В. И. Арнольд
А. Н. Варченко
С. М. Гусейн-Заде

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 513.775
ББК 22.16
А84

Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.

А84 Особенности дифференцируемых отображений. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2009. — 672 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-456-9

Теория особенностей дифференцируемых отображений — бурно развивающаяся область современной математики, являющаяся грандиозным обобщением исследования функций на максимум и минимум и имеющая многочисленные приложения в математике, естествознании и технике (так называемые теории бифуркаций и катастроф). Первая часть книги посвящена теории устойчивости гладких отображений, критическим точкам гладких функций, особенностям каустик и волновых фронтов в геометрической оптике. Во второй части рассматриваются семейства комплексных гиперповерхностей, асимптотики интегралов многомерных методов стационарной фазы и перевала, приложения методов алгебраической геометрии к исследованию критических точек функций.

Для математиков — научных работников, аспирантов, студентов, а также для специалистов в области механики, физики, техники и других наук, интересующихся теорией особенностей дифференцируемых отображений.

Предыдущее издание книги вышло в 2004 г.

ББК 22.16

Владимир Игоревич Арнольд
Александр Николаевич Варченко
Сабир Меджидович Гусейн-Заде

ОСОБЕННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Редактор О. Васильева
Корректор А. Котова

Подписано в печать 19.11.2008 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 42. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

© Арнольд В. И., Варченко А. Н.,
Гусейн-Заде С. М., 2004
© МЦНМО, 2004

ISBN 978-5-94057-456-9

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Формальная красота математики определяется так («Колмогоров». Книга 3. М.: Физматлит, 2003. С. 122):

«1. Нравятся сложные формы, удивляющие, несмотря на свою сложность, доступностью для наглядного понимания (циклоида и тому подобные кривые).

2. Нравится соединение без противоречия различных, казалось бы, не связанных закономерностей».

Предлагаемая книга о теории особенностей удовлетворяет именно этим двум условиям: она доставляет наглядное понимание сложнейших явлений физики, вроде каустик и волновых фронтов, включая детальный анализ циклоид и их обобщений — с одной стороны, а с другой — связывает воедино большинство областей прикладной и чистой математики, от вариационного исчисления до дифференциальной геометрии, от теории простых алгебр Ли до топологической теории узлов и кос, от многогранников Ньютона асимптотических разложений до алгебраической геометрии теории ветвления интегралов, от геометрической оптики и теории радуги до квантовой механики и теории адиабатических инвариантов, от теории чисел до диофантовой геометрии подмногообразий проективного пространства, от осциллирующих интегралов до многомерного метода перевала, от характеристических классов и кобордизмов до преобразований Лежандра и симплектической топологии лагранжевых многообразий и до дифференциальных уравнений Гамильтона классической и квантовой механики.

При этом неочевидные, но глубокие связи между всеми этими предметами становятся не только ясными проявлениями единства всего математического естествознания, но и применяются для облегчения исследований в каждой из указанных дисциплин при помощи методов других: сложное поведение управляемых динамических систем или систем лучей в оптически неоднородных средах оказывается объясненным симметриями правильных многогранников, вроде икосаэдра или пяти кубов Кеплера, вписанных им в додекаэдр, который Колмогоров сопроводил в своем дневнике («Колмогоров», с. 140) словами Гёте:

Jeder Weg zum rechten Zwecke
Ist auch recht in jeder Strecke.

Продолжая свое описание природы математики, Колмогоров писал в цитированном выше дневнике 1943 года («Колмогоров», с. 52): «В каждый данный момент существует лишь тонкий слой между тривиальным и недоступным. В этом слое и делаются математические открытия.»

Читатель настоящей книги вводится ею как раз в тот тонкий слой, где становится легко сделать шаг к недоступному. Книга рассчитана именно на желающего сделать этот шаг читателя.

Описывая мистические порой результаты теории особенностей, авторы старались избежать упрека, сделанного Колмогоровым Г. Вейлю («Колмогоров», с. 136): «нет уверенности, что он стремится всегда к простоте, а не к мистификации».

Именно простота излагаемых фундаментальных теорий, а не их непонятность, была основным принципом отбора материала для настоящей книги, значительную часть которой составляет теория простых особенностей и ее связи с теорией простых групп Ли и порожденных отражениями групп Коксетера (вроде группы симметрий додекаэдра).

Приложения этих теорий часто появляются под именами «Теории катастроф», «Квантовой теории катастроф». Мы оставляем читателю возможность самостоятельно оценить достигаемые этими терминологическими нововведениями более поздние варианты тех использованных теорией катастроф фундаментальных исходных фактов теории особенностей, которые мы излагаем ниже. Читатель получил бы больше, чем новая терминология, от решения той сотни задач, которой заканчивается третье издание книги В. И. Арнольда «Теория катастроф» (М.: Наука, 1990).

Со времени предыдущего издания настоящего сочинения вышло несколько новых книг на близкую тему; читателю можно порекомендовать «Особенности каустик и волновых фронтов» и «Волновые фронты и топология кривых» (М: Фазис, 1996; М.: Фазис, 2002) и указанную там литературу.

В. И. Арнольд

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЕРВОМУ ТОМУ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

> ...нет ничего увлекательнее и грандиознее, ничто так не ошеломляет и не захватывает человеческого духа, как начало какой-нибудь науки. С первых же пяти-шести лекций вас уже окрыляют самые яркие надежды, вы уже кажетесь себе хозяином истины. И я отдался наукам беззаветно, страстно, как любимой женщине. Я был их рабом и, кроме них, не хотел знать никакого другого солнца. День и ночь, не разгибая спины, я зубрил, разорялся на книги, плакал, когда на моих глазах люди эксплуатировали науку ради личных целей. Но я недолго увлекался. Штука в том, что у каждой науки есть начало, но вовсе нет конца, все равно, как у периодической дроби. Зоология открыла тридцать пять тысяч видов...
>
> *А. П. Чехов*. На пути

В этой книге изложены начала «зоологии» особенностей дифференцируемых отображений. Эта теория — молодая отрасль анализа, занимающая в современной математике центральное положение: здесь пересекаются пути, ведущие от самых абстрактных отделов математики (алгебраическая и дифференциальная геометрия и топология, группы и алгебры Ли, комплексные многообразия, коммутативная алгебра и т. п.) к наиболее прикладным областям (дифференциальные уравнения и динамические системы, оптимальное управление, теория бифуркаций и катастроф, коротковолновые и перевальные асимптотики, геометрическая и волновая оптика).

Основные приложения теории особенностей заключаются в выделении и детальном исследовании в каждой ситуации небольшого набора наиболее часто встречающихся стандартных особенностей, которые только и могут быть у объектов общего положения: все более сложные особенности распадаются на простейшие при малом шевелении объекта. Мы приводим довольно полные списки, рисунки и определители таких простейших особенностей для целого ряда объектов (функций, отображений, многообразий, бифуркаций, каустик, волновых фронтов и т. д.), стараясь по возможности сократить читателю путь от исходных начал к приложениям. В соответствии с этим мы стремились изложить основные идеи, методы и результаты теории особенностей таким образом, чтобы читатель мог, не задерживаясь на обосновательной, теологической части теории, как можно быстрее научиться применять ее методы и результаты.

Особые усилия были приложены к тому, чтобы изложение основных идей и методов не заслонялось техническими деталями. С наибольшей подробностью рассматриваются наиболее фундаментальные и простые вопросы, в то время как изложение более специальных и трудных частей теории носит характер обзора.

У читателя настоящей книги предполагаются лишь очень небольшие математические познания (умение дифференцировать и немного линейной алгебры и геометрии) *). Авторы старались строить изложение так, чтобы читатель мог пропускать места, оказавшиеся для него трудными, без большого ущерба для понимания дальнейшего.

В настоящее время теория особенностей бурно развивается (ср., например, списки нерешенных задач в [18] и [251]), и мы не пытались охватить все многочисленные направления современных исследований по теории особенностей и ее приложениям (неполная библиография из примерно 500 работ имеется у Постона и Стюарта [428] и у Брискорна [274]).

Основу этой книги составил ряд спецкурсов, читавшихся на механико-математическом факультете МГУ в 1966—1978 гг. При подготовке книги были использованы записки лекций, составленные В. А. Васильевым, Е. Е. Ландис, А. Г. Хованским; А. Г. Хованским написан § 5. Авторы благодарны перечисленным лицам, а также участникам семинара по теории особенностей, помощью которых они широко пользовались, в особенности А. Г. Кушниренко, Е. И. Коркиной и В. И. Матову.

Комплексно-аналитические и алгебро-геометрические аспекты теории особенностей (монодромия, пересечения, асимптотики интегралов и смешанные структуры Ходжа) войдут в готовящуюся к изданию книгу «Особенности дифференцируемых отображений. Алгебро-топологические аспекты» **).

Ясенево, март 1979 г.

*) Читателя-нематематика полезно предупредить о терминологии:

1) многообразия — это многомерные обобщения кривых и поверхностей, а отображения — функций; диффеоморфизмы — это взаимно однозначные отображения, дифференцируемые вместе с обратными им;

2) преобразования множества — это взаимно однозначные отображения множества на себя; группа преобразований множества — это набор преобразований, содержащий наряду с каждым преобразованием обратное и наряду с каждыми двумя преобразованиями их произведение; группа — продукт аксиоматизации свойств групп преобразований;

3) алгебра есть продукт аксиоматизации свойств множества всех функций на многообразии (элементы алгебры, подобно функциям, можно складывать и умножать друг на друга и на числа, причем выполняются обычные правила ассоциативности, дистрибутивности и коммутативности; в алгебре отмечен элемент 1 со свойством $1f \equiv f$);

4) модуль над алгеброй есть продукт аксиоматизации свойств множества всех векторных полей на многообразии (элементы модуля можно складывать между собой и умножать на элементы алгебры);

5) идеал в алгебре — это ее подмодуль над самой собой. Пример: в алгебре всех функций на многообразии функции, обращающиеся в нуль на данном подмногообразии, образуют идеал.

**) Арнольд В. И., Варченко А. М., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Монодромия и асимптотики интегралов. М.: Наука, 1984. В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ТОМУ ПЕРВОГО ИЗДАНИЯ

Настоящая книга *) является продолжением книги А р н о л ь д В. И., В а р ч е н к о А. И., Г у с е й н - З а д е С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов. — М.: Наука, 1982 г.

Если предыдущая книга содержала начала зоологии особенностей дифференцируемых отображений, т. е. была посвящена описанию того, где и какие особенности могут встречаться, то эта книга содержит элементы анатомии и физиологии особенностей дифференцируемых функций. Это означает, что в ней рассматриваются вопросы строения особенностей и их функционирования.

Другой отличительной чертой настоящей книги является упор на вопросы, для которых важен выход в комплексную область, в то время как первая часть посвящена темам, для большинства из которых несущественно, над каким полем (вещественным или комплексным) они рассматриваются. Такие вопросы, как, например, распадение особенностей, связь особенностей с алгебрами Ли, асимптотики различных интегралов, зависящих от параметров, становятся яснее в комплексной области.

Книга состоит из трех глав **). В первой главе рассматривается топологическое строение изолированных критических точек голоморфных функций. Описываются основные топологические характеристики таких критических точек: исчезающие циклы, отмеченные базисы, матрицы пересечений, группы монодромии, оператор вариации — их взаимоотношения и методы вычислений.

Вторая глава посвящена исследованию асимптотик интегралов метода стационарной фазы, широко встречающихся в приложениях. Излагаются методы вычисления асимптотик, обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фаз интегралов (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), приведены таблицы порядков асимптотик для критических точек фаз, которые расклассифицированы в предыдущей книге (в частности, для простых, унимодальных и бимодальных).

*) Первое издание книги вышло в двух томах, соответствующих частям I и II настоящего издания. — *Прим. ред.*

**) В настоящем издании это главы IV—VI. — *Прим. ред.*

Третья глава посвящена интегральному исчислению на многообразиях уровня критической точки голоморфной функции. В ней рассматриваются интегралы голоморфных форм, заданных в окрестности критической точки, по циклам, лежащим на гиперповерхностях уровня функции. Интеграл голоморфной формы по циклу голоморфно изменяется при непрерывной деформации цикла из одной гиперповерхности уровня в другую. Таким образом возникают многозначные голоморфные функции, заданные на комплексной прямой в окрестности критического значения функции. Оказывается, что асимптотики этих функций (т. е. асимптотики интегралов) при стремлении уровня к критическому связаны с разнообразными характеристиками исходной критической точки голоморфной функции.

Теория особенностей является обширной и быстро развивающейся областью математики, и мы не стремились затронуть все ее направления.

Список литературы содержит работы, непосредственно связанные с текстом (хотя иногда и не цитируемые в нем), а также работы, связанные с предыдущей книгой, по тем или иным причинам не вошедшие в ее библиографию.

Авторы благодарны участникам семинара по теории особенностей МГУ, в особенности — А. М. Габриэлову, А. Б. Гивенталю, А. Г. Кушниренко, Д. Б. Фуксу, А. Г. Хованскому. Авторы благодарны также В. С. Варченко и Т. В. Огородниковой, оказавшим большую помощь при подготовке рукописи к печати.

Авторы

Часть I

КЛАССИФИКАЦИЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК, КАУСТИК И ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Теория особенностей гладких отображений представляет собой далекое обобщение исследования функций одной переменной на максимум и минимум. Таким образом, особенности, о которых идет речь, связаны не с разрывами и полюсами, а с обращением в нуль некоторых производных или якобианов.

В настоящей главе вводятся основные понятия теории особенностей дифференцируемых отображений: особые точки, их локальные алгебры и другие инварианты; определяются понятия, связанные с устойчивостью, и приводится начало классификации особенностей.

§ 1. Простейшие примеры

Здесь описана принадлежащая Х. Уитни классификация особенностей гладких отображений пространств малых размерностей.

1.1. Критические точки функций. Точка x называется *критической точкой* функции f, если в этой точке производная функции f равна нулю.

Пример. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, заданная формулой $y = x^2$. Точка 0 — критическая точка этой функции.

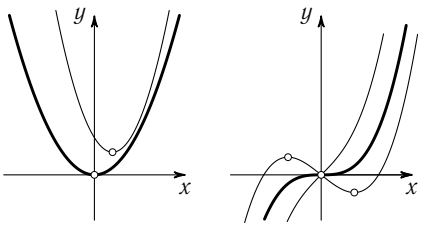


Рис. 1

Критические точки функции делятся на критические точки общего положения, или невырожденные, и вырожденные критические точки.

Определение. Критическая точка гладкой функции называется *невырожденной*, если второй дифференциал функции в этой точке — невырожденная квадратичная форма.

Пример. Критическая точка 0 функции $y = x^2$ невырождена, а критическая точка 0 функции $y = x^3$ вырождена (рис. 1).

Рассмотрим любую гладкую функцию, близкую (с производными) к функции $y = x^2$. Ясно, что вблизи нуля эта функция будет иметь критическую точку, подобную критической точке функции $y = x^2$. В этом смысле

критическая точка функции $y = x^2$ устойчива: при малом шевелении функции она не исчезает, но лишь слегка сдвигается.

Совершенно иначе ведет себя при малых шевелениях вырожденная критическая точка функции $y = x^3$.

П р и м е р. Рассмотрим семейство функций одной переменной $y = x^3 + \varepsilon x$. При малых ε функции семейства можно рассматривать как малое шевеление функции $y = x^3$. Мы видим, что при этом шевелении вырожденная критическая точка $x = 0$ либо исчезает (при $\varepsilon > 0$), либо распадается на две невырожденных, на расстоянии порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$ от нее (при $\varepsilon < 0$).

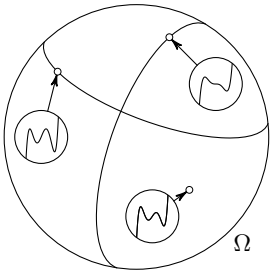


Рис. 2

Таким образом, критическая точка функции $y = x^2$ устойчива, а функции $y = x^3$ — неустойчива.

В случае функций одной переменной разобраться во всей ситуации нетрудно. Рассмотрим пространство Ω всех интересующих нас функций *).

Выделим в этом пространстве множество функций, имеющих вырожденные критические точки или имеющих совпадающие значения в разных критических точках (рис. 2). [В случае, когда область определения — отрезок, мы будем причислять концевую точку к критическим, считая ее невырожденной, если производная в ней ненулевая.] Нетрудно сообразить, что такие «вырожденные» функции образуют тощее множество, а именно гиперповерхность, т. е. поверхность коразмерности один, «задаваемую одним уравнением», в нашем пространстве функций (ниже мы как придадим этим словам точный смысл, так и докажем соответствующую теорему в более общей ситуации). Указанная гиперповерхность делит наше пространство функций на части, в каждой из которых все функции «устроены одинаково»: их значения в последовательных критических точках идут для всех функций в каждой из указанных областей в одном порядке. Функции, не имеющие ни вырожденных критических точек, ни кратных критических значений, называются *функциями Морса*. При малом шевелении функция Морса «сохраняет свой вид» и может быть превращена в исходную функцию гладкими заменами независимой и зависимой переменных x и y. В этом смысле функция Морса устойчива. Таким образом, в рассматриваемом случае отображений с одномерными пространствами прообразов и образов устойчивые отображения образу-

*) Это может быть пространство бесконечно дифференцируемых или достаточно гладких функций, или пространство аналитических функций, или даже пространство многочленов; область определения функций удобно считать компактной, рассматривая функции на окружности или на отрезке.

ют открытое всюду плотное множество в пространстве всех отображений. При этом устойчивые отображения допускают достаточно явное описание и классификацию, а неустойчивые, хотя и могут быть устроены гораздо более сложным образом (множество критических точек гладкой функции может быть произвольным замкнутым множеством), превращаются в устойчивые при малом шевелении: каждая сложная особенность рассыпается на несколько невырожденных, устойчивых.

Идеал, к которому стремится теория особенностей, достигнут в частном случае отображений на прямую (теория Морса). Интересующие нас результаты теории Морса можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а. 1) *Устойчивые отображения* $f\colon M^m \to \mathbb{R}^1$ *замкнутого* *) *многообразия* M^m *на прямую образуют всюду плотное множество в пространстве всех гладких отображений.*

2) *Чтобы отображение* f *было устойчивым, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий.*

M_1. *Отображение* f *устойчиво в каждой точке* (*иначе говоря, все критические точки функции* f *невырождены*).

M_2. *Все критические значения функции* f *различны.*

3) *Отображение* $f\colon M^m \to \mathbb{R}^1$ *устойчиво в точке* x_0 *тогда и только тогда, когда в окрестностях точек* $x_0 \in M^m$ *и* $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^1$ *можно так ввести координаты* $x_1, \ldots, x_m$; y, *что отображение запишется в одном из* $m + 2$ *видов*:

MI) $y = x_1$,

MII$_k$) $y = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_m^2$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

Доказательство см., например, в [173].

Возникает вопрос, сохранится ли такое положение в больших размерностях, т. е. для отображений $f\colon M^m \to N^n$ многообразий произвольных размерностей m и n.

1.2. Критические точки и критические значения гладких отображений. Рассмотрим дифференцируемое отображение $f\colon M^m \to N^n$. Прежде всего, мы должны перенести на этот случай понятие критической точки. Производная отображения f в точке x представляет собой линейное отображение касательного пространства к многообразию-прообразу в точке x в касательное пространство к многообразию-образу в точке $f(x)$:

$$f_{*x}\colon T_x M^m \to T_{f(x)} N^n.$$

П р и м е р. Пусть M^2 — поверхность сферы в трехмерном пространстве, N^2 — плоскость, f — проектирование сферы вдоль вертикали на горизонтальную плоскость (рис. 3).

*) Здесь и далее замкнутое многообразие — это компактное многообразие без края.

Линейное отображение f_{*x} плоскости T_xM, касательной к сфере в точке x, в плоскость $T_{f(x)}N$, касательную к горизонтальной плоскости, является невырожденным линейным отображением, если точка x не принадлежит горизонтальному экватору сферы. Если же x — точка экватора, то касательная плоскость к сфере в точке x содержит вертикальную прямую. В этом случае оператор проектирования f_{*x} имеет нетривиальное ядро (подпространство, переходящее в нуль). Ядро оператора f_{*x} в точках экватора одномерно. Ранг оператора f_{*x} в этих точках равен 1.

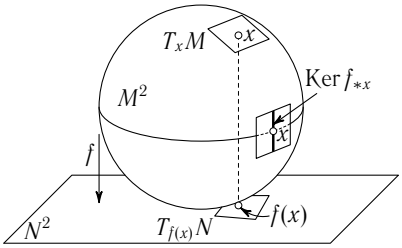


Рис. 3

Дадим теперь общее определение.

О п р е д е л е н и е. Точка x многообразия M называется *критической точкой* для гладкого отображения $f\colon M \to N$, если ранг производной

$$f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$$

в этой точке меньше максимально возможного, т. е. меньше меньшей из размерностей многообразий M и N:

$$\operatorname{rank} f_{*x} < \min(\dim M, \dim N).$$

З а м е ч а н и е. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — локальные координаты в окрестности точки x на M и $y_1, \ldots, y_n$ — в окрестности точки $f(x)$ на N. Отображение f задается в этих координатах n гладкими функциями от m переменных:

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

Матрица $(\partial f_i/\partial x_j)$ называется *матрицей Якоби* отображения. В этих терминах можно сказать, что *точка x является критической, если ранг матрицы Якоби в этой точке не максимален.*

П р и м е р. Для отображения проектирования сферы на горизонтальную плоскость критическими точками являются точки горизонтального экватора. Вне экватора ранг производной равен 2, в точках же экватора ранг оператора f_{*x} падает до 1.

Образ критической точки называется *критическим значением.*

П р и м е р. Критические значения отображения проектирования сферы на плоскость образуют окружность видимого контура сферы.

1.3. Дифференцируемая эквивалентность. При классификации гладких отображений имеется несколько разных возможностей. По-видимому, наиболее грубая классификация — топологическая: мы считаем два отображения *топологически эквивалентными*, если существуют гомео-

морфизмы (взаимно однозначные взаимно непрерывные отображения) многообразий прообраза и образа, превращающие одно отображение в другое. Функции $y = x^2$ и $y = x^4$ топологически эквивалентны.

Если $f_p\colon M_p \to N_p$, $p = 1, 2$, — два данных отображения, то их топологическая эквивалентность означает, что существуют такие гомеоморфизмы $h\colon M_1 \to M_2$ и $k\colon N_1 \to N_2$, что $f_2 = kf_1h^{-1}$.

Иными словами, топологическая эквивалентность — это коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

в которой вертикальные стрелки — гомеоморфизмы.

Для целей анализа топологическая эквивалентность, как правило, слишком грубое понятие. Например, функция с вырожденной, неустойчивой особенностью $y = x^4$ топологически эквивалентна устойчивой. Поэтому в теории особенностей основным является другое понятие: понятие дифференцируемой эквивалентности.

О п р е д е л е н и е. *Дифференцируемой эквивалентностью* дифференцируемых отображений $f_1\colon M_1 \to N_1$ и $f_2\colon M_2 \to N_2$ называется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{f_1} & N_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ M_2 & \xrightarrow{f_2} & N_2 \end{array}$$

вертикали которой — диффеоморфизмы (взаимно однозначные отображения, дифференцируемые вместе со своими обратными *)).

З а м е ч а н и е 1. На языке локальных координат отображение $y = f(x)$ — это набор функций, диффеоморфизм h — это замена независимых переменных x, диффеоморфизм k — замена зависимых переменных y. С этой точки зрения вопрос о дифференцируемой эквивалентности есть вопрос о том, можно ли превратить одно отображение в другое при помощи гладких замен независимых и зависимых переменных.

З а м е ч а н и е 2. Выписанная выше коммутативная диаграмма означает тождество

$$k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x).$$

*) Здесь и далее слово *дифференцируемый* или *гладкий* означает, если не оговорено противное, «непрерывно дифференцируемый нужное число раз», например бесконечно дифференцируемый.

В этой формуле h^{-1} стоит *справа* от f_1, а k — *слева*. Поэтому диффеоморфизмы h^{-1} пространства прообразов (и замены независимых переменных x) называют еще *правыми заменами*. Точно так же диффеоморфизмы k пространств образов (и замены зависимых переменных y) называют *левыми заменами*.

З а м е ч а н и е 3. Еще один способ выразить то же самое состоит в следующем. Рассмотрим множество $\Omega(M, N)$ всех гладких отображений из M в N. Рассмотрим группу $\operatorname{Diff} M$ всех диффеоморфизмов многообразия прообразов M на себя и группу $\operatorname{Diff} N$ всех диффеоморфизмов многообразия образов N на себя.

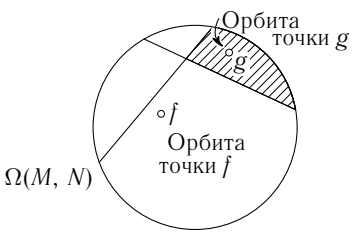


Рис. 4

Прямое произведение групп

$$\operatorname{Diff} M \times \operatorname{Diff} N$$

состоит из всех пар (h, k) диффеоморфизмов пространств прообраза $(h\colon M \to M)$ и образа $(k\colon N \to N)$.

Группа $\operatorname{Diff} M \times \operatorname{Diff} N$ действует на множестве $\Omega(M, N)$ следующим образом: если $f \in \Omega(M, N)$, $h \in \operatorname{Diff} M$, $k \in \operatorname{Diff} N$, то $(h, k)f = k \circ f \circ h^{-1}$.

Нетрудно проверить, что это действительно действие, т. е. что

$$(h_1h_2, k_1k_2)f = (h_1, k_1)((h_2, k_2)f).$$

Это действие называется *лево-правым* *) (действие $\operatorname{Diff} M$ называется *правым*, а действие $\operatorname{Diff} N$ — *левым*).

В этих терминах мы можем переформулировать определение дифференцируемой эквивалентности так: *два отображения M в N дифференцируемо эквивалентны, если и только если они принадлежат одной орбите лево-правого действия* (рис. 4).

П р и м е р. Связные компоненты множества всех функций Морса (определенных в п. 1.1) являются орбитами лево-правого действия.

1.4. Устойчивость. Рассмотрим гладкое отображение $f\colon M \to N$ замкнутого многообразия M в многообразие N.

О п р е д е л е н и е. Отображение f называется *дифференцируемо устойчивым* (или подробнее *лево-право-дифференцируемо устойчивым*, или короче — просто *устойчивым*), если всякое достаточно близкое **) к нему отображение ему дифференцируемо эквивалентно.

Иными словами, f устойчиво, если его лево-правая орбита открыта.

*) Не путайте с левым действием в алгебраической терминологии.

**) Достаточно мало отличающееся от f при учете достаточно большого числа производных.

Пример. Отображение проектирования сферы на плоскость устойчиво. Отображение окружности $\{x \bmod 2\pi\}$ в прямую $\{y\}$, заданное формулой $y = \sin 2x$, неустойчиво.

Замечание. Если заменить дифференцируемую эквивалентность в предыдущем определении топологической, то получится определение *топологической устойчивости*.

Пример. Отображение проектирования сферы на плоскость топологически устойчиво, как и всякое дифференцируемо устойчивое отображение. Топологически устойчивые, но дифференцируемо неустойчивые отображения существуют, но указать пример не так легко (см. [160]). Формула $y = \sin 2x$ задает топологически неустойчивое отображение окружности в прямую.

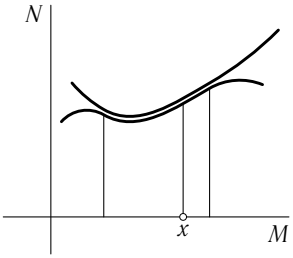


Рис. 5

Существуют также локальные варианты введенных понятий. Например, особенность функции $y = x^2$ в нуле устойчива, а особенность функции $y = x^3$ в нуле неустойчива. Чтобы дать формальное определение устойчивости отображения в точке, мы воспользуемся следующей терминологией.

Определение. *Ростком отображения $M \to N$ в точке x* из M называется класс эквивалентности отображений $\varphi\colon U \to N$ (каждое из которых определено в некоторой (своей) окрестности U точки x в M); здесь два отображения считаются эквивалентными, если они совпадают в некоторой окрестности точки x (эта окрестность имеет право быть меньшей, чем пересечение окрестностей, в которых определены оба отображения). Про два отображения из одного класса говорят также, что они имеют *общий росток в точке x* (рис. 5).

Иными словами, росток отображения f в точке x — это то, что от отображения остается, когда мы «бесконечно уменьшаем область определения».

Определение. Два ростка гладких отображений называются (*лево-право*, *дифференцируемо*) *эквивалентными*, если существуют ростки диффеоморфизмов прообраза и образа, переводящие первый росток во второй (если росток отображения f_1 в x_1 эквивалентен ростку отображения f_2 в x_2, то существуют росток в x_1 диффеоморфизма h, переводящего x_1 в x_2, и росток в $f_1(x_1)$ диффеоморфизма k, переводящего $f_1(x_1)$ в $f_2(x_2)$, такие, что $k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x)$ в достаточно малой окрестности точки x_2). Класс эквивалентности ростка в критической точке называется *особенностью*.

Определение. Росток гладкого отображения $f\colon M \to N$ в точке x из M (рис. 6) называется (*лево-право*, *дифференцируемо*) *устойчивым*,

если для сколь угодно малой окрестности U точки x существует такая окрестность E отображения *) f в $\Omega(M, N)$, что для любого отображения $\tilde{f}$ из E в U найдется такая точка $\tilde{x}$, что росток отображения $\tilde{f}$ в $\tilde{x}$ эквивалентен ростку отображения f в x.

Нетрудно проверить, что устойчивость в точке — свойство ростка, а не отображения: это свойство не теряется при изменениях f, не затрагивающих хоть какую-нибудь окрестность точки x.

Аналогично определяются *топологическая эквивалентность ростков* и *топологическая устойчивость ростков*.

Пример. Ростки отображений $y = x^2$ и $y = x^4$ вещественной прямой в нуле топологически эквивалентны. Росток отображения $y = x^2$ в 0 топологически (и даже дифференцируемо) устойчив. Росток отображения $y = x^4$ в 0 дифференцируемо (и даже топологически) неустойчив.

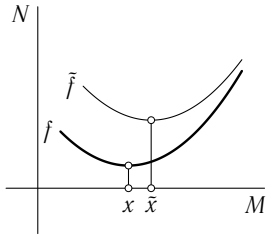


Рис. 6

1.5. Устойчивые отображения двумерных многообразий на двумерные. Начнем с уже рассматривавшегося примера — отображения проектирования сферы на плоскость (рис. 3). Особенности проектирования — это точки на экваторе сферы. Нетрудно сообразить, что росток отображения в каждой точке экватора устойчив.

Трудно представить себе, чтобы существовали другие устойчивые особенности отображений двумерных многообразий на двумерные. Действительно, то, что мы видим, рассматривая гладкие поверхности трехмерных тел, — это видимые контуры, состоящие из критических значений отображения проектирования поверхности на сетчатку глаза. Обычно нам кажется, что эти видимые контуры состоят из гладких кривых. Однако, поглядев вокруг себя (скажем, на лица окружающих нас людей) более внимательно, мы можем обнаружить, наряду с особенностями типа особенности проектирования на экваторе сферы, особенности еще одного типа. Эти особенности были открыты Х. Уитни, который в работе 1955 г. [502] полностью описал особенности отображений общего положения двумерных многообразий на двумерные. Эта работа Уитни является основополагающей для теории особенностей, датой рождения которой считается поэтому 1955 год.

Уитни установил, что *всякое гладкое отображение компактного двумерного многообразия в двумерное может быть как угодно*

*) Окрестность данного отображения — это множество всех отображений, мало отличающихся от данного с учетом производных до фиксированного порядка. В интересующем нас сейчас локальном случае можно считать, что $M \subset \mathbb{R}^m$ и $N \subset \mathbb{R}^n$ — области евклидовых пространств и E задается неравенствами $\|(\tilde{f} - f)\|_k < \varepsilon$, где $\|g\|_k = \sup\limits_{|\alpha| \leqslant k} |\partial^\alpha g / \partial x^\alpha|$.

близко (с любым числом производных) аппроксимировано устойчивым отображением.

Далее он исследовал строение устойчивых отображений. Росток такого отображения в каждой точке устойчив. Уитни описал все устойчивые ростки отображений двумерных многообразий (их оказалось, с точностью до дифференцируемой эквивалентности, ровно 3). Наконец, он доказал, что отображение компактного двумерного многообразия на двумерное устойчиво, если его росток в каждой точке устойчив и критические значения расположены «общим образом» (это — обобщение условия несовпадения критических значений в разных критических точках для функций Морса, см. п. 1.1).

Теорема Уитни. *Отображение двумерного многообразия в двумерное устойчиво в точке тогда и только тогда, когда в подходящих локальных координатах* (x_1, x_2) *в прообразе и* (y_1, y_2) *в образе отображение записывается в одном из трех видов*:

VI) $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ (*регулярная точка*);

VII) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2$ (*складка*);

VIII) $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$, $y_2 = x_2$ (*сборка*)

(*рассматриваемая точка имеет координаты* $x_1 = x_2 = 0$).

Иными словами, каждый устойчивый росток отображения двумерного многообразия на двумерное дифференцируемо эквивалентен одному их трех ростков отображений приведенного списка в нуле.

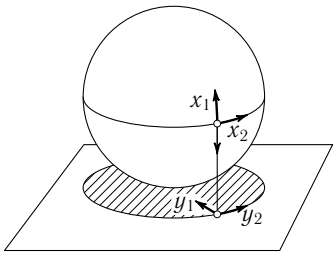


Рис. 7

Первый из приведенных ростков — это росток диффеоморфизма. К такому виду приводится всякое гладкое отображение двумерных многообразий в окрестности некритической точки.

Особенность отображения второго типа называется *складкой*. Это отображение плоскости на плоскость можно рассматривать как семейство отображений прямой на прямую ($y_1 = x_1^2$), зависящих (тривиальным образом) от одного параметра ($y_2 = x_2$).

Пример. Проектирование сферы на горизонтальную плоскость имеет на горизонтальном экваторе особенность типа складки, в чем легко убедиться, выбрав подходящие локальные координаты (x_2 и y_2 — долгота, x_1 — широта, см. рис. 7).

1.6. Сборка Уитни. *Сборкой Уитни* называется третья устойчивая особенность приведенного выше списка, т. е. особенность отображения

$$y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, \quad y_2 = x_2$$

в нуле. Чтобы ясно представить себе эту особенность, реализуем ее как

особенность вертикального проектирования гладкой поверхности из трехмерного пространства на горизонтальную плоскость.

С этой целью рассмотрим график функции $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ в трехмерном пространстве с координатами (x_1, x_2, y_1) (рис. 8). График этот диффеоморфен плоскости (всякий график гладкого отображения диффеоморфен области определения): качестве координат на графике можно взять x_1 и x_2. Рассмотрим пересечение графика с вертикальной плоскостью $x_2 = \text{const}$. При фиксированном значении x_2 уравнение $y_1 = x_1^3 + x_1x_2$ определяет кубическую параболу, лежащую в вертикальной плоскости. Несколько таких парабол изображено на рис. 8.

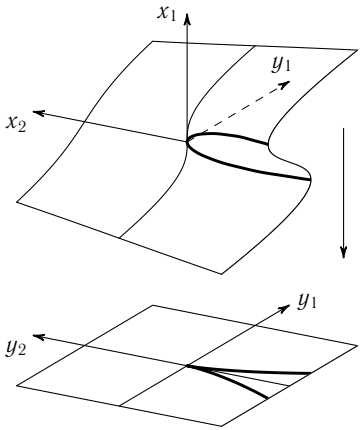


Рис. 8

Если $x_2 > 0$, то вдоль соответствующей кубической кривой y_1 монотонно растет вместе с x_1. Если же $x_2 < 0$, то y_1 имеет две критические точки — локальный максимум и локальный минимум.

Рассмотрим теперь проектирование нашего графика на горизонтальную плоскость: $(x_1, x_2, y_1) \mapsto (x_2, y_1)$. Полученное гладкое отображение поверхности на плоскость имеет в начале координат особенность типа сборки. Действительно, рассмотрим следующие системы координат: (x_1, x_2) — на графике, $(y_1, y_2 = x_2)$ — на горизонтальной плоскости. В этих координатах отображение проектирования записывается в точности формулами сборки Уитни. Теорема Уитни утверждает, что особенность устойчива. В частности, при малом шевелении нашей поверхности в трехмерном пространстве образуется поверхность, проектирование которой на горизонтальную плоскость имеет в некоторой близкой к началу координат точке подобную же особенность.

З а д а ч а. Найти критические точки отображения Уитни

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2.$$

Р е ш е н и е. Матрица Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В критических точках ранг этой матрицы меньше двух, т. е. ее определитель равен нулю: $3x_1^2 + x_2 = 0$. Следовательно, множество критических точек — гладкая кривая. На плоскости с координатами (x_1, x_2) уравнение $3x_1^2 + x_2 = 0$ задает параболу (рис. 9).

На нашем графике в трехмерном пространстве критические точки проектирования — это точки, где касательная к графику содержит вертикальную прямую. Ясно, что таковыми являются все критические точки функции y_1 на описанных выше кубических параболах. Мы заключаем, что все эти точки образуют гладкую кривую на графике (без вычислений это не очевидно).

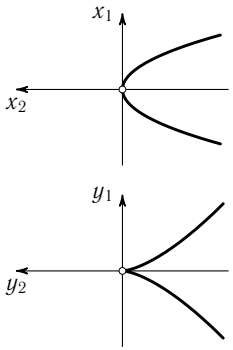


Рис. 9

З а д а ч а. Найти критические значения отображения Уитни.

Р е ш е н и е. В критических точках $x_2 = -3x_1^2$. Подставляя вместо x_2 его выражение через x_1, получаем параметрическое уравнение множества критических значений:

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2 = -2x_1^3, \quad y_2 = x_2 = -3x_1^2.$$

Итак, множество критических значений — полукубическая парабола на плоскости (y_1, y_2). Эта кривая имеет особую точку (острие, называемое также точкой возврата) в начале координат. Она делит плоскость на две части. При отображении Уитни каждая точка из меньшей части имеет 3 прообраза, а из большей — один прообраз.

З а м е ч а н и е. Если смотреть на поверхность графика сверху вниз, то мы увидим лишь верхнюю складку, заканчивающуюся в точке сборки, и она будет иметь вид половины полукубической параболы. Большинство поверхностей, которые мы видим, — непрозрачные поверхности. Поэтому обычно мы видим, что складка заканчивается в точке сборки, но не замечаем острия.

П р и м е р. Рассмотрим поверхность тора в трехмерном пространстве, изображенную на рис. 10. Ясно видны две точки сборки. Если бы тор был прозрачным, мы увидели бы картину, изображенную на рис. 11, с четырьмя сборками. Прозрачные торы встречаются редко. Чаще можно встретить

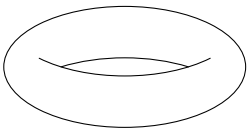


Рис. 10

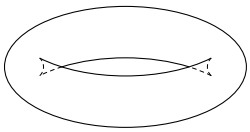


Рис. 11

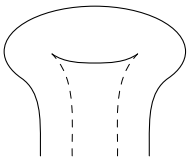


Рис. 12

гладкую поверхность стеклянной бутылки. Рассматривая горлышко, легко заметить две точки сборки (рис. 12). Двигая бутылку, можно убедиться в их устойчивости.

1.7. Катастрофы. Теорема Уитни утверждает, что складки и сборки не уничтожаются при малых шевелениях, а все более сложные особенности рассыпаются при малом шевелении на складки и сборки и потому не должны встречаться у гладких отображений двумерных многообразий общего положения. Гладкие отображения встречаются везде. По теореме Уитни мы должны повсюду встречать контуры складок и острия полукубических парабол на них. Эта замечательная теорема породила много спекуляций, главным образом связанных с именами Р. Тома и К. Зимана. Вся область применений теоремы Уитни была названа Томом *теорией катастроф*. По теории катастроф опубликованы и публикуются сотни работ, главным образом прикладных. Обычная схема рассуждений в теории катастроф такова. Рассматривается гладкая поверхность в трехмерном пространстве, о которой обычно почти ничего не известно, вместе с отображением проектирования на плоскость. Поскольку о поверхности ничего не известно, она предполагается поверхностью общего положения. В таком случае особенности проектирования — складки и сборки. Уже одно это может дать некоторую информацию о скачках, или «катастрофах», которые могут происходить с рассматриваемыми объектами.

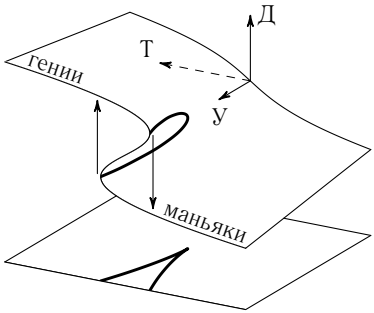


Рис. 13

Ниже приведен пример такого «приложения». Он более или менее заимствован из работ Зимана.

Будем характеризовать творческую личность (скажем, ученого) тремя параметрами, называемыми «техника», «увлеченность», «достижения». По-видимому, между этими параметрами должна быть зависимость. Тем самым возникает поверхность в трехмерном пространстве с координатами (Т, У, Д). Спроектируем эту поверхность на плоскость (Т, У). Для поверхности общего положения особенности проектирования — складки и сборки. Утверждается, что сборка, расположенная, как это изображено на рис. 13, удовлетворительно описывает наблюдаемые явления.

Действительно, посмотрим, как в этих предположениях будут меняться достижения ученого в зависимости от его техники и увлеченности. Если увлеченность невелика, то достижения монотонно и довольно медленно растут с техникой. Если увлеченность достаточно велика, то наступают качественно новые явления. В этом случае достижения с ростом техники могут возрастать скачком. Область высоких достижений, в которую мы при этом попадаем, обозначена на нашей поверхности словом «гении».

С другой стороны, рост увлеченности, не подкрепленный соответствующим ростом техники, приводит в область, обозначенную словом «маньяки». Поучительно, что «катастрофы» — скачки из состояния «гений» в состояние «маньяк» и обратно — происходят на разных линиях, причем при достаточно большой увлеченности гений и маньяк могут иметь равную технику, различаясь лишь достижениями.

Недостатки описанной модели слишком очевидны, чтобы говорить о них подробнее (см., например, [428]).

Существуют серьезные применения теории особенностей — например, в теории упругости, в оптике (особенности каустик и волновых фронтов), в теории осциллирующих интегралов (метод стационарной фазы) и т. д. Мы вернемся к этим применениям после того, как будет развита соответствующая техника.

1.8. Поле ядер производной для складки и для сборки. Распадения более сложных особенностей. Вернемся к сборке Уитни (рис. 9) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$:

$$y_1 = x_1^3 + x_1x_2, \quad y_2 = x_2.$$

З а д а ч а. Найти ядро производной f_{*x} отображения f в точке x.

Р е ш е н и е. Матрица Якоби

$$(f_{*x}) = \begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2 во всех точках, кроме критических. Критические точки образуют параболу $3x_1^2 + x_2 = 0$. В них ранг матрицы Якоби равен 1. Следовательно, ядро производной имеет размерность 1 во всех этих точках (как в точках складки, так и в точке сборки).

Таким образом, на параболе критических точек возникает поле прямых — поле ядер производной.

Рассматривая матрицу Якоби, мы замечаем, что ядро производной в каждой точке параллельно оси x_1 (рис. 14).

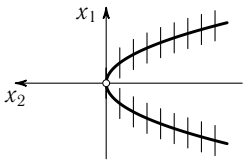


Рис. 14

З а м е ч а н и е. Из решения задачи видно, что ядро производной касается кривой особых точек только в точке сборки. Это замечание часто позволяет быстро находить точки сборки отображений общего положения двумерных многообразий. Согласно теореме Уитни для такого отображения: 1) множество критических точек — гладкая кривая, 2) ядро производной в каждой точке этой кривой одномерно, 3) в общих точках кривой особых точек ядро производной трансверсально кривой, но в отдельных точках этой кривой ядро касается ее.

Эти последние точки и являются точками сборки.

Пример. Рассмотрим отображение плоскости комплексного переменного $z = x_1 + ix_2$ на плоскость комплексного переменного $w = y_1 + iy_2$, заданное формулой $w = z^2$, как гладкое отображение двумерной вещественной плоскости на двумерную вещественную плоскость:

$$y_1 = x_1^2 - x_2^2, \quad y_2 = 2x_1x_2.$$

Ранг производной равен двум всюду, кроме точки $z = 0$, где производная равна нулю и где ее ядро, следовательно, двумерно.

Мы заключаем, что рассматриваемое отображение имеет в начале координат особенность, отличную от складки и сборки. Следовательно, по теореме Уитни оно неустойчиво, и его особенность в нуле при малом шевелении отображения должна распасться на складки и сборки.

В классе ростков голоморфных отображений $\mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ особенность $w = z^2$ устойчива. Поэтому для приведения в общее положение в классе вещественных отображений обязательно нужно сделать добавку, нарушающую голоморфность. Проще всего в качестве возмущенного взять отображение

$$w = z^2 + \varepsilon\bar{z}.$$

Это отображение близко к исходному в любом фиксированном круге, если $|\varepsilon|$ достаточно мал.

Умножения z и w на числа позволяют менять ε, поэтому достаточно рассмотреть наше отображение для какого-нибудь ненулевого ε, не обязательно малого.

Мы возьмем $\varepsilon = 2$ и изучим особенности отображения вещественной плоскости $\{z\}$ на плоскость $\{w\}$, заданного формулой

$$w = z^2 + 2\bar{z}.$$

Задача. Найти множество критических точек этого отображения.

Решение. Производная нашего отображения имеет на векторе ξ значение $dw(\xi) = 2z\xi + 2\bar{\xi}$. Производная вырождена, если уравнение $2z\xi + 2\bar{\xi} = 0$ имеет ненулевое решение ξ. Мы получаем $z = -\bar{\xi}/\xi$, откуда $|z| = 1$. Итак, множество критических точек — окружность радиуса 1.

Задача. Найти поле ядер производной на окружности критических точек.

Решение. Из полученной выше формулы $z = -\bar{\xi}/\xi$ видно, что, когда z обходит окружность критических точек один раз в положительном направлении, ядро совершает поворот на угол π в отрицательном направлении. Кроме того, ядро касается окружности в точке $z = 1$. Поэтому поле ядер имеет вид, изображенный на рис. 15. Поле ядер касается окружности критических точек в трех точках.

З а д а ч а. Найти множество критических значений исследуемого отображения.

Р е ш е н и е. Пусть критическая точка есть $z = e^{i\varphi}$. Соответствующее критическое значение есть $w = 2e^{-i\varphi} + e^{2i\varphi}$. Это — параметрическое уравнение гипоциклоиды с тремя остриями (рис. 16). Действительно, рассмотрим большой неподвижный круг радиуса 3, внутри которого катится, касаясь его, маленький круг радиуса 1. Тогда центр маленького круга описывает окружность радиуса 2 с угловой скоростью вдвое меньшей, чем скорость

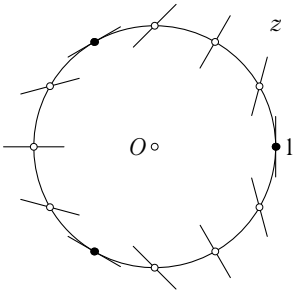


Рис. 15

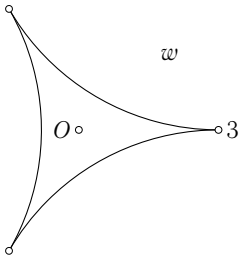


Рис. 16

вращения маленького круга, и направленной в другую сторону. Точка маленького круга описывает гипоциклоиду. Это и выражает приведенная формула.

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что рассматриваемое отображение имеет лишь устойчивые особенности. Тогда из результатов предыдущих задач следует, по теореме Уитни, что наше отображение имеет три точки сборки, соединенные окружностью-складкой. Таким образом, сложная особая точка отображения $w = z^2$ распадается при малом шевелении ($w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$) так, что образуется три сборки.

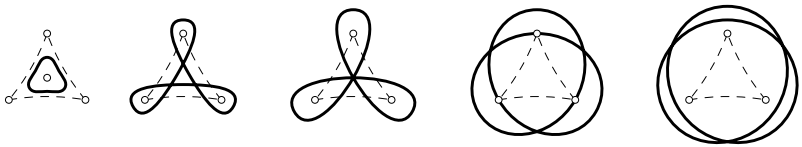
Заметим, что при малых $|\varepsilon|$ радиус окружности критических точек также мал (он равен $|\varepsilon|/2$), так что все три точки сборки близки друг к другу.

З а д а ч а. Нарисовать образы окружностей разных радиусов $|z| = r$ при отображении $w = z^2 + 2\bar{z}$.

Р е ш е н и е. Так как 0 переходит в 0, образ окружности малого радиуса мало отличается от малой окружности с центром в 0. При увеличении r от 0 до 1 получаем семейство гладких кривых, заканчивающихся гипоциклоидой с тремя остриями (рис. 17, *а*). Образ окружности несколько большего радиуса в окрестности образов точек сборки можно нарисовать, исходя из модели сборки (рис. 8). В окрестности образа точки складки этот образ окружности идет с той же стороны от гипоциклоиды, что и образ

окружности, радиус которой несколько меньше единицы. Получаем кривую с тремя петлями, близкую к гипоциклоиде (рис. 17, *б*).

При дальнейшем увеличении радиуса окружности-прообраза петли растут и кривая отодвигается от гипоциклоиды. Для некоторого r возникает тройная точка (рис. 17, *в*), затем — кривая, проходящая через образы точек сборки (рис. 17, *г*); наконец, не пересекающая множество критических значений кривая с тремя точками самопересечения (рис. 17, *д*).



а) *б*) *в*) *г*) *д*)

Рис. 17

З а м е ч а н и е. Последняя кривая близка к окружности и два раза обходит $w = 0$, когда z обходит нуль один раз. Действительно, отображение $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$ в любой конечной области приближается к $w = z^2$ при $\varepsilon \to 0$; поэтому отображение $w = z^2 + 2\bar{z}$ «вблизи бесконечности» должно вести себя «почти как» $w = z^2$.

З а д а ч а. Сколько прообразов имеют точки областей внутри и вне гипоциклоиды критических значений при отображении $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$?

О т в е т. Внутри 4, вне 2.

Можно доказать, что особенность отображения $w = z^2$ в нуле распадается на три сборки не только при шевелении $w = z^2 + \varepsilon\bar{z}$, но при любом малом шевелении общего положения.

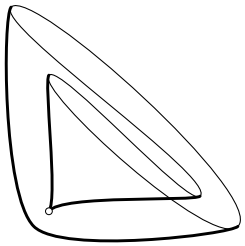


Рис. 18

З а д а ч а. Рассмотрим отображение плоскости на плоскость, являющееся прямым произведением двух складок:

$$y_1 = x_1^2, \quad y_2 = x_2^2.$$

Исследовать особенности его малого шевеления

$$y_1 = x_1^2 + \varepsilon_1 x_2, \quad y_2 = x_2^2 + \varepsilon_2 x_1.$$

О т в е т. См. рис. 18.

1.9. Особенности отображений двумерных многообразий в трехмерные. Уитни описал также особенности отображений общего положения двумерных многообразий в трехмерные. Их также оказалось конечное число. Образ такого отображения представляет собой поверхность в трехмерном пространстве.

Эта поверхность может, разумеется, иметь линии пересечения двух листов поверхности под ненулевым углом и отдельные точки, в которых пересекаются три листа. Оказывается, кроме этих очевидных особенностей отображения общего положения могут иметь только еще одну особенность. Эта особенность устойчива. Образ соответствующего отображения — замечательная поверхность в трехмерном пространстве. Эта поверхность называется *зонтиком Уитни* (или *зонтиком Кэли*). Этот зонтик изображен на рис. 19.

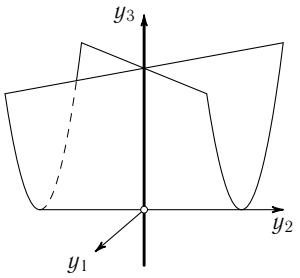


Рис. 19

Изображенная поверхность пересекает плоскости $y_3 = \text{const}$ по парам прямых $y_1^2 = ay_2^2$, а плоскости $y_2 = \text{const}$ — по параболам $y_3 = by_1^2$. Поэтому ее уравнение имеет вид $y_1^2 = y_3 y_2^2$.

З а м е ч а н и е. Написанному уравнению удовлетворяют в $\mathbb{R}^3$ как точки нарисованной поверхности, имеющей линией самопересечения положительную полуось y_3, так и все остальные точки оси y_3. Поэтому множество, заданное этим уравнением, действительно имеет вид своеобразного зонтика, ручка которого — это отрицательная полуось y_3.

З а д а ч а. Найти гладкое отображение $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, образом которого является зонтик Уитни (без ручки).

О т в е т. $y_1 = x_1 x_2$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1^2$.

О п р е д е л е н и е. *Особенностью Уитни* отображения $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ называется росток отображения плоскости в пространство в нуле, заданный предыдущей формулой.

Уитни доказал, что эта особенность устойчива, что всякое отображение компактного двумерного многообразия в трехмерное аппроксимируется устойчивыми отображениями и что устойчивые отображения не имеют других особенностей (см. [500], [501], [503]).

1.10. Другие размерности. Общее отображение окружности в трехмерное пространство не имеет никаких особенностей: малым шевелением можно избавиться от них. Уитни доказал (еще в 30-х гг.), что гладкое отображение $f\colon M^m \to N^n$ общего положения не имеет особенностей (т. е. является вложением), если размерность пространства-образа достаточно велика, а именно если $n > 2m$ *). При $n = 2m$ особенности также легко

*) Размерность пространства хорд вложенного в $\mathbb{R}^k$ многообразия M^m равна $2m$, пространства касательных — $2m - 1$, пространства направлений прямых в $\mathbb{R}^k$ — $k - 1$. Поэтому проекция M^m в $\mathbb{R}^{k-1}$ почти для всякого направления проектирования является вложением, если $k > 2m + 1$. При достаточно большом k гладкое отображение M^m в $\mathbb{R}^k$ легко аппроксимировать вложением. Проектируя ($\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{k-1} \to \ldots \to \mathbb{R}^{2m+1}$), получаем вложение M^m в $\mathbb{R}^{2m+1}$.

перечисляются (появляются лишь трансверсальные самопересечения образа). См. [499]—[501], [503], [504].

Противоположный случай малой размерности образа — это случай одной функции, $n = 1$. В этом случае все особенности отображения общего положения также устойчивы, все устойчивые отображения локально задаются конечным списком ($y = x$ или $y = \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_m^2$).

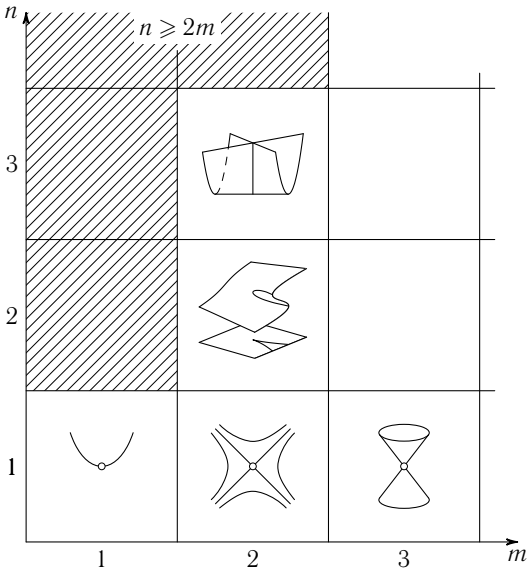


Рис. 20

На рис. 20 отмечены на плоскости (m, n) значения размерностей пространства прообраза и образа, которые мы рассмотрели до сих пор. Для всех этих размерностей отображения общего положения устойчивы. Оказывается, столь хорошее положение имеется не при всех (m, n). Например, при $m = n = 9$ устойчивые отображения не плотны в пространстве всех отображений и не существует конечного списка особенностей отображений общего положения. Классы дифференцируемой эквивалентности особенностей отображений общего положения в точке образуют в этом случае не дискретное, а непрерывное множество (существуют непрерывные инварианты особенностей, так называемые *модули*). Более того, при бóльших m и n число модулей само становится бесконечным и типы особенностей начинают зависеть от произвольных функций, число аргументов которых растет с ростом размерностей. Мы вернемся к этому вопросу в § 3 (п. 3.7, с. 62).

§ 2. Классы Σ^I

Здесь особенности классифицируются по рангу первого дифференциала отображения и по рангам его сужений на подмногообразия особенностей.

2.1. Классификация по вырождению первого дифференциала. Пусть $f\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение, $f_{*x}\colon T_xM^m \to T_{f(x)}N^n$ — его производная в точке x.

О п р е д е л е н и е. Точка x называется *точкой класса* Σ^i *для* f, если размерность ядра производной f_{*x} равна i. Все точки класса Σ^i для f образуют подмножество в M, называемое *множеством* Σ^i *для* f и обозначаемое $\Sigma^i(f)$.

П р и м е р. Для отображения сборки Уитни (рис. 21)

$$M = \mathbb{R}^2, \quad N = \mathbb{R}^2, \quad f_1(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2, \quad f_2(x_1, x_2) = x_2$$

все критические точки — класса Σ^1, а некритические — класса Σ^0.

З а м е ч а н и е. В частности, точки складки и точки сборки — одного класса Σ^1.

Особенность отображения $w = z^2$ вещественной плоскости в нуле — класса Σ^2. По теореме Уитни общие отображения двумерных многообразий не имеют особенностей класса Σ^2. Возникает вопрос: как устроено множество $\Sigma^i(f)$ для отображения $f\colon M^m \to N^n$ общего положения? В частности, какова его размерность и когда оно непусто? Для формулировки ответа нам потребуется следующее определение.

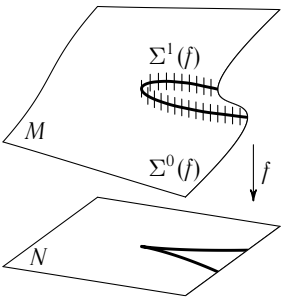


Рис. 21

О п р е д е л е н и е. Пусть $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор ранга r. *Корангами* оператора A в прообразе и в образе соответственно называются разности $m - r$ и $n - r$.

З а м е ч а н и е. Коранги связаны с размерностью ядра i очевидными формулами: $m - r = i$, $n - r = n - m + i$.

Т е о р е м а («формула произведения корангов»). *Для отображений* $f\colon M^m \to N^n$ *общего положения* *) *все множества* $\Sigma^i(f)$ *— гладкие подмногообразия в пространстве-прообразе. Коразмерность многообразия* $\Sigma^i(f)$ *равна при этом произведению корангов*:

$$\dim M - \dim \Sigma^i(f) = (m - r)(n - r)$$

(*отрицательность размерности означает пустоту множества*).

*) Множество отображений, не удовлетворяющих заключению этой теоремы, — не более чем счетное объединение замкнутых нигде не плотных множеств в пространстве гладких отображений; если же M компактно, то множество отображений «общего положения», о котором идет речь, открытое и всюду плотное.

Чтобы понять, откуда берется такая формула, мы рассмотрим сначала соответствующую задачу линейной алгебры.

2.2. Стратификация пространства линейных операторов. Рассмотрим множество всех линейных операторов $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Это линейное пространство конечной размерности mn (выбрав базисы, можно отождествить операторы с матрицами порядка $m \times n$). Мы будем обозначать это пространство через $L(m, n)$. Группы линейных замен координат в пространстве прообраза $\mathrm{GL}(m)$ и в пространстве образа $\mathrm{GL}(n)$ действуют на пространстве матриц $L(m, n)$, и возникает лево-правое действие прямого произведения обеих групп. Две матрицы лежат в одной орбите этого действия, если они являются матрицами одного и того же оператора при разных выборах базисов в пространствах прообраза и образа.

Матрица любого оператора A записывается при подходящем выборе базисов в специальном виде:

$$A_0 = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} E_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)}_{m}\Bigg\}n,$$

где E_r — единичная матрица порядка $r = \operatorname{rank} A$. Таким образом, множество всех матриц порядка $m \times n$ ранга r является одной орбитой лево-правого действия группы $\mathrm{GL}(m) \times \mathrm{GL}(n)$ на $L(m, n)$.

Л е м м а. *Множество всех матриц ранга r образует в $L(m, n)$ гладкое подмногообразие, коразмерность которого равна произведению корангов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку матрицу любого оператора ранга r в подходящем базисе можно записать в виде A_0, достаточно доказать лемму в окрестности этой матрицы. Запишем близкую к A_0 матрицу в виде $A = A_0 + (a_{k,l})$. При малых $(a_{k,l})$ ранг матрицы A не меньше r. Он равен r, если и только если равны нулю все миноры порядка $r + 1$, окаймляющие E_r.

Мы получаем систему уравнений относительно элементов матрицы $(a_{k,l})$, определяющую многообразие L_r в окрестности матрицы A_0. Число этих уравнений равно числу окаймляющих миноров порядка $r + 1$, т. е. равно произведению корангов $(m - r) \times (n - r)$. Эти уравнения независимы. Действительно, рассмотрим окаймляющий минор, полученный добавлением строки и столбца, на пересечении которых стоит $a_{k,l}$. Разложение этого минора в ряд Тейлора по a начинается с $a_{k,l} + O(a^2)$. Поэтому дифференциалы наших $(m - r)(n - r)$ миноров в нуле независимы.

Раз дифференциалы миноров независимы, равенство миноров нулю по теореме о неявной функции определяет подмногообразие, коразмерность которого равна числу уравнений, что и требовалось.

Разбиение пространства всех линейных операторов (матриц) $L(m, n)$ на подмногообразия L_r операторов (матриц) различных рангов называется *естественной стратификацией*, а многообразия L_r — его *стратами*. Мы вычислили выше коразмерности этих стратов: они равны произведениям корангов. Например, при $m - n$ коразмерности стратов коранга 1, 2, 3, ... равны соответственно 1, 4, 9, ...

З а д а ч а. Найти коразмерность множества симметрических матриц коранга k в пространстве всех симметрических матриц порядка n.

О т в е т. $k(k+1)/2$, т. е. 1, 3, 6, ... при $k = 1, 2, 3, \ldots$

2.3. Теоремы трансверсальности. Чтобы вывести сформулированную в п. 2.1 теорему из алгебраической леммы п. 2.2, удобно воспользоваться некоторыми общими понятиями и теоремами.

О п р е д е л е н и е. Два линейных подпространства конечномерного линейного пространства называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство (рис. 22).

П р и м е р. В трехмерном пространстве два одномерных подпространства никогда не трансверсальны, а два несовпадающих двумерных — всегда трансверсальны; одномерное и двумерное трансверсальны, только если одномерное не лежит в двумерном.

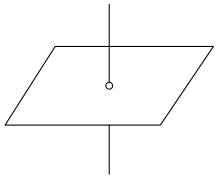


Рис. 22

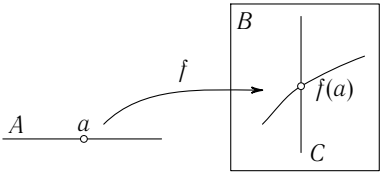


Рис. 23

О п р е д е л е н и е. Пусть дано гладкое отображение $f\colon A \to B$ многообразия A в многообразие B, снабженное гладким подмногообразием C. Отображение f называется *трансверсальным* к C *в точке* a из A, если либо $f(a)$ не принадлежит C, либо (рис. 23) образ касательного пространства к A в a под действием производной f_{*a} трансверсален к касательному пространству к C:

$$f_{*a}T_aA + T_{f(a)}C = T_{f(a)}B.$$

Отображение f называется *трансверсальным* к C, если оно трансверсально к C в каждой точке из A.

