Записав обобщенную теорему Лиувилля в виде (3.4.14), они продолжают:

«Если вычислить $\text{div } \vec{V}$ для гамильтоновой системы, то из (3.4.19) видно, что

$$\text{div } \vec{V} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = 0 \quad (3.5.5)$$

(см. соотношение (3.4.20). — С. Х.). Смысл уравнения (3.4.14) состоит в том, что фазовая плотность ρ при движении в фазовом пространстве сохраняется. Это и есть теорема Лиувилля, однако сформулированная несколько иначе. С учетом (3.4.14) получаем *уравнение Лиувилля*:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho}{\partial x_i} V_i = 0 \quad (3.5.6)$$

(для консервативных систем).

На самом деле уравнение (3.5.6) может выполняться не только для гамильтоновых систем, но и в более общем случае. Для этого достаточно, чтобы

жидкость, образованная изображающими точками в фазовом пространстве, была несжимаемой, т. е. выполнялось условие $\operatorname{div} \vec{V} = 0$. В действительности с помощью этого условия можно *определить* класс консервативных систем. Соответственно уравнение (3.4.14) с $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$ будет необходимым (хотя и не всегда достаточным) условием диссипативности системы.

Уравнение Лиувилля для консервативных систем (3.5.6) играет весьма важную роль в статистической физике, поскольку оно служит отправной точкой как для эргодической теории, так и для кинетической теории необратимых процессов (выделено авторами. — С.Х.)» [Николис, Пригожин, 1990. С. 105–106].

Видим, что Пригожин с Николисом из обобщенной теоремы Лиувилля $(d\rho/dt) = -\rho \operatorname{div} \vec{V}$ получают здесь для *гамильтоновых* систем теорему Лиувилля $(d\rho/dt) = 0$, признавая тем самым фактически, что когда $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$, система уже не является гамильтоновой. Однако тут же под тем предлогом, что $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ не только для гамильтоновых систем, они «сезжают» на *консервативные* системы, определяя их как системы с $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ и противопоставляя диссипативным системам с $\operatorname{div} \vec{V} \neq 0$.

Так как консервативные системы — это, все же, системы, для которых внешнее воздействие несущественно (в гамильтониане отсутствует явная зависимость от времени), то в результате такой подмены понятий акцент с дилеммы гамильтоновость/негамильтоновость системы, в которой происходят необратимые процессы, переносится на ее изолированность/открытость. Тем самым *ответственность за негамильтоновость диссипативных структур возлагается на среду*. Эта логика закрепляется ими странным утверждением, что в случае консервативной системы, в которой имеют место необратимые (т. е. несимметричные по времени!) процессы, справедливо (симметричное по времени!) уравнение Лиувилля гамильтоновой механики.

Аналогичная подмена понятий совершается, как мы видели в разд. 2.1, и многими другими исследователями, работающими в области теории динамического хаоса и синергетики; воспроизведенная нами по книге Николиса и Пригожина логика объяснения негамильтоновости изучаемых синергетикой систем воздействием среды сегодня достаточно обычна. Сами по себе необратимые процессы оказываются при этом ни при чем: если система изолирована, то протекающие в ней *необратимые* процессы, согласно излагаемой точке зрения, описываются *гамильтоновой* механикой, с чем я согласиться никак не могу.

Собственно, первым при рассмотрении проблемы необратимости стал апеллировать к среде Л. Больцман²⁹⁾. Так оно с тех пор и идет (в дополнение к названным упомянем в этой связи работы [Naken, 1977; Lebowitz, 1978; Penrose, 1979]). Синергетика эту общую отсылку к среде акцентирует и модифицирует: как видим, речь теперь идет не только о том,

²⁹⁾ [Boltzmann, 1896, Рус. пер. С. 449–450; Boltzmann, 1897, Рус. пер. С. 458–459].

что изучаемые синергетикой системы оказываются негамильтоновыми из-за своей открытости, но и что эта их негамильтоновость таинственным образом *не отменяет повсеместной применимости гамильтоновой механики*. При этом оставляется без ответа вопрос о том, *что же служит источником необратимости в самой среде?*

О самом механизме стыковки негамильтоновых уравнений синергетики с гамильтоновой механикой наиболее откровенно, пожалуй, высказывается Оливер Пенроуз. Негамильтоновы открытые необратимые системы, говорит он, можно трактовать

«согласно обычным законам [гамильтоновой] динамики, рассматривая открытую систему как подсистему большей системы, которая является изолированной [closed] (т. е., которая подчиняется обычным законам динамики с хорошо определенным гамильтонианом)» [Penrose, 1979. Р. 1995].

Постараемся понять, что имеет в виду Пенроуз. Рассмотрим некоторую изолированную гамильтонову систему, состоящую, из двух подсистем:

$$\begin{aligned}(q, p) &= (q_1, p_1, q_2, p_2), \\ H(q, p) &= H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2) + H_{12}(q_1, p_1, q_2, p_2),\end{aligned}\tag{3.5.7}$$

где слагаемое $H_{12}(q_1, p_1, q_2, p_2)$ отвечает за взаимодействие подсистем. В частности, для координат q_1 и импульсов p_1 уравнения Гамильтона

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},\tag{3.5.8}$$

с учетом (3.5.7), очевидно, дают уравнения

$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H_1(q_1, p_1)}{\partial p_1} + \frac{\partial H_{12}(q_1, p_1, q_2, p_2)}{\partial p_1}, \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\partial H_1(q_1, p_1)}{\partial q_1} - \frac{\partial H_{12}(q_1, p_1, q_2, p_2)}{\partial q_1}.\end{aligned}\tag{3.5.9}$$

Между тем уравнения Гамильтона для подсистемы 1 в случае ее изолированности имеют вид:

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial H_1(q_1, p_1)}{\partial p_1}, \quad \dot{p}_1 = -\frac{\partial H_1(q_1, p_1)}{\partial q_1}.\tag{3.5.10}$$

Уравнения (3.5.9), как легко видеть, отличаются от (3.5.10). Таким образом, даже в рамках гамильтоновой механики уравнения движения имеют вид уравнений Гамильтона только для *изолированной* системы, а для открытой системы уравнения движения, действительно, отличаются от канонических. Вот этот очевидный факт и стоит за обсуждаемой точкой зрения, согласно которой *изучаемые синергетикой уравнения движения, отличаясь от уравнений Гамильтона, остаются гамильтоновыми*.

Эта точка зрения, однако, не выдерживает критики. В самом деле, используем прием, намеченный в разд. 2.1 при обсуждении вопроса о том,

правомерно ли искать источник необратимости непременно в среде. Будем считать, что, расширяя данную открытую необратимую систему, мы рано или поздно придем к большой изолированной системе (хотя бы на уровне нашей Метагалактики, которая, возможно, является черной дырой [Хайтун, 2004б; 2005. Разд. 6.6–8; 2006], или всей Вселенной), описываемой уравнениями Гамильтона. В противном случае гамильтонова механика оказалась бы справедливой лишь применительно к отдельным изолированным островкам во Вселенной, но не к остальным ее частям и не ко Вселенной в целом, что лишало бы смысла тезис о повсеместной применимости этой механики.

Итак, представим себе, что мы, мысленно расширяя данную открытую необратимую систему, дошли до большой изолированной системы, описываемой уравнениями Гамильтона. В силу этих уравнений, изменение энтропии большой системы тождественно равно нулю (см. сноску, связанную с соотношениями (С. 3.7–9)), т. е. имеет место равенство

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_i S_1}{dt} + \frac{d_e S_1}{dt} + \frac{d_i S_2}{dt} + \frac{d_e S_2}{dt} = \frac{d_i S_1}{dt} + \frac{d_i S_2}{dt} = 0, \quad (3.5.11)$$

так как

$$\frac{d_e S_1}{dt} = -\frac{d_e S_2}{dt} \quad (3.5.12)$$

(индекс «1» относится к данной необратимой подсистеме, индекс «2» — к остальной части большей изолированной системы; индексом « i », как всегда в подобных случаях, обозначается компонента скорости роста энтропии, обеспечиваемого внутренними для данной системы процессами, индексом « e » — внешними).

Поскольку подсистема 1 необратима, постольку

$$\frac{d_i S_1}{dt} > 0, \quad (3.5.13)$$

согласно же закону возрастания энтропии,

$$\frac{d_i S_2}{dt} \geq 0. \quad (3.5.14)$$

Соотношения (3.5.13)–(3.5.14) в совокупности означают невозможность (3.5.11). Уже одно это противоречие делает обсуждаемую точку зрения несостоятельной.

Но посмотрим на сами уравнения движения, изучаемые синергетикой. Отличаясь от уравнений Гамильтона (за исключением, как мы видели, уравнений типа (3.3.16)–(3.3.17) с $\text{div } \vec{V} = 0$), могут ли они быть отождествлены с уравнениями гамильтоновой механики (3.5.9)? Ответ достаточно очевиден: не могут.

Прежде всего, уравнения (3.5.9) *симметричны по времени*, если только по нему симметричен гамильтониан $H(q_1, p_1, q_2, p_2, \dots)$, описывающий большую изолированную систему. Уравнения же синергетики, и в том

состоит их определяющая особенность, отличающая от уравнений теории динамического хаоса, *несимметричны по времени*. Именно по этой причине, как отмечалось в разд. 3.3.2, фазовая структура синергетических систем содержит странные аттракторы, тогда как фазовая структура указанной большой гамильтоновой системы, в силу симметричности по времени ее гамильтониана, таких аттракторов содержать не может.

Если же мы, спасая гамильтонову механику, положим гамильтониан большой изолированной системы несимметричным по времени, то натолкнемся на противоречие, о котором уже шла речь в настоящем разделе. А именно, в этой большой системе, именно в силу несимметричности по времени гамильтониана, должны тогда идти необратимые процессы (в частности, в нашей открытой системе). И идти они должны с выделением энтропии. Поскольку же энтропия большой системы, в силу справедливости для нее уравнений Гамильтона, постоянна, постольку должен иметь место постоянный же отток энтропии наружу, компенсирующий внутреннее производство энтропии. Но такой отток невозможен, поскольку большая система мыслится нами изолированной.

3.5.2. Синергетические системы могут быть изолированными

Присмотримся теперь к *структуре* уравнений синергетики, ограничиваясь, как и прежде, уравнениями вида (3.4.1) (уравнения синергетики другого вида, как отмечалось, и подавно не могут быть отождествлены с уравнениями гамильтоновой механики (3.5.9)). В правую часть уравнений (3.4.1) входят *те же* переменные x_i , что и в левую, тогда как в правую часть уравнений (3.5.9), кроме переменных q_1, p_1 , входят еще и переменные q_2, p_2 . Во многих же случаях функции $\vec{V}(\vec{x})$ не содержат и явной зависимости от времени, которой в гамильтоновой механике часто заменяют ответственные за взаимодействия со средой вторые слагаемые в правых частях уравнений (3.5.9) (из приведенных выше таковы уравнения (3.2.6), (3.2.10), (3.2.23), (3.2.29)–(3.2.30), (3.3.3), (3.3.5)–(3.3.8) и (3.3.11)). Поскольку в синергетических уравнениях типа (3.4.1) присутствуют только переменные, характеризующие данную необратимую систему, а среда представлена разве что параметрами, постольку эти уравнения можно считать описывающими изолированные системы.

Уточним нашу мысль применительно к синергетическим уравнениям, содержащим параметры. Таковы, например, уравнения Лоренца (3.2.6). В них параметр τ пропорционален разности температур ΔT между верхней и нижней поверхностями тонкого слоя вязкой жидкости, термоконвекцию в котором описывают эти уравнения. Этот параметр представляет здесь среду только «исторически», по способу получения уравнений Лоренца. Если же мы «забудем», как эти уравнения были получены, то уже не сможем утверждать по одному их внешнему виду, что они относятся именно к неизолированной системе. Более того, мы всегда можем придумать изолированную систему, описываемую уравнениями Лоренца.

Это верно и в общем случае, когда система уравнений не содержит явной зависимости от времени и когда, кроме переменных, относящихся к самой системе, в ней присутствуют только параметры: такая система уравнений может описывать как неизолированную систему, так и изолированную; все определяется тем, какой смысл придается параметрам. Тем более это верно в отношении систем уравнений, не содержащих даже и параметров, к числу которых из перечисленных в первом абзаце настоящего раздела относится система (3.3.8). Между тем эти системы также являются синергетическими, т. е. в их фазовых пространствах возникают странные аттракторы. Это и значит, что *участие среды не обязательно для возникновения в системах странных аттракторов.*

3.6. Резюме

Как говорилось в разд. 1.1, все направление исследований, нацеленное на решение проблемы обоснования статистической физики и состоящее из последовательно возникавших эргодической теории, теории динамического хаоса и синергетики, было вызвано к жизни фундаментальным противоречием между наблюдаемой эволюцией в сторону усложнения и вытекающим из равновесной статистической физики выводом о том, что вероятность нахождения системы в неравновесном состоянии очень мала по сравнению с вероятностью ее нахождения в равновесном. Развитие этого направления привело в итоге к разрешению указанного противоречия. Оказалось, что странный аттрактор с его упорядоченной структурой — неотъемлемый атрибут необратимых систем как таковых. Продемонстрированная синергетикой возможность протекания необратимых процессов упорядочения в изолированных системах сделала ясным, что такие процессы являются нормой для необратимых систем, равновесное же состояние, находящееся в центре внимания традиционной статистической физики, отнюдь не характерно для наблюдаемого мира.

Разумеется, процессы упорядочения были известны и до синергетики, однако их до сих пор объясняют либо воздействием среды, либо, что еще более странно, *обратимыми* процессами, как это делает, например, Брюссельская школа, противопоставляющая в этом плане равновесные структуры, к которым она относит, например, кристаллы, диссипативным (см. текст между соотношениями (3.2.19) и (3.2.20)). Конечно же, кристаллы не образуются, вопреки П. Гленсдорфу и И. Пригожину, в ходе обратимых превращений. Кристаллизация изолированной системы (скажем, переохлажденной жидкости, в которую брошена соринка) происходит необратимо. Признанию этого и подобных фактов препятствует, как говорилось в разд. 1.1, трактовка энтропии реальных систем как меры беспорядка, о несостоятельности которой и свидетельствует сегодня вся совокупность наработанных синергетикой результатов.

Глава 4

Фракталы*

В настоящей главе мы обсудим топологическое устройство странных аттракторов, называемых при их рассмотрении средствами теории множеств фракталами, хотя это не совсем одно и то же.

«Строгого и полного определения фракталов пока не существует» [Потапов, 2002. С. 12],

поэтому будем вводить представление о них постепенно, сводя воедино взгляды разных авторов.

4.1. Фрактал как множество с необычной размерностью

Фракталы отличаются от других объектов необычной (фрактальной) геометрией. Физики привыкли к объектам, обладающим обычной, так называемой *топологической* размерностью, которой посвящен разд. 4.3 и которая выражается целыми числами — 0 (для точки), 1 (для линии), 2 (для поверхности), 3 (для объема) и т. д. Топологической является размерность и фазовой жидкости *обратимой* динамической системы. Она равна, например, единице, когда система совершает регулярное движение и когда «фазовая жидкость» сводится к устойчивой фазовой траектории, и равна размерности фазового пространства статистической системы в равновесном случае. В случае же (необратимой) синергетической системы ее фазовая жидкость представляет собой всюду разрывное множество фазовых точек, не являющееся — из-за его разрывности — ни линией, ни поверхностью, ни объемом. Оно вообще не является *гладким* (дифференцируемым) *многообразием*¹⁾, т. е. континуумом обычной (топологической) размерности; размерность фазовой жидкости определяется в этом случае, вообще говоря, *нецелым* числом.

Поясним, что такое фрактал, на простом примере. Представим себе бесконечно тонкий лист бумаги, которым мы пытаемся заполнить комнату, вырезая из него бесконечно узкую полоску. Такой лист бумаги — двумерный, его объем и масса равны нулю. Понятно, что заполнить им трехмерный объем толком не удастся, бумага образует «всюду пустую»

* [Хайтун, 1996. С. 60–64; 1999; 2003; 2005. Разд. 4.5.1, П. 5.6].

¹⁾ О гладких многообразиях см. сноску в разд. 1.2.3.

структуру нулевой плотности (массы). Вот эта «бумажная» структура и может служить образом фрактала.

Чтобы наша «бумажная» структура была более точным подобием фрактала, необходимо еще разорвать вырезаемую из листа бумаги бесконечно узкую полоску «на атомы», так чтобы каждая следующая точка оказалась на некотором случайном расстоянии от предыдущей в случайном же направлении от нее, а все точки располагались бы, тем не менее, не совсем случайным образом, образуя иерархизованную структуру, так чтобы можно было говорить о «детерминированном хаосе».

Объем трехмерного тела измеряется трехмерными единицами измерения, т. е. кубиками единичного объема: мы подсчитываем, сколько таких кубиков поместится в измеряемом теле. Площадь двухмерной фигуры — квадратами единичной площади, длина линии — единичными отрезками. А что будет, если использовать единицу измерения, размерность которой не совпадает с размерностью измеряемого множества?

Если для измерения площади листа бумаги использовать одномерные отрезки единичной длины, то число таких отрезков, требующихся, чтобы заполнить весь лист, равно бесконечности. Если с той же целью употребить трехмерные кубики, то для числа таких кубиков, покрывающих лист, получится значение, равное нулю (площадь листа не изменится, если его скомкать²⁾; вот мы его, скомкав, и поместим в кубик, в котором он займет нулевой объем). То единственное значение размерности единицы измерения, при котором мера множества отлична от нуля и бесконечности, называется размерностью множества по Хаусдорфу, или фрактальной размерностью. Для листа бумаги размерность Хаусдорфа равна 2. Для «бумажного» фрактала, о котором шла речь выше и который размещен в трехмерном пространстве, размерность Хаусдорфа меньше 3.

То, что размерность странных аттракторов действительно отличается от топологической (целочисленной), мы проиллюстрируем, следуя Г. Шустеру [1988. С. 108–109], на примере аттрактора Лоренца (3.2.6). Применяя обобщенную теорему Лиувилля (3.4.6), находим для этой системы:

$$\frac{d(\Delta\vec{x})}{dt} = -(\sigma + 1 + b)\Delta\vec{x} < 0 \quad (\sigma > 0, b > 0) \quad (4.1.1)$$

(ср. табл. 3.5.1; напомним, что σ и b здесь — это положительные константы, обычно берущиеся равными соответственно 10 и 8/3), т. е. малый объем $\Delta\vec{x}$ фазового пространства, занимаемого фазовой жидкостью, *сжимается экспоненциально во времени*,

$$\Delta\vec{x}(t) = \Delta\vec{x}(0) \exp \{-(\sigma + 1 + b)t\}, \quad (4.1.2)$$

что установил уже сам Э. Н. Лоренц [Lorenz, 1963].

²⁾ Напомним, что при определении *меры* множества его можно «комкать» и «прессовать», удаляя пустые участки пространства (см. текст между соотношениями (1.2.14) и (1.2.15)). При определении же *размерности* множества его уже нельзя «комкать» и «прессовать», поскольку при этом нас интересует характер расположения точек множества в пространстве.

Таким образом, траектория системы Лоренца затягивается в ограниченную область фазового пространства, объем которой

«стремится к нулю. Это означает, что поток трехмерной системы Лоренца порождает множество точек, размерность которого меньше 3, т. е. его объем в трехмерном пространстве равен 0. На первый взгляд можно было бы присвоить ему следующую целую, но меньшую размерность — 2. Однако это противоречит теореме Пуанкаре—Бендиксона, утверждающей, что в ограниченной области двумерного пространства хаотический поток не может существовать³⁾... Разрешение этой проблемы заключается в том, что множество точек, к которому притягивается траектория в системе Лоренца (так называемый аттрактор Лоренца), имеет хаусдорфову размерность не целую, а между 2 и 3 (точное значение $D = 2,06$)» [Шустер, 1988. С. 109].

Известным примером фрактала является также *канторово множество «средних третей»*⁴⁾. Строится оно следующим образом:

«Возьмем закрытый отрезок $[0, 1]$ и выбросим из него открытый (без граничных точек) интервал $(1/3, 2/3)$. Затем из двух отрезков полученного множества T_1 аналогичным образом выбросим их „средние трети“ и получим новое множество T_2 . Повторяя эту процедуру бесконечное число раз, получим множества $T_1, T_2, T_3, \dots$. Канторово множество T есть пересечение всех T_n . Грубо говоря, это пересечение есть „предельное T_n “.

Из построения следует, что множество T_n состоит из $M = 2^n$ разделенных интервалов длиной $\epsilon = (1/3)^n$ [Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 423].

Построенное множество имеет *нулевую меру* (суммарную длину):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0. \quad (4.1.3)$$

Вместе с тем оно оказывается *несчетным*:

«Покажем, что множество T несчетно. Для этого представим действительное число x в интервале $(0, 1)$ в следующем виде:

$$x = a_1 \left(\frac{1}{3}\right) + a_2 \left(\frac{1}{9}\right) + a_n \left(\frac{1}{3^n}\right) + \dots, \quad (4.1.4)$$

где a_i принимают, вообще говоря, три значения: 0, 1, 2. Однако, для того чтобы x принадлежало T , необходимо, чтобы все a_i принимали только два значения: 0 или 2... И наоборот, любая последовательность таких a_i определяет x , принадлежащее T . Но тогда существует взаимно-однозначное соответствие между канторовым множеством и множеством всех двоичных последовательностей, которое представляет все числа в интервале $(0, 1)$. Последнее же, как известно, несчетно» [Там же. С. 423–424].

Будучи несчетным, канторово множество «средних третей» — из-за его разрывности в каждой точке — заполняет вместе с тем отрезок $[0, 1]$

³⁾ Об этой теореме см. в разд. 2.2.2 текст, следующий за соотношением (2.2.13).

⁴⁾ [Mandelbrot, 1977с. Р. 16; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 423; Шустер, 1988. С. 64–65; Николис, Пригожин, 1990. С. 135–136; Потапов, 2002. С. 14–15].

настолько неплотно, что его (множества) суммарная длина оказывается равной, как мы видели, нулю. Обладая столь необычными свойствами, данное множество и имеет «странную» размерность, которая заключена между 0 и 1 и которую мы найдем в следующем разделе.

4.2. Фрактальная размерность

Множества с размерностью, отличной от топологической, в исследовании динамического хаоса ввел французский математик Бенуа Мандельброт (родился в 1924 г.)⁵⁾, который первым отождествил с ними странные аттракторы. Он же предложил и термин *фрактал* (*the fractal*), произведя его от лат. *fractus* — иррегулярный, фрагментарный [Mandelbrot, 1977с. Р. 4]. Исходную информацию о множествах с дробной размерностью Мандельброт мог почерпнуть в монографии [Billingsley, 1965], в которой применительно к рассматриваемым множествам⁶⁾ встречается и прилагательное fractional.

Обобщенная размерность, отличающаяся в общем случае от целого числа, была введена Феликсом Хаусдорфом [Hausdorff, 1918], первым рассмотревшим случай, когда размерность множества не совпадает с топологической его размерностью, т. е. с размерностью пространства, в котором оно размещено. Необходимость же такого рода обобщения понятия размерности возникла ранее, когда Дюбуа-Реймон (du Bois Reymond) обсудил в работе 1875 г. недифференцируемость в каждой точке непрерывной функции Вейерштрасса [Mandelbrot, 1982. Р. 4].