П р е д л о ж е н и е. *Если* $f\colon A \to B$ *трансверсально к* C, *то* $f^{-1}(C)$ — *гладкое подмногообразие в* A, *имеющее в* A *такую же коразмерность, какую* C *имеет в* B.

Пример. Пусть C — кривая в трехмерном пространстве B, и пусть A одномерно. Тогда $f\colon A \to B$ трансверсально к C, если и только если образ многообразия A не пересекается с C.

Замечание. Образ многообразия A при отображении f может быть подмногообразием в B, трансверсальным к C, а отображение f может при этом не быть трансверсальным к C.

Пример. Отображение прямой $A = \{a\}$ на плоскость $B = \{(b_1, b_2)\}$, снабженную подмногообразием C ($b_1 = 0$), заданное уравнениями $b_1 = a^3$, $b_2 = 0$.

Замечание. Наиболее важным случаем является случай, когда B — линейное пространство, а C — его подпространство. Обозначим через D факторпространство и через p естественную проекцию $p\colon B \to D$, переводящую C в нуль. В этих обозначениях отображение $f\colon A \to B$ трансверсально C, если и только если нуль — неособое значение отображения $p \circ f\colon A \to D$. (Особое значение отображения — это его значение в особой точке; особая точка — это точка, в которой производная не есть отображение «на»; для отображений $f\colon M^m \to N^n$ с $m < n$ все точки из M особые, особые же значения — это точки из $f(M)$.)

Слабая теорема трансверсальности. *Отображения, трансверсальные к C, образуют открытое всюду плотное множество в пространстве гладких отображений замкнутого *) многообразия A в многообразие B, снабженное замкнутым подмногообразием C.*

Рис. 24

Замечание. Возможность малым шевелением привести отображение в общее положение и ликвидировать нетрансверсальность интуитивно достаточно очевидна (рис. 24).

Доказательство удобно провести с помощью следующей теоремы, доказанной в ситуации алгебраической геометрии Бертини, а в случае гладких функций — Сардом.

Теорема Бертини — Сарда. *Мера множества особых значений достаточно гладкого отображения равна нулю.*

Замечание. Мера множества особых точек может быть положительна. Пример: $f(x) \equiv 0$.

Доказательство теоремы Бертини — Сарда. Начнем с простейшего частного случая.

Предложение 1. *Пусть $y = f(x)$ — гладкая функция на $[0, 1]$. Тогда мера множества особых значений отображения f равна нулю.*

*) Компактного без края.

Доказательство. Разобьем $[0, 1]$ на N отрезков одинаковой длины. Отметим отрезки, содержащие особые точки. Мера образа отмеченного отрезка оценивается сверху величиной C/N^2, где C — не зависящая от N и от отрезка постоянная (так как модуль производной функции f на отмеченном отрезке ограничен сверху величиной C/N). Сумма мер образов отмеченных отрезков не превосходит, таким образом, произведения $N \cdot (C/N^2)$. При $N \to \infty$ эта сумма мер стремится к нулю, что и доказывает предложение 1.

Предложение 2. *Пусть f — гладкое отображение m-мерного куба $[0, 1]^m$ в m-мерное евклидово пространство. Тогда мера множества особых значений отображения f равна нулю.*

Доказательство. Рассуждая, как в доказательстве предложения 1, мы покрываем множество особых значений не более чем $(N)^m$ множествами, мера каждого из которых не больше $C(1/N)^{m+1}$, что и доказывает предложение 2.

Предложение 3. *Пусть f — гладкое отображение куба $[0, 1]^m$ в n-мерное евклидово пространство. Тогда при достаточно большом k мера образа множества точек, где обращаются в 0 все производные функции f порядков $1, \ldots, k$, равна нулю (достаточно выполнения условия $(k + 1)n > m$).*

Замечание. В частности, при $n > m$ мера всего образа куба равна нулю.

Доказательство. Рассуждая, как в предложениях 1 и 2, покрываем множество значений не более чем $(N)^m$ множествами диаметра не более $C_1(1/N)^{k+1}$. Это дает для меры оценку сверху величиной $CN^m(1/N)^{(k+1)n}$, которая и доказывает предложение 3.

Для отображений в пространство, число измерений которого не меньше, чем число измерений отображаемого многообразия, теорема тем самым доказана. В случае отображений в пространство меньшего числа измерений нужно еще небольшое дополнительное рассуждение. Рассмотрим простейший случай одной функции.

Предложение 4. *Пусть f — гладкая функция двух переменных. Тогда мера множества особых значений отображения f равна нулю.*

Доказательство. Мера множества значений в точках, где все три вторые производные равны нулю, равна нулю по предложению 3 (при $m = 2$, $n = 1$ достаточно взять $k = 2$). Рассмотрим особые точки, в которых одна из вторых производных, скажем $\partial^2 f/\partial x^2$, отлична от нуля. Уравнение $\partial f/\partial x = 0$ определяет (по теореме о неявной функции) гладкую кривую. Интересующие нас особые точки лежат на этой кривой и являются особыми для сужения функции f на эту кривую. По предложению 1 мера множества

значений функции f в этих особых точках равна нулю. Для других вторых производных рассуждение такое же. Предложение 4 доказано.

Предложение 5. *Пусть f — гладкая функция m переменных. Тогда мера множества особых значений равна нулю.*

Доказательство. Рассуждая, как в предложении 4, доказываем предложение 5 индукцией по m. Рассмотрим множество точек, где все производные до порядка q включительно равны нулю, а одна из производных порядка $q+1$ (скажем, $\partial\varphi/\partial x$, где φ — производная порядка q) отлична от нуля. Это множество содержится в множестве особых точек сужения функции f на подмногообразие размерности $m-1$, заданное уравнением $\varphi = 0$. Таким образом, предложение 5 сводится к предложениям 3 и 1.

В случае отображений в пространство размерности $n > 1$ проходит такая же индукция, однако здесь имеется новая трудность: в особой точке первые производные, вообще говоря, не все обращаются в нуль.

Предложение 6. *Пусть отображение f задано n функциями f_i от m переменных x_j, и пусть в некоторой точке $\partial f_1/\partial x_1 \neq 0$. Тогда в окрестности этой точки можно выбрать координаты ξ так, что отображение запишется в виде однопараметрического семейства g_{ξ_1} отображений $(m-1)$-мерного пространства в $(n-1)$-мерное*:

$$y_1 = \xi_1, \quad y' = g_{\xi_1}(\xi') \quad (\xi' = \xi_2, \ldots, \xi_m, \;\; y' = y_2, \ldots, y_n).$$

Доказательство. Введем локальные координаты $\xi_1 = f_1, \xi' = x'$. По теореме о неявной функции это — координатная система. Предложение 6 доказано.

Ясно, что особые значения отображения g, полученного в предложении 6, — это объединение множеств, $S = \bigcup(\xi_1, S(\xi_1))$, где $S(\xi_1)$ — множество особых значений отображения g_{ξ_1}. Поэтому $\operatorname{mes} S = 0$, если (для всякого ξ_1) $\operatorname{mes} S(\xi_1) = 0$ (теорема Фубини).

Теперь теорема Бертини—Сарда доказывается индукцией по размерности отображаемого пространства: в окрестности тех особых точек, где не все первые производные равны нулю, мы понижаем размерность при помощи предложения 6, в особых точках, где все первые производные — нули, — при помощи предложений 5 и 3.

Доказательство слабой теоремы трансверсальности. Мы проведем это доказательство в специальном случае, когда C — линейное подпространство в B. Включим данное отображение $f\colon A \to B$ в семейство отображений f_ε, где $f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon$ ($\varepsilon \in B$).

Пусть $p\colon B \to B/C$ — естественная проекция и ε — некритическое значение отображения f. Тогда f_ε трансверсально к C. По теореме Бертини—Сарда существуют сколь угодно малые ε, для которых $p\varepsilon$ — неособое значение отображения $p \circ f$. Это доказывает утверждение о всюду плотности для

теоремы трансверсальности в рассматриваемом специальном случае. Общий случай сводится к специальному, на чем мы здесь не останавливаемся; открытость множества отображений замкнутого многообразия, трансверсальных замкнутому подмногообразию, очевидна.

Слабая теорема трансверсальности неприменима непосредственно для доказательства теоремы о произведении корангов (п. 2.1), потому что отображение, к которому ее следовало бы применять, определяется *производной* заданного гладкого отображения $M \to N$. Слабая теорема трансверсальности гарантирует возможность приведения в общее положение малым шевелением в классе *всех* отображений и отнюдь не гарантирует, что пошевеленное отображение будет чьей-либо производной, т. е. что приведения производной в общее положение можно достичь шевелением *исходного* отображения $M \to N$.

Аналогичная трудность встречается во многих других задачах. Оказывается, однако, что эта трудность всегда преодолима: условия интегрируемости не препятствуют приведению в общее положение. Чтобы сформулировать соответствующую теорему, которая называется сильной теоремой трансверсальности (или просто теоремой трансверсальности), нам потребуется несколько понятий, которыми мы будем постоянно пользоваться и в дальнейшем.

Пусть $f\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение и x — точка из M (рис. 25).

О п р е д е л е н и е. Отображение $\hat{f}$ имеет в точке x *касание порядка* k *с* f, если

$$\rho_N(\hat{f}(\xi), f(\xi)) = o(\rho_M(\xi, x))^k,$$

где ρ_N и ρ_M — какие-либо римановы метрики на N и M соответственно.

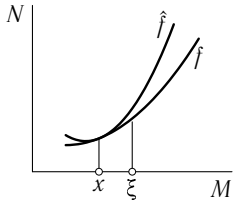


Рис. 25

П р и м е р. Пусть $m = n = 1$, т. е. f и $\hat{f}$ — функции одной переменной. Касание порядка $k = 0$ означает совпадение значений в точке x: $\hat{f}(x) = f(x)$. Касание первого порядка означает совпадение (в точке x) значений $f(x)$ и $\hat{f}(x)$ и производных $f'(x)$ и $\hat{f}'(x)$; касание порядка k — это совпадение отрезков рядов Тейлора до членов степени k включительно в точке x.

Заметим, что понятие касания не зависит от выбора метрик, участвовавших в определении. Касание порядка k в точке x является отношением эквивалентности.

О п р е д е л е н и е. Класс эквивалентности гладких отображений по отношению эквивалентности «касание порядка k в точке x» называется *k-струей в точке x*.

О б о з н а ч е н и е. k-струя отображения f в точке x обозначается через $j^k_x f$.

Пример. 1-струя функции одной переменной определяется тройкой чисел $(x, y, p = dy/dx)$.

Если фиксировать системы координат, то k-струю можно представлять себе как многочлен Тейлора степени k.

Определение. Множество всех k-струй гладких отображений фиксированного многообразия M^m в фиксированное многообразие N^n (во всевозможных точках из M^m) называется *пространством k-струй отображений из M^m в N^n*.

Обозначение. Пространство k-струй отображений из M^m в N^n обозначается через $J^k(M^m, N^n)$.

Пример. Пространство 1-струй отображений прямой на прямую $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ — это трехмерное пространство с координатами (x, y, p).

В общем случае пространство k-струй $J^k(M^m, N^n)$ — дифференцируемое многообразие. Действительно, пусть $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — локальные координаты в M^m и N^n в окрестностях точек x и $f(x)$ соответственно. Отображение f локально задается формулами

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

k-струя определяется заданием следующих чисел:

$$\{x_1, \ldots, x_m\}; \quad \{y_1, \ldots, y_n\}; \quad \left\{\frac{\partial f_r}{\partial x_s}\right\}; \quad \left\{\frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i\, \partial x_j}\right\}, \quad \ldots, \quad \left\{\frac{\partial^{|k|} f_r}{\partial x^k}\right\}.$$

Эти числа задают локальные координаты в пространстве k-струй, получающем, таким образом, структуру гладкого многообразия $J^k(M^m, N^n)$. Локально многообразие $J^k(M^m, N^n)$ можно представлять себе как пространство многочленов Тейлора степени k. Размерности многообразий k-струй нетрудно сосчитать:

$$J^0(M, N) = M^m \times N^n, \quad \dim J^1(M, N) = m + n + mn, \quad \ldots$$

Многообразия k-струй имеют ряд естественно возникающих дополнительных структур.

Отрезок ряда Тейлора длины k определяет отрезок ряда Тейлора длины $k - 1$. Поэтому возникает цепочка проекций

$$\begin{array}{ccccccc} M & & & & & & \\ & \nwarrow & & & & & \\ & & J^0(M, N) & \longleftarrow & J^1(M, N) & \longleftarrow & \cdots \\ & \swarrow & & & & & \\ N & & & & & & \end{array}$$

Входящие в эту цепочку отображения (кроме двух левых) — отображения «забывания членов степени k в ряду Тейлора» — являются гладкими расслоениями. Слои диффеоморфны линейным пространствам. В случае отоб-

ражения $J^1(M, N) \to J^0(M, N)$ слоем над точкой (x, y) является пространство линейных операторов $\mathrm{Hom}(T_xM, T_yN)$. Этот слой имеет естественную структуру линейного пространства. При остальных k слой расслоения $J^k \to J^{k-1}$ не имеет естественной линейной структуры («теорема о неинвариантности высших дифференциалов»). Действительно, указанный слой при фиксированных системах координат отождествляется с пространством наборов n однородных многочленов степени k от m переменных и потому диффеоморфен линейному пространству. Но этот диффеоморфизм не канонический (зависит от выбора систем координат), поэтому естественной линейной структуры в слое нет.

Пусть $f\colon M^m \to N^n$ — гладкое отображение.

О п р е д е л е н и е. *k-струйным расширением отображения f* называется отображение из M^m в пространство k-струй из M^m в N^n, сопоставляющее каждой точке x из M k-струю отображения f в этой точке.

О б о з н а ч е н и е. k-струйное расширение отображения f обозначается через $j^kf\colon M^m \to J^k(M^m, N^n)$, $x \mapsto j^k_xf$.

Заметим, что j^kf — гладкое сечение естественного расслоения $J^k(M, N) \to M$.

С и л ь н а я т е о р е м а т р а н с в е р с а л ь н о с т и (Тома). *Пусть M^m — замкнутое многообразие и C — замкнутое подмногообразие пространства струй $J^k(M, N)$.*

Тогда множество отображений $f\colon M \to N$, k-струйные расширения которых трансверсальны к C, есть открытое всюду плотное множество в пространстве всех гладких отображений из M в N.

Эта теорема означает, что малым шевелением гладкого отображения можно привести его в общее положение не только по отношению к любому гладкому подмногообразию в пространстве-образе, но и по отношению к любому условию, наложенному на производные любого конечного порядка.

З а м е ч а н и е. Слабая теорема трансверсальности получается из сформулированной при $k = 0$. Сильная же из слабой непосредственно не вытекает по следующей причине.

Можно было бы применить слабую теорему к отображению $j^kf\colon M \to J^k$ и получить близкое к j^kf трансверсальное к C отображение. Однако это близкое отображение, вообще говоря, не будет k-струйным расширением никакого гладкого отображения из M в N.

Сильная теорема трансверсальности утверждает, что трансверсализирующую деформацию можно выбрать в более узком классе деформаций: достаточно ограничиться деформацией k-струйного расширения в пространстве k-струйных расширений, а не в пространстве всех сечений $M \to J^k$.

Таким образом, теорема означает, что условия интегрируемости (выполнение которых отличает k-струйные расширения отображений из M в N от произвольных сечений $M \to J^k$) не мешают достигнуть трансверсальности.

Доказательство теоремы. Сущность доказательства состоит в такой же редукции к лемме Сарда, как и для слабой теоремы трансверсальности. Основное отличие состоит в том, что трансверсализирующая деформация ищется не в классе отображений $f_\varepsilon = f - \varepsilon$, а в более широком классе полиномиальных деформаций $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$, где e_i — всевозможные вектор-мономы степени не выше k.

Лемма 1. *Рассмотрим гладкое отображение $F\colon A \times E \to B$ прямого произведения гладких многообразий A и E в гладкое многообразие B.*

Будем рассматривать F как семейство отображений F_ε многообразия A в B, зависящих от точки ε многообразия E как от параметра. Тогда если отображение F трансверсально к подмногообразию C многообразия B, то почти каждый член $F_\varepsilon\colon A \to B$ соответствующего F семейства трансверсален к C.

Доказательство. Рассмотрим $F^{-1}(C)$. По теореме о неявной функции это — гладкое подмногообразие в $A \times E$. Рассмотрим проекцию этого подмногообразия на E вдоль A. По лемме Сарда почти все значения — некритические. Пусть ε — некритическое значение. Тогда $F_\varepsilon\colon A \to B$ трансверсально к C (ибо F трансверсально к C, а $A \times \varepsilon$ трансверсально к $F^{-1}(C)$). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть f — гладкое отображение из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем в $\mathbb{R}^m$ и в $\mathbb{R}^n$ системы координат и рассмотрим гладкое отображение прямого произведения пространства $\mathbb{R}^m$ на пространство $\mathbb{R}^s$ в пространство k-струй отображений $J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, определенное формулой*

$$(x, \varepsilon) \mapsto (j^k_x f_\varepsilon),$$

где $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ ($e_1, \ldots, e_s$ — всевозможные произведения мономов степени не выше k от координат точки x из $\mathbb{R}^m$ на базисные векторы в $\mathbb{R}^n$).

Утверждается, что построенное отображение не имеет особых значений (и, следовательно, трансверсально любому подмногообразию пространства k-струй).

Координатами в пространстве J^k являются координаты точки x из $\mathbb{R}^m$ и коэффициенты Тейлора струи в этой точке до степени k включительно. При подходящем выборе коэффициентов $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ вектор-многочлен $\varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_s e_s$ будет иметь в любой наперед заданной точке x любой на-

перед заданный набор коэффициентов Тейлора до членов степени k включительно. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы.

О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы. Пусть C — гладкое подмногообразие в $B = J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. Применим к отображению леммы 2 лемму 1 (в которой $A = \mathbb{R}^m$, $E = \mathbb{R}^s$; $F(x, \varepsilon) = j^k_x f_\varepsilon$). По лемме 1 для почти всех ε отображение $F_\varepsilon = F(\cdot, \varepsilon)$ трансверсально к C. Выбрав ε достаточно малым, мы получим сколь угодно близкое к f (в любой конечной части $\mathbb{R}^m$) отображение $f_\varepsilon\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, k-струйное расширение которого трансверсально к C. Переход от этой локальной конструкции к глобальной (замена $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ на M, N) не представляет затруднений.

З а м е ч а н и е 1. Если C не замкнуто, то термин «открытое» в слабой и тем более сильной теоремах трансверсальности следует заменить на «счетное пересечение открытых». Примеры: 1) B — тор, C — его обмотка, A — окружность; 2) B — плоскость, A — окружность на ней, C — касательная (без точки касания). Вложение трансверсально к C, но существуют сколь угодно близкие к этому вложению не трансверсальные к C отображения.

З а м е ч а н и е 2. Если отображаемое многообразие не компактно, то пространство отображений удобно снабжать «тонкой топологией Уитни». В этой топологии окрестность отображения $f\colon A \to B$ определяется следующим образом. Фиксируем открытое множество G в пространстве струй $J^k(A, B)$ при каком-либо k. Множество C^∞-отображений $f\colon A \to B$, k-струи которых в каждой точке принадлежат G, открыто в тонкой топологии. Такие непустые открытые множества берутся в качестве базиса окрестностей, задающих тонкую топологию в пространстве бесконечно дифференцируемых отображений.

Таким образом, близость двух отображений в тонкой топологии означает сколь угодно быстрое сближение отображений (с любым числом производных) «на бесконечности»; в частности, график достаточно близкого к f отображения лежит в сколь угодно быстро утончающейся «на бесконечности» окрестности графика отображения f.

Отсюда следует, что сходимость последовательности в тонкой топологии влечет полное совпадение вне некоторого компактного множества всех членов последовательности, начиная с некоторого. Тем не менее любая окрестность данного отображения в тонкой топологии содержит отображения, нигде не совпадающие с данным.

Если открытость и всюду плотность понимать в смысле тонкой топологии, то теорема трансверсальности верна и для некомпактных многообразий A (для открытости подмногообразие C должно быть замкнутым).

З а м е ч а н и е 3. Часто встречается ситуация, когда C — не гладкое подмногообразие, а подмногообразие с особенностями.

О п р е д е л е н и е. *Стратифицированным подмногообразием* гладкого многообразия называется конечное объединение попарно непересекающихся гладких многообразий (стратов), удовлетворяющее следующему условию: замыкание каждого страта состоит из него самого и конечного объединения стратов меньших размерностей.

Отображение называется *трансверсальным стратифицированному подмногообразию*, если оно трансверсально каждому страту.

П р и м е р. Пусть C — объединение двух пересекающихся по прямой плоскостей в трехмерном пространстве, стратификация — разбиение на прямую пересечения и четыре полуплоскости. Трансверсальность к C означает трансверсальность к каждой из плоскостей и трансверсальность к прямой пересечения. Например, кривая, трансверсальная к стратифицированному многообразию C, не пересекается с прямой особенностей C.

Теоремы трансверсальности очевидным образом распространяются на случай стратифицированного подмногообразия C. Однако в этом случае теорема гарантирует, что трансверсальные отображения образуют не открытое всюду плотное множество, а лишь всюду плотное пересечение счетного числа открытых множеств.

Чтобы трансверсальные к стратифицированному аналитическому многообразию отображения образовывали открытое всюду плотное множество, достаточно, чтобы стратификация удовлетворяла следующим дополнительным условиям: всякое вложение, трансверсальное к страту меньшей размерности, трансверсально ко всем примыкающим стратам большей размерности в некоторой окрестности этого страта меньшей размерности *).

П р и м е р 1. Пусть C — конечное объединение плоскостей в линейном пространстве, стратифицированное естественным образом (например, пара пересекающихся плоскостей в $\mathbb{R}^3$).

Из трансверсальности к подпространству $\mathbb{R}^k$ следует трансверсальность к объемлющему пространству $\mathbb{R}^l$, поэтому наше условие выполнено.

П р и м е р 2. Пусть C — конус $x^2 = y^2 + z^2$ в $\mathbb{R}^3$, стратификация — разбиение на точку 0 и две полы. Наше условие, как нетрудно проверить, выполнено.

П р и м е р 3. Пусть C — зонтик Уитни, заданный уравнением $y_1^2 = y_3 y_2^2$ в $\mathbb{R}^3$ (рис. 19).

Из трансверсальности к особой прямой $y_1 = y_2 = 0$ не следует трансверсальность к многообразию близких к этой прямой регулярных точек по-

*) Это верно также для стратифицированных многообразий, получающихся из аналитических диффеоморфизмами, но не всегда верно для C^∞-стратифицированных многообразий (см. [479]).

верхности (плоскость $y_3 = 0$ трансверсальна прямой и не трансверсальна поверхности).

Если условие на стратификацию C (трансверсальность к меньшему влечет трансверсальность к большему) выполнено, то трансверсальность ко всей стратификации достигается так.

1. Страты минимальной размерности гладкие, к ним применима обычная теорема. 2. В окрестности стратов минимальной размерности трансверсальность достигнута на всех стратах. 3. Выкидываем из объемлющего многообразия замыкание окрестности стратов минимальной размерности и переходим к стратам следующей размерности.

Пример. Пусть B — пространство линейных операторов $b\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, C — множество операторов не максимального ранга. Операторы ранга r образуют гладкое подмногообразие, коразмерность которого в пространстве B равна $(m - r)(n - r)$. Разбиение на многообразия операторов различных рангов задает стратификацию на C.

Отображение $f\colon A \to B$ — это семейство линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$, гладко зависящих как от параметра от точки многообразия A. Многообразие A называется базой семейства. Из слабой теоремы трансверсальности сразу вытекает такой результат.

Следствие. *В пространстве гладких семейств матриц порядка $m \times n$ всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратифицированному многообразию C матриц не максимального ранга.*

В частности, значения параметра, которым соответствуют матрицы ранга r, образуют, вообще говоря (для семейств из всюду плотного пересечения открытых множеств в пространстве семейств), гладкое многообразие коразмерности $(m - r)(n - r)$ в базе семейства.

Доказательство теоремы п. 2.1. Стратифицируем многообразие 1-струй $J^1(M, N)$ по рангам первого дифференциала. Ясно, что множество всех 1-струй с первым дифференциалом ранга r является гладким подмногообразием коразмерности $(m - r)(n - r)$, а его замыкание состоит из многообразий струй с дифференциалом ранга не выше r. По (сильной) теореме трансверсальности малым шевелением отображения f можно добиться трансверсальности 1-струйного расширения $j^1 f$ всем стратам построенной стратификации, что и доказывает теорему.

Замечание. Нетрудно проверить, что условие «трансверсальность к меньшему влечет трансверсальность к большему» для стратификации пространства матриц по рангам выполнено. Действительно, можно доказать, что всякую алгебраическую стратификацию можно доразбить так, что это условие станет выполняться. Отсюда следует, что наше условие выполнено почти во всех точках каждого страта. Но многообразие матриц ранга r

однородно: каждая его точка переводится в любую другую действием прямого произведения линейных групп преобразований прообраза и образа, сохраняющим стратификацию по рангам. Следовательно, наше условие выполнено не только почти всюду, но всюду.

Таким образом, если M компактно, то множество гладких отображений $f\colon M \to N$, 1-струйные расширения которых трансверсальны стратификации многообразия $J^1(M, N)$ по рангам, открыто и всюду плотно.

2.4. Вторичные особенности. Вернемся к отображению сборки Уитни (рис. 21). В этом случае стратификация M по рангам сводится к разбиению на две части: множество особых точек $\Sigma^1(f)$ и множество неособых точек $\Sigma^0(f)$.

Заметим, что Σ^1 — гладкое многообразие, включая и точку сборки 0. Эта точка выделяется тем, что в ней ядро f_* касается Σ^1. Иными словами, отображение f, ограниченное на параболу Σ^1, имеет ранг 1 во всех точках, кроме точки 0. Таким образом, точка 0 принадлежит $\Sigma^1(f|_{\Sigma^1(f)})$, тогда как остальные точки параболы принадлежат $\Sigma^0(f|_{\Sigma^1(f)})$. Мы будем обозначать $\Sigma^{i_2}(f|_{\Sigma^{i_1}(f)}) = \Sigma^{i_1,i_2}(f)$. В этих обозначениях точка 0 (уитнеевская сборка) принадлежит $\Sigma^{1,1}(f) \subset \Sigma^1(f)$.

Для любого набора целых чисел $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ множество $\Sigma^I(f)$ определяется индуктивно следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\Sigma^I(f) = \Sigma^{i_1,\ldots,i_k}(f) \subset M$ — гладкое многообразие. Тогда

$$\Sigma^{i_1,\ldots,i_k,i_{k+1}}(f) = \Sigma^{i_{k+1}}(f|_{\Sigma^I(f)})$$

есть множество точек, где ядро дифференциала ограничения f на $\Sigma^I(f)$ имеет размерность i_{k+1}.

З а м е ч а н и е. По определению, многообразия

$$M \supset \Sigma^{i_1} \supset \Sigma^{i_1,i_2} \supset \Sigma^{i_1,i_2,i_3} \supset \ldots$$

вложены друг в друга.

Поэтому ядра дифференциалов ограничений отображения f на эти вложенные подмногообразия $M \supset \Sigma^{i_1} \supset \Sigma^{i_1,i_2} \supset \Sigma^{i_1,i_2,i_3}$ также вложены друг в друга. Итак, последовательность чисел $i_1, i_2, i_3, \ldots$ составляющих индекс I, должна быть невозрастающей: $m \geqslant i_1 \geqslant i_2 \geqslant i_3 \geqslant \ldots \geqslant 0$. Если хоть одно из этих неравенств нарушено, множество Σ^I пусто.

Множество $\Sigma^I(f)$ не обязательно есть многообразие, поэтому данное выше определение (принадлежащее Тому) позволяет определить $\Sigma^I(f)$ не для всех отображений f.

Боардман [272] предложил другое определение $\Sigma^I(f)$ в терминах пространства струй. Он определил для всякого набора целых чисел $I = (i_1, \ldots, i_k)$ подмножество Σ^I в пространстве k-струй $J^k(M^m, N^n)$, не зависящее

ни от какого отображения f (см. ниже, с. 46). Им доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Множество Σ^I при любом $I = (i_1, \ldots, i_k)$ есть подмногообразие* (*не обязательно замкнутое*) *коразмерности $\nu_I(m, n)$ в $J^k(M^m, N^n)$* (формула для ν_I приведена ниже, с. 44).

Значение многообразий Σ^I в том, что «хорошее» отображение f имеет в точке x особенность $\Sigma^I(f)$ в смысле предыдущего определения ($x \in \Sigma^I(f)$) тогда и только тогда, когда струя отображения f в x принадлежит Σ^I.

О п р е д е л е н и е. Отображение f называется *хорошим*, если его k-струйное расширение трансверсально многообразиям Σ^I.

Боардманом доказана такая теорема.

Т е о р е м а 2. 1) *Если f — хорошее отображение, то $\Sigma^I(f) = [j^k(f)]^{-1}(\Sigma^I)$; иными словами, $\Sigma^I(f)$ есть многообразие коразмерности $\nu_I(m, n)$ в M^m, и $x \in \Sigma^I(f)$ тогда и только тогда, когда струя отображения f в x принадлежит Σ^I.*

2) *Всякое гладкое отображение $f\colon M^m \to N^n$ можно с любым числом производных сколь угодно точно аппроксимировать хорошим отображением.*

Предложение 2) вытекает из теоремы 1 и сильной теоремы трансверсальности.

Для $k = 1$ все эти результаты были установлены Томом [471], а для $k = 2$ — Левиным [474].

П р и м е р. Многообразие квадратных матриц коранга 1 имеет коразмерность 1, коранга 2 — коразмерность 4, вообще коранга k — коразмерность k^2.

С л е д с т в и е. *Пусть отображение $f\colon M^m \to N^n$ «хорошее» в том смысле, что индуцированное отображение $x \mapsto$ (матрица дифференциала отображения f в x) трансверсально многообразию L_r матриц ранга r. Тогда определенное в начале этого параграфа множество $\Sigma^i(f)$, $i = m - r$, есть подмногообразие в M^m коразмерности $(m - r)(n - r) = i(n - m + i)$.*

П р и м е р. Рассмотрим отображения многообразий одинаковой размерности ($m = n$). Коразмерность множества $\Sigma^k(f)$ точек, где ранг «хорошего» отображения падает на k единиц, равна k^2.

С другой стороны, отображение «общего типа» хорошее, так как каждое отображение можно аппроксимировать хорошим (по сильной теореме трансверсальности).

Отсюда следует, что, например, особенность Σ^2 имеет коразмерность 4 и не должна, вообще говоря, наблюдаться при отображениях плоскости на плоскость (см. рис. 15—17). Но она может наблюдаться как неустранимая при отображениях $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 4$.

Пример. Два хороших отображения $f_\pm\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, заданные формулами

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ y_2 = x_2, \\ y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ y_4 = x_3x_4, \end{cases}$$

имеют в нуле неустранимую точку $\Sigma^{2,0}$.

Ниже будет показано, что ростки отображений $f_\pm$ в нуле не эквивалентны. Отсюда следует, что классификация особенностей по классам Σ^I — неполная.

2.5. Формула Боардмана для коразмерности множества Σ^I. Пусть $I = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$. Формула Боардмана для коразмерности множества Σ^I имеет вид

$$\nu_I(m, n) = (n - m + i_1)\,\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k) - \\ - (i_1 - i_2)\,\mu(i_2, i_3, \ldots, i_k) - \ldots - (i_{k-1} - i_k)\,\mu(i_k),$$

где $\mu(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ есть число последовательностей $j_1, j_2, \ldots, j_k$ целых чисел, удовлетворяющих условиям

а) $j_1 \geqslant j_2 \geqslant \ldots \geqslant j_k$;

б) $i_r \geqslant j_r \geqslant 0$ для всех r $(1 \leqslant r \leqslant k)$, причем $j_1 > 0$.

Смысл величины $\mu(I)$ и происхождение этой формулы мы рассмотрим позже, а сейчас разберем простейшие частные случаи.

Пример. При $k = 1$ имеем $I = i$, $\mu(i) = i$; получается соотношение $\nu_I(m, n) = (n - m + i)i$, т. е. формула произведения корангов.

Пример. При $I = (\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k})$ имеем $\mu(1, 1, \ldots, 1) = k$, $\nu_I(m, n) = (n - m + 1)k$.

В частности, уитнеевская особенность класса $\Sigma^{1,1}$ имеет при $m = n$ коразмерность 2 и поэтому при отображениях плоскости на плоскость неустранима в отдельных точках, при отображениях $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ на кривых и т. д.

Б. Морен исследовал хорошие отображения класса $\Sigma^{1,1,\ldots,1,0}$ при всех m, n (см. [403]). Оказалось, что они всегда устойчивы, если $m \geqslant \nu_I = (n - m + 1)k$, и полностью характеризуются своим классом. Например, при хорошем отображении $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ эквивалентны утверждения:

а) $x \in \Sigma^{\underbrace{1, 1, \ldots, 1, 0}_{n}}(f)$.

б) Росток отображения f в точке x эквивалентен ростку «обобщенного отображения Уитни» в точке 0:

$$\begin{cases} y_1 = x_1, \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1} = x_{n-1}, \\ y_n = x_1 x_n + x_2 x_n^2 + \dots + x_{n-1} x_n^{n-1} + x_n^{n+1}. \end{cases}$$

В частности, отображение Уитни $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ задается формулами $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3^4 + x_1 x_3^2 + x_2 x_3$. Множества Σ^1, $\Sigma^{1,1}$, $\Sigma^{1,1,1}$ для такого отображения образуют флаг (плоскость, прямая, точка). Поле ядер изображено на рис. 26, а поверхность критических значений — на рис. 27. Эта поверхность называется *ласточкиным хвостом*. Ласточкин хвост можно представлять себе как поверхность в трехмерном пространстве многочленов вида $x^4 + ax^2 + bx + c$, состоящую из точек (a, b, c), отвечающих многочленам с кратными корнями. Ласточкин хвост делит пространство многочленов $\mathbb{R}^3$ на 3 области: в одной из них (имеющей вид пирамиды) многочлен имеет 4 вещественных корня, в соседней с ней — 2, в оставшейся — ни одного. В соответствии с этим число прообразов отображения Уитни в областях, ограниченных множеством критических значений, равно 4, 2 и 0.

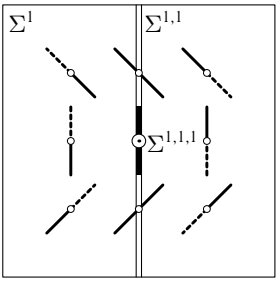


Рис. 26

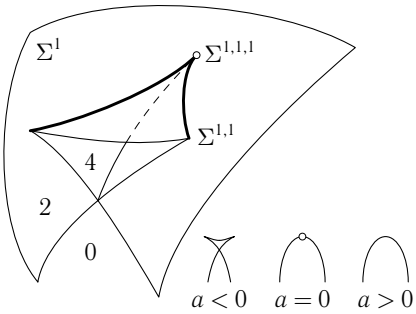


Рис. 27

Чтобы представить себе ласточкин хвост, полезно изучить его сечения плоскостями $a = \text{const}$. Если t — кратный корень, то $c = -t^4 - at^2 - bt$, $b = -4t^3 - 2at$. Это дает параметрическое уравнение сечений в виде $c = 3t^4 + at^2$, $b = -4t^3 - 2at$. При $a = 0$ сечение является параболой степени $4/3$, при $a > 0$ сечение — гладкая кривая, при $a < 0$ сечение имеет 2 полукубические точки возврата (отвечающие $\Sigma^{1,1}$) и точку самопересечения.

При $n = 3$ всякое отображение n-мерного многообразия в n-мерное аппроксимируется отображениями, имеющими только особенности Уитни

Σ^1 (складка), $\Sigma^{1,1}$ (сборка) и $\Sigma^{1,1,1}$ (ласточкин хвост). При $n = 4$ это уже не так (появляется Σ^2).

Пример. При $I = (i, j)$ имеем $\mu(i, j) = i(1 + j) - \dfrac{i(j-1)}{2}$, откуда получается формула Левина

$$\nu_{i,j}(m, n) = (n - m + i)i + \frac{j}{2}[(n - m + i)(2i - j + 1) - 2i + 2j].$$

В частности, при $m = n$ мы имеем

$$\nu_{i,j}(n, n) = i^2 + \frac{j}{2}[2i^2 - ij + 2j - i].$$

Отсюда следует, что особенность класса $\Sigma^{i,j}$ впервые появляется как неустранимая при $m = n$, указанном в следующей таблице:

i, j	1, 0	1, 1	2, 0	2, 1	2, 2	3, 0	3, 1	3, 2	3, 3	4, 0	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4
$\nu_{i,j} = n$	1	2	4	7	10	9	16	22	27	16	29	40	49	56

Пример. При $m = n \leqslant 16$ реализуются как точечные (у хороших отображений) следующие классы:

$n = \nu_I$	n	4	7	9	10	13	15	16
I	1_n	2	2, 1	3	2, 2 2, 1_2	2, 1_3	2, 2, 1	3, 1 4 2, 1_4

где 1_n означает $\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}$.

Определение Σ^I по Боардману. Мы дадим здесь это определение в неинвариантных терминах, использующих локальные системы координат $x_1, \ldots, x_m$ на M^m и $y_1, \ldots, y_n$ на N^n.

Определение. Пусть B — идеал в алгебре A ростков бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ в нуле. *Якобиевым расширением* $\Delta_k(B)$ называется идеал, натянутый на B, и все якобианы порядка k: $\det\left|\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right|$, составленные из частных производных функций из B.

Замечание. Якобиево расширение идеала инвариантно, т. е. не зависит от системы координат $x_1, \ldots, x_m$, ибо $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x'} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial x'}$, а определитель полилинеен.

Лемма. *Якобиево расширение $\Delta_k(B)$ убывает с ростом k*:

$$\Delta_{k+1}(B) \subseteq \Delta_k(B) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Это следует из разложения определителя по строке.

Определение. Якобиево расширение $\Delta_k(B)$ называется *критическим*, если $\Delta_k(B) \neq A$, $\Delta_{k-1}(B) = A$.

Иными словами, для критического расширения порядок присоединенных миноров есть наименьший порядок, при котором расширение не совпадает еще со всей алгеброй.

Пример. Пусть $m = 4$, идеал B порожден элементами x_1, x_2, x_3^2, x_4^2. Тогда критическое якобиево расширение $\Delta_3(B)$ порождено элементами x_1, x_2, x_3, x_4. Для полученного идеала $\Delta_3(B)$ критическое якобиево расширение пятое: $\Delta_5\Delta_3(B) = \Delta_3(B)$.

Пример. Пусть $m = 1$, идеал B порожден элементом x^3. Последовательные критические расширения таковы:

$$\Delta_1(B) = Ax^3, \quad \Delta_1\Delta_1(B) = Ax, \quad \Delta_2\Delta_1\Delta_1(B) = Ax.$$

Для дальнейшего удобнее нумеровать расширения несколько иначе.

Обозначение. $\Delta^k = \Delta_{m-k+1}$.

В примере с $m = 4$ критические расширения Δ^2 и $\Delta^0\Delta^2$.

В примере с $m = 1$: Δ^1, $\Delta^1\Delta^1$ и $\Delta^0\Delta^1\Delta^1$.

Пусть I — набор целых чисел, $i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots \geqslant i_k$.

Определение. Пусть росток отображения $f\colon M^m \to N^n$ задается в координатах x, y формулами $y_i = f_i(x)$, $f(0) = 0$. Мы скажем, что f *имеет в* 0 *особенность класса* Σ^I, если последовательные критические якобиевы расширения идеала, порожденного функциями $f_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, суть $\Delta^{i_k}\Delta^{i_{k-1}} \ldots \Delta^{i_1}$. Мы будем также говорить, что указанный идеал *имеет символ Боардмана* I.

Пример. Отображение $y = x^3$ имеет в нуле особенность класса $\Sigma^{1,1,0}$; $y = x^{k+1}$ — класса $\Sigma^{1_k,0}$. Отображение $y_1 = x_1x_2$, $y_2 = x_1^2 - x_2^2$ и отображение $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4$, $y_4 = x_3x_4$ — особенность $\Sigma^{2,0}$.

Замечание. Очевидно, данное выше определение налагает ограничения лишь на коэффициенты тейлоровского разложения до степени k включительно. Легко проверить, что фактически условия не зависят от системы координат и накладываются лишь на k-струю $j_0^k(f)$. Множество всех k-струй, удовлетворяющих этим условиям, и определяет пересечение множества $\Sigma^I \subset J^k(M, N)$ со слоем расслоения $J^k(M, N) \to \to M \times N$.

2.6. Вычисление числа Боардмана $\mu(I)$. Сейчас мы выразим число Боардмана $\mu(I)$ как коразмерность некоторого идеала, а также как число целых точек в некотором выпуклом многограннике.

Рассмотрим символ Боардмана $I = \{i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots\}$. Мы будем формально считать этот символ бесконечным, предполагая, что все i_k, начиная с некоторого, равны нулю. Пусть $m \geqslant i_1$. Мы сопоставим символу I идеал $J_{I;m}$ в алгебре формальных степенных рядов (с комплексными, для

определенности, коэффициентами) от m переменных $(x_1, \ldots, x_m)$ по следующему правилу:

$$J_{I;m} = J_{i_1,m} + J^2_{i_2,m} + J^3_{i_3,m} + \ldots,$$

где $J_{i,m}$ означает идеал, порожденный $\{x_1, \ldots, x_{m-i}\}$.

О п р е д е л е н и е. Построенный выше идеал называется *стандартным идеалом Боардмана с символом I* в алгебре рядов от m переменных.

П р и м е р 0. Пусть $I = 0$. Тогда $J_{I;m}$ — максимальный идеал, состоящий из рядов без свободного члена.

П р и м е р 1. Пусть $m = 1$. Тогда I обязательно имеет вид $I = (1, \ldots, 1)$ (k единиц). Стандартный идеал с таким символом есть $J^{k+1}_{0;1}$. Он состоит из рядов, делящихся на x_1^{k+1}.

П р и м е р 2. Пусть $m = 2$. Тогда I обязательно имеет вид $I = (2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ (p двоек и q единиц). Стандартный идеал с таким символом есть $J^{p+1}_{1;2} + J^{p+q+1}_{0;2}$, т. е. идеал, порожденный одночленом x_1^{p+1} и всеми одночленами степени $p + q + 1$ от x_1 и x_2.

Чтобы представить себе этот идеал, удобно воспользоваться *диаграммой Ньютона*, т. е. изображать одночлен $x_1^{p_1} x_2^{p_2}$ целочисленной точкой (p_1, p_2) на плоскости (рис. 28).

Рассматриваемый стандартный идеал состоит из всех рядов, в которые входят с ненулевыми коэффициентами лишь одночлены, показатели которых принадлежат заштрихованной на рис. 28 области. Эта область называется *носителем* идеала. Точка (p_1, p_2) принадлежит носителю, если $p_1 > p_2$ или $p_1 + p_2 > p + q$. Дополнение к носителю является выпуклым многогранником. Он задается неравенствами $p_1 \leqslant p$, $p_1 + p_2 \leqslant p + q$ (и, разумеется, $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$). Если ряд содержит с ненулевым коэффициентом хоть один одночлен с показателем из описанного выше многоугольника, то этот ряд не принадлежит стандартному идеалу.

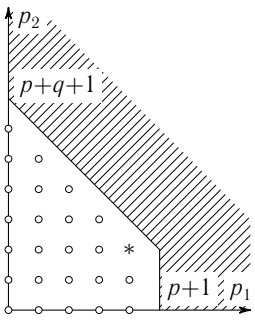


Рис. 28

З а д а ч а. Найти определенный на с. 47 символ Боардмана описанного стандартного идеала.

О т в е т. $(2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ (p двоек и q единиц).

В случае m переменных диаграмма Ньютона строится в положительном ортанте решетки в m-мерном пространстве. Стандартный идеал, как и в рассмотренных примерах, задается своим носителем. Чтобы описать этот носитель, удобно построить по символу I и числу m *диаграмму Юнга* (на рис. 29 это сделано для символа $(3, 3, 1)$ и числа $m = 5$). Эта диаграмма

начинается с нулевой строки длины $i_0 = m$. Следующие строки имеют длины $i_1, i_2, \ldots$ Клетки нулевой строки заполняются справа налево переменными $(x_1, \ldots, x_m)$.

В клетках следующих строк диаграммы Юнга разрешается писать те переменные x_i, которые в нулевой строке стоят *не левее* заполняемой клетки. Произведения всех переменных, записанных в одном столбце диаграммы Юнга при всевозможных заполнениях и столбцах, порождают стандартный идеал (это — очевидная переформулировка определения). Например, на рис. 29 приведено заполнение диаграммы Юнга, указывающее на вхождение в стандартный идеал одночленов x_1, x_2, $x_1x_3^2$, $x_3^2x_4$, $x_3^2x_5^2$.

$i_0=5$	x_5	x_4	x_3	x_2	x_1
$i_1=3$	x_5	x_3	x_1		
$i_2=3$	x_3	x_3	x_3		
$i_3=1$	x_3				
	$k_5=4$	$k_4=k_3=3$	$k_2=k_1=1$		

Рис. 29

Чтобы явно описать носитель стандартного идеала, удобно рассмотреть еще символ *двойственной диаграммы Юнга*. Обозначим через k_r число клеток диаграммы Юнга в столбце, в котором в нулевой строке стоит x_r (т. е. в r-м столбце справа). На рис. 29 числа k_r написаны под соответствующими столбцами. Если читать числа k_r от k_m до k_1, то получится невозрастающая последовательность. Она является символом диаграммы Юнга, двойственной к исходной (т. е. получающейся из исходной при замене строк столбцами). В примере 2 двойственная диаграмма имеет символ $(p + q + 1, p + 1)$ т. е. $k_1 = p + 1$, $k_2 = p + q + 1$.

Стандартный идеал описывается через символ двойственной диаграммы следующим образом. Точка $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$ принадлежит носителю стандартного идеала (т. е. одночлен $\boldsymbol{x^p}$ входит в стандартный идеал), если и только если выполнено хоть одно из неравенств

$$p_1 \geqslant k_1, \quad p_1 + p_2 \geqslant k_2, \quad p_1 + p_2 + p_3 \geqslant k_3, \quad \ldots$$

Ряд не входит в стандартный идеал, если в него входит с ненулевым коэффициентом хотя бы один одночлен $\boldsymbol{x^p}$, для которого выполнены все неравенства

$$p_1 < k_1, \quad p_1 + p_2 < k_2, \quad p_1 + p_2 + p_3 < k_3, \quad \ldots$$

Последняя система неравенств определяет выпуклый многогранник, являющийся дополнением к носителю стандартного идеала в положительном ортанте диаграммы Ньютона. Мы будем называть его *стандартным многогранником*. Заметим, что мы включаем в стандартный многогранник точки на координатных плоскостях, но исключаем точки, для которых предыдущие неравенства обращаются в равенства.

Предложение. *Число Боардмана* $\mu(I)$ *равно уменьшенному на* 1 *числу целых точек в стандартном многограннике.*

Иными словами, число Боардмана равно коразмерности стандартного идеала в максимальном идеале $\mathfrak{m}$ (т. е. в идеале, образованном рядами без свободного члена).

Доказательство. Пусть $I' \leqslant I$ — невозрастающая последовательность целых чисел i_s, $s \geqslant 1$, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant i'_s \leqslant i_s$. Тогда стандартный многогранник, соответствующий I', лежит (нестрого) внутри стандартного многогранника, соответствующего I. Обратно, всякий стандартный многогранник, лежащий (нестрого) внутри стандартного многогранника, соответствующего I, отвечает символу $I' \leqslant I$ (все это вытекает из того, что уменьшение диаграммы Юнга уменьшает и двойственную диаграмму).

Рассмотрим теперь целую точку $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, для которой $p_1 = k_1 - 1$, $p_1 + p_2 = k_2 - 1$, $p_1 + p_2 + p_3 = k_3 - 1, \ldots$ (на рис. 28 эта точка обозначена знаком $*$). Эта точка однозначно определяет символ $\{k_s\}$, а значит, и диаграмму Юнга, и двойственную диаграмму; пусть ее символ $I' = \{i'_r\}$. Последовательность I' удовлетворяет условию $I' \leqslant I$, если и только если соответствующая ей точка $\boldsymbol{p}$ принадлежит стандартному многограннику для I. Поэтому число целых точек в стандартном многограннике равно числу последовательностей $I' \leqslant I$. Условие $i'_1 > 0$ в определении числа Боардмана $\mu(I)$ исключает точку $\boldsymbol{p} = 0$, откуда и получается искомая формула

$$\mu(I) = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{m}/J_{I;m}.$$

Задача. Найти символ Боардмана стандартного идеала $J_{I;m}$ (определение дано на с. 48).

Ответ. I.

Задача. Доказать, что при добавлении к нестандартному идеалу хотя бы одного ряда, не входящего в этот идеал, символ Боардмана получаемого идеала изменится (уменьшится).

Указание. См. 1), 2), 3) ниже (с. 51).

Задача. Доказать, что число $\Sigma(I)$ не зависит от m (предполагается, что $m \geqslant i_1$).

2.7. Описание классов Боардмана по Мазеру. Работа Боардмана неоднократно переизлагалась (см. [404], [392], [465]). Ниже приведены основные этапы доказательства теоремы Боардмана, данного Дж. Мазером [392].

Будем обозначать максимальное якобиево расширение идеала J (в алгебре формальных степенных рядов от m переменных с комплексными, для определенности, коэффициентами) через δJ.

Определим оператор β *боардманизации идеала* формулой

$$\beta J = J + (\delta J)^2 + (\delta^2 J)^3 + \ldots + (\delta^k J)^{k+1} + \ldots$$

З а м е ч а н и е. В этих обозначениях символ Боардмана $I(J) = (i_1 \geqslant i_2 \geqslant \ldots)$ идеала J выражается следующим образом:

$$i_1 = \operatorname{corank} J, \quad i_2 = \operatorname{corank} \delta J, \quad \ldots, \quad i_k = \operatorname{corank} \delta^{k-1} J.$$

Здесь под *рангом* идеала в алгебре формальных рядов понимается максимальное число независимых координат, которые можно выбрать из входящих в идеал рядов:

$$r = \operatorname{rank} J = \dim(J + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{m}.$$

Корангом идеала называется разность между числом переменных и рангом:

$$\operatorname{corank} J = m - r.$$

Максимальное якобиево расширение δJ идеала J записывается в этих обозначениях так: $\delta J = \Delta_{r+1} J$, $r = \operatorname{rank} J$ (порядок присоединяемых миноров на единицу больше ранга идеала).

П р е д л о ж е н и е. *Идеал J имеет символ Боардмана I тогда и только тогда, когда его боардманизация βJ эквивалентна стандартному идеалу $J_{I;m}$.*

Два идеала в алгебре формальных рядов называются *эквивалентными*, если один из них превращается в другой при (формальной) замене переменных.

Доказательство предложения основано на следующих несложно проверяемых фактах 1)—3) (подробные доказательства см. в цитированной работе Мазера):

1) $\delta\beta = \delta\beta$, $\beta^2 = \beta$;

2) $I(\beta J) = I(J)$;

3) $\beta J = J$ тогда и только тогда, когда идеал J эквивалентен стандартному идеалу $J_{I(J);m}$.

Предположим, что рассматриваемый символ Боардмана I состоит из k элементов $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ (т. е. $i_{k+1} = \ldots = 0$). В таком случае мы можем во всем предыдущем изложении заменить алгебру формальных степенных рядов алгеброй k-струй $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_m]]/\mathfrak{m}^{k+1}$.

Рассмотрим пространство k-струй отображений из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$, переводящих 0 в 0. В этом пространстве мы определим для каждого символа Боардмана I *многообразие Боардмана* Σ^I как множество тех струй отображений, для которых символ Боардмана идеала, построенного по компонентам отображения (т. е. по n функциям m переменных, задающим отображение), равен I.

Каждый идеал с символом Боардмана I при боардманизации переходит в идеал, эквивалентный стандартному идеалу с символом I. Сопоставим каждой k-струе отображения из Σ^I тот идеал, эквивалентный стандартному, который получается из идеала, натянутого на компоненты струи при боардманизации. Полученное отображение является гладким расслоением. Обозначим через U базу этого расслоения, т. е. множество всех идеалов, эквивалентных стандартному идеалу с символом I в алгебре k-струй.

Каждый слой построенного расслоения $\Sigma^I \to U$ представляет собой многообразие всех k-струй отображений, определяющих идеалы, боардманизации которых все являются фиксированным идеалом, эквивалентным стандартному. В частности, слой над стандартным идеалом — это многообразие всех k-струй отображений, порождающих после боардманизации стандартный идеал. Этот слой мы обозначим через V.

Коразмерность многообразия Боардмана Σ^I в пространстве k-струй, переводящих 0 в 0, равна коразмерности многообразия V k-струй отображений, порождающих после боардманизации стандартный идеал, уменьшенной на размерность многообразия U всех идеалов, эквивалентных стандартному:

$$\operatorname{codim} \Sigma^I = V - \dim U.$$

Уменьшаемое и вычитаемое в этой формуле вычисляются по отдельности.

Чтобы k-струя отображения задавала (*после боардманизации*) *стандартный идеал с символом I, необходимо и почти достаточно, чтобы носители всех компонент принадлежали носителю стандартного идеала*. Здесь «почти» означает, что если носители компонент принадлежат носителю стандартного идеала, то, при почти любом выборе коэффициентов компонент, натянутый на них идеал имеет заданный символ Боардмана I [«почти любой» означает «не принадлежащий некоторой гиперповерхности в пространстве наборов коэффициентов»; кроме того, предполагается, что выполнено условие $n \geqslant m - i_1$ и в случае равенства $n = m - i_1$ также $i_2 = \ldots = i_k = 0$ (если это условие нарушается, то Σ^I пусто)].

Из сказанного вытекает, что коразмерность многообразия V струй, задающих стандартный идеал с символом Боардмана I в многообразии всех k-струй гладких отображений из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$, переводящих 0 в 0, в n раз больше, чем коразмерность стандартного идеала в максимальном идеале $\mathfrak{m}$:

$$\operatorname{codim} V = n \dim \mathfrak{m}/J_{I;m} = n\mu(I).$$

Чтобы вычислить размерность многообразия всех идеалов, эквивалентных стандартному, рассмотрим естественное действие группы k-струй диффеоморфизмов пространства $\mathbb{C}^m$, оставляющих 0 на месте, на мно-

жество идеалов алгебры k-струй. Рассмотрим подгруппу, образованную струями диффеоморфизмов, переводящих стандартный идеал с символом Боардмана I в алгебре k-струй в себя (т. е. рассмотрим стационарную подгруппу стандартного идеала). Мы обозначим эту подгруппу группы k-струй диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^m, 0)$ в себя через H. *Размерность многообразия U всех идеалов, эквивалентных стандартному, равна коразмерности подгруппы H во всей группе k-струй диффеоморфизмов.*

Таким образом, остается выяснить, сколько ограничений накладывает на компоненты диффеоморфизма условие сохранения стандартного идеала с символом Боардмана I.

Для формулировки результата подсчета этих ограничений удобно обратиться к диаграмме Юнга (рис. 29). Напомним, что мы обозначили через k_s длину столбца x_s в диаграмме, т. е. длину столбца, в верхней клетке которого в нулевой строке стоит x_s.

Определим для каждой переменной x_s *усеченную на уровне* x_s диаграмму, получаемую из исходной диаграммы Юнга выкидыванием всех строк, пересекающих столбец x_s, кроме нулевой (число их равно $k_s - 1$). В терминах символа Боардмана усечение на уровне x_s означает вычеркивание первых $k_s - 1$ элементов символа: $i_1, \ldots, i_{k_s-1}$. Все усеченные диаграммы для диаграммы рис. 29 показаны на рис. 30.

Предложение. *Чтобы диффеоморфизм переводил стандартный идеал в себя, необходимо и почти достаточно, чтобы он переводил каждую координатную функцию x_s в функцию из стандартного идеала, соответствующего диаграмме, усеченной на уровне x_s.*

Ограничения, накладываемые этим предложением на диффеоморфизм, можно записать в виде $g^* x_s \in J_{S^{k_s-1}I}$, где S — оператор, зачеркивающий первый элемент символа.

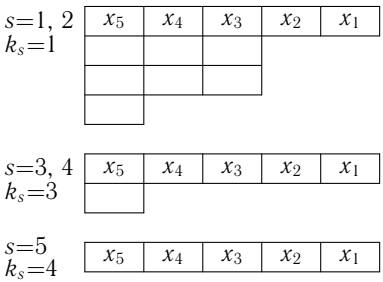


Рис. 30

Например, для диаграммы $(2, \ldots, 2, 1, \ldots, 1)$ (p двоек и q единиц) в случае двух переменных ($m = 2$) ограничения таковы: образ элемента x_1 принадлежит идеалу, натянутому на x_1 и x_2^{q+1}, а образ элемента x_2 — идеалу, натянутому на x_1 и x_2 (т. е. максимальному идеалу). Подробности доказательства см. в [392].

Из сформулированного предложения следует, что коразмерность стационарной группы стандартного идеала с символом Боардмана I равна

сумме коразмерностей стандартных идеалов, соответствующих диаграммам Юнга, урезанным на уровнях x_1, x_2, ... Таким образом,

$$\dim U = \operatorname{codim} H = (i_0 - i_1)\,\mu(I) + (i_1 - i_2)\,\mu(SI) + (i_2 - i_3)\,\mu(S^2I) + \dots$$

(S — оператор, зачеркивающий первый элемент символа; урезанная диаграмма не меняется вдоль каждой ступеньки диаграммы Юнга, поэтому слагаемое $\mu(S^rI)$ повторяется столько раз, какова длина соответствующей ступеньки, т. е. $i_r - i_{r+1}$ раз).

Соединяя эту формулу с приведенной выше формулой для коразмерности многообразия V всех k-струй отображений, задающих стандартный идеал, мы и получаем окончательно формулу Боардмана

$$\operatorname{codim} \Sigma^I = \operatorname{codim} V - \operatorname{codim} U = \\ = (n - i_0 + i_1)\,\mu(I) - (i_1 - i_2)\,\mu(SI) - (i_2 - i_3)\,\mu(S^2I) - \dots$$

З а м е ч а н и е. Как видно, классы Боардмана тесно связаны со специальными выпуклыми многогранниками на диаграмме Ньютона (стандартными многогранниками). Рассмотрим выпуклый многогранник на диаграмме Ньютона, заданный системой линейных неоднородных целочисленных неравенств с неотрицательными коэффициентами λ. Такой многогранник содержит нуль, если все неравенства имеют вид $(\lambda, p) < \lambda_0$, или обращен выпуклостью к нулю, если все неравенства имеют вид $(\lambda, p) \geqslant \lambda_0$. В первом (компактном) случае мы рассмотрим идеал, носителем которого является дополнение к многограннику, а во втором — сам (некомпактный) многогранник. В обоих случаях мы можем сопоставить многограннику класс отображений, а именно класс всех тех отображений, для которых, при подходящем выборе системы координат, идеал, порожденный компонентами отображения, содержится в построенном по многограннику идеале. Было бы интересно исследовать возникающие таким образом классы особенностей.

§ 3. Квадратичный дифференциал особенности

Ранг первого дифференциала f_x приводит к классам особенностей Σ^i. Рассмотрение квадратичной части отображения дает более точную классификацию: мы сопоставляем каждой особенности инвариантно связанный с ней пучок квадратичных форм.

3.1. Определение квадратичного дифференциала. Второй дифференциал определен инвариантно лишь на ядре первого и лишь с точностью до образа первого. Поэтому *квадратичным дифференциалом* отображе-

ния $f\colon M^m \to N^m$ в точке $x \in M^m$ мы назовем квадратичное *) отображение линейных пространств

$$f_{xx}\colon \operatorname{Ker} f_x \to \operatorname{Coker} f_x,$$

где $\operatorname{Ker} f_x \subset TM$ есть ядро первого дифференциала $f_x\colon T_xM \to T_{f(x)}N$, а $\operatorname{Coker} f_x = T_{f(x)}N/f_xT_xM$ — его коядро.

Отображение f_{xx} определим сначала с помощью локальных координат:

$$X\colon T_xM^m \to M^m, \quad Y\colon T_{f(x)}N^n \to N^n,$$

где

$$X(0) = x, \quad Y(0) = f(x), \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} X(\xi t) = \xi, \quad \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y(\xi t) = \xi.$$

В этих координатах отображение f запишется в виде

$$\varphi\colon T_xM \to T_{f(x)}N, \quad \text{где } \varphi = Y^{-1} \circ f \circ X.$$

О п р е д е л е н и е. Значение *квадратичного дифференциала* f_{xx} на $\xi \in \operatorname{Ker} f_x$ есть

$$f_{xx}(\xi) = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(t\xi)}{t^2} \Big/ f_* T_xM \in \operatorname{Coker} f_x.$$

Л е м м а. *Квадратичный дифференциал f_{xx} не зависит от выбора локальных координат X, Y.*

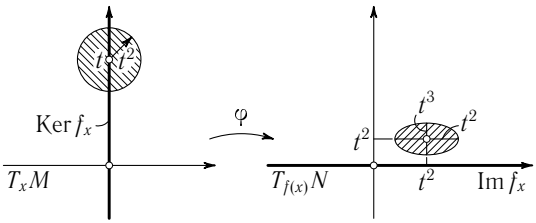


Рис. 31

Доказательство ясно из формулы Тейлора (рис. 31):

$$\varphi(\eta) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\Big|_0 \eta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2}\Big|_0 \eta, \eta\right) + O(\eta^3).$$

*) Отображение линейных пространств $\alpha\colon A \to B$ называется *квадратичным*, если существует такое симметричное билинейное отображение $\alpha'\colon A + A \to B$, что $\alpha = \alpha' \circ \Delta$, где Δ — диагональное отображение $A \to A + A$: $\Delta(x) = (x, x)$.

Если $\eta \in \operatorname{Ker} f_x = O(t)$, $\zeta = O(t^2)$, то

$$\varphi(\eta+\zeta) = f_x(\eta+\zeta) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0 \eta, \eta\right) + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0 \eta, \zeta\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0 \zeta, \zeta\right) + \ldots =$$
$$= f_x\zeta + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}\Big|_0 \eta, \eta\right) + O(t^3),$$

что и требовалось доказать.

Одновременно доказано, что в локальной системе координат, в которой $\eta_1, \ldots, \eta_k$ — координаты вектора $\eta \in \operatorname{Ker} f_x$, а $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ — координаты в $\operatorname{Coker} f_x$, квадратичный дифференциал задается формулой

$$(f_{xx}(\eta))_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\xi_j\,\partial\xi_k}\,\eta_j\eta_k.$$

Пример. Для отображений примера $\Sigma^{2,0}$ (§ 2, с. 44) квадратичный дифференциал задается формулами $f_{xx}\colon (x_3, x_4) \mapsto (x_3^2 \pm x_4^2, x_3x_4)$.

Замечание. Кубический дифференциал определять подобной конструкцией нельзя. Для определения инвариантных высших дифференциалов можно итерировать следующую конструкцию «внутренней производной» Портеуса.

3.2. Внутренняя производная. Рассмотрим два векторных расслоения с общей базой B, и пусть A — отображение расслоений. *Внутренняя производная* ∂ отображения A в точке b базы B представляет собой линейный оператор

$$\partial A\colon T_bB \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Ker} A|_b, \operatorname{Coker} A|_b),$$

определяемый следующим образом.

В окрестности любой рассматриваемой точки базы расслоения являются прямыми произведениями, так что мы можем фиксировать системы координат в слоях. Отображение A задается тогда семейством линейных операторов A_x, которые все действуют из пространства типового слоя X первого расслоения в пространство типового слоя Y второго; параметр x принадлежит базе расслоения. Мы фиксируем также систему координат с центром b на базе и считаем точку базы x вектором линейного пространства. Пусть ξ — вектор из X. Разложение вектора $A_x\xi$ в ряд Тейлора по x начинается с членов

$$A_x\xi = A_0\xi + D(x)\xi + \ldots$$

Здесь D зависит от x линейно; $D(x)$ является линейным оператором из X в Y. Обозначим через $i\colon \operatorname{Ker} A_0 \to X$ вложение ядра оператора A_0 в пространство-прообраз и через $\pi\colon Y \to \operatorname{Coker} A_0$ проекцию пространства-образа Y

вдоль A_0X на факторпространство Y/A_0X. Значение внутренней производной на векторе x из T_0B определяется как линейный оператор, действующий из ядра в коядро отображения A_0, а именно

$$\partial A(x) = \pi \circ D(x) \circ i\colon \operatorname{Ker} A_0 \to \operatorname{Coker} A_0.$$

Очевидно, этот оператор линейно зависит от x. Ясно также, что он не зависит от использованной системы координат на базе.

3.3. Инвариантность внутренней производной. Покажем, что построенный оператор не зависит от систем координат в слоях. Действительно, перейдем к новым координатам $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$ в слоях по формулам

$$\xi = P(x)\tilde{\xi}, \quad \tilde{\eta} = Q(x)\eta$$

($P(x)$ и $Q(x)$ — гладко зависящие от точки базы x линейные операторы из X в X и из Y в Y соответственно). В новых координатах исходное отображение $\eta = A(x)\xi$ перепишется в виде $\tilde{\eta} = \tilde{A}(x)\tilde{\xi}$, где $\tilde{A}(x) = Q(x)A(x)P(x)$. Дифференцируя по x в точке $x = 0$, получаем

$$\frac{d\tilde{A}}{dx} = \frac{dQ}{dx}AP + Q\frac{dA}{dx}P + QA\frac{dP}{dx}.$$

Первое слагаемое обращается в нуль на ядре отображения $\tilde{A}_0$, а третье принадлежит образу отображения $\tilde{A}_0$. Обозначая вложение ядра отображения $\tilde{A}_0$ и проекцию на коядро через $\tilde{i}$ и $\tilde{\pi}$, получаем выражение внутренней производной в новых координатах в виде

$$\partial\tilde{A}(x) = \tilde{\pi} \circ \tilde{D}(x) \circ \tilde{i} = \tilde{\pi} \circ Q \circ D(x) \circ P \circ \tilde{i} =$$
$$= Q \circ \pi \circ D(x) \circ i \circ P = Q \circ \partial A(x) \circ P,$$

что и доказывает независимость линейного оператора $\partial A(x)$ от выбора систем координат.

3.4. Вертикальное расслоение отображения. Применим сказанное к производной гладкого отображения $f\colon M \to N$. Производная задает отображение векторных расслоений $f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ с *разными* базами. Чтобы сделать базы одинаковыми, мы свяжем с отображением f новое расслоение — *вертикальное расслоение* отображения f. Это расслоение всегда полезно иметь в виду при работе с отображением f. Определяется оно так.

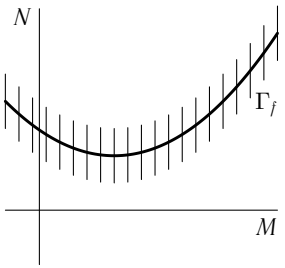


Рис. 32

Рассмотрим график Γ_f отображения $f\colon M \to N$ (рис. 32). График представляет собой подмногообразие прямого произведения $M \times N$. Прямое произведение $M \times N$ можно рассматривать как

расслоение с базой M. График является сечением этого расслоения: его проекция на M вдоль N представляет собой диффеоморфизм $\Gamma_f \to M$. Слои, параллельные N, пересекают график трансверсально. Касательные пространства к слоям во всех точках графика и образуют вертикальное расслоение отображения f. Отождествляя график Γ_f с многообразием-прообразом M при помощи естественной проекции, мы можем рассматривать вертикальное расслоение как расслоение с базой M. В таком случае мы можем сказать, что *вертикальное расслоение отображения* $f\colon M \to N$ *есть расслоение, в котором слоем над точкой* x *из многообразия-прообраза* M *является касательное пространство* $T_{f(x)}N$ *к многообразию-образу* N *в образе точки* x.

Вертикальное расслоение отображения f обозначается через f^*TN.

Производная отображения f задает естественное отображение касательного расслоения к многообразию-прообразу в вертикальное расслоение: вектору ξ из T_xM сопоставляется вектор $f_{*x}\xi$ из слоя $T_{f(x)}N$ вертикального расслоения. Внутренняя производная этого отображения расслоения определяет билинейное отображение $\delta\colon T_xM \times \operatorname{Ker} f_{*x} \to \operatorname{Coker} f_{*x}$. Это билинейное отображение, инвариантно определенное дифференцируемым отображением f, содержит несколько больше информации, чем квадратичный дифференциал. Последний получается при сужении δ на «диагональ»:

$$\delta(\xi, \xi) = 2f_{xx}(\xi) \quad \text{для } \xi \in \operatorname{Ker} f_{*x}.$$

3.5. Семейство квадратичных форм, соответствующих квадратичному дифференциалу. С квадратичным дифференциалом f_{xx} инвариантно связано семейство L квадратичных форм. Обозначим через F линейное пространство всех вещественных квадратичных форм на $\operatorname{Ker} f_x$, через C' — сопряженное пространство к $\operatorname{Coker} f_x$. Каждой форме

$$\alpha\colon \operatorname{Coker} f_x \to \mathbb{R}^1, \quad \alpha \in C',$$

соответствует квадратичная форма $\alpha \circ f_{xx} \in F$.

О п р е д е л е н и е. *Семейством квадратичных форм, соответствующим* f_{xx}, называется линейное отображение кокоядра отображения f_x в пространство квадратичных форм на ядре отображения f_x:

$$L\colon C' \to F,$$

заданное формулой $L(\alpha) = \alpha \circ f_{xx}$.

П р и м е р. Пусть размерности ядра $\operatorname{Ker} f_x$ и коядра $\operatorname{Coker} f_x$ равны 2.

Пространство F квадратичных форм от двух переменных трехмерно, и семейство L есть отображение двумерной плоскости C' в трехмерное пространство F.

В пространстве квадратичных форм F есть дополнительная структура, определенная классификацией форм по индексам инерции. Пусть x_1, x_2 — координаты на $\operatorname{Ker} f_x$. В пространстве F введем координаты a, b, c, где точка с координатами a, b, c означает форму

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Формы ранга 1 (параболические) образуют в пространстве F конус $b^2 = ac$ (рис. 33). Вершина конуса — нулевая форма. Внутри двух пол конуса находятся эллиптические формы типов $(+, +)$ и $(-, -)$, а вне — гиперболические формы типа $(+, -)$.

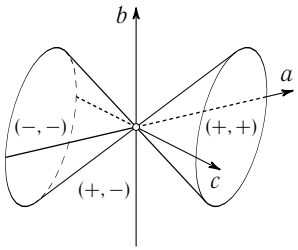


Рис. 33

Семейство L изображается подпространством $L(C') \subset F$, и это подпространство может быть расположено одним из семи способов.

1. Плоскость, вся лежащая вне конуса (все формы пучка гиперболические) (пример: $\alpha_1(x_1^2 - x_2^2) + \alpha_2 x_1x_2$).

2. Плоскость, пересекающая конус (в пучке есть две параболические формы) (пример: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2$).

3. Плоскость, касающаяся конуса (в пучке есть одна параболическая форма) (пример: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_1x_2$).

4. Прямая внутри конуса (пример: $\alpha_1(x_1^2 + x_2^2) + \alpha_2 \cdot 0$).

5. Прямая вне конуса (пример: $\alpha_1 x_1x_2 + \alpha_2 \cdot 0$).

6. Прямая, касающаяся конуса (пример: $\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 \cdot 0$).

7. Точка ($\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0$).

Оказывается, расположение подпространства семейства является инвариантом особенности.

О б о з н а ч е н и я. Пусть $F(\mathbb{R}^k)$ — линейное пространство всех квадратичных форм от k переменных. Пусть

$$H(c, k) = \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^c, F(\mathbb{R}^k))$$

— линейное пространство всех c-параметрических линейных семейств квадратичных форм от k переменных.

На пространстве $H(c, k)$ естественно действует группа $\mathrm{GL}(c, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ линейных преобразований пространств $\mathbb{R}^c$ и $\mathbb{R}^k$ по формуле

$$[(g_c \times g_k)L](\xi_c)\xi_k = L(g_c^{-1}\xi_c)g_k^{-1}\xi_k,$$

$$\xi_c \in \mathbb{R}^c, \quad \xi_k \in \mathbb{R}^k, \quad g_c \in \mathrm{GL}(c, \mathbb{R}), \quad g_k \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}).$$

П р и м е р. Пространство $H(2, 2)$ шестимерно и под действием $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ распадается на семь орбит, описанных в предыдущем примере.

Вспомним теперь, что каждому ростку отображения $f\colon M \to N$ в точке $x \in M$ мы сопоставили квадратичный дифференциал f_{xx}, а ему — семейство квадратичных форм

$$L_f \in \operatorname{Hom}(c', F(K)), \quad C' = \operatorname{Coker} f_x, \quad K = \operatorname{Ker} f_x.$$

Если выбрать отождествления

$$C' \cong \mathbb{R}^c, \quad c = \dim \operatorname{Coker} f_x, \qquad K \cong \mathbb{R}^k, \quad k = \dim \operatorname{Ker} f_x,$$

то мы сопоставим семейству L_f элемент $H(c, k)$. Изменение этих отождествлений линейных пространств сводится к действию группы $\mathrm{GL}(c, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ на $H(c, k)$, описанному выше. Итак, доказана следующая лемма.

Лемма. *Описанной конструкцией ростку отображения $f\colon M \to N$ в x инвариантно (относительно диффеоморфизмов M и N) сопоставляется орбита действия группы $\mathrm{GL}(c, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ в пространстве всех c-параметрических семейств квадратичных форм от k переменных $H(c, k)$, где $c = \dim \operatorname{Coker} f_x$, $k = \dim \operatorname{Ker} f_x$.*

3.6. Эллиптические и гиперболические особенности класса Σ^2. Из доказанной леммы вытекает такой результат.

Следствие. *Рассмотрим два отображения $f_\pm\colon \mathbb{R}^4_1 \to \mathbb{R}^4_2$, заданные формулами*

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4 \\ x_3x_4 \end{pmatrix}.$$

Их ростки в 0 не эквивалентны, т. е. не существует ростков диффеоморфизмов h, k, $h(0) = 0$, $k(0) = 0$, для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_+} & \mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f_-} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. В этом случае $c = k = 2$, и мы находимся в условиях разобранного выше примера. Семейство $L_\pm$ задается формулами

$$\alpha_1(x_3^2 \pm x_4^2) + \alpha_2 x_3 x_4$$

и определяет плоскость в пространстве (a, b, c). В случае f_- эта плоскость лежит вне конуса и, значит, f_- соответствует первая из семи орбит примера. В случае f_+ эта плоскость пересекает конус и, значит, f_+ соответствует

вторая из семи орбит примера. Эти орбиты разные: значит, ростки отображений f_+ и f_- в 0 не эквивалентны, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 1. Легко проверить, что $f_\pm$ имеют в 0 неустранимую особенность класса Σ^2. Итак, классификация по классам Боардмана Σ^I неполна. Особенность отображения f_- называется *эллиптической* особенностью класса Σ^2, а особенность отображения f_+ — *гиперболической* (почему?).

З а м е ч а н и е 2. Легко проверить, что эллиптическое и гиперболическое отображения f_- и f_+ в 0 различны не только в дифференцируемом, но и в топологическом смысле. Чтобы лучше понять их строение, можно рассматривать их как отображения плоскости

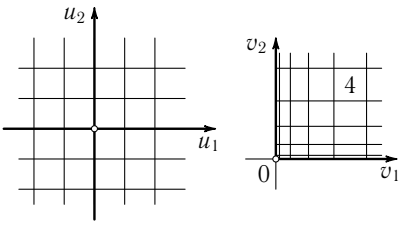


Рис. 34

$$\begin{cases} x_3 \\ x_4 \end{cases} \mapsto \begin{cases} x_3^2 \pm x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4, \\ x_3x_4, \end{cases}$$

зависящие от параметров x_1, x_2. При $x_1 = x_2 = 0$ получается либо комплексное отображение $z \mapsto z^2 (f_-)$, либо «уголок» (f_+), эквивалентный отображению

$$\begin{cases} u_1 \\ u_2 \end{cases} \mapsto \begin{cases} u_1^2 = v_1, \\ u_2^2 \quad\ v_2 \end{cases} \qquad \text{(см. рис. 34).}$$

Уже из этого видно, что отображения f_+ и f_- топологически неэквивалентны: образ отображения f_- покрывает $\mathbb{R}^4$, а образ отображения f_+ — нет.

При малых x_1, x_2 получается близкое отображение, устроенное либо (в случае (f_-)) как на рис. 17 (с. 26), либо (в случае (f_+)) как указано на рис. 18 (с. 26).

З а м е ч а н и е 3. В дальнейшем мы покажем, что ростки обоих отображений $f_\pm$ устойчивы; можно также доказать, что всякое отображение $M^4 \to N^4$ можно аппроксимировать отображением, росток которого в каждой точке эквивалентен одному из семи устойчивых ростков, заданных формулами

$$\begin{aligned}
&\Sigma^0: && y_i = x_i,\ i = 1, 2, 3, 4, \\
&\Sigma^{1,0}: && y_i = x_i,\ i = 1, 2, 3,\ \ y_4 = x_4^2, \\
&\Sigma^{1,1,0}: && y_i = x_i,\ i = 1, 2, 3,\ \ y_4 = x_1x_4 + x_4^3, \\
&\Sigma^{1,1,1,0}: && y_i = x_i,\ i = 1, 2, 3,\ \ y_4 = x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_4^4,
\end{aligned}$$

$$\Sigma^{1,1,1,1,0}: \quad y_i = x_i,\ i = 1, 2, 3,\ \ y_4 = x_1x_4 + x_2x_4^2 + x_3x_4^3 + x_4^5,$$
$$f_+ = \Sigma^{2,0}_+: \qquad y_i = x_i,\ i \leqslant 2,\ \ y_3 = x_3^2 + x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4,\ \ y_4 = x_3x_4,$$
$$f_- = \Sigma^{2,0}_-: \qquad y_i = x_i,\ i \leqslant 2,\ \ y_3 = x_3^2 - x_4^2 + x_1x_3 + x_2x_4,\ \ y_4 = x_3x_4.$$

3.7. Неустранимость неустойчивых отображений. Укажем еще одно следствие доказанной леммы.

Теорема (Том [474]). *Множество устойчивых отображений $M^{n^2} \to N^{n^2}$ не всюду плотно в пространстве гладких отображений $M^{n^2} \to N^{n^2}$ при $n \geqslant 3$.*

Доказательство основано на следующем замечании.

Лемма. *Коразмерность любой орбиты $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в пространстве n-параметрических семейств квадратичных форм от n переменных $H(n, n)$ положительна при $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\dim H(n, n) = \frac{n^2(n+1)}{2},$$
$$\dim \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = 2n^2.$$

Имеется одномерная подгруппа (скаляры), оставляющая на месте все точки H. Поэтому коразмерность любой орбиты не меньше, чем

$$\frac{n^2(n+1)}{2} - (2n^2 - 1) \geqslant 1 \quad \text{при } n \geqslant 3.$$

Лемма доказана.

Теперь рассмотрим отображение $f\colon M^{n^2} \to N^{n^2}$, имеющее в 0 трансверсальную особенность типа Σ^n. По формуле произведения корангов особенность $\Sigma^n(f)$ имеет коразмерность n^2 и всякое близкое отображение будет иметь в близкой точке особенность типа Σ^n.

Рассмотрим квадратичный дифференциал f_{xx} в 0 и соответствующую ему орбиту в $H(n, n)$. Так как эта орбита имеет коразмерность $\geqslant 1$, в любой окрестности отображения f есть отображения $\tilde{f}$, квадратичные дифференциалы которых в точке $\Sigma^n(f)$ соответствуют *другим* орбитам (такие отображения $\tilde{f}$ легко построить, изменяя в f лишь струю порядка 2).

Следовательно, росток любого отображения $f\colon M^{n^2} \to N^{n^2}$ в точке $0 \in \in \Sigma^n(f)$ неустойчив, что и доказывает теорему.

Замечание 1. В терминах рис. 35 мы доказали выше, что точка $m = n = 9$ принадлежит области неустойчивости (называемой также областью *плохих размерностей* Мазера).

Замечание 2. Можно сформулировать теорему, приведенную выше, как утверждение, что дифференцируемые особенности отображений

$M^{n^2} \to N^{n^2}$ при больших n имеют «модули» (т. е. непрерывно меняющиеся с отображением инварианты). Например, из приведенного доказательства видно, что при $n \geqslant 3$ имеется по крайней мере один модуль.

При достаточно больших n число модулей бесконечно, т. е. пространство дифференцируемо неэквивалентных особенностей бесконечномерно. Действительно, при достаточно больших n существуют и неустранимы целые кривые (поверхности, ...) в пространстве-прообразе, такие, что струи отображения в точках этих кривых (поверхностей, ...) имеют модули. Более того, при достаточно больших n неустранима и такая ситуация, когда число этих модулей больше размерности соответствующего подмногообразия (кривой, поверхности, ...). В таком случае набор модулей задает отображение указанного подмногообразия пространства-прообраза в пространство значений модулей. Образ этого отображения — подмножество (кривая, поверхность, ...) в пространстве значений модулей. Это подмножество инвариантно связано с исходным отображением.

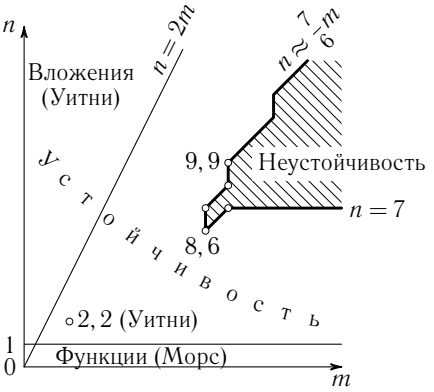


Рис. 35

Итак, мы получаем в качестве инварианта дифференцируемого отображения целую кривую (поверхность, ...). Можно сказать, что при больших n модули сами становятся функциональными. Было бы интересно сформулировать соответствующие теоремы об асимптотиках числа модулей в пространстве k-струй при любых k.

В случае отображений пространств произвольных размерностей $M^m \to N^n$ ситуация аналогична, только вместе с увеличением n надо увеличивать m так, чтобы идти внутрь области плохих размерностей Мазера, заштрихованной на рис. 35. Уолл доказал, что число модулей становится бесконечным сразу же за границей области плохих размерностей, т. е. как только имеющие модули струи появляются не в изолированных точках. Таким образом, внутри области плохих размерностей дифференцируемый тип отображения в точке не определяется никакой струей конечного порядка (для некоторых отображений, образующих открытое множество в пространстве всех отображений).

§ 4. Локальная алгебра особенности и подготовительная теорема Вейерштрасса

Каждый геометрический объект может описываться двумя способами — в терминах точек многообразий и в терминах функций на них.

Там, где геометр говорит о многообразии, алгебраист предпочитает говорить об алгебре функций (имея в виду алгебру функций на этом многообразии). Подмногообразию отвечает идеал (образованный функциями, обращающимися в нуль на этом подмногообразии). Алгебра функций на подмногообразии получается из алгебры функций на исходном многообразии факторизацией по этому идеалу. Точки многообразий — это минимальные его подмногообразия, им отвечают максимальные идеалы и т. д.

Алгебраический способ описания оказывается особенно удобным в случаях вырождений, когда геометрические объекты становятся микроскопическими и их непосредственное изучение затруднительно.

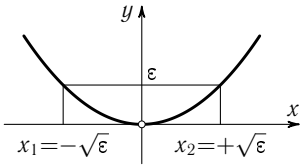


Рис. 36

В частности, с каждой особенностью дифференцируемого отображения в точке связывается некоторая локальная алгебра — «алгебра функций на инфинитезимальном прообразе точки». Чтобы понять определение этой алгебры, начнем с простейшего примера.

4.1. Алгебра функций на слипшемся двоеточии. Рассмотрим отображение вещественной прямой на прямую, заданное формулой $y = x^2$ (рис. 36). Зафиксируем неособое значение $y = \varepsilon$. Его прообраз состоит из двух точек. Рассмотрим алгебру всех функций на множестве, состоящем из этих двух точек. Эта $\mathbb{R}$-алгебра (алгебра над полем $\mathbb{R}$) представляет собой линейное функциональное пространство размерности 2 (так как функция определяется своими значениями в двух точках), снабженное операцией (поточечного) умножения функций. Мы обозначим алгебру функций на прообразах точки ε через Q_ε.

В линейном пространстве алгебры Q_ε имеется естественный базис из δ-функций:

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } x = \sqrt{\varepsilon}, \\ 0 & \text{при } x = -\sqrt{\varepsilon}; \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } x = \sqrt{\varepsilon}, \\ 1 & \text{при } x = -\sqrt{\varepsilon}. \end{cases}$$

Однако этот базис неудобен для изучения предельного перехода при стремлении ε к нулю. Другой базис образуют сужения на наше двоеточие простейших многочленов ниже второй степени от x:

$$e_1 = 1, \quad e_2 = x.$$

Таблица умножения алгебры Q_ε во втором базисе имеет вид

	1	x
1	1	x
x	x	ε

Пусть ε стремится к нулю. Тогда определенная алгеброй операция умножения в двумерном пространстве многочленов ниже второй степени переходит в пределе в операцию на том же линейном пространстве, заданную таблицей умножения

	1	x
1	1	x
x	x	0

Пространство многочленов ниже второй степени с указанной операцией образует алгебру. Эта алгебра и называется *алгеброй функций на слипшемся двоеточии*, $Q = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} Q_\varepsilon$.

Алгебра функций на слипшемся двоеточии может быть также описана как факторалгебра $Q = \mathbb{R}[[x]]/(x^2)$ алгебры $\mathbb{R}[[x]]$ формальных степенных рядов от x по идеалу, порожденному x^2. Вместо алгебры рядов можно также взять алгебру многочленов $\mathbb{R}[x]$. Алгебра Q функций на слипшемся двоеточии называется поэтому также *алгеброй срезанных полиномов ниже второй степени*.

Перенесение описанных конструкций на более общий случай произвольного гладкого отображения приводит к следующему определению алгебры функций на инфинитезимальном прообразе точки.

4.2. Локальная алгебра отображения в точке. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — гладкое отображение, заданное в окрестности точки 0 из $\mathbb{R}^m$, переводящее эту точку в точку 0 из $\mathbb{R}^n$. Отображение f в координатах задается n функциями m переменных

$$y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_m), \quad \ldots, \quad y_n = f_n(x_1, \ldots, x_m).$$

Поскольку дальнейшее имеет несколько вариантов в зависимости от класса гладкости этих функций, мы введем унифицирующее обозначение $\boldsymbol{A}_x$ для «$\mathbb{R}$-алгебры функций рассматриваемого класса» от x ($\boldsymbol{A}$ — от «алгебра»). Значения $\boldsymbol{A}_x$ могут быть, например, следующими:

$\mathscr{E}_x$ — алгебра ростков бесконечно дифференцируемых функций в 0;

H_x — алгебра сходящихся степенных рядов;

$\mathbb{R}[[x]]$ — алгебра формальных степенных рядов; (в случае H_x радиус сходимости зависит от ряда; в обеих последних ситуациях следует иметь в виду

также и комплексные варианты, т. е. алгебры голоморфных ростков и формальных рядов $\mathbb{C}[[x]]$).

Элементы $f_1, \ldots, f_n$ алгебры функций $\boldsymbol{A}_x$ порождают в $\boldsymbol{A}_x$ идеал. Этот идеал образован всеми линейными комбинациями $h_1 f_1 + \ldots + h_n f_n$ с коэффициентами h_k из алгебры функций $\boldsymbol{A}_x$. Мы будем обозначать идеал, порожденный $f_1, \ldots, f_n$, через $(f_1, \ldots, f_n)$.

О п р е д е л е н и е. *Локальной алгеброй отображения f в нуле* называется факторалгебра алгебры функций по идеалу, порожденному компонентами отображения:

$$Q_f = \boldsymbol{A}_x / I_f, \quad I_f = (f_1, \ldots, f_n).$$

П р и м е р. Пусть $m = n = 1$ и $f(x) = x^2$. Локальная алгебра этого отображения в нуле есть алгебра функций на слипшемся двоеточии, т. е. двумерная алгебра срезанных многочленов ниже второй степени, рассмотренная в п. 4.1.

З а м е ч а н и е 1. Алгебра Q_f не зависит от использовавшихся систем локальных координат в прообразе и в образе. Точнее, переход к другим системам координат индуцирует переход всей точной последовательности $\mathbb{R}$-алгебр $0 \to I_f \to \boldsymbol{A}_x \to Q_f \to 0$ в изоморфную.

З а м е ч а н и е 2. Алгебраисты называют алгебру *локальной*, если она имеет только один максимальный идеал (идеал, не содержащийся в большем идеале, отличном от всей рассматриваемой алгебры). Геометрически максимальные идеалы соответствуют минимальным подмногообразиям, т. е. точкам. Таким образом, локальность алгебры означает, что она «сосредоточена в одной точке».

Наши алгебры функций $\boldsymbol{A}_x$ и Q_f локальны (единственный максимальный идеал состоит из функций, обращающихся в 0 в начале координат). Максимальный идеал обычно обозначается буквой $\mathfrak{m}$.

З а м е ч а н и е 3. Определение локальной алгебры Q_f можно сформулировать в более инвариантных терминах следующим образом. Обозначим через $\boldsymbol{A}_y$ алгебру «функций рассматриваемого класса» в точке 0 пространства-образа (т. е. алгебру функций или рядов от $y_1, \ldots, y_n$). Отображение f индуцирует гомоморфизм $\mathbb{R}$-алгебр $f^* : \boldsymbol{A}_y \to \boldsymbol{A}_x$, $(f^*\varphi)(x) = \varphi(f(x))$. Обозначим через $\mathfrak{m}_y$ максимальный идеал алгебры $\boldsymbol{A}_y$ (т. е. множество функций или рядов от y, равных 0 в точке $y = 0$). Образ идеала $\mathfrak{m}_y$ при отображении f^* не будет, вообще говоря, идеалом в алгебре $\boldsymbol{A}_x$. Построим идеал $I_f = \boldsymbol{A}_x \cdot f^*\mathfrak{m}_y$; тогда $Q_f = \boldsymbol{A}_x / I_f$.

П р и м е р. Пусть $\boldsymbol{A}_x = \mathbb{R}[[x]]$, $f(x) = x^2$. В этом случае

$\boldsymbol{A}_x = \{a_0 + a_1 x + \ldots\}$ (все формальные ряды);

$\mathfrak{m}_y = \{b_1 y + b_2 y^2 + \ldots\}$ (формальные ряды без свободного члена);

$f^*\mathfrak{m}_y = \{b_1x^2 + b_2x^4 + \ldots\}$ (четные формальные ряды без свободного члена);

$\boldsymbol{A}_x f^*\mathfrak{m}_y = \{a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots\}$ (формальные ряды без свободного и линейного членов);

$Q_f = \{a_0 + a_1x\}$ (алгебра срезанных многочленов степени меньше 2).

З а д а ч а 1. Проверить эквивалентность определения I_f, данного в замечании 3, координатному определению: $I_f = (f_1, \ldots, f_n)$.

З а д а ч а 2. Пусть $m = n = 1$, $f(x) = x^k$. Доказать, что Q_f — алгебра срезанных многочленов степени меньше k, т. е. алгебра многочленов $a_0 + a_1x + \ldots + a_{k-1}x^{k-1}$ с умножением по правилу $x^k = 0$. Размерность этой алгебры как $\mathbb{R}$-линейного пространства равна k.

З а д а ч а 3. Пусть f — отображение Уитни $\mathbb{R}^{k-1} \to \mathbb{R}^{k-1}$, заданное формулами $y_1 = x_1^k + x_2x_1^{k-2} + \ldots + x_{k-1}x_1$, $y_2 = x_2$, $\ldots$, $y_{k-1} = x_{k-1}$.

Доказать, что Q_f — алгебра срезанных многочленов степени меньше k.

З а д а ч а 4. Пусть $f_\pm\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ — эллиптическое и гиперболическое отображения класса Σ^2 (с. 44). Доказать, что обе соответствующие локальные $\mathbb{R}$-алгебры $Q_{f_\pm}$ имеют $\mathbb{R}$-размерность 4 и неизоморфны.

З а м е ч а н и е. В комплексном случае отображения $f_\pm$ эквивалентны, а соответствующие им $\mathbb{C}$-алгебры имеют $\mathbb{C}$-размерность 4 и изоморфны. Таким образом, неизоморфные $\mathbb{R}$-алгебры $Q_{f_\pm}$ являются двумя «вещественными формами» одной и той же $\mathbb{C}$-алгебры, которая является комплексификацией каждой из этих $\mathbb{R}$-алгебр.

4.3. Кратность отображения в точке. Числа прообразов точки общего положения в комплексных вариантах приведенных выше задач 2—4 равны размерностям соответствующих локальных $\mathbb{C}$-алгебр Q_f над $\mathbb{C}$ (т. е. равны, соответственно, k, k, 4). Это не случайно.

Пусть дан росток голоморфного отображения $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$.

Т е о р е м а. *Число близких к нулю прообразов близкой к нулю точки общего положения при отображении f равно размерности локальной алгебры*:

$$\mu = \dim_c Q_f.$$

Доказательство этой теоремы составляет следующий параграф; там дано и точное определение «числа близких к нулю прообразов».

З а м е ч а н и е. В голоморфном случае конечномерность Q_f над $\mathbb{C}$ эквивалентна изолированности точки 0 в полном прообразе нуля (т. е. в $f^{-1}(0)$). В вещественном аналитическом случае это уже не так: конечномерность Q_f над $\mathbb{R}$ эквивалентна изолированности в *комплексном* полном прообразе. Бесконечно дифференцируемый пример особенности с бесконечномерной локальной алгеброй в точке, являющейся изолированной точкой полного прообраза нуля: $f = \exp(-1/x^2)$.

О п р е д е л е н и е. Число $\mu = \dim_c Q_f$ (над $\mathbb{R}$ в вещественном и над $\mathbb{C}$ в комплексном случае) называется (*алгебраической*) *локальной кратностью* отображения f в нуле.

Отображение называется *конечнократным*, если $\mu < \infty$.

З а д а ч а. Докажите, что если $m > n$, то конечнократных отображений $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ не существует.

4.4. Подготовительная теорема Вейерштрасса. Начнем с примера. Рассмотрим локальную алгебру Q_f отображения $y = x^2$. Это — алгебра срезанных многочленов степени меньше 2 от x:

$$Q_f = \mathbb{R}[[x]]/(x^2).$$

Как линейное пространство, эта алгебра двумерна, и ее элементы можно записывать в виде $a_0 + a_1 x$, т. е. в виде линейных комбинаций двух элементов, 1 и x, с числовыми коэффициентами.

О п р е д е л е н и е. *Системой образующих* конечномерной локальной алгебры $Q_f = \boldsymbol{A}_x/I_f$ мы будем называть набор элементов $(e_1, \ldots, e_\mu)$ из алгебры функций $\boldsymbol{A}_x$, который переходит в систему образующих линейного пространства Q_f при факторизации по идеалу I_f.

П р и м е р. В качестве системы образующих алгебры срезанных многочленов от x степени меньше k можно взять k одночленов $1, x, \ldots, x^{k-1}$. Эти образующие независимы, т. е. составляют базис в пространстве Q_f.

З а д а ч а. Доказать, что локальная алгебра Q_f гладкого конечнократного отображения f всегда имеет базис, состоящий из одночленов.

В случае $f = x^2$ локальная алгебра Q_f состоит из срезанных многочленов ниже второй степени и базис образуют два одночлена, 1 и x. Заметим, что каждая функция α из $\boldsymbol{A}_x$ представима в виде комбинации базисных одночленов с четными коэффициентами:

$$\alpha(x) = c_1(x^2) \cdot 1 + c_2(x^2) \cdot x$$

(разложение на четную и нечетную составляющие). В формальном и аналитическом случаях это разложение даже однозначно определено (в бесконечно дифференцируемом случае коэффициенты определены однозначно лишь на положительной полуоси).

Подготовительная теорема Вейерштрасса представляет собой далекое обобщение приведенного разложения функции на четную и нечетную части.

Т е о р е м а. *Пусть $y = f(x)$ — отображение конечной кратности и $(e_1, \ldots, e_\mu)$ — система образующих его локальной алгебры Q_f. Тогда для всякой функции α существует разложение*

$$\alpha(x) = c_1(f(x))e_1(x) + \ldots + c_\mu(f(x))e_\mu(x),$$

где c_k — функции от y.

Иными словами, для каждого элемента алгебры функций $\boldsymbol{A}_x$ существует разложение

$$\alpha = (f^* c_1)e_1 + \ldots + (f^* c_\mu)e_\mu,$$

где c_k — элементы алгебры функций $\boldsymbol{A}_y$.

Доказательство. Докажем эту теорему в случае формальных степенных рядов. По определению системы образующих, для любого α существует разложение

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\mu} c_k e_k(x) + \sum_{r=1}^{n} \alpha_r(x) f_r(x), \quad c_k \in \mathbb{R} \tag{1}$$

(вторая сумма есть общий вид элемента идеала I_f).

В частности, для каждого r можно разложить α_r по формуле (1):

$$\alpha_r(x) = \sum_{k=1}^{\mu} c_{k,r} e_k(x) + \sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s}(x) f_s(x).$$

Подставляя эти разложения в разложение (1), мы получаем улучшенное разложение

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\mu} \left(c_k + \sum_{r=1}^{n} c_{k,r}(x) f_r(x) \right) e_k(x) + \sum_{r=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \alpha_{r,s}(x) f_r(x) f_s(x).$$

Продолжая разлагать по формуле (1) коэффициенты $\alpha_{r,s}(x)$ и повторяя процедуру улучшения, мы будем на каждом шаге повышать степени произведения компонент отображения f во втором слагаемом разложения и степени многочленов относительно компонент отображения f в коэффициентах при e_k. Заметим, что члены младших степеней в построенных на первых шагах многочленах, являющихся коэффициентами при e_k, на следующих шагах уже не меняются.

После бесконечного числа шагов указанной процедуры второе слагаемое будет полностью уничтожено, а коэффициенты первого слагаемого станут формальными рядами относительно компонент f_k, т. е. мы получим искомое разложение.

В случаях аналитических или голоморфных отображений теорема доказывается несколько более аккуратным проведением аналогичной процедуры, сопровождаемой контролем сходимости рядов (Серр, Гузель; см., например, [349], [5]). В случае бесконечно дифференцируемых отображений подготовительная теорема была доказана Мальгранжем. В этом случае доказательство значительно сложнее (см., например, [386], [387], [391]).

Основное значение подготовительной теоремы в исследовании особенностей состоит в том, что она позволяет обосновывать «отбрасывание

хвостов», т. е. позволяет переносить различные результаты о нормальных формах и т. п. с уровня конечных струй на уровень гладких отображений *).

Не следует, однако, переоценивать значения получающихся при этом теорем для приложений. Рассмотрим, например, особенность функции m переменных в невырожденной точке минимума (где второй дифференциал положительно определен). Можно доказать, что существует замена переменных, приводящая f к нормальной форме $f = x_1^2 + \ldots + x_m^2$. Однако получаемая при этом информация о топологии f не больше, чем вытекающая из возможности привести f к нормальной форме на уровне 2-струй:

$$f = x_1^2 + \ldots + x_m^2 + o(|x|^2).$$

Приведения же на уровне k-струй достаточно, по-видимому, уже для всех разумных приложений.

В дальнейшем мы доказываем подробно теоремы о приведении отображений к нормальным формам на уровне k-струй или на уровне формальных рядов (т. е. ∞-струй). Доказательства сразу переносятся на гладкий, аналитический и голоморфный случаи, нужно только пользоваться соответствующим вариантом подготовительной теоремы.

З а м е ч а н и е. Беззаботное отношение к обоснованию перехода от формальных рядов к аналитическим и гладким объектам допустимо, когда результаты для всех случаев (формального, аналитического, голоморфного и гладкого) действительно параллельны. Однако встречаются задачи, в которых это не так (например, задачи с малыми знаменателями; ср. [5]). В таких задачах обоснование сходимости и исследование гладкого случая существенно, так как за расходимостью рядов скрывается качественное, топологическое различие между поведением гладкого или аналитического объекта и его нормальной формы на уровне струй (что и проявляется в задачах с малыми знаменателями в виде резонансных эффектов; ср. [20, гл. V]).

В теории особенностей такая ситуация, видимо, не встречается (см., однако, пример Габриэлова [88] формального соотношения между аналитическими функциями, не допускающими аналитического соотношения, и с. 298).

4.5. Примеры и приложения.

П р и м е р 1. Рассмотрим симметрические функции от m переменных. Из подготовительной теоремы вытекает, что все такие функции можно представить в виде функций от основных симметрических функций:

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_m, \quad \ldots, \quad \sigma_m = x_1 \ldots x_m.$$

Действительно, рассмотрим «отображение Виета» $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ (или $\mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$), сопоставляющее точке с координатами $(x_1, \ldots, x_m)$ точку

*) Действительно, то, что e_k образуют базис алгебры, проверяется по конечной струе.

с координатами $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$. Нетрудно проверить, что это отображение конечнократно, а именно $\mu = m!$; в качестве базиса можно взять, например, μ одночленов $e_k = x_1^{k_1} \ldots x_m^{k_m}$, для которых $0 \leqslant k_s < s$. По подготовительной теореме каждая функция представляется в виде $\sum c_k(\sigma) e_k$. Для симметрической же функции, как нетрудно сообразить, все коэффициенты, кроме c_0, равны нулю, что и требовалось.

Под словом «функция» можно здесь понимать формальный или сходящийся вещественный или комплексный ряд или росток бесконечно дифференцируемой функции в нуле. В действительности результат справедлив также и в целом (например, для бесконечно дифференцируемых функций во всем $\mathbb{R}^n$, см. работу Глезера [329], или для многочленов).

Пример 2. Часто встречается ситуация, когда разлагаемая по подготовительной теореме функция α дифференцируемо (аналитически, формально) зависит, кроме переменных x, еще от параметров t. В таком случае можно не только получить разложение при каждом значении параметров, но получить и разложение с дифференцируемо (аналитически, формально) зависящими от параметров коэффициентами:

$$\alpha(x, t) = \sum c_k(f(x), t) e_k(x)$$

(речь идет о ростках функций от (x, t) в нуле или о формальных степенных рядах по x и t).

Для доказательства достаточно применить подготовительную теорему к отображению f, надстроенному тождественным преобразованием параметров, т. е. к отображению

$$(x, t) \mapsto (f(x), t).$$

Это отображение конечнократно, и систему образующих локальной алгебры образуют «те же самые» функции $e_k(x)$, что и для f (рассматриваемые, однако, теперь как элементы алгебры функций $\boldsymbol{A}_{x,t}$ от переменных x и t).

Более того, можно допустить также зависимость f от параметров, и можно заменить $e_k(x)$ любыми функциями $E_k(x, t)$, обращающимися в $e_k(x)$ при $t = 0$. Действительно, функции $E_k(x, t)$ составляют систему образующих локальной алгебры отображения

$$(x, t) \mapsto (F(x, t), t)$$

тогда и только тогда, когда функции $e_k(x) = E_k(x, 0)$ составляют систему образующих локальной алгебры отображения $x \mapsto f(x) = F(x, 0)$ (это вытекает из того, что $F(x, t) - F(x, 0)$ и $E_k(x, t) - E_k(x, 0)$ принадлежат идеалу, порожденному t в алгебре $\boldsymbol{A}_{x,t}$).

Пример 3 («теорема деления»). *Пусть*

$$F(x, t) = x^\mu + u_1(t) x^{\mu-1} + \ldots + u_k(t), \quad u_s(0) = 0.$$

Тогда каждая функция $\alpha(x, t)$ *представима в виде*

$$\alpha(x, t) = g(x, t)F(x, t) + \sum_{r=0}^{\mu-1} h_r(t)x^r$$

(g — *частное*, *многочлен степени* $\mu - 1$ — *остаток*).

Доказательство. При $t = 0$ функция F превращается в $f = x^\mu$. Локальная алгебра отображения f порождается одночленами $1, x, \ldots, x^{\mu-1}$. Следовательно,

$$\alpha(x, t) = \sum_{r=0}^{\mu-1} c_r(F(x, t), t)x^r.$$

Представляя каждое c_r в виде $c_r = g_r(x, t)F + h_r(t)$, получаем искомое разложение.

Теорема деления справедлива в гладкой, формальной, аналитической и голоморфной ситуациях; голоморфный вариант теоремы деления принадлежит Вейерштрассу.

Пример 4 (подготовительная теорема с параметром). Предположим, что дан росток конечнократного отображения, гладко зависящий от параметра t, меняющегося на отрезке $[0, 1]$, $f_t\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. *Предположим, что функции* $e_1(x), \ldots, e_\mu(x)$ *из* $\boldsymbol{A}_x$ *порождают* (*после факторизации по идеалу* I_{f_t}) *локальную алгебру* Q_{f_t} *при каждом* t. *Тогда для всякой гладко зависящей от* t *функции* $\alpha(t, x)$ *существует разложение*

$$\alpha(t, x) = \sum c_k(f_t(x), t)e_k(x)$$

с гладкими на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant 1$ *коэффициентами* c_k.

Доказательство получается из аналогичного локального утверждения примера 2 при помощи разбиения единицы. Действительно, согласно примеру 2, у каждой точки $\tau \in [0, 1]$ существует окрестность Δ, в которой локальное разложение существует. Выберем из окрестностей Δ конечное покрытие $\{\Delta_i\}$. Пусть $\chi_i(t)$ — такие гладкие на отрезке $[0, 1]$ функции, в сумме равные единице, что χ_i отлично от 0 только на Δ_i.

Пусть локальное разложение α на Δ_i имеет вид

$$\alpha(t, x) = \sum c_{k,i}(f_t(x), t)e_k(x), \quad t \in \Delta_i.$$

Произведение $\chi_i c_{k,i}$ доопределим нулем вне Δ_i. Тогда функции

$$c_k(y, t) = \sum_i \chi_i(t)c_{k,i}(y, t)$$

определяют искомое разложение на всем отрезке $[0, 1]$.

З а м е ч а н и е. Вернемся к разложению из общей подготовительной теоремы:

$$\alpha(x) = c_1(f(x))e_1(x) + \ldots + c_\mu(f(x))e_\mu(x).$$

Было бы полезно иметь линейный оператор, сопоставляющий функции $\alpha(x)$ набор функций $c_k(y)$, и знать его дифференциальные свойства. Например, пусть $f(x) = x^2$ и $e_1 = 1$, $e_2 = x$. Тогда для любой функции α коэффициенты $c_k(f(x))$ легко оцениваются через первую производную от α. Можно показать (см. [4]), что, вообще, в голоморфной ситуации оператор, переводящий $\alpha(x)$ в $c_k(f(x))$, «не хуже, чем дифференциальный оператор конечного порядка»:

$$|c_k(f(x))|_{|x|\leqslant r} \leqslant \mathrm{const} \cdot \delta^\nu |\alpha(x)|_{|x|\leqslant r-\delta}.$$

К сожалению, аналогичная оценка ухудшения свойств функции при переходе от α к c для гладкого случая не доказана. Такая оценка позволила бы получить прямое доказательство теоремы об устойчивости инфинитезимально устойчивых ростков типа доказательства теоремы о неявной функции (ср. [5]).

§ 5. Локальная кратность голоморфного отображения

В этом параграфе доказывается совпадение алгебраической кратности голоморфного отображения с геометрической кратностью (с индексом особой точки соответствующего голоморфного векторного поля). Хотя результат был известен еще классикам, подробное доказательство было опубликовано, по-видимому, лишь в статье В. П. Паламодова [179]. Идея изложенного ниже элементарного доказательства принадлежит А. Г. Кушниренко [147].

Индекс особой точки вещественного векторного поля может быть вычислен как сигнатура подходящей квадратичной формы на локальной алгебре особенности (формула Левина—Эйзенбуда—Химшиашвили [219], [316]). Мы доказываем эту формулу, основанную на невырожденности квадратичных форм на локальных алгебрах (двойственность Гротендика), при помощи многомерного обобщения теоремы Абеля о следе голоморфной формы.

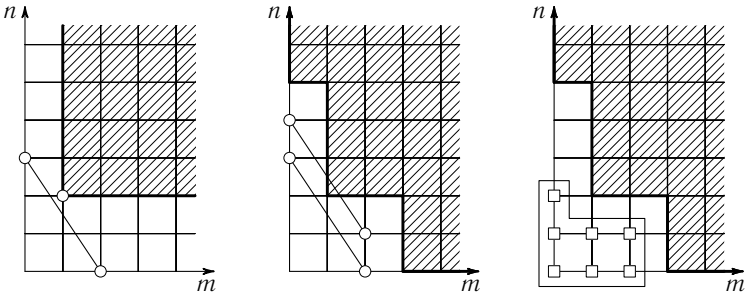
5.1. Кратность. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, a) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — росток голоморфного отображения в точке a. Рассмотрим алгебру $\mathbb{C}\{x\}_a$ всех ростков голоморфных функций в точке a. Ростки компонент отображения f порождают идеал $I_{f,a}$ в этой алгебре.

О п р е д е л е н и е. *Кратностью* ростка отображения f в точке a называется размерность его локальной алгебры

$$\mu_a[f] = \dim_{\mathbb{C}} Q_{f,a}; \qquad Q_{f,a} = \mathbb{C}\{x\}_a / I_{f,a}.$$

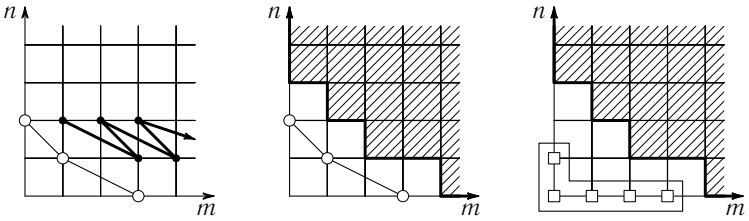
Росток называется *конечнократным*, если его кратность конечна.

Пример 1. Если f — невырожденный линейный оператор, то кратность точки 0 равна 1.



а) *б*) *в*)

Рис. 37



а) *б*) *в*)

Рис. 38

Пример 2. Пусть $f_1 = x_1x_2^2$; $f_2 = x_1^2 + x_2^3$. Сопоставим моному $x_1^{k_1}x_2^{k_2}$ точку (k_1, k_2) целочисленной решетки (рис. 37, *а*). Отметим мономы, принадлежащие идеалу $I = (f_1, f_2)$. Вместе с $x_1x_2^2$ в него входят все мономы заштрихованного угла. Бином f_2 изображается отрезком с концами (2, 0) и (0, 3). Сдвигая этот отрезок на 1 вправо, убеждаемся, что $x_1^3 \in I$, а сдвигая на 2 вверх, — что $x_2^5 \in I$. Таким образом, все мономы в области, заштрихованной на рис. 37, *б*, лежат в I. На рис. 37, *в* отмечены 7 мономов, определяющих $\mathbb{C}$-базис алгебры $Q_{f,0}$. Итак, $\mu_0[f] = 7$.

Пример 3. Пусть $f_1 = x_2^2 - x_1x_2$, $f_2 = x_1x_2 - x_1^3$. Снова изобразим f_1 и f_2 отрезками (рис. 38, *а*). Вершины зигзагообразной ломаной на рис. 38, *а* отвечают мономам, сравнимым по модулю идеала $I = (f_1, f_2)$. Таким образом, $x_1x_2^2$ сравним с мономом сколь угодно высокой степени по модулю I.

Нетрудно проверить, что $x_1x_2^2 \in I$ (например, это видно из того, что $x_1x_2^2 \equiv \equiv x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_1 \bmod I$).

Поэтому все мономы из заштрихованной на рис. 38, *б* области лежат в идеале. Базис $Q_{f,0}$ порожден обведенными на рис. 38, *в* пятью мономами, $\mu[f] = 5$.

5.2. Индекс равен кратности.

О п р е д е л е н и е. *Индексом* $\operatorname{ind}_a[f]$ ростка отображения f в точке a называется степень отображения $f/\|f\|\colon S_\varepsilon^{2n-1} \to S_1^{2n-1}$ достаточно малой сферы $\|x - a\| = \varepsilon$ в пространстве-прообразе в единичную сферу в пространстве-образе.

Если существует окрестность точки a, в которой нет прообразов нуля, кроме, может быть, самой точки a, то индекс определен корректно (не зависит от выбора малой сферы S_ε^{2n-1}). Индекс ростка в неизолированном нуле не определен. Кратностью и индексом корня a системы голоморфных уравнении $f_1 = \ldots = f_n = 0$, определенных в окрестности точки a, называются кратность и индекс ростка отображения $f = f_1, \ldots, f_n$ в точке a.

Т е о р е м а 1. *Индекс конечнократного голоморфного ростка равен его кратности.*

Т е о р е м а 2. *Росток голоморфного отображения не является конечнократным в точке a, если и только если a есть неизолированный прообраз нуля ростка.*

Доказательство теоремы 2 приведено в п. 5.9. Ниже излагается доказательство теоремы 1. Оно основано на формулируемых ниже предложениях 1°—7°, доказанных в п. 5.3—5.8.

1°. У н и в е р с а л ь н о с т ь о т о б р а ж е н и я Ф а м а.

О п р е д е л е н и е. Отображение $\Phi^m\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, определенное формулами

$$y_1 = x_1^{m_1}, \quad \ldots, \quad y_n = x_n^{m_n},$$

называется *отображением Фама*.

О п р е д е л е н и е. Два ростка f и g в точке a называются *алгебраически эквивалентными* или, короче, *A-эквивалентными*, если существует такой росток голоморфного семейства линейных невырожденных отображений $A(x) \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$, что $f(x) = A(x)g(x)$.

П р е д л о ж е н и е. *Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$ *— росток конечнократного отображения. Тогда существует такое отображение Фама* Φ^m, *что росток* f *в* 0 *A-эквивалентен ростку отображения* $\Phi_\varepsilon^m = \Phi^m + \varepsilon f$ *при любом* $\varepsilon \neq 0$.

Иными словами, малой деформацией отображения Фама можно получить любой (с точностью до A-эквивалентности) конечнократный росток.

2°. Предложение. *Индекс и кратность нуля отображения Фама совпадают.*

3°. Предложение. *Индексы A-эквивалентных ростков равны.*

4°. Предложение. *Кратности A-эквивалентных ростков равны.*

5°. Аддитивность индекса. Пусть система из n голоморфных уравнений в $\mathbb{C}^n$ голоморфно зависит от параметра.

При изменении параметра кратный корень системы может распасться.

Предложение. *Сумма индексов корней, образовавшихся при распадении кратного корня системы, равна индексу этого корня.*

6°. Субаддитивность кратности.

Предложение. *Сумма кратностей корней, образовавшихся при распадении кратного корня системы, не превосходит кратности этого корня.*

7°. Предложение. *Кратность корня не меньше его индекса.*

Доказательство теоремы 1. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — росток конечнократного отображения. Выберем отображение Фама Φ так, чтобы ростки f и $\Phi_\varepsilon = \Phi + \varepsilon f$ в нуле при $\varepsilon \neq 0$ были A-эквивалентны (см. 1°). Выберем достаточно малую окрестность U точки 0. Выберем достаточно малое $\varepsilon(U) > 0$. Рассмотрим продеформированное отображение Фама $\Phi_\varepsilon = \Psi$. Пусть a_i — корни системы $\Psi = 0$, лежащие в окрестности U. Получаем цепочку соотношений

$$\begin{aligned} \mu_0[\Phi] &\geqslant \sum \mu_{a_i}[\Psi] && \text{(см. 6°)},\\ \mu_{a_i}[\Psi] &\geqslant \operatorname{ind}_{a_i}[\Psi] && \text{(см. 7°)},\\ \sum \operatorname{ind}_{a_i}[\Psi] &= \operatorname{ind}_0[\Phi] && \text{(см. 5°)},\\ \operatorname{ind}_0[\Phi] &= \mu_0[\Phi] && \text{(см. 2°)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Из этой цепочки следует, что все входящие в нее неравенства являются равенствами. Поскольку $f(0) = 0$, среди корней a_i есть точка 0. Следовательно,

$$\mu_0[\Psi] = \operatorname{ind}_0[\Psi]$$

(так как неравенство (1) обращается в равенство). Но так как ростки f и Ψ A-эквивалентны, имеем

$$\begin{aligned} \mu_0[f] &= \mu_0[\Psi] && \text{(см. 3°)},\\ \operatorname{ind}_0[f] &= \operatorname{ind}_0[\Psi] && \text{(см. 4°)}. \end{aligned}$$

Тем самым теорема 1 доказана в случае, когда $f(0) = 0$. Если же $f(0) \neq 0$, то, как легко проверить,

$$\mu_0[f] = \operatorname{ind}_0[f] = 0.$$

5.3. Индекс вещественного ростка. Индекс определяется не только для голоморфных отображений, но и для гладких отображений вещественных пространств.

Пусть $f\colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$ — гладкий росток в точке a.

О п р е д е л е н и е. *Индексом* $\operatorname{ind}_a[f]$ называется степень отображения $f/\|f\|\colon S_\varepsilon^{n-1} \to S_1^{n-1}$ достаточно малой сферы $\|x - a\| = \varepsilon$ в пространстве-прообразе в единичную сферу в пространстве-образе.

Индекс не определен, если a является неизолированным нулем ростка f.

П р и м е р. Если $f(0) = 0$ и матрица Якоби f в точке 0 невырождена, то индекс точки 0 равен плюс или минус единице в зависимости от знака якобиана.

Пусть в замкнутом шаре $B \subset \mathbb{R}^n$ нет нулей отображения $f\colon (\mathbb{R}^n, a) \to \mathbb{R}^n$, кроме, быть может, точки 0, и пусть f_ε — произвольная гладкая деформация отображения f.

П р е д л о ж е н и е 1. *Для достаточно малых* ε *сумма индексов нулей пошевеленного отображения* f_ε *в шаре* B *равна индексу точки* 0 *исходного отображения* f, *если этих нулей конечное число.*

Действительно: 1) все отображения $\Phi_\varepsilon = f_\varepsilon/\|f_\varepsilon\|\colon \partial B \to S_1$ с достаточно малыми ε гомотопны между собой; 2) степень отображения Φ_ε равна сумме индексов нулей отображения f_ε в шаре B.

С л е д с т в и е. *Индекс точки нуль отображения* f *равен числу прообразов в шаре* B *любого достаточно малого регулярного значения* $\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, *посчитанных с учетом знака якобиана в этих точках.*

Для доказательства достаточно к деформации $f_\varepsilon = f - \varepsilon$ применить утверждение предложения 1 и воспользоваться вычислением индекса невырожденного нуля.

О п р е д е л е н и е. Два ростка $f, g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to \mathbb{R}^n$ называются *вещественно* A*-эквивалентными*, если существует такой росток гладкого семейства линейных отображений $A(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, что $\det A(0) > 0$ и $g(x) = A(x)f(x)$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Индексы вещественно* A*-эквивалентных ростков равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\det A(0) > 0$, можно соединить A с E гомотопией A_t с $\det A_t(x) > 0$. Гомотопия $g_t = A_t f$ соединяет g с f и не имеет нулей на малой сфере.

5.4. Индекс голоморфного ростка.

Предложение 1. *Определитель овеществления* $\hat{A}\colon \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ *невырожденного комплексно-линейного отображения* $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *положителен.*

Доказательство. Утверждение следует из того, что $\det \hat{A} = |\det A|^2$ (формула получается прямым вычислением в базисе, в котором матрица A имеет треугольный вид).

[Другое доказательство. 1°. Множество невырожденных линейных операторов $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ связно. Для доказательства достаточно соединить две невырожденные матрицы комплексной прямой; она пересечет множество вырожденных матриц не более чем в n точках. 2°. Соединим невырожденный комплексный оператор с тождественным оператором путем, состоящим из невырожденных комплексных операторов. Овеществления этих операторов невырождены (так как невырожденность означает взаимную однозначность). Следовательно, определители всех этих овеществлений положительны.]

Следствие. *A-эквивалентные голоморфные ростки имеют одинаковые индексы.*

Доказательство. Овеществления голоморфных A-эквивалентных ростков вещественно A-эквивалентны. Действительно, если $g = Af$, то $\hat{g} = \hat{A}\hat{f}$ и $\det \hat{A}(0) > 0$.

Пусть B — замкнутый шар с центром в точке $a \in \mathbb{C}^n$. Пусть голоморфное отображение f не обращается в нуль в $B \setminus a$.

Предложение 2. *Индекс в точке a ростка голоморфного отображения f равен числу прообразов в шаре B любого достаточно близкого к нулю регулярного значения* ε.

Доказательство. Индекс равен числу прообразов значения ε, посчитанных с учетом знака якобиана отображения f (см. п. 5.2). Этот знак согласно предложению 1 всегда положителен.

Замечание. Рассмотрим голоморфное отображение $2n$-мерной компактной области в $\mathbb{C}^n$, не имеющее нулей на краю области. Тогда *степень отображения $f/\|f\|$ края в S_1^{2n-1} неотрицательна*, ибо эта степень равна числу прообразов значения ε.

Предложение 3. *Пусть отображение g не имеет нулей на краю ограниченной области $U \subset \mathbb{C}^n$ и степень отображения $g/\|g\|$ края области U в единичную сферу равна k. Тогда система $g = 0$ имеет конечное число корней в области U и сумма их индексов равна k.*

Предложение 3 вытекает из следующей леммы.

Лемма. *В условиях предложения 3 число геометрически различных решений системы $g = 0$ в области U не превосходит k.*

Доказательство. Предположим, что найдется $k+1$ корень системы $a_1, \ldots, a_{k+1}$.

1°. Существует полиномиальное отображение $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, для которого точки $a_1, \ldots, a_{k+1}$ — невырожденные корни.

2°. Отображение $g_\varepsilon = g + \varepsilon P$ имеет невырожденные корни в точках $a_1, \ldots, a_{k+1}$ для почти всех значений ε.

3°. При малых $|\varepsilon|$ индекс отображения $g_\varepsilon/\|g_\varepsilon\|$ края области U равен k.

4°. Выберем малое ε, при котором корни a_i отображения g_ε невырождены. Окружим корни a_i малыми шарами B_i, не содержащими других нулей отображения g_ε. Степень отображения $g_\varepsilon/\|g_\varepsilon\|$ сферы ∂B_i в S^{2n-1}_1 равна 1, и, следовательно, степень отображения $\bigcup \partial B_i$ в S^{2n-1}_1 равна $k+1$.

Рассмотрим область $U' = U \setminus \bigcup B_i$. Степень отображения края этой области неотрицательна (см. замечание); с другой стороны, эта степень равна $k-(k+1) = -1$. Противоречие.

Следствие 1. *Индекс корня строго положителен.*

Для доказательства надо применить лемму к шару, содержащему единственный корень системы.

Следствие 2. *При распадении изолированного корня образуется конечное число корней, и сумма их индексов равна индексу распавшегося корня.*

Следствие 3. *В условиях предложения* 3 *индекс каждого корня не превосходит* k.

5.5. Кратность и A-эквивалентность.

Предложение 1. *Кратности A-эквивалентных ростков равны.*

Действительно, идеалы I_f и I_g A-эквивалентных ростков f и g совпадают.

Предложение 2. *Пусть росток f имеет кратность μ и росток g отличается от ростка f малыми порядка $\mu+1$. Тогда ростки g и f A-эквивалентны.*

Следствие. *Пусть матрица Якоби ростка f в точке* 0 *невырождена. Тогда его кратность равна* 1.

Действительно, для линейного отображения f это очевидно, а нелинейное отображения отличается от линейного малыми второго порядка.

Предложение 3. *Конечнократный корень системы голоморфных уравнений изолирован.*

Для доказательства предложений 2 и 3 нам понадобится следующий результат.

Лемма. *Пусть росток f имеет кратность μ. Тогда произведение любых μ ростков функций, обращающихся в* 0 *в точке* 0, *содержится в идеале I_f.*

Доказательство леммы. Для произведения $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$ построим $\mu + 1$ росток $1, \varphi_1, \varphi_1\varphi_2, \ldots, \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$. Эти ростки линейно зависимы в кольце Q_f, т. е. существует нетривиальная линейная комбинация

$$c_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_\mu\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_f.$$

Пусть c_r — первый отличный от нуля коэффициент; тогда

$$\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_r(c_r + c_{r+1}\varphi_{r+1} + \ldots + c_\mu\varphi_{r+1} \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu) \in I_f.$$

Множитель, стоящий в скобках, обратим в кольце $\mathbb{C}\{x\}$, поскольку $c_r \neq 0$. Следовательно, $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_r$, а значит, и $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$ принадлежат идеалу I_f.

Доказательство предложения 2. Всякий росток ψ функции порядка $\mu + 1$ можно представить в виде $\psi = \sum h_1 f_i$, где $h_i(0) = 0$ (пользуясь леммой). Разложив таким образом все компоненты отображения $\varphi = g - f$, получаем $\varphi = Hf$, где H — матрица, $H(0) = 0$. Следовательно, $g = (E + H)f$, что и доказывает A-эквивалентность ростков f и g.

Доказательство предложения 3. Пусть росток f имеет кратность μ в точке 0. Росток x_j^μ представим в виде $x_j^\mu = \sum h_{j,i} f_i$ Область, в которую голоморфно продолжаются ростки $h_{j,i}$ и f_i, не содержит корней системы $f = 0$, отличных от точки 0.

5.6. Свойства отображения Фама. Пусть f — росток μ-кратного отображения в точке 0. Рассмотрим отображение Фама Φ^m, $m = \mu + 1, \ldots, \mu + 1$, и его деформацию $\Phi_\varepsilon^m = \Phi^m + \varepsilon f$.

Предложение 1. *Росток отображения f A-эквивалентен в точке нуль ростку Φ_ε^m при всех $\varepsilon \neq 0$.*

Доказательство. Росток εf A-эквивалентен ростку f в нуле, а Φ_ε^m отличается от εf малыми порядка $\mu + 1$.

Предложение 2. *Индекс и кратность отображения Фама в нуле равны между собой.*

Доказательство. 1°. Индекс равен числу решений системы уравнений $x_1^{m_1} = \varepsilon_1, \ldots, x_n^{m_n} = \varepsilon_n$ при общих $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (см. предложение 2 из п. 5.4). Следовательно, $\operatorname{ind}_0[\Phi^m] = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$.

2°. Локальная алгебра $Q_{\Phi^m,0}$ порождена мономами $x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, где $0 \leqslant k_1 < m_1, \ldots, 0 \leqslant k_n < m_n$. Размерность $\mu_0[\Phi^m]$ этой алгебры, следовательно, равна $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$.

5.7. Субаддитивность кратности. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ — произвольная деформация μ-кратного ростка отображения f в нуле.

Предложение 1 (о субаддитивности кратности). *Существует такая окрестность нуля U в пространстве прообраза, что для любого достаточно малого $|\varepsilon|$ число корней системы $f_\varepsilon = 0$ в окрестности U, посчитанное с учетом кратности, не превосходит μ.*

З а м е ч а н и е. Кратность субаддитивна даже в вещественном случае, где, в отличие от комплексного случая, она не аддитивна.