Работы Мандельброта, бывшие одной из главных компонент начавшегося в 1975 г. бума по синергетике (см. разд. 3.2.3) и сообщившие обсуждению странных аттракторов новое перспективное направление, вызвали волну публикаций, посвященных фракталам⁷⁾.

В общем случае мера множества измеряется d -мерными единичными «кубиками». В случае множеств обычной топологической структуры (гладких многообразий) d принято выбирать равным 1, 2, 3 или другому целому числу, совпадающему с размерностью множества. В разд. 4.1 мы на примере «бумажного множества» качественно прикинули, что будет с мерой, если использовать единицу измерения размерности, не совпадающей с размерностью множества. Строгий же ответ на этот вопрос как раз и дал Хаусдорф. Однако данное им определение размерности (*размерности Хаусдорфа*) не является единственным, сегодня существует уже

⁵⁾ [Mandelbrot, 1975, 1977a–с, 1982, 1990; Мандельброт, 1988, 2004].

⁶⁾ «Далее... нас будут интересовать... нерегулярные множества, размерность которых не есть целое число» [Billingsley, 1965; Рус. пер. С. 156].

⁷⁾ [Kaplan, Yorke, 1979; Ledrappier, 1981; Farmer et al., 1983; Chaos..., 1985; Eckmann, Ruelle, 1985; Chaotic..., 1986; Dimensions..., 1986; Fractals..., 1986; Barnsley, 1988; Cahn, 1989; Campbell, 1989; Chaos..., 1989; Voss, 1988; Fractals..., 1989; Bunde, Halvin, 1995; Кроновер, 2000; Божокин, 2001; Шредер, 2001; Потапов, 2002; Baryshev, Teerikorpi, 2002].

целый ряд определений размерности. Начнем с определения размерности Хаусдорфа, следуя обзору [Farnet et al., 1983].

Рассмотрим покрытие данного множества d -мерными «кубиками», обозначая длину ребра i -го «кубика» ε_i . Определим *меру* («объем») множества $I_d(\varepsilon)$ выражением

$$I_d(\varepsilon) = \inf \sum_i \varepsilon_i^d, \quad (4.2.1)$$

где нижняя грань берется по всем возможным покрытиям, удовлетворяющим условию $\varepsilon_i \leq \varepsilon$.

«Пусть теперь

$$I_d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_d(\varepsilon). \quad (4.2.2)$$

Хаусдорф показал, что существует критическая величина значения d , выше которой $I_d = 0$, а ниже которой $I_d = \infty$. Это критическое значение, $d = D_H$, является размерностью Хаусдорфа» [Op. cit. P. 158]

Таким образом, величина I_d имеет смысл меры множества только при использовании измерительных «кубиков» размерности $D = d_{\text{кр}}$. *В «кубиках» большей размерности мера фрактала равна нулю*, в кубиках меньшей — бесконечности. Этот факт окажется центральным в наших дальнейших построениях.

Минимальная целочисленная размерность измерительных «кубиков», при которой мера данного фрактального множества еще равна нулю (она, естественно, равна нулю и при использовании «кубиков» большей размерности), является *топологической* размерностью этого множества, которая, как видим, *превышает* фрактальную размерность или — в предельном случае, когда фрактал перестает быть фракталом, — равна ей (подробнее см. следующие два раздела).

В определении (4.2.1)–(4.2.2) разные «кубики» имеют, вообще говоря, разные размеры. Считая «кубики» одинаковыми, приходим к размерности, впервые введенной, по-видимому, в работе [Колмогоров, Тихомиров, 1959] и иногда называемой *емкостью* [*capacity*] множества. В этом случае

$$I_d \approx \sum_i \varepsilon^d = M(\varepsilon) \varepsilon^d, \quad (4.2.3)$$

где $M(\varepsilon)$ — число «кубиков» (мы пока не устремляем ε к нулю).

Величина I_d , как вытекает из говорившегося выше, приближенно равна мере множества, найденной в единицах только и имеющей для него смысл размерности d . Поскольку же мера множества фазовых точек динамической системы нормируется на 1 (см. текст между соотношениями (1.2.14) и (1.2.15)), то получаем

$$1 \approx M(\varepsilon) \varepsilon^d. \quad (4.2.4)$$

Отсюда приходим к приближенному выражению для емкости

$$D_c \approx \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (4.2.5)$$

Именно эту формулу для размерности фрактала использует в своих приближенных расчетах Мандельброт [Mandelbrot, 1977с. Р. 43]. Более же строго емкость множества определяют выражением

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (4.2.6)$$

[Eckmann, Ruelle, 1985. Р. 629]. Чаше, однако, встречается выражение⁸⁾

$$D_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln M(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}. \quad (4.2.7)$$

При определении размерности Хаусдорфа неявно предполагается, что разные «кубики» содержат одинаковое количество точек множества. Обобщение этого определения на случай неравномерного распределения точек по «кубикам» приводит к понятию *информационной размерности*⁹⁾. Здесь фигурирующий в выражениях (4.2.5)–(4.2.7) логарифм полного числа «кубиков» $M(\varepsilon)$, покрывающих все данное множество, заменяется *энтропией распределения* точек множества по «кубикам»

$$H(\varepsilon) = - \sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i \ln p_i \quad (4.2.8)$$

(p_i — мера точек множества, находящихся в i -м «кубике»), т. е. логарифмом числа «кубиков», содержащихся в «фазовом объеме» множества:

$$\ln M(\varepsilon) \rightarrow H(\varepsilon). \quad (4.2.9)$$

Вместо (4.2.5), таким образом, для информационной размерности получаем приближенное выражение

$$D_i = \frac{H(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (4.2.10)$$

[Billingsley, 1965; Рус. пер. С. 157]. Более строго определение информационной размерности получаем, отталкиваясь от определения (4.2.7):

$$D_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{H(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (4.2.11)$$

⁸⁾ [Farmer et al., 1983. Р. 157; Лихтенберг, Либман, 1984. С. 422; Ахромеева и др., 1985. С. 46; Шустер, 1988. С. 120; Николис, Пригожин, 1990. С. 135].

⁹⁾ [Good, 1941; Eggleston, 1949; Billingsley, 1965; Рус. пер. С. 157; Шустер, 1988. С. 120].

[Farmer et al., 1983. P. 159; Шустер, 1988. С. 120]. Когда «кубики» содержат равные количества точек множества, то $H(\varepsilon) = \ln M(\varepsilon)$ и $D_i = D_c$. В общем же случае [Farmer et al., 1983. P. 159]

$$D_i \leq D_c. \quad (4.2.12)$$

Г. Шустер [1988. С. 120] приводит также определение размерности множества, обобщающее определения D_c и D_i :

$$D_f = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{f-1} \frac{\ln \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^f \right)}{\ln \varepsilon}. \quad (4.2.13)$$

При $f \rightarrow 0$ это определение дает (4.2.7), а при $f \rightarrow 1$ оно приводит к (4.2.11).

Некоторые авторы¹⁰⁾ используют для численного определения фрактальной размерности *показатели Ляпунова* посредством соотношения

$$D = j + \frac{\sum_{i=1}^j \sigma_i}{-\sigma_{j+1}}, \quad (4.2.14)$$

которое, не имея, на мой взгляд, достаточно серьезного теоретического обоснования, дает тем не менее неплохое согласие с вычислительным экспериментом. Здесь показатели Ляпунова упорядочены обычным образом (см. соотношение (2.2.39))

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N \quad (4.2.15)$$

(N — размерность фазового пространства); j — наибольшее целое число, для которого

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_j > 0. \quad (4.2.16)$$

Следует иметь в виду, что сумма всех показателей Ляпунова меньше нуля для систем с уменьшающимся фазовым объемом и больше нуля — для систем с возрастающим фазовым объемом. По изложенным в разд. 3.1 причинам в синергетике сегодня рассматриваются, как правило, системы с *уменьшающимся* фазовым объемом. Для двухмерных систем с

$$\sigma_1 > 0 > \sigma_1 + \sigma_2 \quad (4.2.17)$$

выражение (4.2.14) дает

$$D = 1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \quad (4.2.18)$$

Для трехмерных с

$$\sigma_1 > 0 > \sigma_3, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_1 + \sigma_3 < 0 \quad (4.2.19)$$

¹⁰⁾ [Kaplan, Yorke, 1979; Ledrappier, 1981; Лихтенберг, Либерман, 1984. С. 424–425; Campbell, 1989].

имеет место

$$D = 2 - \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \quad (4.2.20)$$

[Лихтенберг, Либман, 1984. С. 424].

В случае канторова множества «средних третей» пригодна простейшая из приведенных формул (4.2.5), дающая

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} \approx 0,631. \quad (4.2.21)$$

4.3. Топологическая размерность

Здесь существуют три подхода, первый из которых идет от Анри Лебега, второй — от Лёйтзена Брауэра¹¹⁾, математически оформившего идею Анри Пуанкаре, а третий принят в аналитической геометрии. В основании подхода Лебега лежит идея сопоставления размерности множества с размерностью покрывающих его «кубиков», которая (идея) задействована, как мы видели, и при определении фрактальной размерности. В третьем подходе топологическая размерность множества определяется как *минимальное число координат, необходимых для фиксации его произвольной точки*¹²⁾. В нашем примере с «бумажным» множеством (см. разд. 4.1) топологическая размерность совпадает с евклидовой размерностью комнаты, в которой оно расположено.

«Геометрическое» определение имеет наиболее ясный физический смысл. Фракталы возникают в синергетике, и здесь «геометрическая» *топологическая размерность фрактала совпадает с числом генерирующих его независимых уравнений*, равным $2s - 1$, т. е. размерности энергетической поверхности динамической системы, на которой происходит ее движение в $2s$ -мерном фазовом пространстве; s — число степеней свободы системы¹³⁾. В кинетическом подходе (см. разд. 5.3) уравнения для отдельных степеней свободы отсутствуют из-за их (степеней свободы) статистической связанности друг с другом, однако и здесь «геометрическая» топологическая размерность равна $2s - 1$.

Подход Брауэра в варианте Менгера—Урысона¹⁴⁾ был использован Мандельбротом [Mandelbrot, 1977с. Р. 291]. Здесь топологическая раз-

¹¹⁾ BROUWER LUITZEN EGBERT JAN, голландский математик (1881–1966).

¹²⁾ «С точки зрения аналитической геометрии размерность фигуры равна числу координат, нужных для определения положения лежащей на этой фигуре точки; например, положение точки на кривой определяется одной координатой, на поверхности — двумя координатами, в трехмерном пространстве — тремя координатами» [Математический..., 1988. С. 514].

¹³⁾ Независимых уравнений движения $2s - 1$, если мы относим к ним соотношения (С. 5.6) и (С. 5.7), однако их $s - 1$, если мы относим к ним только соотношения (С. 5.7).

¹⁴⁾ Menger—Urysohn dimension. Карл Менгер [Carl Menger], американский математик (1902–1985), сын австрийского экономиста Карла Менгера [Carl Menger]. Павел Самуилович Урысон, российский математик (1898–1924). В 1921–1924 гг. ассистент профессора МГУ; профессор 2-го Московского ун-та. Утонул, купаясь на побережье Бретани (Франция).

мерность определяется по индукции. Смотрят, множеством какой минимальной топологической размерности может быть рассечено на две части исследуемое множество, после чего к этой минимальной размерности прибавляют единицу, получая искомую размерность. Линия может быть разделена на две части точкой, топологическая размерность которой по определению берется равной 0, поэтому топологическая размерность линии равна $0 + 1 = 1$. Поверхность может быть разделена на две части линией, поэтому ее топологическая размерность равна $1 + 1 = 2$. И т. д. Как видим, в этих случаях топологическая размерность по Брауэру совпадает с «геометрической», а обе эти размерности совпадают с определением, которое было приведено в предыдущем разделе и согласно которому топологическая размерность фрактального множества — это минимальная целочисленная размерность измерительных «кубиков», при которой мера этого множества еще равна нулю.

4.4. Фрактальная размерность меньше топологической

Обобщенная (собственно фрактальная) размерность D характеризует степень заполнения данным, вообще говоря, всюду разрывным множеством занимаемой им части евклидова пространства. В том крайнем случае, когда множество представляет собой гладкий континуум, всюду плотно заполняющий некоторую часть евклидова пространства, его (множества) обобщенная размерность равна топологической, в общем же случае — меньше или равна ей:

$$D \leq D_T. \quad (4.4.1)$$

Это следует из определений собственной (фрактальной) и топологической размерностей множества (см. текст между соотношениями (4.2.2) и (4.2.3) и разд. 4.3).

Пример первый. Для рассечения рассмотренного в разд. 4.1 «бумажного» множества на две части требуется двухмерная поверхность (скажем, достаточно большой бумажный лист, которым комната может быть разделена на две части), поэтому топологическая размерность этого множества (по Брауэру) равна 3, т. е. размерности комнаты, фрактальная же его размерность, будучи меньше 3, больше или равна размерности исходного листа бумаги, т. е. 2.

Пример второй. Фрактальная размерность канторова множества «средних третей» равна $\approx 0,631$ (см. соотношение (4.2.21)), тогда как топологическая его размерность равна 1, поскольку все его точки расположены на одномерном отрезке. По Брауэру: это множество может быть разделено на две части точкой.

Пример третий. Береговая линия моря, длину которой измеряют по карте с помощью циркуля [Mandelbrot, 1967; Потапов, 2002]. Морской

берег настолько изрезан, что с уменьшением шага циркуля измеряемая длина берега растет пропорционально обратной степенной зависимости, показатель которой и определяет фрактальную размерность берега (1,14 для Португалии, 1,25 для Великобритании и т. д.) [Потапов, 2002. С. 21]¹⁵⁾. Если бы шаг циркуля можно было устремить к нулю, то измеряемая длина берега стремилась бы к бесконечности. В случае не столь изрезанной (нефрактальной) береговой линии, когда с устремлением шага циркуля к нулю изрезанность береговой линии пропадает, ее фрактальная размерность вырождается в единицу, а указанная обратная степенная зависимость дает для ее (береговой линии) длины отличное от бесконечности постоянное значение¹⁶⁾. Как видим, фрактальная размерность берега моря *меньше* топологической размерности площади, на которой эта линия размещена, т. е. 2.

Отстаиваемый нами тезис достаточно нетривиален. Мандельброт, отец фракталов, ошибочно полагает, что размерность фракталов *больше* их топологической размерности, выписывая неравенство

$$D \geq D_T \quad (4.4.2)$$

[Mandelbrot, 1977с. Р. 15], противоположное нашему (4.4.1). Следом за Мандельбротом многие авторы также считают, что фрактальная размерность *больше* топологической¹⁷⁾, приписывая в оправдание этого тезиса топологической размерности фракталов довольно-таки странные значения. Так, А. А. Потапов [2002. С. 14] считает топологическую размерность канторова множества равной 0¹⁸⁾, а топологическую размерность триадной кривой фон Коха, кривой Мандельброта—Гивена, салфетки и ковра Серпинского и кривой Госпера равной 1. Однако канторово множество, как говорилось в начале настоящего раздела, расположено на линейном отрезке единичной длины, из-за чего его топологическая размерность равна 1, а не 0 (положение точек множества фиксируется *одной* координатой).

¹⁵⁾ Если ε — шаг циркуля, а $N(\varepsilon)$ — число шагов, то измеренная длина береговой линии определяется выражением

$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon)\varepsilon. \quad (С.4.1)$$

Зависимость $N(\varepsilon)$ от фрактальной размерности берега D :

$$N(\varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon^D} \quad (С.4.2)$$

(это выражение совпадает с (4.2.3) при $d = D$, $I_d = a$ и $M(\varepsilon) = N(\varepsilon)$), откуда

$$L(\varepsilon) = \frac{a}{\varepsilon^{D-1}} \quad (С.4.3)$$

[Потапов, 2002. С. 21–22]. Так как $D > 1$, то при $\varepsilon \rightarrow 0$ $L(\varepsilon) \rightarrow \infty$.

¹⁶⁾ При $D = 1$ (С. 4.3) дает $L(\varepsilon) = a$.

¹⁷⁾ «Можно доказать, что размерность [Хаусдорфа—Безиковича] D больше или равна D_T — топологической размерности» [Трубецков, 2004. С. 139].

¹⁸⁾ Это тоже идет от Мандельброта [Mandelbrot, 1977с. Р. 16], который, возможно, исходит из того факта, что суммарная длина этого множества равна нулю (см. соотношение (4.1.3)), что, однако, имеет отношение к *мере*, а не к топологической размерности.

Триадная кривая фон Коха (фрактальная размерность $(\ln 4 / \ln 3) \approx 1,26$) строится на плоскости¹⁹⁾, из-за чего ее топологическая размерность равна 2, а не 1 (положение точек множества фиксируется *двумя* координатами). Четыре оставшихся фигуры (фрактальная размерность равна соответственно $(\ln 8 / \ln 3) \approx 1,89$, $(\ln 3 / \ln 2) \approx 1,58$, $(\ln 8 / \ln 3) \approx 1,89$ и $(\ln 3 / \ln \sqrt{7}) \approx 1,13$ [Там же]) также строятся на плоскости, почему их топологическая размерность также равна 2, а не 1.

Для самого Мандельброта главным [prime] примером природного [natural] фрактала, по его словам [Mandelbrot, 1977с. Р. 4], служит броуновское движение на плоскости. Считая его ломаную траекторию *линией*, он отождествляет топологическую размерность фрактала, образованного траекторией, с топологической размерностью этой линии:

«...Может быть показано, что броуновский след достаточно подобен кривой линии [sufficiently curvelike], чтобы иметь топологическую размерность $D_T = 1$ » [Op. cit. Р. 90].

Топологическая размерность линии действительно равна 1 независимо от того, опираться ли на определение Брауэра, как это делает Мандельброт, или на «геометрическое», однако к броуновскому движению это не имеет отношения. Не проговаривая этого вслух, Мандельброт, похоже, считает, что данное множество может быть рассечено на две части точкой на ломаной траектории броуновской частицы. Если бы он был прав, то 1 была бы равна и топологическая размерность трехмерного броуновского движения, и четырехмерного, и т. д., что представляется бессмыслицей. Поскольку, как говорилось, топологическая размерность фрактала определяется минимальной размерностью пространства, в котором он может быть размещен, постольку топологическая размерность броуновского движения на плоскости равна 2, в трехмерном пространстве — 3 и т. д. Это же значение для топологической размерности броуновского движения на плоскости мы получаем, естественно, и при использовании «геометрического» определения: произвольная точка данного фрактала не имеет определенного положения на «размытой» траектории частицы и может быть фиксирована, поэтому, только значениями *двух* ее координат на плоскости. И тогда мы получаем наше соотношение (4.4.1).

Будучи отцом фракталов, Мандельброт, на мой взгляд, сам не обжил еще должным образом фрактальные представления (такое, увы, случается

¹⁹⁾ «Затравкой служит единичный отрезок, являющийся нулевым поколением кривой Кох. Разделив отрезок на три части и выбрав среднюю часть, вместо нее строим две стороны (длиной 1/3 каждая) равностороннего треугольника. Таким образом получаем четыре звена длиной 1/3 каждое — первое поколение $n = 1$. Затем повторяем этот процесс на каждом звене ломаной еще и еще раз... В предельном случае... кривая Кох является линией бесконечной длины, ограничивающей конечную площадь на плоскости (снежинка Кох)» [Потапов, 2002. С. 14–17]. Потапов называет кривую фон Коха *кривой Кох*, ориентируясь, по-видимому, на «женское» имя Хельге проф. Коха [Niels Fabian Helge von Koch] (1870–1924), снабженная усами фотография которого вывешена в Internet'e. Ошибку Потапова, к сожалению, повторил автор этих строк [Хайтун, 2005. Разд. 4.5].

с первопроходцами). Он забывает, что из-за стохастического характера броуновского движения (сам же Мандельброт говорит о случайном блуждании [gandom walk] броуновской частицы [Op. cit. P. 84]) генерирующая его траектория локально неустойчива, а из-за необратимости броуновского движения его траектория еще и *разрывна в каждой точке, не являясь линией* (каждая следующая точка траектории находится на некотором случайном расстоянии от предыдущей в случайном же направлении). Поэтому она не может быть разделена на две части точкой, для этого нужна *линия*, если речь идет о броуновском движении на плоскости, что делает топологическую размерность (по Брауэру) данного фрактала равной 2; в случае броуновского движения в трехмерном пространстве его «траектория», из-за ее размытости, может быть разделена на две части только *поверхностью*, что делает топологическую размерность данного фрактала равной 3.

Судя по всему, и в общем случае Мандельброт, выписывая свое неравенство (4.4.2), неявно отождествляет топологическую размерность фрактала с топологической размерностью генерирующей его траектории, которую он считает равной 1. Однако «размытость» (разрывность в каждой точке) этой траектории приводит к тому, что она линией не является, так что данная точка фрактала не имеет на ней определенного положения и может быть фиксирована, поэтому, только значениями координат в фазовом пространстве, занимаемом фракталом, в соответствии с «геометрическим» определением топологической размерности.

Подобным же образом «размыта» (разрывна в каждой точке) береговая линия моря в том идеальном случае, когда ее фрактальность сохраняется при сколь угодно малом масштабе рассмотрения. При этом произвольная точка берега не может быть фиксирована ее положением на береговой линии, для этого требуются *две* независимые координаты, что и означает равенство топологической размерности данного множества не 1, а 2. 2 равна и топологическая размерность любой фрактально изрезанной линии на плоскости. Если же линия на плоскости не изрезана фрактально, то ее топологическая размерность равна 1, о чем и шла речь выше при обсуждении перехода от фрактальной береговой линии к нефрактальной.

В случае рассмотренного в разд. 4.1 «бумажного» множества «размыта» (разорвана в каждой точке и разбросана в пространстве) генерирующая его бумажная полоска, так что при фиксации произвольной точки этого множества эту полоску нельзя считать «бесконечно узкой», т. е. линией. Поэтому произвольная точка данного множества не может быть фиксирована ее положением на этой полоске, для этого необходимы *три* пространственные координаты.

Если мы считаем, что справедливо неравенство Мандельброта (4.4.2), то непонятно, что происходит с фрактальной размерностью в ходе релаксации физической системы. Наше неравенство (4.4.1) все ставит на свои места. Фрактальная фазовая жидкость появляется при описании необратимых систем, фазовая же жидкость обратимых систем имеет обычную,

топологическую размерность. В ходе релаксации системы в сторону равновесия происходит рост ее фрактальной размерности до максимального значения, равного топологической размерности, так что *размерность фрактальной фазовой жидкости может служить мерой удаленности системы от равновесного состояния*. Впрочем, эволюция реальных систем и всего материального мира в сторону возрастания энтропии имеет мало общего с релаксацией системы к равновесному состоянию [Хайтун, 2005].