С л е д с т в и е. *Индекс конечнократного ростка не больше его кратности.*

Для доказательства следствия достаточно применить утверждение о субаддитивности кратности к специальной деформации $f_\varepsilon = f - \varepsilon$.

Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — открытое множество, $A(U)$ — алгебра голоморфных функций, определенных на множестве U, и $I_g(U)$ — идеал этой алгебры, порожденный функциями $g_1, \ldots, g_n$. *Алгеброй* $Q_g(U)$ *отображения* g *в области* U называется факторалгебра $A(U)/I_g(U)$.

Полиномиальной подалгеброй $Q_g[U]$ *отображения* g *в области* U назовем образ алгебры многочленов в алгебре $Q_g(U)$ при гомоморфизме факторизации.

Субаддитивность алгебраической кратности вытекает из следующих двух предложений.

П р е д л о ж е н и е 2. *Для всякой деформации* $\{f_\varepsilon\}$ *ростка* μ*-кратного отображения* f *в точке* 0 *существует такая окрестность* U *нуля в прообразе, что для любого достаточно малого* $|\varepsilon|$ $\mathbb{C}$*-размерность полиномиальной подалгебры отображения* f_ε *в области* U *не превосходит* μ.

П р е д л о ж е н и е 3. *Число решений в области* U *системы голоморфных уравнений* $g = 0$, *посчитанных с учетом их кратностей, не превосходит* $\mathbb{C}$*-размерности полиномиальной подалгебры отображения* g *в области* U.

Предложение 3 доказано в п. 5.8. Для доказательства предложения 2 нам понадобится одно дополнение к подготовительной теореме Вейерштрасса. Пусть f — росток конечнократного отображения и $e_1, \ldots, e_\mu$ — функции, задающие базис его локальной алгебры. Согласно подготовительной теореме для любого ростка голоморфной функции φ существует разложение Вейерштрасса:

$$\varphi(x) = \sum e_i(x)\varphi_i(y), \quad y = f(x).$$

Л е м м а 1. *Существуют единые окрестности нулей* U_1 *и* U_2 *в пространствах образа и прообраза, на которых определены функции, фигурирующие в разложениях Вейерштрасса всех многочленов сразу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве области U_1 возьмем область, в которую голоморфно продолжаются функции φ_i, участвующие в разложении следующего конечного набора функций:

$$1, \quad x_j e_k \quad (1 \leqslant j \leqslant n, \quad 1 \leqslant k \leqslant \mu).$$

В качестве области U_2 возьмем подобласть области $f^{-1}(U_1)$, в которую голоморфно продолжаются функции e_k. Проведем индукцию по степени многочлена. Всякий многочлен P степени p представим в виде

$$P = \sum x_j Q_j + c \cdot 1, \quad \deg Q_j < p.$$

Подставим в это представление разложения Вейерштрасса для Q_j и воспользуемся разложениями Вейерштрасса функций $x_j e_k$ и 1. Получим разложение леммы 1.

Рассмотрим деформацию $\{f_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}^k$, ростка голоморфного отображения $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}^n$. Определим росток отображения $F\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0) \to \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ формулой $F(x, \varepsilon) = (f_\varepsilon(x), \varepsilon)$.

Лемма 2. *Локальные алгебры ростков f и F изоморфны. Если функции $e_1, \ldots, e_\mu$ образуют базис в алгебре ростка f, то они образуют базис и в алгебре ростка F.*

Доказательство. Идеал, порожденный компонентами $F_1, \ldots \ldots, F_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$ отображения F в алгебре ростков голоморфных функций в точке $0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, совпадает с идеалом, порожденным функциями $f_1, \ldots, f_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$.

Пусть $e_1, \ldots, e_\mu$ — функции, ростки которых в точке 0 образуют базис локальной алгебры ростка f, и пусть $\{f_\varepsilon\}$ — деформация ростка f.

Лемма 3. *Существует такая окрестность нуля $U \subset \mathbb{C}^n$, что для всех достаточно малых $|\varepsilon|$ линейная оболочка образов функций $e_1, \ldots, e_\mu$ в алгебре $Q_{f_\varepsilon}(U)$ содержит полиномиальную подалгебру $Q_{f_\varepsilon}[U]$.*

Доказательство. Функции $e_1, \ldots, e_\mu$ образуют базис локальной алгебры отображения F (лемма 2).

Применим лемму 1 к отображению F. Согласно этой лемме существуют такая окрестность нуля $U \times V \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ и такой шар B в пространстве образа $\mathbb{C}^{n+k}$, что: 1) $F(U \times V) \subset B$, 2) в области $U \times V$ каждый многочлен P представляется в виде

$$P(x) = \sum \Phi_i(y, \varepsilon) e_i(x), \quad y = f_\varepsilon(x). \qquad (*)$$

По лемме Адамара функции Φ_i в шаре B представимы в виде

$$\Phi_i(y, \varepsilon) = c_i(\varepsilon) + \sum_l y_l \Phi_{i,l}(y, \varepsilon).$$

Подставим эти разложения в $(*)$. Мы получаем для каждого многочлена P в области $U \times V$ представление

$$P(x) = \sum c_i(\varepsilon) e_i(x) + \sum h_j(x, \varepsilon) y_j, \quad y_j = f_{\varepsilon,j}(x), \qquad (**)$$

где h_j голоморфны в $U \times V$.

Вторая сумма принадлежит идеалу $I_{\hat{f}_\varepsilon}(U)$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Построенная нами линейная комбинация функций e_i, эквивалентная полиному P по модулю идеала, голоморфно зависит от параметра ε.

Предложение 2 вытекает из леммы 3.

5.8. Оценка числа решений системы уравнений. В этом пункте доказывается предложение 3 п. 5.7.

Л е м м а 1. *Пусть* $\mathbb{C}$*-размерность полиномиальной подалгебры отображения* g *в области* U *конечна. Тогда каждый нуль отображения* g *конечнократен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a — нуль отображения g. Пусть φ_i — линейные функции, обращающиеся в 0 в точке a. Если размерность полиномиальной подалгебры равна μ, то образы в ней $\mu + 1$ многочлена $1, \varphi_1, \varphi_1\varphi_2, \ldots, \varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu$ линейно зависимы. Рассуждая, как в лемме п. 5.5, получим, что существует такая функция $\rho \in A(U)$, что $\rho(a) \neq 0$ и $\rho\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_g(U)$ Обращая функцию ρ в алгебре ростков голоморфных функций (а не многочленов) в точке a, получаем, что $\varphi_1 \cdot \ldots \cdot \varphi_\mu \in I_{g,a}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Число различных корней системы* $g = 0$ *в* U (*посчитанных без учета кратности*) *не превосходит* $\mathbb{C}$*-размерности* μ *полиномиальной подалгебры отображения* g *в области* U.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что существует $\mu + 1$ корень $a_1, \ldots, a_\mu$. Существует многочлен P_i, равный 1 в корне a_i и равный нулю в остальных μ корнях. Образы $\mu + 1$ многочлена P_i в полиномиальной подалгебре линейно независимы. Это противоречит условию.

Введем несколько обозначений. Пусть $a_1, \ldots, a_\nu$ — все нули отображения g в области U.

О п р е д е л е н и е. *Мультилокальной алгеброй* системы $g = 0$ в области U называется прямая сумма локальных алгебр ростков g в точках a_i.

О б о з н а ч е н и е: $\Lambda_g(U) = \sum_{i=1}^{\nu} Q_{g,a_i}$.

Сопоставим каждой функции $A(U)$ набор ее ростков в точках a_i. Это сопоставление индуцирует гомоморфизм $\mathbb{C}$-алгебр $A(U)$ и $\Lambda_g(U)$, который мы будем обозначать через π.

Л е м м а 3. *Пусть* $\mathbb{C}$*-размерность полиномиальной подалгебры отображения* g *в области* U *конечна. Тогда образ алгебры полиномов при гомоморфизме* π *совпадает с мультилокальной алгеброй* $\Lambda_g(U)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a_1, \ldots, a_\nu$ — корни отображения g в области U (их конечное число согласно лемме 2).

Каждый корень a_i имеет конечную кратность μ_i (по лемме 1). Функции, у которых совпадают струи порядка μ_i в точке a_i, определяют одинаковые элементы в локальной алгебре Q_{g,a_i}. Существует многочлен с произвольными наперед заданными струями порядков μ_i в конечном множестве точек $a_1, \ldots, a_\nu$.

Предложение 3 вытекает из леммы 3, поскольку при гомоморфизме π идеал $I_g(U)$ переходит в нуль.

5.9. Изолированность и конечнократность. Докажем теорему 2 п. 5.2. Было показано, что конечнократный корень системы голоморфных уравнений изолирован (см. п. 5.5). Осталось доказать следующее утверждение.

Предложение. *Изолированный корень конечнократен.*

Доказательство. Пусть 0 — изолированный корень системы $f = 0$. Согласно локальному варианту теоремы Гильберта о нулях существует такое N, что $x_j^N \in I_{f,0}$. Предложение доказано.

Дадим теперь прямое доказательство этого предложения, не использующее теорему о нулях.

Пусть шар B лежит в области сходимости ряда Тейлора ростка f в точке 0 и система $f = 0$ имеет в шаре единственный корень 0.

Лемма. *Для всякого k существует такое полиномиальное отображение g, что*: 1) *струи f и g порядка k в точке* 0 *равны*, 2) *росток g в точке* 0 *конечнократен*, 3) $\|f\| > \|f - g\|$ *на сфере ∂B.*

Доказательство. Подберем g в виде $g = f_{l-1} + \varepsilon x^l$, где f_{l-1} — многочлен Тейлора f степени $l - 1 > k$ и x^l — отображение Фама Φ^m, $m = l, \ldots, l$. 1°. Росток g конечнократен в нуле. Действительно, в полиномиальной подалгебре отображения g в $\mathbb{C}^n$ справедливы соотношения $\varepsilon x^l = -f_{l-1}$. Используя эти соотношения, можно понизить степень всякого многочлена, если его степень по одной из переменных больше или равна l. Следовательно, размерность полиномиальной подалгебры конечна и каждый нуль отображения g конечнократен (см. п. 5.5). 2°. Выберем l и затем ε так, чтобы выполнялось неравенство $\|f\| > \|f - g\|$ на сфере ∂B. Лемма доказана.

Доказательство предложения. Выберем отображение g для $k = \operatorname{ind}_0[f]$.

1°. Степень отображения $g/\|g\|$ сферы ∂B в единичную сферу равна k (условие 3).

2°. $\operatorname{ind}_0[g] \leqslant k$ (следствие 3 п. 5.4).

3°. $\mu_0[g] = \operatorname{ind}_0[g] \leqslant k$ (теорема 1 п. 5.2).

4°. Ростки f и g A-эквивалентны в нуле, так как отличаются малыми порядка $k + 1$ или выше (предложение 2 п. 5.5). Следовательно, росток f в точке 0 конечнократен.

5.10. Мультилокальная алгебра распавшегося корня. В п. 5.3—5.8 были проверены все предложения, использованные в п. 5.2 при доказательстве теоремы 1. Эти предложения содержат и дополнительную информацию.

Пусть L — $\mathbb{C}$-линейное пространство, натянутое на функции $e_1, \ldots, e_\mu$, ростки которых в нуле образуют базис локальной алгебры отображения f.

Теорема. *Для всякой деформации $\{f_\varepsilon\}$ ростка f существуют такая окрестность нуля $U \subset \mathbb{C}^n$ и такая окрестность нуля V в пространстве параметров, что при любом $\varepsilon \in V$*

1) *отображение $\pi\colon L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ является изоморфизмом линейных пространств*;

2) *каждый многочлен P в алгебре $A(U)$ эквивалентен по модулю идеала $I_{f,\varepsilon}(U)$ единственному элементу пространства L и этот элемент аналитически зависит от ε.*

Доказательство. Свойство 1) вытекает из того, что отображение $\pi\colon L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ пространств одинаковой размерности является отображением «на» (поскольку полиномиальная подалгебра отображается «на» и каждый полином сравним с элементом из L). Единственность в свойстве 2) вытекает из 1), голоморфность — из замечания 1 п. 5.7.

Задача. Изоморфизм $\pi\colon L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ задает в линейном пространстве L структуру алгебры, зависящую от параметра ε. Показать, что эта структура голоморфно зависит от ε (т. е. что произведение двух элементов из L голоморфно зависит от ε).

5.11. Билинейные формы на локальной алгебре. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — отображение кратности $\mu < \infty$ и Q_f — его локальная алгебра. Мы определим на Q_f семейство билинейных симметрических форм и докажем их невырожденность.

Рассмотрим якобиан $J = \det(\partial f/\partial x)$, вычисленный в какой-либо системе координат. Класс якобиана в Q_f будем также обозначать буквой J и называть якобианом.

Теорема 1. *Якобиан не принадлежит идеалу I_f.*

Рассмотрим какую-либо линейную форму $\alpha\colon Q_f \to \mathbb{C}$. Определим билинейную форму $Б_\alpha$ на Q_f по формуле

$$Б_\alpha(g, h) = \alpha(g \cdot h).$$

Теорема 2. *Билинейная форма $Б_\alpha$ невырождена, если и только если α не обращается в нуль на J.*

Аннулятором ($\operatorname{ann} I$) идеала I называется множество всех таких g, что $gi = 0$ для всех i из I. Аннулятор идеала является идеалом.

Следствие 1. *Если $\alpha(J) \neq 0$, то аннулятор идеала в Q_f совпадает с его ортогональным дополнением относительно формы $Б_\alpha$.*

Доказательство. 1°. Если $ai = 0$, то $Б_\alpha(a, i) = 0$. 2°. Если $Б_\alpha(a, i) = 0$ для всех i из I, но $ai_0 \neq 0$, то вследствие невырожденности формы $Б_\alpha$ существует c, для которого $Б_\alpha(ai_0, c) \neq 0$. Но $Б_\alpha(ai_0, c) = Б_\alpha(a, i_0c) = 0$, поскольку $i_0c \in I$.

Следствие 2. $\operatorname{ann}(\operatorname{ann} I) = I$.

Доказательство. Действительно, $(I^\perp)^\perp = I$.

Доказательство теорем 1 и 2 основано на построении специальной формы $Б = Б_{\alpha_0}$.

Рассмотрим алгебру Q функций на μ точках a_i. Возьмем линейную форму l на Q, $l(h) = \sum \varphi(a_i)h(a_i)$, построенную по «весовой функции» φ. Определим билинейную форму $Б(h, g)$ на Q по формуле $Б(h, g) = l(h \cdot g)$. Эта форма невырождена, если весовая функция не обращается в нуль ни в одной из точек a_i.

Локальная алгебра Q_f есть алгебра функций на μ слившихся точках. Оказывается, можно подобрать вес φ так, что при слиянии точек форма Б на Q имеет пределом вполне определенную и притом невырожденную форму на Q_f. Для этого φ должно стремиться к ∞ при слиянии точек (иначе предельная форма будет вырождена). Оказывается, в качестве φ достаточно взять $1/J$, где J — якобиан отображения f.

Корень 0 системы $f = 0$ рассыпается на μ корней системы $f = \varepsilon$ при малых регулярных значениях ε. Пусть $a_1, \ldots, a_\mu$ — эти корни. Для любой голоморфной в нуле функции h положим

$$l^\varepsilon(h) \sum h(a_i)/J(a_i).$$

Предложение 1. *При стремлении регулярного значения* ε *к нулю* $l^\varepsilon(h)$ *стремится к конечному пределу.*

Этот предел мы будем обозначать символом $[h/f]$.

Пример 1. Для функции $h = gJ$ справедливо равенство $[h/f] = \mu g(0)$.

Предложение 2. *Линейная форма* $\alpha_0(\cdot) = [\cdot/f]$ *равна нулю на идеале* I_f *и, следовательно, определяет линейную форму на локальной алгебре* Q_f.

Предложение 3. *Билинейная форма* $Б = Б_{\alpha_0}$ *на локальной алгебре, построенная по линейной форме* $\alpha_0(\cdot) = [\cdot/f]$, *невырождена.*

Доказательства предложений 1—3 даны в п. 5.14—5.18. Выведем из них теоремы 1, 2.

Доказательство теоремы 1. Имеем $[J/f] = \mu \neq 0$. Следовательно, $J \notin I_f$ (предложение 2).

Доказательство теоремы 2. Всякая линейная форма α на Q_f имеет вид $\alpha(\cdot) = Б(\cdot, \alpha^*)$ (так как форма Б невырождена). Поэтому $Б_\alpha(h, g) = Б(h, g\alpha^*)$. Форма $Б(h, g\alpha^*)$ невырождена, если и только если

элемент α^* обратим, но $\alpha(J) = Б(J, \alpha^*) = \mu\alpha^*(0)$ (пример 1). Поэтому α^* обратим, если и только если $\alpha(J) \neq 0$.

Следствие 3. *Идеал, порожденный якобианом в Q_f, одномерен и не зависит от системы координат, использованных при определении якобиана. Этот идеал содержится в любом ненулевом идеале алгебры Q_f.*

Доказательство. Равенство из примера 1 показывает, что максимальный идеал $\mathfrak{m}$ — Б-ортогональное дополнение к прямой λJ. Эта прямая является поэтому инвариантно определенным идеалом — аннулятором максимального идеала (следствие 1). Для ненулевого идеала I справедливо включение $I^\perp \subseteq \mathfrak{m}$ и, следовательно, включение $\mathfrak{m}^\perp \subseteq I$.

Замечание. Символ $[h/f]$ допускает *интегральное представление*

$$[h/f] = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \int \frac{h\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n},$$

где интегрирование ведется по малому циклу, заданному уравнениями $|f_k|^2 = \delta_k$ (см. п. 5.18). Эту формулу можно принять за определение символа и, исходя из него, доказать свойства символа, а с ними и теоремы 1 и 2.

5.12. Индекс особой точки вещественного ростка. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — вещественно-аналитическое отображение кратности $\mu < \infty$ и Q_f — его локальная $\mathbb{R}$-алгебра. Выберем в обоих пространствах $\mathbb{R}^n$ ориентации и обозначим через J якобиан, вычисленный в ориентирующих координатах.

Рассмотрим какую-либо форму $\alpha\colon Q_f \to \mathbb{R}$. Определим билинейную форму $Б_\alpha$ на Q_f по формуле $Б_\alpha(g, h) = \alpha(g \cdot h)$.

Теорема (сигнатурная формула). *Сигнатура билинейной формы $Б_\alpha$ равна индексу особой точки 0 ростка f, если $\alpha(J) > 0$.*

Доказательство получается предельным переходом из изложенного ниже предложения о функциях на конечном множестве с инволюцией.

Комплекснозначная функция на множестве с инволюцией τ называется τ-*вещественной*, если $\varphi(\tau a) = \overline{\varphi(a)}$ (многочлен с вещественными коэффициентами τ-веществен для инволюции комплексного сопряжения). Все τ-вещественные функции на множестве из μ точек образуют $\mathbb{R}$-алгебру R $\mathbb{R}$-размерности μ. Для всякой функции $\varphi \in R$ определим билинейную форму $Б_\varphi$ на R формулой $Б_\varphi(h, g) = \sum \varphi(a_i)h(a_i)g(a_i)$. Пусть φ не обращается в нуль ни в одной из точек a_i.

Предложение 1. 1) *Значения формы $Б_\varphi$ вещественны.* 2) *Форма $Б_\varphi$ невырождена.* 3) *Сигнатура формы $Б_\varphi$ равна $\varphi^+ - \varphi^-$, где φ^+ — число неподвижных при инволюции точек, на которых $\varphi > 0$, и φ^- — на которых $\varphi < 0$.*

Доказательство. Под действием инволюции множество распадается на инвариантные подмножества, состоящие из одной или двух точек. Поэтому предложение достаточно доказать для одноточечных и двухточечных множеств, для которых оно проверяется непосредственно.

Докажем сигнатурную формулу для специальной билинейной формы Б. Корень 0 системы $f = 0$ рассыпается при малых вещественных регулярных значениях ε на μ комплексных корней системы $f = \varepsilon$. Пусть $a_1, \ldots, a_\mu$ — эти корни. На множестве этих корней действует инволюция комплексного сопряжения. Зафиксируем μ вещественных многочленов $e_1, \ldots, e_\mu$, определяющих $\mathbb{R}$-базис локальной алгебры $\mathbb{R}\{x\}/(f)$ и, следовательно, $\mathbb{C}$-базис алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(f)$. Обозначим пространства их $\mathbb{R}$-линейных и $\mathbb{C}$-линейных комбинаций через $L_\mathbb{R}$ и L. Рассмотрим билинейную форму $Б^\varepsilon$ на пространстве $L_\mathbb{R}$, определенную формулой

$$Б^\varepsilon(g, h) = \sum \frac{g(a_i)h(a_i)}{J(a_i)}.$$

Лемма 1. *Сигнатура формы* $Б^\varepsilon$ *равна числу вещественных корней системы* $f = \varepsilon$, *посчитанных с учетом знака якобиана.*

Следствие. *Сигнатура формы* $Б^\varepsilon$ *равна индексу нуля отображения* f (*см. предложение* 1 *п.* 5.3).

Лемма 1 вытекает из предложения 1 и следующей леммы.

Лемма 2. *Сужения функций из* $L_\mathbb{R}$ *на множество комплексных корней* $(a_1, \ldots, a_\mu)$ *и только они* τ*-вещественны для инволюции* τ *комплексного сопряжения.*

Доказательство. τ-вещественность сужений очевидна. Поэтому достаточно доказать, что отображение μ-мерного пространства $L_\mathbb{R}$ в μ-мерное пространство τ-вещественных функций не имеет ядра. Но при отображении сужения функций из L на множество $(a_1, \ldots, a_\mu)$ в нуль переходит только нуль (п. 5.10). Лемма 2 доказана.

Устремим ε к нулю. Форма $Б^\varepsilon$ будет стремиться при этом к вполне определенной форме Б, соответствующей линейной форме $\alpha(\cdot) = [\cdot/f]$ (предложения 1, 2 п. 5.11). Предельная форма Б невырождена, поскольку невырождена ее комплексификация (предложение 3 п. 5.11). Следовательно, ее сигнатура, как и сигнатура допредельной формы $Б^\varepsilon$, равна индексу ростка f в нуле. Тем самым сигнатурная формула доказана для специальной линейной формы α_0 (отметим, что $\alpha_0(J) = \mu > 0$). Пусть теперь α — произвольная положительная на якобиане линейная форма на локальной $\mathbb{R}$-алгебре. Соединим α с α_0 отрезком в полупространстве положительных на якобиане линейных форм. Точкам отрезка соответствуют невырожденные билинейные формы (теорема 2 п. 5.11). Поэтому их сигнатуры одинаковы.

Замечание. В [21] с помощью сигнатурной формулы оценен индекс особой точки однородного векторного поля в $\mathbb{R}^n$ через степень компонент

поля. В [224] с помощью формулы для сигнатуры из предложения 1 оценен суммарный индекс особых точек полиномиального поля в области пространства $\mathbb{R}^n$, определенной полиномиальным неравенством $P > 0$, через степени компонент поля и полинома P (формула для сигнатуры применяется так же, как в лемме 2). Полученные оценки точные. Они обобщают известные в вещественной алгебраической геометрии неравенства Петровского—Олейник [183].

5.13. Теорема об обратном якобиане. Пусть $U \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область с краем и $f\colon U \to \mathbb{C}^n$ — голоморфное отображение. Допустим, что система $f = 0$ имеет корни в области U и что образ края $f(\partial U)$ не содержит точки 0. Пусть V — связная компонента точки 0 в $\mathbb{C}^n \setminus f(\partial U)$. Число корней системы $f - y = 0$ в области U, посчитанное с учетом кратности, для всех y из V одинаково (это вытекает из предложения 3 п. 5.4). Пусть $J = \det(\partial f)(\partial x)$, и пусть h — голоморфная функция в области U.

Теорема (об обратном якобиане). *В области V существует (единственная) голоморфная функция φ такая, что для всякого регулярного значения y выполнено равенство $\varphi(y) = \sum h(a_i)/J(a_i)$, где суммирование ведется по множеству всех корней a_i системы $f - y = 0$ в области U.*

Доказательство теоремы, основанное на многомерном варианте теоремы Абеля о следе, дано в п. 5.18. Сейчас мы воспользуемся этой теоремой.

Пусть отображение f имеет в шаре B единственный нуль, расположенный в центре шара a, и функция h голоморфна в B.

Следствие 1. *Пусть a_i — корни системы $f = \varepsilon$ в шаре B. При стремлении регулярного значения ε к нулю функция*

$$\varphi(\varepsilon) = \sum h(a_i)/J(a_i)$$

имеет предел.

Определение. *Символом* $[h/f]_a$ называется предел из следствия 1.

Пусть $\{f_\varepsilon\}$ — деформация отображения f и $\{h_\varepsilon\}$ — деформация функции h.

Следствие 2. *Пусть ε стремится к нулю таким образом, что все корни a_i системы $f_\varepsilon = 0$ в шаре B остаются невырожденными. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum h(a_i)/\det(\partial f/\partial x)(a_i) = [h/f]_a.$$

Доказательство получается применением следствия 1 к отображению $F\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ и функции H, определенным формулами $F(x, \varepsilon) = (f_\varepsilon(x), \varepsilon)$ и $H(x, \varepsilon) = h_\varepsilon(x)$.

Возвратимся к ситуации теоремы об обратном якобиане.

Следствие 3. *Функция* $\varphi(y) = \sum [h/f]_{a_i}$ *аналитична в* V. *Здесь суммирование производится по множеству всех корней системы* $f - y = 0$ *в области* U.

Доказательство. Возьмем близкое к y регулярное значение отображения. Прообразы этого значения распадаются на группы, расположенные вблизи корней a_i. Устремим регулярное значение к y. Переходя к пределу в каждой группе, получим, что голоморфная функция из теоремы есть $\sum [h/f]_{a_i}$.

Из теоремы об обратном якобиане вытекает *формула Эйлера—Якоби*. Пусть f — полиномиальное отображение $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n$, компонента f_i которого — полином степени m_i. Пусть $f_0 \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — полиномиальное отображение, компоненты которого — старшие однородные составляющие компонент отображения f. Пусть все корни a_i системы $f = 0$ в $\mathbb{C}^n$ некратны, и пусть система $f_0 = 0$ имеет единственный корень — точку 0.

Следствие 4 (формула Эйлера—Якоби). *Для всякого многочлена* h *степени меньшей, чем степень якобиана* J ($\deg h < m_1 + \ldots + m_n - n$), *справедливо тождество*

$$\sum h(a_i)/J(a_i) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим $\mathbb{C}^n$ как координатную плоскость $x_{n+1} = 0$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $\tilde{f}_i$ и $\tilde{h}$ — такие однородные многочлены в $\mathbb{C}^{n+1}$, что $\tilde{f}_i(x, 1) = h(x)$, $\tilde{h}(x, 1) = h(x)$ и $\deg \tilde{f}_i = \deg f_i$, $\deg \tilde{h} = \deg h$. Рассмотрим отображение P: $(\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ с компонентами $P_i = \tilde{f}_i$ при $i = 1, \ldots, n$ и $P_{n+1} = x_{n+1}$. Точка $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ — единственный корень системы $P = 0$. Корни системы $P = (0, \varepsilon)$ (где $(0, \varepsilon) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^1$) — точки вида $b_i = (a_i\varepsilon, \varepsilon)$, где a_i — корень системы $f = 0$. В каждом корне b_i справедливо равенство $\tilde{h}(b_i)/\det(\partial P/\partial \tilde{x})(b_i) = \varepsilon^p h(a_i)/J(a_i)$, где $p = \deg h - (m_1 + \ldots + m_n - n)$ ($\tilde{x}$ — координаты $x_1, \ldots, x_{n+1}$ в $\mathbb{C}^{n+1}$). Суммируя по всем корням, получим

$$\sum \tilde{h}(b_i)/\det(\partial P/\partial \tilde{x})(b_i) = \varepsilon^p \sum h(a_i)/J(a_i).$$

Согласно следствию 1 сумма в левой части должна иметь конечный предел при $\varepsilon \to 0$. При $p < 0$ это возможно, лишь если $\sum h(a_i)/J(a_i) = 0$.

Замечание 1. Формула Эйлера—Якоби останется справедливой, если вместо полиномов h и f с фиксированными степенями рассматривать полиномы с фиксированными квазистепенями. Другие обобщения формулы Эйлера—Якоби можно найти в [340], [223].

Замечание 2. Формула Эйлера—Якоби частично объясняет существование предела в следствии 1. Пусть отображение f полиномиально и h — полином, причем $\deg h < \deg J$. Пусть система $f = 0$ имеет ровно один кратный корень 0 и несколько некратных корней. Предположим еще, что

у этой системы нет «бесконечно удаленных корней». Тогда при стремлении регулярного значения ε к нулю часть корней будет стремиться к точке 0, а остальные — к некратным корням b_i. В этом случае из формулы Эйлера—Якоби вытекает, что предел из следствия 1 существует и равен $-\sum h(b_1)/J(b_i)$.

Замечание 3. Формула Эйлера—Якоби применяется в вещественной алгебраической геометрии (см. [183], [224]).

5.14. Свойства символа $[h/f]_a$.

Предложение 1. *Пусть ростки g_a и f_a A-эквивалентны, $g(\cdot) = A(\cdot)f(\cdot)$. Тогда*

$$[h/f]_a = [h \cdot \det A/g]_a.$$

Доказательство. Рассмотрим деформацию $f - \varepsilon$ ростка f и деформацию $g_\varepsilon = A(f - \varepsilon)$ ростка g. В малом шаре они имеют одинаковые нули a_i. В каждом нуле a_i выполняется равенство $(\partial g_\varepsilon/\partial x)(a_i) = A(a_i)(\partial f/\partial x)(a_i)$. Поэтому

$$\sum h(a_i)/\det(\partial f/\partial x)(a_i) = \sum h(a_i)\det A(a_i)/\det(\partial g_\varepsilon/\partial x)(a_i).$$

Устремляя регулярное значение ε к нулю, получим нужное равенство.

Предложение 2. *Если $h \in I_{f,a}$, то $[h/f]_a = 0$.*

1°. Предположим дополнительно, что дифференциалы df_k всех компонент f_k не имеют нулей в проколотой окрестности точки a. Пусть $h = \sum g_k f_k$. Покажем, что для каждого k символ $[g_k f_k/f]_a$ равен 0. Гиперповерхность $f_k = 0$ не имеет особенностей в проколотой окрестности точки a (по предположению). Корни a_i системы $f_j = \varepsilon_j$ при $\varepsilon_k = 0$ расположены на гиперповерхности $f_k = 0$. Для общих ε (при условии $\varepsilon_k = 0$) все корни неособы и каждый член суммы $\sum(g_k f_k)(a_i)/J(a_i)$ равен нулю. Переходя к пределу, получим нужное равенство.

2°. Каждый конечнократный росток g A-эквивалентен ростку f, для которого выполнено дополнительное предположение из п. 1°. Для доказательства достаточно положить $\tilde{f}_i = \tilde{g}_i + (x_1^N + \ldots + x_n^N)$, где $\tilde{g}_i$ — многочлен Тейлора компоненты g_i степени $N - 1$ (см. п. 1° леммы п. 5.9) и N достаточно велико ($N > \mu_a[g]$) (см. предложение 2 п. 5.5).

3°. Пусть $g = Af$, f удовлетворяет предположению 1° и $h \in I_{g,a}$. Тогда $[h/g]_a = [h \cdot \det A/f]_a = 0$, так как $h \cdot \det A \in I_{g,a} = I_{f,a}$.

5.15. Невырожденность билинейной формы. Символ $[h/f]_a$ зависит лишь от образа элемента h в алгебре $Q_{f,a}$ (предложение 2 п. 5.14) и определяет, следовательно, линейную функцию на алгебре $Q_{f,a}$. В этом пункте мы рассмотрим билинейную форму Б на локальной алгебре конечнократного ростка, построенную по этой линейной функции.

Предложение 1. *При распадении конечнократного корня с невырожденной билинейной формой образуются лишь корни с невырожденными формами.*

Доказательство. Пусть f — конечнократный росток в точке a и L — $\mathbb{C}$-линейное пространство, натянутое на функции $e_1, \ldots, e_\mu$, ростки которых образуют базис в локальной алгебре ростка f. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ — деформация ростка f и U — достаточно малая окрестность точки a. Естественная проекция $\pi\colon L \to \Lambda_{f_\varepsilon}(U)$ пространства L в мультилокальную алгебру системы $f_\varepsilon = 0$ при малых ε является изоморфизмом (теорема п. 5.10). Рассмотрим билинейную форму $Б^\varepsilon$ на L, определенную формулой

$$Б^\varepsilon(g, h) = \sum [g \cdot h/f]_{a_i},$$

где суммирование ведется по всем корням системы $f_\varepsilon = 0$ в области U. Эта форма — прямая сумма билинейных форм корней a_i. Матрица $A^\varepsilon = \{Б(e_i, e_j)\}$ формы $Б^\varepsilon$ аналитически зависит от ε согласно следствию 3 (п. 5.13). По условию билинейная форма ростка f невырождена, т. е. $\det A^0 \neq 0$. Следовательно, для малых $|\varepsilon|$ имеем $\det A^\varepsilon \neq 0$. Для таких ε невырождены билинейные формы всех корней.

Предложение 2. *Билинейная форма ростка отображения Фама невырождена.*

Доказательство получается из следующих вычислений. Локальная алгебра отображения Фама Φ^m порождена мономами $x^k = x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{k_n}$, $0 \leqslant k_1 < m_1, \ldots, 0 \leqslant k_n \leqslant m_n$. Моном x^r, где $r = m_1 - 1, \ldots, m_n - 1$, пропорционален якобиану отображения Фама. Для этого монома $[x^r/\Phi^m] = 1$. Для остальных образующих x^k локальной алгебры $[x^k/\varphi^m] = 0$. Это вытекает из формулы Эйлера—Якоби. Билинейная форма ростка отображения Фама невырождена: двойственным к базису x^k в Q_{φ^m} является базис x^{r-k}.

Предложение 3. *Билинейная форма всякого конечнократного ростка невырождена.*

Доказательство. У A-эквивалентных ростков билинейные формы вырождены или невырождены одновременно (это следует из предложения 1 п. 5.14). Каждый конечнократный росток с точностью до A-эквивалентности получается малой деформацией ростка отображения Фама (п. 5.6). Билинейная форма ростка отображения Фама невырождена. Предложение 3 вытекает теперь из предложения 1.

5.16. Теорема о следе. Рассмотрим отображение f комплексных многообразий одинаковой размерности, при котором каждая точка имеет конечное число прообразов. Пусть ω — k-форма в многообразии-прообразе.

Определение. *Следом* k-формы ω при отображении f называется k-форма в многообразии-образе, значение которой на каждом k-векторе

равно сумме значений формы ω на всех прообразах этого k-вектора. Эта форма определена для регулярных значений отображения f. Она обозначается $\operatorname{Tr}\omega$.

Теорема (Абель). *Пусть* $f(x) = x^p$ *и* $\omega = g\,dx$, *где* g *— голоморфная в* 0 *функция. Тогда форма* $\operatorname{Tr}\omega$, *определенная в проколотой окрестности точки* 0, *продолжается голоморфно в точку* 0.

Доказательство. $\operatorname{Tr}\omega = \varphi\,dy$, где $\varphi(y) = \sum g(y^{1/p})\,\dfrac{1}{p}\,y^{(1/p)-1}$. Разложим φ в ряд по степеням $y^{1/p}$. Коэффициенты при нецелых степенях y равны 0, так как φ однозначна. Целых отрицательных степеней y в разложении нет, так как все члены разложения имеют степень не меньше $(1/p) - 1$.

Следствие 1. *Пусть* f *— одномерное разветвленное* μ*-листное накрытие. Тогда след голоморфной в пространстве-прообразе формы продолжается голоморфно до формы в пространстве-образе.*

Для формулировки теоремы о следе в многомерном случае введем следующее определение.

Определение. Отображение f комплексных многообразий одинаковой размерности имеет *конечный тип*, если сумма кратностей всех прообразов каждой точки имеет постоянное конечное значение. Это значение μ называется *числом листов* проекции $f\colon M \to N$ накрытия конечного типа M *над* N.

Предложение. *Отображение конечного типа собственно.*

Доказательство. Точка y имеет μ прообразов (с учетом кратностей). Всякая достаточно близкая к y точка имеет μ прообразов (с учетом кратностей), близких к прообразам точки y. Следовательно, других прообразов нет, и, значит, отображение собственно.

Следствие 2. *Множество регулярных значений отображения конечного типа открыто и всюду плотно.*

Теорема. *След голоморфной формы при отображении конечного типа голоморфно продолжается на все многообразие-образ.*

Доказательство можно получить из теоремы Абеля следующими рассуждениями.

1°. Для отображения $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^p, x_2, \ldots, x_n)$ теорема доказывается так же, как теорема Абеля.

2°. Назовем точку многообразия-прообраза *хорошей*, если существуют системы координат в ее окрестности и в окрестности ее образа, в которых отображение записывается формулой 1°.

Точка многообразия-образа называется *хорошей*, если все ее прообразы хорошие.

В окрестности хорошей точки в образе теорема следует из 1°.

3°. Множество плохих точек в прообразе имеет коразмерность больше 1. Для доказательства нужно рассмотреть в прообразе следующие три множества:

1) множество особенностей множества критических точек отображения;

2) множество критических точек ограничения f на неособую часть множества критических точек;

3) множество критических точек отображения f, в которых кратность выше, чем в соседних критических точках.

Нетрудно доказать, что коразмерность каждого из этих множеств для отображения конечного типа больше 1, а все остальные точки хорошие.

4°. Множество плохих точек в прообразе аналитическое, поэтому и множество плохих точек в образе аналитическое (теорема Реммерта) коразмерности больше 1.

5°. По теореме Гартогса след голоморфно продолжается на множество плохих точек.

Ниже приведено другое доказательство теоремы о следе, не использующее ссылок на теоремы Реммерта и Гартогса.

5.17. Интегральное представление следа. Пусть $f\colon M \to V$ — отображение конечного типа на область V пространства $\mathbb{C}^n$ и ω — голоморфная n-форма в M. Выберем в $\mathbb{C}^n$ координаты $y_1, \dots, y_n$. Определим функцию $[\operatorname{Tr}\omega]$ в регулярных значениях отображения как коэффициент в представлении

$$\operatorname{Tr}\omega = [\operatorname{Tr}\omega]\, dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n.$$

Рассмотрим отображение $|f|^2\colon M \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (|f_1(x)|^2, \dots, |f_n(x)|^2)$.

Пусть δ — положительный вектор из $\mathbb{R}^n$. Определим полидиск V_δ условиями $|y_k|^2 < \delta_k$, его остов T_δ — условиями $|y_k|^2 = \delta_k$.

Т е о р е м а. *Пусть δ — такое некритическое значение отображения $|f|^2$, что полидиск V_δ вместе с остовом лежит в области V. Тогда в полидиске функция $[\operatorname{Tr}\omega]$ допускает интегральное представление*

$$[\operatorname{Tr}\omega](y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\delta} \frac{\omega}{\prod(f_i - y_i)}, \qquad (*)$$

где цикл Γ_δ определен условием $|f|^2 = \delta$.

Определим мероморфную n-форму на M, зависящую от точки y из V, формулой $\omega_y = \omega/[(2\pi i)^n \prod(f_i - y_i)]$.

Определим отображение $|f - y|^2\colon M \to \mathbb{R}^n$, зависящее от параметра $y \in V$, формулой $x \mapsto (|f_1 - y_1|^2, \dots |f_n - y_n|^2)$. Прообраз регулярного значения $\rho \in (\mathbb{R}^+)^n$ при достаточно малых y и ρ является компактным многообразием. Обозначим его через $\Gamma_{y,\rho}$.

Л е м м а 1. *В окрестности регулярного значения отображения f справедливо равенство*

$$[\operatorname{Tr}\omega] = \int_{\Gamma_{y,\rho}} \omega_y$$

(*для всякого достаточно малого вектора ρ с положительными компонентами*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прообраз малой окрестности W регулярного значения состоит из μ непересекающихся окрестностей U_j. Отождествим окрестности U_j с окрестностью W при помощи отображения f и будем пользоваться в U_j системой координат $f_1, \ldots, f_n$. Пусть в U_j выполняется равенство $\omega = g_j\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n$. Тогда $[\operatorname{Tr}\omega] = \sum g_j$. С другой стороны, при малом ρ цикл $\Gamma_{y,\rho}$ распадается на μ торов T_j, лежащих в окрестностях U_j (и определенных в них n уравнениями $|f_i - y_i|^2 = \rho_i$). Согласно интегральной формуле Коши

$$g_j(y) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_j} \frac{g_j(f_1, \ldots, f_n)\, df_1 \wedge \ldots \wedge df_n}{\prod (f_i - y_i)}.$$

В наших обозначениях это равенство принимает вид $g_j(y) = \int_{T_j} \omega_y$. Следовательно, $\int_{\Gamma_{y,\rho}} \omega_y = \sum g_j(y)$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Для всякого достаточно близкого регулярного значения y отображения f цикл $\Gamma_{y,\rho}$ при малом ρ ($|\rho| < \rho_0(y)$) гомологичен циклу Γ_δ в дополнении к множеству особенностей формы ω_y.*

Доказательство основано на том, что прообразы регулярного значения при двух гомотопных гладких собственных отображениях гомологичны.

1°. Цикл Γ_δ определен при помощи невырожденной системы уравнений. Небольшое изменение этих уравнений лишь немного изменит цикл. Для любого y из достаточно малой окрестности нуля W_0 циклы $\Gamma(t) = \Gamma_{ty,\delta}$ при изменении t от 0 до 1 осуществляют гладкую гомотопию цикла Γ_δ в цикл $\Gamma_{y,\delta}$. Аналогично, для $y \in W_0$ и любого достаточно малого $\rho \in \mathbb{R}^n$ ($|\rho| < \rho_0(y)$) циклы $\Gamma(t) = \Gamma_{y,\delta+t\rho}$ осуществляют гладкую гомотопию цикла $\Gamma_{y,\delta}$ в цикл $\Gamma_{y,\delta+\rho}$.

2°. Рассмотрим отображение $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, зависящее от параметра $y \in V$, переводящее точку (x, t) в точку с координатами $|f_i(x) - y_i|^2 - t\delta_i$. Пусть ρ — регулярное значение этого отображения, столь малое, что $|\rho| < \rho_0(y)$ и что цикл $\Gamma_{y,\rho}$ распадается на μ торов T_j (см. лемму 1). Прообраз ρ определяет в $M \times \mathbb{R}$ гладкое $(n+1)$-мерное многообразие. Проекция в M части этого многообразия, выделенной неравенствами $0 \leqslant t \leqslant 1$, является пленкой, натянутой между циклами $\Gamma_{y,\delta}$ и $\Gamma_{y,\rho} = \sum T_j$. Лемма доказана, так как ни построенная пленка, ни предъявленные гомотопии не задевают особенностей формы ω_y.

Доказательство теоремы. 1°. Представление (∗) имеет место при малых y. Действительно, по лемме 1 и 2 при малых y

$$\int_{\Gamma_\delta} \omega_y = \int_{\Gamma_{y,\varphi}} \omega_y = [\mathrm{Tr}\,\omega](y).$$

2°. Из 1° вытекает теорема о следе для n-форм.

3°. Из теоремы о следе вытекает голоморфность продолжения $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ на все V; правая часть формулы (∗) голоморфна в полицилиндре V_δ. Согласно 1° левая и правая части совпадают в окрестности нуля; следовательно, они совпадают в V_δ.

Следствие. *Существует интегральное представление для следа k-форм в n-мерном пространстве.*

Рассмотрим, например, след 1-формы в $\mathbb{C}^2$, $\mathrm{Tr}\,\omega = a_1\,dy_1 + a_2\,dy_2$. Умножая на dy_2, мы находим

$$a_1 dy_1 \wedge dy_2 = (\mathrm{Tr}\,\omega) \wedge dy_2 = \mathrm{Tr}(\omega \wedge f^* dy_2)$$

и получаем интегральное представление для коэффициента a_1 как $\mathrm{Tr}(\omega \wedge f^* dy_2)$.

Аналогично получаются интегральные представления для коэффициентов координатной записи следа k-формы в $\mathbb{C}^n$.

Замечание. Еще одно доказательство теоремы о следе содержится в статье [339]. Там же можно прочесть о применениях и обобщениях этой теоремы.

5.18. Доказательство теоремы об обратном якобиане. Рассмотрим область $f^{-1}(V) = M$ и ее отображение $f|_M\colon M \to V$. Оно имеет конечный тип. Рассмотрим n-форму $\omega = h\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. На открытом плотном в V множестве регулярных значений отображения $[\mathrm{Tr}\,\omega] = \sum h(a_i)/J(a_i)$, и по теореме о следе функция $[\mathrm{Tr}\,\omega]$ голоморфна в V. Теорема доказана.

Следствие.

$$[h/f] = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|f_i|=\delta_i} \frac{h\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n}{f_1 \cdot \ldots \cdot f_n}.$$

Доказательство. Имеем $[h/f] = \lim\limits_{y\to 0} [\mathrm{Tr}\,\omega](y) = [\mathrm{Tr}\,\omega](0)$, поэтому следствие вытекает из интегрального представления следа.

§ 6. Устойчивость и инфинитезимальная устойчивость

В этом параграфе описан метод линеаризации для решения вопроса об устойчивости ростка дифференцируемого отображения. Этот метод заключается в сведении вопроса к линейной задаче об инфинитезимальной устойчивости и к практически легче решаемой линейной задаче об инфинитези-

мальной V-устойчивости. Мы развиваем технику, необходимую для обоснования метода, и применяем ее в наиболее простой ситуации, доказывая теорему об эквивалентности функции своему многочлену Тейлора в окрестности конечнократной критической точки.

6.1. Понятие инфинитезимальной устойчивости. Отображение $f\colon M \to N$ называется *устойчивым*, если орбита элемента f под действием группы лево-правых диффеоморфизмов в пространстве $\Omega(M, N)$ гладких отображений M в N содержит некоторую окрестность элемента f (ср. § 1, с. 16).

Пусть X — многообразие и G — группа Ли, действующая на X. Точка f из X называется *устойчивой* относительно этого действия, если ее орбита содержит некоторую окрестность этой точки f. Действие G на X задает гладкое отображение конечномерных многообразий $a\colon G \times X \to X$ (пара (g, x) переходит в образ точки x под действием g). Рассмотрим производную отображения a по первому аргументу в точке (e, f), где e — единица группы:

$$a_{*1}|_{(e,f)}\colon T_eG \to T_fX.$$

Если этот линейный оператор отображает касательное пространство к группе в единице на все касательное пространство к многообразию, на котором действует группа, в рассматриваемой точке f, то по теореме о неявной функции орбита точки f содержит окрестность точки f.

О п р е д е л е н и е. Точка f называется *инфинитезимально устойчивой* относительно действия a, если производная действия вдоль группы в точке (e, f) отображает касательное пространство к группе на все касательное пространство к многообразию в точке f, т. е. если $a_{*1}|_{(e,f)}$ — отображение «на».

Попытаемся перенести это определение на интересующий нас случай действия бесконечномерной группы левых и правых диффеоморфизмов на бесконечномерном пространстве гладких отображений $\Omega(M, N)$.

Касательное пространство к группе $\mathrm{Diff}\, M$ диффеоморфизмов гладкого многообразия M в единице — это линейное пространство всех гладких векторных полей на M. Оно обозначается через $\Gamma(TM)$ (пространство сечений касательного расслоения TM многообразия M). Лево-правый инфинитезимальный диффеоморфизм задается парой векторных полей (одно на M, другое на N). Поэтому

$$T_e(\mathrm{Diff}\, M \times \mathrm{Diff}\, N) = \Gamma(TM) \oplus \Gamma(TN).$$

Касательное пространство к «многообразию» $\Omega(M, N)$ всех гладких отображений из M в N в точке f из $\Omega(M, N)$ естественно отождествляется с пространством «инфинитезимальных деформаций» отображения f,

т. е. с пространством сечений вертикального векторного расслоения f^*TN отображения f (рис. 39):

$$T_e\Omega(M, N) = \Gamma(f^*TN)$$

(элемент $\Gamma(f^*TN)$ — это сечение вертикального расслоения, которое указывает, с какой скоростью меняется значение отображения f в каждой точке x из M).

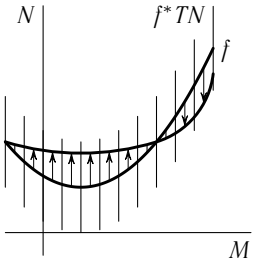


Рис. 39

Вычислим линейный оператор

$$T_e(\mathrm{Diff}\, M \times \mathrm{Diff}\, N) \to \Gamma(f^*TN),$$

соответствующий лево-правому действию, $f \mapsto$ $\mapsto K \circ f \circ H^{-1}$ ($K \in \mathrm{Diff}\, N$, $H \in \mathrm{Diff}\, M$).

Вычисления удобно провести в (локальных) координатах. Отображение f записывается в виде $y = f(x)$. Однопараметрические семейства диффеоморфизмов H и K, близкие к тождеству, записываются в виде

$$H_\varepsilon(x) = x + \varepsilon h(x) + \ldots, \quad K_\varepsilon(y) = y + \varepsilon k(y) + \ldots$$

(точками обозначены члены выше первой степени по ε). Вычисляя $f_\varepsilon = K_\varepsilon \circ f \circ H_\varepsilon^{-1}$, мы находим

$$f_\varepsilon(x) = f(x - \varepsilon h(x)) + \varepsilon k(f(x)) + \ldots = f + \varepsilon\left[k(f(x)) - \frac{\partial f}{\partial x}\, h(x)\right] + \ldots$$

Выражение в квадратных скобках и есть значение вычисляемого оператора на паре (h, k).

Ответ можно переписать в виде

$$(h, k) \mapsto \alpha[h] + \omega[k],$$

где

$\alpha\colon \Gamma TM \to \Gamma(f^*TN)$ определено соотношением $\alpha[h](x) = -f_{*x}h(x)$,

$\omega\colon \Gamma TN \to \Gamma(f^*TN)$ определено соотношением $\omega[k](x) = k(f(x))$.

Отображения α и ω — геометрические, они не зависят ни от каких координат (рис. 40).

О п р е д е л е н и е. Отображение f называется *инфинитезимально устойчивым*, если

$$\alpha(\Gamma TM) + \omega(\Gamma TN) = \Gamma(f^*TN).$$

В координатах это условие означает разрешимость относительно h и k

так называемого «гомологического уравнения»

$$u(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\, h(x) + k(f(x)) \qquad (1)$$

для всякого поля деформаций u, т. е. для всякого элемента из $\Gamma(f^*TN)$.

Теорема устойчивости (Мазер). *Инфинитезимально устойчивое отображение устойчиво.*

Эта теорема справедлива для отображений компактных многообразий M и N; в некомпактном случае она справедлива при условии, что устойчивость понимается в смысле тонкой топологии Уитни (см. с. 39). Справедлива также и обратная теорема: устойчивое отображение инфинитезимально устойчиво. Доказательства всех этих результатов можно найти в работах Мазера [391].

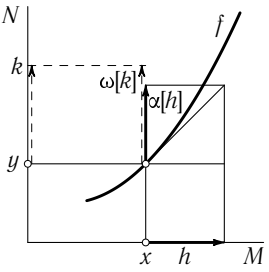


Рис. 40

Мы докажем ниже локальный вариант теоремы устойчивости.

Определение. Росток гладкого (соответственно формального, аналитического, голоморфного, ...) отображения f в нуле называется *инфинитезимально устойчивым*, если гомологическое уравнение (1) относительно ростков гладких (соответственно формальных, ...) векторных полей h и k разрешимо при любом гладком (соответственно формальном, ...) поле деформаций u.

Пример 1. Отображение прямой на прямую $f(x) = x^2$. Гомологическое уравнение имеет вид

$$u(x) = -2xh(x) + k(x^2).$$

Оно разрешимо при любом u. Следовательно, отображение инфинитезимально устойчиво.

Пример 2. Отображение прямой на прямую $f(x) = x^3$. Гомологическое уравнение имеет вид

$$u(x) = -3x^2h(x) + k(x^3).$$

При $u = x$ это уравнение неразрешимо. Следовательно, отображение $u = x^3$ инфинитезимально неустойчиво (ср. рис. 1).

6.2. Гомотопический метод. Доказательство теоремы об устойчивости инфинитезимально устойчивого отображения можно проводить разными методами, обычно применяемыми для доказательств теорем типа теоремы о неявной функции. Например, можно воспользоваться методами последовательных приближений типа метода касательных Ньютона (ср. [5]). Другой метод был предложен Р. Томом и называется гомотопическим методом. Этот

метод состоит в следующем. Мы хотим построить коммутативную диаграмму, превращающую f в $\tilde{f}$:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K} \\ M & \xrightarrow{\tilde{f}} & N. \end{array}$$

Чтобы найти H и K, мы соединяем f и $\tilde{f}$ кривой f_t, так что $f_0 = f$ и $f_1 = \tilde{f}$. Искомая коммутативная диаграмма распадается в произведение диаграмм соответственно разбиению коммутативного квадрата на прямоугольники с малой высотой Δ. Каждому такому прямоугольнику отвечает диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_t} & N \\ {\scriptstyle H_\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle K_\Delta} \\ M & \xrightarrow{f_{t+\Delta t}} & N. \end{array}$$

Если нам удастся для всех t от 0 до 1 построить H_Δ и K_Δ в первом приближении по Δ (с погрешностью порядка $o(\Delta)$), то, «интегрируя полученные инфинитезимальные коммутативные диаграммы», мы получим искомую диаграмму.

Условие инфинитезимальной устойчивости как раз и гарантирует возможность построения инфинитезимальных коммутативных диаграмм.

Чтобы не затемнять основную идею гомотопического метода техническими деталями, мы вначале применим его в простейшей ситуации следующей «леммы Морса».

Теорема. *В окрестности невырожденной критической точки функция правоэквивалентна сумме квадратичной формы и постоянной.*

Доказательство. Пусть $f = \sum a_k x_k^2$, $a_k \neq 0$. Нужно доказать, что для всякой функции φ из куба $\mathfrak{m}^3$ максимального идеала $\mathfrak{m}$ росток в нуле функции $f + \varphi$ правоэквивалентен ростку f в нуле.

Соединим f с $f + \varphi$ путем $f + t\varphi$, $t \in [0, 1]$. Мы ищем однопараметрическое семейство локальных диффеоморфизмов $x \mapsto g_t(x)$, для которого

$$\begin{aligned} &(f + t\varphi)(g_t(x)) \equiv f(x), \\ &g_0(x) \equiv x, \quad g_t(0) \equiv 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим соответствующее семейству g_t векторное поле v_t, зависящее от времени t:

$$u_\tau(g_\tau(x)) = \left(\frac{d}{dt}\, g_t(x)\right)\Big|_{t=\tau}.$$

Дифференцируя (1) по t, получаем уравнение относительно v_t:

$$\varphi(g_t(x)) + v_t(g_t(x)) \cdot (f + t\varphi) \equiv 0 \tag{2}$$

(точка означает дифференцирование функции по направлению стоящего слева от точки вектора).

Рассмотрим систему координат $x_1, \ldots, x_m$. Компоненты неизвестного поля обозначим $v_{t,i}$, так что

$$v_t = \sum v_{t,i} \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

В этих обозначениях второе слагаемое формулы (2) принимает вид

$$v_t(g_t(x)) \cdot (f + t\varphi) = \sum_{i=1}^{n} v_{t,i}(2a_i x_i + t\varphi_{x_i})\Big|_{g_t(x)}.$$

Функции $2a_i x_i + t\varphi_{x_i}$ известны; мы обозначим их через y_i. В этих обозначениях уравнение (2) принимает вид уравнения относительно $v_{t,i}$:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i v_{t,i} = -\varphi \tag{3}$$

[мы не пишем аргумент $g_t(x)$, одинаковый в левой и в правой частях, так как уравнение (2) выполняется тождественно по (x, t) и, значит, тождественно по $(g_t(x), t)$].

Якобиан $\det(\partial y/\partial x)$ на оси t всюду отличен от 0 (так как $\varphi_{x_i} \in \mathfrak{m}^2$). Поэтому в окрестности оси t пространства с координатами (x, t) можно принять за новые координаты y_i и t.

Функция φ имеет на оси f нуль 3-го порядка. По лемме Адамара можно представить φ в виде $\varphi = \sum\limits_i y_i \psi_i$, где $\psi_i(0, t) = 0$. Тем самым мы решили уравнение (3): $v_{t,i} = -\psi_i$. Зная семейство полей v_t, мы находим $g_t(x)$ из дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} g_t(x) = v_t(g_t(x)), \quad g_0(x) = x.$$

Заметим, что $v_t(0) \equiv 0$, поэтому решение с близким к 0 начальным условием x существует при $t \in [0, 1]$. Кроме того, $g_t(0) = 0$. Поэтому g_1 — искомый диффеоморфизм. Лемма Морса доказана.

В качестве следующего приложения гомотопического метода рассмотрим теорему Тужрона об эквивалентности гладкой функции многочлену. В ее доказательстве гомотопическим методом появляются леммы, играющие основную роль и в доказательстве теоремы Мазера.

6.3. Теорема Тужрона о конечной определенности ростка функции в конечнократной критической точке.

О п р е д е л е н и е. Критическая точка 0 гладкой функции $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ называется *конечнократной*, если локальная алгебра градиентного отображения конечномерна, т. е. если

$$\mu = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_m]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m) < \infty.$$

Число μ называется *кратностью* критической точки.

Т е о р е м а. *В окрестности конечнократной критической точки функция правоэквивалентна многочлену* (*а именно своему многочлену Тейлора степени* $\mu + 1$, *если кратность равна* μ).

П р и м е р. Для невырожденной критической точки $\mu = 1$ и функция эквивалентна своему многочлену Тейлора степени 2 (это — лемма Морса, доказанная в п. 6.2). Этот пример показывает, что степень $\mu + 1$ нельзя заменить меньшей.

З а м е ч а н и е. Если все функции с данной k-струей (право)эквивалентны, то говорят, что эта струя *достаточна*. Таким образом, $(\mu + 1)$-*струя функции в критической точке кратности* μ *достаточна*.

Если кратность μ критической точки бесконечна, то никакая конечная k-струя не достаточна.

П р и м е р (Уитни). Рассмотрим голоморфную функцию трех переменных $f(x, y, z) = xy(x + y)(x - zy)(x - e^z y)$.

Критическая точка 0 не изолирована (вся ось z состоит из критических точек). *Росток функции* f *в нуле не* (*право*)*эквивалентен ростку никакого многочлена*.

Действительно, множество критического (нулевого) уровня функции f состоит из пяти гладких поверхностей, пересекающихся вдоль оси z. На плоскости $z = \text{const}$ эти пять поверхностей высекают пять кривых, пересекающихся в одной точке. Двойные отношения, построенные по четырем касательным к этим кривым в точке пересечения, зависят от z. Если бы функция была эквивалентна многочлену, то зависимость каждого из этих двойных отношений от любого другого из них была бы алгебраической. Для нашей функции f эта зависимость неалгебраическая (из-за множителя e^z), поэтому росток f не эквивалентен ростку многочлена.

6.4. Доказательство теоремы о конечной определенности. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ имеет в нуле критическую точку конечной кратности μ. Утверждается, что для всякой добавки φ из $\mathfrak{m}^{\mu+2}$ функция $f + \varphi$ правоэквивалентна f. Рассуждая, как в доказательстве леммы Морса (п. 6.2), приходим к уравнению относительно поля v_t:

$$v_t(g_t(x)) \cdot (f + t\varphi) \equiv -\varphi(g_t(x)), \quad \varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}.$$

Поскольку это равенство должно выполняться тождественно по x и t, достаточно решить при $\alpha = -\varphi$ уравнение относительно v_t:

$$v_t \cdot (f + t\varphi) = \alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{m}^{\mu+2}.$$

Лемма 1. *Всякий одночлен достаточно высокой степени (а именно степени μ) лежит в градиентном идеале $I_{\nabla f}$ функции f (т. е. в идеале, натянутом на $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m)$).*

Научная формулировка леммы: $\mathfrak{m}^\mu \subset I_{\nabla f}$.

Пример. Для невырожденной критической точки $\mu = 1$, $I_{\nabla f} = \mathfrak{m}$.

Доказательство: см. п. 5.5.

Лемма 2. *Всякий одночлен достаточно высокой степени (а именно степени μ) принадлежит градиентному идеалу функции $f + \varphi$, т. е. $\mathfrak{m}^\mu \subset I_{\nabla(f+\varphi)}$.*

Пример. Для невырожденной критической точки $\mu = 1$, $I_{\nabla(f+\varphi)} = I_{\nabla f} = \mathfrak{m}$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим все одночлены степени μ. Их конечное число. Пусть M_s — один из этих одночленов (мономов). По лемме 1 $M_s \in I_{\nabla f}$, т. е. существует разложение

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, h_{i,s}(x).$$

Заменяя в этой формуле f на $f + \varphi$, мы получим разложение

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i}\, h_{i,s}(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, h_{i,s}(x).$$

Вычитаемое принадлежит $\mathfrak{m}^{\mu+1}$ (поскольку $\varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}$). Следовательно, вычитаемое можно представить в виде линейной комбинации одночленов M_p степени μ с коэффициентами из $\mathfrak{m}$. Мы получаем разложение

$$M_s = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i}\, h_{i,s}(x) - \sum_{p} M_p \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{p,j}(x) \right).$$

Рассмотрим эти соотношения как систему линейных уравнений относительно вектора M из неизвестных $(M_1, \ldots, M_N)$. Матрица системы имеет вид $E + A$, где элементы матрицы A лежат в $\mathfrak{m}$. Правая часть является вектором $B = (B_1, \ldots, B_N)$, элементы которого $B_s = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial (f+\varphi)}{\partial x_i}\, h_{i,s}$ принадлежат градиентному идеалу $I_{\nabla(f+\varphi)}$. Определитель матрицы $E + A$ при $x = 0$ равен единице, поэтому система в окрестности нуля разрешима:

$$M = (E + A)^{-1} B.$$

Поскольку $B_s \in I_{\nabla(f+\varphi)}$, мы получаем $M_s \in I_{\nabla(f+\varphi)}$, что и требовалось.

Замечание 1. Приведенное рассуждение с обращением матрицы в алгебре формализуется в виде так называемой леммы Накаямы.

Замечание 2. Лемма 2 гарантирует разрешимость гомологического уравнения

$$v_t \cdot (f + t\varphi) = \alpha \qquad (*)$$

при каждом фиксированном t, причем достаточно даже, чтобы α принадлежало $\mathfrak{m}^{\mu}$, а не $\mathfrak{m}^{\mu+2}$. Нам, однако, этого недостаточно, так как нам нужно решение v_t, гладко зависящее от t, которое можно было бы интегрировать, чтобы определить g_t при всех t от 0 до 1.

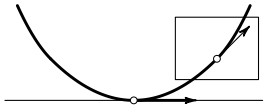


Рис. 41

Пример. Рассмотрим действие группы вещественных дробно-линейных преобразований $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ на плоскости комплексного переменного z. Вещественная ось и верхняя полуплоскость — разные орбиты этого действия. Рассмотрим кривую в верхней полуплоскости, касающуюся вещественной оси (скажем, $z = t + it^2$; см. рис. 41).

Вектор скорости в каждой точке принадлежит касательной плоскости к соответствующей орбите, однако кривая переходит из одной орбиты в другую.

Рассуждения гомотопического метода в этом случае неприменимы, потому что, хотя гомологическое уравнение и разрешимо при каждом фиксированном t, решение нельзя выбрать гладко зависящим от t.