Тот факт, что фрактальная размерность фрактала *меньше* его топологической размерности, имеет, как мы увидим далее, более чем существенные следствия, включая, в частности, равенство плотности Вселенной, *если она фрактальна*, нулю, что означает пересмотр современной космологической картины мира (см. разд. 6.2).

4.5. Самоподобны ли фракталы?

В своих первых посвященных фракталам работах Мандельброт определяет фрактал как множество, структура которого *повторяется во все меньших масштабах*. Он называет такое свойство фракталов *самоподобием*, а определяемую для самоподобных фракталов выражением (4.2.5) размерность — *размерностью подобия*. Это свойство фракталов иначе называют *масштабной инвариантностью* (scale invariance) [Gisiger, 2001]. От Мандельброта убеждение в том, что все фракталы (странные аттракторы) самоподобны, переходит и к другим авторам, у некоторых из которых также принимая форму определения:

«Топология странных аттракторов весьма примечательна. Она характеризуется масштабной инвариантностью, при которой структура аттрактора повторяется на все более мелких пространственных масштабах. Такие структуры, *называемые фракталами*, обладают любопытным свойством дробной размерности, промежуточной между размерностью точки и линии, линии и плоскости и т. д. (выделено мной. — С. Х.)» [Лихтенберг, Либман, 1984. С. 19].

См. также [Безручко и др., 2005. С. 65; Князева, Курдюмов, 2005. С. 91].

Обсуждаемая точка зрения, мне кажется, сформировалась в немалой степени под влиянием примера канторова множества «средних третей», которое, наряду с броуновским, играет большую иллюстративную роль в рассуждениях Мандельброта и других авторов и которое действительно обладает свойством масштабной инвариантности. Но оно обладает им просто по построению, при котором исходный отрезок $[0, 1]$ и составляющие его меньшие отрезки делятся каждый раз на *три равные* части. Если задаться другим алгоритмом, скажем, алгоритмом случайных чисел, не предполагающим деления отрезков на *одно и то же* число *равных* частей, то соответствующее канторово множество уже не будет обладать масштабной инвариантностью, оставаясь, тем не менее, фрактальным.

Позже Мандельброт отходит от той точки зрения, что *все* фракталы самоподобны. Правда, сохраняя лицо, он говорит о *диагональном самоподобии*:

«При диагональном аффинном преобразовании коэффициенты растяжения вдоль разных координатных осей различны... в противоположность случаю строго самоподобных множеств, когда фрактальная размерность единственна, в общем случае необходимо [вводить] несколько различных фрактальных размерностей» [Мандельброт, 1988. С. 10].

Новая точка зрения воспроизводится им и в монографии [Мандельброт, 2004].

По всей видимости, и диагональное самоподобие не является неотъемлемым свойством странных аттракторов. Тот факт, что в общем случае странный аттрактор характеризуется значениями *нескольких* фрактальных размерностей, т. е. имеет, как говорят, *мультифрактальную* природу, сегодня уже является общим местом:

«Во многих интересных случаях встречаются несамоподобные множества. Например, в случае броуновской частицы ее координаты и время являются разными физическими величинами, и вряд ли можно ожидать, что x и t будут иметь одинаковые коэффициенты подобия» [Федер, 1991. С. 194].

Несамоподобен и аттрактор Лоренца [Dominguez-Tenreiro et al., 1992], т. е. первый исследованный странный аттрактор. См. также [Цаллис, 1988. С. 98].

Теоретически все так, фракталу не обязательно быть самоподобным. Однако реальные фрактальные (точнее, фракталоподобные — см. разд. 5.1) структуры часто оказываются самоподобными. Настолько часто, что самоподобие рассматриваемой структуры нередко служит указанием на ее фрактальность (фракталоподобность). Это особенно верно, если рассматривать самоподобие приближенно:

«Если не гнаться за строгостью, то фрактал — это нелинейная (не описываемая никаким линейным уравнением) структура, у которой каждая часть устроена в каком-то смысле так же, как вся структура... Фрактальность мира отметил 300 лет назад Лейбниц: он писал образно, что „всякую часть материи можно представить наподобие сада, полного растений, и пруда, полного рыб. Но каждая ветвь растения, каждый член животного, каждая капля его соков есть опять такой же сад или такой же пруд“» [Чайковский, 2003. С. 253].

Более точно, на мой взгляд, было бы говорить о *системной иерархичности*, или *иерархической системности*, фракталов (см. разд. 6.1).

4.6. Фрактал как множество, размерность которого меньше топологической

Для фракталов, с которыми обычно имеет дело синергетика, самоподобие не является «фракталообразующим» свойством, их специфика определяется другим — необычной размерностью. Более естественным в синергетике представляется *определение фрактала как множества с размерностью, отличающейся от топологической размерности*. Например, в такой формулировке:

«...Фрактальное множество — это множество, для которого хаусдорфова размерность отличается от топологической размерности и обычно не является целым числом» [Eckmann, Ruelle, 1985. P. 625].

В связи с этим конкретным определением могут быть сделаны три замечания. Во-первых, вряд ли целесообразна привязка именно к размерности Хаусдорфа, другие фрактальные размерности (скажем, информационная) могли бы фигурировать в определении с равным основанием. Во-вторых, при констатации отличия фрактальной размерности от топологической хотелось бы большей конкретизации. В-третьих, словам типа «обычно» в *определениях* не место, если размерность фрактала может выражаться целым числом, а может — дробным, то дробность размерности не должна фигурировать в определении фрактала.

С этой точки зрения, более привлекательным, казалось бы, выглядит следующее определение Мандельброта:

«Фрактал будет определен как множество, для которого размерность Хаусдорфа — Безиковича (то же, что и размерность Хаусдорфа. — С. Х.) строго превышает [strictly exceeds] топологическую размерность» [Mandelbrot, 1977с. P. 15].

Однако и в этом определении нас не удовлетворяет привязка к размерности Хаусдорфа. Кроме того, и это еще существеннее, указание на то, что размерность фрактала *больше* топологической размерности, как разъяснялось в разд. 4.4, просто ошибочно.

Суммируя сказанное, приходим к *определению фрактала как множества, размерность которого меньше топологической размерности*.

Соответственно странный аттрактор может быть определен как *стохастический* аттрактор, размерность которого *меньше* топологической размерности. Другими словами, *странный аттрактор — это стохастический фрактал*. Поскольку не все фракталы являются стохастическими, постольку *не всякий фрактал представляет собой странный аттрактор*. Канторово множество «средних третей», например, будучи фракталом, странным аттрактором не является, не будучи стохастическим.

Это позволяет понять некорректность принадлежащего Рюэлю и Такенсу определения странного аттрактора как *произведения многообразия на канторово множество* (см. разд. 3.2.3). В самом деле, многообразие — это континуум (непрерывное множество) точек в некоторой части фазового пространства, имеющей определенную (топологическую) размерность, канторово же множество — фрактальное, так что произведение этих двух множеств действительно является фракталом. Проблема в другом — в том, что из-за нестохастичности канторова множества из определения Рюэля и Такенса выпадает стохастичность странного аттрактора.

Некоторые авторы утверждают, что размерность фрактала/странного аттрактора непременно выражается *дробным* числом. В дополнение к приведенному в начале разд. 4.5 высказыванию такого рода Лихтенберга и Либермана, приведем аналогичное утверждение Г. Шустера:

«Все обнаруженные к настоящему времени странные аттракторы имеют дробную хаусдорфову размерность» [Шустер, 1988. С. 110].

Как вытекает из выработанного нами определения фрактала, размерность последнего в принципе может выражаться и целым числом, лишь бы она оставалась меньшей его топологической размерности.

4.7. Фрактал как множество, мера которого в единицах топологической размерности равна нулю

Как указывалось в разд. 4.2 (см. текст между соотношениями (4.2.2) и (4.2.3)), при использовании измерительных «кубиков» размерности d , превышающей собственную размерность множества D , мера множества тождественно равна нулю. Теперь мы знаем, что собственная размерность фрактала D (т. е. его фрактальная размерность) *меньше* топологической его размерности D_T , т. е. размерности пространства, в котором он расположен. Сопоставляя, заключаем, что *мера фрактала в единицах топологической размерности тождественно равна нулю*. Нулю, следовательно, равна и *плотность* фрактала, которая всегда измеряется в измерительных «кубиках» обычной, т. е. топологической, размерности. Представить себе это можно на примере нашего «бумажного» множества (см. разд. 4.1), масса которого, как мы видели, тождественно равна нулю.

Существенно, что при определении фрактальной размерности длина ε ребер измерительных «кубиков» устремляется к нулю (см. соотношение (4.2.2) и связанный с ним текст). Другими словами, *данная структура является фракталом лишь при условии, что она сохраняет свои (фрактальные) свойства при сколь угодно малых значениях ε* . Если же данная система, которую мы считаем фракталом, не позволяет бесконечного углубления в свою структуру, т. е. если существует некоторое пороговое значение $\varepsilon_{\min}$, ниже которого данная структура теряет свой фрактальный вид, то она *не разрывна в каждой точке*, не являясь «настоящим» фракталом, так что ее мера в измерительных «кубиках» топологической размерности отлична от нуля.

Возможна, однако, ситуация, когда мы ограничиваемся значениями $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min}$ и когда, соответственно, мера данного множества в единицах топологической размерности отлична от нуля, но когда, тем не менее, фрактальная размерность меньше топологической. Таково, к примеру, канторово множество «средних третей», если его построение оборвать на конечном шаге. Его мера, измеренная в одномерных отрезках единичной длины (суммарная длина интервалов), определяемая выражением (4.1.3), равна нулю лишь при $n \rightarrow \infty$, для конечного же n его мера $(2/3)^n$ отлична от нуля, а само это множество, следовательно, перестает быть фракталом. Однако его размерность (4.2.21) остается дробной и при

конечном n , но это только потому, что в случае данного конкретного множества она вообще не зависит от шага n :

$$D_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \ln 2}{n \ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0,631. \quad (4.7.1)$$

То же самое имеем в случае триадной кривой фон Коха, кривой Мандельброта—Гивена, салфетки и ковра Серпинского и кривой Госпера, о которых шла речь в разд. 4.4 и размерность которых при любом шаге n равна соответственно $\ln 4/\ln 3$, $(\ln 8/\ln 3) \approx 1,89$, $(\ln 3/\ln 2) \approx 1,58$, $(\ln 8/\ln 3) \approx 1,89$ и $(\ln 3/\ln \sqrt{7}) \approx 1,13$. Продемонстрируем это на примере кривой фон Коха, фрактальная размерность которой

$$D = 1 + \frac{n \ln (4/3)}{n \ln 3} = \frac{\ln 4}{\ln 3} \quad (4.7.2)$$

[Потапов, 2002. С. 14–17].

Конечно, все это искусственные множества с алгоритмами образования, не имеющими отношения к реальности, однако, дабы исключить возможные недоразумения, фрактал корректнее определять как множество, мера которого, измеренная с помощью измерительных «кубиков» топологической размерности, равна нулю.

Глава 5

Взаимная дополнительность синергетического и кинетического подходов*

5.1. Материальные фракталы одновременно и реальны, и нереальны

Тот установленный в разд. 4.7 факт, что плотность фрактала, измеренная в единицах топологической размерности, равна нулю, придает расположенным в нашем трехмерном пространстве материальным фракталам ирреальный характер. В самом деле, при измерении плотности таких структур используются трехмерные же единичные кубики. Поскольку размерность материального фрактала, расположенного в нашем трехмерном пространстве, меньше трех, т. е. меньше размерности измерительных кубиков, постольку плотность такого фрактала тождественно равна нулю. Если бы, скажем, угольная сажа была натуральным фракталом, то вещество, составляющее любой ее конечный фрагмент, занимало бы суммарно в обычном трехмерном пространстве нулевой объем и имело бы соответственно нулевую массу. Однако мы совершенно точно знаем, что плотность угольной сажи отлична от нуля, как отлична от нуля и плотность прочих реальных структур, которые принято считать фрактальными, — бронхов, облаков, галактик и т. д. и т. п.

Как говорилось в разд. 4.7, обсуждаемое свойство (мера фрактала, измеренная в «кубиках» топологической размерности, равна нулю) является «фракталообразующим», т. е. структуры, мера которых отлична от нуля, «настоящими» фракталами, т. е. фракталами в строгом (математическом) смысле этого термина, не являются. Поэтому расположенные в нашем трехмерном пространстве материальные структуры, обладающие ненулевой плотностью, не являются «настоящими» фракталами.

Приходим к противоречию. С одной стороны, фракталы реально наблюдаются. С другой стороны, они не реальны в обычном смысле этого слова, потому что «настоящие» фракталы должны иметь нулевую плотность массы.

Ф. А. Цицин критикует автора этих строк за вывод «Фракталы не являются реально существующими объектами» [Хайтун, 1996. С. 198], объявляя его «убийственным для фракталов» [Цицин, 1997. С. 88]. Между тем сам же

* [Хайтун, 1995; 1996. С. 197–202, 403–408; 1999; 2005. Разд. П. 5.7].

Цицин цитирует далее мои слова, предшествующие этому «убийственному» высказыванию: «...Реальные системы не являются фрактальными в точном смысле этого термина, они могут быть только „фракталоподобными“. Я вовсе не отрицаю фрактальности (точнее, «фракталоподобности») многих (большинства) структур наблюдаемого мира (см. разд. 6.1), но просто пытаюсь осмыслить этот феномен. Речь идет не об «отмене» фракталов, но об уточнении природы их реальности, что позволит нам, в частности, в разд. 6.2 сделать вывод о равенстве нулю массовой плотности Вселенной с соответствующей ревизией современной космологической картины мира.

5.2. Непрерывные необратимые явления одновременно и реальны, и нереальны

Добавим для комплекта еще одно противоречие, связанное с первым: поставим под сомнение всеми физиками сегодня, кажется, разделяемые представления о *возможности применения кинетического описания на фракталах*. Конкретно речь идет о непрерывном описании необратимых процессов феноменологическими транспортными уравнениями типа уравнения диффузии и аналогичными уравнениями более высокого порядка. В эти уравнения входят плотности массы и тепла, плотности их потоков и другие макроскопические величины, определяемые в пространствах обычной (топологической) размерности. Для вывода этих феноменологических уравнений со входящими в них величинами и используются кинетические уравнения, т. е. несимметричные по времени дифференциальные уравнения для фазовой плотности.

Чтобы из кинетических уравнений могли быть получены феноменологические уравнения типа уравнения диффузии, которые действуют, подчеркнем еще раз, в пространствах *топологической* размерности, кинетические уравнения также должны выписываться в пространствах топологической размерности. Однако, как разъяснялось в предыдущем разделе, фазовая плотность фракталов в пространствах топологической размерности тождественно равна нулю, что делает невозможным написание для нее каких бы то ни было уравнений. Таким образом, *кинетическое описание на фракталах невозможно*.

Несовместимость кинетического описания с фракталами означает, что отображаемые им «непрерывные» необратимые явления типа диффузии не реальны в обычном смысле этого слова. С другой стороны, эти явления, как говорит повседневный опыт, вполне реальны, так что мы опять упираемся в противоречие.

5.3. Синергетический и кинетический подходы исключают друг друга

Таким образом, и дискретные фракталы, и непрерывные необратимые явления типа диффузии, будучи несомненно наблюдаемыми, не реальны, тем не менее, в обычном понимании. Противоречие разрешается, если принять, что *статистическая физика необратимых процессов распадается на два исключаящие друг друга подхода — динамический (синергетический), или дискретный, и кинетический, или непрерывный*. Непрерывность фазовой жидкости и независимость степеней свободы оказываются в области необратимых процессов взаимоисключающими *постулатами*. Принимая первый из них, мы выбираем кинетический подход, принимая второй — динамический.

Постулируя в кинетическом подходе непрерывность фазовой плотности, мы делаем возможным написание для нее кинетических уравнений. С необратимым ростом энтропии объем, занимаемый фазовой жидкостью, должен расти, поэтому она оказывается здесь растягиваемой. Соответственно степени свободы становятся здесь статистически связанными, что исключает возможность написания уравнений движения для отдельных степеней свободы и делает невозможным отталкивающееся от этих уравнений синергетическое описание.

Поясним, почему в кинетическом подходе в области необратимых процессов не работает постулат о независимости степеней свободы. В силу действующей здесь обобщенной теоремы Лиувилля (см. разд. 3.4), фазовая плотность не сохраняется во времени:

$$\frac{d\rho(q, p, t)}{dt} \neq 0. \quad (5.3.1)$$

К соотношению (5.3.1) приводит и рассмотрение кинетических уравнений, в левой части которых также стоит величина $d\rho/dt$ (или аналогичная ей величина df/dt для одночастичной функции распределения $f(r, v, t)$), а правые части отличны от нуля¹⁾.

¹⁾ Таковы, к примеру, основное кинетическое уравнение (С. 1.9) в фазовом пространстве всех координат и импульсов системы и кинетическое уравнение Больцмана [Boltzmann, 1872]

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} + \hat{K} f \quad (С.5.1)$$

в фазовом пространстве одной молекулы ($\hat{K} f$ — интеграл столкновений), которое (уравнение Больцмана) одни авторы, следуя Больцману, записывают в форме

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} - \hat{K} f = 0, \quad (С.5.2)$$

позволяющей, как принято думать, производить его от уравнения Лиувилля в том же фазовом пространстве одной молекулы

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \dot{\vec{v}} = 0, \quad (С.5.3)$$

Несложно показать, что из (5.3.1) в рамках кинетического подхода следует сжимаемость/растягиваемость фазовой плотности. Как говорит математическая статистика, плотность распределения точек в пространстве некоторых переменных на выборке объектов измерения характеризует *степень статистической связанности* этих переменных. В общем случае выборочные точки распределены в этом пространстве определенным образом, так что их плотность достигает максимума на кривой, лежащей в основании данной конкретной статистической зависимости, которая связывает переменные, и нуля на достаточном удалении от нее. Ослабление статистической взаимосвязи переменных от функциональной зависимости до полной независимости идет с увеличением разброса значений переменных на выборке около кривой, фиксирующей статистическую зависимость переменных. Другими словами, уменьшение статистической связанности переменных происходит с уменьшением плотности газа выборочных точек в соответствующем элементе его объема.

В механике переменными выступают координаты $q_i(t)$ и импульсы $p_i(t)$, а плотность распределения выборочных точек — это плотность фазовой жидкости $\rho(q, p, t)$. Поскольку импульсы связаны с соответствующими координатами функциональными зависимостями $\dot{q}_i = \partial H / \partial p_i$ ²⁾, постольку изменение во времени фазовой плотности обусловлено статистической связанностью координат как функций времени $q_i(t)$. Независи-

просто ускорительное слагаемое $(\partial f / \partial \vec{v}) \dot{\vec{v}}$ в уравнения Лиувилля полагают равным $-\hat{K}f$. Другие авторы считают корректной форму

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \dot{\vec{r}} + \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} \dot{\vec{v}} = \hat{K}f, \quad (\text{C.5.4})$$

отменяющую теорему Лиувилля $(df/dt) = 0$ в пользу обобщенной теоремы Лиувилля. Мы останавливаемся на второй форме, потому что она обеспечивает производству энтропии положительное значение, тогда как форма (C.5.3), как показывает соотношение

$$\frac{dS}{dt} = -k \frac{d}{dt} \int f \ln f dq dp = -k \int (1 + \ln f) \frac{df}{dt} dq dp = 0, \quad (\text{C.5.5})$$

аналогичное соотношению (C.3.9), дает для производства энтропии нулевое значение [Хайтун, 1996. С. 43–44; 78–80; 86].

²⁾ Соотношения

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \quad (\text{C.5.6})$$

обычно относят к *уравнениям* Гамильтона, тогда как в действительности они представляют собой только *определение* скоростей через импульсы. Например, в случае материальной точки массы m , свободно движущейся со скоростью $\dot{q} = v$, когда $H = p^2/(2m)$, (C.5.6) дает $v = p/m$. Уравнениями же Гамильтона являются только соотношения

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q, p, t)}{\partial q_i}, \quad (\text{C.5.7})$$

которых, заметим, столько же, сколько и уравнений Лагранжа, т.е. s , где s — число степеней свободы системы. Это различие существенно в области необратимых процессов, в которой соотношения (C.5.6) как определения остаются в силе, а соотношения (C.5.7), как симметричные по времени уравнения движения, не работают [Хайтун, 1996. С. 18].

мость этих функций, возможная (в кинетическом подходе) только в случае обратимой системы, обеспечивает постоянство фазовой плотности во времени, т. е. несжимаемость/нерастягиваемость фазовой жидкости *вдоль линии тока*. Если же фазовая плотность изменяется во времени, так что имеет место соотношение (5.3.1), то это может означать только существование статистической зависимости между временными функциями $q_i(t)$.

То был кинетический подход. В динамическом постулируется независимость друг от друга степеней свободы системы, для которых, вследствие этого, возможно написание отдельных (динамических) уравнений движения, являющихся исходными при синергетическом анализе любой конкретной системы. Фазовая жидкость необратимой системы должна удовлетворять здесь одновременно двум противоположным требованиям. С одной стороны, переменные $x_1, x_2, \dots$, для которых здесь пишутся уравнения движения, мыслятся *независимыми*. Если между какими-то из них и предполагается связь, то только *функциональная*, когда лишняя переменная может быть безболезненно устранена из уравнений движения. Независимость переменных может быть истолкована как отсутствие между ними статистической зависимости. Можно также считать, что статистическая связь между переменными $x_1, x_2, \dots$ существует, однако носит абсолютно случайный характер и не меняется, поэтому, со временем по величине. Соответственно, как разъяснялось выше в настоящем разделе, фазовая жидкость полагается здесь *несжимаемой*.

С другой стороны, если говорить для определенности об изолированной системе, ее энтропия в необратимом случае должна расти. Таким образом, *фазовая жидкость такой системы должна занимать все большую часть фазового пространства, оставаясь при этом несжимаемой*. Поэтому она и вынуждена рваться в каждой точке с образованием всюду разрывной фрактальной структуры, которая в измерительных «кубиках» топологической размерности имеет нулевую меру и которая исключает возможность написания для нее кинетических уравнений.

В открытой системе ситуация аналогична. Энтропия производится в ней в каждом элементе объема, всегда и везде происходит локальный рост энтропии, связанный, в рамках динамического (синергетического, дискретного) подхода, с необходимостью для фазовой жидкости, предполагаемой здесь несжимаемой, разрываться в каждой точке с образованием фрактальной структуры.

Подчеркнем еще раз, что динамический и кинетический подходы в области необратимых процессов *исключают* друг друга. Либо вы работаете с фрактальной фазовой жидкостью, плотность которой равна нулю, и тогда вы можете написать только дифференциальные уравнения для степеней свободы, либо вы считаете фазовую жидкость непрерывной, но тогда ваши степени свободы статистически связаны, что делает невозможным написание для них уравнений движения.

Подчеркнем также, что динамическое (синергетическое, дискретное) и кинетическое (непрерывное) макроописания исключают друг друга

только в области *необратимых* процессов. В обратимой области дифференциальные уравнения действуют одновременно и для степеней свободы (уравнения Гамильтона), и для фазовой плотности (уравнение Лиувилля). В необратимой области либо работают кинетические уравнения (взамен уравнения Лиувилля), а уравнения синергетики для степеней свободы не действуют, либо работают (негамильтоновы) уравнения синергетики, и тогда не действуют кинетические уравнения.

5.4. О попытках совмещения динамического и кинетического подходов в современной физике

Современная статистическая физика, не проводящая различия между обратимыми и необратимыми процессами, между обратимым и необратимым хаосом, не проводит и границы между динамическим и кинетическим подходами. Не замечая их несовместимости в необратимом случае, она предпринимает попытки кинетического описания на фракталах.

Нам встретились четыре типа такого рода попыток. Чаще всего, фигурируя в одной работе, эти описания остаются не связанными — в разделах, трактующих кинетические уравнения или уравнения переноса, отсутствует синергетика, и наоборот³⁾. Другой тип работ — кинетические уравнения для фазовой плотности, ведущие к уравнениям переноса, подменяются на фракталах другими, не имеющими отношения к кинетическому описанию. Например, в работе [Гончар и др., 1991] кинетическим именуется уравнение для распределения составляющих фрактал подструктур по их размеру. В работах третьего типа⁴⁾ для описания диффузии на фрактальной структуре предлагается заменить обычное уравнение диффузии на уравнение с *временной производной дробного порядка*. В работе [Zaslavsky, 1994] в аналогичных целях используется производная дробного порядка при дифференцировании по *координате*. Наконец, в работах четвертого типа⁵⁾ предпринимаются попытки *вывода* кинетических уравнений из итерационных уравнений в форме *отображения* (3.4.7), генерирующих фракталы на компьютерах.

Не исключено, что понимание невозможности кинетического описания на фракталах тормозится подспудной мыслью о возможности использования на фракталах *грубой* фазовой плотности, которая, в отличие от *точной*, непрерывна. Однако классическое (1.3.1) и квантовое (1.3.6) выражения, определяющие грубую фазовую плотность $\bar{\rho}_i$ через точную классическую $\rho(q, p)$ и квантовую $\rho(x', x)$, показывают безосновательность этой надежды. Дело в том, что точная фазовая плотность $\rho(q, p)$

³⁾ [Antonsen, Ott, 1991; Weidlich, 1991; Pascal, Pascal, 1994].

⁴⁾ [Nigmatullin, 1986; Wyss, 1986; Schneider, Wyss, 1989; Schneider, 1990; Metzler et al., 1994].

⁵⁾ [Заславский, Чириков, 1971; Chirikov, 1979; Заславский, 1984; Afanasiev et al., 1991; Schlesinger et al., 1993].

или $\rho(x', x)$ фрактальной структуры, как мы видели, тождественно равна нулю в фазовом пространстве топологической размерности, в котором, в частности, определяется выражениями (1.3.1) и (1.3.6) грубая плотность $\overline{\rho}_i$. Эти выражения показывают, что тождественное равенство нулю точной фазовой плотности влечет за собой равенство нулю и грубой. Так что обращение к грубой плотности здесь не спасает, написание для нее каких бы то ни было дифференциальных уравнений на фракталах также невозможно.

Квантовая механика не вносит в обсуждение данного вопроса кардинальных изменений, поскольку фазовые плотность и жидкость квантовой системы могут считаться непрерывными (см. разд. 2.2.4.3) и являются таковыми в рамках кинетического подхода. Не делает возможным кинетическое описание на фракталах и обращение к упомянутым выше производным дробного порядка. Скажем, временная производная дробного порядка от функции $u(x, t)$ определяется выражением [Гельфанд, Шилов, 1959. С. 148–149]

$$\frac{\partial^\lambda u(x, t)}{\partial t^\lambda} = \int_0^t u(x, s) \frac{(t-s)^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)} ds \quad (5.4.1)$$

($\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция; при целых λ определение (5.4.1) дает обычные производные), которое показывает, что тождественное равенство нулю плотности распределения $u(x, t)$ приводит к тождественному равенству нулю и ее временной производной дробного порядка.

5.5. Принцип дополнительности непрерывного и дискретного описаний необратимых явлений

Вспомним о ситуации с квантами-волнами. Взятые по отдельности, кванты и волны могут быть нереальными (ненаблюдаемыми), однако их совокупность реальна: мы всегда можем наблюдать то *или* другое. Точно так же, на мой взгляд, могут быть нереальными (ненаблюдаемыми) взятые по отдельности дискретные фракталы и непрерывные необратимые явления, реальна же их совокупность: мы всегда можем наблюдать то *или* другое. Реальность необратимой материальной системы *как она воспринимается субъектом исследования* расщеплена на две исключаящие и дополняющие друг друга ипостаси, каждая из которых проявляется лишь при соответствующей настройке теоретических и экспериментальных средств.

Параллель с микромиром представляется не случайной. По-видимому, можно говорить о двух проявлениях единого принципа дополнительности дискретного и непрерывного описаний, отражающего дуализм *дискретные частицы/сгустки непрерывных полей взаимодействий*. В квантовой механике — для микроявлений, в рассмотренном нами случае — для необратимых макроявлений. В области обратимых макроявлений теория

такого дуализма не проявляет, здесь динамический, или дискретный, и кинетический, или непрерывный, подходы сливаются — фазовая жидкость обратимой механической системы непрерывна, а ее степени свободы независимы.

Будучи результатом взаимодействия субъекта и объекта исследования, дуализм дискретного и непрерывного описаний представляет собой, на мой взгляд, следствие изначального несовершенства каждого из них. Мы в принципе не можем измерять бесконечно точно, т.е. в принципе не можем наблюдать дискретную структуру во всей ее бесконечной глубине. С другой стороны, и изначально несовершенно и непрерывное описание: оно предполагает дифференцирование, т.е. оперирование бесконечно малыми приращениями, тогда как на материальных системах этому препятствует реальная дискретность вещества. Будучи в принципе ущербными порознь, эти два описания, дополняя и исключая друг друга, образуют тандем, компенсирующий в совокупности их изъяны и фиксируемый в теории принципом дополнительности дискретного и непрерывного описаний:

«И дискретное, и непрерывное — модели, не исключающие, а дополняющие одна другую. По мнению А. И. Панченко [1975], обе они являются идеализациями» [Баранцев, 2003. С. 70].

Утверждая, что дискретное и непрерывное описания не только дополняют, но и *исключают* друг друга, мы следуем традиции, связанной с именами Нильса Бора и Вернера Гейзенберга [Гейзенберг, 1989. С. 22], утверждавших, что корпускулярная и волновая картины исключают друг друга, и рекомендовавших использовать их обе, переходя от одной к другой и обратно:

«Взаимное исключение дополнительных аспектов квантовых явлений, хотя и запрещало их *объединенное* использование, тем не менее предполагало их *совместное* употребление — в том смысле, что вместо одной объединенной картины необходимо было совместно использовать две картины (выделено И. С. Алексеевым. — С. Х.)» [Алексеев, 1978. С. 19].

Взаимное исключение кинетического и динамического подходов, запрещая их *одновременное* использование, также предполагает их *совместное* применение. Поскольку разные описания возникают «на бумаге» (в теории) с неизбежными передержками, включая математически строгое определение фрактала или математически не менее строгое определение непрерывной функции и гладкого многообразия, постольку они и исключают друг друга. Сами же реальные объекты «как они есть на самом деле» легко и непринужденно сочетают в своих свойствах дискретность и непрерывность.

Глава 6

На пути к фрактальной картине мира

За последние десятилетия установлено, что фрактальную природу имеет множество самых разных материальных систем — от угольной сажи и бронхов до скоплений звезд и галактик ¹⁾.

«Бенуа Мандельброт создал неевклидову геометрию негладких, шероховатых, зазубренных, изъеденных ходами, порами, трещинами и отверстиями, извилистых и тому подобное объектов, своего рода математических парий, по молчаливому уговору ранее исключавшихся из рассмотрения в пользу более благообразных, усредненных, сглаженных, отполированных, спрямленных объектов. Между тем именно такие неправильные объекты составляют подавляющее большинство объектов природы» [Данилов, 2006. С. 91–92].

По-видимому, можно говорить о фрактальной картине наблюдаемого мира, рывком к которой наука перешла в XXI в.

6.1. Широкая распространенность фрактальных (фракталоподобных) структур

При всей распространенности материальных фракталов в природе в литературе нет ясности относительно границ этой распространенности. Проведенный выше анализ позволяет очертить эти границы несколько более определенно: обратимые макросистемы с динамическим хаосом, т. е. *обратимые* статистические системы, имеют обычную структуру, *необратимые* статистические системы — фрактальную. Наука исподволь уже приучила нас к мысли, что практически все материальные макросистемы имеют статистическую природу, а их большинство совершает стохастическое (не регулярное) движение. С другой стороны, обратимые явления (типа сверхтекучести жидкого гелия или сверхпроводимости) крайне редки. Так что фрактальным оказывается практически весь материальный мир *в той его части, в которой господствует движение, т. е. материальный мир в его механической части.*

¹⁾ [Mandelbrot, 1975, 1977a–c, 1982, 1990; Капери, 1985; Chaos..., 1985; Chaos..., 1986; Barnskey, 1988; Fractals..., 1988; Voss, 1988, 1989; Chaos..., 1989; Fractals..., 1989; Голдбергер и др., 1990; Курдюмов, 1990; Burlando, 1990; Федер, 1991; Розгачева, 1993; Аршинов, Буданов, 1994; Курдюмов, Князева, 1994; Baryshev et al., 1994; Урицкий, Музалевская, 1995; Bunde, Halvin, 1995; Новое..., 1996; Капица и др., 1997; Малинецкий, 1997; Цицин, 1997; Аршинов, 1999; Nottale et al., 2000; Божокин, 2001; Фракталы..., 2001; Шредер, 2001; Потапов, 2002; Baryshev, Teerikorpi, 2002; Мандельброт, 2004; Данилов, 2006].

Фрактальность наблюдаемого мира в его механической части ограничена двумя связанными друг с другом обстоятельствами. Во-первых, как разъяснялось в гл. 5, фракталы возникают лишь при использовании соответствующего описания, которое может быть названо динамическим (синергетическим, дискретным); при использовании альтернативного описания (кинетического, или непрерывного) фракталы, т. е. множества нулевой меры (в единицах топологической размерности), не возникают.

Во-вторых, наблюдаемые в материальном мире структуры, которые сегодня принято идентифицировать как фракталы, «настоящими» фракталами не являются, поскольку их мера (а, следовательно, и плотность массы), измеренная с помощью трехмерных единиц измерения, *отлична от нуля* (о единственном исключении см. в разд. 6.2). Поэтому реальные материальные структуры не фрактальны, но только «фракталоподобны», хотя их расчетная размерность и меньше топологической размерности (т. е. 3). Практически дробные значения фрактальной размерности для реальных структур от дождевых облаков до скоплений галактик получают потому, что при этом применяются не строгие формулы типа (4.2.6)–(4.2.7), а приближенные типа (4.2.5). Размерность находят на некотором конечном интервале масштабов рассмотрения, когда длина ребер измерительных «кубиков» $\varepsilon \geq \varepsilon_{\min}$ и когда мера (в случае реальной структуры — плотность массы) фракталоподобной структуры, измеренная в единицах топологической размерности, отлична от нуля.

Сформулируем определяющее свойство фракталоподобных структур, объединяющее их с фракталами, как *иерархическую системность*, или *системную иерархичность*. Фрактал распадается на (под)системы, размеры которых и расстояния между которыми выдерживают определенную иерархию: чем большего размера (под)системы мы берем, тем больше расстояния между ними относительно размеров (под)систем.

Эта иерархичность подчиняется определенной математической закономерности — распределения фрактальных (под)систем по размерам и расстояниям между ними *негауссовы*. Негауссовость распределения проявляется в том, что при больших значениях переменной оно имеет форму распределения Ципфа

$$n(x) = \frac{C}{x^{1+\alpha}}, \quad 0 < x_0 \leq x \leq J, \quad 0 < \alpha < \infty \quad (6.1.1)$$

с небольшим значением показателя α .

Продemonстрируем генерирование негауссовых распределений фракталами. Определение фрактальной размерности (4.2.5) для числа $n(x)$ подструктур с линейным размером x дает выражение (заменяем в (4.2.5) ε на x , $M(\varepsilon)$ — на $n(x)$)

$$n(x) \sim \frac{1}{x^D}, \quad (6.1.2)$$

имеющее форму (6.1.1) с $\alpha = D - 1$. Поскольку собственная размерность D фракталов, размещенных в нашем трехмерном пространстве, меньше 3

(см. разд. 4.4), постольку показатель α генерируемых этими фракталами распределений Ципфа меньше 2, а сами эти распределения существенно негауссовы²⁾. Поскольку фракталы чрезвычайно распространены в наблюдаемом мире, постольку чрезвычайно распространены в нем и негауссовы распределения [Хайтун, 1983; 1989; 2005. Разд. 4.5.6, прил. 8].

Первопроходцы, как правило, видят открываемые ими явления несколько несфокусированно. Б. Мандельброт — не исключение: обнаружив феномен, который мы здесь называем системной иерархичностью, он стал не совсем точно трактовать его как самоподобие, считая, что структура фрактала повторяется во все меньших масштабах. Как об этом говорилось в разд. 4.5, фракталу, т. е. множеству с нулевой мерой в измерительных «кубиках» топологической размерности, не обязательно быть самоподобным.

Еще одним определяющим свойством фрактальных (фракталоподобных) структур является их «пучковый», или «мутовочный», характер, так что подсистемы данного иерархического уровня фрактала (скажем, звёзды в космических фракталах) образуют «пучок», или «мутовку», типов организации. Это является следствием мутовочного характера изменения во времени фрактальных систем, развитие которых осуществляется через каскад точек ветвления.

Вспомним, что через каскад точек ветвления часто осуществляется и изменение во времени фазовой траектории системы с динамическим хаосом — см. в разд. 2.4.4 о механизме Фейгенбаума. Это не просто параллель, — по-видимому, так и происходит необратимое развитие во времени реальных фрактальных (фракталоподобных) систем. Между ветвями мутовок возникают порой и рокадные (горизонтальные) связи, так что реальные фракталы имеют, скорее, не мутовочный, но «мутовочно-сетевой» характер.

Мутовочный характер имеет не только развитие отдельных «смертных» систем, но и эволюция всего наблюдаемого мира (см. разд. 6.3).

6.2. Вселенная — единственный «настоящий» фрактал

Позволяя бесконечное (мысленное) проникновение в свою структуру, Вселенная, судя по всему, представляет собой фрактал в самом строгом смысле этого слова и имея, в силу этого, равную нулю «бесконечную» плотность массы, т. е. плотность любого ее фрагмента при (мысленном) устремлении его объема к бесконечности стремится к нулю. В самом деле, расстояния между планетами Солнечной системы много больше размеров планет, расстояния между звёздами много больше размеров звезд, причем звёзды рассеяны в галактике гораздо реже, чем планеты расположены в Солнечной системе, а галактики рассеяны в нашей Метагалактике еще

²⁾ О генерировании фракталами распределения Ципфа говорят и авторы работ [Тимашев, 1995; Малинецкий, Потапов, 1996].

реже, чем звёзды в галактике. Приводит все это к тому, что средняя плотность вещества быстро падает до умопомрачительно малых величин при переходе от Солнца (плотность $1,416 \text{ г/см}^3$) к нашей Галактике (10^{-24} г/см^3) и нашей Метагалактике ($2 \cdot 10^{-31} \text{ г/см}^3$). Естественно предположить, что с неограниченным ростом объема фрагментов Вселенной их плотность стремится к нулю. Если Вселенная и на самом деле фрактальна, то ее «бесконечная» плотность тождественно равна нулю, хотя ее масса равна бесконечности.

К выводу о том, что «бесконечная» плотность Вселенной равна нулю, а ее масса — бесконечности, уже давно пришел коллега автора этих строк по ИИЕТ РАН Григорий Моисеевич Идлис [1956]. На мой взгляд, однако, без опоры на представления о фрактальности наблюдаемого мира (напомним, что понятие фрактала возникло в работах Б. Мандельброта только в 1975 г.) тезис о равенстве нулю «бесконечной» плотности Вселенной не имел шансов закрепиться в литературе. Он и не закрепился.

Как разъяснялось в разд. 4.7, данная структура фрактальна, имея нулевую плотность, если она сохраняет свои (фрактальные) свойства при сколь угодно малых размерах измерительных «кубиков». Именно так и обстоит дело со Вселенной: с точки зрения наблюдателя и наблюдаемого им мира, размеры которых устремлены к бесконечности, размеры наших конечных измерительных «кубиков» стремятся к нулю.

Представления о фрактальности Вселенной понемногу обживаются космологами³⁾. Понимание того, что из фрактальности Вселенной следует равенство ее «бесконечной» плотности нулю, пока тормозится, однако, идущим от Б. Мандельброта заблуждением, о котором шла речь в разд. 4.4 и согласно которому фрактальная размерность *больше* топологической. Иллюстрацией может служить статья И. К. Розгачевой [1993], которая получает для фрактальной размерности Солнца, Солнечной системы, нашей Галактики и нашей Метагалактики значения, *превышающие* топологическую их размерность. Скажем, фрактальная размерность нашей Метагалактики оказывается у нее равной 10, т. е. большей 3.

Ошибка Розгачевой состоит в том, что, записывая формулу Мандельброта (4.2.5) для размерности фрактала в виде

$$d = \frac{\ln \mu}{\ln \varepsilon}, \quad (6.2.1)$$

она почему-то понимает под μ меру *состояния*, приравнивая ее, с опорой на эргодическую гипотезу, времени τ пребывания системы в данном состоянии: $\mu \sim \tau$. Это, конечно, красиво, но абсолютно неверно, поскольку $M(\varepsilon)$ в формуле Мандельброта — это число d -мерных кубиков с длиной ребра ε , коими покрывается данное фрактальное множество для определения его *меры*, в качестве оценки которой выступает величина $M(\varepsilon)\varepsilon^d$

³⁾ [Coleman, Pietronero, 1992; Розгачева, 1993; Baryshev et al., 1994; Цицин, 1997; Потапов, 2002; Baryshev, Teerikorpi, 2002].

(см. соотношение (4.2.3)). Понятно, что мера (вероятность) *состояния* к мере («объему») *фрактала*, каковым является, скажем, заполняющее Вселенную вещество, не имеет отношения.

Более корректные измерения фрактальной размерности космических структур, базирующиеся на формуле Мандельброта (4.2.5), дают вполне разумные значения. Так, согласно работам [Coleman, Pietronero, 1992. P. 339; Baryshev et al., 1994. P. 455, 458], фрактальная размерность галактических кластеров равна в одном случае 1,4, в другом — 1,9. Согласно обзорной монографии [Baryshev, Teerikorpi, 2002. P. 265, 268, 313], фрактальная размерность межзвездных облаков составляет около 2,3 или 2,4, межгалактических облаков — около 2,5, галактических структур — от 1,8 до 2,1.

Если Вселенная и на самом деле является единственным в окружающем нас реальном мире «настоящим» фракталом с равной нулю «бесконечной» плотностью, то это позволяет отказаться от целого ряда бытующих сегодня в космологии гипотез. Прежде всего, будучи бесконечно разреженной, фрактальная Вселенная не может быть замкнутой. Идея замкнутой Вселенной, полагаю я, в корне ошибочна, игнорируя ее фрактальность. Исчезает и такой источник головной боли космологов, как гравитационная неустойчивость Вселенной. Любой конечный фрагмент Вселенной из-за конечности его массовой плотности нестационарен, вся же бесконечная Вселенная, имея нулевую плотность, стационарна в том смысле, что все ее фрагменты не могут одновременно расширяться или сжиматься. Это значит, что *Вселенная не переживала Большого взрыва*, который, делаю я вывод, испытала только наша Метагалактика.

Перенесенный со всей Вселенной на нашу Метагалактику, Большой взрыв теряет свою загадочность: почему бы ей было однажды и не взорваться? Легко представить себе, к примеру, что наша Метагалактика ранее сжималась и, дойдя до некоторой стадии сжатия, стала расширяться. Взорвалась. Подобно тому как взрывается сверхновая в результате коллапса ядра звезды, но в гораздо больших масштабах.

Наблюдаемая фракталоподобность нашей Метагалактики и гипотетическая фрактальность Вселенной естественным образом сочетаются с однородностью наблюдаемого мира на расстояниях порядка или более 300 млн св. лет. О макрооднородности Вселенной и нашей Метагалактики можно говорить, сравнивая фрагменты *равного* объема, и нельзя, сравнивая фрагменты *разных* объемов: с ростом объема сравниваемых фрагментов их плотность массы резко падает, достаточно же большие фрагменты равного объема имеют равные плотности, и тем более равные, чем больше объем сравниваемых фрагментов.

Пока мы полагаем, что Большой взрыв претерпела вся бесконечная Вселенная, отсутствие у нее центра расширения и ее макрооднородность объясняются Космологическим принципом, согласно которому разные участки и разные направления во Вселенной равноправны. Поскольку же мы пришли к выводу, что Большой взрыв претерпела лишь наша конечная

Метагалактика, то следует признать и то, что в ее пределах Космологический принцип не работает, как он не работает в пределах других конечных космических систем. Когда в однородной среде или в вакууме взрывается тело конечных размеров, будь то сверхновая звезда или тротиловый заряд, то такой взрыв имеет центр и радиальные градиенты давления, плотности и температуры. Ничего подобного при расширении нашей Метагалактики не наблюдается, и это требует объяснения. Моя точка зрения состоит в том, что макрооднородность нашей Метагалактики и отсутствие у нее центра расширения являются свидетельством того, что она является (чрезвычайно разреженной из-за ее размеров) черной дырой.

Внутреннее пространство черной дыры замкнуто на себя гравитацией, будучи конечным по объему, но безграничным. В качестве геометрической аналогии трехмерного замкнутого безграничного пространства в общей теории относительности используется двумерная поверхность трехмерной сферы — в обоих случаях пространство конечно по объему (по площади), но не имеет границ. Такова, к примеру, поверхность земного шара, однако в нашем случае сфера еще и расширяется. Поместим на ее поверхность двумерный газ взаимодействующих точек, имитирующий трехмерный «газ» звезд и галактик. Если эти взаимодействия подобны реальным, то подобно тому, как это происходит в наблюдаемом мире, точки будут образовывать фракталоподобные структуры. Из-за симметрии задачи газ на двумерной сферической поверхности не будет иметь выделенных участков и направлений, оставаясь однородным и изотропным в том смысле, что находящиеся на ней равные по площади участки будут иметь примерно одинаковую плотность точек, тогда как участки большей площади будут иметь меньшую плотность. По мере расширения сферы плотность газа на ее поверхности уменьшается, точки разбегаются, не имея центра расширения. Если радиус сферы растет с постоянной скоростью, точки на сфере разбегаются в соответствии с законом Хаббла в его двумерном варианте.

В самом деле, пусть радиус сферы R растет с постоянной скоростью V . Тогда расстояние r между двумя точками на сфере увеличивается со скоростью

$$v = V \frac{r}{R} = \frac{V}{R} r = \frac{1}{t} r = H r. \quad (6.2.2)$$

Это и есть закон Хаббла.