Можно показать, что в случае действия конечномерной группы Ли на конечномерном многообразии для возможности выбора гладко зависящего от t решения гомологического уравнения достаточно, чтобы размерности орбит вдоль рассматриваемой кривой не менялись (конечно, предполагается, что при каждом фиксированном t уравнение разрешимо). В этом предположении кривая, каждый касательный вектор которой принадлежит касательному пространству к орбите, вся лежит в одной орбите.

Лемма 3. *Для всякого одночлена α достаточно высокой степени (а именно степени $\mu + 1$) гомологическое уравнение имеет гладко зависящее от t решение v_t, обращающееся в нуль в начале координат.*

Доказательство. Представим α в виде $x_i M_s$, где M_s — одночлен степени μ. Доказательство леммы 2 (примененной к $f + t\varphi$) дает способ построения гладко зависящего от t решения гомологического уравнения $(*)$ с правой частью M_s. Умножая это решение на x_i, получаем искомое решение v_t.

О к о н ч а н и е д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы. Представим $\alpha = -\varphi \in \mathfrak{m}^{\mu+2}$ в виде функциональной линейной комбинации одночленов α_s степени $\mu + 1$:

$$\alpha(x) = \sum c_s(x)\alpha_s(x).$$

Решим гомологические уравнения $(*)$ с правыми частями α_s по лемме 3:

$$\alpha_s(x) = v_{t,s} \cdot (f + t\varphi), \quad v_{t,s}(0) \equiv 0.$$

Векторное поле $v_t = \sum c_s(x)v_{t,s}$ определяет искомое однопараметрическое семейство диффеоморфизмов g_t:

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} \equiv v_t(g_t(x)), \quad g_t(0) \equiv 0, \quad (f + t\varphi)(g_t(x)) \equiv f(x).$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Приведенное доказательство принадлежит Мазеру. Опубликовано четыре разных доказательства теоремы о конечной определенности (для гладкого и голоморфного случаев): [5], [256], [477], [196].

6.5. V-эквивалентность. Кроме правой и лево-правой эквивалентностей часто полезно рассматривать еще один вид эквивалентности, геометрически означающий диффеоморфность многообразий уровня отображения, — так называемую V-эквивалентность.

О п р е д е л е н и е. Ростки f и $\tilde{f}$: $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ называются *V-эквивалентными* (V — от variety; имеется в виду многообразие $f^{-1}(0)$), если существуют такой росток g: $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ правой замены, сохраняющей 0, и такой росток M: $(\mathbb{R}^m, 0) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ отображения пространства-прообраза в многообразие автоморфизмов пространства-образа (т. е. в многообразие невырожденных матриц порядка n), что

$$\tilde{f}(x) \equiv M(x)f(g(x)).$$

Ясно, что локальный диффеоморфизм g переводит росток множества $\tilde{f}^{-1}(0)$ в 0 в росток множества $f^{-1}(0)$ в 0. Отображения $f(x) = x^2$ и $f(x) = x^3$ имеют геометрически одинаковые множества $f^{-1}(0)$, но не V-эквивалентны.

Т е о р е м а. *Для V-эквивалентности двух ростков необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им идеалы переходили один в другой при подходящем локальном диффеоморфизме g пространства-прообраза.*

Действительно, обозначим через I_f идеал, порожденный компонентами ростка f (т. е. идеал $f^*\mathfrak{m}_y\boldsymbol{A}_x$ в алгебре «функций от x» $\boldsymbol{A}_x$).

Л е м м а. *Если $I_f = I_{\tilde{f}}$, то существует такой росток невырожденной матрицы M в 0, что*

$$\tilde{f}(x) = M(x)f(x).$$

Доказательство. Поскольку компоненты ростка f входят в $I_{\tilde f}$, а компоненты ростка $\tilde f$ — в I_f, существуют (вообще говоря, необратимые) матричные ростки P и Q, для которых

$$\tilde f(x) = P(x)f(x), \quad f(x) = Q(x)\tilde f(x).$$

Следовательно, $(QP - E)f \equiv 0$; поэтому матричный росток $M = P + R[QP - E]$ при любом R переводит f в $\tilde f$. Остается подобрать R так, чтобы матрица $M(0)$ не вырождалась. Ниже мы обозначаем через P, Q, R, M значения соответствующих ростков в нуле и рассматриваем их как линейные отображения $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Представим $\mathbb{R}^n$ в виде прямой суммы $\operatorname{Ker} P$ и дополнительного пространства A, а также в виде прямой суммы $\operatorname{Im} P$ и дополнительного пространства B. Очевидно, $\dim A = \dim \operatorname{Im} P$, $\dim B = \dim \operatorname{Ker} P$. Поэтому можно определить R так, чтобы выполнялись равенства $RA = 0$, $R(\operatorname{Ker} P) = B$. Тогда $M(\operatorname{Ker} P) = B$, $M(A) = \operatorname{Im} P \bmod B$, поэтому M не вырождается, и лемма доказана. Теорема очевидно вытекает из леммы.

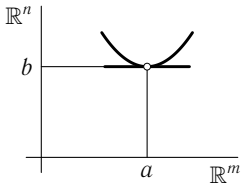


Рис. 42

Определение. Ростки отображений $f\colon (\mathbb{R}^m, a) \to (\mathbb{R}^n, b)$ и $\tilde f\colon (\mathbb{R}^m, \tilde a) \to (\mathbb{R}^n, \tilde b)$ называются *V-эквивалентными*, если они становятся V-эквивалентными после перенесения начала координат из a, b и $\tilde a$, $\tilde b$ в 0.

Замечание. Хотя в этом месте мы использовали линейную структуру пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$, свойство V-эквивалентности от этой структуры не зависит: перенесения можно было бы заменить диффеоморфизмами. Можно даже доказать, что V-класс ростка f в a определяется следующей парой ростков m-мерных подмногообразий прямого произведения $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ в точке (a, b):

$$[\text{«ось»}\ x = (\mathbb{R}^m, a) \times b; \quad \text{график}\ f] \quad \text{(рис. 42)},$$

рассматриваемой с точностью до диффеоморфизмов пространства-произведения. Этот класс зависит от касания указанных подмногообразий, поэтому Мазер называет V-эквивалентность *контактной* эквивалентностью. Термин «V-эквивалентность» введен Ж. Мартине [390] во избежание путаницы с контактной группой (ср. гл. III).

6.6. Инфинитезимальная V-устойчивость. V-эквивалентности соответствует свое понятие инфинитезимальной устойчивости.

Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток гладкого (∞-струя формального, ...) отображения $y = f(x)$ в нуле.

Рассмотрим пространство всех вариаций ростка f.

Пусть $F(x, \varepsilon) = f(x) + \varepsilon a(x) + \ldots$ — однопараметрическая деформация ростка f.

Вариация (или *начальная скорость*) деформации F задается вектор-функцией a.

Обозначим компоненты отображений f, F и a (в фиксированных системах координат) через f_i, F_i, a_i. «Функции» f_i и a_i принадлежат рассматриваемой алгебре $\boldsymbol{A}_x$ (ростков гладких, формальных, аналитических или голоморфных функций от $(x_1, \ldots, x_m)$ в нуле). Таким образом, вариация ростка f задается набором из n элементов алгебры $\boldsymbol{A}_x$. Такой набор мы будем называть *столбиком с элементами* $(a_1, \ldots, a_n)$ и будем также обозначать через

$$a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n = a_1 \partial/\partial y_1 + \ldots + a_n \partial/\partial y_n$$

(так как a_i — это скорость изменения координаты y_i). Все столбики вариаций образуют свободный модуль $(\boldsymbol{A}_x)^n$ с n образующими $e_i = \partial/\partial y_i$ над алгеброй $\boldsymbol{A}_x$.

В этих терминах мы можем переписать определение лево-правой инфинитезимальной устойчивости ростка f так: для всякого столбика $a \in (\boldsymbol{A}_x)^n$ существует разложение

$$a(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j(x) + \sum k_r(f(x)) e_r \qquad (1)$$

(где $h_j \in \boldsymbol{A}_x$, $\partial f/\partial x_j \in (\boldsymbol{A}_x)^n$, $k_r \in \boldsymbol{A}_y$ — «функции» от $y_1, \ldots, y_n$).

Заметим, что первое слагаемое в этой формуле при изменении коэффициентов h пробегает $\boldsymbol{A}_x$-подмодуль в $(\boldsymbol{A}_x)^n$. Второе слагаемое при изменении k пробегает только линейное подпространство (или, если угодно, модуль над алгеброй функций от y, но не от x).

О п р е д е л е н и е. Росток отображения f называется *инфинитезимально V-устойчивым*, если образы базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ порождают над $\mathbb{R}$ фактормодуль

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{A}_x)^n \Big/ \Big(\frac{\partial f}{\partial x_j}, f_i e_r \Big) \quad (j = 1, \ldots, m; \;\; i, r = 1, \ldots, n).$$

З а м е ч а н и е. Происхождение этого определения следующее. Вариации ростка f под действием диффеоморфизмов прообраза имеют вид $\sum\limits_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j} h_j(x)$. Они образуют в $(\boldsymbol{A}_x)^n$ подмодуль, порожденный m столбиками $\partial f/\partial x_j$. Другой вид изменения отображения f, не выводящий из класса V-эквивалентности, состоит в умножении слева вектора системы уравнений $\{f_s = 0\}$ на невырожденную при $x = 0$ матрицу-функцию C (матрицу порядка n с элементами из $\boldsymbol{A}_x$). Если матрица $C(\varepsilon) = E + \varepsilon c + \ldots$

близка к единичной, то система преобразуется в систему вида $\{\tilde{f}_s = 0\}$, где $\tilde{f} = f + \varepsilon cf + \ldots$ Следовательно, вариация отображения f имеет вид cf, т. е. принадлежит подмодулю в $(\boldsymbol{A}_x)^n$, порожденному n^2 столбиками $f_i e_r$ (в таком столбике на r-м месте стоит f_i, а на остальных местах — нули).

Таким образом, знаменатель формулы для $\boldsymbol{T}$ состоит из «тривиальных» вариаций: образующая $\partial f/\partial x_j$ отвечает сдвигам вдоль оси x_j, а $f_i e_r$ — прибавлению к r-му уравнению i-го.

Условие инфинитезимальной V-устойчивости означает, таким образом, что *всякая вариация системы уравнений* $\{f_s = 0\}$ *может быть получена из тривиальной посредством инфинитезимального сдвига в пространстве-образе* (такой сдвиг заменяет систему $\{f_s = 0\}$ на $\{f_s = \varepsilon_s\}$).

Т е о р е м а. *Инфинитезимальная V-устойчивость ростка эквивалентна его инфинитезимальной устойчивости.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть росток f инфинитезимально устойчив, т. е. существуют разложения (1). Его инфинитезимальная V-устойчивость очевидна. Действительно, выделим в k_r свободные члены и запишем эти функции в виде

$$k_r(y) = c_r + \sum_{i=1}^{n} y_i g_{i,r}(y), \quad c_r \in \mathbb{R}, \quad g_{i,r} \in \boldsymbol{A}_y.$$

Подставляя разложения k_r в (1), получим для каждого вектора вариации a разложение

$$a = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j + \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i g_{i,r}(f) e_r + \sum_{r=1}^{n} c_r e_r,$$

доказывающее инфинитезимальную V-устойчивость.

Доказательство обратного утверждения проводится совершенно такими же рассуждениями, как доказательство подготовительной теоремы (см. п. 4.4).

Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ порождают $\boldsymbol{T}$ над числами. Тогда для всякой вариации a из $(\boldsymbol{A}_x)^n$ существует разложение

$$a = \sum_{j=1}^{m} c_r e_r + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j} h_j + \sum_{i,r=1}^{n} g_{r,i} f_i e_r. \tag{2}$$

В частности, коэффициент при f_i (т. е. столбик $\sum_{r=1}^{n} g_{r,i} e_r \in (\boldsymbol{A}_x)^n$) допускает разложение вида (2). Подставим все эти разложения в (2). Мы получим

улучшенное разложение (2), которое можно переписать в виде

$$a=\sum_{r=1}^{n}\left(c_r+\sum_{i=1}^{n}c_{r,i}f_i\right)e_r+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\tilde{h}_j+\sum_{i,r,p=1}^{n}g_{r,i,p}f_if_pe_r.$$

Разлагая коэффициент $\sum\limits_{r=1}^{n}g_{r,i,p}e_r$ по формуле (2), мы продолжаем улучшение и повышаем степень произведения компонент отображения f в последнем слагаемом. После бесконечного числа шагов достигаем разложения

$$a=\sum_{r=1}^{n}c_r(f)e_r+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\hat{h}_j, \tag{3}$$

доказывающего инфинитезимальную устойчивость на уровне формальных рядов.

Переход к (более содержательным) гладкому, аналитическому и голоморфному вариантам проводится так же, как для обычной подготовительной теоремы.

Замечание 1. Общая формулировка «подготовительной теоремы для модулей» такова: *пусть* $f(0)=0$ *и элементы* $e_1,\ldots,e_n$ *конечнопорожденного* $\boldsymbol{A}_x$*-модуля* F *порождают линейное пространство* $F/f^*\mathfrak{m}_yF$; *тогда они же порождают* F *как модуль над* $\boldsymbol{A}_y$.

В нашем случае $F=(\boldsymbol{A}_x)^n/(\partial f/\partial x_j)$.

Замечание 2. Если росток отображения f гладко зависит от параметра t, меняющегося на отрезке $[0,1]$, и инфинитезимально V-устойчив при каждом фиксированном t, то разложение (3) можно выбрать с гладко зависящими от t коэффициентами c_r и $\hat{h}_j$ (причем допускается даже гладкая зависимость a от t).

Доказательство такое же, как для подготовительной теоремы с параметрами (пример 4 в п. 4.5).

Пример. Пусть отображение f — сборка Уитни, заданная формулами

$$f_1=x_1^3+x_1x_2,\quad f_2=x_2.$$

Проверим выполнение условия инфинитезимальной V-устойчивости (это легче, чем проверять инфинитезимальную устойчивость непосредственно). Модуль $(\boldsymbol{A}_x)^n=(\boldsymbol{A}_x)^2$ образован столбиками вида $\binom{a_1(x)}{a_2(x)}$. Производные $\partial f/\partial x_j$ — это столбики

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)=\binom{3x_1^2+x_2}{0},\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=\binom{x_1}{1}.$$

Столбики $y_i e_r$ имеют вид

$$\binom{x_1^3+x_1x_2}{0},\ \binom{0}{x_1^3+x_1x_2},\ \binom{x_2}{0},\ \binom{0}{x_2}.$$

Знаменатель формулы для $\boldsymbol{T}$ — это подмодуль в $(\boldsymbol{A}_x)^2$, натянутый на шесть выписанных столбиков.

Подмодуль, натянутый на пять из шести выписанных столбиков (исключая $\partial f/\partial x_2$), легко найти: он содержит

$$\binom{x_2}{0},\ \binom{x_1^2}{0},\ \binom{0}{x_2},\ \binom{0}{x_1^3},$$

и, следовательно, факторпространство порождено пятью столбиками:

$$\binom{1}{0},\ \binom{x_1}{0},\ \binom{0}{1},\ \binom{0}{x_1},\ \binom{0}{x_1^2}. \qquad (*)$$

Учитывая теперь, что $\partial f/\partial x_2 = (x_1, 1)$ мы находим

$$\binom{0}{x_1^2} = x_1^2\binom{x_1}{1} - x_1\binom{x_1^2}{0},\quad \binom{x_1}{0} = \binom{x_1}{1} - \binom{0}{1},\quad \binom{0}{x_1} = x_1\binom{x_1}{1} - \binom{x_1^2}{0}.$$

Следовательно, по модулю знаменателя формулы для $\boldsymbol{T}$ все пять столбиков $(*)$ сравнимы с числовыми линейными комбинациями базисных столбиков $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Этим доказана V- (а значит, и обычная) инфинитезимальная устойчивость сборки Уитни.

§ 7. Доказательство теоремы устойчивости

В этом параграфе доказывается устойчивость инфинитезимально устойчивого ростка отображения. Это доказательство состоит из двух частей. Во-первых, доказывается, что k-струя инфинитезимально устойчивого ростка при достаточно больших k устойчива, т. е. что всякое достаточно близкое отображение будет иметь в подходящей близкой точке лево-право эквивалентную k-струю. Во-вторых, доказывается, что k-струя инфинитезимально устойчивого ростка при достаточно больших k достаточна. Из этих двух фактов очевидно вытекает устойчивость.

7.1. Доказательство достаточности k-струи инфинитезимально устойчивого ростка отображения. Мы докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Если росток f отображения в n-мерное пространство инфинитезимально устойчив, то он $(n+1)$-определен, т. е. его $(n+1)$-струя достаточна. Иными словами, члены степени $n+2$ и выше в ряду Тейлора f в нуле можно отбросить, не нарушая дифференцируемый тип ростка.*

Пример. Сборка Уитни 3-определена в соответствии с тем, что размерность пространства-образа n равна 2.

Введем следующие обозначения:

$\theta = (\boldsymbol{A}_x)^n$ — $\boldsymbol{A}_x$-модуль вариаций ростка f [$(\boldsymbol{A}_x)^n$ — это свободный модуль с n образующими $e_i = \partial/\partial y_i$ над алгеброй $\boldsymbol{A}_x$ «функций» от $x_1, \ldots, x_m$; его элементы — это «столбики» $(a_1, \ldots, a_n) = \sum a_i e_i$ $(a_i \in \boldsymbol{A}_x)$];

$M = (\partial f/\partial x_j, f_i e_j)$ — $\boldsymbol{A}_x$-подмодуль V-тривиальных вариаций (знаменатель в формуле для $\boldsymbol{T}$ из определения V-инфинитезимальной устойчивости);

$\mathfrak{m}_x$ — максимальный идеал в $\boldsymbol{A}_x$ (состоит из всех «функций», обращающихся в нуль при $x = 0$).

Лемма 1. *Если f — инфинитезимально устойчивый росток в нуле отображения в n-мерное пространство то все вариации достаточно высокого порядка* (*а именно порядка n в нуле*) *тривиальны*: $\mathfrak{m}_x^n \theta \subset M$.

Доказательство. Рассмотрим вектор-одночлен $x^i e_s = x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_n} e_s$. Составим цепочку $e_s, x_{i_1} e_s, x_{i_1} x_{i_2} e_s, \ldots, x_{i_1} \ldots x_{i_n} e_s$. Мы получили $n + 1$ элемент в θ. Поскольку росток f инфинитезимально устойчив и, значит, V-инфинитезимально устойчив, $\dim_{\mathbb{R}} \theta/M \leqslant n$. Следовательно, найдется такая линейная комбинация с числовыми коэффициентами, среди которых есть ненулевые, что

$$c_0 e_s + c_1 x_{i_1} e_s + \ldots + c_n x_{i_1} \ldots x_{i_n} e_s \in M.$$

Пусть c_r — первый ненулевой коэффициент. Вынося $x_{i_1} \ldots x_{i_r} e_s$ за скобки, получаем $x_{i_1} \ldots x_{i_r} e_s \in M$ и, следовательно, $x^i e_s \in M$, что и требовалось доказать.

Определение. Росток в нуле отображения в n-мерное пространство называется *почти V-инфинитезимально устойчивым* (ПVИУ), если условие V-инфинитезимальной устойчивости (VИУ) выполняется с точностью до членов $(n + 1)$-го порядка малости.

Таким образом, условие ПVИУ состоит в существовании для любой вариации α ростка f в нуле разложения

$$\text{(П}V\text{ИУ)} \qquad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} h(x) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x) f_i(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i e_i + r(x),$$

$$r \in \mathfrak{m}_x^{n+1} \theta.$$

Лемма 2. *Если f — (ПVИУ)-росток в нуле отображения в n-мерное пространство, то все вариации порядка n в нуле тривиальны*: $\mathfrak{m}_k^n \theta \subset M$.

Доказательство. Занумеруем все вектор-одночлены степени n: $\rho_1, \ldots, \rho_N$. Для каждого вектор-одночлена степени n существует

разложение (ПVИУ), в котором $c_i = 0$:

$$\rho_p = m_p + r_p, \quad m_p \in M, \quad r_p \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta \qquad (*)$$

(это разложение строится, как в лемме 1, лишь M заменяется на $M + \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$).

Поскольку остаточный член r имеет порядок $n+1$, его можно представить в виде линейной комбинации векторных одночленов степени n с коэффициентами первого порядка малости:

$$r_p = \sum_q \beta_{p,q}\rho_p, \quad \beta_{p,q} \subset \mathfrak{m}_x.$$

Теперь совокупность разложений $(*)$ переписывается в виде матричного уравнения относительно столбца (ρ) из $\rho_1, \ldots, \rho_N$:

$$(E - \beta)(\rho) = (m),$$

где (m) — столбец из m_p, а β — матрица порядка $N \times N$ с элементами из $\mathfrak{m}_x$. Обращая матрицу $E - \beta$, получаем $\rho_p \in M$, так как все m_p принадлежат M. Лемма доказана.

Л е м м а 3. *Справедлива импликация* (ПVИУ) $\Rightarrow$ (VИУ).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разложение (ПVИУ). По лемме 2 его остаточный член принадлежит M. Следовательно, член r в (ПVИУ) может быть уничтожен подходящим изменением коэффициентов h и g_i, что и требовалось доказать.

Л е м м а 4. *Инфинитезимальная устойчивость ростка отображения в n-мерное пространство* $(n+1)$*-определена. Иными словами, если росток* f *в* 0 *инфинитезимально устойчив и* $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$, *то росток* $f + \varphi$ *в нуле инфинитезимально устойчив.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку (ИУ) $\Rightarrow$ (VИУ), для всякой вариации α существует разложение

$$(V\text{ИУ}) \qquad \alpha(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}\,h(x) + \sum g_i(x)f_i(x) + \sum c_i e_i.$$

Заменяя f на $\tilde{f} = f + \varphi$, сохраним коэффициенты h, g_i, и c_i. Получаем

$$\alpha(x) = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}\,h(x) + \sum g_i(x)\tilde{f}_i(x) + \sum c_i e_i - r(x),$$

где $r = \sum g_i\varphi_i - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\,h$. Заметим, что r имеет $(n+1)$-й порядок малости ($r \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$). Следовательно, мы получили для ростка $\tilde{f}$ разложение (ПVИУ)$_{\tilde{f}}$. По лемме 3 для ростка f строится разложение (VИУ)$_{\tilde{f}}$, а по нему — искомое разложение (ИУ)$_{\tilde{f}}$ (см. п. 6.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Пусть f — инфинитезимально устойчивый росток и $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$. Будем действовать гомотопическим методом:

рассмотрим $f_t = f + t\varphi$, $t \in [0, 1]$. Ищем зависящие от времени t диффеоморфизмы H_t (в прообразе) и K_t (в образе), для которых $f_t \circ H_t \equiv K_t \circ f$ *). Этим диффеоморфизмам отвечают зависящие от времени векторные поля k_t и h_t:

$$k_t(K_t(y)) = \partial K_t(y)/\partial t, \quad h_t(H_t(x)) = \partial H_t(x)/\partial t.$$

Дифференцируя коммутативную диаграмму, получаем гомологическое уравнение

$$\frac{\partial f_t}{\partial t}\Big|_{H_t(x)} + f_{t*}h_t\big|_{H_t(x)} = k_t\big|_{K_t(f(x))}$$

(звездочкой обозначена производная отображения f_t при фиксированном t). Учитывая соотношение $K_t \circ f = f_t \circ H_t$, приходим к соотношению, в котором и левая, и правая части вычисляются в точке $H_t(x)$.

Поскольку это соотношение должно выполняться при любых x и t, оно является тождеством, поэтому вместо аргумента $H_t(x)$ можно поставить любую букву, например x. Таким образом, гомологическое уравнение принимает вид

$$\alpha(x) = -\frac{\partial f_t}{\partial x}\, h_t(x) + k_t(f_t(x)). \qquad (**)$$

Нужно найти решение (h, k) при $\alpha = \varphi$. Уравнение $(**)$ разрешимо при каждом t по лемме 1. Мы должны найти векторные поля h_t и k_t, гладко зависящие от $t \in [0, 1]$ и обращающиеся в нуль в начале координат ($x = 0$ для h_t, $y = 0$ для k_t).

Начнем с гладкости но t. В доказательстве леммы 4 с помощью конструкций лемм 2 и 3 описано построение разложения (ИУ), пригодное для каждого t. Покажем, что все это построение гладко зависит от t. Имеется два опасных места:

1) при переходе от $(\Pi V\text{ИУ})_{f_t}$ к $(V\text{ИУ})_{f_t}$ выбирался первый отличный от нуля коэффициент c_r (в доказательстве леммы 1);

2) при переходе от $(V\text{ИУ})_{f_t}$ к $(\text{ИУ})_{f_t}$ имеется ссылка на п. 6.6.

Но: 1) отличный от нуля коэффициент зависит от f, а не от f_t; 2) в п. 6.6 показано, что из $(V\text{ИУ})_{f_t}$ вытекает возможность выбрать гладкое по t решение $(**)$ при всех t из $[0, 1]$ с помощью разбиения единицы.

Итак, мы построили гладкое решение уравнения $(**)$. Остается добиться обращения полей h_t и k_t в нуль в начале координат. Напомним, что f — (ИУ)-росток отображения в $\mathbb{R}^n$ и что $f_t = f + t\varphi$, где $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$.

*) При применении гомотопического метода имеется некоторая тонкость: коммутативность следует записать так, чтобы после дифференцирования аргументы в левой и правой частях совпадали.

Предложение 1. *Если* α *имеет* n*-й порядок малости в нуле* ($\alpha \in \mathfrak{m}_x^n\theta$), *то существует гладко зависящее от* t *разложение*

$$\alpha(x) = -\frac{\partial f_t}{\partial x} h_t + k_t(f_t(x))$$

с $k_t(0) \equiv 0$.

Доказательство. По лемме 1 для α существует разложение $(VИУ)_f$, в котором $c_i = 0$. При переработке этого разложения в доказательстве леммы 4 коэффициенты c_i не меняются ни при переходе $(VИУ)_f \to (\Pi VИУ)_{f_t}$, ни при переходе $(\Pi VИУ)_{f_t} \to (VИУ)_{f_t}$. При переходе $(VИУ)_{f_t} \to (ИУ)_{f_t}$ мы получаем $k_t(0) = \sum c_i e_i$ (см. п. 6.6). Следовательно, $k_t(0) = 0$, что и требовалось.

Предложение 2. *Для существования гладко зависящего от* t *решения уравнения инфинитезимальной устойчивости*

$$\alpha(x) = -\frac{\partial f_t}{\partial x} h_t(x) + k_t(f_t(x)) \qquad (**)$$

с любым α *из* θ *необходима и достаточна разрешимость при любой функции* $a \in \boldsymbol{A}_x$ *следующего уравнения относительно матриц* $\boldsymbol{H}$ *и* $\boldsymbol{K}$:

$$a\boldsymbol{E} = -f_{t*}\boldsymbol{H} + \boldsymbol{K}. \qquad (***)$$

Здесь $\boldsymbol{H}$ — матрица порядка $m \times n$, элементы которой — функции от x и t, а $\boldsymbol{K}$ — $m \times n$-матрица, элементы которой — функции от $y = f_t(x)$ и t (рассматриваемого класса гладкости); $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица порядка n.

Доказательство. Утверждение вытекает из того, что s-е столбцы матриц $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{K}$ дают решение уравнения инфинитезимальной устойчивости с левой частью $\alpha(x) = a(x)e_s$.

Предложение 3. *Пусть*

$$u\boldsymbol{E} = -f_{t*}\boldsymbol{H}_u + \boldsymbol{K}_u, \quad v\boldsymbol{E} = -f_{t*}\boldsymbol{H}_v + \boldsymbol{K}_v.$$

Тогда

$$uv\boldsymbol{E} = -f_{t*}\boldsymbol{H}_{uv} + \boldsymbol{K}_{uv},$$

где

$$\boldsymbol{H}_{uv} = v\boldsymbol{H}_u + \boldsymbol{H}_v\boldsymbol{K}_u, \quad \boldsymbol{K}_{uv} = \boldsymbol{K}_v\boldsymbol{K}_u.$$

Это предложение доказывается непосредственной подстановкой.

Замечание. Из предложения 3 легко вывести, что для инфинитезимальной устойчивости достаточна разрешимость m матричных уравнений $(***)$ с $a = x_1, \ldots, x_m$.

Предложение 4. *Если* $a \in \mathfrak{m}_x^n$, *то существует решение* $(\boldsymbol{H}_a, \boldsymbol{K}_a)$ *уравнения* $(***)$, *для которого* $\boldsymbol{K}_a(t, 0) \equiv 0$.

Доказательство. См. предложения 1 и 2.

Предложение 5. *Если* $a \in \mathfrak{m}_x^{n+1}$, *то существует решение* $(\boldsymbol{H}_a, \boldsymbol{K}_a)$ *уравнения* $(***)$, *для которого* $\boldsymbol{H}_a(t, 0) \equiv 0$, $\boldsymbol{K}_a(t, 0) \equiv 0$.

Доказательство. Представим a в виде uv, $u \in \mathfrak{m}_x^n$, $v \in \mathfrak{m}_x$. По предложению 3 можно взять $\boldsymbol{H}_{uv} = v\boldsymbol{H}_u + \boldsymbol{H}_v\boldsymbol{K}_u$, $\boldsymbol{K}_{uv} = \boldsymbol{K}_v\boldsymbol{K}_u$. По предложению 4 можно считать, что $\boldsymbol{K}_u(t, 0) \equiv 0$, что и дает искомое решение.

Теперь мы закончим доказательство теоремы.

Из предложения 5 и доказательства предложения 2 следует разрешимость гомологического уравнения $(**)$ для $\alpha \in \mathfrak{m}_x^{n+1}\theta$ в классе гладко зависящих от t полей h_t, k_t, обращающихся в 0 в начале координат. Но по условию теоремы $\varphi \in \mathfrak{m}_x^{n+2}\theta$. Итак, мы построили гладкое по t решение h_t, k_t гомологического уравнения с левой частью $\alpha = \varphi$, обращающееся в 0 в начале координат. Поля h_t и k_t определяют искомые локальные диффеоморфизмы H_t и K_t вблизи $x = 0$ и $y = 0$ при всех $t \in [0, 1]$, на чем доказательство теоремы и заканчивается.

7.2. Инфинитезимальная устойчивость и трансверсальность орбите. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток гладкого отображения.

Определение. *Малым пространством* k*-струй отображений из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}^n$ называется пространство k-струй в нуле отображений, переводящих 0 в 0. Обозначение: $J^k_{0,0}(m, n)$.

Средним пространством k*-струй отображений из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}^n$ называется пространство k-струй отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ в нуле. Обозначение: $J^k_0(m, n)$.

Большим пространством k*-струй отображений из* $\mathbb{R}^m$ *в* $\mathbb{R}^n$ называется пространство k-струй отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ во всех точках. Обозначение: $J^k(m, n)$.

Группы k-струй левых и правых замен переменных, оставляющих на месте 0 в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{R}^m$ соответственно, действуют на малом пространстве струй.

Определение. *Малой орбитой* k*-струи* f *в нуле* называется орбита этой струи под действием указанной группы (k-струй лево-правых замен, сохраняющих 0×0) в малом пространстве струй.

Параллельные перенесения в $\mathbb{R}^m$ и в $\mathbb{R}^n$ определяют (неканонические, но полезные) проекции, расслаивающие бóльшие пространства струй над меньшими.

Пример. Пусть $m = n = 1$. Тогда 1-струя задается тремя числами: x, y, $p = dy/dx$. Пространства 1-струй суть пространства

$$\{(x, y, p)\}, \quad \{(y, p)\} \quad \text{и} \quad \{p\}$$

соответственно. Проекции суть

$$(x, y, p) \mapsto (y, p), \quad (y, p) \mapsto (p), \quad (x, y, p) \mapsto (p).$$

Малая орбита 1-струи функции $f(x) = x^2$ в нуле состоит из точки $p = 0$ малого пространства струй $\{p\}$.

Определение. *Средней* и *большой орбитами k-струи ростка* f называются полные прообразы малой орбиты при введенных проектированиях среднего и большого пространства струй на малое.

Пример. Средняя орбита 1-струи функции $f(x) = x^2$ в нуле — это прямая $p = 0$ на плоскости $\{(y, p)\}$; большая орбита — это плоскость $p = 0$ в трехмерном пространстве $\{(x, y, p)\}$.

Замечание. Большая орбита — это орбита k-струи под действием бесконечномерной группы диффеоморфизмов пространств прообраза и образа в большом пространстве струй; средняя — под действием подгруппы, оставляющей на месте 0 в прообразе в среднем пространстве струй.

Рассмотрим k-струйное расширение ростка отображения f. Это — росток отображения пространства-прообраза $(\mathbb{R}^m, 0)$ в большое пространство струй:

$$j^k f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to J^k(m, n).$$

Мы будем называть это расширение *большим*.

Определение. *Средним* и *малым k-струйными расширениями* ростка f называются ростки в нуле отображения пространства-прообраза в среднее и малое пространства струй, получающиеся из большого расширения последующими проектированиями на эти пространства.

Пример. Для $f(x) = ax^2$ большое, среднее и малое 2-струйные расширения задаются формулами

$$\xi \mapsto (\xi, a\xi^2, 2a\xi, 2a), \quad \xi \mapsto (a\xi^2, 2a\xi, 2a) \quad \text{и} \quad \xi \mapsto (2a\xi, 2a)$$

соответственно.

Теорема. *Росток* $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *отображения в n-мерное пространство инфинитезимально устойчив, если и только если при каком-нибудь* (*и тогда любом*) $k \geqslant n$ *его большое* (*соответственно среднее, малое*) *k-струйное расширение трансверсально большой* (*соответственно средней, малой*) *орбите k-струи ростка* f *в нуле*.

Пример. Росток $f = ax^2$ в нуле инфинитезимально устойчив, если и только если его 1-струйное большое (среднее, малое) расширение трансверсально плоскости (прямой, точке) $p = 0$. Это имеет место при $a \neq 0$.

Доказательство. Чтобы отображение в пространство расслоения было трансверсальным к подрасслоению, необходимо и достаточно, чтобы после проектирования на базу расслоения из данного отображения получалось отображение, трансверсальное к базе подрасслоения. Применим это утверждение к расслоению большого пространства струй над средним и среднего над малым и к подрасслоениям, образованным орбитами.

Мы убеждаемся, что утверждение теоремы достаточно доказать для средней орбиты.

Вычислим касательное пространство к средней орбите в ее точке $j_0^k(f)$. С этой целью, пользуясь системами координат, отождествим касательное пространство к среднему пространству струй с самим этим пространством струй.

Предложение 1. *k-струя α принадлежит касательному пространству к средней орбите k-струи отображения f в 0, если и только если α допускает разложение*

$$\alpha = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{h}(x) + \boldsymbol{k}(f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta,$$

где $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

Доказательство. Для любых $\boldsymbol{h}$ и $\boldsymbol{k}$ справедливо равенство

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(x - \varepsilon\boldsymbol{h}(x)) + \varepsilon\boldsymbol{k}(f(x - \varepsilon\boldsymbol{h}(x))) = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{h}(x) + \boldsymbol{k}(f(x)).$$

Если $\boldsymbol{h}(0) = 0$, то, взяв k-струю от левой и правой частей в нуле, получим искомое разложение.

Замечание. Правая часть зависит именно от k-струи f в нуле, а не от $(k+1)$-струи, так как $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

Предложение 2. *Образ касательного вектора $\xi \in T_0\mathbb{R}^m$ под действием производной от среднего k-струйного расширения ростка f в нуле — это k-струя*

$$(\partial f/\partial x)\xi \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta.$$

Доказательство. По определению мы должны вычислить главную линейную часть по ξ от $j_0^k(f \circ \tau_\xi) - j_0^k f$, где $\tau_\xi(x) = x + \xi$. Рассмотрим разложение Тейлора

$$f(x + \xi) - f(x) = (\partial f/\partial x)\xi + o(\xi).$$

Взяв k-струю по x при $x = 0$ от левой и правой частей, получаем

$$j_0^k(f \circ \tau_\xi) - j_0^k(f) = [j_0^k(\partial f/\partial x)]\xi + o(\xi),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Образ вектора ξ зависит от $(k+1)$-струи ростка f и не определяется k-струей.

Окончание доказательства теоремы. Условие трансверсальности k-струйного расширения ростка f средней орбите в нуле имеет, согласно предложениям 1 и 2, следующий вид: всякая вариация α ростка

отображения в нуле допускает разложение

$$\text{(Тр)} \qquad \alpha = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{h}(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\xi + \boldsymbol{k}(f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^{k+1}\theta,$$

где $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

Условие же инфинитезимальной устойчивости состоит в существовании разложения

$$\text{(ИУ)} \qquad \alpha = -\frac{\partial f}{\partial x}\,\boldsymbol{h}(x) + \boldsymbol{k}(f(x))$$

без ограничения $\boldsymbol{h}(0) = 0$.

Разложение (Тр) получается из (ИУ) выделением свободного члена $\boldsymbol{h}$, поэтому из инфинитезимальной устойчивости следует трансверсальность при любом k. Обратно, пусть трансверсальность (Тр) имеет место для какого-либо $k \geqslant n$. Тогда разложение (Тр) имеется и для $k = n$. Следовательно, f — ПVИУ-росток. По лемме 3 п. 7.1 f — VИУ-росток, а значит, и ИУ-росток (п. 6.6).

Теорема доказана.

7.3. Доказательство устойчивости. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — инфинитезимально устойчивый росток.

Теорема устойчивости (Мазер). *Росток f устойчив.*

Доказательство. Зафиксируем представителя $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ ростка f и рассмотрим любое достаточно близкое (с $n+2$ производными) отображение $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$. По теореме п. 7.2 $(n+1)$-струйное расширение отображения f трансверсально пересекает большую орбиту $(n+1)$-струи отображения $\tilde{f}$ в 0. Следовательно, $(n+1)$-струйное расширение отображения $\tilde{f}$ трансверсально пересекает эту большую орбиту в некоторой точке, близкой к $(n+1)$-струе отображения f в 0 (рис. 43).

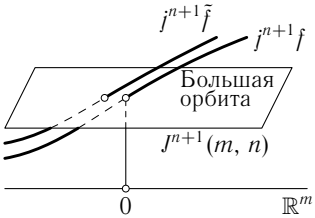


Рис. 43

Таким образом, $(n+1)$-струя отображения $\tilde{f}$ в некоторой точке $\tilde{0}$, близкой к 0, лежит в большой орбите $(n+1)$-струи отображения f в 0. Докажем, что росток отображения $\tilde{f}$ в $\tilde{0}$ лево-право эквивалентен ростку отображения f в 0. Действительно, по определению большой орбиты $(n+1)$-струи ростков f в 0 и $\tilde{f}$ в $\tilde{0}$ лево-право эквивалентны, т. е существуют замены координат в $\mathbb{R}^m$ и в $\mathbb{R}^n$, превращающие росток $\tilde{f}$ в $\tilde{0}$ в росток отображения g в 0, $(n+1)$-струя которого совпадает с $(n+1)$-струей ростка f в 0. По теореме п. 7.1 $(n+1)$-струя ростка f в 0 достаточна. Следовательно, ростки f и g в нуле лево-право эквивалентны. Значит, ростки f в 0 и $\tilde{f}$ в $\tilde{0}$ лево-право эквивалентны, что и доказывает теорему.

П р и м е р. Сборка Уитни инфинитезимально устойчива (п. 6.6, с. 109) и, следовательно, устойчива.

З а д а ч а. Доказать устойчивость ростка обобщенного отображения Уитни $\Sigma^{1n}\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ (п. 2.5, с. 45) и эллиптического и гиперболических ростков отображений $\Sigma^2\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ (п. 3.6, с. 61).

§ 8. Версальные деформации

При рассмотрении всевозможных особенностей обычно наибольший интерес представляет случай общего положения, в то время как от всех более сложных особенностей можно избавиться малым шевелением. Например, функция общего положения имеет лишь невырожденные критические точки; вырожденные критические точки, вроде критической точки функции x^3, распадаются на невырожденные при сколь угодно малом шевелении $x^3 - \varepsilon x$.

Однако во многих случаях нас интересует не индивидуальный объект, а целое семейство объектов, зависящих от одного или нескольких параметров. Вырожденные особенности, устранимые при каждом фиксированном значении параметров, могут становиться неустранимыми для всего семейства: в пошевеленном семействе вырождения возникают при измененных, но близких к исходным значениях параметров. Рассмотрим, например, семейство функций $x^3 + tx$, зависящих от параметра t. При $t = 0$ функция семейства имеет вырожденную критическую точку, и всякое близкое семейство будет иметь вырожденную критическую точку при близком к нулю значении параметра, хотя при каждом фиксированном значении параметра вырождение можно устранить малым шевелением.

Таким образом, вырождения не общего положения становятся неустранимыми, если рассматривается не индивидуальный объект, а семейство. Но тогда естественным объектом изучения является не сама вырожденная особенность, а семейство, в котором эта особенность становится неустранимой; при этом мы должны изучить, как эта особенность распадается (бифурцирует) при изменении параметров семейства.

Семейство, рассматриваемое локально (вблизи фиксированного значения параметров), называется *деформацией* объекта, отвечающего этим значениям параметров. Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций удается свести к изучению одной-единственной деформации, в некотором смысле самой большой; все остальные деформации получаются из нее. Такие деформации называют *версальными*. Слово «версальный» образовано пересечением слов *универсальный* и *трансверсальный* (приставка *уни* отбрасывается, как указывающая на единственность, которой может и не быть; трансверсальность же к подходящему

подмножеству в функциональном пространстве является отличительным признаком версальной деформации).

Понятие версальной деформации является важным общематематическим понятием, имеющим многочисленные приложения.

Рассмотрим, например, вопрос о приведении к нормальной форме матрицы линейного оператора. Жорданова нормальная форма неустойчива в том смысле, что при малом шевелении оператора как нормальная форма, так и приводящее преобразование меняются скачком. Версальная деформация матрицы — это такая нормальная форма, к которой можно привести не только индивидуальную матрицу, но и все близкие, причем приводящее преобразование гладко зависит от параметров (см. [6], [20], где указан явный вид версальных деформаций матриц и приведены приложения к теории бифуркаций фазовых портретов динамических систем).

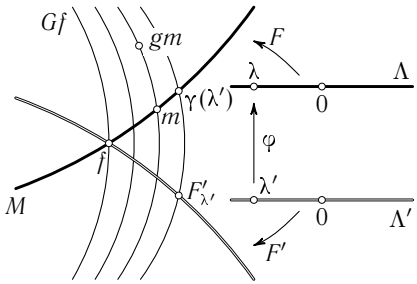


Рис. 44

Ниже приведены теоремы, позволяющие явно находить неверсальные деформации вырожденных особенностей гладких отображений.

8.1. Определение версальной деформации. Начнем с конечномерной ситуации. Пусть G — группа Ли, действующая на многообразии M, и пусть f — точка из M. *Деформацией точки* f называется росток гладкого отображения F многообразия Λ (называемого *базой* деформации) в M в точке 0 из Λ, для которого $F(0) = f$ (рис. 44).

Рассмотрим две формы F и F' с общей базой Λ одной и той же точки f. Эти деформации называются *эквивалентными*, если одна переходит в другую под действием гладко зависящего от $\lambda \in \Lambda$ элемента $g(\lambda)$ группы G, т. е. если

$$F'(\lambda) = g(\lambda)F(\lambda),$$

где g — деформация единицы группы.

Пусть $\varphi\colon (\Lambda', 0) \to (\Lambda, 0)$ — гладкое отображение. *Деформацией, индуцированной из* F *при отображении* φ, называется деформация φ^*F точки f с базой Λ', заданная формулой

$$(\varphi^*F)(\lambda') = F(\varphi(\lambda)).$$

Деформация F точки f называется *версальной*, если всякая деформация точки f эквивалентна индуцированной из F.

Версальная деформация называется *миниверсальной*, если размерность базы имеет минимальное возможное значение. Легко доказывается следующий результат.

Т е о р е м а. *Минимальная трансверсаль в точке f к орбите Gf точки f в M является миниверсальной деформацией точки f.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем какую-либо минитрансверсаль $F\colon (\Lambda, 0) \to (M, f)$ и проведем через единицу группы трансверсаль K к стационарной группе H_f точки f. Действие группы G определяет росток гладкого отображения $\alpha\colon K \times F(\Lambda) \to M$ в точке $(e, 0)$. Это — росток диффеоморфизма ($\alpha(g, m) = gm$, $g \in K$, $m \in F(\Lambda)$, рис. 44).

Пусть $F'\colon (\Lambda', 0) \to (M, f)$ — любая деформация точки f. Введем обозначения: $\alpha^{-1}(F'(\lambda')) = (\beta(\lambda'), \gamma(\lambda')) \in K \times F(\Lambda)$, $F_0^{-1}\gamma = \varphi\colon (\Lambda', 0) \to (\Lambda, 0)$. Тогда $F'(\lambda') = \beta(\lambda')F(\varphi(\lambda'))$, что и требовалось доказать.

Наша цель — перенести эти построения на случай, когда M — функциональное пространство гладких отображений, а G — какая-либо бесконечномерная группа преобразований (построенная из замен независимых или зависимых переменных, умножений на функции, сложений с функциями и т. д.). Говоря о версальной деформации, мы должны всегда указывать, о каком действии (т. е. о каких допустимых преобразованиях) или о какой эквивалентности идет речь.

Рассмотрим, например, случай *правой эквивалентности функций*.

Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}$ — росток гладкой функции. *Деформацией ростка* f с базой $\Lambda = \mathbb{R}^l$ называется росток в нуле гладкого отображения $F\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, 0) \to \mathbb{R}$, для которого $F(x, 0) \equiv f(x)$. Деформация F' (право)эквивалентна деформации F, если

$$F'(x, \lambda) \equiv F(g(x, \lambda), \lambda),$$

где $g\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^m, 0)$ — гладкий росток, $g(x, 0) \equiv x$. Деформация F' *индуцирована из* F, если

$$F'(x, \lambda') \equiv F(x, \varphi(\lambda')),$$

где $\varphi\colon (\mathbb{R}^{l'}, 0) \to (\mathbb{R}^l, 0)$ — гладкий росток.

Таким образом, деформация F ростка f (*право-* или R-) *версальна*, если всякая деформация F' этого ростка представима в виде

$$F'(x, \lambda') \equiv F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \quad g(x, 0) \equiv x, \quad \varphi(0) = 0. \tag{1}$$

З а д а ч а 1. Доказать, что деформация $x^2 + \lambda$ ростка x^2 в нуле R-версальна (право-версальна).

З а д а ч а 2. Доказать, что росток функции $f(x) \equiv 0$ не имеет конечномерной R-версальной деформации.

В случае *лево-правой* (RL-) *эквивалентности* соотношение (1) заменяется на

$$F'(x, \lambda') \equiv k(F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \lambda'), \tag{2}$$

где $g(x, 0) \equiv x$, $k(y, 0) \equiv y$, $\varphi(0) = 0$.

З а д а ч а 3. Доказать, что 0-параметрическая деформация x^2 ростка x^2 RL-версальна.

V-эквивалентность деформаций F и F' одного и того же ростка f определяется условием (ср. п. 6.5)

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda)F(g(x, \lambda), \lambda).$$

Поэтому *V-версальность деформации F ростка f* определяется как возможность представить любую деформацию этого ростка в виде

$$F'(x, \lambda') = M(x, \lambda')F(g(x, \lambda'), \varphi(\lambda')), \tag{3}$$

где матрица $M(0, 0)$ невырождена, $g(x, 0) \equiv x$, $\varphi(0) = 0$.

З а д а ч а 4. Доказать, что деформация $x^2 + \lambda$ ростка x^2 V-версальна.

8.2. Инфинитезимальная версальность. Теорема п. 8.1 утверждает, что для версальности достаточна трансверсальность пространства скоростей деформации к орбите действия группы. Аналогичная теорема справедлива и в бесконечномерных случаях, которые нас интересуют. Предположим, что мы фиксировали группу допустимых преобразований (правые или левые диффеоморфизмы и т. п.).

О п р е д е л е н и е. *Касательным пространством к орбите ростка f* называется линейное пространство скоростей изменения f под действием однопараметрических семейств допустимых преобразований.

З а м е ч а н и е. Отличие этого определения от обычного состоит в том, что наша группа, вообще говоря, не действует на рассматриваемом пространстве ростков в точке (так как в группе мы допускаем переносы начала координат).

П р и м е р 1. Касательное пространство к R-орбите (орбите действия правых замен) ростка отображения $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to \mathbb{R}^n$ — это $\boldsymbol{A}_x$-модуль функций, представимых в виде (ср. п. 6.6)

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) h_i(x).$$

П р и м е р 2. Касательное пространство к RL-орбите того же ростка состоит из всех вариаций ростка f вида (ср. п. 6.6)

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) h_i(x) + k(f(x)).$$

Это линейное пространство является $\boldsymbol{A}_y$-модулем, но не $\boldsymbol{A}_x$-модулем.

Пример 3. Касательное пространство к V-орбите того же ростка состоит из всех вариаций ростка f вида (ср. п. 8.2 и п. 6.6)

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)h_i(x)+\sum f_j(x)k_j(x).$$

Это — $\boldsymbol{A}_x$-модуль.

Пусть F — деформация ростка f с базой Λ и $\lambda_1,\dots,\lambda_l$ — координаты на базе ($\lambda(0)=0$). *Начальными скоростями деформации* F называются ростки

$$\dot F_i=\frac{\partial F(x,\lambda_1,\dots,\lambda_l)}{\partial\lambda_i}\Big|_{\lambda=0},\quad i=1,\dots,l.$$

Пример. Пусть $F(x,\lambda)=x^3+\lambda_1x+\lambda_2$ — деформация ростка $f(x)=x^3$ в нуле. Начальные скорости этой деформации: $\dot F_1=x$, $\dot F_2=1$.

Определение. Деформация F ростка f называется *инфинитезимально версальной*, если ее начальные скорости вместе с касательным пространством к орбите ростка f порождают все линейное пространство вариаций ростка f.

Пример. Деформация $F(x,\lambda)=x^3+\lambda_1x+\lambda_2$ ростка $f(x)=x^3$ в нуле право-инфинитезимально версальна. Действительно, касательное пространство к орбите правых замен есть $\mathfrak{m}_x^2$ (состоит из всех ростков вида $3x^2\cdot h(x)$, где h — гладкий росток). Но всякий росток гладкой функции в нуле представим в виде $\alpha(x)=3x^2h(x)+c_1x+c_2\cdot1$.

Теорема. *Условия инфинитезимальной версальности деформации F ростка $f\colon(\mathbb{R}^m,0)\to(\mathbb{R}^n,0)$ для правой, лево-правой и V-эквивалентностей состоят в существовании для каждой вариации α ростка f представлений*

$$\alpha(x)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i(x)+\sum_{i=1}^{l}c_i\dot F_i(x)\qquad(R\text{-}\textit{версальность});$$

$$\alpha(x)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i(x)+k(f(x))+\sum_{i=1}^{l}c_i\dot F_i(x)\qquad(RL\text{-}\textit{версальность});$$

$$\alpha(x)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x_i}h_i(x)+\sum_{j=1}^{n}f_j(x)k_j(x)+\sum_{i=1}^{l}c_i\dot F_i(x)\qquad(V\text{-}\textit{версальность}).$$

Доказательство получается из определений версальности (1), (2), (3) п. 8.1 дифференцированиями. Эти же дифференцирования показывают, что версальная деформация инфинитезимально версальна.

Пример. Деформация $x^3 + \lambda x$ ростка x^3 в 0 является инфинитезимально RL-версальной, но не является ни R-, ни V-инфинитезимально версальной.

8.3. Теорема версальности. Для каждого из трех случаев (R-, RL- или V-эквивалентности) имеет место следующая теорема.

Теорема. *Инфинитезимально версальная деформация версальна.*

Пример. В качестве R-версальной деформации ростка гладкой функции f можно взять деформацию $F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1(x) + \ldots + \lambda_\mu e_\mu(x)$, где ростки функций e_k в нуле определяют базис линейного пространства

$$Q_f = \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_m]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_m).$$

В частности, деформация $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ ростка x^3 в нуле R-версальна.

Так как доказательства во всех трех случаях почти одинаковые, мы рассмотрим только случай V-эквивалентности. Теорема V-версальности в аналитической ситуации принадлежит Г. Н. Тюриной [204], рассмотревшей и более общую задачу о деформациях с негладкими базами. Приведенное ниже доказательство предложено Ж. Мартине [390]. Оно основано на следующем построении.

Пусть F — инфинитезимально V-версальная деформация ростка f, и пусть Φ — любая однопараметрическая деформация ростка F:

$$\Phi(x, \lambda, 0) \equiv F(x, l), \quad F(x, 0) \equiv f(x),$$

$$\Phi\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0).$$

Мы можем рассматривать Φ как $(l + 1)$-параметрическую деформацию ростка f функции от $x \in \mathbb{R}^m$ с параметрами $\lambda \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}$.

Лемма (о редукции). *Деформация Φ ростка f V-эквивалентна индуцированной из F.*

Доказательство леммы. Построим росток векторного поля v в точке 0 пространства (x, λ, u) так, чтобы

1) $v = \dfrac{\partial}{\partial u} + \Xi(\lambda, u)\dfrac{\partial}{\partial \lambda} + H(x, \lambda, u)\dfrac{\partial}{\partial x}$;

2) $v\Phi = A\Phi$, где A — росток гладкой матричной функции от x, λ, u.

Согласно 1) фазовые кривые такого поля трансверсальны гиперплоскости $u = 0$ и определяют вблизи нуля гладкое расслоение $(m + l + 1)$-мерного пространства над $(m + l)$-мерным. Это расслоение можно описать так. Сопоставим каждой точке (x, λ, u) пересечение проходящей через нее фазовой кривой с плоскостью $u = 0$. Обозначим x- и λ-координаты этой точки пересечения через g и φ. Согласно условию 1) построенное расслоение записывается в виде $(x, \lambda, u) \mapsto (g(x, \lambda, u), \varphi(\lambda, u))$. Из условия 2)

видно, что g задает V-эквивалентность деформации Φ и деформации, индуцированной из F при отображении φ (нужная матрица M находится интегрированием линейного уравнения с правой частью A вдоль фазовых кривых).

Таким образом, для доказательства леммы осталось построить поле v со свойствами 1) и 2). Иными словами, нужно убедиться в разрешимости гомологического уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\,\Xi(\lambda,u)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,H(x,\lambda,u)=A(x,\lambda,u)\Phi(x,\lambda,u)$$

относительно неизвестных Ξ, H, A.

Для всякой вариации α ростка f существует разложение, означающее инфинитезимальную V-версальность:

$$\alpha(x)=\frac{\partial f}{\partial x}\,h(x)-a(x)f(x)+\sum_{i=1}^{l}\dot F_i(x)\xi_i,\qquad \xi_i\in\mathbb{R}.$$

Следовательно, для всякой вариации $\alpha(x,\lambda,u)$ ростка Φ существует разложение

$$\alpha(x,\lambda,u)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,h(x)-a(x)\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\,\xi+\Big[u\alpha_0(x,\lambda,u)+\sum\lambda_i\alpha_i(x,\lambda,u)\Big].$$

Разложим таким же образом α_0 и α_i и подставим полученные выражения в эту формулу. Мы получим улучшенное разложение, в котором заключенный в квадратные скобки остаток будет уже второго порядка малости по u и λ, но зато коэффициенты $h(x)$, $a(x)$ и ξ заменятся на линейные неоднородные функции от λ и от u.

Повторяя процедуру улучшения бесконечное число раз, мы получаем разложение

$$\alpha(x,\lambda,u)=\frac{\partial\Phi}{\partial x}\,H(x,\lambda,u)-A(x,\lambda,u)\Phi+\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda}\,\Xi(\lambda,u)\qquad(*)$$

на уровне формальных рядов.

Подготовительная теорема (см. п. 6.6, с. 108) показывает, что разложение $(*)$ существует и в случае сходящихся рядов, и в C^∞-случае [применять теорему нужно к $\boldsymbol{A}_{x,\lambda,u}$-модулю $(\boldsymbol{A}_{x,\lambda,u})^n/\{\partial\Phi/\partial x_i,\ \Phi_i e_j\}$, отображению $(x,\lambda,u)\mapsto(\lambda,u)$ и образующим $\partial\Phi/\partial\lambda_i$]. Разложение $(*)$ для $\alpha=-\partial\Phi/\partial u$ доставляет искомое решение гомологического уравнения; лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть F' — (любая) деформация ростка f с параметром $\lambda'\in\mathbb{R}^{l'}$, а F — инфинитезимально версальная деформация того же ростка с параметром $\lambda\in\mathbb{R}^l$. Составим «сумму», т. е. деформацию $\hat F(x,\lambda,\lambda')\equiv F(x,\lambda)+F'(x,\lambda')-f(x)$ с $(l+l')$-мерным параметром (λ,λ').

При $\lambda' = 0$ деформация $\hat{F}$ превращается в F, а при $\lambda = 0$ — в F'. Вложение подмногообразия в базу деформации индуцирует деформацию, база которой — вложенное подмногообразие; мы будем называть исходную деформацию (с большей базой) *расширением* деформации с меньшей базой. Заметим, что *расширение инфинитезимально версальной деформации инфинитезимально версально* (так как при расширении набор начальных скоростей только увеличивается). Рассмотрим теперь цепочку подпространств $\mathbb{R}^l \subset \mathbb{R}^{l+1} \subset \ldots \subset \mathbb{R}^{l+l'}$, начинающуюся с базы деформации F и кончающуюся базой деформации $\hat{F}$. Сужения деформации $\hat{F}$ на эти подпространства инфинитезимально устойчивы. Последовательно применяя лемму о редукции, мы убеждаемся, что деформация $\hat{F}$ эквивалентна индуцированной из F. Но деформация F' индуцирована из $\hat{F}$. Поэтому деформация F' также эквивалентна индуцированной из F, на чем доказательство теоремы версальности и заканчивается.

8.4. Замечания к теореме версальности.

Замечание 1. В RL-случае вместо $(*)$ п. 8.3 приходится искать разложение вида

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) + K(\Phi, \lambda, u) + \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \Xi(\lambda, u). \qquad (**)$$

Мы начинаем с разложения инфинитезимальной версальности

$$\alpha(x) = \frac{\partial f}{\partial x} h(x) + k(f(x)) + \sum \dot{F}_i \xi_i.$$

Из этого разложения получаем

$$\alpha(x, \lambda, u) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} h(x) + k(\Phi(x, \lambda, u)) + \\ + \sum \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \xi_i + \left[u\alpha_0(x, \lambda, u) + \sum \lambda_i \alpha_i(x, \lambda, u) \right].$$

Подставляя такие же разложения α_0 и α_i в эту формулу, повышаем порядок остаточного члена по u и λ, причем $h(x)$ превращается в $H(x, \lambda, u)$, $k(y)$ — в $K(y, \lambda, u)$ и ξ — в $\Xi(\lambda, u)$.

[Подготовительная теорема применяется здесь к $\boldsymbol{A}_{y,\lambda,u}$-модулю $(\boldsymbol{A}_{x,\lambda,u})^n \Big/ \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial x} H(x, \lambda, u) + K(\Phi(x, \lambda, u), \lambda, u) \right\}$, отображению $(y, \lambda, u) \mapsto$ $\mapsto (\lambda, u)$ и образующим $\partial\Phi/\partial\lambda_i$.]

Замечание 2. Если рассматриваемый росток f инфинитезимально устойчив, то в качестве его версальной деформации можно взять 0-параметрическую деформацию, состоящую из одного этого ростка. Таким образом, теорема версальности утверждает, что *всякая деформация инфинитезимально устойчивого ростка тривиальна*; продеформированное отображение имеет в подходящей точке росток, эквивалентный исходному.

К сожалению, из этого свойства *деформационной устойчивости* (тривиальности всех деформаций) нелегко вывести настоящую устойчивость.

Пусть $\{f_t\}$ — гладкое семейство, соединяющее отображение f_0 и близкое отображение f_1. Если росток f_0 в нуле деформационно устойчив, то при малых t отображение f_t имеет в подходящей близкой к 0 точке росток, эквивалентный ростку f_0 в нуле. Однако даже если f_1 близко к f_0, не очевидно, что такое свойство отображений f_t сохраняется вплоть до $t = 1$. В действительности деформационная, инфинитезимальная и обычная устойчивости эквивалентны: мы только что доказали ИУ $\Rightarrow$ ДУ, а в § 7 доказано ИУ $\Rightarrow$ У. Обратное доказывается легче, но практически бесполезно (ибо как бы мы узнали, что росток устойчив?).

З а м е ч а н и е 3. Подобно тому как деформационная устойчивость эквивалентна устойчивости, версальность деформации эквивалентна более сильному свойству *устойчивости деформации*: для всякого представителя $F\colon (U, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ ростка F существует такая окрестность E этого представителя в пространстве гладких отображений области U, что для любого отображения $F'\colon U \to \mathbb{R}^n$ из E существует такая точка $0'$, что росток F' в $0'$ определяет эквивалентную ростку F в 0 деформацию ростка f', эквивалентного f.

Более того, если отображение F' в U достаточно близко к F, то точку $0'$ можно найти сколь угодно близко к 0, а эквивалентность сделать сколь угодно близкой к тождественной.

Доказательство устойчивости версальной деформации аналогично доказательству теоремы устойчивости (§ 7): нужно лишь заметить, что версальность семейства эквивалентна трансверсальности орбите в подходящем пространстве струй.

8.5. Единственность версальной деформации.

Т е о р е м а. *Любая l-параметрическая версальная деформация ростка f эквивалентна деформации, индуцированной из любой другой версальной деформации с l параметрами при диффеоморфном отображении баз.*

Докажем это для случая V-версальности, который потребуется дальше.

Пусть l — минимальная размерность базы V-версальной деформации, т. е. размерность линейного пространства

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{A}_x)^n \Big/ \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_i}, f_i e_j \right\}.$$

Обозначим проекцию пространства вариаций $(\boldsymbol{A}_x)^n$ на $\boldsymbol{T}$ через π.

Для версальности l-параметрической деформации F необходимо и достаточно, чтобы l векторов $\pi \dot{F}_i$ порождали $\boldsymbol{T}$.

Любая деформация F' ростка f эквивалентна индуцированной из версальной, т. е. записывается в виде

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda)F(g(x, \lambda), \varphi(\lambda)),$$
$$g(x, 0) \equiv x, \quad \varphi(0) = 0, \quad M(x, 0)f(x) \equiv f(x).$$

Дифференцируя по λ_i в нуле, получаем

$$\dot{F}'_i = \dot{M}_i f + M(x, 0)\frac{\partial f}{\partial x}\dot{g}_i + M(x, 0)\frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big|_0 \dot{\varphi}_i \qquad \left(\dot{z}_i = \frac{\partial z}{\partial \lambda_i}\Big|_{\lambda=0}\right).$$

Заметим, что, поскольку $F'(x, 0) \equiv F(x, 0) \equiv f(x)$, мы имеем

$$\frac{\partial M(x, 0)}{\partial x_i} f + M(x, 0)\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

и, следовательно, $M(x, 0)\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ принадлежит $\boldsymbol{A}_x$-модулю $\{\partial f/\partial x, f_i e_j\}$.

Итак,

$$\pi\dot{F}'_i = \pi\left(M(x, 0)\frac{\partial F}{\partial \lambda}\Big|_0 \dot{\varphi}_i\right).$$

Если бы l векторов $\dot{\varphi}_i$ были зависимы, то l векторов $\pi\dot{F}'_i$ также были бы зависимы, вопреки версальности деформации F'. Итак, φ — диффеоморфизм. Это доказывает наше утверждение для миниверсальных деформаций.

Если число параметров деформации F' больше минимального, то наше рассуждение показывает, что деформация F' эквивалентна индуцированной из l-параметрической миниверсальной деформации при отображении баз, имеющем ранг l.