Все это, только в трехмерном пространстве, мы и наблюдаем в нашей Метагалактике. Не исключено, однако, что наша Метагалактика начинает *размыкаться*, чему, возможно, служит свидетельством ускорение космологического расширения, открытое в 1998–1999 гг. и проявляющееся на расстояниях, превышающих миллиард световых лет от Земли. Если наша космологическая концепция верна и поскольку маловероятно, чтобы Земля (наша Галактика) находилась точно в центре нашей Метагалактики, то

в этом ускорении должна наблюдаться *сферическая асимметрия*, что может быть подвергнуто проверке посредством астрономических наблюдений.

Подробнее авторская версия космологической картины мира излагается в работах [Хайтун, 2004а, б; 2005. Гл. 6; 2006].

6.3. Обобщение на непространственные фракталы

До сих пор мы говорили о фракталах, в которых подструктуры разнесены в пространстве на расстояния тем большие, чем выше ранг подструктур. Назовем такие фракталы *пространственными*. Подструктуры разделены в них пространственными «барьерами», высота (проницаемость) которых определяется расстоянием между подструктурами.

Мы видели, однако, что синергетика использует в качестве координат переменные самой разной природы. Скажем, в синергетических уравнениях для химических систем, начиная с уравнений Тьюринга (3.2.1), в качестве независимых переменных фигурируют концентрации веществ, в уравнениях Лоренца (3.2.6) — скорость конвективного потока и разности температур, в уравнениях Вольтерра (3.3.7) — численности биологических видов и т. д.:

«Динамическая система является моделью какой-либо реальной физической, химической, биологической, социальной или любой другой системы» [Безручко и др., 2005. С. 75].

«Под динамической системой условились понимать систему любой природы (физическую, химическую, биологическую, социальную, экономическую и т. д.), состояние которой изменяется (дискретно или непрерывно) во времени» [Данилов, 2006. С. 16].

Так что в общем случае фракталы (фракталоподобные структуры) могут быть и *непространственными*. И пространственные, и непространственные фракталы размещены в пространстве, различаясь природой «барьеров», которые разделяют фрактальные подструктуры и которые во втором случае являются непространственными. Такими непространственными «барьерами» разной проницаемости, разделяющими казалось бы непрерывно переходящие друг в друга системы на дискретные (фрактальные) структуры, служат, например, клеточные и субклеточные мембраны, клановые, этнические и государственные границы. (Под)системы, составляющие непространственные фракталы, негауссово распределены по значениям непространственных величин, характеризующих (под)системы и «барьеры» между ними. Примером непространственной фрактальной (фракталоподобной) структуры, генерирующей негауссовое распределения, является нейронная сеть мозга.

Если принять во внимание непространственные фракталы, то фрактальным оказывается практически весь наблюдаемый мир, включая ту его часть, в которой не господствует движение. Пространственные фракталы

чаще встречаются в неорганическом мире, в котором нередко бывает применимо пространственное (механическое) описание, для органического же и социального миров более характерны непространственные фракталы.

Определяющие свойства фракталов — системная иерархичность и мутовочность — сохраняются и в случае непространственных фракталов. Именно так устроен, к примеру, органический мир, представляющий собой гигантскую иерархическую систему. Его мутовочность проявляется в том, что в каждый текущий момент времени органические подсистемы любого иерархического уровня образуют пучок, или мутовку, типов организации, между которыми отсутствуют промежуточные формы. Такова, прежде всего, систематика (классификационное древо) органического мира, в которой принято выделять такие уровни как царство, тип (отдел), класс, отряд (порядок), семейство, род, вид и которая упорядочивает множество организмов (особей).

Однако в органическом мире существуют не только организмы, но и системы великого множества других типов и уровней. Мутовочный характер имеет внутреннее устройство многоклеточного организма, в котором можно выделить мутовку функциональных систем органов, далее идут мутовки органов, тканей (эпителий, соединительная, мышечная, нервная), клеток. Таково же устройство клетки, органоиды (органеллы) которой также образуют мутовку (хромосомы, рибосомы, митохондрии, эндоплазматическая сеть, комплекс Гольджи, лизосомы, клеточная мембрана). Иерархические системы образуют гены и хромосомы, биоценозы и биогеоценозы и т. д. и т. п.

Поскольку реальные структуры, за исключением всей Вселенной (см. разд. 6.2), только фракталоподобны, а многие из них, особенно в органическом и социальном мире, к тому же являются непространственными, постольку математический аппарат синергетики лишь в очень малой степени применим для их описания. Сегодня, в частности, создается большое количество математических моделей для описания социальных явлений. В том числе, и в рамках синергетики, или «нелинейной динамики»⁴⁾. На мой взгляд, все эти модели пока что имеют только качественное значение уже по той причине, что в социальной области не отработаны методы измерения, прежде всего — метрические модели, связывающие индикаторы с латентами [Хайтун, 1989; Haitun, 1992]. Но это общий изъян математического описания социальных явлений, не случайно здесь так распространены качественные (номинальные и ранговые) измерительные шкалы.

Что касается самой синергетики, то ее изъяном является феноменологический характер — ученые умеют строить фрактал «на бумаге», численно решая данное синергетическое уравнение, однако неизвестно,

⁴⁾ [Капица и др., 1997; Синергетическая..., 2003; Трубецков, 2004; Князева, Курдюмов, 2005].

какие синергетические уравнения справедливы для той или иной реальной системы, как они связаны с действующими в ней взаимодействиями и как эти уравнения видоизменяются вместе со взаимодействиями в ходе саморазвития системы. Фракталы порождаются существенно необратимыми (несимметричными по времени) процессами, сердцевину которых составляют взаимопревращения разных форм энергии (взаимодействий) и теории которых до сих пор не существует.

Тем не менее феноменологическое и во многом качественное фрактальное описание реальных явлений дает не так уж и мало, позволяя понять и описать, пусть на вербальном уровне, основные закономерности эволюции наблюдаемого мира [Хайтун, 2005].

В разд. 6.1 говорилось, что развитие фрактальных (фракталоподобных) «смертных» систем имеет мутовочный характер, протекая через каскад точек ветвления. Это верно и в отношении всего наблюдаемого мира, эволюция которого также фрактальна, имея мутовочный характер, т. е. протекая через каскад точек ветвления. Мувочный характер эволюции — одна из центральных идей знаменитой монографии Пьера Тейяра де Шардена «Феномен человека» [Teilhard de Chardin, 1955]. Концепция мутовочной эволюции постепенно вытесняет сегодня концепцию линейного прогресса.

Между ветвями эволюционных мутовок часто возникают рокадные связи. В связи с этим, говорят о ретикулярной (от лат. *reticulum* — сеточка), или сетчатой (сетевой), эволюции. В силу общей направленности эволюции в сторону роста разнообразия, однако, мутовочность (дивергентность) преобладает в эволюции над конвергентностью и сетевидностью. Поэтому мы считаем более правильным говорить о *мутовочно-сетевом* характере эволюции, который является закономерным следствием ее направленности в сторону роста связанности «всего со всем».

Ветвление любой эволюционной линии — органического вида, процесса или социального строя — лежит в русле общих законов эволюции [Хайтун, 2005. Разд. 4.6.1]. Во-первых, такое ветвление само по себе направлено по вектору эволюции в сторону роста разнообразия. Во-вторых, оно увеличивает шансы на эволюционное выживание данной мутовки, т. е. на эволюционный прорыв хотя бы одной ее ветви. Чем «кудрявее» мутовка, тем перспективнее она в эволюционном плане.

6.4. Почему наблюдаемый мир фрактален?

Как всегда, когда речь заходит о фундаментальных свойствах природы, ответ получается «многомерным». Во-первых, Вселенная фрактальна потому, что это сообщает ей нулевую «бесконечную» плотность, обеспечивая гравитационную устойчивость (см. разд. 6.2).

Во-вторых, фракталоподобная структура, т. е. структура, обладающая иерархичной системностью, обеспечивает реальным системам максимальную выживаемость при выходе из строя их частей. При «поломке» какой-

то из составляющих ее малых подсистем из строя выходит она одна, максимум — иерархически и рокадно ближайшие к ней структуры. Если же система устроена не фракталоподобно, то выход из строя ее части грозит гибелью ей всей. Когда неадаптивным оказывается один «вид» подсистем, вперед выдвигаются другие. Именно так функционирует, например, лес, в котором «поломка» доминирующего органического вида приводит лишь к его замене другим, бывшим до того на периферийных ролях, вся же совокупность населяющих лес организмов продолжает здравствовать.

Такое устройство мир приобрел в ходе эволюции — нефрактально организованные его элементы попросту не выживали. И здесь возникает третья компонента ответа на обсуждаемый вопрос: фракталоподобная структура наблюдаемого мира является, на мой взгляд, результатом работы эволюционного принципа минимакса, согласно которому в каждом макроскопическом фрагменте мира максимизируется интенсивность метаболизмов (взаимодействий), ведущих к последующей интенсификации метаболизмов, и минимизируется интенсивность метаболизмов, не ведущих к дальнейшей интенсификации метаболизмов [Хайтун, 2005. Разд. 4.3]. С использованием понятия энтропии этот принцип может быть сформулирован следующим образом: в ходе эволюции в каждом макроскопическом фрагменте наблюдаемого мира максимизируется скорость возникновения энтропии, ведущего к последующему возникновению энтропии, и минимизируется скорость возникновения энтропии, не ведущего к последующему возникновению энтропии.

Разные формы взаимодействий приписаны к материальным структурам разных типов и уровней [Там же. Разд. 4.2.3]. Поэтому фрактальность (фракталоподобность) наблюдаемого мира, означающая существование в нем структур разных форм, типов и уровней, обеспечивает существование самых разных форм взаимодействий. Чем больше разнообразие форм взаимодействий, тем более разнообразными и интенсивными могут быть процессы превращения разных форм взаимодействий друг в друга. В нефрактальной, скажем однородной, системе разнообразие форм взаимодействий невелико, вследствие чего процессы превращения разных форм взаимодействий друг в друга не могут быть интенсивными и/или длительными во времени. Во фрактальных структурах интенсивность этих процессов может быть чрезвычайно большой и тем большей, чем более фрактальна данная структура, т. е. чем более ее фрактальная размерность отличается от топологической, т. е. чем она меньше ее (см. разд. 4.4). Более фрактальные структуры эволюционируют более интенсивно, чего и требует принцип минимакса.

Таким образом, *вектор эволюции направлен в сторону уменьшения размерности реальных фрактальных (фракталоподобных) структур*. Эволюция всей Вселенной, по идее, также должна протекать в сторону уменьшения ее (Вселенной) фрактальной размерности. Если это и на самом деле так, то в ходе эволюции Вселенной нарастают и все проявления ее фрактальности, включая системную иерархичность, мутовочность и пр.

Литература

1. *Алексеев И. С.* Концепция дополнителности. (Историко-методологический анализ). М.: Наука, 1978. 276 с.
2. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. М.; Л.: Физматгиз, 1959. 915 с.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. М.: Наука, 1966. 568 с.
4. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967. 487 с.
5. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. М.: Наука, 1967. 210 с.
6. *Аносов Д. В.* Вступительная статья // Гладкие динамические системы. М.: Мир, 1977. С. 7–31.
7. *Аносов Д. В., Синай Я. Г.* Некоторые гладкие эргодические системы // Усп. матем. наук. 1967. Т. 22. № 5. С. 107–172.
8. *Арансон И. С., Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Развитие хаоса в ансамблях динамических структур // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 92–105.
9. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели II. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // Усп. матем. наук. 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.
10. *Арнольд В. И.* О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // Докл. АН СССР. 1964. Т. 156. № 1. С. 9–12.
11. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 431 с.; М.: УРСС, 2003. 416 с.
12. *Арнольд В. И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975. 239 с.
13. *Арнольд В. И.* Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983. 80 с.; М.: УРСС, 2004. 128 с.
14. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: ВИНТИ, 1988. 304 с.; М.: УРСС, 2002. 416 с.
15. *Аршинов В. И.* «Самоорганизующаяся Вселенная» Э. Янча и глобальный эволюционизм // О современном статусе идеи глобального эволюционизма. М.: ИФАН, 1986. С. 91–104.
16. *Аршинов В. И.* Синергетика как феномен постнеклассической науки. М.: ИФ РАН, 1999. 203 с.
17. *Аршинов В. И., Буданов В. Г.* Синергетика — эволюционный аспект // Самоорганизация и наука: Опыт философского осмысления. М.: ИФАН, 1994. С. 229–242.
18. *Афреймович В. С., Быков В. В., Шальников Л. П.* О возникновении и структуре аттрактора Лоренца // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. С. 336–339.

19. *Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Парадоксы мира нестационарных структур. М.: Знание, 1985. 48 с.
20. *Балеску Р.* Равновесная и неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1978. Т. 1. 406 с.; Т. 2. 400 с.
21. *Баранцев Р. Г.* Синергетика в современном естествознании. М.: УРСС, 2003. 144 с.
22. *Безручко Б. П., Короновский А. А., Трубецков Д. И., Храмов А. Е.* Путь в синергетику. Экскурс в десяти лекциях. М.: КомКнига/URSS, 2005. 304 с.
23. *Белоусов Б. П.* Периодически действующая реакция и ее механизм // Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Изд-во ГГУ, 1951. С. 76; Колебания и бегущие волны в химических системах. М.: Мир, 1988. С. 648–656.
24. *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 128 с.
25. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966. 576 с.
26. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* Автоволновые процессы в распределенных системах // Усп. физич. наук. 1979. Т. 128. С. 625–666.
27. *Вдовиченко Н. В.* Развитие фундаментальных принципов статистической физики в первой половине XX в. М.: Наука, 1986. 160 с.
28. *Вершик А. М., Юзвинский С. А.* Динамические системы с инвариантной мерой // Математический анализ — 1967: Итоги науки. 15. М.: ВИНТИ, 1969. С. 133–187.
29. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. 318 с.; М.: УРСС, 2002. 320 с.
30. *Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Самарский А. А.* Процессы в открытых диссипативных системах. М.: Знание, 1988. 32 с.
31. *Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И.* Автоструктуры. Хаотическая динамика ансамблей // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 7–44.
32. *Гейзенберг В.* Физика и философия. Часть и целое. М.: Наука, 1989. 400 с.
33. *Гельфанд И. М., Шилев Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1959. 470 с.
34. Гладкие динамические функции. М.: Мир, 1977. 257 с.
35. *Гленсдорф П., Пригожин И.* Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций. М.: Мир, 1973. 280 с.; М.: УРСС, 2003. 280 с.
36. *Голдбергер Э. Л., Ригни Д. Р., Уэст Б. Дж.* Хаос и фракталы в физиологии человека // В мире науки. 1990. № 4. С. 25–32.
37. *Гончар В. Ю., Тур А. В., Яновский В. В.* Кинетика случайных фракталов // Проблемы теории твердого тела. Киев: Наукова думка, 1991. С. 118–129.
38. *Гуревич Б. М., Синай Я. Г.* Алгебраические автоморфизмы тора и цепи Маркова // Биллингсли П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. С. 205–233.
39. *Гуотми А., Каннингем Р.* Действие кристаллической грани в катализе // Катализ. Исследование поверхности катализаторов. М., 1960. С. 74–117.

40. Данилов Ю. А. Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение. М.: КомКнига/URSS, 2006. 208 с.
41. Данилов Ю. А., Кадомцев Б. Б. Что такое синергетика? // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 5–16.
42. Делокаров К. Х. Синергетика и познание социальных трансформаций // Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. М.: Прогресс-Традиция, 2003. С. 18–35.
43. Денбиг К. К вопросу об энтропии, беспорядке и дезорганизации // Знание — сила. 1995. № 9. С. 43–51.
44. Динабург Е. И. Соотношение между топологической энтропией и метрической энтропией // Докл. АН СССР. 1970. Т. 190. С. 19–22.
45. Динабург Е. И. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем // Известия АН СССР. Сер. матем. 1971. Т. 35. С. 324–366.
46. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания. М.: Наука, 1974. 178 с.
47. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М.: Наука, 1970. 143 с.
48. Заславский Г. М. Стохастичность квантовых систем // Нелинейные волны. Самоорганизация. М.: Наука, 1983. С. 96–107.
49. Заславский Г. М. Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984. 272 с.
50. Заславский Г. М., Натензон М. Я., Петровичев Б. А. и др. Особенности образования стохастического слоя и стохастической паутины. М.: Ин-т космич. иссл., 1986. 25 с.
51. Заславский Г. М., Чириков Б. В. Стохастическая неустойчивость нелинейных колебаний // Усп. физич. наук. 1971. Т. 105. С. 3–39.
52. Зубарев Д. Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. 415 с.
53. Баланкин А. С., Бунин И. Ж., Оксогоев А. А. Синергетика и фракталы в материаловедении. М.: Наука, 1994. 383 с.
54. Идлис Г. М. Теория относительности и структурная бесконечность Вселенной // Астрон. журн. 1956. Т. 33. № 4. С. 622–626.
55. Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973. 471 с.
56. Кадомцев Б. Б. Динамика и информация // Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987. С. 45–53.
57. Кадомцев Б. Б., Рязанов А. И. Что такое синергетика? // Природа. 1983. № 8. С. 3–11.
58. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика и прогнозы будущего. М.: Наука, 1997. 285 с.; М.: УРСС, 2003. 288 с.
59. Карери Дж. Порядок и беспорядок в структуре материи. М.: Мир, 1985. 232 с.
60. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 407 с.; М.: УРСС, 2003. 272 с.
61. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Основания синергетики. Синергетическое мировидение. М.: КомКнига/URSS, 2005. 240 с.
62. Колебания и бегущие волны в химических системах. М.: Мир, 1988. 720 с.

63. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом возмущении функции Гамильтона // Докл. АН СССР. 1954. Т. 98. С. 527–530.
64. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизм пространства Лебега // Там же. 1958. Т. 119. С. 861–864.
65. Колмогоров А. Н. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // Там же. 1959. Т. 124. С. 754–755.
66. Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ϵ -энтропия и ϵ -емкость множеств в функциональных пространствах // Усп. матем. наук. 1959. Т. 14. № 2. С. 3–86.
67. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 831 с.
68. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. 383 с.
69. Крайтчиленд Д. П., Фармер Дж. Д., Паккард Н. Х., Шоу Р. С. Хаос // В мире науки. 1987. № 2. С. 16–28.
70. Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2000. 352 с.
71. Круг Г. Й., Польман Л. Вильгельм Оствальд на подходе к созданию синергетической школы // Концепция самоорганизации в исторической ретроспективе. М.: Наука, 1994. С. 36–54.
72. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. 207 с.; М.: УРСС, 2003. 200 с.
73. Кудрявцев И. К. Химические нестабильности. М.: Изд-во МГУ, 1987. 252 с.
74. Кудряшов Н. А. Нелинейные волны и солитоны // СОЖ. 1997. № 2. С. 85–91; http://www.issep.rssi.ru/pdf/9702_085.pdf.
75. Кузнецов В. И. Концепция самоорганизации в химии катализа (на материале отечественных исследований) // Концепция самоорганизации в исторической ретроспективе. М.: Наука, 1994. С. 55–85.
76. Кузнецова О. В. Атомистическая концепция строения вещества в XIX веке. М.: Наука, 1983. 160 с.
77. Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизации в сложных системах. М.: ИПМ, 1990. 45 с.
78. Курдюмов С. П., Князева Е. Н. У истоков синергетического видения мира // Самоорганизация и наука: Опыт философского осмысления. М.: ИФАН, 1994. С. 162–286.
79. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1986. Т. 26. С. 1189–1205.
80. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. М.: Физматгиз, 1958. 206 с.
81. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. 528 с.
82. Ленфорд О. Приложение к статье Р. Вильямса «Изображение аттрактора Лоренца, полученное с помощью компьютера» // Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 73–74.
83. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1950. 471 с.

84. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. М.: Наука, 1997. 253 с.; М.: УРСС, 2005. 312 с.
85. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Нелинейность. Новые проблемы, новые возможности // Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. М.: Наука, 1996. С. 165–190.
86. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: УРСС, 2000. 336 с.
87. *Мандельброт Б.* Самоаффинные фрактальные множества // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 9–47.
88. *Мандельброт Б.* Фракталы, случай и финансы. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 256 с.
89. *Марсден Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
90. Математический энциклопедический словарь. М.: СЭ, 1988. 847 с.
91. Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.: Наука, 1986. 310 с.
92. *Монин А. С.* О природе турбулентности // Усп. физич. наук. 1978. Т. 125. С. 97–122.
93. *Мухин Р. Р.* К истории развития нелинейной динамики. Динамический хаос (50-е – начало 60-х годов XX века) // Научное сообщество физиков СССР. 1950–1960-е гг.: Документы, воспоминания, исследования. Вып. 1. СПб.: РХГА, 2005. С. 433–470.
94. *Назаров В. И.* Эволюция не по Дарвину: Смена эволюционной модели. М.: КомКнига/URSS, 2005. 520 с.
95. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ОГИЗ, 1947. 448 с.; М.: УРСС, 2004. 552 с.
96. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.
97. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение. М.: Мир, 1990. 342 с.; М.: УРСС, 2003. 344 с.
98. Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. 1996. М.: Наука, 1996. 263 с.
99. *Орнштейн Д.* Эргодическая теория, случайность и динамические системы. М.: Мир, 1978. 168 с.
100. *Панченко А. И.* Континуум и физика. Философские аспекты. М.: Наука, 1975. 117 с.
101. *Песин Ю. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория // Усп. матем. наук. 1977. Т. 32. № 4. С. 55–112.
102. *Петров Ю. П.* Энтропия и неупорядоченность // Природа. 1970. № 2. С. 71–74.
103. *Пинскер М. С.* Понятие регулярности случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1959. Т. 4. С. 475–476.
104. *Пинскер М. С.* Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией // Докл. АН СССР. 1960. Т. 133. С. 1025–1026.
105. *Питаевский А. С., Рабинович М. И.* О странных аттракторах в физике // Нелинейные волны. М.: Наука, 1979. С. 176–192.

106. *Полак Л. С.* Людвиг Больцман и развитие молекулярно-кинетической теории газов и статистической механики // *Больцман Л.* Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 476–557.
107. *Полак Л. С., Михайлов А. С.* Самоорганизация в неравновесных физико-химических системах. М.: Наука, 1983. 285 с.
108. *Потапов А. А.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.
109. *Постон Т., Стьюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. М.: Мир, 1980. 607 с.
110. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. М.: ИЛ., 1960. 127 с.
111. *Пригожин И.* Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1964. 314 с.; М.: УРСС, 2005. 312 с.
112. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. 328 с.; М.: КомКнига/URSS, 2006. 296 с.
113. *Пригожин И.* Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. Ижевск: Ижевская респуб. тип., 1999. 216 с.
114. *Пригожин И.* (Ред.) Человек перед лицом неопределенности. М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. 304 с.
115. *Пригожин И.* Определено ли будущее? М.: Ин-т компьютер. исслед., 2005. 240 с.
116. *Пригожин И., Конденуди Д.* Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. М.: Мир, 2002. 464 с.
117. *Пригожин И., Николис Г.* Биологический порядок, структура и неустойчивость // Усп. физич. наук. 1973. Т. 109. С. 517–544.
118. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок их хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. 432 с.; М.: КомКнига/URSS, 2005. 296 с.
119. *Пригожин И., Стенгерс И.* Время, хаос, квант. М.: Прогресс, 1994. 266 с.; М.: КомКнига/URSS, 2005. 232 с.
120. *Рабинович М. И.* Стохастические автоколебания и турбулентности // Усп. физич. наук. 1978. Т. 125. С. 123–168.
121. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1992. 456 с.
122. *Розгачева И. К.* Фракталы в Космосе // Земля и Вселенная. 1993. № 1. С. 10–16.
123. *Романовский Ю. М., Степанова Н. В., Чернавский Д. С.* Математическая биофизика. М.: Наука, 1984. 304 с.
124. *Рохлин В. А.* Аксиоматическое определение энтропии преобразования с инвариантной мерой // Докл. АН СССР. 1963. Т. 148. С. 779–781.
125. *Рохлин В. А.* Лекции по энтропийной теории преобразования с инвариантной мерой // Усп. матем. наук. 1967. Т. 22. № 5. С. 3–56.
126. *Рохлин В. А., Синай Я. Г.* Построение и свойства инвариантных информационных разбиений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141. С. 1038–1041.
127. *Руденко А. П.* Теория саморазвития открытых каталитических систем. М.: Изд-во МГУ, 1969. 276 с.

128. Руденко А. П. Физико-химические основания химической эволюции // Журн. физич. химии. 1983. Т. 57. С. 1597–1608; 2641–2656; 1987. Т. 61. С. 1457–1471.
129. Руденко А. П. Самоорганизация и синергетика // Синергетика. Т. 3. Самоорганизация и синергетика: Идеи, подходы, перспективы. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 61–99.
130. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. М.: Физматлит, 2000. 272 с.
131. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.: Мир, 1971. 367 с.
132. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Ахромеева Т. С., Малинецкий Г. Г. Нелинейные явления и вычислительный эксперимент // Вестн. АН СССР. 1985. № 9. С. 64–77.
133. Симонов А. А. Исследование бифуркаций в некоторых динамических системах методами символической динамики // Докл. АН СССР. 1978. Т. 240. С. 1297–1300.
134. Синай Я. Г. О понятии энтропии динамической системы // Там же. 1959а. Т. 124. С. 768–771.
135. Синай Я. Г. О потоках с конечной энтропией // Там же. 1959б. Т. 125. С. 1200–1202.
136. Синай Я. Г. Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром // Известия АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. С. 899–924.
137. Синай Я. Г. Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой // Докл. АН СССР. 1962. Т. 147. С. 797–800.
138. Синай Я. Г. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики // Там же. 1963. Т. 153. С. 1261–1264.
139. Синай Я. Г. О слабом изоморфизме преобразований с инвариантной мерой // Матем. сб. 1964. Т. 63. С. 28–42.
140. Синай Я. Г. Классические динамические системы со счетнократным лебеговским спектром // Известия АН СССР. 1966. Т. 30. С. 15–61.
141. Синай Я. Г. Динамические системы с упругими отражениями. Эргодические свойства рассеивающих бильярдов // Усп. матем. наук. 1970. Т. 25. № 2. С. 141–192.
142. Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. М.: Прогресс-Традиция, 2003. 584 с.
143. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 2. М.: ВИНТИ, 1985. 310 с.
144. Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. 253 с.
145. Тимашев С. Ф. Проявления макрофлуктуаций в динамике нелинейных систем // Журн. физич. химии. 1995. Т. 69. № 8. С. 1349.
146. Тоффлер О. Наука и изменение // Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. М.: Прогресс, 1986. С. 11–33.
147. Трофименко А. П. Белые и черные дыры во Вселенной. Минск: Университетское изд-во, 1991. 174 с.
148. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Колебания и волны. М.: УРСС, 2003. 220 с.
149. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры. М.: УРСС, 2004. 240 с.

150. Уленбек Дж, Форд Дж. Лекции по статистической механике. М.: Мир, 1965. 307 с.
151. Урицкий В. М., Музалевская Н. И. Фрактальные структуры и процессы в биологии // Биомедицинская информатика. СПб.: СПИИ РАН, 1995. С. 84–129.
152. Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
153. Физика. Большой энциклопедический словарь. М.: БРЭ, 1999. 944 с.
154. Фракталы и циклы развития систем. Материалы пятого Всероссийского научного семинара «Самоорганизация устойчивых целостностей в природе и обществе». Томск: Изд-во ИОМ СО РАН, 2001. 187 с.
155. Хайтун С. Д. Наукометрия: Состояние и перспективы. М.: Наука, 1983. 344 с.
156. Хайтун С. Д. Проблемы количественного анализа науки. М.: Наука, 1989. 280 с.; Количественный анализ социальных явлений. М.: КомКнига/URSS, 2005. 277 с. (2-е изд., название изменено).
157. Хайтун С. Д. Реальны ли фракталы? Принцип дополнительности в статистической теории необратимых процессов // Логика, методология, философия науки. VII. М.; Обнинск: Отделение философии, права, социологии и психологии РАН и др., 1995. С. 118–123.
158. Хайтун С. Д. Механика и необратимость. М.: Янус, 1996. 448 с.
159. Хайтун С. Д. Место синергетики в структуре физического знания // Исследования по истории физики и механики. 1995–1997. М.: Наука, 1999. С. 236–267.
160. Хайтун С. Д. Синергетика: историко-методологический очерк // Философия науки в историческом контексте. СПб.: РХГИ, 2003. С. 344–388.
161. Хайтун С. Д. Наша Метагалактика — расширяющаяся черная (белая) дыра: Аргументы против трактовки Большого взрыва как акта творения // Замысел Бога в теориях космологии. М.; СПб.: Изд-во С.-Петербургского гос. ун-та, 2004а. С. 156–178.
162. Хайтун С. Д. Эволюция Вселенной // Вопросы философии. 2004б. № 10. С. 74–92.
163. Хайтун С. Д. Феномен человека на фоне универсальной эволюции. М.: КомКнига/URSS, 2005. 533 с.
164. Хайтун С. Д. Эволюция Вселенной и нашей Метагалактики // Историко-астрономические исследования. М.: Наука, 2006. С. 259–304.
165. Хакен Г. Синергетика как мост между естественными и социальными науками // Синергетическая парадигма. Человек и общество в условиях нестабильности. М.: Прогресс-Традиция, 2003. С. 106–122.
166. Хинчин А. Я. Математические основания статистической механики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1943. 128 с.
167. Цаллис К. Об измерении фрактальных размерностей по физическим свойствам // Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. С. 98–105.
168. Цицин Ф. А. Фрактальная Вселенная. Субъективный «взгляд со стороны» // Дельфис. 1997. № 3 (11). С. 83–89.
169. Чайковский Ю. В. Элементы эволюционной диатропики. М.: Наука, 1990. 271 с.

170. *Чайковский Ю. В.* Познавательные модели, плюрализм и выживание // Путь. 1992. № 1. С. 62–108.
171. *Чайковский Ю. В.* Эволюция. М.: Центр систем. исслед., ИИЕТ РАН, 2003. 472 с.
172. *Чернавская С. Д., Чернавский Д. С.* Проблема возрастания энтропии и устойчивость движения в квантовой механике // Термодинамика и кинетика биологических процессов. М.: Наука, 1980. С. 28–43.
173. *Честер Дж.* Теория необратимых процессов. М.: Наука, 1966. 111 с.
174. *Чириков Б. В.* Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск: Ин-т ядерной физики, 1969. Препр. № 267. 313 с.
175. *Чириков Б. В.* Природа статистических законов классической механики // Методологические и философские проблемы физики. Новосибирск: Наука, 1982. С. 181–196.
176. *Чириков Б. В.* Динамический хаос в классических и квантовых системах // Усп. физич. наук. 1983. Т. 139. С. 360–363.
177. *Шредер М.* Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 528 с.
178. *Штерн В. И.* О размерности аттракторов турбулентного движения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. С. 582–586.
179. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.
180. *Эйген М., Винклер Р.* Игра жизни. М.: Наука, 1979. 93 с.
181. *Эйген М., Шустер П.* Гиперцикл. Принципы самоорганизации макромолекул. М.: Мир, 1982. 270 с.
182. *Afanasiev V. V., Sagdeev R. Z., Zaslavsky G. M.* Chaotic jets with multifractal space-time random walk // Chaos. 1991. Vol. 1. P. 143–159.
183. *Alekseev V. M., Yakobson M. V.* Symbolic dynamics and hyperbolic dynamic system // Phys. Repts. 1981. Vol. 75. P. 287–325.
184. *Antonsen T. M. jr., Ott E.* Multifractal power-spectra of passive scalars convected by chaotic fluid flows // Phys. Rev. 1991. Vol. A44. P. 851–857.
185. *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic Problems of Classical Mechanics. New York: Benjamin, 1968. IX+286 p. (Рус. пер.: *Арнольд В. И., Авец А.* Эргодические проблемы классической механики. Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. 284 с.)
186. *Barnskey M.* Fractals Everywhere. Boston: Acad. Press, 1988. 394 p.
187. *Baryshev Yu. V., Sylos Labini F., Montuon M., Pietronero L.* Facts and ideas in modern cosmology // Vistas in Astron. 1994. Vol. 38. P. 419–500.
188. *Baryshev Yu. V., Teerikorpi P.* Discovery of Cosmic Fractals. New Jersey etc.: World Scientific, 2002. XXXI+373 p.
189. *Bendixon I.* Sur les courbes définies par des équations différentielles // Acta Math. 1901. Vol. 24. P. 1–88. (Рус. пер.: Усп. матем. наук. 1941. № 9. С. 191–211.)
190. *Benettin G., Galgani L., Strelcyn J.-M.* Kolmogorov entropy and numerical experiments // Phys. Rev. 1976. Vol. A14. P. 2338–2345.
191. *Billingsley P.* Ergodic Theory and Information. New York: Wiley, 1965. 163 p. (Рус. пер.: *Биллингсли П.* Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969. 238 с.)

192. *Birkhoff G. D.* Dynamical Systems. New York: Amer. Math. Soc., 1927. VIII+295 p. (Рус. пер.: *Биркгоф Дж.* Динамические системы. М.: Гостехтеориздат, 1941. 320 с.)
193. *Birkhoff G. D.* Proof of recurrence theorem for strongly transitive systems // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1931. Vol. 17. P. 650–660.
194. *Birkhoff G. D., Koopman B. O.* Recent contribution to the ergodic theory // *Ibid.* 1932. Vol. 18. P. 279–282.
195. *Blatt J. M.* An alternative approach to the ergodic problem // *Progr. Theor. Phys.* 1959. Vol. 22. P. 745–756.
196. *Boltzmann L.* Studien über das Gleichgewicht der lebendige Kraft zwischen bewegten materiellen Punkten // *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.* 1868. Bd. 58. S. 517–560. (Рус. пер.: *Больцман Л.* Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 30–66.)
197. *Boltzmann L.* Über das Wärmegleichgewicht zwischen mehratomigen Gasmolekülen // *Ibid.* 1871a. Bd. 63. S. 397–418. (Рус. пер.: Там же. С. 67–83.)
198. *Boltzmann L.* Einige allgemeine Sätze über Wärmegleichgewicht // *Ibid.* 1871b. Bd. 63. S. 679–711. (Рус. пер.: Там же. С. 100–125.)
199. *Boltzmann L.* Analytischer Beweis des 2 Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie aus den Sätzen über des Gleichgewicht der lebendigen Kraft // *Ibid.* 1871c. Bd. 63. S. 712–732. (Рус. пер.: Там же. С. 83–100.)
200. *Boltzmann L.* Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen // *Ibid.* 1872. Bd. 66. S. 275–376. (Рус. пер.: Там же. С. 125–189.)
201. *Boltzmann L.* Das Referat der Abhandlung des Hrn. J. C. Maxwell “On Boltzmann’s theorem on the average distribution of energy in a system of material points” // *Wied. Ann. Beiblätter.* 1881. Bd. 5. S. 403–417. (Рус. пер.: Там же. С. 269–279.)
202. *Boltzmann L.* Über die Eigenschaften monocyclischer und anderer damit verwandter Systems // *Sitzber. Akad. Wiss. Wien.* 1884. Bd. 90. S. 231–245.
203. *Boltzmann L.* Über die mechanischen Analogien des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik // *J. reine und angew. Math.* 1887. Bd. 100. S. 201–212. (Рус. пер.: Там же. С. 280–290.)
204. *Boltzmann L.* III Teil der Studien über Gleichgewicht der lebendigen Kraft // *Sitzber. Akad. Wiss. München.* 1892. Bd. 22. S. 329–358; *Boltzmann L.* Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. 3. Leipzig: Barth, 1909. S. 426–453.
205. *Boltzmann L.* Vorlesungen über Gastheorie. Leipzig: Barth, 1895–1898. Bd. 1, 2. (Рус. пер.: *Больцман Л.* Лекции по теории газов. М.: Гостехтеориздат, 1956. 555 с.)
206. *Boltzmann L.* Entgegnung auf die wärmetheoretischen Betrachtungen des Hrn. Zermelo // *Ann. Phys. Folge 3.* 1896. Bd. 57. S. 773–784. (Рус. пер.: *Больцман Л.* Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 444–452.)
207. *Boltzmann L.* Zu Hrn. Zermelo’s Abhandlung “Über die mechanische Erklärung irreversibler Vorgänge” // *Ibid.* 1897. Bd. 60. S. 392–398. (Рус. пер.: Там же. С. 458–463.)
208. *Borel E.* Méchanique statistique classique. Paris: Gauthier-Villars, 1925. 148 p.
209. *Born M.* Vorhersagbarkeit in der klassischen Mechanik // *Ztschr. Phys.* 1958. Bd. 153. S. 372–388. (Рус. пер.: Усп. физич. наук. 1959. Т. 69. С. 173–187.)

210. *Brush S. G.* Foundations of statistical mechanics 1845–1915 // Arch. Hist. Exact. Sci. 1967. Vol. 4. P. 145–183; *Brush S. G.* The Kind of Motion We Call Heat. Vol. 2. Amsterdam: North-Holland, 1976. P. 335–385 (Ch. 10).
211. *Brush S. G.* The Kind of Motion We Call Heat. A History of the Kinetic Theory of Gases in the 19-th Century. Amsterdam: North-Holland, 1976. Vol. 1. XXXIX+299 p.; Vol. 2. XXXIX+466 p.
212. *Brush S. G.* Statistical Physics and the Atomic Theory of Matter from Boyle and Newton to Landau and Onsager. Princeton (N. J.): Princeton Univ. Press, 1983. IX+356 p.
213. *Bunde A., Halvin S.* Fractals in Science. Berlin: Springer, 1995. 298 p.
214. *Burlando B.* The fractal dimension of taxonomic system // J. Theor. Biol. 1990. Vol. 146. № 1.
215. *Cahn R. W.* Fractals dimension and fracture // Nature. 1989. Vol. 338. P. 201–202.
216. *Campbell D. K.* Nonlinear science — from paradigms to practicalities // From Cardinals to Chaos. Reflections on the Life and Legacy of Stanislaw Ulam. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. P. 218–262.
217. *Chaos.* Princeton (N. J.): Princeton Univ. Press, 1986. VI+324 p.
218. *Chaos and Astrophysics.* Dordrecht: Reidel, 1985. XVI+326 p.
219. *Chaos and Dynamical Complexity in the Physical Sciences.* London: Roy. Soc., 1990. 136 p.
220. *Chaos and Fractals. The Mathematics behind the Computer Graphics.* Providence: Amer. Math. Soc., 1989. IX+148 p.
221. *Chaos and Statistical Methods.* Berlin: Springer, 1984. XI+273 p.
222. *Chaos, Fractals, and Dynamics.* New York: Dekker, 1985. VIII+261 p.
223. *Chaotic Behavior in Quantum Systems. Theory and Applications.* New York: Plenum, 1985. VIII+380 p.
224. *Chaotic Dynamics and Fractals.* Orlando (Florida): Acad. Press, 1986. XI+292 p.
225. *Chaotic Phenomena in Astrophysics.* New York: New York Acad. of Sci., 1987. XI+155 p.
226. *Chirikov B. V.* A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Repts. 1979. Vol. 52. P. 265–379.
227. *Chirikov B. V.* Dynamical Mechanisms of Noise. Prepr. 87–123. Новосибирск: Ин-т ядерной физики, 1987. 22 с.
228. *Chirikov B. V., Shepelyansky D. L.* Chaos Border and Statistical Anomalies. Prepr. 86–174. Новосибирск: Ин-т ядерной физики, 1986. 26 с.
229. *Coleman P. H., Pietronero L.* The fractal structure of the Universe // Phys. Repts. 1992. Vol. 213. № 6. P. 311–389.
230. *Cook A. E., Roberts P. H.* The Rikitake two-disk dynamo system // Proc. Camb. Phil. Soc. 1970. Vol. 68. P. 547–569. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 164–192.)
231. *Coveney P.* The Second Law of thermodynamics: Entropy, irreversibility and dynamics // Nature. 1988. Vol. 333. P. 409–415.
232. *Davies P. C. W.* The Physics of Time Asymmetry. Berkely: Univ. of California Press, 1977. XVIII+214 p.

233. *Denbigh K. G.* Note of entropy. Disorder and disorganization // *Brit. J. Phil. Sci.* 1989. Vol. 40. P. 323–332.
234. *Denbigh K. G., Denbigh J. S.* Entropy in Relation to Incomplete Knowledge. Cambridge (England): Cambridge Univ. Press, 1985. 172 p.
235. Dimensions and Entropies in Chaotic Systems. Berlin: Springer, 1986. IX+257 p.
236. *Dominguez-Tenreiro R., Roy L. J., Martinez V. J.* On the multifractal character of the Lorenz attractor // *Progr. Theor. Phys.* 1992. Vol. 87. P. 1107–1118.
237. Dynamical Systems. Theory and Applications. Berlin: Springer, 1975. VI+624 p.
238. *Eckmann J.-P., Ruelle D.* Ergodic theory of chaos and strange attractor // *Rev. Mod. Phys.* 1985. Vol. 57. P. 617–656.
239. *Eggleston H. G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // *Q. J. Math. Oxford Ser.* 1949. Vol. 20. P. 31–36.
240. *Ehrenfest P., Ehrenfest T.* Begriffliche der statistischen Auffassung in der Mechanik // *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften.* Leipzig: Teubner, 1911. Bd. 4. Teil 2. H. 6. S. 32–131; *Ehrenfest P.* Collected Scientific Papers. Amsterdam: North-Holland, 1959. S. 213–302 (на нем. яз.) (Англ. пер.: *Ehrenfest P., Ehrenfest T.* The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics. Ithaca: Cornell Univ. Press, 1959. XVI+114 p.)
241. *Eigen M.* Selforganization of Matter and the Evolution of Biological Macromolecules. Berlin: Springer, 1971a. VIII+346 p. (Рус. пер.: *Эйген М.* Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973. 216 с.)
242. *Eigen M.* Molecular self-organization and the early stages of evolution // *Q. Rev. Biophys.* 1971b. Vol. 4. P. 149–212.
243. *Farmer J. D., Ott E., Yorke J. A.* The dimension of chaotic attractor // *Physica.* 1983. Vol. D7. P. 153–180.
244. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformation // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19. P. 25–52.
245. *Feigenbaum M. J.* The universal metric properties of nonlinear transformations // *Ibid.* 1979. Vol. 21. P. 669–706.
246. *Fermi E.* Beweis dass ein mechanisches Normalsystem in allgemeinen quasi-ergodisch ist // *Phys. Ztschr.* 1923. Bd. 24. S. 261–265; 1924. Bd. 25. S. 166–167. (Рус. пер. *Ферми Э.* Научн. тр. Т. 1. М.: Наука, 1971. С. 115–124.)
247. *Fermi E., Pasta J., Ulam S.* Studies of nonlinear problems. Repr, LA–1940. Los-Alamos, 1955. (Рус. пер. Там же. Т. 2. М.: Наука, 1982. С. 647–656.)
248. *Ford J., Lunsford G. H.* Stochastic behavior of resonant nearly linear oscillator system in the limit of zero nonlinear coupling // *Phys. Rev.* 1970. Vol. A1. P. 59–70.
249. Fractals in Physics. Amsterdam: North Holland, 1986. XII+476 p. (Рус. пер.: Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 670 с.)
250. Fractals in Physics. Essays in Honour of Benoit B. Mandelbrot. Amsterdam: North-Holland, 1989. XII+397 p. (Physica. Ser. D. 1989. Vol. 38, №№ 1–3).
251. *Franceschini V., Tebaldi C.* Sequences of infinite bifurcations and turbulence in a five-mode truncation of the Navier-Stokes equations // *J. Stat. Phys.* 1979. Vol. 21. P. 707–726.

252. *Gibbs J. W.* On the fundamental formula of statistical mechanics with application to astronomy and thermodynamics // *Proc. Amer. Assoc. Adv. Sci.* 1884. Vol. 33. P. 57–58.
253. *Gibbs J. W.* Elementary Principles in Statistical Mechanics, Developed with Especial Reference to the Rational Foundation of Thermodynamics. New York: Schribner, 1902. 159 p. (Рус. пер.: *Гиббс Дж. В.* Термодинамика. Статистическая механика. М.: Наука, 1982. С. 350–508.)
254. *Gisiger T.* Scale invariance in biology: Coincidence or footprint of a universal mechanism? // *Biol. Rev. Camb. Phil. Soc.* 2001. Vol. 76. № 2. P. 161–209.
255. *Gleick J.* Chaos. Making a New Science. London: Heinemann, 1988. 352 p.
256. *Good I. J.* The fractional dimensional theory of continued fraction // *Proc. Camb. Phil. Soc.* 1941. Vol. 37. P. 199–228.
257. *Guckenheimer J., Holmes Ph.* Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. New York: Springer, 1983. XVI+453 p.
258. *Haitun S. D.* Entropy and disorder: The evolution of views concerning their connection // *Thermodynamics: History and Philosophy.* Singapore etc., 1991. P. 220–227.
259. *Haitun S. D.* The problem of indicator-latent relationship in metric models // *Scientometrics.* 1992. Vol. 23. P. 335–351; Vol. 24. P. 221–235.
260. *Haken H.* Synergetics: An Introduction. Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1977. XII+325 p. (Рус. пер.: *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.)
261. *Halmos P. R.* Lectures on Ergodic Theory. New York: Chelsea, 1956. 101 p. (Рус. пер.: *Халмош П. Р.* Лекции по эргодической теории. М.: ИЛ, 1959. 147 с.)
262. *Hausdorff F.* Dimension und ausseres Mass // *Math. Ann.* 1918. Bd. 79. S. 157–179.
263. *Hedlung G. A.* On the metrical transitivity of the geodesics on closed surfaces of constant negative curvature // *Ann. Math.* 1934. Vol. 35. P. 787–808.
264. *Hedlung G. A.* A new proof for a metrically transitive system // *Amer. J. Math.* 1940. Vol. 62, P. 233–242.
265. *Hellemann R. H. G.* Self-generated chaotic behaviour in nonlinear mechanics // *Fundamental Problems in Statistical Mechanics.* Vol. 5. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 165–233.
266. *Helmholtz H.* Studien zur Statik monozyklischer Systeme // *Sitzber. Akad. Wiss. Berlin. Phys. Math. Kl.* 1884a. S. 311–318; 755–759; *Helmholtz H.* Wissenschaftliche Abhandlungen. Bd. 3. Leipzig: Barth. 1895. S. 119–141.
267. *Helmholtz H.* Prinzipien der Statik monozyklischer Systeme // *Borchardt-Crelle J. reine u. angew. Math.* 1884b. Bd. 97. S. 111–140; 317–336; *Ibid.* S. 163–173.
268. *Hénon M.* A two-dimensional mapping with a strange attractor // *Comm. Math. Phys.* 1976. Vol. 50. P. 69–77. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 152–163.)
269. *Hénon M., Heiles C.* The applicability of the third integral of the motion. Some numerical experiments // *Astron. J.* 1964. Vol. 69. P. 73–79.
270. *Hertz P.* Über die mechanischen Grundlagen der Thermodynamik // *Ann. Phys. Folge 4.* 1910. Bd. 33. S. 225–274; 537–552.