Все получающиеся таким способом деформации F' с фиксированным числом параметров очевидно переводятся друг в друга диффеоморфизмами базы и эквивалентностями.

8.6. Деформации эквивалентных ростков.

Теорема. *Версальные деформации F и F' V-эквивалентных ростков f, $f'\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ с одинаковым числом параметров l V-эквивалентны в следующем смысле: существуют такой росток диффеоморфизма $H\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, 0) \to (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l, 0)$ вида $(x, \lambda) \mapsto$ $\mapsto (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$ и такой росток обратимой матрицы $M\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^l \to$ $\to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ в точке 0, что*

$$F'(x, \lambda) \equiv M(x, \lambda)F(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)).$$

Доказательство. По условию $f'(x) \equiv M(x)f(g(x))$. Применив то же «преобразование (M, g)» к версальной деформации F ростка f, мы получим l-параметрическую деформацию F'' ростка f', а именно $F''(x, \lambda) \equiv$ $\equiv M(x)F(g(x), \lambda)$. Деформация F'' ростка f' версальна, так как деформация F ростка f версальна (ибо преобразование (M, g) переводит дефор-

мации ростка f, эквивалентные индуцированным из F, в деформации ростка f', эквивалентные индуцированным из F'') *). По теореме п. 8.5 деформация F' эквивалентна индуцированной диффеоморфизмом из F'': $F'(x, \lambda) = M'(x, \lambda)F''(g'(x, \lambda), \varphi(\lambda))$. Подставляя вместо F'' ее определение, получаем искомое разложение.

§ 9. Классификация устойчивых ростков по генотипам

Здесь доказана теорема Мазера, сводящая классификацию RL-устойчивых ростков к V-классификации ростков отображений пространств меньшей размерности (ср. [391]).

9.1. *V*-эквивалентные *RL*-устойчивые ростки *RL*-эквивалентны. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток гладкого отображения.

Рассмотрим следующую n-параметрическую деформацию ростка f:

$$F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Множество нулей этой деформации (т. е. $F^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$) есть график ростка f. Очевидна следующая теорема.

Т е о р е м а. *Деформация F является V-версальной, если и только если росток f RL-устойчив.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условие (инфинитезимальной) RL-устойчивости ростка f состоит в существовании для всякой вариации α ростка f разложения (см. § 7)

$$\alpha(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} h(x) + \sum f_i(x)k_i(x) + \sum c_i e_i,$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — базис $\mathbb{R}^n$. Но начальные скорости деформации F равны как раз e_i, поэтому условие (инфинитезимальной) V-версальности деформации F ростка f состоит в существования ровно такого же разложения (п. 8.2). Теорема доказана.

Т е о р е м а. *Пусть f и f': $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — RL-устойчивые V-эквивалентные ростки. Тогда f и f' RL-эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Составим версальные деформации $F(x, \lambda) \equiv f(x) - \lambda$, $F'(x, \lambda) \equiv f'(x) - \lambda$. Согласно теореме п. 8.6 существует локальный диффеоморфизм H пространства $\{(x, \lambda)\}$, содержащего график ростка f, на пространство, содержащее график ростка f', расслоенный над пространством значений $\mathbb{R}^n$ (т. е. переводящий семейство плоскостей $\lambda = \text{const}$ в то же семейство плоскостей) и переводящий график ростка f в график ростка f'. Этот диффеоморфизм H и задает диффеоморфизмы пространств-прообразов и пространств-образов, превращающие f в f'

*) Отсюда, между прочим, видно, что размерности баз миниверсальных деформаций V-эквивалентных ростков одинаковы.

(диффеоморфизм пространств-прообразов получается из диффеоморфизма графиков при замене точек графиков $(x, f(x))$ и $(x', f'(x'))$ их проекциями x и x' соответственно).

9.2. Классификация устойчивых ростков по их идеалам. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток гладкого отображения. Локальная $\mathbb{R}$-алгебра $Q(f)$ отображения f определяется точной последовательностью

$$0 \longrightarrow I_f \longrightarrow \boldsymbol{A}_x \longrightarrow Q(f) \longrightarrow 0, \tag{1}$$

где I_f — идеал, заданный компонентами f в алгебре ростков функций (или рядов) от x.

Если f' — V-эквивалентный f росток, то соответствующие f и f' точные последовательности эквивалентны, т. е. существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I_f & \longrightarrow & \boldsymbol{A}_x & \longrightarrow & Q(f) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & I_{f'} & \longrightarrow & \boldsymbol{A}_x & \longrightarrow & Q(f') \longrightarrow 0, \end{array} \tag{2}$$

в которой вертикальные стрелки — изоморфизмы $\mathbb{R}$-алгебр. Результаты п. 9.1 можно сформулировать так.

Т е о р е м а. *RL-класс RL-устойчивого ростка f однозначно определяется идеалом I_f, рассматриваемым с точностью до эквивалентностей* (2) *последовательностей* (1).

З а м е ч а н и е. Поскольку устойчивый росток $(n+1)$-определен, он определяется даже классом $I_f \bmod \mathfrak{m}_x^{n+2}$. Это усиление существенно при $m > n$, так как в этом случае $\mathbb{R}$-пространство $Q(f)$ бесконечномерно, а $Q_{n+1}(f) = \boldsymbol{A}_x/(I_f + \mathfrak{m}_x^{n+2})$ конечномерно. Можно также доказать, что устойчивый росток f определяется идеалом $I_f \bmod \mathfrak{m}_x^{r+3}$, где r — ранг дифференциала ростка f в нуле. Более того, класс RL-эквивалентности RL-устойчивого ростка $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ определяется числами m, n и самой конечномерной локальной $\mathbb{R}$-алгеброй $Q_{r+2}(f)$, рассматриваемой с точностью до изоморфизма $\mathbb{R}$-алгебр, а не только с точностью до эквивалентностей (2). Доказательство см., например, в [391], [390].

9.3. Построение устойчивых ростков. Возникает вопрос: всякая ли конечномерная локальная $\mathbb{R}$-алгебра Q встретится в качестве $Q_{n+1}(f)$ для некоторого устойчивого ростка f? Ответ на этот вопрос положительный.

Пусть $\varphi\colon (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$ — росток гладкого отображения с конечномерной V-версальной деформацией *). Таким образом, мы предполагаем,

*) s — от «source» (источник), t — от «target» (цель).

что факторпространство

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_x^t \Big/ \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x},\, \varphi_i e_j \right\}$$

конечномерно. Пусть еще производная ростка φ в нуле равна нулю. В этом случае в качестве базиса факторпространства $\boldsymbol{T}$ можно взять t образов базисных векторов e_j и еще r образов конечного числа «столбиков» $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, обращающихся в 0 в нуле (в качестве α_i всегда можно взять даже столбики-одночлены).

О п р е д е л е н и е. *Надстроенным ростком для* φ называется росток отображения $f\colon (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r, 0) \to (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^r, 0)$, $(x, \lambda) \mapsto (y, z)$, определенный формулами

$$\begin{cases} y = \varphi(x) + \sum\limits_{p=1}^{r} \lambda_p \alpha_p(x), \\ z = \lambda. \end{cases} \tag{3}$$

Росток φ называется *генотипом* надстроенного ростка.

П р и м е р. Пусть $s = t = 1$, генотип $\varphi(x) \equiv x^3$. Факторпространство $\mathbb{R}[[x]]/\{3x^2, x^3\}$ порождается образами столбиков единичной высоты $e_1 = 1$, $\alpha_1 = x$. Следовательно, надстроенный росток задается формулами $y = x^3 + \lambda x$, $z = \lambda$. Итак, *надстраивая генотип* x^3 *в нуле, мы получили росток отображения Уитни в точке сборки*.

З а д а ч а. Надстроить генотипы $\varphi_\pm\colon (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}^2, 0)$, где $\varphi_1 = x_1^2 \pm x_2^2$, $\varphi_2 = x_1 x_2$.

Т е о р е м а. *Надстроенный росток устойчив, а его локальная* $\mathbb{R}$*-алгебра изоморфна* $\mathbb{R}$*-алгебре генотипа*: $Q(f) \cong Q(\varphi)$, $Q_k(f) \cong \cong Q_k(\varphi)$.

9.4. Доказательство теоремы о надстроенном ростке. Вычисляя $\mathbb{R}$-алгебру $Q(f)$, находим

$$\mathbb{R}[[x, \lambda]] \Big/ \left\{ \varphi_i + \sum \lambda_k \alpha_{k,i},\, \lambda_p \right\} \cong \mathbb{R}[[x]]/\{\varphi_i\}.$$

Докажем теперь V-инфинитезимальную устойчивость f. Мы должны решить для каждого столбика вариаций $(\delta y, \delta z)$ высоты $t + r$ из функций от x и λ уравнение

$$\begin{pmatrix} \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial(\varphi + \sum \lambda_k \alpha_k)/\partial x & \alpha \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \sum_i \left(\varphi_i + \sum \lambda_k \alpha_{k,i} \right) \begin{pmatrix} g_{i,1} \\ g_{i,2} \end{pmatrix} + \\ + \sum_p \lambda_p \begin{pmatrix} \tilde{g}_{p,1} \\ \tilde{g}_{p,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

относительно столбиков h, g_i, $\tilde{g}_p$ из функций от x и λ и числового столбика c.

Все члены, содержащие λ, можно уничтожить выбором $\tilde{g}$. Поэтому достаточно решить для каждого столбика вариаций $(\delta y, \delta z)$, зависящего лишь от x, уравнение

$$\begin{pmatrix}\delta y\\ \delta z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(\partial\varphi/\partial x) & \alpha\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} + \sum_i \varphi_i \begin{pmatrix}g_{i,1}\\ g_{i,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

относительно столбиков h, g_i из функций от x и числового столбика c. Это уравнение запишем в виде системы

$$\begin{cases}\delta y = (\partial\varphi/\partial x)h_1 + \alpha h_2 + \sum_i \varphi_i g_{i,1} + c_1,\\ \\ \delta z = h_2 + \sum_i \varphi_i g_{i,2} + c_2.\end{cases}$$

Подставляя найденное из второго уравнения h_2 в первое уравнение, получаем уравнение относительно h_1, g_i и c:

$$\delta y - \alpha\,\delta z = (\partial\varphi/\partial x)h_1 + \sum_i \varphi_i(g_{i,1} - \alpha g_{i,2}) + (c_1 - \alpha c_2).$$

Положим $g_{i,2} = 0$. Заметим, что столбик c_1 — это общая числовая линейная комбинация t базисных векторов e_k, а столбик αc_2 — общая числовая линейная комбинация r выбранных нами столбиков α_p. Но образы всех e_k и α_p порождают $\boldsymbol{T}$. Это означает разрешимость уравнений вида $\beta = (\partial\varphi/\partial x)h_1 + \sum \varphi_i g_i + (c_1 - \alpha c_2)$ относительно h, g_i и c. Итак, наше уравнение разрешимо. Следовательно, росток f V-инфинитезимально устойчив, а значит, и устойчив (§ 7).

9.5. Предварительная нормальная форма. Пусть $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ — росток гладкого отображения и r — ранг дифференциала ростка f в нуле. Обозначим коранги в прообразе и в образе через $s = m - r$, $t = n - r$.

Предложение. *Координаты в прообразе и в образе можно выбрать так, что отображение f запишется формулами*

$$\begin{cases} y = \varphi(x, \lambda), & (x, \lambda) \in (\mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^m),\\ z = \lambda, & (y, z) \in (\mathbb{R}^t \times \mathbb{R}^r = \mathbb{R}^n),\end{cases} \tag{4}$$

где φ по меньшей мере второго порядка малости в нуле: $\varphi(0, 0) = 0$, $d\varphi(0, 0) = 0$.

Замечание. Иными словами, отображение ненулевого ранга f локально можно представить в виде семейства отображений пространств

меньших размерностей; размерность пространства параметров равна рангу, а размерности упомянутых пространств меньших размерностей равны корангам. Говорят также, что росток отображения f является *разверткой* ростка отображения $\mathring{\varphi}\colon (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$, $\mathring{\varphi}(x) = \varphi(x, 0)$; $\mathring{\varphi}$ называется *генотипом* ростка f.

Доказательство. Предложение вытекает из теоремы о неявной функции. Действительно, образ дифференциала f в 0 — это r-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$. Пусть $z_1, \ldots, z_r$ — функции в $\mathbb{R}^n$, определяющие систему координат в этом подпространстве. Отображение f переносит функции z_k в пространство-прообраз $\mathbb{R}^m$; обозначим перенесенные функции через $\lambda_k = f^* z_k$. Дифференциалы этих r функций в 0 независимы. Поэтому их можно дополнить до системы координат в прообразе, выбрав еще s координат x_i. Функции z_k можно дополнить до системы координат в $\mathbb{R}^n$, выбрав координаты y_j так, чтобы их дифференциалы в нуле обращались в нуль на образе дифференциала f. Полученная система координат обладает всеми нужными свойствами.

Теорема (об устойчивости предварительной нормальной формы). *Росток отображения* (4) *в нуле RL-устойчив, если и только если образы базисных векторов* $e_j = \partial/\partial y_j$ *и* r *столбиков* $\dot{\varphi}_k = \partial\varphi/\partial\lambda_k|_{\lambda=0}$ *порождают линейное пространство* $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}_x^t \Big/ \left\{ \dfrac{\partial \mathring{\varphi}}{\partial x}, \mathring{\varphi}_i e_j \right\}$, *определенное по генотипу* $\mathring{\varphi}(x) \equiv \varphi(x, 0)$.

Формула (4) является обобщением на нелинейные деформации формулы (3), в которой зависимость от параметров λ предполагалась линейной. Устойчивость ростка отображения (4) исследуется таким же образом, как устойчивость надстроенного ростка.

Доказательство не отличается от доказательства теоремы об устойчивости надстроенного ростка (п. 9.4).

Определение. *Тривиальным p-параметрическим расширением ростка* $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ называется росток отображения

$$F\colon (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p, 0) \to (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, 0), \quad F(x, u) \equiv (f(x), u).$$

Очевидно, при тривиальном расширении устойчивость сохраняется, т. е. не исчезает и не появляется,

Теорема. *RL-устойчивый росток* (4) *RL-эквивалентен надстройке над своим генотипом* $\mathring{\varphi}$ *либо ее тривиальному расширению* (*если* $r + t > \dim \boldsymbol{T}$, *то расширение* $r + t$ — $\dim \boldsymbol{T}$*-параметрическое*).

Доказательство. Действительно, росток расширенной надстройки RL-устойчив по теоремам п. 9.3, 9.5. Он V-эквивалентен ростку (4), так как оба определяют совпадающие идеалы: $I_{\varphi,\lambda} = I_{\mathring{\varphi},\lambda}$. По теореме п. 9.1 эти ростки RL-эквивалентны.

Доказанная теорема сводит отыскание нормальных форм устойчивых ростков $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ к гораздо более легкой задаче V-классификации их генотипов, т. е. ростков отображений пространств меньших размерностей.

Действительно, при замене генотипа $\mathring{\varphi}$ V-эквивалентным ростком RL-класс надстройки не меняется (по теоремам п. 9.1 и п. 9.3). Обратно, если надстройки RL-эквивалентны, то они V-эквивалентны и, следовательно, соответствующие генотипы V-эквивалентны.

9.6. Устойчивые ростки коранга 1.

Теорема (Морен [403]). *Устойчивый росток* $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, *коранг которого равен* 1, *RL-эквивалентен тривиальному расширению ростка обобщенной сборки Уитни*:

$$\begin{cases} y = x^k + \lambda_1 x^{k-2} + \ldots + \lambda_{k-2} x, \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (k \leqslant n+1).$$

Доказательство. В этом случае генотип $\mathring{\varphi}$ — функция одной переменной. Пусть k — ее порядок в нуле. Тогда $\mathring{\varphi}$ легко привести к виду x^k. По предыдущей теореме росток f эквивалентен (тривиально расширенному) ростку надстройки над x^k. Отсюда следует и неравенство $k \leqslant n+1$, и вся доказываемая теорема.

Теорема (Морен [403]). *Устойчивый росток* $f\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ *коранга* 1 *в прообразе RL-эквивалентен тривиальному расширению ростка обобщенного зонтика Уитни*:

$$\begin{cases} y_1 = x^k + 0 + \lambda_{1,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{1,k-1} x, \\ y_2 = \lambda_{2,1} x^{k-1} + \lambda_{2,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{2,k-1} x, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_t = \lambda_{t,1} x^{k-1} + \lambda_{t,2} x^{k-2} + \ldots + \lambda_{t,k-1} x, \\ z = \lambda, \end{cases} \qquad t(k-1) \leqslant m.$$

Замечание. В условиях теоремы $m \leqslant n$, $r = m-1$, $t = n-r = n = m+1$.

Пример. Пусть $m = 2$, $n = 3$. В этом случае $r = 1$, $t = 2$, следовательно, $k = 2$. Получаем $y_1 = x^2$, $y_2 = \lambda x$, $z = \lambda$, т. е. обычный зонтик (ср. рис. 19).

Доказательство. В этом случае генотип $\mathring{\varphi}\colon (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}^t, 0)$ — пространственная кривая. Обозначим через k порядок генотипа $\mathring{\varphi}$ в нуле. Первый ненулевой член ряда Тейлора генотипа $\mathring{\varphi}$ в нуле имеет вид $x^k e$, $e \neq 0$. Направим ось y_1 в $\mathbb{R}^t$ вдоль e. Уравнения генотипа $\mathring{\varphi}$ запишутся в виде $y_1 = x^k(1 + \ldots)$, $y_i = x^{k+1} c_i$ $(i \geqslant 2)$. Такой генотип $\mathring{\varphi}$ V-эквивалентен гено-

типу $y_1 = x^k$, $y_2 = \ldots = y_t = 0$. Надстроим этот генотип. Модуль $\left\{\frac{\partial \mathring{\varphi}}{\partial x}, \mathring{\varphi}_i e_j\right\}$ порожден столбиками $(x^{k-1}e_1, x^k e_2, \ldots, x^k e_t)$. Следовательно, базис пространства $\boldsymbol{T}$ образуют проекции в $\boldsymbol{T}$ столбиков

$$e_1, xe_1, \ldots, x^{k-2}e_1; \quad e_2, xe_2, \ldots, x^{k-1}e_2; \quad \ldots; \quad e_t, xe_t, \ldots, x^{k-1}e_t.$$

Это и приводит к выписанным в теореме формулам надстроенного отображения.

Число столбиков, дополнительных к базисным столбикам $(e_1, \ldots, e_n)$, равно $t(k-1)-1$. Поэтому ранг надстроенного отображения равен $t(k-1)-1$. Размерность прообраза m на единицу больше ранга. Следовательно, для устойчивости необходимо, чтобы выполнялось неравенство $m \geqslant t(k-1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь устойчивые отображения коранга 1 в образе ($t = 1$). В этом случае генотип $\mathring{\varphi}\colon (\mathbb{R}^s, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ — функция $s = m - n + 1$ переменных.

Т е о р е м а (Морен [403]). *Предположим, что генотип — функция s переменных, коранг второго дифференциала которой в нуле равен* 1. *Всякий устойчивый росток $(\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ с таким генотипом RL-эквивалентен тривиальному расширению ростка следующей комбинации особенностей Уитни и Морса*:

$$\begin{cases} y = x_1^k + \lambda_1 x_1^{k-2} + \ldots + \lambda_{k-2} x_1 \pm x_2^2 \pm x_3^2 \pm \ldots \pm x_s^2, \\ z = \lambda \end{cases} \qquad (k \leqslant n+1).$$

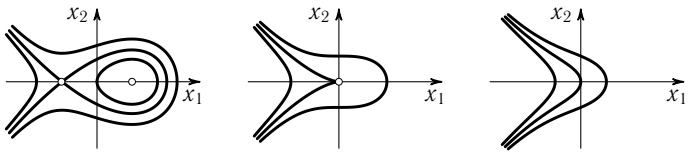


Рис. 45

П р и м е р. Пусть $m = 3$, $n = 2$. В этом случае $s = 2$, $k = 2$ или 3. Соответствующие нормальные формы имеют вид

$$y = x_1^2 \pm x_2^2, \quad z = \lambda \ (k=2) \quad \text{и} \quad y = x_1^3 + \lambda x_1 \pm x_2^2, \quad z = \lambda \ (k=3).$$

Эти нормальные формы можно рассматривать как задающие перестройки семейств линий уровня функции $y(x_1, x_2)$ при изменении параметра λ. Перестройка для случая $k = 3$ изображена на рис. 45.

Доказательство. Легко доказывается следующий результат.

Лемма. *Генотип в условиях теоремы V-эквивалентен нормальной форме*

$$y = x_1^k \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2.$$

Доказательство леммы. Выберем координаты в прообразе так, чтобы привести к каноническому виду второй дифференциал генотипа. Получим

$$\mathring{\varphi} = \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2 + O(|x|^3).$$

Сужение $\mathring{\varphi}$ на $x_1 = 0$ имеет невырожденную критическую точку 0. По лемме Морса (п. 6.2, с. 100) координаты можно выбрать так, что сужение будет равно $\pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2$. Функцию $\mathring{\varphi}$ можно рассматривать как деформацию этой морсовской функции с параметром x_1. R-версальная деформация морсовской функции f имеет вид $f + \lambda$ (λ — константа) *). Следовательно, генотип R-эквивалентен функции $\pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_s^2 + \psi(x_1)$. Обозначим через k порядок функции ψ в нуле. Функция ψ R-эквивалентна $\pm x_1^k$, откуда и следует утверждение леммы.

Надстраивая полученную нормальную форму генотипа, получаем приведенные в теореме формулы.

Замечание. Символы Боардмана найденных в предыдущих трех теоремах ростков имеют вид $(1, \ldots, 1)$ для двух первых теорем и $(m - n + 1, 1, \ldots, 1)$ для последней. Условие устойчивости в этих случаях совпадает с условием трансверсальности к соответствующему страту Боардмана (см., например, работы Морена [403]). Поэтому для указанных стратов Боардмана трансверсальные стратам ростки устойчивы. Из формулы произведения корангов (п. 2.1, с. 29) видно, что для общих отображений $(M^m, 0) \to (N^n, 0)$ с m, $n \leqslant 3$ никакие другие страты Боардмана не встречаются. Поэтому доказанные теоремы дают, в частности, классификацию всех ростков отображений общего положения в размерностях, меньших четырех. При $m = n = 4$ появляются еще ростки коранга 2 с символом Боардмана $(2, 0)$.

9.7. Устойчивые ростки отображений четырехмерных пространств.

Теорема. *Устойчивый росток* $f\colon (\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$ *эквивалентен либо ростку обобщенной сборки Уитни* (*быть может*, *тривиально*

*) Это утверждение, называемое «параметрической леммой Морса», нетрудно доказать непосредственно, не пользуясь теоремой версальности, а повторяя доказательство леммы Морса.

расширенному), *либо одному из следующих двух ростков*:

$$\begin{cases} y_1 = x_1^2 \pm x_2^2, \\ y_2 = x_1x_2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \\ z_1 = \lambda_1, \\ z_2 = \lambda_2. \end{cases}$$

Доказательство. Случай коранга 0 тривиален, случай коранга 1 разобран в п. 9.6. Если коранг равен 2, то генотип — отображение плоскости на плоскость. Рассмотрим квадратичную часть генотипа. Это — пара квадратичных форм на плоскости.

Лемма 1. *В условиях теоремы квадратичная часть генотипа приводится V-эквивалентностью к виду*

$$y_1 = x_1^2 \pm x_2^2, \quad y_2 = x_1x_2. \tag{1}$$

Доказательство. Линейными заменами x и y приводим общее линейное семейство квадратичных форм на плоскости к виду

$$c_1(x_1^2 \pm x_2^2) + c_2x_1x_2.$$

Многообразие 1-струй ростков коранга 2 имеет в случае четырехмерных пространств коразмерность 4. Поэтому многообразие струй ростков коранга 2, у которых квадратичная часть генотипа (т. е. квадратичный дифференциал ростка) задает необщее линейное семейство форм, имеет коразмерность больше 4. Следовательно, орбита такого ростка имеет коразмерность больше 4, и росток не может быть устойчивым (см. п. 7.2, с. 116) *).

Лемма 2. *Указанные в теореме два ростка RL-устойчивы.*

Вычислим прежде всего $\mathbb{R}$-алгебру Q генотипа (1). Вычисления удобно проводить при помощи диаграммы Ньютона (рис. 46). На этой диаграмме моном $x_1^{p_1}x_2^{p_2}$ изображается точкой (p_1, p_2). Рассмотрим идеал, порожденный компонентами генотипа. В этот идеал входят все мономы, делящиеся на x_1x_2. Соответствующие точки на диаграмме образуют заштрихованный квадрант с вершиной $(1, 1)$. Образующей $x_1^2 \pm x_2^2$ соответствует отрезок $(2, 0)$—$(0, 2)$ на диаграмме. Концы этого отрезка и любого параллельного ему отрезка с вершинами в целых точках ($p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0$) соответствуют мономам, пропорциональным по модулю идеала. Перемещая отрезок по диаграмме так, чтобы

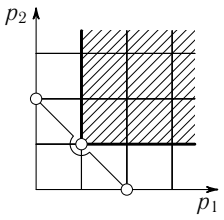


Рис. 46

*) Более того, по теореме трансверсальности отображение общего положения между четырехмерными многообразиями не может иметь ростков, определяющих необщее семейство квадратичных форм.

один конец попадал в заштрихованный квадрант, мы убеждаемся, что идеалу принадлежат все мономы степени 3 и выше.

Окончательно, коразмерность идеала $\{x_1^2 \pm x_2^2, x_1x_2\} = I$ в $\boldsymbol{A}_x$ равна 4; $\mathbb{R}$-базис в Q образуют, например, классы четырех мономов: $1, x_1, x_2, x_1^2$.

Теперь рассмотрим подмодуль $M = \left\{\frac{\partial\mathring{\varphi}}{\partial x_i}, \mathring{\varphi}_i e_j\right\}$ в $(\boldsymbol{A}_x)^2$. Чтобы указать $\mathbb{R}$-базис в $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{A}_x)^2 \Big/ \left\{\frac{\partial\mathring{\varphi}}{\partial x_i}, \mathring{\varphi}_i e_j\right\}$, достаточно указать $\mathbb{R}$-базис в $Q^2 \Big/ \left\{p\frac{\partial\mathring{\varphi}}{\partial x_i}\right\}$, где $p\colon (\boldsymbol{A}_x)^2 \to Q^2$ — естественная проекция. Искомый базис образуют, например, проекции столбиков e_1, e_2, x_1e_2, x_2e_2.

Действительно, рассмотрим $\mathbb{R}$-базис в Q^2, образованный проекциями восьми столбиков m_ie_j ($m_i = 1, x_1, x_2, x_1^2$). Столбики $\partial\mathring{\varphi}/\partial x_i$ — это $(2x_1, x_2)$ и $(\pm 2x_2, x_1)$. Выражая m_ie_j через функциональные комбинации $\{\partial\mathring{\varphi}/\partial x_i\}$ и числовые комбинации e_1, e_2, x_1e_2, x_2e_2 (все над Q), мы без труда находим

$$x_1e_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x_1\\ x_2\end{pmatrix} + \frac{x_2e_2}{2}, \qquad x_2e_1 = \mp\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2x_2\\ x_1\end{pmatrix} - \frac{x_1e_2}{2},$$

$$x_2^2e_1 \equiv \frac{x_1}{2}\begin{pmatrix}2x_1\\ x_2\end{pmatrix} \bmod I^2, \qquad x_1e_2 \equiv x_1\begin{pmatrix}\pm 2x_2\\ x_1\end{pmatrix} \bmod I^2.$$

Независимость e_1, e_2, x_1e_2 и x_2e_2 в $\boldsymbol{T}$ очевидна (например, она следует из того, что $\operatorname{codim}\Sigma^2(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4) = 4$).

Итак, указанные в теореме ростки являются надстройками над генотипами (1) и, следовательно, устойчивы.

Л е м м а 3. *Росток в нуле всякого отображения плоскости на плоскость, имеющего квадратичную часть* (1), *V-эквивалентен ростку отображения* (1) *в нуле.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве леммы 2 мы убедились, что все мономы третьей степени принадлежат идеалу, порожденному $x_1^2 \pm x_2^2$, x_1x_2. Отсюда следует, что для всякого ростка ψ с квадратичной частью φ вида (1) существует разложение $\psi \equiv (E + A(x))\varphi$, где элементы матрицы A в нуле равны нулю.

Следовательно, ψ и φ V-эквивалентны, что и требовалось.

Теорема вытекает из лемм 1, 2, 3 и общей теории (п. 9.5).

З а м е ч а н и е. Попутно мы доказали, что всякое отображение четырехмерных многообразий аппроксимируется отображениями, ростки которых в любой точке устойчивы.

Действительно, многообразие струй ростков коранга 2 отображений $M^4 \to N^4$, генотип которых определяет необщее семейство квадратичных форм [или для которых начальные скорости вариаций генотипа не по-

рождают (вместе с e_1 и e_2) базиса в $\boldsymbol{T}$], имеет коразмерность, большую 4 (так как уже коразмерность Σ^2 без дополнительных вырождений равна 4).

Пример. Рассмотрим росток отображения $(\mathbb{R}^4, 0) \to (\mathbb{R}^4, 0)$:

$$y_1 = x_1^2 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad z_1 = \lambda_1, \quad z_2 = \lambda_2.$$

Особенность в нуле имеет символ Боардмана $(2, 0)$, и 1-струйное расширение трансверсально страту Боардмана $\Sigma^{2,0}$ в 0. Тем не менее этот росток неустойчив. Причина такого отличия от случая особенностей Σ^{1_k} в том, что в классе $\Sigma^{2,0}$ встречаются орбиты положительной коразмерности в нем.

9.8. Простые генотипы с $s \geqslant t$. Росток $f\colon (\mathbb{C}^s, 0) \to (\mathbb{C}^t, 0)$ называется *V-простым* или *простым генотипом*, если его k-струя при любом k имеет в малом пространстве струй $J^k_{0,0}(\mathbb{C}^s, \mathbb{C}^t)$ окрестность, пересекающуюся лишь с конечным числом классов V-эквивалентности (ограниченным не зависящей от k постоянной). Иным словами, V-простые ростки — это генотипы, в нормальных формах которых устойчиво нет модулей. *V-простые ростки с $s \geqslant t$ исчерпываются, с точностью до V-эквивалентности и тривиальных расширений, следующими тремя списками* (cod обозначает коразмерность класса V-эквивалентности в малом пространстве струй, μ — кратность в смысле § 5).

1°. *Простые генотипы вида* $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^1$.

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	cod	$\mu(\operatorname{grad} f)$
A_μ	$x^{\mu+1} + Q$	$\mu \geqslant 1$	$\mu + s - 1$	μ
D_μ	$x^2 y + y^{\mu-1} + Q$	$\mu \geqslant 4$	$\mu + s - 1$	μ
E_6	$x^3 + y^4 + Q$	—	$5 + s$	6
E_7	$x^3 + xy^3 + Q$	—	$6 + s$	7
E_8	$x^3 + y^5 + Q$	—	$7 + s$	8

Здесь Q — невырожденная квадратичная форма от невыписанных переменных (числом $s - 1$ для A_μ, $s - 2$ — в остальных случаях).

2°. *Простые генотипы вида* $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	cod	$\mu(f)$
$I_{a,b}$	$xy, \quad x^a + y^b$	$a \geqslant b \geqslant 2$	$a + b$	$a + b$
I_{2a+1}	$x^2 + y^3, \quad y^a$	$a \geqslant 3$	$2a + 1$	$2a$
I_{2a+4}	$x^2 + y^3, \quad xy^a$	$a \geqslant 2$	$2a + 4$	$2a + 3$
$I^\sharp_{a+5}$	$x^2 + y^a, \quad xy^2$	$a \geqslant 4$	$a + 5$	$a + 4$
I^*_{10}	$x^2, \quad y^4$	—	10	8

3°. *Простые генотипы вида* $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$.

Обозначение	Нормальная форма		$\mathrm{cod} = \mu + 1$
S_μ	$x^2 + y^2 + z^{\mu-3}$,	yz	$\mu + 1$
T_7	$x^2 + y^2 + z^3$,	yz	8
T_8	$x^2 + y^2 + z^4$,	yz	9
T_9	$x^2 + y^2 + z^5$,	yz	10
U_7	$x^2 + yz$,	$xy + z^3$	8
U_8	$x^2 + yz$,	$xy + xz^2$	9
U_9	$x^2 + yz$,	$xy + z^4$	10
W_8	$x^2 + y^3$,	$y^2 + xz$	9
W_9	$x^2 + yz^2$,	$y^2 + xz$	10
Z_9	$x^2 + z^3$,	$y^2 + z^3$	10
Z_{10}	$x^2 + yz^2$,	$y^2 + z^3$	11

Эти обозначения введены М. Джусти ([326]—[328]).

Техника вычислений, приводящих к этим результатам (методы поворачивания линейки Ньютона и приведения полуквазиоднородных особенностей к нормальным формам), изложена в гл. II (там рассматривается R-эквивалентность, но методы легко приспосабливаются к V-случаю).

З а м е ч а н и е. Те же вычисления показывают, что все прочие генотипы с изолированной особенностью в 0 (для перечисленных s и t) примыкают *) к объединению V-классов, указанных в следующих трех списках. Эти классы называются *огораживающими для простых генотипов*. В графе cod указываются коразмерности классов (а не орбит) в малом пространстве струй, m означает число модулей.

1°. *Огораживающие генотипы вида* $\mathbb{C}^s \to \mathbb{C}^1$.

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	cod	$\mu(\mathrm{grad}\, f)$	m
P_8	$x^3 + y^3 + z^3 + axyz + Q$	$a^3 + 27 \neq 0$	$6 + s$	8	1
X_9	$x^4 + y^4 + ax^2y^2 + Q$	$a^2 \neq 4$	$7 + s$	9	1
J_{10}	$x^3 + y^6 + ax^2y^2 + Q$	$4a^3 + 27 \neq 0$	$8 + s$	10	1

Здесь Q — невырожденная квадратичная форма от $s - 3$ дополнительных переменных для P_8 и от $s - 2$ — для X_9 и J_{10}, a — параметр (модуль).

2°. *Огораживающие генотипы вида* $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$.

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	cod	$\mu(f)$	m
I_{11}^*	$x^2 + y^4$, $\quad xy^3 + ay^5$	—	11	10	1
I_{10}^*	x^2y, $\quad x^3 + axy^2 + y^3$	—	10	9	1

*) То есть могут быть превращены в отображения указанных V-классов сколь угодно малой деформацией.

3°. *Огораживающие генотипы вида* $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$.

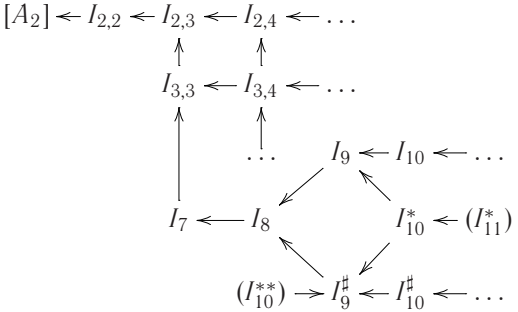
Обозначение и μ	Нормальная форма	Ограничения	cod	m
T^*_9	$xy,\quad x^4+y^4+z^2$	—	10	1
T^*_{10}	$xy,\quad x^3+y^6+z^2$	—	11	1
U^*_{11}	$x^2+yz,\quad xy+axz^3+z^5$	$4a^3\neq 27$	11	1
W^*_{11}	$x^2+yz,\quad y^2+ayz^2+z^4$	$a^2\neq 4$	11	1
Z^*_{11}	$x^2+z^3,\quad y^2+z^4$	—	12	1
Z^*_{13}	$x^2+yz^2+az^4,\quad y^2+xz^2+bz^4$	$\Delta\neq 0$	12	2
U^{**}_{10}	$xy+z^3,\quad xz+y^2z+ayz^2$	$4a^3+27\neq 0$	10	1
W^{**}_{13}	$xyz,\quad x^2+y^2+z^2+axy+byz+czx$	$\delta\neq 0$	11	3

Нормальные формы T^*_9, T^*_{10}, Z^*_{11} не имеют модулей, но эти особенности примыкают к $\{X_9\}$, $\{J_{10}\}$, $\{W^*_{11}\}$ соответственно и потому не просты; $\Delta = 27-288ab-256(a^3+b^3+a^2b^2)$, $\delta=(a^2-4)(b^2-4)(c^2-4)\times$ $\times(a^2+b^2+c^2-2abc)$.

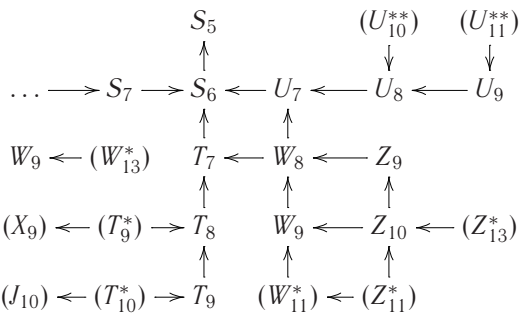
Важнейшие примыкания.

1°. *Генотипы вида* $\mathbb{C}^s\to\mathbb{C}^1$ — см. § 15.

2°. *Генотипы вида* $\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$:



3°. *Генотипы вида* $\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^2$:



На этих диаграммах огораживающие классы заключены в круглые скобки. Все огораживающие особенности квазиоднородны (см. гл. II). М. Джусти в [326], [327] приводит гипотетически полный список примыканий простых генотипов, пропуская $W_8 \to D_6$ и др.

§ 10. Обзор дальнейших результатов

В этом параграфе описан ряд обобщений теорем устойчивости и версальности: мы рассматриваем диаграммы отображений, отображения с компактной группой симметрии и локальную топологическую теорию особенностей.

10.1. Диаграммы отображений. В последнее время появилось много работ, переносящих результаты Мазера [160] об устойчивости особенностей дифференцируемых отображений на случаи действия различных бесконечномерных групп на различного вида функциональных объектах. Значительную часть таких задач можно описать на языке диаграмм отображений (см. [261], [308]).

Пусть D — некоторый конечный набор $M_1, \ldots, M_n$ гладких многообразий и отображений $f_k\colon M_{s(k)} \to M_{i(k)}$ этих многообразий, Через $i(k)$ и $s(k)$ мы обозначаем индексы многообразий образа и прообраза отображения f_k. Набору D (диаграмме отображений) сопоставим граф с вершинами M_j и стрелками, отвечающими f_k.

Две диаграммы D_1 и D_2 с изоморфными графами называются *эквивалентными*, если существует такой выбор диффеоморфизмов $\Theta_j\colon M_j^{(1)} \to M_j^{(2)}$, $j = 1, \ldots, n$, что для каждого $f_k^{(1)}$ выполняется равенство

$$f_k^{(1)} = \Theta_{i(k)} \circ f_k^{(1)} \circ \Theta_{s(k)}^{-1}.$$

В пространстве диаграмм с фиксированным графом введем подходящую топологию (открыто-компактную или топологию Уитни).

О п р е д е л е н и е. Диаграмма D называется *устойчивой*, если всякая близкая диаграмма D' эквивалентна D.

З а м е ч а н и е. Часто рассматривают подмножество диаграмм с фиксированным графом, отображения f_k которых имеют некоторый специальный вид. Диаграмму D назовем *устойчивой в классе диаграмм специального вида*, если всякая близкая диаграмма этого класса набором диффеоморфизмов Θ, сохраняющих структуру отображений f_k, приводится к диаграмме D.

Заменяя многообразия и отображения их ростками в соответствующих точках, получим локальные определения устойчивости. Будем рассматривать бесконечно дифференцируемые, аналитические и формальные локальные диаграммы.

Примеры. 1. В случае диаграммы $M \xrightarrow{f} N$ получаем определение устойчивости гладкого отображения под действием произведения групп диффеоморфизмов M и N (см. Мазер [160]).

2. Рассмотрим диаграмму $\mathbb{R}^n \times M_1 \xrightarrow{\hat{F}} \mathbb{R}^n \times M_2 \xrightarrow{p} \mathbb{R}^n$, где p — проекция и $\hat{F}$ имеет специальный вид: $\hat{F}(u, x) = (u, F(u, x)) \in \mathbb{R}^n \times M_2$ для всех $(u, x) \in \mathbb{R}^n \times M_1$. Устойчивость такой диаграммы эквивалентна устойчивости гладкого семейства $F(u, x)$ отображений $x \mapsto F(\cdot, x)$, зависящего от параметров $u \in \mathbb{R}^n$ (см. [106], 1151], [490]).

3. В работах Вассермана [491], [492], Дюбуа, Дюфура [305], Арнольда [250], Закалюкина [131], Голубицкого, Шефера [331] рассматривается так называемая (r, s)-устойчивость семейств функций $F(u, v, x)$, зависящих от двух групп параметров $u \in \mathbb{R}^r$, $v \in \mathbb{R}^s$. Такая устойчивость есть устойчивость диаграмм вида

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times M_1 \xrightarrow{\hat{F}} \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \xrightarrow{q} \mathbb{R}^s,$$

где p, q — естественные проекции, $\hat{F}(u, v, x) = (u, v, F(u, v, x))$ — гладкая функция.

Диаграммы такого вида тесно связаны с перестройками во времени каустик лагранжевых отображений. А именно, функция F, рассматриваемая как производящая, порождает лагранжево многообразие в кокасательном пространстве к пространству параметров $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$. Критические значения проекции этого лагранжева многообразия на $\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ образуют «большую» каустику K (K — это множество тех u, v, для которых функция $F(u, v, \cdot)$ имеет вырожденные критические точки по x). Поверхности уровня $v = \text{const}$ разбивают большую каустику на малые и определяют перестройку малых каустик при изменении v. В приложениях v играет роль времени.

Таким образом, возникают три классификационных задачи:

1) (r, s)-классификация семейств функций;

2) классификация перестроек каустик, т. е. диаграмм вида $K \hookrightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \xrightarrow{p} \xrightarrow{p} \mathbb{R}^s$, где K — каустика лагранжева отображения и первая стрелка — вложение;

3) классификация перестроек лагранжевых отображений, т. е. диаграмм вида $\Lambda \hookrightarrow T^*(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s) \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$, где $\Lambda \hookrightarrow T^*(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s)$ — вложение лагранжева многообразия, π — естественная проекция и при этом обычная эквивалентность диаграмм заменяется на эквивалентность, в которой диффеоморфизм кокасательного пространства $T^*(\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s)$ обязан быть симплектическим.

Эквивалентности в этих задачах связаны соотношением $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 2$. А именно, из (r, s)-эквивалентности семейств функций вытекает эквивалентность перестроек отвечающих им каустик. Кроме того, для любых

эквивалентных диаграмм из задачи 3 существуют производящие их семейства функций, которые (r, s)-эквивалентны. Классификации 1—3 попарно различны. В задаче 3 росток перестройки устойчив, только если при $v = 0$ соответствующее лагранжево отображение устойчиво. (r, s)-устойчивых семейств больше, они расклассифицированы Вассерманом [493]. Функция $F(u_1, u_2, v, x) = x^4 - (v - u_1^2)x^2 - u_2 x$ дает пример не (r, s)-устойчивого семейства, для которого соответствующая перестройка каустики устойчива в смысле задачи 2 (это доказывается проверкой соответствующих инфинитезимальных условий).

Практически наиболее полезной является задача 2.

4. Диаграммы вида $M_2 \xleftarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_3$ возникают при исследовании особенностей огибающих семейства подмногообразий (см. Арнольд [250], Дюфур [307]) или при рассмотрении устойчивости отображения $f_1 \times f_2$ под действием группы диффеоморфизмов прообраза и произведения групп $\mathrm{Diff}(M_2) \times \mathrm{Diff}(M_3)$ в образе $M_2 \times M_3$.

5. С диаграммами $V_0 \xhookrightarrow{i} M_1 \xleftarrow{f} M_2$, где i — вложение, связана классификация особенностей гладких отображений группой диффеоморфизмов, оставляющих инвариантным подмногообразие V_0. Простые особенности диаграмм вида $(\mathbb{R}^{n-1}, 0) \hookrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ (т. е. функции на многообразии с краем) изучены Арнольдом в [17].

6. Устойчивость каскадов, т. е. диаграмм вида

$$M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n,$$

рассмотрена в работах Басса [261], Бюхнера [280].

7. Рассмотрим $M \xrightarrow{f} M$, где на f сопряжением действует группа диффеоморфизмов $\mathrm{Diff}(M)$: $g(f) = gfg^{-1}$. Изучение особенностей такого действия — классическая задача Пуанкаре—Зигеля. С помощью техники малых знаменателей она исследовалась в работах Колмогорова, Арнольда, Брюно (см. также работы Белицкого [36], [35], Гомозова [107], [108]).

Целью изучения каждого примера является описание устойчивых диаграмм либо диаграмм общего положения при малых размерностях многообразий.

Обозначим через θV пространство векторных полей на многообразии V, являющееся модулем конечного типа над кольцом $C^\infty(V)$ гладких функций на V. Для отображения $f\colon V \to W$ обозначим через θf пространство вертикальных векторных полей на графике отображения f. Пространство θf является $C^\infty(V)$-модулем конечного типа. Обозначим через $\mathrm{tf}\colon \theta V \to \theta f$ гомоморфизм, заданный формулой $\mathrm{tf}(\xi) = df(\xi)$, и через $\omega f\colon \theta W \to \theta f$ отображение $\omega f(\eta) = \eta \circ f$, являющееся гомоморфизмом над $f^* C^\infty(W)$. Для диаграмм D положим $\theta D = \prod \theta f_k$ и $\Lambda D = \prod \theta M_j$. Обозначим через αD отобра-

жение $\alpha D\colon \Lambda D \to \theta D$:

$$\alpha D(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \prod_k (\mathrm{tf}_k(\xi_{s(k)}) + \omega f_k(\xi_{i(k)})),$$

где $\xi_{s(k)}$ — поле на прообразе отображения f_k, $\xi_{i(k)}$ — поле на образе отображения f_k.

О п р е д е л е н и е. Диаграмма D называется *инфинитезимально устойчивой*, если αD сюръективно.

Т е о р е м а *ST* (см. [306], [308]). *Если диаграмма D не содержит поддиаграмм вида*

$$M_1 \leftarrow M_2 \to M_3$$

(*расходящихся*) *или циклов, то из инфинитезимальной устойчивости вытекает устойчивость диаграммы D.*

З а м е ч а н и я. 1. Для многих диаграмм специального вида, например для диаграмм из примеров 2 и 3, справедлива аналогичная теорема (в определении инфинитезимальной устойчивости нужно рассматривать векторные поля соответствующего вида).

2. Заметим, что диаграмма, содержащая ориентированные циклы, не может быть устойчивой (см. [308]).

3. Доказательство теоремы *ST* основано на следующем алгебраическом следствии подготовительной теоремы Вейерштрасса—Мальгранжа. Рассмотрим двойственную диаграмму D', вершины которой есть пространства функций на M_k, стрелки — отображения f_k^*, двойственные к f_k. В работах [306], [308] вводятся определения адекватного сжатия гомоморфизма f_k^* и адекватного сжатия гомоморфизма, построенного по диаграмме D' в целом. Оказывается, что из существования адекватного сжатия для всех f_k^* вытекает адекватность сжатия гомоморфизма, соответствующего диаграмме, не имеющей циклов и расходящихся поддиаграмм. Имеются примеры расходящихся диаграмм, для которых это утверждение нарушается для колец аналитических функций. В случае C^∞-отображений для диаграмм, содержащих расходящиеся поддиаграммы, теорема *ST* не доказана, но и не построены контрпримеры.

Рассмотрим локальную диаграмму

$$D_0\colon (\mathbb{R}^2, 0) \xleftarrow{f_1} (\mathbb{R}^2_1, 0) \xrightarrow{f_2} (\mathbb{R}, 0),$$

в координатах $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ имеющую вид

$$(x, y)^2 \leftarrow (x, y) \to (x + xy + y^2).$$

Легко показать, что D_0 является инфинитезимально устойчивой. В [307] доказывается, что D_0 является устойчивой в классе C^∞-диффеоморфизмов

и отображений. Однако в классе аналитических отображений D_0 не является устойчивой. Подобное различие между гладким (формальным) и аналитическим случаями встречается и в задачах о нормальных формах особенностей функций под действием группы диффеоморфизмов образа.

Подробное исследование расходящихся диаграмм имеется в диссертации Дюфура (см. также [305]—[308]). Приведем некоторые из его результатов.

Т е о р е м а. *Диаграмма* $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ *устойчива тогда и только тогда, когда во всякой своей точке она эквивалентна одной из следующих диаграмм*:

$$x_1 \leftarrow (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x_2,$$

$$x_1 \leftarrow (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x_1 + \sum_{i=2}^{n} (\pm x_i^2),$$

$$x_1 \leftarrow (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x_1^2 + \sum_{i=2}^{n} (\pm x_i^2),$$

$$x_2 \leftarrow (x_1, \ldots, x_n) \rightarrow x_1^3 + x_1 x_2 + x_2 + \sum_{i=3}^{n} (\pm x_i^2).$$

Т е о р е м а 1. *Локальная устойчивая диаграмма вида*

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \nearrow & \\ \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & \searrow & \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

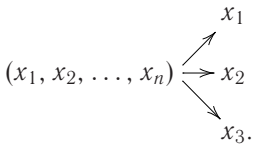
при $n = 1$ *эквивалентна либо диаграмме*

$$\begin{array}{ccc} & & x \\ & \nearrow & \\ x & \rightarrow & x \\ & \searrow & \\ & & x, \end{array}$$

либо диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & & x^2 \\ & \nearrow & \\ x & \rightarrow & x \\ & \searrow & \\ & & x; \end{array}$$

при $n > 2$ эквивалентна диаграмме



К вопросу устойчивости примыкает более тонкий вопрос о конечной определенности диаграмм (т. е. устойчивости в классе диаграмм с фиксированной струей некоторого порядка). Обобщениям критерия Мазера конечной определенности посвящены работы [13], [36], [35], [108], [156], [367], [445]. В работах [36], [107] рассматриваются условия устойчивости и конечной определенности в случае диффеоморфизмов и отображений конечного класса гладкости.

В [35], [108] рассматриваются условия инфинитезимальной устойчивости диаграмм из примера 7 и семейств таких диаграмм для отображений $f\colon (M, 0) \to (M, 0)$, спектр линейной части которых лежит по одну сторону единичной окружности. Заметим, что не существует инфинитезимально устойчивых ростков отображений, имеющих вырожденную линейную часть.

10.2. Эквивариантная теория. Изучение особенностей отображений, обладающих некоторой симметрией, приводит к следующей конструкции.

Рассмотрим компактную группу Ли G, действующую на многообразиях M_1, M_2, и рассмотрим действие на G-эквивариантные отображения $f\colon M_1 \to M_2$ группы G-инвариантных диффеоморфизмов M_1 и M_2. В [426], [427] доказано, что из инфинитезимальной версальности семейств таких отображений вытекает версальность. Условия инфинитезимальной версальности семейства отображений можно интерпретировать как трансверсальность некоторого отображения G-инвариантному стратифицированному подмногообразию в пространстве струй отображений $f\colon M_1 \to M_2$.

Определение трансверсальности G-инвариантного отображения G-инвариантному стратифицированному подмногообразию см. в [318], [498]. В этих работах доказаны теоремы об открытости и всюду плотности множества G-трансверсальных отображений в пространстве всех G-отображений.

Иначе обстоит дело в задаче о разрушении симметрии: здесь результаты формального исследования не переносятся на случай сходящихся рядов. Эта трудность возникает уже в задаче о приведении к нормальной форме четными заменами переменных функции одной комплексной переменной с невырожденной критической точкой нуль, если симметрия разрушается, т. е. если приводимая функция не является четной.

10.3. Обзор результатов по топологической теории особенностей.

1°. Плотность топологически устойчивых отображений. Отношение топологической эквивалентности было предложено Р. Томом в надежде на то, что это отношение эквивалентности в общем случае не допускает непрерывных модулей и для этого отношения справедлива следующая теорема: топологически устойчивые отображения образуют всюду плотное множество в пространстве всех гладких отображений. (Такая теорема для дифференцируемо устойчивых отображений, вообще говоря, не имеет места (см. п. 3.7).) Эти надежды оправдались; Дж. Мазер, основываясь на идеях Тома, доказал (см. [393], [394]) такой результат.

Пусть M, N — гладкие многообразия, M компактно; тогда в пространстве всех гладких отображений из M в N, снабженном топологией Уитни, всюду плотное множество составляют топологически устойчивые отображения.

Полное доказательство этой теоремы изложено в [325].

2°. Стратификации и отображения. Доказательство сформулированной теоремы использует развитую Томом теорию стратифицированных множеств и стратифицированных отображений, в частности леммы Тома об изотопии. Эта теория на настоящий момент является основным техническим средством топологической теории особенностей. Приведем пример утверждения из этой теории.

Определение. *Стратификацией Уитни* подмножества W многообразия M называется локально конечное разбиение $\mathscr{P}$ множества W на гладкие непересекающиеся подмногообразия многообразия M, которые удовлетворяют следующим условиям.

1) (Аксиома границ). Если U и V — страты в $\mathscr{P}$ и $\bar{U} \cap V \neq \varnothing$, то $V \subset \bar{U}$.

2) (Условие Уитни b) (см. [393]). Если U и V — страты в $\mathscr{P}$, $x \in V$, то V в точке x должно регулярно примыкать к U.

Для определения регулярного примыкания предположим сначала, что M — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любых двух различных точек $x, y \in \mathbb{R}^n$ определена секущая $\overline{xy}$ — одномерное подпространство в $\mathbb{R}^n$, порожденное вектором $x - y$. Касательное пространство TM_x естественно отождествляется с $\mathbb{R}^n$ для любой точки $x \in M$.

Условие регулярного примыкания V к U в точке x. Если $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$ — такие последовательности точек подмногообразий V и U соответственно, что $x_i \to x$, $y_i \to x$, $x_i \neq y_i$, последовательность $\overline{x_i y_i}$ сходится (в проективном пространстве $\mathbb{RP}^{n-1}$) и последовательность TU_{y_i} сходится (в грассмановом многообразии $(\dim U)$-плоскостей пространства $\mathbb{R}^n$), то $l \subset \tau$, где $l = \lim \overline{x_i y_i}$, $\tau = \lim TU_{y_i}$.

Легко видеть, что если φ — диффеоморфизм открытого множества M на другое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, то тройка $(\varphi U, \varphi V, \varphi x)$ удовлетворяет условию регулярного примыкания, если этому условию удовлетворяет тройка (U, V, x). Следовательно, условие регулярного примыкания корректно определено для тройки (U, V, x), где U, V — подмногообразия многообразия M, x — точка в V.

Первая лемма Тома об изотопии (см. [393]). *Пусть M, N — многообразия, $f\colon M \to N$ — гладкое отображение, W — замкнутое подмножество в M, снабженное стратификацией Уитни $\mathscr{P}$. Предположим, что отображение $f|_W\colon W \to N$ — собственное и для каждого страта U стратификации $\mathscr{P}$ отображение $f|_U\colon U \to N$ является субмерсией. Тогда отображение $f|_W\colon W \to N$ — топологическое локально тривиальное расслоение.*

3°. Топологическая классификация ростков гладких отображений. Еще в 1962 г. Том построил пример семейства полиномиальных отображений $f_s\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, зависящих от параметра $s \in \mathbb{R}$ и попарно топологически неэквивалентных. Однако такое явление крайне нетипично. Сформулируем соответствующее утверждение.

Обозначим через $J(n, p)$ пространство всех ростков гладких отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^p$, а через $J^r(n, p)$ — пространство их r-струй. Пространства J^r имеют естественные координаты (значения производных от координатных функций).

Теорема (см. [47]). *Пусть n, p — натуральные числа. Тогда для любого натурального r существует разбиение пространства $J^r(n, p)$ на непересекающиеся полуалгебраические подмножества V_0, V_1, V_2, ..., обладающие следующими свойствами.*

1) *Если $f_1, f_2 \in J(n, p)$ таковы, что $f_1^{(r)}, f_2^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, то ростки f_1, f_2 топологически эквивалентны.*

2) *Произвольный росток $f \in J(n, p)$, такой, что $f^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, является симплициальным отображением для подходящих триангуляций пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$.*

3) *Коразмерность множества V_0 в $J^r(n, p)$ стремится к бесконечности при r, стремящемся к бесконечности.*

Отметим еще одно замечательное свойство отношения топологической эквивалентности. *Разбиения, упомянутые в теореме, можно выбрать такими, что, помимо свойств* 1)—3), *будут выполняться еще два свойства* 4), 5) (см. [48]).

4) *Произвольный росток $f \in J(n, p)$, такой, что $f^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, обладает конечномерной топологически версальной деформацией.*

Понятие топологически версальной деформации определяется аналогично понятию дифференцируемо версальной деформации. Отметим, что

существуют такие n, p, что в пространстве $J(n, p)$ множество конечной коразмерности составляют ростки, не имеющие конечномерных дифференцируемо версальных деформаций.

5) *Если* $f_1, f_2 \in J(n, p)$ *таковы, что* $f_1^{(r)}, f_2^{(r)} \in V_i$, $i > 0$, *то* f_1 *и* f_2 *обладают топологически эквивалентными топологически версальными деформациями.*

4°. Условия топологической эквивалентности. Наиболее известным результатом, в котором приводятся условия, достаточные для топологической эквивалентности, является следующая теорема.

Теорема (см. [375], [475]). *Пусть* $f_s\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — *семейство ростков голоморфных отображений, гладко зависящих от параметра* $s \in \mathbb{R}^p$. *Предположим, что для любого* s *число Милнора* μ_s *ростка* f_s *конечно и* μ_s *не зависит от* s. *Предположим еще, что* $n \neq 3$. *Тогда все ростки* f_s *топологически эквивалентны.*

Условие $n \neq 3$ является результатом использования в доказательстве теоремы об h-кобордизме.

Другие топологические инварианты исследовались М. Фукуда, Т. Фукуда и Дж. Дамоном.

Сформулируем теорему М. Фукуда и Т. Фукуда. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_p)\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ — росток гладкого отображения; обозначим через $Q(f) = C^\infty(\mathbb{R}^n)/(f_1, \ldots, f_p)$ ассоциированную $\mathbb{R}$-алгебру (см. п. 4.2).

Теорема. *Если ассоциированные* $\mathbb{R}$*-алгебры* $Q(f)$ *и* $Q(g)$ *топологически устойчивых ростков* $f\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$, $g\colon (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^p, 0)$ *изоморфны, то ростки* f, g *топологически эквивалентны.*

Отметим, что существуют дифференцируемо устойчивые ростки f и g, которые не дифференцируемо эквивалентны (т. е. $Q(f) \neq Q(g)$), но которые топологически эквивалентны.

Сформулируем теорему Дж. Дамона. Определим функцию Гильберта—Самюэля h $\mathbb{R}$-алгебры $Q(f)$ формулой

$$h(k) = \dim_{\mathbb{R}} Q(f)/\mathfrak{m}^{k+1},$$

где $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал $\mathbb{R}$-алгебры $Q(f)$. Назовем росток f V-простым, если малые деформации ростка f содержат только конечное число типов V-эквивалентности.

Теорема. 1) *Для* C^∞*-устойчивых ростков* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \leqslant p)$ *топологическими инвариантами являются*: а) *тип* Σ^i *Тома—Боардмана*; б) *если* $p \geqslant n + C_i^2$, *то тип* $\Sigma^{i,j}$ *Тома—Боардмана.*

2) *Для* C^∞*-устойчивых* V*-простых ростков* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ $(n \leqslant p)$ *топологическим инвариантом является функция Гильберта—Самюэля* $\mathbb{R}$*-алгебры* $Q(f)$.

Дж. Дамон утверждает, что в некоторых случаях топологическим инвариантом является комплексный тип $\mathbb{R}$-алгебры $Q(f)$.

5°. Другие вопросы. К топологической теории особенностей относятся также *глобальные вопросы*, например, связи теории особенностей с характеристическими классами, изучение которых было начато еще в классических работах Уитни и Понтрягина. Мы не останавливаемся на этих очень интересных вопросах, где еще много предстоит сделать (в особенности для лагранжевых и лежандровых отображении), так как эта книга посвящена локальной теории особенностей.

Следующий частный результат является, так сказать, полулокальным. Рассмотрим семейство гладких функций f на замкнутом многообразии, зависящих от n-мерного параметра y, и образуем функцию максимума $F(y) = \max_x f(x, y)$. Для *общих семейств с не более чем шестимерным параметром функция* F, как доказала Л. Н. Брызгалова (см. [43], [44]), *топологически эквивалентна морсовской функции*. В. И. Матов доказал это при всех n.

В. И. Матов доказал также топологическую морсовость функции $\min_y \max_x f(x, y, z)$ для функции f общего положения.

ГЛАВА II

КРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ

Функции общего положения имеют лишь невырожденные критические точки. Однако при исследовании семейств функций появляются (неустранимым малыми шевелениями образом) и простейшие вырождения. Например, семейство $f(x, t) = x^3 - tx$ имеет при нулевом значении параметра t вырожденную критическую точку, и всякое близкое семейство имеет при близком значении параметра такое же вырождение. При большем числе параметров появляются более сложные вырождения.

Задача классификации всех этих вырождений на первый взгляд кажется безнадежной. Однако когда был вычислен начальный отрезок этой классификации, то выяснилось, что он устроен достаточно просто: классификация простейших вырождений оказалась связанной с классификацией простых групп Ли, с теорией групп, порожденных отражениями, с теорией кос и с классификацией правильных многогранников в обычном трехмерном пространстве.

В этой главе описан начальный отрезок классификации критических точек функций, включая классификации простых (или 0-модальных), унимодальных и бимодальных особенностей, а также классификацию всех особенностей кратности $\mu \leqslant 16$.

Число ν классов (стабильной μ-эквивалентности, определенной ниже) комплексных особенностей кратности μ дается при $\mu \leqslant 16$ следующей таблицей:

μ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
ν	1	1	1	2	2	3	3	4	4	7	11	15	14	17	22	32

Множество нерасклассифицированных особенностей имеет коразмерность 11, так что расклассифицированы все критические точки, встречающиеся в общих семействах функций, зависящих не более чем от 10 параметров.

Классификация простейших особенностей дискретна, но сильно вырожденные особенности имеют модули.

Модальностью m точки $x \in X$ при действии группы Ли G на многообразии X называется наименьшее такое число, что достаточно малая окрестность точки x может быть покрыта конечным числом m-параметрических

семейств орбит. Точка x называется *простой*, если ее модальность равна 0, т. е. если ее окрестность пересекается с конечным числом орбит.

Модальность ростка функции в критической точке с критическим значением 0 определяется как модальность достаточной струи в пространстве струй функций с критической точкой 0 и критическим значением 0.

Два ростка называются *стабильно эквивалентными*, если они становятся R-эквивалентными *) после сложения с невырожденными квадратичными формами от подходящего числа переменных.

Теорема 1 (см. [8], [9]). *Простые ростки голоморфных функций* (*ростки с* $m = 0$) *исчерпываются, с точностью до стабильной эквивалентности, следующим списком*:

$$\begin{aligned} A_k &: f(x) = x^{k+1}, \quad k \geqslant 1; \\ D_k &: f(x, y) = x^2 y + y^{k-1}, \quad k \geqslant 4; \\ E_6 &: f(x, y) = x^3 + y^4; \\ E_7 &: f(x, y) = x^3 + xy^3; \\ E_8 &: f(x, y) = x^3 + y^5. \end{aligned}$$

Связь этих особенностей с обозначаемыми теми же символами простыми алгебрами Ли или группами, порожденными отражениями, обсуждается в [10]. Эти особенности можно также получать из правильных многогранников в трехмерном евклидовом пространстве, точнее — из дискретных подгрупп группы $SU(2)$: они описывают соотношения между базисными инвариантами группы. Особенности A_k соответствуют многоугольникам, D_k — диэдрам (двусторонним многоугольникам), E_6 — тетраэдру, E_7 — октаэдру, E_8 — икосаэдру. Подробнее см. [16].

Теорема 2 (см. [11]). *Унимодальные ростки* (*ростки с* $m = 1$) *исчерпываются, с точностью до стабильной эквивалентности, трехиндексной серией однопараметрических семейств*:

$$\begin{gathered} T_{p,q,r} : f(x, y, z) = axyz + x^p + y^q + z^r, \\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1, \quad a \neq 0; \end{gathered}$$

тремя однопараметрическими семействами параболических ростков:

$$\begin{aligned} P_8 = T_{3,3,3} &: f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad a^3 + 27 \neq 0, \\ X_9 = T_{2,4,4} &: f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^2 + ax^2 y^2, \quad a^2 \neq 4, \\ J_{10} = T_{2,3,4} &: f(x, y, z) = x^3 + y^6 + z^2 + ax^2 y^2, \quad 4a^3 + 27 \neq 0, \end{aligned}$$

*) Две функции называются *R-эквивалентными*, если одна превращается в другую при подходящей (диффеоморфной) замене независимых переменных.

и еще 14 *исключительными однопараметрическими семействами, перечисленными в следующей таблице* (смысл столбцов которой разъяснен ниже):

Обозначение	Нормальная форма	Показатели однородности	Число Кокстера	Числа Долгачева	Числа Габриэлова	Двойственный класс
Q_{10}	$x^2z+y^3+z^4+ayz^3$	8 9 6	−24	2 3 9	3 3 4	E_{14}
Q_{11}	$x^2z+y^3+yz^3+az^5$	7 6 4	−18	2 4 7	3 3 5	Z_{13}
Q_{12}	$x^2z+y^3+z^5+ayz^4$	6 5 3	−15	3 3 6	3 3 6	Q_{12}
S_{11}	$x^2z+yz^2+y^4+ay^3z$	6 5 4	−16	2 5 6	3 4 4	W_{13}
S_{12}	$x^2z+yz^2+xy^3+ay^5$	5 4 3	−13	3 4 5	3 4 5	S_{12}
U_{12}	$x^3+y^3+z^4+axyz^2$	4 4 3	−12	4 4 4	4 4 4	U_{12}
Z_{11}	$x^3y+y^5+z^2+axy^4$	15 8 6	−30	2 3 8	2 4 5	E_{13}
Z_{12}	$x^3y+xy^4+z^2+ay^6$	11 6 4	−22	2 4 6	2 4 6	Z_{12}
Z_{13}	$x^3y+y^6+z^2+axy^5$	9 5 3	−18	3 3 5	2 4 7	Q_{11}
W_{12}	$x^4+y^5+z^2+ax^2y^3$	10 5 4	−20	2 5 5	2 5 5	W_{12}
W_{13}	$x^4+xy^4+z^2+ay^6$	8 4 3	−16	3 4 4	2 5 6	S_{11}
E_{12}	$x^3+y^7+z^2+axy^5$	21 14 6	−42	2 3 7	2 3 7	E_{12}
E_{13}	$x^3+xy^5+z^2+ay^8$	15 10 4	−30	2 4 5	2 3 8	Z_{11}
E_{14}	$x^3+y^8+z^2+axy^6$	12 8 3	−24	3 3 4	2 3 9	Q_{10}

Эти 14 особенностей можно получить из 14 треугольников на плоскости Лобачевского, точнее — из определенных ими дискретных подгрупп группы $SU(1,1)$. Нормальная форма с $a=0$ описывает единственное соотношение между инвариантами алгебры целых автоморфных форм. Ровно для 14 треугольников эта алгебра имеет три образующих; углы этих треугольников — $\pi/$(числа Долгачёва).

Долгачёв, которому принадлежит эта конструкция, и Пинкам указали также способ получения 14 исключительных особенностей из так называемых $K3$ поверхностей (см. [129], [423]).

Теорема 3 (см. [9], [11]). *Множество непростых ростков функций* $n\geqslant 3$ *переменных имеет коразмерность* 6, *а ростков, модальность которых больше* 1, *— коразмерность* 10 *в пространстве ростков функций с критическим значением* 0.

Таким образом, всякое s-параметрическое семейство функций, где $s<6$ ($s<10$), можно сколь угодно малым шевелением привести в общее положение так, что ростки функций семейства во всех критических точках будут стабильно эквивалентны росткам из теоремы 1 (теорем 1 и 2) с точностью до аддитивных постоянных.

§ 11. Начало классификации критических точек

В этом параграфе описаны основные этапы классификации критических точек голоморфных функций; результаты классификации и вычисления, необходимые для проведения различных этапов, приведены в следующих параграфах. Все рассматриваемые функции голоморфны и имеют критическую точку 0 с критическим значением 0. Под эквивалентностью понимается R-эквивалентность (два ростка функций эквивалентны, если они переходят друг в друга под действием биголоморфной замены независимых переменных).

11.1. Классификация по корангу второго дифференциала.

О п р е д е л е н и е. *Корангом функции в критической точке* называется коранг второго дифференциала.

Т е о р е м а. *В окрестности критической точки коранга k голоморфная функция n переменных эквивалентна функции*

$$f(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2,$$

где второй дифференциал функции f в нуле равен нулю: $f \in \mathfrak{m}^3$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следствие леммы Морса с параметрами; см. п. 6.2, с. 100 и п. 9.6, с. 136.

О п р е д е л е н и е. Функции (разного числа переменных) называются *стабильно эквивалентными*, если они становятся эквивалентными после сложения с невырожденными квадратичными формами от дополнительных переменных; стабильная эквивалентность функций f и g означает обычную эквивалентность

$$f(x_1, \ldots, x_k) + x_{k+1}^2 + \ldots + x_n^2 \sim g(y_1, \ldots, y_l) + y_{l+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

З а м е ч а н и е. Можно доказать, что функции одного и того же числа переменных стабильно эквивалентны, если и только если они эквивалентны (см. [497]). Таким образом, переход к стабильной эквивалентности, не меняя классификации критических точек функций фиксированного числа переменных, позволяет сравнивать вырождения критических точек функций разного числа переменных.

Т е о р е м а. *В окрестности конечнократной критической точки коранга* 1 *функция стабильно эквивалентна функции x^m.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: см. п. 9.6, с. 136.

Кратность критической точки функции x^m легко вычислить: $\mu = m - 1$.

О п р е д е л е н и е. Критическая точка коранга 1 кратности μ называется *особенностью типа A_μ*. В точке типа A_μ функция стабильно эквивалентна функции $x^{\mu+1}$ в нуле.

Т е о р е м а. *Множество функций n переменных с критической точкой 0 коранга $k \leqslant n$ имеет коразмерность $k(k+1)/2$ в пространстве ростков функций с критическим значением 0 в точке 0.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: см. п. 2.2, с. 31.

В частности, множество функций коранга 2 имеет коразмерность 3, коранга 3 — коразмерность 6, коранга 4 — коразмерность 10. Следовательно, в одно- и двупараметрических семействах функций общего положения встречаются лишь особенности коранга 1, при числе параметров, меньшем чем 6, встречаются лишь особенности коранга, не большего 2, при меньшем чем 10 — не большего 3. Таким образом, при классификации особенностей функций семейств общего положения с меньшим чем 6 числом параметров можно ограничиться функциями двух переменных, а при числе параметров, меньшем чем 10, — функциями трех переменных.

11.2. Простейшие особенности коранга 2. Классификация функций двух переменных с нулевой 2-струей ($f \in \mathfrak{m}^3$) начинается с классификации кубических членов ряда Тейлора. Легко доказывается следующий результат.

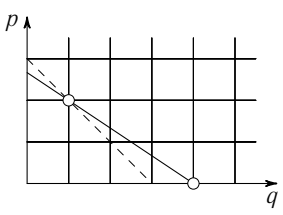


Рис. 47

Т е о р е м а. *Кубическая форма двух переменных $\mathbb{C}$-линейным преобразованием приводится к одному из видов*

1) $x^2y + y^3$, 2) x^2y, 3) x^3, 4) 0

(в вещественном случае $x^2y \pm y^3$, ...).

Далее нужно рассматривать каждый из этих случаев в отдельности.

Т е о р е м а. *Функция с начальной кубической формой $x^2y \pm y^3$ эквивалентна своей начальной форме.*

Доказательство этой (несложной) теоремы мы отложим до п. 12.6, где указан общий метод.

Рассмотрим теперь случай 2). Воспользуемся диаграммой Ньютона (рис. 47), на которой ряду $f = \sum a_{p,q}x^py^q$ соответствует *носитель* $\operatorname{supp} f$, состоящий из целых точек (p, q) плоскости $\mathbb{R}^2$, являющихся показателями мономов, входящих в ряд с ненулевыми коэффициентами:

$$\operatorname{supp} f = \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \colon a_{p,q} \neq 0\}.$$

Метод поворачивания линейки Ньютона (см. [176]) состоит в том, чтобы провести через показатель отмеченного монома носителя прямую («линейку»), отделяющую нуль от неотмеченных точек носителя, и поворачивать ее вокруг отмеченного показателя, до тех пор пока она не наткнется на показатель еще одного присутствующего монома (можно представить себе гвозди, вбитые в точках носителя).

В рассматриваемом случае 2) присутствует единственный моном x^2y степени не выше 3. Мы отмечаем его и начинаем с положения линейки, обозначенного пунктиром. Поворачивая линейку, мы натыкаемся по очереди на целые точки, отвечающие мономам y^4, xy^3 и y^5, y^5, xy^4 и y^7, ...

Подслучай a. Линейка натыкается на одну точку $(k, 0)$ оси q. В этом случае доказывается, что все остальные точки носителя не меняют класса эквивалентности функции: она приводится к нормальной форме $x^2y + y^k$ (см. п. 12.6).

Подслучай b. Линейка натыкается на две точки, отвечающие мономам xy^{k+1} и y^{2k+1}.

В этом случае рассмотрим многочлен, определенный попавшими на линейку точками:

$$Ax^2y + Bxy^{k+1} + Cy^{2k+1}, \quad A \neq 0.$$

Мы назовем этот многочлен *главной частью* исследуемой функции. Рассмотрим плоскость с координатами (x, z), где $z = y^k$. Нули главной части определяют на этой плоскости три прямых

$$z = 0, \quad x = \lambda_1 z, \quad x = \lambda_2 z.$$

Замены $x = x' + \lambda y$ определяют диффеоморфизмы плоскости (x, y). При этих диффеоморфизмах главная часть преобразуется независимо от остальной части ряда для f (мономы, показатели которых расположены строго выше линейки, после замены дают вклад лишь в мономы с расположенными строго выше линейки показателями; подробнее см. п. 12.6).

Выбирая λ, мы всегда можем обратить коэффициент B в нуль. Теперь подслучай b сведен к подслучаю a. Кратность критической точки функции $x^2y + y^k$ легко вычислить: $\mu = k + 1$.

О п р е д е л е н и е. Критическая точка, эквивалентная критической точке функции $x^2y + y^{\mu-1}$, называется *критической точкой типа* D_μ.

Все (конечнократные) точки коранга 2 с 3-струей $x^2y + y^3$ или x^2y — одного из типов D_μ.

Множество функций с более сложными особенностями имеет коразмерность 5. Таким образом, в семействах с не более чем четырьмя параметрами встречаются лишь особенности A_μ, $\mu \leqslant 5$, D_4 и D_5 *).

*) Это утверждение часто называют «теоремой Тома» или «правилом семи катастроф Тома». В действительности Том в 1969 г. анонсировал приводящую к такому же списку топологическую классификацию градиентных динамических систем (см. [473]). Соотношение между этой классификацией Тома и приведенной выше дифференцируемой классификацией примерно такое же, как между негомеоморфностью эллипса и гиперболы и теоремой о приведении квадратичной формы к каноническому виду. Том утверждал, что для топологической

Ясно, что следующий шаг классификации (разбор случая 3)) требует поворачивания линейки вокруг показателя монома x^3; разбор случая 4) начинается с классификации 4-форм от двух переменных и т. д.

Из сказанного видно, что классификация разбивается на несколько этапов: 1) поворачивание линейки, 2) исследование главной части, 3) исследование старших членов.

Формальная техника, позволяющая справиться с этими вычислениями, основана на рассмотрении различных фильтраций в алгебре функций (или рядов). С каждой такой фильтрацией можно связать свои пространства квазиструй функций и свои фильтрованные группы квазиструй диффеоморфизмов и алгебры Ли (квази)струй векторных полей.

Простейший и наиболее часто встречающийся случай — это случай квазиоднородной фильтрации. В этом случае возникает также группа Ли квазиоднородных диффеоморфизмов, играющая в этой теории такую же роль, как полная линейная группа в случае обычных струй (который соответствует фильтрации по степеням максимального идеала).

§ 12. Квазиоднородные и полуквазиоднородные особенности

Здесь построен аппарат квазиоднородных и полуквазиоднородных диффеоморфизмов для приведения к нормальным формам квазиоднородных и полуквазиоднородных особенностей.

12.1. Квазиоднородные функции и фильтрации.

О п р е д е л е н и е. Рассмотрим арифметическое пространство $\mathbb{C}^n$ с фиксированными координатами $x_1, \ldots, x_n$. Голоморфная функция $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется *квазиоднородной функцией* степени d

классификации градиентных динамических систем и их бифуркационных диаграмм достаточно классифицировать функции и их бифуркации. Строго говоря, это неверно (контрпример на уровне особенности D_4 был предъявлен в 1971 г. Дж. Гукенхаймером [343]). Поэтому таблица бифуркаций, составленная Томом для типичных локальных семейств градиентных систем, неполна уже для случая трех параметров. Согласно Тому, в случае 4 параметров количество типов бифуркаций типичных локальных градиентных систем равно семи («магические семь» или «знаменитые семь» катастроф). На самом деле этих бифуркаций порядка 20. Также строго не доказана конечность с точностью до гомеоморфизмов бифуркационных диаграмм количества $\nu(l)$ типичных бифуркаций локальных градиентных систем, зависящих от l параметров, для $l = 3$. Том показал, что $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = 2$. Случай $l = 3$ обсуждается в недавних работах Г. Вегтера [483] и Б. Хесина (1985 г.). Согласно Хесину, количество топологически различных типов D_4 в типичных системах равно 3, т. е. $\nu(3) = 6$. Поэтому было бы более логичным называть «гипотезой Тома», а не «теоремой Тома», утверждение о конечности числа топологически различных бифуркаций в типичных l-параметрических семействах градиентных динамических систем при $l \leqslant 4$. В настоящее время конечность числа топологически различных бифуркаций не опровергнута строго ни для какого l, однако для достаточно больших l типичные локальные семейства содержат модули по отношению к топологической классификации.

с показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, если при любом $\lambda > 0$ выполнено равенство $f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^d f(x_1, \ldots, x_n)$. Показатели α_s называют также *весами* переменных x_s.

В терминах ряда Тейлора $f = \sum f_{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$ условие квазиоднородности степени 1 означает, что все показатели ненулевых членов ряда лежат на гиперплоскости

$$\Gamma = \{\boldsymbol{k} \colon \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = 1\}.$$

Пример. Функция $x^2 + y^3$ — квазиоднородная степени 1 с показателями $1/2, 1/3$.

В дальнейшем мы будем рассматривать квазиоднородные функции степени 1 с рациональными показателями, $0 < \alpha_s \leqslant 1/2$. Такие функции автоматически являются многочленами. Гиперплоскость Γ мы будем называть *диагональю*. Диагональ Γ отсекает на осях координат отрезки длины $a_s = 1/\alpha_s$.

Определение. Квазиоднородная функция f называется *невырожденной*, если 0 — изолированная критическая точка (т. е. если кратность μ критической точки 0 конечна).

Вырожденные квазиоднородные функции образуют алгебраическую гиперповерхность в линейном пространстве всех квазиоднородных многочленов с фиксированными показателями квазиоднородности, если в этом пространстве есть хоть одна невырожденная функция.

С каждым типом квазиоднородности (т. е. набором показателей квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha}$) связана фильтрация в кольце степенных рядов (функций, ростков и т. д.), определяемая следующим образом.

Определение. Мы скажем, что моном $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ *имеет* (*обобщенную*) *степень* (*или вес*) d, если $\langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{k} \rangle = \alpha_1 k_1 + \ldots + \alpha_n k_n = d$.

Степени мономов — рациональные числа. Показатели всех мономов степени d (при данном типе) лежат на одной гиперплоскости, параллельной диагонали Γ. Зафиксируем тип квазиоднородности, т. е. набор показателей $\boldsymbol{\alpha}$.

Определение. Многочлен (степенной ряд, росток, функция) *имеет порядок* d, если все его мономы имеют степень d или выше; в случае, когда (обобщенная) степень всех мономов равна d, мы будем называть d (*квази*)*степенью* многочлена; степенью нуля будем считать $+\infty$.

Многочлены (ряды, ростки) порядка d образуют линейное пространство $\boldsymbol{A}_d$; $\boldsymbol{A}_{d'} \subset \boldsymbol{A}_d$ при $d < d'$. Порядок произведения равен сумме порядков сомножителей, поэтому $\boldsymbol{A}_d$ является идеалом в алгебре многочленов (рядов, функций). Обозначим эту алгебру через $\boldsymbol{A}$. Факторалгебра $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_d$ называется *алгеброй* d-(*квази*)*струй*, а ее элементы — d-(*квази*)*струями*.

Под *порядком* $\varphi(f)$ многочлена (ряда, ростка) мы будем обычно понимать наибольшее из чисел d, для которых $f \in \boldsymbol{A}_d$. Порядки всевозможных многочленов (рядов, ростков) принадлежат одной рациональной арифметической прогрессии: $\varphi(f) \in \mathbb{Z}_+ d_0$, где d_0 — наибольшая общая мера чисел α_s (начальный отрезок прогрессии может быть заполнен значениями φ не полностью).

О п р е д е л е н и е. Многочлен (степенной ряд, росток) называется *полуквазиоднородным* степени d с показателями $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, если он имеет вид $f = f_0 + f'$, где f_0 — невырожденный квазиоднородный многочлен степени d с показателями α, а f' — многочлен (ряд, росток), порядок которого строго больше d.

Иными словами, полуквазиоднородная функция получается из невырожденной квазиоднородной функции дописыванием мономов, показатели которых лежат выше диагонали. Заметим, что квазиоднородная функция не полуквазиоднородна, если она вырождена.

Зафиксируем какую-либо систему мономов, образующих базис локальной алгебры для невырожденного квазиоднородного многочлена f_0. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — система всех мономов базиса, показатели которых лежат строго выше диагонали.

Т е о р е м а. *Всякая полуквазиоднородная функция с квазиоднородной частью f_0 эквивалентна функции вида $f_0 + \sum c_k e_k$, где c_k — константы.*

П р и м е р 1. Если $f_0 = x^2y + y^k$, то $f \sim f_0$.

П р и м е р 2. Если $f_0 = x^5 + y^5$, то $f \sim x^5 + y^5 + cx^3y^3$.

Доказательство теоремы приведено в п. 12.6.

12.2. Кратность и образующие локальной алгебры полуквазиоднородной функции. Мы докажем вначале, что мономиальный базис локальной алгебры квазиоднородной голоморфной невырожденной функции является базисом и для всех полуквазиоднородных функций с данной квазиоднородной частью. Не нарушая общности, мы можем считать, что степень d квазиоднородной части равна 1.

Т е о р е м а. *Кратность критической точки* 0 *полуквазиоднородной функции f равна кратности критической точки* 0 *ее квазиоднородной части*: $\mu(f) = \mu(f_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим семейство топологических сфер

$$S_t = \{x \in \mathbb{C}^n \colon |x_1|^{a_1} + \ldots + |x_n|^{a_n} = t\}, \quad a_s = 1/\alpha_s.$$

Число $\mu(f)$ равно степени отображения $x \mapsto (\partial f/\partial x)/\|\partial f/\partial x\|$, $x \in S_t$, при малых t. Для каждой точки $x \in S_1$ по крайней мере одна из производных $\partial f_0/\partial x_s$ отлична от 0 (ввиду невырожденности f_0). Следовательно, существует такая константа c, что на S_1 выполнено неравенство

$\max\limits_s |\partial f_0/\partial x_s| \geqslant c > 0$. Заметим, что $S_t = T_t S_1$, где $T_t(x_1, \ldots, x_n) = (T^{\alpha_1}x_1, \ldots, T^{\alpha_n}x_n)$. Далее, частная производная $\partial f_0/\partial x_s$ квазиоднородна степени $1 - \alpha_s$ типа $\boldsymbol{\alpha}$. Следовательно, в каждой точке сферы S_t по меньшей мере при одном s выполнено неравенство $|\partial f_0/\partial x_s| \geqslant ct^{1-\alpha_s}$.

С другой стороны, функция f' имеет порядок не менее $1 + d_0$, где d_0 — общая мера чисел α_s. Поэтому существует такая константа C, что при всех s на S_t выполнено неравенство $|\partial f'/\partial x_s| \leqslant Ct^{1+d_0-\alpha_s}$.

Сравнивая с предыдущим неравенством, видим, что при достаточно малых t на сфере S_t нет критических точек функций $f_0 + \theta f'$, $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Поэтому степени отображений сферы на сферу, заданных градиентами функций f_0 и $f_0 + f'$, совпадают, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Аналогично доказывается, что все достаточно близкие к f_0 квазиоднородные функции той же степени квазиоднородности имеют ту же кратность μ. Далее, поскольку множество невырожденных квазиоднородных функций данной степени связно, кратность μ одинакова для всех невырожденных квазиоднородных функций данной степени (и, следовательно, для всех полуквазиоднородных функций данной степени данного типа).

Кратность μ критической точки 0 функции f можно определить также как размерность локальной алгебры

$$Q_f = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n).$$

Допуская вольность речи, мы будем называть базисом локальной алгебры функции f набор μ рядов (многочленов, ростков), становящийся базисом Q_f над $\mathbb{C}$ после факторизации по идеалу.

Из доказанной теоремы вытекает такой результат.

С л е д с т в и е. *Предположим, что система мономов $e_1, \ldots, e_\mu$ является базисом локальной алгебры квазиоднородной части f_0 полуквазиоднородной функции f. Тогда та же система мономов задает и базис локальной алгебры функции f.*

Доказательство основано на следующей лемме общего характера.

Л е м м а. *Предположим, что семейство гладких функций f, непрерывно зависящих от конечного числа параметров, имеет при всех значениях параметров критическую точку 0 постоянной конечной кратности μ. Тогда всякий базис локальной алгебры функции, соответствующей нулевому значению параметра, остается базисом и при близких значениях параметра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Лемма вытекает из того, что если в конечномерном пространстве даны гладко зависящие от параметров подпространство и система векторов, образующая базис трансверсального

пространства, то эта система останется базисом трансверсального пространства и при близких значениях параметров.

Чтобы сделать пространство конечномерным, достаточно профакторизовать алгебру $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ по достаточно высокой (например, $(\mu + 1)$-й; см. п. 6.4) степени максимального идеала.

Доказательство следствия. Рассмотрим полуквазиоднородную функцию $f = f_0 + f'$. Мы покажем, что переход от f_0 к f можно рассматривать как *малую* деформацию. Построим однопараметрическое семейство функций $f_t(x) = t^{-1}f(T_t x)$, где $T_t x(t^{\alpha_1}x_1, \ldots, t^{\alpha_n}x_n)$. Имеем $f_t(x) = f_0 + t^{-1}f'(T_t x)$, где все коэффициенты второго слагаемого непрерывно зависят от t, так как порядок функции f' больше 1. По лемме базис локальной алгебры для f_0 является базисом и для алгебры f_t при достаточно малых t. Базис локальной алгебры для f_t переходит в базис локальной алгебры для f под действием диффеоморфизма T_t, связывающего функции f и f_t. Но каждый моном при диффеоморфизме T_t переходит в пропорциональный себе же моном. Поэтому мономиальный базис алгебры Q_{f_0} является не только базисом алгебры Q_{f_t} при малых t, но и базисом алгебры Q_f, что и требовалось доказать.

Замечание. *Число базисных мономов локальной алгебры квазиоднородной или полуквазиоднородной функции f, имеющих данную (квази)степень δ, не зависит от выбора базиса в локальной алгебре.*

Доказательство. Рассмотрим факторпространство

$$\boldsymbol{A}_\delta/(\boldsymbol{A}_{>\delta} + \boldsymbol{A}_\delta \cap I),$$

где $I = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, $\boldsymbol{A}_\delta$ — пространство рядов порядка δ в $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$, $\boldsymbol{A}_{>\delta}$ — пространство рядов, порядок которых больше чем δ.

Число базисных мономов степени δ равно размерности этого факторпространства и потому не зависит от выбора базиса.

Следствие. *Число базисных мономов локальной алгебры функции f, имеющих данную обобщенную степень (при данном типе α), одинаково для всех полуквазиоднородных функций f данного типа α степени d.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть невырожденные квазиоднородные функции (для полуквазиоднородной функции базис тот же). Многообразие невырожденных квазиоднородных функций фиксированной степени d (типа α) линейно связно (если оно не пусто, то оно является дополнением к гиперповерхности в линейном пространстве). Вдоль кривой, соединяющей две точки этого многообразия, число базисных мономов локальной алгебры, имеющих степень δ, локально постоянно, так как для близких функций годится один и тот же базис (см. лемму выше). Следовательно, оно постоянно, что и требовалось доказать.

12.3. Квазиоднородные отображения. Здесь вычислены различные численные характеристики квазиоднородных отображений, в частности кратность μ и полином Пуанкаре p.

Зафиксируем тип квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ с фиксированной системой координат. Мы будем рассматривать отображения $F\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ и пользоваться старинными обозначениями $F(x_1, \ldots, x_n) = (F_1(x), \ldots, F_n(x))$. Пусть $\boldsymbol{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ — вектор с неотрицательными компонентами.

О п р е д е л е н и е. Отображение F называется *квазиоднородным степени* $\boldsymbol{d}$ (*типа* $\boldsymbol{\alpha}$), если каждая компонента F_s является квазиоднородной функцией степени d_s одного и того же типа $\boldsymbol{\alpha}$.

Локальной алгеброй отображения F называется факторалгебра

$$Q(f) = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]/(F_1, \ldots, F_n).$$

Отображение F называется *невырожденным*, если его кратность в 0 конечна, т. е. если локальная алгебра $Q(F)$ имеет конечную размерность над $\mathbb{C}$; эта размерность $\mu = \dim_{\mathbb{C}} Q(F)$ называется *кратностью отображения* F в точке 0.

Отображение F называется *полуквазиоднородным*, если $F = F_0 + F'$, где F_0 — невырожденное квазиоднородное отображение и каждая компонента F'_s имеет порядок больший, чем степень соответствующей компоненты F_{0_s}.

Если функция f полуквазиоднородна степени d (типа $\boldsymbol{\alpha}$), то отображение $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$ полуквазиоднородно степени $d_s = d - \alpha_s$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Утверждения п.* 12.2 *справедливы не только для градиентных отображений* $x \mapsto \operatorname{grad} f(x)$, *для которых они выше сформулированы, но и для произвольных квазиоднородных и полуквазиоднородных отображений.*

Например, все полуквазиоднородные отображения одинаковой степени $\boldsymbol{d}$ (и одного типа $\boldsymbol{\alpha}$) имеют одинаковые кратности μ.

З а м е ч а н и е. Эти утверждения справедливы над любым алгебраическим замкнутым полем (А. Г. Кушниренко, [365]). В случае поля $\mathbb{C}$ доказательства проводятся таким же образом, как в п. 12.2.

Значение класса квазиоднородных отображений для изучения квазиоднородных функций состоит в том, что в нем можно более свободно проводить гомотопии и делать замены переменных, чем в случае градиентов. В частности, следующее предложение (ср. [401]) позволяет простой подстановкой перейти от квазиоднородного отображения к настоящему однородному.

П р е д л о ж е н и е 2. *Пусть* $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — *квазиоднородное отображение, тип и степень которого имеют общий знамена-*

тель N: $\alpha_s = A_s/N$, $d_s = D_s/N$; A_s, D_s, N — *целые числа. Рассмотрим отображение* $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, *заданное формулой* $T(y_1, \dots, y_n) = (y_1^{A_1}, \dots, y_n^{A_n})$. *Тогда*:

1) *отображение* $F \circ T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *имеет своими компонентами однородные в обычном смысле функции степеней* $D_1, \dots, D_s$;

2) $\mu(F \circ T) = \mu(F) \prod A_s$;

3) *если* $e_1, \dots, e_\mu$ — *мономиальный базис локальной алгебры отображения* F, *то мономиальный базис локальной алгебры отображения* $F \circ T$ *образуют функции*

$$e'_{i,u} = (T^* e_i) y_1^{u_1} \dots y_n^{u_n}, \quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant \mu, \ 0 \leqslant u_s < A_s.$$

Доказательство. 1) Моном x^k определяет в s-й компоненте отображения $F \circ T$ моном $\prod y_s^{k_s A_s}$ степени $\sum k_s A_s = N(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha}) = N d_s = D_s$.

2) Формула для кратности получается из рассмотрения системы уравнений $(F \circ T)(y) = \varepsilon$ относительно y.

3) Функции $e'_{i,u}$ порождают всю локальную алгебру. Действительно, каждая функция от y представима в виде $\varphi = \sum\limits_u y^u T^* \varphi_u$, а каждая функция от x — в виде $\varphi_u = \sum c_{i,u} e_i + \sum F_s h_{s,u}$. Итак,

$$\varphi = \sum_{u,i} c_{i,u} y^u T^* e_i + \sum_{u,s} y^u h_{s,u} T^* F_s,$$

т. е. $e'_{i,u}$ порождают $Q(F \circ T)$. Поскольку число функций $e'_{i,u}$ равно $\mu(F \circ T)$, они образуют базис. Предложение 2 доказано.

Определение. *Многочленом Пуанкаре полуквазиоднородного отображения* F (где $\alpha_s = A_s/N$, A_s и N — целые числа) называется многочлен $p_F(t) = \sum \mu_i t^i$, где μ_i — число базисных мономов локальной алгебры отображения F, имеющих квазистепень i/N.

Заметим, что даже при фиксированном типе квазиоднородности p зависит еще от целого числа N. Впрочем, все возможные значения N кратны одному — наименьшему общему знаменателю дробей α_s, и $p_{F;kN,\alpha}(t) = p_{F;N,\alpha}(t^k)$. Размерность локальной алгебры дается формулой $\mu = p_F(1)$. Степень многочлена p_F — это наивысшая из (умноженных на N) квазистепеней мономиальных образующих базиса локальной алгебры.

Теорема (ср. [12], [45], [414]). *Многочлен Пуанкаре (полу)квазиоднородного отображения* F *степени* $\boldsymbol{d}$ *типа* $\boldsymbol{\alpha}$, *для которого* $\alpha_s = A_s/N$, $d_s = D_s/N$; A_s, D_s, N — *целые, дается формулой*

$$p_F(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{D_s} - 1}{t^{A_s} - 1}.$$

Пример. Если $F = \operatorname{grad} f$, где f — (полу)квазиоднородная функция типа $\boldsymbol{\alpha}$ (степени 1), то

$$p_F(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{N-A_s} - 1}{t^{A_s} - 1}.$$

Из теоремы непосредственно вытекает несколько полезных формул.

Следствие 1 (ср. [12], [45], [401]). *Размерность локальной алгебры полуквазиоднородного отображения дается «обобщенной формулой Безу»*

$$\mu = \prod_{s=1}^{n} \frac{d_s}{\alpha_s}.$$

Следствие 2 ([12], [435]). *Локальная алгебра полуквазиоднородного отображения F имеет ровно один базисный моном (квази)степени*

$$d_{\max} = \sum_{s=1}^{n} (d_s - \alpha_s);$$

все мономы более высокого порядка принадлежат идеалу, порожденному компонентами $(F_1, \ldots, F_n)$.

Рассмотрим, в частности, локальную алгебру полуквазиоднородной функции f типа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ степени 1. В этом случае $d_s = 1 - \alpha_s$, и мы получаем такой результат.

Следствие 3 (ср. [12], [45], [401]). *Размерность локальной алгебры полуквазиоднородной функции f типа $(\alpha_1, \ldots \alpha_n)$ степени 1 дается формулой*

$$\mu = \prod\Big(\frac{1}{\alpha_s} - 1\Big).$$

Следствие 4 (см. [12], [435]). *Мономиальный базис локальной алгебры полуквазиоднородной функции f типа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ степени 1 имеет ровно одну образующую (обобщенной) степени $d_{\max} = \sum(1 - 2\alpha_s)$; все мономы более высокой степени принадлежат идеалу $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$.*

Вот еще некоторые непосредственные следствия теоремы.

Следствие (см. [12]). *Многочлен Пуанкаре полуквазиоднородного отображения всегда возвратный*:

$$\mu_i = \mu_{k-i}, \quad \text{где } k = \sum D_s - \sum A_s.$$

Следствие (см. [12]). *Обобщенная степень предпоследнего (по квазистепени) монома в мономиальном базисе локальной алгебры*

квазиоднородной функции типа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *степени* 1 *равна* $d_{\max} - \alpha_{\min}$, *где* $\alpha_{\min} = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Следствие (см. [12]). *Невырожденное квазиоднородное отображение типа* $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}/N$ *степени* $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{D}/N$ *может существовать лишь в случае, когда многочлен* $\prod(t^{D_s} - 1)$ *делится на* $\prod(t^{A_s} - 1)$.

Следствие (см. [12]). *Невырожденная квазиоднородная функция типа* $\boldsymbol{\alpha}$ $(\alpha_s = A_s/N)$ *может существовать лишь в случае, когда* $\prod(t^{N-A_s} - 1)/\prod(t^{A_s} - 1)$ *— многочлен.*

Замечание. В случае функций двух и трех переменных сократимость дроби $\prod(t^{N-A_s} - 1)/\prod(t^{A_s} - 1)$ не только необходима для существования невырожденной квазиоднородной функции с показателями A_s/N, но и достаточна (см. § 13, с. 181). В случае четырех переменных это уже не так, что видно из следующего примера Б. М. Ивлева:

$$N = 265, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 24, \quad A_3 = 33, \quad A_4 = 58.$$

В этом примере частное — полином с неотрицательными коэффициентами, однако все квазиоднородные функции с показателями A_s/N вырождены.

Перечисленные выше результаты неоднократно переоткрывались (Милнор, Орлик и Ваграйх, Саито, Хиронака). Эти результаты фактически имеются уже в книге Бурбаки [45] (см. предложение 2 в п. 1 § 5 гл. 5, разд. «Ряд Пуанкаре градуированной алгебры»).

Доказательство теоремы. Достаточно рассмотреть случай невырожденного квазиоднородного отображения F (см. п. 12.2 и предложение 1). Сделаем замену T из предложения 2. Из вида образующих локальной алгебры $F \circ T$ следует, что

$$p_{F\circ T;1,\mathbf{1}}(t) = p_{F;N,\alpha}(t)\, p_{T;1,\mathbf{1}}(t), \quad \text{где } \mathbf{1} = (1, \ldots, 1).$$

Входящие в эту формулу многочлены Пуанкаре однородных в обычном смысле отображений T и $F \circ T$ легко вычислить явно. В самом деле, для отображения $x = y^A$ имеем $p(t) = \dfrac{t^A - 1}{t - 1}$. Отсюда вытекает, что

$$p_T(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{A_s} - 1}{t - 1}$$

(здесь и далее пара $(N, \boldsymbol{\alpha}) = (1, \mathbf{1})$ в обозначении p не указывается).

С другой стороны, $F \circ T$ — невырожденное отображение, компоненты которого — однородные функции степеней D_s. Следовательно (согласно предложению 1 и п. 12.2), оно имеет такой же многочлен Пуанкаре, как любое другое невырожденное однородное отображение с теми же степенями. В качестве такого отображения можно взять, например, отображение T',

заданное формулой

$$T'(y_1, \ldots, y_n) = (y_1^{D_1}, \ldots, y_n^{D_n}).$$

Итак,

$$p_{F\circ T}(t) = p_{T'}(t) = \prod_{s=1}^{n} \frac{t^{D_s} - 1}{t - 1}.$$

Формула для p_F получается делением формул для $p_{F\circ T}$ и для p_T. Теорема доказана.

12.4. Квазиоднородные диффеоморфизмы и квазиструи. С фильтрацией, определенной типом квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha}$, связано несколько групп и алгебр Ли. В случае обычной однородности это полная линейная группа, группа k-струй диффеоморфизмов, ее подгруппа k-струй с тождественной $(k-1)$-струей и их факторгруппы. Их аналоги в случае квазиоднородной фильтрации определяются следующим образом.

Рассмотрим пространство $\mathbb{C}^n$ с фиксированной системой координат $(x_1, \ldots, x_n)$. Алгебру формальных степенных рядов *) от координат мы будем обозначать через $\boldsymbol{A} = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Мы предполагаем, что задан тип квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Мы будем обозначать через $\boldsymbol{A}_d$ идеал алгебры $\boldsymbol{A}$, образованный рядами порядка d и выше. Далее, через $\boldsymbol{A}_{>d}$ обозначается идеал алгебры $\boldsymbol{A}_d$, образованный рядами, порядок которых строго больше чем d.

Формальный диффеоморфизм $g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ задается набором n степенных рядов без свободных членов и определяет изоморфизм алгебр $g^*\colon \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$ по формуле $g^* f = f \circ g$, где $\circ$ означает подстановку ряда в ряд.

О п р е д е л е н и е. Диффеоморфизм g *имеет порядок* d, если для любого λ выполнено условие

$$(g^* - 1)\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+d}.$$

П р е д л о ж е н и е 1. *Пусть* $d \geqslant 0$. *Тогда множество всех диффеоморфизмов порядка* d *с операцией* $\circ$ *образует группу* $G_d = G_d(\boldsymbol{\alpha})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим прежде всего, что при $d \geqslant 0$ имеем $g^*\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{A}_\lambda$ для всех λ ($g^*\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_\lambda$, так как $d \geqslant 0$, а $(g^*)^{-1}\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_\lambda$, так как факторпространство $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_\lambda$ конечномерно). Поэтому для $a, b \in G_d$ получаем

$$[(a \circ b)^* - 1]\boldsymbol{A}_\lambda = [b^*(a^* - 1) + (b^* - 1)]\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+d},$$
$$((a^{-1})^* - 1)\boldsymbol{A}_\lambda = a^{-1*}(1 - a^*)\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+d},$$

что и требовалось доказать.

*) Бóльшая часть дальнейшего непосредственно переносится на случай, когда $\boldsymbol{A}$ — кольцо сходящихся рядов над $\mathbb{C}$ или над $\mathbb{R}$ или кольцо ростков гладких функций.

Предложение 2. *Группа G_q является нормальным делителем группы G_p, если $q > p \geqslant 0$.*

Доказательство. Определение G_q использует лишь фильтрацию $\{\boldsymbol{A}_\lambda\}$. Эта фильтрация инвариантна относительно группы G_0 и тем более относительно меньшей группы G_p. Следовательно, и подгруппа, определенная в терминах этой фильтрации, инвариантна, что и требовалось доказать.

Группа G_0 особенно важна, так как она играет в квазиоднородном случае роль, которая в однородном случае принадлежит полной группе струй диффеоморфизмов. Следует подчеркнуть, что в квазиоднородном случае некоторые диффеоморфизмы имеют отрицательные порядки и не входят в G_0.

Определение. Группой *d-(квази)струй типа* $\boldsymbol{\alpha}$ называется факторгруппа группы диффеоморфизмов по подгруппе диффеоморфизмов, порядок которых больше чем d:

$$J_d = J_d(\boldsymbol{\alpha}) = G_0/G_{>d}.$$

Ясно, что J_d — конечномерная группа Ли. Имеются естественные факторизации $\pi_{p,q}\colon J_p \to J_q$ $(p > q \geqslant 0)$.

Следует обратить внимание на то, что в обычном однородном случае наша нумерация отличается от стандартной сдвигом на 1: наше J_0 — это группа 1-струй и т. д.

Предложение 3. *Группа J_p получается из J_0 цепочкой расширений с коммутативными слоями. Точнее, пусть $\boldsymbol{A}_p$ — непосредственно следующий за $\boldsymbol{A}_q$ член фильтрации. Тогда ядро K гомоморфизма $\pi_{p,q}$ коммутативно.*

Доказательство. Пусть A, $B \in K$. Рассмотрим каких-либо их представителей a, $b \in G_0$. Справедливо тождество

$$(a \circ b)^* - 1 = (a^* - 1) + (b^* - 1) + (b^* - 1)(a^* - 1).$$

Далее, при любом λ имеем

$$(a^* - 1)\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+p}, \quad (b^* - 1)\boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+p},$$

так как q-струи a и b тривиальны. Следовательно, $[(a \circ b)^* - (b \circ a)^*]\boldsymbol{A}_\lambda \subset \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+2p}$. Поэтому $a \circ b$ и $b \circ a$ определяют в J_p один и тот же элемент, что и требовалось доказать.

Особенное значение имеет группа J_0, являющаяся квазиоднородным обобщением полной линейной группы.

Определение. Диффеоморфизм $g \in G_0$ называется *квазиоднородным типа* $\boldsymbol{\alpha}$, если каждое из пространств квазиоднородных функций степени d (типа $\boldsymbol{\alpha}$) переходит под действием g в себя.

Множество всех квазиоднородных диффеоморфизмов (фиксированного типа) образует группу. Эту группу мы обозначим через H $(= H(\alpha))$ и будем называть *группой квазиоднородных диффеоморфизмов*.

Рассмотрим естественное вложение $i\colon H \to G_0$ и факторизацию $\pi\colon G_0 \to J_0$.

Предложение 4. *Группа J_0 естественно изоморфна группе квазиоднородных диффеоморфизмов H; точнее, сквозное отображение $\pi i\colon H \to J_0$ является изоморфизмом групп Ли.*

Доказательство. а) $\operatorname{Ker}\pi i = e$. Действительно, $\operatorname{Ker}\pi i = H \cap G_{>0}$. Значит, для $h \in \operatorname{Ker}\pi i$ и для любого монома f степени d функция $(h^* - 1)f$ принадлежит пространству однородных функций степени d и в то же время имеет порядок, больший d. Следовательно, $(h^* - 1)f = 0$ для любого монома f, и, значит, $h = e$.

б) $\operatorname{Im}\pi i = J_0$. Для доказательства построим явно обратное отображение $J_0 \to H$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в $\mathbb{C}^n$, диффеоморфизм $g \in G_0$ — представитель струи $j \in J_0$. Рассмотрим ряд $g^* x_i \in \boldsymbol{A}_{\alpha_i}$. Выделим в этом ряду однородную компоненту y_i степени α_i, так что $g^* x_i = y_i + z_i$, $z_i \in \boldsymbol{A}_{>\alpha_i}$. Определим полиномиальное отображение $h^{-1}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ соотношением $h^* x_i = y_i$. Чтобы проверить, что h — диффеоморфизм, вычислим определитель Якоби:

$$\det\left|\frac{\partial(y_i + z_i)}{\partial x_j}\right| = \det\left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| + R.$$

Содержащее производные от z слагаемое R равно 0 в начале координат. Действительно, каждое слагаемое определителя y по x имеет степень однородности 0. Все дополнительные слагаемые, содержащие z, имеют положительный порядок, так как $z_i \in \boldsymbol{A}_{>d_i}$.

Поэтому $R \in \boldsymbol{A}_{>0}$ и $R(0) = 0$. Итак, якобианы отображений g и h в нуле совпадают, поэтому якобиан отображения h в нуле отличен от 0, и, значит, h — диффеоморфизм. Кольцевой автоморфизм h^* сохраняет степени всех мономов, так как он сохраняет степени координат x_i. Следовательно, $h \in H$. Очевидно, что $\pi i h = j$, и предложение доказано.

Предложение 5. *Пусть $d \geqslant 0$. Тогда группа d-квазиструй диффеоморфизмов J_d действует как группа линейных преобразований на пространстве d-квазиструй функций $\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{>d}$.*

Доказательство. Пусть $g \in G_{>d}$. Тогда применение g не меняет d-квазиструю любой функции f, так как $f \circ g - f \in \boldsymbol{A}_{>d}$. Следовательно, отображение $(h, f) \mapsto f \circ h$ задает отображение $J_d \times (\boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{>d}) \to \boldsymbol{A}/\boldsymbol{A}_{>d}$, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае обычной однородности на пространстве k-струй функций действует уже группа $(k-1)$-струй диффеоморфизмов

(в наших обозначениях). Этот факт имеет аналогом в квазиоднородном случае действие группы $(d - \min \alpha_s)$-струй.

12.5. Квазиоднородные векторные поля. Инфинитезимальные аналоги введенных понятий выглядят следующим образом.

О п р е д е л е н и е. Формальное векторное поле $\boldsymbol{v} = \sum v_i \partial/\partial x_i$ *имеет порядок* d, если дифференцирование по направлению поля $\boldsymbol{v}$ повышает порядок любой функции не менее чем на d: $L_{\boldsymbol{v}} A_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+d}$. Обозначим множество всех векторных полей порядка d через $\mathfrak{g}_d$. Введенная фильтрация в модуле векторных полей (т. е. дифференцирований алгебры $\boldsymbol{A}$) согласована с фильтрацией в алгебре:

$$a \in \boldsymbol{A}_d,\ \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_\delta \ \Rightarrow\ a\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_{d+\delta},\ L_{\boldsymbol{v}} a \in \boldsymbol{A}_{d+\delta}.$$

П р е д л о ж е н и е. *Пусть* $d \geqslant 0$. *Тогда*: 1) *скобка Пуассона векторных полей определяет на пространстве* $\mathfrak{g}_d$ *структуру алгебры Ли*, 2) *скобка Пуассона элементов из* $\mathfrak{g}_{d_1}$ *и* $\mathfrak{g}_{d_2}$ *лежит в* $\mathfrak{g}_{d_1+d_2}$, *так что каждое* $\mathfrak{g}_d$ *является идеалом в алгебре Ли* $\mathfrak{g}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f \in \boldsymbol{A}_\lambda$, $\boldsymbol{v}_1 \in \mathfrak{g}_{d_1}$, $\boldsymbol{v}_2 \in \mathfrak{g}_{d_2}$, то $(L_{\boldsymbol{v}_1} L_{\boldsymbol{v}_2} - L_{\boldsymbol{v}_2} L_{\boldsymbol{v}_1}) f \in \boldsymbol{A}_{\lambda+d_1+d_2}$, что и требовалось доказать.

Порядок векторного поля связан с порядками его компонент следующим образом.

П р е д л о ж е н и е. *Поле* $\boldsymbol{v} = \sum v_i \partial/\partial x_i$ *имеет порядок* d (*типа* $\boldsymbol{\alpha}$) *тогда и только тогда, когда каждая его компонента* v_i *является функцией* (*рядом*) *порядка* $d + \alpha_i$.

Доказательству предпошлем следующие определения. *Вектор-мономом* будем называть векторное поле вида $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} \partial/\partial x_i$. *Степенью вектор-монома* (при данном типе квазиоднородности) мы будем называть рациональное (быть может, отрицательное) число $\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle - \alpha_i = \langle \boldsymbol{k} - \mathbf{1}_i, \boldsymbol{\alpha} \rangle$ из той же арифметической прогрессии, которой принадлежат степени обычных мономов. Векторное поле называется (*квази*)*однородным степени* d, если все мономы, входящие в него с ненулевыми коэффициентами, имеют степень d.

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я. Если $\boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}_d$, то $v_i = L_v x_i \in \in \boldsymbol{A}_{d+\alpha_i}$, так как $x_i \in \boldsymbol{A}_{\alpha_i}$. Пусть $v_i = \sum v_{i,\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$. Для любого монома $f = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}$ имеем

$$L_v f = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum l_i v_{i,\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{k}-\mathbf{1}_i}.$$

При этом если $v_i \in \boldsymbol{A}_{d+\alpha_i}$, то $\langle \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geqslant d + \alpha_i$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{k} + \boldsymbol{l} - \mathbf{1}_i, \boldsymbol{\alpha} \rangle \geqslant \geqslant \langle \boldsymbol{l}, \boldsymbol{\alpha} \rangle + d$, т. е. $L_v \boldsymbol{A}_\lambda \subset \boldsymbol{A}_{\lambda+d}$, что и требовалось доказать.

Из предложения 3 п. 12.4 непосредственно вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е. *Алгебра Ли* $\mathfrak{j}_d$ *группы* J_d *d-квазиструй диффеоморфизмов есть факторалгебра* $\mathfrak{j}_d = \mathfrak{g}_0/\mathfrak{g}_{>d}$. *Отображения* $\pi_{p,q}\colon J_p \to J_q$ *индуцируют гомоморфизмы алгебр* $\pi_{p,q*}\colon \mathfrak{j}_p \to \mathfrak{j}_q$. *Ядро отображения алгебры* $\mathfrak{j}_p$ *в алгебру струй непосредственно предыдущего порядка коммутативно.*

Наконец, из предложения 4 п. 12.4 вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е. *Квазиоднородные векторные поля степени* 0 *образуют конечномерную подалгебру Ли* $\mathfrak{a}$ *в алгебре Ли всех полей. Алгебра Ли* $\mathfrak{a}$ *естественно изоморфна алгебре Ли* $\mathfrak{j}_0$ *группы* 0*-струй диффеоморфизмов.*

В дальнейшем мы иногда будем отождествлять векторные поля $\boldsymbol{v}$ с наборами n функций (или рядов) v_i. Следующие два предложения будут использоваться в дальнейшем для приведения полуквазиоднородных функций к нормальной форме.

Л е м м а. *Пусть* F *— степенной ряд порядка* d, *и пусть* $\boldsymbol{v}$ *— формальное векторное поле положительного порядка* δ. *Тогда ряд Тейлора*

$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) = F(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v} + R$$

имеет остаточный член R, *порядок которого строго больше чем* $d + \delta$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду линейности R по F достаточно доказать это для случая, когда F — моном. Пусть $F = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}$, $\boldsymbol{v} = \sum v_i \partial/\partial x_i$. Рассмотрим член ряда Тейлора, содержащий $\partial^{|m|}F/\partial \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$ $(\boldsymbol{m} = (m_1, \ldots, m_n))$. Мономы, входящие в этот член, имеют показатели $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{m} + \sum\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{l}_i$, где $\boldsymbol{l}_i$ — показатель одного из мономов функции $v_i^{m_i}$. Следовательно, $\boldsymbol{l}_i = \sum\limits_{j=1}^{m_i} \boldsymbol{l}_{i,j}$, где $\boldsymbol{l}_{i,j}$ — один из показателей $\boldsymbol{l}$ разложения $v_i = \sum v_{i,\boldsymbol{l}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}$. Итак,

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (\boldsymbol{l}_{i,j} - \mathbf{1}_i).$$

Но по условию $\langle \boldsymbol{k}, \alpha \rangle \geqslant d$, $\langle \boldsymbol{l}_{i,j} - \mathbf{1}_i + \alpha \rangle \geqslant \delta > 0$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{p}, \alpha \rangle \geqslant d + |\boldsymbol{m}|\delta$, где $|\boldsymbol{m}| = m_1 + \ldots + m_n$. Значит, все мономы, входящие в члены выше первой степени ряда Тейлора по $\boldsymbol{v}$, имеют порядок не менее $d + 2\delta$, что и требовалось доказать.

О ц е н к а. *Пусть* $F = F_0 + F_1 + F_2$, *где* $F_0 \in \boldsymbol{A}_d$, $F_1 \in \boldsymbol{A}_{>d}$, $F_2 \in \boldsymbol{A}_{>d+\delta}$; $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_1$, *где* $\boldsymbol{v}_0 \in \mathfrak{g}_\delta$, $\boldsymbol{v}_1 \in \mathfrak{g}_{>\delta}$, $\delta > 0$. *Тогда*

$$F(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})) = F_0(\boldsymbol{x}) + \left[F_1(\boldsymbol{x}) + \frac{\partial F_0}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}_0\right] + R', \quad R' \in \boldsymbol{A}_{>d+\delta}.$$

Доказательство. Обозначим $F_0+F_1=F'$. Имеем $R'=R_1+R_2+R_3+R_4$, где

$$R_1=F'(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))-F'(\boldsymbol{x})-\frac{\partial F'}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{A}_{>d+\delta}\quad\text{(по лемме)},$$
$$R_2=\frac{\partial F_0}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}_1=L_{v_1}F_0\in \boldsymbol{A}_{>d+\delta},$$
$$R_3=\frac{\partial F_1}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}=L_{v}F_1\in \boldsymbol{A}_{>d+\delta},$$
$$R_4=F_2(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}))\in \boldsymbol{A}_{>d+\delta},$$

что и требовалось доказать.

12.6. Нормальная форма полуквазиоднородной функции. Рассмотрим локальную алгебру квазиоднородной или полуквазиоднородной функции f степени d. Зафиксируем какую-либо систему мономов, образующих базис этой алгебры.

Определение. Моном называется *верхним* или *лежащим выше диагонали* (соответственно *нижним*, *диагональным*), если он имеет степень больше d (соответственно меньше d, ровно d) при данных показателях квазиоднородности.

Заметим, что числа верхних, диагональных и нижних базисных мономов не зависят от выбора базиса (см. п. 12.2).

Пусть $e_1,\ldots,e_s$ — система всех верхних базисных мономов фиксированного базиса локальной алгебры функции f_0.

Теорема (см. [12]). *Всякая полуквазиоднородная функция с квазиоднородной частью f_0 эквивалентна функции вида $f_0+\sum c_ke_k$, где c_k — константы.*

Доказательство получается применением следующей леммы.

Лемма. *Пусть f_0 — квазиоднородная функция степени d, и пусть $e_1,\ldots,e_r$ — все базисные мономы фиксированной степени $d'>d$ в локальной алгебре функции f_0. Тогда всякий ряд вида f_0+f_1, где порядок функции f_1 больше d, формальным диффеоморфизмом приводится к виду f_0+f_1', где в ряду f_1' члены степени меньше d' те же, что в ряду f_1, а члены степени d' сводятся к $c_1e_1+\ldots+c_re_r$.*

Доказательство. Обозначим через g сумму членов степени d' в f_1. Существует разложение (если угодно, с точностью до членов порядка выше d', но на самом деле и без них)

$$g=\sum\frac{\partial f_0}{\partial x_i}\,v_i(\boldsymbol{x})+c_1e_1+\ldots+c_re_r,$$

так как $e_1,\ldots,e_r$, — базисные мономы. Векторное поле $\boldsymbol{v}$, входящее в эту формулу, можно заменить однородным степени $\delta=d'-d>0$, не нарушая

справедливости формулы (для доказательства достаточно разложить $\boldsymbol{v}$ на однородные составляющие).

Рассмотрим теперь формальную замену $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y})$. Докажем, что это формальный диффеоморфизм. Действительно, поле $\boldsymbol{v}$ имеет положительную степень δ, поэтому если занумеровать координаты в порядке убывания показателей α_i, то матрица Якоби замены в точке 0 будет треугольной, с единицами на диагонали. Применяя оценку из п. 12.5, находим

$$f(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{v}(\boldsymbol{u})) = f_0(\boldsymbol{y}) + [f_1(\boldsymbol{y}) + (c_1 e_1(\boldsymbol{y}) + \ldots + c_r e_r(\boldsymbol{y})) - g(\boldsymbol{y})] + R'(\boldsymbol{y})$$

(в старинных обозначениях). Поскольку порядок функции R' больше d', лемма доказана.

Доказательство теоремы. Применяя лемму к функции f_0 и мономам ближайшей более высокой степени d', мы приведем к желаемому виду члены степени d'. Применяя ту же лемму к получившемуся ряду $f_0 + f_1'$ и мономам следующей степени d'', мы, не меняя членов степени d и d', приведем к желаемому виду члены степени d''. Продолжая этот процесс, мы добьемся нужной нормальной формы с точностью до членов сколь угодно высокой степени (и даже, если угодно, полностью приведем формальный ряд к формальной нормальной форме формальным диффеоморфизмом; это следует из того, что степени полей $\boldsymbol{v}$, применяемых на разных этапах, растут).

До этого момента мы нигде не пользовались конечностью кратности μ, так что сформулированное формальное утверждение доказано без этого предположения. Если же μ конечно, то достаточно длинный отрезок ряда Тейлора (степени $\mu + 1$, ср. п. 6.4) функции эквивалентен самой функции, поэтому приведение к нормальной форме осуществляется настоящим диффеоморфизмом.

12.7. Фильтрация Ньютона. Часто бывает полезно рассматривать фильтрации, в которых роль диагонали играет ломаная Ньютона (или, в многомерном случае, многогранник, обращенный выпуклостью к 0). Формальное определение состоит в следующем.

Пусть $\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_p$ — фиксированный набор типов квазиоднородности. В i-й фильтрации моном $\boldsymbol{x^k}$ имеет степень $\langle \boldsymbol{\alpha}_i, \boldsymbol{k} \rangle = \varphi_i(\boldsymbol{k})$. Определим теперь *ньютонову степень* монома $\boldsymbol{x^k}$ как

$$\varphi(\boldsymbol{k}) = \min[\varphi_1(\boldsymbol{k}), \ldots, \varphi_p(\boldsymbol{k})].$$

Определение. Степенной ряд имеет *ньютонов порядок* d, если все его мономы имеют ньютонову степень d или выше.

Заметим, что уравнение $\varphi(\boldsymbol{k}) = 1$ определяет в пространстве R^n показателей $\boldsymbol{k}$ некоторую гиперповерхность Γ, обращенную выпуклостью к 0. Мы

будем называть Γ *диаграммой Ньютона**). В этих терминах можно сказать, что моном имеет ньютонову степень d, если и только если его показатель лежит на гиперповерхности $d\Gamma$, полученной из Γ гомотетией с коэффициентом d. Точно так же ряд имеет ньютонов порядок d, если показатели всех его мономов лежат на гиперповерхности $d\Gamma$ и за ней.

Сумму членов наименьшей (ньютоновой) степени в данном степенном ряду мы будем называть *главной частью* ряда. *Ньютоново-однородной функцией степени d* мы будем называть многочлен, все мономы которого имеют (ньютонову) степень d.

Аналогичные понятия определяются для векторных полей. Степень монома $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{l}}\partial/\partial x_i$ определяется как

$$\varphi(\boldsymbol{l}-\mathbf{1}_i)=\min_{1\leqslant j\leqslant p}\langle\boldsymbol{\alpha}_j,\boldsymbol{l}-\mathbf{1}_i\rangle.$$

Заметим, что для любых функций f, g и любого векторного поля $\boldsymbol{v}$ имеем:

порядок $fg\geqslant$ порядок $f+$ порядок g,

порядок $\sum\dfrac{\partial f}{\partial x_i}v_i\geqslant$ порядок $f+$ порядок $\boldsymbol{v}$.

Группы диффеоморфизмов порядка d, группы d-струй диффеоморфизмов и соответствующие алгебры Ли определяются так же, как в случае квазиоднородных фильтраций. Не имеет аналога для ньютоновых фильтраций лишь группа квазиоднородных диффеоморфизмов.

О п р е д е л е н и е. Ньютоново-однородная функция f_0 степени d *удовлетворяет условию A*, если для всякой функции g порядка $d+\delta>d$, принадлежащей идеалу, натянутому на производные функции f_0, существует разложение

$$g=\sum\frac{\partial f_0}{\partial x_i}v_i+g',$$

где поле $\boldsymbol{v}$ имеет порядок δ, а функция g' — порядок выше чем $d+\delta$.

Квазиоднородная функция всегда удовлетворяет условию A.

З а м е ч а н и е. Алгебраисты формулируют условие A так: отображение фильтрованных пространств $\boldsymbol{v}\mapsto\sum\dfrac{\partial f_0}{\partial x_i}v_i$ является *строгим*.

Рассмотрим базис локальной алгебры ньютоново-однородной функции f_0 конечной кратности μ.

О п р е д е л е н и е. Базис $e_1,\ldots,e_\mu$ из однородных элементов называется *правильным*, если для любого D элементы базиса степени D незави-

*) *Многогранник Ньютона* степенного ряда можно определить как выпуклую оболочку объединения положительных квадрантов $\mathbb{R}^n_+$ с вершинами в показателях мономов, входящих в ряд с ненулевыми коэффициентами; *диаграмма Ньютона* есть объединение компактных граней этого многогранника.

симы по модулю суммы идеала $I = (\partial f_0/\partial x)$ и пространства $\boldsymbol{A}_{>D}$ функций, порядок которых больше чем D.

Предложение. *Правильный базис всегда существует. Более того, всегда существует правильный базис, состоящий из мономов.*

Доказательство. Мономы, показатели которых принадлежат $D\Gamma$, порождают $\boldsymbol{A}_D \bmod \boldsymbol{A}_{>D}$. Поэтому их образы в $\boldsymbol{A}_d/((\boldsymbol{A}_D \cap I) + \boldsymbol{A}_{>D})$ порождают это линейное пространство, и, значит, из этих образов можно выбрать базис указанного факторпространства. Соответствующие выбранным базисным векторам прообразы являются мономами из $\boldsymbol{A}_D$, и мы включим эти мономы в наш базис локальной алгебры.

При достаточно больших D имеем $\boldsymbol{A}_D \subset I$ (так как $\mu < \infty$). Поэтому построенная система мономов конечна. Из построения ясно, что каждый вектор из $\boldsymbol{A}$ представим в виде линейной комбинации выбранных мономов и элементов идеала. Наконец, если бы наименьшая из степеней мономов, входящих с ненулевыми коэффициентами в соотношение $c_1 e_1 + \ldots + c_\mu e_\mu \in I$, была равна $D < \infty$, то образы мономов e_i степени D в факторпространстве $\boldsymbol{A}_D/((\boldsymbol{A}_D \cap I) + \boldsymbol{A}_{>D})$ были бы зависимы, вопреки выбору e_i. Следовательно, $\{e_i\}$ — базис локальной алгебры, что и требовалось доказать.

Число элементов правильного мономиального базиса, имеющих данную (ньютонову) степень однородности, не зависит от выбора базиса в локальной алгебре. Моном правильного базиса называется *диагональным* (*наддиагональным*), если его степень равна (больше) степени рассматриваемой функции f_0.

Теорема. *Если главная часть f_0 функции f удовлетворяет условию A и имеет конечную кратность μ, то функция f диффеоморфизмом приводятся к виду $f_0 + c_1 e_1 + \ldots + c_s e_s$, где $e_1, \ldots, e_s$ — наддиагональные мономы правильного базиса.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы п. 12.6.

Пример. Рассмотрим функцию $f_0 = x^a + \lambda x^2 y^2 + y^b$, где $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, $\lambda \neq 0$. Покажем, что: 1) $\mu = a + b + 1$; 2) *система мономов* $1, x, \ldots, x^{a-1}, y, \ldots, y^b$ *является правильным базисом*; 3) *выполнено условие A для фильтрации, заданной ломаной* Γ *с последовательными вершинами* $(a, 0)$, $(2, 2)$, $(0, b)$.

Для доказательства всех этих утверждений полезно провести некоторые геометрические конструкции на плоскости показателей степени. Эти конструкции сводят анализ локальной алгебры к последовательности геометрических операций, напоминающей решение кроссворда. Техника «решения кроссвордов» применима не только в этом примере, и мы изложим ее в несколько большем объеме, чем это необходимо для его разбора.

А именно предположим, что каждая из частных производных данной функции содержит не более двух мономов (что, очевидно, выполнено для f_0). Соединим показатели мономов частной производной по x отрезком. Этот отрезок мы будем называть *основным x-отрезком*. Аналогичные основные отрезки определяются для остальных переменных. В нашем примере два основных отрезка параллельны звеньям ломаной Г (рис. 48).