271. *Hopf E.* On time average theorem in dynamics // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1932a. Vol. 18. P. 93–100.
272. *Hopf E.* Complete transitivity and the ergodic principle // *Ibid.* 1932b. Vol. 18. P. 204–209.
273. *Hopf E.* Proof of Gibbs' hypothesis on the tendency toward statistical equilibrium // *Ibid.* 1932c. Vol. 18. P. 333–340.
274. *Hopf E.* *Ergodientheorie.* Berlin: Springer, 1937. IV+835 S. (Рус. пер.: Усп. матем. наук. 1949. Т. 4. № 1. С. 113–182.)
275. *Hopf E.* Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung // *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig.* 1939. Bd. 91. S. 261–304. (Рус. пер.: Там же. № 2. С. 129–170.)
276. *Hopf E.* Statistik der Lösungen geodätischer Probleme vom unstabilen Typus. II // *Math. Ann.* 1940. Bd. 117. S. 590–608.
277. *Hopf E.* Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differentialsystems // *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig.* 1942. Bd. 94. S. 1–22.
278. *Hopf E.* On the ergodic theorem for positive linear operators // *J. reine und angew. Math.* 1960. Bd. 205. S. 101–106. (Рус. пер.: Математика. 1962. Т. 6. № 3. С. 29–36.)
279. *Iooss G., Joseph D. D.* *Elementary Stability and Bifurcation Theory.* Berlin: Springer, 1981. XV+286 p.
280. *Kaplan J. L., Yorke J. A.* Chaotic behavior of multidimensional difference equation // *Lecture Notes in Mathematics.* 730. Berlin: Springer, 1979. P. 204–227.
281. *Khinchin A.* Birkhoff's Lösung des Ergodenproblems // *Math. Ann.* 1932. Bd. 107. S. 485–488.
282. *Langevin P.* Sur la théorie du mouvement Brownien // *C. R. Acad. Sci.* P. 1908. Vol. 146. P. 530–532 / Рус. пер.: Ланжевэн П. Избр. тр. М.: Наука, 1960. С. 338–341.
283. *Lebowitz J. L.* Exact results in nonequilibrium statistical mechanics: There do we stand? // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* 1978. № 64. P. 35–49.
284. *Lebowitz J. L., Penrose O.* Modern ergodic theory // *Phys. Today.* 1973. Vol. 26. № 2. P. 23–29.
285. *Ledrappier F.* Some relations between dimension and Lyapunov exponents // *Comm. Math. Phys.* 1981. Vol. 81. P. 229–238.
286. *Lighthill J.* The recently recognized failure of predictability in Newtonian dynamics // *Proc. Roy. Soc. London.* 1986. Vol. A407. P. 35–50.
287. *Liouville H.* Sur la théorie de la variation des constantes arbitraires // *J. Math. Pures et Appl.* 1838. Vol. 3. P. 342–349.
288. *Liouville J.* Note sur l'intégration des équations différentielles de la dynamique, présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853 // *Ibid.* 1855. Vol. 20. P. 137–138.
289. *Lorenz E. N.* Deterministic nonperiodical flow // *J. Atmosph. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130–141. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 88–116.)
290. *Mandelbrot B. B.* How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension // *Science.* 1967. Vol. 156. № 3775. P. 285–317.
291. *Mandelbrot B. B.* *Les Objects Fractals. Forme, Hazard et Dimension.* Paris: Flammarion, 1975. 192 p.

292. *Mandelbrot B. B.* Fractals and turbulence: Attractors and dispersion // *Lecture Notes in Mathematics*. 615. Berlin: Springer, 1977a. P. 83–93. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 47–57.)
293. *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of percolation, polymers and almost everything else // *Statistical Mechanics and Statistical Methods in Theory and Application*. New York: Plenum, 1977b. P. 331–342.
294. *Mandelbrot B. B.* Fractals: Form, Change, and Dimension. San Francisco: Freeman, 1977c. XVI+365.
295. *Mandelbrot B. B.* The Fractal Geometry of Nature. San Francisco: Freeman, 1982. 460 p. (Рус. пер.: Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Ин-т компьютер. исслед., 2002. 654 с.)
296. *Mandelbrot B. B.* New “anomalous” multiplicative multifractals: Left sided $f(\alpha)$ and the modelling of DLA // *Physica*. 1990. Vol. A168. P. 95–111.
297. *Maxwell J. C.* On Boltzmann’s theorem on average distribution of energy in a system of material points // *Camb. Phil. Soc. Trans.* 1879. Vol. 12. P. 547–570; *Maxwell J. C.* Scientific Papers. Vol. 2. New York: Dover, 1890. P. 713–741; *Maxwell J. C.* Scientific Papers. Paris: Hermann, 1927. P. 713–741.
298. *Melamit A.* Bemerkungen zur quasiergoden Hypothese // *Acta Phys. Polon.* 1932. Vol. 1. S. 281–283.
299. *Metzler R., Glöckle W. G., Nonnenmacher T. F.* Fractional model equation for anomalous diffusion // *Physica*. 1994. Vol. A211. P. 13–24.
300. *Misra B., Prigogine I.* On the foundation of kinetic theory // *Progr. Theor. Phys. Suppl.* 1980. № 69. P. 101–110. (Рус. пер.: Синергетика. М., Мир, 1984. С. 18–29.)
301. *Moser J.* A new technique for the construction of solutions of nonlinear differential equations // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1961. Vol. 47. P. 1824–1831. (Рус. пер.: Математика. 1962. Т. 6. № 4. С. 3–10.)
302. *Moser J.* On invariant curves of area-preserving mapping of an annulus // *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys. Kl.* 1962. № 1. P. 1–20. (Рус. пер.: Там же. № 5. С. 51–67.)
303. *Moser J.* A rapidly convergent iteration method and non-linear differential equations // *Ann. della Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 3*. 1966. Vol. 20. P. 265–315; 499–535. (Рус. пер.: Усп. матем. наук. 1968. Т. 23. № 4. С. 179–238.)
304. *Moser J.* Convergent series expansions of quasi-periodic motions // *Math. Ann.* 1967. Vol. 169. P. 136–176.
305. *Moser J.* Stable and Random Motions in Dynamical Systems. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1973. VIII+198 p.
306. *Neumann J. von.* Beweis der Ergodensatzes und des H-Theorems in der neuen Mechanik // *Ztschr. Phys.* 1929. Bd. 57. S. 30–70.
307. *Neumann J. von.* Proof of the quasiergodic hypothesis // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*. 1932a. Vol. 18. P. 70–82.
308. *Neumann J. von.* Physical applications of the ergodic hypothesis // *Ibid.* 1932b. Vol. 18. P. 263–266.
309. *Neumann J. von.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin: Springer, 1932c. (Рус. пер. Нейман И. фон. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964. 367 с.)

310. *Nicolis J. S.* Dynamics of Hierarchical Systems. An Evolutionary Approach. Berlin: Springer, 1986. XVI+397 p. (Рус. пер.: *Николис Дж.* Динамика иерархических систем. Эволюционное представление. М.: Мир, 1989. 486 с.)
311. *Nigmatullin R. R.* The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry // *Phys. Status Solidi*. 1986. Vol. B133. P. 425–430.
312. *Nottale L., Chaline J., Grou P.* Les arbres de l'évolution. Paris: Hachette, 2000. 379 p.
313. Order in Chaos // *Physica*. 1983. Vol. 7D. № 1–3. P. 1–361.
314. *Ott E.* Strange attractors and chaotic motions of dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1981. Vol. 53. P. 655–671.
315. *Ottino J.* The mixing of fluids // *Sci. Amer.* 1989. Vol. 260. № 1. (Рус. пер.: В мире науки. 1989. № 3. С. 34–44.)
316. *Oxtoby J. C.* Ergodic sets // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1952. Vol. 58. P. 116–136. (Рус. пер.: Усп. матем. наук. 1953. Т. 8. № 3. С. 75–97.)
317. *Oxtoby J. C., Ulam S. M.* Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity // *Ann. Math.* 1941. Vol. 42. P. 874–920.
318. *Parmenter R. H., Yu L. Y.* Deterministic chaos in a quantum mechanical system described by a time-independent Hamiltonian: A model of three Josephson junctions in a loop // *Chaos*. 1993. Vol. 3. P. 205–209.
319. *Pascal J. P., Pascal H.* On nonlinear diffusion in fractal structures // *Physica*. 1994. Vol. A208. P. 351–358.
320. *Penrose O.* Foundations of statistical mechanics // *Repts. Progr. Phys.* 1979. Vol. 42. P. 1937–2006.
321. *Plancherel M.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Systeme // *Ann. Phys. Folge* 4. 1913. Bd. 42. S. 1061–1063.
322. *Poincaré H.* Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle // *J. Math. Pures et Appl. Sér. 3*. 1881. Vol. 7. P. 375–244; 1882. Vol. 8. P. 251–296; Sér. 4. 1885. Vol. 1. P. 167–244; 1886. Vol. 2. P. 151–217. (Рус. пер.: *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: ОГИЗ, 1947. 392 с.)
323. *Poincaré H.* Sur les équations de la dynamique et le problème des trois corps // *Acta Math.* 1890. Vol. 13. P. 1–270. (Рус. пер. *Больцман Л.* Избр. тр. М.: Наука, 1984. С. 429–434.)
324. *Poincaré H.* Les Méthods de la Mécanique Céleste. Paris: Cauthier-Villars. т. 1. 1892. 385 p.; т. 2. 1893. VIII+479 p.; т. 3. 1899. 414 p. (Рус. пер.: *Пуанкаре А.* Избр. тр. М.: Наука. Т. 1. 1971. С. 7–771; Т. 2. 1972. С. 7–456.)
325. *Poincaré H.* Réflexions sur la théorie cinétique des gaz // *J. Phys. Théor. Appl. Sér.* 4. 1906. Vol. 5. P. 369–403. (Рус. пер.: *Пуанкаре А.* Избр. тр. Т. 3. М.: Наука, 1974. С. 385–412.)
326. *Poincaré H.* Science et Méthode. Paris: Flammarion, 1908. 314 p. (Рус. пер.: *Пуанкаре А.* О науке. М.: Наука, 1983. С. 283–403.)
327. *Rosenthal A.* Beweis der Unmöglichkeit ergodischer Gassysteme // *Ann. Phys. Folge* 4. 1913. Bd. 43. S. 796–806.
328. *Rosenthal A.* Aufbau der Gastheorie mit Hilfe der Quasiergodenhypothese // *Ibid.* 1914. Bd. 43. S. 894–904.

329. *Ruelle D.* Strange attractors // *Math. Intell.* 1980. Vol. 2. P. 126.
330. *Ruelle D.* Chance and Chaos. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992. 195 p.
331. *Ruelle D., Takens F.* On the nature of turbulence // *Commun. Math. Phys.* 1971. Vol. 20. P. 167–192. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 117–161.)
332. *Saito N., Shudo A.* Ergodity, irreversibility and approach to equilibrium // *J. Phys. Soc. Jap.* 1993. Vol. 62. P. 53–63.
333. *Saltzman B.* Finite amplitude free convection as an initial value problem // *J. Atmosph. Sci.* 1962. Vol. 19. P. 329–341.
334. *Sattinger D. H.* Topics in Stability and Bifurcation Theory. Berlin: Springer, 1973. VI+190 p.
335. *Schlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J.* Strange kinetics // *Nature.* 1993. Vol. 363. P. 31–37.
336. *Schneider W. R.* Fractional diffusion // *Lecture Notes in Physics.* Vol. 355. Dynamics and Stochastic Processes. Theory and Applications. Berlin etc.: Springer, 1990. P. 276–286.
337. *Schneider W. R., Wyss W.* Fractional diffusion and wave equations // *J. Math. Phys.* 1989. Vol. 30. P. 134–144.
338. *Schrödinger E.* What is Life? The Physical Aspect of the Living Cell. London: Cambridge Univ. Press, 1944. 91 S. / Рус. пер.: Шрёдингер Э. Что такое жизнь с точки зрения? М.: ИЛ, 1947. 147 с.
339. *Siegel C. L., Moser J. K.* Lectures on Celestial Mechanics. Berlin: Springer, 1971. XII+290 p. (Рус. пер.: Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. С. 73–164.)
340. *Sinai Ya. G.* Ergodic theory // *The Boltzmann Equation. Theory and Applications.* New York: Springer, 1973. P. 575–608.
341. *Smale S.* Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. Vol. 73. P. 747–817. (Рус. пер.: Усп. матем. наук. 1970. Т. 25. № 1. С. 113–185.)
342. *Structural Stability in Physics.* Berlin: Springer, 1979. VIII+311 p.
343. *Strutt J. W. (Lord Rayleigh).* Remarks on Maxwell's investigation respecting Boltzmann's theorem // *Phil. Mag. Ser. 5.* 1892. Vol. 33. P. 356–359; *Strutt J. W. (Lord Rayleigh).* Sci. Papers. Vol. 3. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1902. P. 554–557.
344. *Strutt J. W. (Lord Rayleigh).* The law of partition of energy // *Ibid.* 1900. Vol. 49. P. 98–118; *Ibid.* Vol. 4. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1903. P. 433–451.
345. *Teilhard de Chardin P.* Le Phénomène Humain. Paris: Éditions du Seuil, 1955. 348 p. (Рус. пер.: Тейяр де Шарден П. Феномен человека. М.: Наука, 1987. 240 с.)
346. *Thom R.* Stabilité Structurelle et Morphogénèse. New York: Benjamin, 1972. 362 p. (Англ. пер.: *Thom R.* Structural Stability and Morphogenesis. An Putline of a General Theory of Models. Reading (Mass.): Benjamin, 1975. XXV+348 p.)
347. *Thomson W. (Lord Kelvin).* Kinetic theory of the dissipation of energy // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* 1874. Vol. 8. P. 325–334; *Brush S. G.* Kinetic Theory. Vol. 2. Oxford etc.: Pergamon, 1966. P. 176–187.
348. *Thomson W. (Lord Kelvin).* On some test cases for the Maxwell-Boltzmann doctrine regarding distribution of energy // *Proc. Roy. Soc. London.* 1891. Vol. 50. P. 79–88;

- Thomson W. (Lord Kelvin)*. Math. and Phys. Papers. Vol. 4. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1910. P. 484–494.
349. *Tolman R. C.* The Principles of Statistical Mechanics. Oxford: Clarendon, 1938. XIX+661 p.
350. *Turing A.* The chemical basis of morphogenesis // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. B. 1952. V. 237. P. 37–73.
351. *Van Hove L.* Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation // Physica. 1955. Vol. 21. P. 517–540. (Рус. пер.: Вопросы квантовой теории необратимых процессов. М.: ИЛ, 1961. С. 10–38.)
352. *Volterra V.* Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie. Paris, 1926. (Рус. пер.: *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976, 286 с.)
353. *Voss R. F.* Fractals in nature: From characterization to Simulation // The Science of Fractal Images. New York: Springer, 1988. P. 21–70.
354. *Voss R. F.* Random fractals: Self-affinity in noise, music, mountains and clouds // Physica. 1989. Vol. 380. P. 362–371.
355. *Wehrl A. G.* General properties of entropy // Rev. Mod. Phys. 1978. Vol. 50. P. 221–260.
356. *Weidlich W.* Physics and social science: The approach of synergetics // Phys. Repts. 1991. Vol. 204. P. 1–163.
357. *Whiteman K. J.* Invariants and stability in classical mechanics // Repts. Progr. Phys. 1977. Vol. 40. P. 1033–1069.
358. *Whittaker E. T.* A Treatise of the Analytical Dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1927. XIV+456 p. (Рус. пер.: *Уиттекер Э. Т.* Аналитическая динамика. М.; Л.: ОНТИ, 1937. 500 с.)
359. *Williams R. F.* The structure of Lorenz attractor // Turbulence Seminar. Lecture Notes in Mathematics. 615. New York: Springer, 1977. P. 94–112. (Рус. пер.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981. С. 58–72.)
360. *Wyss W.* The fractional diffusion equation // J. Math. Phys. 1986. Vol. 27. P. 2782–2785.
361. *Zaslavsky G. M.* Fractional kinetic equation for Hamiltonian chaos // Physica. 1994. Vol. D1–3. P. 110–122.

Предметный указатель*

Активная история науки — введ.

Аттрактор — 2.2.2, 2.4.4

— Лоренца — 3.2.2, 3.2.4, 4.1

— стохастический — 2.4.1,
3.3.2–3.3.3

— странный/нестранный — 2.2.2,
2.4.4, 3.2.3, 3.3.2–3.3.3, 3.4, 3.5.1,
гл. 4, 4.1–4.2, 4.6

Брюссельская школа

термодинамики — 2.2.2, 3.2.4,
3.2.6, 3.6

«Брюсселятор» — 3.2.4, 3.2.6, 3.5.1

Гиббса парадокс — 2.2.4.3

Гипотеза квазиэргодическая — 1.2,
1.2.1, 1.2.2.2, 1.2.2.4, 1.2.3

— случайных фаз — 2.4.4

— флуктуационная — 3.2.4

— эргодическая — введ., 1.1–1.2,
1.2.1, 1.2.2, 1.2.2.1–1.2.2.4,
1.2.3–1.2.4, 1.3.3, 1.4, 6.2

Глендсдорфа–Пригожина теорема —
3.2.4

Динамическая система квазиэргоди-
ческая/квазиэргодический
поток/квазиэргодическое
движение — 1.2.2.2, 1.2.3–1.2.4,
1.3.2, 2.2.3, 2.3, 2.5

— — метрически транзитивная —
1.2.3, 1.3.2–1.3.4, 2.2.3, 2.5

— — с К-перемешиванием — введ.,
1.3.4–1.3.5, 1.4, 2.5

— — с перемешиванием — 1.1,
1.2.4, 1.3, 1.3.1–1.3.5, 1.4, 2.1,

2.2.4.1, 2.2.4.3, 2.4.2–2.4.3, 2.5,
3.2.2, 3.3.2

— — эргодическая/эргодический
поток/эргодическое
движение — 1.2.1,
1.2.2.1–1.2.2.4, 1.2.3–1.2.4,
1.3.2–1.3.4, 1.4, 2.2.3, 2.3, 2.5

Динамо Рикитаке — 3.2.2

Дискретность фазового пространства
квантовой системы как миф —
2.2.4.3

— наблюдаемого мира как следствие
его фрактальности — введ., 6.3

Диссипативная структура/система —
2.1, 2.2.2, 2.2.4.1, 3.2.4–3.2.6, 3.3.2,
3.4, 3.5.1, 3.6

Диффузия Арнольда — 2.3, 2.4.4

Живая сила — 1.2.1

Закон возрастания энтропии —
введ., 3.1, 3.2.4, 3.5.1, 4.4

Иерархическая

системность/системная
иерархичность фрактальных
структур — 4.5, 6.1, 6.3–6.4

Изолирующие/неизолирующие
интегралы движения — 1.2.1,
1.2.3, 2.2.3, 2.3, 2.5

Интегрируемая/неинтегрируемая
система — 1.2.1, 2.1, 2.2.1, 2.2.3,
2.3, 2.4.3–2.4.4, 3.2.3

КАМ-теорема/теория — 2.1, 2.2.1,
2.3–2.4

Кантора множество — 3.2.3, 3.3.3,
4.1–4.2, 4.4–4.7

Космологический принцип — 6.2

Кривая фон Коха — 4.4, 4.7

* В указателях ссылки даются на но-
мера разделов и глав. Если в разделе или
главе имеются подразделы, а указывается,
тем не менее, раздел или глава, то имеется
в виду преамбула к нему или к ней.

- ЛеШателье принцип — 3.2.4
 Лиувилля 2-я теорема — 2.2.3
 — обобщенная теорема — 3.4, 3.5.1, 4.1, 5.3
 — теорема/уравнение — 1.1, 1.2.2.4, 1.2.3, 1.3.1–1.3.4, 1.4, 2.2.4.3, 3.4, 3.5.1, 5.3
 — теорема/уравнение квантовая/квантовое — 2.2.4.3
 Ляпунова показатели — 1.3.4, 2.2.4.1, 2.4.2, 4.2
 — функция — 3.2.4
- Мисры—Пригожина теорема — 1.3.4
 Мутовочно-сетевой характер развития/эволюции — 6.1, 6.3
 Мутовочный характер развития/эволюции — 6.1, 6.3
- Негауссовая природа фракталов — 6.1, 6.3
 Негауссовы распределения — 6.1
 Необратимости проблема — 1.3.1
 Неразведение обратимого и необратимого динамического хаоса в современной теории — введ., 1.3.1–1.3.5, 1.4, 2.2.4.4, 3.1
 Нулевая плотность «настоящих» фракталов — введ., 4.4, 4.7, 5.1–5.4, 6.1–6.2, 6.4
- Однородность/неоднородность Вселенной/нашей Метагалактики — 6.2
 Оператор Лиувилля — 1.1, 1.3.4, 2.2.4.3
 — сдвига по времени — 1.2.3, 1.3.2, 1.3.4, 2.4.1
 «Орегонатор» — 3.2.6, 3.5.1
 Основное кинетическое уравнение [master equation] — 1.3.4, 1.4, 2.5
 — — — обобщенное [generalized master equation] — 1.3.4
 Отображение [map] — 2.4.1, 2.4.3–2.4.4, 3.4, 5.4
- Переменные действие–угол — 2.2.3, 2.3, 3.3.1
 Поток в фазовом пространстве — 1.1, 1.2.3, 1.3.1–1.3.2, 1.3.4, 2.2.2–2.2.3, 2.4.1, 4.1
 Пригожина теорема о минимуме производства энтропии — 3.2.4
 Проблема обоснования статистической физики — гл. 1, 1.1–1.2, 1.2.1–1.2.2, 1.2.2.4, 1.2.3–1.2.4, 1.3.3, 2.3, 3.6
- Ретикулярная/сетчатая/сетевая эволюция — 6.3
- Самоподобие/масштабная инвариантность фрактальных структур — 4.5, 6.1
 Странный аттрактор как стохастический фрактал — 4.6
- Теория естественного отбора (несостоятельность) — 3.2.7
 Топологическая структура фазовой жидкости обратимой/необратимой статистической системы — введ., 1.1, 1.2.3, 1.3.1–1.3.3, 1.4, 2.5, 3.4, 4.1, 4.4, 5.3, 5.5
 — — — траектории обратимой/необратимой статистической системы — введ., 1.1, 1.2.3, 1.3.2, 1.4, 2.2.4.2, 2.4, 2.4.4, 2.5, 4.1, 4.4
- Уравнение возмущенное синус-Гордона — 3.3.1
 — Гамильтона—Якоби — 2.2.3
 — Кортевега—де Фриса — 3.2.1
 — Ланжевена — 2.1
 — непрерывности — 1.1, 3.4
 — типа Дюффинга — 3.3.1, 3.5.1
 — Шлэгеля 3.3.1
 — Шрёдингера как частный случай (обратимого) квантового уравнения Лиувилля — 2.2.4.3
 Уравнения автоволновые — 3.2.5
 — Вольтерра — 3.3.1, 3.5.1

- Гамильтона — 1.1, 1.2.3, 1.3.1, 2.2.2–2.2.3, 2.2.4.3, 3.5.1, 5.3
- Кука и Робертса — 3.2.2, 3.5.1
- Лоренца — 3.2.2, 3.3, 3.5.1–3.5.2, 6.3
- Рёслера — 3.3.1, 3.5.1
- Тьюринга — 3.2.1
- Эйгена—Шустера — 3.2.7, 3.5.1
- Устойчивость/неустойчивость системы — 1.3.2, 2.1, 2.2.1, 2.2.4, 2.2.4.1, 2.2.4.4, 2.4.2, 3.1, 3.2.4, 6.2
- — — динамическая — 1.3.2, 2.2.4, 2.2.4.3
- — — локальная — 1.3.1–1.3.3, 1.4, 2.2.4.1, 2.4.2, 3.2.4, 3.3.2
- — — — экспоненциальная — 1.3.2–1.3.5, 1.4, 2.2.4.1, 2.5
- — — — обратимая/необратимая — 1.3.3–1.3.5, 1.4, 2.2.4.1, 2.2.4.4, 3.3.2
- — — параметрическая — 1.3.2, 2.2.4, 2.2.4.3

Фракталы пространственные/непространственные — 6.3

Фрактальное происхождение негауссовых распределений — см. негауссовая природа фракталов

Фрактальность наблюдаемого мира — введ., гл. 6, 6.1–6.4

— эволюции — 6.1, 6.3–6.4

Фридмана Вселенная/решение — введ.

Хаббла закон — 6.2

Эволюционный принцип минимакса/максимина — 6.4

Энтропия гамильтоновой системы (постоянство во времени) — 3.5.1

— грубая (крупнозернистая) — 1.3.1

— как мера беспорядка (ошибочность такой трактовки применительно к реальным системам) — введ., 1.1, 3.1

— квантовая — 2.2.4.3

— квантовая фазовая — 2.2.4.3

— метрическая (динамическая, К-энтропия) — 1.3.4

— статистическая — 1.1, 1.3.1

Именной указатель

- Авец А.** [Avez A.] 1.2.3, 1.3, 1.3.2, 1.3.4, 2.4.3
Адлер А. [Adler A.] 3.2.6
Алексеев В. М. [Alekseev V. M.] 1.3.4
Алексеев И. С. 5.5
Андронов А. А. 2.2.1, 2.2.4.2, 3.2.5
Аносов Д. В. 1.3, 1.3.4, 3.2.3
Антонсен Т. М. мл. [Antonsen T. M. jr.] 5.4
Арансон И. С. 3.2.5, 3.3.2
Арнольд В. И. [Arnold V. I.] 1.2.3, 1.3, 1.3.2, 1.3.4, 2.2.1, 2.2.3, 2.3, 2.4.3–2.4.4
Аршинов В. И. гл. 6
Афанасьев В. В. [Afanasiev V. V.] 5.4
Афраймович В. С. 3.2.2–3.2.3
Ахромеева Т. С. 2.4.2, 3.2.1, 3.3.2–3.3.3, 4.2
Балеску Р. [Balescu R.] 1.1, 1.2.3, 1.3.1–1.3.2, 2.2.3, 2.3
Барнской М. [Barnskey M.] 4.2, гл. 6
Барышев Ю. В. [Baryshev Yu. V.] 4.2, гл. 6, 6.2
Безручко Б. П. 2.1, 2.4, 2.4.1, 2.4.4, 4.5, 6.3
Белоусов Б. П. 3.2.6
Бендиксон И. [Bendixon I.] 2.2.1
Бенеттин Ж. [Benettin G.] 1.3.4, 2.2.4.1
Биллингсли П. [Billingsley P.] 1.3, 4.2
Биркгоф Дж. [Birkhoff G. D.] 1.2.3, 2.2.1
Блат Дж. М. [Blatt J. M.] 1.3.1
Божокин С. В. 4.2, гл. 6
Больцман Л. [Boltzmann L.] 1.1–1.2, 1.2.1–1.2.2, 1.2.2.1–1.2.2.4, 2.2.1, 2.2.3–2.2.4, 3.1, 3.2.4, 3.5.1, 5.3
Борель Э. [Borel E.] 1.3.3
Борн М. [Born M.] 2.1, 2.2.1
Брауэр Л. [Brouwer L. E.] 4.3–4.4
Брауэр Э. [Brauer E.] 3.2.6
Браш С. Дж. [Brush S. G.] 1.1–1.2, 1.2.1, 1.2.2.1, 1.2.2.4, 1.2.3
Брунс Г. Э. [Bruns H. E.] 2.2.1
Бунде А. [Bunde A.] 4.2, гл. 6
Бурландо Б. [Burlando B.] гл. 6
Былов Б. Ф. 2.2.1
Вайдлих У. [Weidlich W.] 5.4
Ван-Хоф Л. [Van Hove L.] 2.4.4
Вдовиченко Н. В. гл. 1, 1.1–1.2, 1.2.1, 1.2.2.4, 1.3.3
Верль А. [Wehrl A. G.] 1.3.1
Вершик А. М. 1.3
Вигнер Е. [Wigner E.] 2.2.4.3
Винклер Р. [Winkler R.] 3.2.7
Вильямс Р. Ф. [Williams R. F.] 3.2.3
Висс У. [Wyss W.] 5.4
Вольтерра В. [Volterra V.] 3.3.1
Восс Р. Ф. [Voss R. F.] 4.2, гл. 6
Галактионов В. А. 3.3.1
Гапонов-Грехов А. В. 3.2.5, 3.3.1–3.3.2
Гейзенберг В. [Heisenberg W.] 5.5
Гельмгольц Г. [Helmholtz H.] 3.5.1
Гельфанд И. М. 5.4
Герц П. [Hertz P.] 1.2.3
Гессе Г. [Hesse H.] введ.
Гиббс Дж. В. [Gibbs J. W.] 1.1, 1.2.2, 1.2.2.1, 1.2.2.3–1.2.2.4, 1.2.3–1.2.4, 1.3.1–1.3.4, 1.4, 3.1
Гизигер Т. [Gisiger T.] 4.5
Глейк Дж. [Gleick J.] 2.1, 3.2.3
Гленсдорф П. [Glansdorf P.] 3.2.4, 3.6
Голдбергер Э. Л. [Goldberger A. L.] гл. 6
Гончар В. Ю. 5.4
Гуд И. Дж. [Good I. J.] 4.2

- Гукенхеймер Дж. [Guckenheimer J.] 2.2.2, 2.4.2, 3.3.3
 Гуотми А. [Gwathmey A. T.] 3.2.7
 Гуревич Б. М. 1.3
- Д**
 Данилов Ю. А. 2.1, 2.4.4, 3.2.1, 3.3.2, гл. 6, 6.3
 Делокаров К. Х. гл. 3
 Денбиг Дж. [Denbigh J. S.] 1.1
 Денбиг К. [Denbigh K. G.] 1.1
 Джозеф Д. [Joseph D. D.] 2.2.4.2
 Динабург Е. И. 1.3, 1.3.4
 Домингуаз-Тенрейро Р. [Dominguez-Tenreiro R.] 4.5
 Дэвис П. К. [Davies P. C. W.] 3.5.1
 Дюбуа-Реймон [du Bois Reymond] 4.2
- Ж**
 Жаботинский А. М. 3.2.6
- З**
 Зальцман Б. [Saltzman B.] 3.2.2
 Заславский Г. М. [Zaslavsky G. M.] 1.3, 1.3.1–1.3.4, 2.1, 2.2.3, 2.3–2.4, 3.3.1–3.3.2, 3.5.1, 5.4
 Зельдович Я. Б. введ.
 Зигель К. Л. [Siegel C. L.] 2.3
 Зубарев Д. Н. 1.3.1
- И**
 Идлис Г. М. 6.2
 Израйлев Ф. М. 3.2.1
 Исихара А. [Isihara A.] 1.3.1
- Й**
 Йорк Дж. [Yorke J. A.] 3.2.3, 4.2
 Йосс Ж. [Iooss G.] 2.2.4.2
- К**
 Кавеней П. В. [Coveney P. V.] 1.3.1
 Кадомцев Б. Б. 2.1, 2.2.3, 3.2.1, 3.3.2
 Кан Р. У. [Cahn R. W.] 4.2
 Каннингем Р. [Cunningham R. E.] 3.2.7
 Капица С. П. гл. 6, 6.3
 Каплан Дж. Л. [Kaplan J. L.] 4.2
 Карери Дж. [Careri G.] гл. 6
 Кац М. [Kac M.] 1.3.1
 Князева Е. Н. гл. 3, 3.1, 3.2.4, 4.5, гл. 6, 6.3
- Колмогоров А. Н. 1.2.3, 1.3.3–1.3.4, 1.4, 2.3, 2.4.4, 4.2
 Кондепуди Д. [Kondepudi D.] 3.2.4
 Корн Г. [Korn G. A.] 1.3.2, 2.2.4.1, 3.2.4
 Корн Т. [Korn T. M.] 1.3.2, 2.2.4.1, 3.2.4
 Корнфельд И. П. 1.3, 1.3.2, 1.3.4
 Коулман П. [Coleman P. H.] 6.2
 Кох Х. фон [Koch H. von] 4.4
 Крайтчфилд Д. П. [Crutchfield J. P.] 2.4.1
 Кроновер Р. М. [Kronover R. M.] 4.2
 Круг Г. Й. [Krug H.-J.] 3.2.6
 Крылов Н. С. введ., 1.3, 1.3.1–1.3.5, 1.4, 2.2.4.1, 2.2.4.3
 Кудрявцев И. К. 3.2.4, 3.2.6, 3.3.1–3.3.2
 Кудряшов Н. А. 3.2.1
 Кузнецов В. И. 3.2.7
 Кузнецова О. В. 1.2.1
 Кук А. [Cook A. E.] 3.2.2
 Купман П. О. [Koopman B. O.] 1.2.3
 Курдюмов С. П. гл. 3, 3.1, 3.2.4, 3.3.1, 4.5, гл. 6, 6.3
 Кэмпбелл Д. К. [Campbell D. K.] 2.4.2, 4.2
- Л**
 Лайтхилл Дж. [Lighthill J.] 2.1
 Ландау Л. Д. 1.2.3, 2.2.3
 Ланжевен П. [Langevin P.] 2.1
 Лансфорд Г. [Lunsford G. H.] 3.2.2
 Лебег А. [Lebesgue H.] 4.3
 Лебовицц Дж. [Lebowitz J. L.] 1.2.3, 3.5.1
 Ледраппиер Ф. [Ledrappier F.] 2.2.4.1, 4.2
 Либман М. [Lieberman M. A.] 1.2.3, 1.3.2, 1.3.4, 2.1, 2.2.2–2.2.3, 2.2.4.1–2.2.4.2, 2.3, 2.4.1, 2.4.3–2.4.4, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 3.4, 3.5.1, 4.1–4.2, 4.5–4.6
 Лиувилль Ж. [Liouville J.] 2.2.3, 2.3, 2.4.4
 Лифшиц Е. М. 1.2.3, 2.2.3

- Лихтенберг А. [Lichtenberg A. J.] 1.2.3,
1.3.2, 1.3.4, 2.1, 2.2.2–2.2.3,
2.2.4.1–2.2.4.2, 2.3, 2.4.1,
2.4.3–2.4.4, 3.2.2, 3.3.1, 3.3.3, 3.4,
3.5.1, 4.1–4.2, 4.5–4.6
- Лоренц Э. Н. [Lorenz E. N.] 1.3.5,
2.2.1, 2.4, 3.1, 3.2.2–3.2.4, 3.4, 4.1
- Лэнфорд О. [Lanford O. E.] 3.2.2
- Ляпунов А. М. 2.2.1, 2.2.4, 2.2.4.1
- М**айерс Дж. Э. [Myers J. E.] 3.2.6
- Мак-Кракен М. [McCracken M.]
2.2.4.2
- Максвелл Дж. К. [Maxwell J. C.]
1.1–1.2, 1.2.1–1.2.2, 1.2.2.1–1.2.2.2,
1.2.2.4
- Малинецкий Г. Г. 2.1, гл. 6, 6.1
- Мандельброт Б. [Mandelbrot B.]
введ., 3.2.4, 4.1–4.6, гл. 6, 6.1–6.2
- Мандельштам Л. И. 3.2.5
- Манневиль П. [Manneville P.] 2.4.4
- Марсен Дж. [Marsden J. E.] 2.2.4.2
- Меламит А. [Melamit A.] 1.2.3
- Менгер К. [Menger K.] 4.3
- Метцлер Р. [Metzler R.] 5.4
- Мисра Б. [Misra B.] 1.3.4
- Михайлов А. С. 3.2.5, 3.3.1–3.3.2
- Мозер Ю. [Moser J.] 2.3, 2.4.4
- Монин А. С. 3.3.3
- Музалевская Н. И. гл. 6
- Мухин Р. Р. 2.3
- Н**азаров В. И. 3.2.7
- Нейман Дж фон [Neumann J. von]
1.2.3, 2.2.4.3
- Немыцкий В. В. 2.2.1
- Нигматуллин Р. Р. [Nigmatullin R. R.]
5.4
- Николис Г. [Nicolis G.] 2.1, 2.2.2,
3.2.4, 3.4, 3.5.1, 4.1–4.2
- Новиков И. Д. введ.
- Ноттейл Л. [Nottale L.] гл. 6
- О**гурцов А. П. 1.2.2.3
- Окстоби Дж. [Oxtoby J. C.] 1.2.3
- Орнштейн Д. [Ornstein D. S.] 1.3
- Оствальд В. [Ostwald W.] 3.2.6
- Отт Э. [Ott E.] 3.2.3, 5.4
- Оттино Дж. [Ottino J.] 2.1
- П**анченко А. И. 5.5
- Парменстер Р. [Parmenter R. H.] 2.2.4.3
- Паскаль Г. [Pascal H.] 5.4
- Паскаль Дж. П. [Pascal J. P.] 5.4
- Паста Дж. [Pasta J.] 1.2.3
- Паули В. [Pauli W.] 1.3.4, 2.4.4
- Пенроуз О. [Penrose O.] 1.2.3, 3.5.1
- Песин Ю. Б. 2.2.4.1
- Петров Ю. П. 1.1
- Пинскер М. С. 1.3.4
- Питаевский А. С. 3.2.3, 3.3.3
- Питронеро Л. [Pietronero L.] 6.2
- Планшероль М. [Plancherel M.] 1.2.3
- Полак Л. С. 1.2, 3.2.5, 3.3.1–3.3.2
- Польман Л. [Pohlmann L.] 3.2.6
- Помо И. [Pomeau Y.] 2.4.4
- Постон Т. [Poston T.] 2.2.1
- Потапов А. Б. 2.1, гл. 4, 4.1–4.2, 4.4,
4.7, гл. 6, 6.1–6.2
- Пригожин И. [Prigogine I.] 1.2.1,
1.2.3, 1.3.1, 1.3.4, 2.1, 2.2.1–2.2.3,
2.2.4.3, 2.3, 3.2.4–3.2.7, 3.3.2–3.3.3,
3.4, 3.5.1, 3.6, 4.1–4.2
- Пуанкаре А. [Poincaré H.] 1.2.3,
1.3.2–1.3.3, 2.1, 2.2.1–2.2.4, 2.2.4.2,
2.2.4.4, 2.3, 2.4.4, 3.5.1, 4.3
- Р**абинович М. И. 1.3.4, 3.2.3, 3.2.5,
3.3.1, 3.3.3
- Робертс П. [Roberts P. H.] 3.2.2
- Розгачева И. К. гл. 6, 6.2
- Розенталь А. [Rosenthal A.] 1.2.3
- Романовский Ю. М. 2.2.2, 2.2.4.4,
3.2.7, 3.3.3
- Рохлин В. А. 1.3, 1.3.4
- Руденко А. П. 3.2.7
- Рыскин Н. М. 3.2.5
- Рюэль Д. [Ruelle D.] гл. 1, 1.2.3,
3.2.3–3.2.4, 3.3.3, 4.2, 4.6

- Сайто Н. [Saito N.] 2.2.4.3
 Самарский А. А. 3.2.1
 Саттингер Д. [Sattinger D. H.] 2.2.4.2
 Симонов А. А. 3.2.3
 Синай Я. Г. введ., 1.2.3, 1.3, 1.3.2–1.3.5, 1.4, 2.2.4.1, 2.2.4.3, 2.4.1, 3.2.2
 Смейл С. [Smale S.] 2.2.1, 3.2.3
 Стенгерс И. [Stengers I.] 1.2.3, 2.2.1, 2.2.3, 3.2.4, 3.2.7, 3.3.2–3.3.3
 Степанов В. В. 2.2.1
 Стрет (Страт) Дж. (лорд Рэлей) [Strutt J. W. (Lord Rayleigh)] 1.2.1–1.2.2, 1.2.2.2–1.2.2.3
 Стьюарт И. [Stewart I.] 2.2.1
- Такенс Ф. [Takens F.] 2.4.1, 3.2.3–3.2.4, 3.3.3, 4.6
 Тебальди К. [Tebaldi C.] 3.3.1
 Тейяр де Шарден П. [Teilhard de Chardin P.] 6.3
 Тимашев С. Ф. 6.1
 Тирикорми П. [Teerikorpi P.] 4.2, гл. 6, 6.2
 Тихомиров В. М. 4.2
 Толмен Р. [Tolman R. C.] 1.3.1, 3.5.1
 Том Р. [Thom R.] 2.2.1
 Томсон В. (лорд Кельвин) [Thomson W. (Lord Kelvin)] 1.1, 1.2.1, 3.1
 Тоффлер О. (Тоффлер А.) [Toffler Alvin] 3.2.4
 Трофименко А. П. введ.
 Трубецков Д. И. 2.4.4, 3.2.5, 4.4, 6.3
 Тьюринг А. М. [Turing A.] 3.2.1
- Уайтмен К. [Whiteman K. J.] 2.3
 Уиттекер Э. Т. [Whittaker E. T.] 2.2.1
 Улам Ст. [Ulam S.] 1.2.3
 Уленбек Дж. [Uhlenbeck G. E.] 1.2.3
 Урицкий В. М. гл. 6
 Урысон П. С. [Urysohn P. S.] 4.3
- Фармер Дж. Д. [Farmer J. D.] 4.2
 Федер Е. [Feder J.] 4.5, гл. 6
- Фейгенбаум М. [Feigenbaum M. J.] 2.2.4.2, 2.4.4, 6.1
 Ферми Э. [Fermi E.] 1.2.3, 2.3, 2.4.3, 3.2.1
 Фок В. А. 1.3.3
 Форд Дж. [Ford J.] 1.2.3, 3.2.2
 Францесчини В. [Franceschini V.] 3.3.1
- Хакен Г. [Haken H.] 1.3.1, гл. 3, 3.1, 3.2.3–3.2.4, 3.3.2, 3.5.1
 Халмош П. Р. [Halmos P. R.] 1.2.3
 Хаусдорф Ф. [Hausdorff F.] 4.2
 Хеджес Э. С. [Hedges E. S.] 3.2.6
 Хедлунг Дж. [Hedlung G. A.] 1.2.3, 1.3.3
 Хейлес К. [Heiles C.] 1.3.5, 2.4, 2.4.1, 2.4.3–2.4.4, 3.1, 3.2.2
 Хеллман Р. [Helleman R. H. G.] 2.1
 Хенон М. [Hénon M.] 1.3.5, 2.4, 2.4.1, 2.4.3–2.4.4, 3.1, 3.2.2–3.2.3, 3.3.3, 3.4
 Хинчин А. Я. [Khinchin A.] 1.2.3
 Холмс Ф. [Holmes Ph.] 2.2.2, 2.4.2, 3.3.3
 Хопф Э. [Hopf E.] введ., 1.2.3, 1.3.1, 1.3.3, 1.3.5, 1.4, 2.2.4.1–2.2.4.2
 Хэлвин С. [Halvin S.] 4.2, гл. 6
- Цаллис К. [Tsallis C.] 4.5
 Цицин Ф. А. 5.1, гл. 6, 6.2
- Чайковский Ю. В. 1.2.2.3, 3.2.7, 4.5
 Чернавская С. Д. 2.2.4.3
 Чернавский Д. С. 2.2.4.3
 Честер Дж. [Chester G. V.] 1.1, 1.3.4, 2.4.4
 Чириков Б. В. [Chirikov B. V.] 1.2.3, 1.3.2–1.3.4, 2.1, 2.2.4.3, 2.3, 2.4, 3.1, 3.2.1, 3.3.2, 5.4
- Шепелянский Д. Л. [Shepelyansky D. L.] 1.3.4, 2.1, 2.4
 Шилов Г. Е. 5.4
 Шлезингер М. Ф. [Schlesinger M. F.] 5.4

- Шнайдер У. Р. [Schneider W. R.] 5.4
Шредер М. [Shreder M.] 4.2, гл. 6
Шрёдингер Э. [Schrödinger E.] 3.1
Шудо А. [Shudo A.] 2.2.4.3
Шустер Г. [Schuster H. G.] 1.3.2, 1.3.4,
2.1, 2.2.2, 2.2.4.1, 2.3, 2.4,
2.4.2–2.4.3, 3.3.1, 3.3.3, 4.1–4.2, 4.6
Шустер П. [Schuster P.] 3.2.7, 3.3, 3.5.1
- Эгглстон Г. [Eggleston H. G.] 4.2
Эйген М. [Eigen M.] 3.2.7
Эйнштейн А. [Einstein A.] 1.2.2
- Экманн Дж.-П. [Eckmann J.-P.] 3.2.3,
3.3.3, 4.2, 4.6
Эренфест П. [Ehrenfest P.] 1.2, 1.2.2,
1.2.2.1–1.2.2.4, 1.2.3–1.2.4
Эренфест Т. [Ehrenfest T.] 1.2, 1.2.2,
1.2.2.1–1.2.2.4, 1.2.3–1.2.4
- Ю Л. [Yu L. Y.] 2.2.4.3
Юзвинский С. А. 1.3
- Якоби К. [Jacobi C.] 2.2.4.2
Якобсон М. В. [Yakobson M. V.] 1.3.4