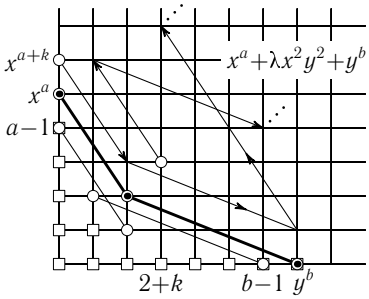


Рис. 48

Основные отрезки изображают соотношения между образами своих мономов в локальной алгебре. Рассмотрим следствия этих соотношений. Назовем *допустимым x-отрезком* всякий сдвиг основного x-отрезка на целочисленный вектор с неотрицательными компонентами. Заметим, что два допустимых отрезка могут лежать друг на друге и даже геометрически совпадать (если один из них x-отрезок, а другой — y-отрезок). В нашем примере, впрочем, этого не происходит.

Два допустимых отрезка называются *связанными*, если они имеют общий конец. *Допустимой цепью* называется такой набор допустимых отрезков, что любой из отрезков набора соединен с любым другим последовательностью последовательно связанных отрезков набора. Допустимая цепь называется *максимальной*, если она не является частью другой допустимой цепи.

Циклом называется конечная последовательность последовательно связанных допустимых отрезков, в которой последний отрезок связан с первым. Цикл называется *тривиальным*, если при его обходе вдоль x-отрезков и y-отрезков придется идти в одну сторону столько же раз, сколько в другую. (В нашем примере все циклы тривиальны, но если бы мы рассмотрели случай $a = b = 4$, то нам встретился бы и нетривиальный цикл $(1, 3) \to (3, 1) \to (1, 3)$ из одного x- и одного y-отрезка.)

Теперь мы можем сформулировать правила «решения кроссворда» для функции f с конечнократной критической точкой.

П р е д л о ж е н и е. 1) *Если показатель монома принадлежит бесконечной допустимой цепи, то моном принадлежит идеалу, натянутому на частные производные функции.*

2) *Если все циклы тривиальны, то размерность μ локальной алгебры равна числу максимальных цепей. В этом случае можно получить базис локальной алгебры, выбрав по одному (любому) мономы из каждой максимальной цепи.*

3) *Если, кроме того, задана фильтрация, то, выбирая из всякой максимальной цепи один из мономов наивысшего порядка, мы получим правильный базис.*

Доказательство непосредственно вытекает из определений.

П р е д л о ж е н и е. *В примере* $f_0 = x^a + \lambda x^2y^2 + y^b$ *максимальные допустимые цепи следующие*:

1) *каждая из точек* $1, x, \ldots, x^{a-2}, y, \ldots, y^{b-2}, xy$ *имеет тривиальную допустимую цепь*;

2) *имеются три конечные максимальные допустимые цепи*:

$$x^{a-1} \to xy^2, \quad x^2y \to y^{b-1}, \quad x^a \to x^2y^2 \to y^b;$$

3) *из всех остальных точек выходят бесконечные допустимые цепи.*

Действительно, из рис. 48 видно, что допустимый отрезок $x^py^q \to \to x^{p-1+a}y^{q-2}$ повышает порядок при $q > p \geqslant 1$, а $x^py^q \to x^{p-2}y^{q-1+b}$ — при $p > q \geqslant 1$. Порядки мономов с $p = 0$, или с $q = 0$, или с $p = q$ повышаются за два шага:

$$x^{a+k} \to x^{2+k}y^2 \to x^ky^{b+1},$$
$$x^{2+k}y^{2+k} \to x^{k+a-1}y^{k+b-1}.$$

Следовательно, максимальная допустимая цепь всякого монома, кроме перечисленных в 1) и 2), содержит мономы сколь угодно большого порядка и, значит, бесконечна.

Итак, указанные выше мономы образуют правильный базис и $\mu = a + b + 1$. Для проверки условия A достаточно вычислить порядки коэффициентов соотношений, которые мы построили выше, описывая допустимые цепи. Это вычисление несложно и здесь не приводится.

Итак, число мономов правильного базиса выше Γ оказалось равным 0. Поэтому из теоремы на с. 175 вытекает такой результат.

С л е д с т в и е. *Всякая функция* f *с главной частью* $f_0 = x^a + \lambda x^2y^2 + y^b$, *где* $\lambda \neq 0$, $a \geqslant 4$, $b \geqslant 5$, *эквивалентна своей главной части.*

Предположим, что диаграмма Ньютона функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет по точке на каждой из координатных осей (это не является ограничением, поскольку f имеет достаточную струю).

Т е о р е м а (Кушниренко [365]). *Обозначим через* V *объем* n*-мерной области положительного ортанта ниже диаграммы Ньютона, через* V_i — $(n-1)$*-мерный объем под диаграммой Ньютона на* i*-й координатной гиперплоскости, через* $V_{i,j}$ — $(n-2)$*-мерный объем на координатной плоскости, не содержащей* i*-го и* j*-го базисных векто-*

ров, и т. д. Тогда для всех функций f с данной диаграммой Ньютона

$$\mu(f) \geqslant n!V - (n-1)! \sum_i V_i + (n-2)! \sum_{i<j} V_{i,j} - \ldots \pm 1,$$

причем для почти всех f имеет место равенство.

Например, для почти всех функций двух переменных с фиксированной диаграммой Ньютона $\mu = 2S - a - b + 1$, где S — площадь под диаграммой, а a и b — координаты точек диаграммы на осях (рис. 49).

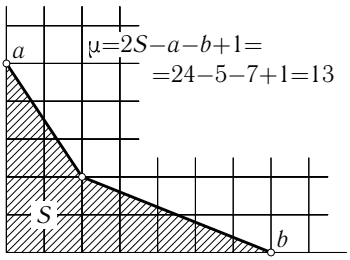


Рис. 49

Д. Н. Бернштейн, А. Г. Кушниренко и А. Г. Хованский получили далеко идущие обобщения этой теоремы. В частности, *число решений системы полиномиальных уравнений $P_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, P_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$, для которых ни одна из координат x_s не равна нулю, равно умноженному на $n!$ смешанному объему Минковского выпуклых оболочек носителей многочленов P_s (для почти всех наборов многочленов P_s с данными выпуклыми оболочками носителей)*. Получены также аналогичные формулы, выражающие через геометрию многогранников другие числовые инварианты аффинных полных пересечений. Например, число голоморфных форм на гиперповерхности равно числу целых точек внутри выпуклой оболочки носителя (для почти всех гиперповерхностей с данной выпуклой оболочкой носителя). По поводу этих результатов см. [38], [221], [223], [224].

§ 13. Классификация квазиоднородных функций

Здесь описаны методы приведения квазиоднородных функций к нормальным формам посредством квазиоднородных диффеоморфизмов.

13.1. Квазиоднородные функции двух переменных.

Предложение. *Всякая невырожденная квазиоднородная функция двух переменных x, y коранга 2 содержит с ненулевыми коэффициентами либо мономы x^a и y^b, либо x^a и xy^b, либо $x^a y$ и y^b, либо $x^a y$ и $y^b x$.*

Доказательство. В противном случае функция делилась бы на x^2 или на y^2 и критическая точка 0 не была бы изолированной.

Теорема 1. *Предположим, что на диагонали Γ лежат ровно два монома невырожденной квазиоднородной функции двух переменных. Тогда в качестве базиса локальной алгебры можно выбрать*

следующую систему мономов:

f	α_1, α_2	μ	Базисные мономы $x^k y^l$
$x^a + y^b$	$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$	$(a-1)(b-1)$	$0 \leqslant k \leqslant a-2,$ $0 \leqslant l \leqslant b-2$
$x^a y + y^b$	$\frac{b-1}{ab}, \frac{1}{b}$	$(a-1)b+1$	$0 \leqslant k \leqslant a-2,$ $0 \leqslant l \leqslant b-1; x^{a-1}$
$x^a y + y^b x$	$\frac{b-1}{ab-1}, \frac{a-1}{ab-1}$	ab	$0 \leqslant k \leqslant a-1,$ $0 \leqslant l \leqslant b-1$

(*функцию f можно привести к указанному в таблице виду растяжением и перенумерацией координат*).

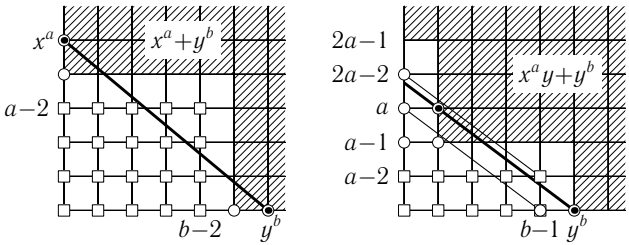


Рис. 50

Доказательство. Рассмотрим рис. 50. На этом рисунке заштрихована область мономов, попавших в идеал (f_x, f_y). Тонкие косые линии — допустимые цепи (см. п. 12.7). Из рисунка видно, что каждый моном, не входящий в идеал, можно соединить с мономом из таблицы допустимым путем. Значит, табличные мономы порождают локальную алгебру. Но их число равно размерности локальной алгебры, вычисленной по формуле п. 12.3. Следовательно, они образуют базис, что и утверждалось.

Определение. *Внутренней модальностью* m_0 квазиоднородной функции называется общее число диагональных и наддиагональных базисных мономов мономиального базиса локальной алгебры.

Теорема 2. *Квазиоднородные функции двух переменных с* $m_0 = 0$ *исчерпываются* (*с точностью до эквивалентности*) *следующим списком*:

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$x^{k+1} + y^2$	$x^2 y + y^{k-1}$	$x^3 + y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$

Все невырожденные функции с такими же показателями квазиоднородности приводятся к указанным в таблице нормальным формам.

Доказательство. Если второй дифференциал не равен тождественно 0, то функция эквивалентна A_k. Если коранг функции равен 2, то показатели однородности даются теоремой 1. Согласно п. 12.3 (обобщенная) степень базисного монома высшей степени равна $d_{\max} = n - 2\sum \alpha_i = 2 - 2(\alpha_1 + \alpha_2)$. Условие $d_{\max} < 1$, эквивалентное условию $m_0 = 0$, определяет на плоскости переменных (a, b) в каждом из трех случаев теоремы 1 область под гиперболой. Перечисление целых точек в этих областях дает серии A, D, E.

Сказанное станет, быть может, более понятным, если заметить, что классификация особенностей с $m_0 = 0$ сводится к перечислению прямых на плоскости, проходящих ниже точки (2, 2), пересекающих оси координат на расстоянии не менее 2 от 0 и содержащих целую точку с абсциссой, не превосходящей 1, и целую точку с ординатой, не превосходящей 1, в положительном квадранте (поскольку условие $d_{\max} < 1$ означает, что диагональ лежит ниже точки (2, 2)). Легко проверить, что такие прямые исчерпываются (с точностью до переименования осей) нашим списком и что невырожденные квазиоднородные функции с такими же показателями квазиоднородности, как у функций A, D или E, приводятся к указанному в таблице виду.

Замечание. Классификация особенностей коранга 2 с $m_0 = 1$ сводится к перечислению прямых на плоскости показателей, проходящих через точку (2, 2) или выше ее, но ниже точек (2, 3) и (3, 2).

Обобщением этого замечания является следующее правило для вычисления внутренней модальности функции двух переменных.

Проведем из точки (2, 2) на плоскости показателей горизонтальный и вертикальный лучи в сторону увеличения показателей а рассмотрим многоугольник, ограниченный отрезками этих лучей и ломаной Ньютона.

Модальность, по-видимому, равна *числу точек внутри и на границах указанного многоугольника* для Γ-невырожденных функций с данной диаграммой Ньютона Γ (функция Γ-*невырождена*, если кратность μ имеет наименьшее возможное при данной диаграмме Γ значение).

А. Г. Кушниренко [365] доказал, что *внутренняя модальность* Γ-*невырожденной функции* (число базисных мономов правильного базиса на Γ и выше) *действительно равна числу целых точек в указанном многоугольнике*.

13.2. Квазиоднородные функции трех переменных. Невырожденные квазиоднородные функции трех переменных делятся на семь (пересекающихся) классов.

Предложение (см. [12]). *Всякая невырожденная квазиоднородная функция степени* 1 *от трех переменных коранга* 3 *содержит с ненулевыми коэффициентами* (*при подходящей нумерации перемен-*

ных) *хотя бы один из семи наборов мономов, указанных в следующей таблице*:

Класс	Мономы	$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$	μ
I	x^a, y^b, z^c	$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$	$(a-1)(b-1)(c-1)$
II	$x^a, y^b, z^c y$	$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{b-1}{bc}$	$(a-1)(bc-b+1)$
III	$x^a, y^b x, z^c x$	$\frac{1}{a}, \frac{a-1}{ab}, \frac{a-1}{ac}$	$\frac{(ab-a+1)(ac-a+1)}{a-1}$
IV	$x^a, y^b z, z^c y$	$\frac{1}{a}, \frac{c-1}{bc-1}, \frac{b-1}{bc-1}$	$(a-1)bc$
V	$x^a, y^b z, z^c x$	$\frac{1}{a}, \frac{ac-a+1}{abc}, \frac{a-1}{ac}$	$ac(b-1)+a-1$
VI	$x^a y, y^b x, z^c x$	$\frac{b-1}{ab-1}, \frac{a-1}{ab-1}, \frac{(a-1)b}{(ab-1)c}$	$\frac{a(abc-c-ab+b)}{a-1}$
VII	$x^a y, y^b z, z^c x$	$\frac{bc-c+1}{abc+1}, \frac{ac-a+1}{abc+1}, \frac{ab-b+1}{abc+1}$	abc

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начало классификации проходит при любом числе переменных $x_1, \ldots, x_n$. Зафиксируем номер i координаты x_i. При отсутствии всех мономов вида $x_i^a x_j$ ось x_i состоит сплошь из критических точек. Поэтому в пространстве показателей на расстоянии не более 1 от каждой оси координат есть показатель присутствующего монома. Выбрав по одному такому моному близ каждой оси (что возможно, так как второй дифференциал $\equiv 0$), мы получаем отображение $i \mapsto j$ множества осей координат в себя. Таким образом, мы должны расклассифицировать отображения конечного множества в себя. При $n = 3$ это нетрудно сделать. Множество из трех точек имеет семь эндоморфизмов, не переводящихся друг в друга перенумерацией точек (рис. 51), что и дает семь классов, указанных в таблице.

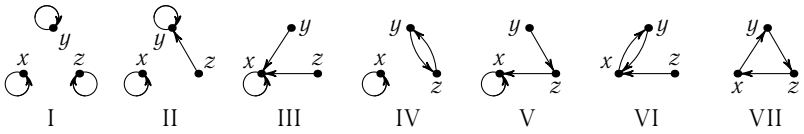


Рис. 51

П р е д л о ж е н и е. 1) *Невырожденная квазиоднородная функция класса* III *существует, если и только если наименьшее общее кратное* $[b, c]$ *чисел* b *и* c *делится на* $a - 1$.

2) *Невырожденная квазиоднородная функция класса* VI *существует, если и только если* $(b-1)c$ *делится на произведение* $a - 1$ *и наибольшего общего делителя* (b, c) *чисел* b *и* c.

3) *Невырожденные квазиоднородные функции остальных пяти классов существуют при любых* a, b, c.

Доказательство. Для доказательства утверждения 3) достаточно сложить указанные в таблице мономы. Для доказательства утверждений 1) и 2) заметим, что если квазиоднородная функция класса III или VI не содержит ни одного монома $y^p z^q$ ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$), то она вырождена. Действительно, нулевое множество уровня состоит в этом случае из двух компонент (одна из них — плоскость $x = 0$). Значит, критическая точка не изолирована (множество критических точек содержит линию пересечения компонент) и функция вырождена.

Обратно, легко проверить, что квазиоднородная функция

$$\text{III: } x^a + xy^b + xz^c + \varepsilon y^p z^q \quad \text{или} \quad \text{VI: } x^a y + y^b x + z^c x + \varepsilon y^p z^q$$

при почти всех ε невырождена.

Остается доказать, что диагональный моном вида $y^p z^q$ существует в точности при указанных выше условиях делимости.

В случае III обобщенная степень монома $y^p z^q$ равна $(pc+qb)(a-1)/abc$. Моном $y^p z^q$ диагональный, если и только если эта степень равна 1, т. е. если $(pc + qb)(a - 1) = (a - 1)bc + bc$. Следовательно, bc делится на $a - 1$, а частное (равное $pc + qb - bc$) делится на (b, c). Иными словами, bc делится на произведение $a - 1$ и (b, c), т. е. $[b, c]$ делится на $a - 1$.

Обратно, пусть $[b, c]$ кратно $a - 1$. Тогда число $\dfrac{abc}{a-1} = bc + \dfrac{bc}{a-1}$ целое и делится на (b, c). Но каждое число, большее bc и кратное (b, c), представимо в виде $pc + qb$ ($p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$) *). Поэтому $abc/(a - 1) = pc + qb$ и моном $y^p z^q$ диагональный.

В случае VI условие диагональности имеет вид

$$(a - 1)(pc + qb) = (a - 1)bc + (b - 1)c.$$

Поэтому $(b - 1)c$ делится на произведение $(a - 1)(b, c)$. Обратно, если $(b - 1)c$ делится на $(a - 1)(b, c)$, то $bc + \dfrac{(b-1)c}{a-1}$ представимо в виде $pc + qb$, где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

Примером невырожденной функции класса III является $x^7 + xy^3 + xz^4 + \varepsilon x^3 y^2$, класса VI — $x^5 y + xy^3 + xz^4 + \varepsilon x^3 y^2$.

Замечание. Наши результаты позволяют легко перечислить (полу)квазиоднородные особенности внутренней модальности $m_0 = 0$ или 1

*) Действительно, на прямой $\{p, q: pc + qb = bc\}$ имеется не менее двух целых точек в квадранте $p \geqslant 0$, $q \geqslant 0$ (точки $(b, 0)$ и $(0, c)$). На параллельной прямой $pc + qb = m > bc$ расстояние между целыми точками такое же. Поэтому уже при $m \geqslant (b - 1)(c - 1)$ на отрезке прямой $pc + qb = m$ в пределах того же квадранта есть целая точка.

(см. [12]). Из получающихся списков видно, что в этих случаях внутренняя модальность совпадает с обычной. Для (полу)квазиоднородных функций большей модальности А. Г. Кушниренко и А. М. Габриэлов [89] доказали совпадение модальностей для (полу)однородных функций. Внутренняя модальность m_0 не больше обычной: $m_0 \leqslant m$. А. Н. Варченко (1981 г.) доказал, что $m_0 = m$.

13.3. Нормальные формы полуквазиоднородных функций. Для приведения квазиоднородных функций к нормальным формам нужно классифицировать орбиты действия группы квазиоднородных диффеоморфизмов на пространствах квазиоднородных функций. Вычисления основаны на двух общих теоремах о квазиоднородных функциях (теоремы A и B ниже). Для формулировки этих теорем введем некоторые определения и обозначения.

Пусть $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — набор положительных рациональных чисел, задающий тип квазиоднородности в пространстве $\mathbb{C}^n$ с фиксированными координатами $(x_1, \ldots, x_n)$.

Алгебра Ли группы квазиоднородных диффеоморфизмов называется *квазиоднородной алгеброй* и обозначается через $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$. Например, $\mathfrak{a}(1, 1) = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$.

О п р е д е л е н и е. *Носителем квазиоднородных функций степени d типа $\boldsymbol{\alpha}$* называется множество всех целых неотрицательных точек $\boldsymbol{m}$ на гиперплоскости $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = d$. Носитель называется полным, если он не принадлежит аффинному подпространству размерности меньше $n - 1$ в $\mathbb{C}^n$.

Квазиоднородные функции можно рассматривать как функции, заданные на носителе $\left(\sum a_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}\right.$ имеет в $\boldsymbol{m}$ значение $\left.a_{\boldsymbol{m}}\right)$. Все такие функции образуют линейное пространство $\mathbb{C}^{\nu}$, где ν — число точек носителя. Группа квазиоднородных диффеоморфизмов и квазиоднородная алгебра $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ действуют на этом пространстве $\mathbb{C}^{\nu}$. Из определений непосредственно вытекает, что *алгебра Ли $\mathfrak{a}(\alpha)$ порождается как $\mathbb{C}$-линейное пространство всеми мономиальными полями $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}}\partial_i$, для которых* $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\alpha}) = \alpha_i$ (здесь и далее $\partial_i = \partial/\partial x_i$). Например, n мономов $x_i\partial_i$ принадлежат $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ при любых $\boldsymbol{\alpha}$.

О п р е д е л е н и е. *Корнями* квазиоднородной алгебры $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ называются все ненулевые векторы $\boldsymbol{m}$ пространства показателей, лежащие в плоскости $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$ и имеющие вид $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p} - \mathbf{1}_i$ (где $\mathbf{1}_i$ — вектор, у которого отлична от 0 только i-я компонента, равная 1, а вектор $\boldsymbol{p}$ имеет целые неотрицательные компоненты).

Иными словами, $\boldsymbol{m}$ — корень, если $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{p}}\partial_i$ — мономиальное поле из $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$, отличное от $x_i\partial_i$.

Заметим, что i восстанавливается по корню $\boldsymbol{m}$, так как у вектора $\boldsymbol{m}$ ровно одна отрицательная координата, $m_i = -1$ (все компоненты вектора $\boldsymbol{m}$ не могут быть неотрицательными, поскольку $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{\alpha}) = 0$).

Т е о р е м а A (см. [16]). *Предположим, что носитель полон. Тогда действие алгебры Ли* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *на пространстве функций на носителе однозначно определяется по классу аффинной эквивалентности пары* (*носитель*, *система корней*).

Т е о р е м а B (см. [16]). *Квазиоднородная алгебра Ли* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *определяется своей системой корней* (*как подмножеством линейного пространства*, *натянутого на корни*) *и своей размерностью с точностью до конечного числа вариантов.*

Иными словами, если не различать алгебры, получающиеся одна из другой прямым сложением с тривиальной (коммутативной) алгеброй, то *существует лишь конечное число неизоморфных алгебр Ли* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *с линейно эквивалентными системами корней.*

В нужных нам примерах это конечное число равно 1.

З а м е ч а н и я. Аффинные эквивалентности носителей и линейные эквивалентности систем корней в теоремах A и B не обязаны переводить в себя ни координатный симплекс $m_i \geqslant 0$ на плоскости $(\boldsymbol{m}, \alpha) = d$, ни решетку целых неотрицательных векторов $\boldsymbol{m}$ в $\mathbb{C}^n$. Группы квазиоднородных диффеоморфизмов и их орбиты в пространствах квазиоднородных функций в условиях теорем A и B не обязаны совпадать, однако связные компоненты орбит совпадают.

13.4. Доказательство теоремы B. Пусть $M \subset \mathbb{C}^r \subset \mathbb{C}^n$ — система корней алгебры $\mathfrak{a}(\alpha)$, порождающая плоскость $\mathbb{C}^r$ в $\mathbb{C}^n$ $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$. Сопоставим каждому корню $\boldsymbol{m} \in M$ базисный вектор $e_{\boldsymbol{m}}$ в $\mathbb{C}^\nu$ (где ν — число корней). Рассмотрим r-мерное линейное пространство $H = \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^r, \mathbb{C})$ и прямую сумму $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbb{C}^\nu$.

Л е м м а. *В пространстве* $\mathfrak{b} = H \oplus \mathbb{C}^\nu$ *можно задать следующую структуру алгебры Ли*:

(1) $[h_1, h_2] = 0$ $(\forall h_1, h_2 \in H)$;

(2) $[h, e_{\boldsymbol{m}}] = (h, \boldsymbol{m}) e_{\boldsymbol{m}}$ $(\forall h \in H, \boldsymbol{m} \in M)$;

(3) $[e_{\boldsymbol{m}_1}, e_{\boldsymbol{m}_2}] = N_{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2} e_{\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2}$, *где* $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 \neq 0$,

$$
\begin{aligned}
N_{\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2} &= 0, \ \textit{если } \boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2 \textit{ — не корень};\\
&= -\max\{\lambda\colon \boldsymbol{m}_1 + \lambda \boldsymbol{m}_2 \textit{ — корень}\}, \ \textit{если этот максимум} > 1;\\
&= +\max\{\lambda\colon \boldsymbol{m}_2 + \lambda \boldsymbol{m}_1 \textit{ — корень}\}, \ \textit{если этот максимум} > 1;\\
&= \pm 1, \ \textit{если оба максимума} = 1
\end{aligned}
$$

(*случай, когда оба максимума* > 1, *невозможен*);

(4) $[e_{\boldsymbol{m}}, e_{-\boldsymbol{m}}] = h_{\boldsymbol{m}}$, *где функция* $h_{\boldsymbol{m}} \in H$ *меняет знак при отражении* $\mathbb{C}^r$, *сохраняющем* M *и переводящем* $\boldsymbol{m}$ *в* $-\boldsymbol{m}$ *и нормирована*

условием $h_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{m}) = 2$ (*такое отражение существует и единственно для любой пары противоположных корней*).

Квазиоднородная алгебра Ли $\mathfrak{a}(\alpha)$ *изоморфна прямой сумме алгебры Ли* $\mathfrak{b}$ (*получающейся при некотором выборе знаков* $\pm$ *в* (3)) *и тривиальной* (*коммутативной*) *алгебры*:

$$\mathfrak{a}(\alpha) \cong \mathfrak{b} \oplus \mathbb{C}^{n-r}.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим мономиальный базис $\mathfrak{a}(\alpha)$ над $\mathbb{C}$ и обозначим базисные мономы так:

$$h_i = x_i\partial_i, \quad e_{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}} x_i \partial_i$$

(i определяется корнем $\boldsymbol{m}$ однозначно). Покажем, что эти образующие удовлетворяют соотношениям коммутации (1)—(4).

Будем рассматривать дифференцирования h_i и $e_{\boldsymbol{m}}$ как линейные операторы в пространстве всех функций на решетке $\mathbb{Z}^n$ в (комплексифицированном) пространстве показателей $\mathbb{C}^n$. Тогда h_i есть оператор умножения на i-ю координату. Мы будем обозначать оператор умножения на функцию так же, как саму функцию. Итак,

$$(ha)(\boldsymbol{k}) = h(\boldsymbol{k})a(\boldsymbol{k}), \quad \text{где } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n, \ \ a\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}.$$

Соотношение (1) доказано, так как умножения на функции коммутируют.

Обозначим через σ_m действие сдвига пространства $\mathbb{C}^n$ на $\boldsymbol{m} \in \mathbb{Z}^n$ на функции:

$$(\sigma_m a)(\boldsymbol{k}) = a(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m}), \quad \text{где } \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^n, \ \ a\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}.$$

Тогда $e_{\boldsymbol{m}} = \sigma_{\boldsymbol{m}} h_i$. Вычисляя коммутатор умножения на линейную функцию и сдвига, получаем

$$[h, \sigma_{\boldsymbol{m}}] = h(\boldsymbol{m})\sigma_{\boldsymbol{m}}.$$

Отсюда сразу вытекает соотношение (2). Далее, вычисляя коммутатор операторов $e_{\boldsymbol{m}_1}$ и $e_{\boldsymbol{m}_2}$, получаем

$$e_{\boldsymbol{m}_1} e_{\boldsymbol{m}_2} = \sigma_{\boldsymbol{m}_1} h_{i_1} \sigma_{\boldsymbol{m}_2} h_{i_2} = \sigma_{\boldsymbol{m}_1}\sigma_{\boldsymbol{m}_2}(h_{i_1}h_{i_2} + h_{i_1}(\boldsymbol{m}_2)h_{i_2}),$$
$$[e_{\boldsymbol{m}_1}, e_{\boldsymbol{m}_2}] = \sigma_{\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2}(h_{i_1}(\boldsymbol{m}_2)h_{i_2} - h_{i_2}(\boldsymbol{m}_1)h_{i_1}).$$

Если $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ не корень и не 0, то оператор в правой части может принадлежать $\mathfrak{a}(\alpha)$, только если он равен 0. В этом случае $[e_{\boldsymbol{m}_1}, e_{\boldsymbol{m}_2}] = 0$.

Если $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ — корень, то у этого вектора ровно одна отрицательная компонента и она равна -1. Векторы $\boldsymbol{m}_1$ и $\boldsymbol{m}_2$ также имеют по одной отрицательной компоненте, равной -1. Поэтому у $\boldsymbol{m}_1 + \boldsymbol{m}_2$ отрицательна либо

та же компонента, что у $\boldsymbol{m}_1$, либо та же, что у $\boldsymbol{m}_2$. Предположим, например, что у $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$ отрицательна та же компонента, что у $\boldsymbol{m}_1$. Тогда компоненты с номерами i_1 и i_2 у векторов $\boldsymbol{m}_1$, $\boldsymbol{m}_2$, $\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$ и $\boldsymbol{m}_1+\lambda\boldsymbol{m}_2$ имеют вид

	$\boldsymbol{m}_1$	$\boldsymbol{m}_2$	$\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2$	$\boldsymbol{m}_1+\lambda\boldsymbol{m}_2$
h_{i_1}	-1	0	-1	-1
h_{i_2}	$p>0$	-1	$p-1\geqslant 0$	$p-\lambda$

Следовательно, $\boldsymbol{m}_1+\lambda\boldsymbol{m}_2$ — корень при $\lambda\leqslant p=h_{i_2}(\boldsymbol{m}_1)$, т. е. $h_{i_2}(\boldsymbol{m}_1)=\max\{\lambda\colon \boldsymbol{m}_1+\lambda\boldsymbol{m}_2 \text{ — корень}\}$.

Итак, в случае $h_{i_1}(\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2)=-1$ имеем

$$[e_{\boldsymbol{m}_1}, e_{\boldsymbol{m}_2}]=-h_{i_2}(\boldsymbol{m}_1)\sigma_{\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2}h_{i_1}=N_{\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2}e_{\boldsymbol{m}_1+\boldsymbol{m}_2},$$

где $N_{\boldsymbol{m}_1,\boldsymbol{m}_2}=-h_{i_2}(\boldsymbol{m}_1)$; тем самым доказано соотношение (3).

Пусть $\boldsymbol{m}$ и $-\boldsymbol{m}$ — корни. У обоих этих векторов ровно по одной отрицательной координате, равной -1, так что $e_{\boldsymbol{m}}=x_i\partial_j$, $e_{-\boldsymbol{m}}=x_j\partial_i$. Следовательно, веса α_i и α_j равны. Перестановка координат i, j в $\mathbb{C}^n$ является отражением, которое переводит систему всех корней в себя, меняя местами $\boldsymbol{m}$ и $-\boldsymbol{m}$. Далее, $[e_{\boldsymbol{m}_1}, e_{-\boldsymbol{m}}]=h_i-h_j$. Если рассматривать $h_{\boldsymbol{m}}=h_i-h_j$ как функцию в $\mathbb{C}^n$, то она меняет знак при отражении, переставляющем i и j, и равна $+2$ на векторе $\boldsymbol{m}$. Итак, операторы h, $e_{\boldsymbol{m}}$ удовлетворяют соотношениям (1)—(4).

Рассмотрим теперь натянутое на корни подпространство $\mathbb{C}^r$ в координатном пространстве $\mathbb{C}^n$ с обычной эрмитовой метрикой $\langle\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}\rangle=\sum k_i\overline{l_i}$. Пространство $\mathbb{C}^r$ и метрика инвариантны относительно всех перестановок координат с равными весами ($\alpha_i=\alpha_j$). Поэтому ортогональное дополнение $\mathbb{C}^{n-r}$ к $\mathbb{C}^r$ в $\mathbb{C}^n$ также инвариантно. Представим линейное пространство алгебры $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ в виде $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})=H^r\oplus K^\vee\oplus H^{n-r}$, где H^r состоит из линейных функций h на $\mathbb{C}^n$, равных нулю на $\mathbb{C}^{n-r}$; H^{n-r} — из линейных функций h на $\mathbb{C}^n$, равных нулю на $\mathbb{C}^r$; $K^\vee$ состоит из линейных комбинаций векторов $e_{\boldsymbol{m}}$.

Из доказанных соотношений коммутаций следует, что H^{n-r} лежит в центре алгебры $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ и что $H^r\oplus K^\vee$ является идеалом, изоморфным алгебре $\mathfrak{b}$. Следовательно, $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})\cong\mathfrak{b}\oplus H^{n-r}$, и лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы B. Действительно, соотношения (1)—(4) выражают коммутаторы в алгебрах $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$ через геометрию корней, без ссылок на координаты (исключая выбор знака $\pm$ в одном из соотношений (3)). Таким образом, набор корней, как векторов в $\mathbb{C}$-линейном пространстве $\mathbb{C}^r$, определяет алгебру с точностью до конечного числа возможностей, что и доказывает теорему B.

З а м е ч а н и е. Неизвестно, могут ли при разных выборах знаков в соотношении (3) получаться неизоморфные алгебры.

13.5. Доказательство теоремы А. Продолжим функции на носителе на решетку $\mathbb{Z}^{n-1}$ всех целых точек в плоскости носителя, положив их равными 0 вне носителя. Операторы h_i, $e_{\boldsymbol{m}}$, $\sigma_{\boldsymbol{m}}$, $h_{\boldsymbol{m}}$, определенные при доказательстве теоремы В на функциях на решетке $\mathbb{Z}^n$, действуют и на пространстве функций на решетке $\mathbb{Z}^{n-1}$ в плоскости носителя. Получающиеся операторы в пространстве функций на $\mathbb{Z}^{n-1}$ будем обозначать теми же буквами. Таким образом, h_i и $h_{\boldsymbol{m}}$ являются операторами умножения на аффинные в плоскости носителя функции, $\sigma_{\boldsymbol{m}}$ есть оператор сдвига на корень $\boldsymbol{m}$, а $e_{\boldsymbol{m}} = \sigma_{\boldsymbol{m}} h_i$.

Пусть $\boldsymbol{m}$ — корень. Назовем точку $\boldsymbol{k}$ носителя *базовой для* $\boldsymbol{m}$, если $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{m}$ не принадлежит носителю. Множество всех базовых точек корня $\boldsymbol{m}$ назовем *базой корня* $\boldsymbol{m}$ (в данном носителе).

База корня $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{p} - \mathbf{1}_i$ образована всеми точками носителя, в которых i-я координата равна 0. Следовательно, вся база лежит в одной аффинной гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-2}$ в плоскости носителя.

База каждого корня полного носителя принадлежит ровно одной аффинной гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-2} \subset \mathbb{C}^{n-1}$. Действительно, каждая точка носителя получается из точки базы вычитанием неотрицательного целого кратного корня $\boldsymbol{m}$, поэтому если бы база содержалась в $\mathbb{C}^{n-3}$, то носитель содержался бы в $\mathbb{C}^{n-2}$ и не был бы полным. Итак, существует одна и только одна аффинная функция в плоскости носителя, которая равна 0 на базе корня $\boldsymbol{m}$ и приращение которой вдоль корня $\boldsymbol{m}$ равно -1. Эта функция есть h_i (суженная на плоскость носителя). Следовательно, сужение h_i на плоскость носителя однозначно восстанавливается по носителю и корню $\boldsymbol{m}$.

Действие $e_{\boldsymbol{m}}$ на пространстве функций на носителе можно теперь описать в терминах одной лишь геометрии носителя и корней: $e_{\boldsymbol{m}} = \sigma_{\boldsymbol{m}} h_i$, т. е. $(e_{\boldsymbol{m}} a)(\boldsymbol{k}) = h_i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m}) a(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{m})$ для любой функции a. Заметим, что оператор $e_{\boldsymbol{m}}$ оставляет инвариантным пространство функций, равных 0 вне носителя, так как в базовых точках h_i обращается в 0.

Алгебра $\mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha})$ действует на пространстве функций на решетке в плоскости носителя, так что возникает представление $\varphi\colon \mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha}) \to \mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — алгебра эндоморфизмов этого (бесконечномерного) пространства функций. Рассмотрим образ представления φ. *Этот образ определяется геометрией носителя и корней.* Точнее, пусть $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha}_1)$ и $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}(\boldsymbol{\alpha}_2)$ — две квазиоднородные алгебры и $S_1 \subset \mathbb{C}_1^{n-1}$, $S_2 \subset \mathbb{C}_2^{n-1}$ — полные носители. Пусть $\psi\colon \mathbb{C}_1^{n-1} \to \mathbb{C}_2^{n-1}$ — аффинное отображение, биективно переводящее S_1 в S_2 и систему корней для $\mathfrak{a}_1$ в систему корней для $\mathfrak{a}_2$. Тогда *индуцированный отображением* ψ *изоморфизм* ψ^* *пространства функций на* $\mathbb{C}_2^{n-1}$ *в пространство функций на* $\mathbb{C}_1^{n-1}$ *изоморфно переводит алгебру Ли* $\varphi(\mathfrak{a}_2)$ *в алгебру Ли* $\varphi(\mathfrak{a}_1)$.

Действительно, алгебра $\mathfrak{a}(\alpha)$ порождена над $\mathbb{C}$ мономами $x_i\partial_i$ и $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}x_i\partial_{i(\boldsymbol{m})}$. Образы полей $\sum c_i x_i\partial_i$ в $\mathscr{E}$ — это операторы умножения на всевозможные аффинные функции в плоскости носителя. Образы полей $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}x_i\partial_{i(\boldsymbol{m})}$ — это операторы $e_{\boldsymbol{m}}$, определяемые геометрией носителя и корней. Следовательно, $\psi^* e_{\psi(\boldsymbol{m})} = e_{\boldsymbol{m}}\psi^*$, и, значит, ψ индуцирует изоморфизм $\Psi\colon \varphi(\mathfrak{a}_2) \to \varphi(\mathfrak{a}_1)$.

Ядро гомоморфизма алгебр Ли $\mathfrak{a}(\alpha) \to \mathscr{E}$ *есть* 0.

Действительно, пусть $(h + \sum c_{\boldsymbol{m}} e_{\boldsymbol{m}})a = 0$ для всех функций a. Выберем точку $\boldsymbol{k}$, где все $h_{i\boldsymbol{m}}$ отличны от 0, и применим $h + \sum c_{\boldsymbol{m}} e_{\boldsymbol{m}}$ к функции $\delta_{\boldsymbol{k}}$, равной 1 только в $\boldsymbol{k}$. Получим $h(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{k}} + \sum c_{\boldsymbol{m}} h_{i_{\boldsymbol{m}}}(\boldsymbol{k})\delta_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{m}} = 0$, откуда $c_{\boldsymbol{m}} = 0$ и $h(\boldsymbol{k}) = 0$. Следовательно, $h \equiv 0$. Итак, алгебра Ли $\varphi\mathfrak{a}(\alpha)$ изоморфна алгебре $\mathfrak{a}(\alpha)$.

Изоморфизмы $\mathfrak{a}_2 \to \varphi(\mathfrak{a}_2) \xrightarrow{\Psi} \varphi(\mathfrak{a}_1) \to \mathfrak{a}_1$ показывают, что как алгебры Ли $\mathfrak{a}_1$ и $\mathfrak{a}_2$, так и их действия на пространствах функций на S_1 и S_2 изоморфны. Теорема A доказана.

Следствие 1. *Пусть набор весов* α *и степень* d *таковы, что существует квазиоднородная функция с изолированной критической точкой* 0 *с нулевой* 2*-струей. Тогда система корней и носитель однозначно определяют алгебру Ли* $\mathfrak{a}(\alpha)$ *и ее действие* φ.

Доказательство. При сделанных предположениях носитель полон. Действительно, из изолированности вытекает, что при каждом i имеется моном вида $x_i^{a_i}x_{j(i)}$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$ и по условию $a_i > 1$). Покажем, что показатели этих n мономов, принадлежащие носителю, линейно независимы. Система уравнений $z_{j(i)} + a_i z_i$ относительно z имеет при $a_i > 1$ только нулевое решение (в чем легко убедиться, рассматривая циклы эндоморфизма конечного множества, $i \mapsto j$). Следовательно, определитель ее матрицы не равен 0, и, значит, наш носитель полный. Теперь утверждение следствия вытекает из теоремы A.

Следствие 2. *Пусть* $\gamma\colon \mathbb{C}_1^{n-1} \to \mathbb{C}_2^{n-1}$ *— аффинный изоморфизм плоскости полного носителя* S_1 *в плоскость полного носителя* S_2*, переводящий* S_1 *в часть* S_2*, корни алгебры* $\mathfrak{a}_1$ *— в часть корней алгебры* $\mathfrak{a}_2$ *и базы корней алгебры* $\mathfrak{a}_1$ *— в часть баз соответствующих корней алгебры* $\mathfrak{a}_2$*. Тогда* γ *индуцирует изоморфизм действия* φ *алгебры* $\mathfrak{a}_1$ *на функциях на* S_1 *и действия подалгебры алгебры* $\mathfrak{a}_2$ *на пространстве функций на* S_1*, равных нулю вне* $\gamma(S_1)$.

Доказательство. Указанная подалгебра порождена над $\mathbb{C}$ операторами h умножения на все аффинные функции и операторами $e_{\boldsymbol{m}}$, где $\boldsymbol{m}$ — образ корня первой алгебры. Действия $e_{\boldsymbol{m}}$ определены корнями и базами и потому коммутируют с действием γ.

Следствие 3. *Пусть в условиях следствия* 2 *в носителе* S_1 *отмечено несколько точек и в них фиксированы значения функций. Все*

функции на S_1 с фиксированными значениями в этих точках образуют аффинную плоскость P в пространстве функций на S_1. Пусть $\mathfrak{a}_P$ — стационарная алгебра, этой плоскости P. Тогда изоморфизм γ из следствия 2 индуцирует изоморфизм действия $\mathfrak{a}_P$ на P с действием некоторой подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{a}_2$, сохраняющей плоскость $\gamma^{-1*}P$ в пространстве функций на S_2.

Доказательство. Отображение первого действия во второе коммутирует с γ^{-1*}, что и требовалось доказать.

13.6. Пример. Пусть, поворачивая линейку (плоскость) Ньютона вокруг прямой, проходящей через показатели одночленов бинома $\varphi = x^2z + yz^2$, мы остановились на плоскости, проходящей через показатель монома y^{4k+1}. К какому виду можно привести возникшую квазиоднородную функцию $\varphi + \ldots$ квазиоднородными диффеоморфизмами?

Вычисляя тип α и степень d, получаем $\alpha = (2k+1, 2, 4k)$, $d = 8k+2$. Мономы носителя: x^2z, yz^2, x^2y^{2k}, $y^{2k+1}z$, y^{4k+1}.

Носитель аффинно эквивалентен подмножеству носителя кубической однородной формы, образованному показателями мономов XYZ, YZ^2, XY^2, Y^2Z, Y^3 (рис. 52). Корневое поле: $y^{2k}\partial/\partial z$. Его образ в носителе однородных форм: $Y\partial/\partial Z$.

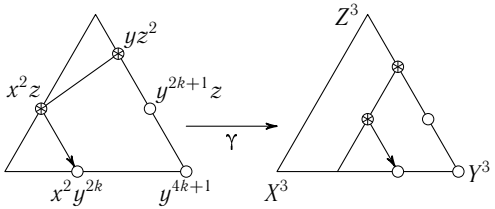


Рис. 52

Рассмотрим в пространстве функций на квазиоднородном носителе плоскость, образованную функциями, равными 1 в точках, отвечающих мономам x^2z и yz^2. Рассмотрим стационарную подгруппу этой плоскости в группе квазиоднородных диффеоморфизмов.

Орбиты компоненты единицы этой подгруппы при отображении носителей переходят в орбиты соответствующей группы линейных преобразовании (следствие 3).

Алгебру Ли получающейся линейной группы легко описать: она порождается торической частью, действующей на функции на носителе как умножения на аффинные функции, равные 0 в отмеченных знаком $*$ точках носителя (где фиксировано равное 1 значение функции), и образом корневого вектора.

Итак, мы сводим нашу задачу к классификации многочленов $XYZ + YZ^2 + AXY^2 + BY^2Z + CY^3$ относительно замен $Z = Z' + \lambda Y'$ и $X = \gamma X'$, $Y = \gamma^{-2}Y'$, $Z = \gamma Z'$. Эта задача эквивалентна аффинной классификации

плоских распадающихся (выделяется $Y = 0$) кубических кривых, имеющих не менее двух конечных ($Z \neq 0$) двойных точек ($Y = 0$, $XZ + Z^2 = 0$).

В зависимости от того, распадается ли кубика на три прямые или только на прямую и конику, и от того, имеется ли касание с бесконечностью, возможно четыре случая (рис. 53), которым отвечают нормальные формы:

1) $XYZ + YZ^2 + bY^2Z + Y^3$, $b^2 \neq 4$;
2) $XYZ + YZ^2 + XY^2$;
3) $XYZ + YZ^2 + Y^2Z$;
4) $XYZ + YZ^2$.

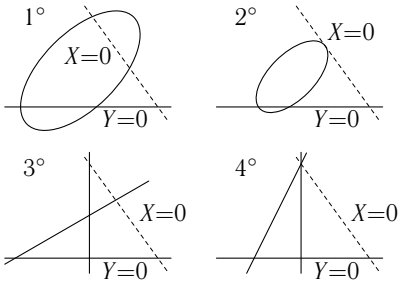


Рис. 53

Окончательный список квазиоднородных нормальных форм:

1) $\varphi + bzy^{2k+1} + y^{4k+1}$, $b^2 \neq 4$;
2) $\varphi + x^2y^{2k}$;
3) $\varphi + zy^{2k+1}$;
4) φ.

§ 14. Спектральные последовательности для приведения к нормальным формам

Здесь описан метод приведения к нормальным формам, основанный на спектральной последовательности, построенной по фильтрации комплекса Кошуля, определенного частными производными изучаемой функции. Мы не используем явно никаких свойств спектральных последовательностей или комплексов Кошуля, а непосредственно доказываем все, что требуется для практических вычислений. Соответствие наших построений с обычными алгебраическими конструкциями описано в [17].

14.1. Построение последовательных приближений. Пусть f — ряд из $\boldsymbol{A} = \mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{A}$ формальных векторных полей $a = \sum a_s \partial/\partial x_s$. Определим отображение $\boldsymbol{A}$-модулей $\partial\colon \mathfrak{A} \to \boldsymbol{A}$ формулой $\partial a = \sum a_s \partial f/\partial x_s$.

Мы вводим о б о з н а ч е н и я:

$I_f = \operatorname{Im}\partial$ — градиентный идеал для f,

$S_f = \operatorname{Ker}\partial$ — стационарная алгебра для f,

$Q_f = \boldsymbol{A}/I_f$ — локальная алгебра для f.

Ниже описан метод последовательных приближений для вычисления S_f и Q_f. Зафиксируем тип квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, \ldots, \alpha_n)$, где веса α_s натуральные. Индуцированные фильтрации в $\boldsymbol{A}$ и в $\mathfrak{A}$ (см. § 12) будем обозначать через

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \supset \boldsymbol{A}_1 \supset \ldots, \quad \mathfrak{A} \supset \ldots \supset \mathfrak{A}_{-1} \supset \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \ldots;$$

здесь $\mathfrak{A}_d = \{a \in \mathfrak{A}\colon a\boldsymbol{A}_p \subset \boldsymbol{A}_{p+d}\ \forall p\}$.

Пусть $f \in \boldsymbol{A}_N$. Тогда $\partial\mathfrak{A}_0 \subset \boldsymbol{A}_N$. Мы будем обозначать $\mathfrak{A}_0$ через $\mathfrak{A}^+$, $\boldsymbol{A}_N$ — через $\boldsymbol{A}^+$. Сужение ∂ на $\mathfrak{A}^+$ определяет отображение $\boldsymbol{A}$-модулей $\partial^+ : \mathfrak{A}^+ \to \to \boldsymbol{A}^+$. Мы вводим о б о з н а ч е н и я:

$I_f^+ = \operatorname{Im}\partial^+$ — верхний градиентный идеал для f,

$S_f^+ = \operatorname{Ker}\partial^+$ — верхняя стационарная алгебра для f,

$Q_f^+ = \boldsymbol{A}^+/I_f^+$ — верхняя локальная алгебра для f.

Для дальнейшего удобно определить фильтрации в $\boldsymbol{A}$-модулях $\mathfrak{A}^+$ и $\boldsymbol{A}^+$ следующим образом: $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{A}_p$ при $p \geqslant 0$, $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{A}_p$ при $p \leqslant 0$, $\mathscr{A}_p = \boldsymbol{A}_{N+p}$ при $p \geqslant 0$, $\mathscr{A}_p = \boldsymbol{A}_N$ при $p \leqslant 0$. Отображение ∂^+ уважает эти фильтрации: $\partial^+\mathfrak{a}_p \subset \mathscr{A}_p$.

З а м е ч а н и е. Наши последовательные приближения — это спектральная последовательность фильтрованного комплекса, дифференциал которого определяется последовательностью

$$0 \to \mathfrak{A}^+ \xrightarrow{\partial^+} \boldsymbol{A}^+ \to 0.$$

Пусть $r \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. Отождествим факторпространства $S_p^0 = \mathfrak{a}_p/\mathfrak{A}_{p+1}$, $A_p^0 = \mathscr{A}_p/\mathscr{A}_{p+1}$ с пространствами квазиоднородных векторных полей степени p и многочленов степени $N + p$ соответственно. Пространства S_p^0 и A_p^0 — это нулевые приближения к «p-компонентам» в $\boldsymbol{A}$-модулях S_f^+ и Q_f^+ соответственно. Следующие приближения S_p^r, A_p^r определяются ниже.

Пусть $f = f_0 + f_1 + \ldots$ — разложение ряда на квазиоднородные составляющие степеней $N, N+1, \ldots$

О п р е д е л е н и е 1. *r-е приближение S_p^r к p-компоненте стационарной алгебры* есть пространство квазиоднородных векторных полей s_p степени p, допускающих «продолжения» до вектор-многочленов $s_p + \ldots + s_{p+r-1}$, удовлетворяющих системе r уравнений

$$s_p f_0 = 0, \quad s_p f_1 + s_{p+1} f_0 = 0, \quad \ldots, \quad s_p f_{r-1} + \ldots + s_{p+r-1} f_0 = 0.$$

О п р е д е л е н и е 2. *«Дифференциал» d^r* действует на квазиоднородное поле s_p из S_p^r по формуле

$$d^r s_p = s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 \bmod I_{p+r}^r,$$

где s_q удовлетворяют условиям определения 1, а I_{p+r}^r определено ниже (при $r > 0$ можно взять $s_{p+r} = 0$).

О п р е д е л е н и е 3. *$(r+1)$-е приближение I_p^{r+1} к p-компоненте градиентного идеала* определяется как множество всех квазиоднородных многочленов степени $N + p$, представимых в виде $s_{p-r} f_r + \ldots + s_p f_0$,

где квазиоднородные поля s_q указанных степеней удовлетворяют r условиям

$$s_{p-r}f_0 = 0, \quad s_{p-r}f_1 + s_{p-r+1}f_0 = 0, \quad \ldots, \quad s_{p-r}f_{r-1} + \ldots + s_{p-1}f_0 = 0$$

и принадлежат $\mathfrak{A}^+$ (т. е. все s_q с $q < 0$ равны 0).

О п р е д е л е н и е 4. *r-е приближение к p-компоненте локальной алгебры* определяется как $A^r_p = A^0_p/I^r_p$ $(r > 0)$.

П р е д л о ж е н и е. *Имеют место равенства*

$$S^{r+1}_p = \operatorname{Ker}(d^r\colon S^r_p \to A^r_{p+r}), \quad A^{r+1}_{p+r} = A^r_{p+r}/d^r S^r_p.$$

Доказательство см. в п. 14.4.

П р и м е р 1. Отображение $d^0\colon S^0_p \to A^0_p$ определяется равенством $d^0 s_p = s_p f_0$. Следовательно, I^1_p есть однородная $(N+p)$-компонента градиентного идеала квазиоднородной части f_0 степени N функции $f = f_0 + \ldots$. Поэтому A^1_p можно отождествить с $(N+p)$-компонентой локальной алгебры Q_{f_0} квазиоднородной функции f_0. Далее, S^1_p есть p-компонента стационарной алгебры функции f_0.

П р и м е р 2. Отображение $d^1\colon S^1_p \to A^1_{p+1}$ определяется равенством $d^1 s_p = s_p f_1 \bmod \{s_{p+1}f_0\}$, где $s_p f_0 = 0$. Следовательно,

$$S^2_p = \{s_p\colon s_p f_0 = 0, \ \exists s_{p+1}\colon s_p f_1 = s_{p+1}f_0\},$$
$$I^2_p = \{s_p f_0\} + \{s_{p-1}f_1\colon s_{p-1}f_0 = 0\}$$

(при $p = 0$ второе слагаемое исчезает).

Таким образом, при $r = 0$ и при $r = 1$ значение $d^r s_p$ дифференциала d^r определяется как класс смежности многочлена $s_p f_r$. Эта простая формула для дифференциала не сохраняется при больших r.

П р и м е р 3. Отображение $d^2\colon S^2_p \to A^2_{p+2}$ определяется равенством $d^2 s_p = s_p f_2 + s_{p+1}f_1 \bmod \{s_{p+2}f_0\} + \{s_{p+1}f_1\colon s_{p+1}f_0 = 0\}$, где $s_p f_0 = 0$, $s_p f_1 + s_{p+1}f_0 = 0$.

14.2. Теоремы о нормальных формах.

1°. *Сходимость последовательных приближений.*

Т е о р е м а. *Для каждого $p \geqslant 0$ последовательности S^r_p и A^r_p при достаточно больших r стабилизируются*: $S^r_p = S^\infty_p$, $A^r_p = A^\infty_p$. *Предельные пространства S^r_p и A^r_p совпадают с пространствами начальных p-форм элементов верхней стационарной алгебры и верхней локальной алгебры для f*:

$$S^\infty_p \cong (S^+_f \cap \mathfrak{a}_p)/(S^+_f \cap \mathfrak{a}_{p+1}), \quad A^\infty_p \cong \mathscr{A}_p/[(\mathscr{A}_p \cap I^+_f) + \mathscr{A}_{p+1}].$$

Указанные выше изоморфизмы определены естественными отображениями $\mathscr{A}_p \to A^r_p$, $S^+_p \cap \mathfrak{a}_p \to S^r_p$.

2°. *Нормальная форма членов степени p*. Зафиксируем числа $p > r \geqslant 0$.

Теорема $T_{r,p}$. *Пусть $e_1, \ldots, e_u$ — квазиоднородные многочлены степени $N + p$, $\mathbb{C}$-порождающие A_p^{r+1} при естественном отображении $\mathscr{A}_p \to \mathscr{A}_p^{r+1}$. Тогда существует такой формальный диффеоморфизм*

$$y_1 = x_1 + g_1, \quad \ldots, \quad y_n = x_n + g_n, \quad \sum g_k \partial/\partial x_k \in \mathfrak{a}_{p-r},$$

что ряд $f = f_0 + f_1 + \ldots$ после подстановки y принимает вид

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f_0(x) + \ldots + f_{p-1}(x) + \sum c_i e_i(x) + R, \quad R \in \mathscr{A}_{p+1},$$

где c_i — числа.

Здесь, как обычно, $f = f_0 + f_1 + \ldots$ означает разложение ряда f на квазиоднородные составляющие степеней $N, N+1, \ldots$

3°. *Нормальная форма r-го приближения*. Зафиксируем число $r \geqslant 0$.

Теорема T_r. *Пусть $e_1, e_2, \ldots$ — квазиоднородные многочлены всевозможных степеней $N + p$, где $p > r$, $\mathbb{C}$-порождающие все пространства, A_p^{r+1} при естественных отображениях $\mathscr{A}_p \to A_{p+1}$. Тогда существует такой формальный диффеоморфизм*

$$y_1 = x_1 + g_1, \quad \ldots, \quad y_n = x_n + g_n, \quad \text{где } \sum g_k \partial/\partial x_k \in \mathfrak{A}^+,$$

что ряд $f = f_0 + f_1 + \ldots$ после подстановки y принимает вид

$$f(y_1, \ldots, y_n) = f_0(x) + \ldots + f_r(x) + \sum c_i e_i, \quad \deg e_i > N + r,$$

где c_i — числа.

4°. *Условия B и C*. Рассмотрим главную квазиоднородную часть f_0 ряда $f = f_0 + f_1 + \ldots$

Определение. Ряд f *удовлетворяет условию B*, если стационарная алгебра Ли точки f_0 при действии алгебры Ли квазиоднородных диффеоморфизмов на пространстве квазиоднородных многочленов степени $N = \deg f_0$ тривиальна (равна 0).

Иными словами, f удовлетворяет условию B, если $S_0^1 = 0$. Таким образом, условие B накладывается лишь на f_0.

Теорема *BT*. *Если f удовлетворяет условию B, то теорема $T_{r,p}$ справедлива при $r = p \geqslant 1$.*

Определение. *Отрицательной алгеброй Ли $\mathfrak{A}^-$ типа α* называется алгебра Ли векторных полей вида $\sum a_s' \partial/\partial x_s$, где все мономы каждого многочлена a_s' имеют степень строго меньшую, чем степень α_s монома x_s.

Заметим, что $\mathfrak{A}^-$ — конечномерная алгебра Ли.

О п р е д е л е н и е. Ряд $f = f_0 + f_1 + \ldots$ *удовлетворяет условию* C, если стационарная алгебра точки f_0 [при действии отрицательной алгебры Ли $\mathfrak{A}^-$ на пространстве многочленов (квази)степени не выше $N = \deg f_0$] тривиальна (равна 0).

Заметим, что условие C накладывается лишь на f_0.

Т е о р е м а *CT*. *Если* f *удовлетворяет условию* C, *то* $I_f^+ = \boldsymbol{A}^+ \cap I_f$.

С л е д с т в и е. *Пусть* f *удовлетворяет условию* C, *и пусть* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — *квазиоднородные многочлены всевозможных степеней* $N + p$, $p \geqslant 0$, *определяющие базисы в пространствах* A_p^∞ *спектральной последовательности при естественных отображениях* $\mathscr{A}_p \to A_p^\infty$. *Тогда образы многочленов* $e_1, e_2, e_3, \ldots$ *в локальной алгебре* $Q_f = \boldsymbol{A}/I_f$ $\mathbb{C}$-*линейно независимы*.

Иными словами, касательное пространство деформации $f + \sum \lambda_i e_i$ пересекает касательное пространство к орбите функции f в одной точке.

14.3. Пример. Пусть $f_0 = x^4 + x^2 y^{2k+1}$, $k \geqslant 1$. Эта функция квазиоднородна, с весами $\deg x = 2k + 1$, $\deg y = 2$, степени $N = \deg f_0 = 8k + 4$. Она удовлетворяет условиям B и C.

Т е о р е м а *W*. *Всякий формальный ряд* $f = f_0 + f_1 + \ldots$, *где* $\deg f_p = N + p$, *формальным диффеоморфизмом приводится либо к нормальной форме*

$$W_{k,i} = f_0 + \boldsymbol{a} x^3 y^{k+1} + \boldsymbol{b} y^{4k+2+i},$$

где $\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2} y^{k-2}$, $\boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{2k-1} y^{2k-1}$, $i > 0$, $b_0 \neq 0$ (*и где* $\boldsymbol{a} = 0$ *при* $k = 1$), *либо к аналогичной нормальной форме с* $\boldsymbol{b} \equiv 0$ (*последнее — лишь в случае, когда кратность* μ *критической точки* 0 *бесконечна*). *Число модулей ряда* f *не меньше, чем число параметров в нормальной форме* (*т. е. чем* $3k - 1$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы будем пользоваться отождествлениями факторпространств $\boldsymbol{A}_p/\boldsymbol{A}_{p+1}$ и $\mathfrak{A}_p/\mathfrak{A}_{p+1}$ с пространствами квазиоднородных многочленов и векторных полей.

Пусть s_p — квазиоднородное поле степени p. Тогда, согласно п. 14.1, $d^0 s_p = s_p f_0$. Легко доказывается (например, с помощью кроссвордов из § 12) следующий результат.

Л е м м а 1. *Однородный идеал* $\mathfrak{A}_0 f_0$ *содержит мономы* x^4, $x^3 y^{2k}$, $x^2 y^{2k+1}$, $x y^{4k+1}$ *и бином* $2x^3 y^{k+1} + x y^{3k+2}$. *Пространства* A_p^1 $(p > 0)$ *первого приближения порождаются над* $\mathbb{C}$ *образами мономов* $x^3 y^\alpha$, *где* $k + 1 \leqslant \alpha \leqslant 2k - 1$, *и* y^β, *где* $\beta > 4k + 2$.

Согласно лемме 1 и теореме T_0 можно привести f к виду $F = f_0 + \boldsymbol{a} x^3 y^{k+1} + \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2} y^{k-2}$ и где $\boldsymbol{b}$ — ряд по степеням y, начинающийся с членов степени выше $4k + 2$ по y. Обозначим через

$4k+2+i$ показатель степени переменной y в первом ненулевом члене $b_0\varphi$, $\varphi = y^{4k+2+i}$, ряда $\boldsymbol{b}$. Положим $r = \deg\varphi - N = 2i$.

Л е м м а 2. *Для приближений, построенных по ряду F, справедливо равенство*

$$d^1 = \ldots = d^{r-1} = 0, \quad d^r[s_p] = b_0[s_p\varphi]$$

(*здесь и далее квадратные скобки означают классы смежности*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что стационарная алгебра функции f_0 порождается над $\boldsymbol{A}$ полем $v = xy^{2k}(2k+1)\partial/\partial x - (4x^2 + 2y^{2k+1})\partial/\partial y$ степени $4k$. Поэтому $S_p^1 = 0$ при $p < 4k$. Значит, для любого поля $s = s_p + s_{p+1} + \ldots$, для которого $0 \neq s_p \in [s_p] \in S_p^r$, $r \geqslant 1$, имеем $s \in \mathfrak{A}_{4k}$. Но $\mathfrak{A}_{4k}(\boldsymbol{a}x^3y^{k+1}) \subset \mathfrak{A}_0 f_0$. Действительно, все элементы идеала в левой части делятся на x^2 и имеют степень не ниже $10k+4$, а элементы x^4, x^3y^{2k}, x^2y^{2k+1} идеала в правой части имеют степени ниже $10k+4$. Поэтому каждый моном каждого элемента идеала в левой части делится на один из трех указанных мономов, что и доказывает приведенное выше включение.

Итак, слагаемое $\boldsymbol{a}x^3y^{k+1}$ в нормальной форме не влияет на последовательные приближения, откуда вытекает утверждение леммы.

Л е м м а 3. *При $r = 2i$, $p \geqslant 4k$ имеет место равенство $d^r S_p^r = A_{p+1}^r$, и, следовательно, $d^q = 0$ при $q > 2i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 2 имеем $d^r S_{4k}^r \supset \mathbb{C}[v\varphi]$. Но $v\varphi = (-4x^2 + 2y^{2k+1})c_0 y^{4k+1+i}$, где $c_0 \neq 0$. Далее, $x^2y^{4k+1} \in \mathfrak{A}_0 f_0$. Поэтому $\mathbb{C}[v\varphi] = \mathbb{C}[y^{6k+2+i}] = A_{4k+r}^r$. Итак, $d^r S_{4k}^r = A_{4k+r}^r$. Умножая на подходящую степень переменной y, получим требуемое утверждение при $p > 4k$.

Теорема W вытекает теперь из теорем BT и CT.

14.4. Доказательства.

1°. Из определения 1 видно, что S_p^r уменьшается с ростом r: $S_p^{r+1} \subset S_p^r$. Но S_p^0 конечномерно. Значит, S_p^r *стабилизируется при* $r \to \infty$.

2°. Из определения 3 видно, что I_p^r растет с ростом r. Но I_p^r — подпространство в конечномерном пространстве квазиоднородных многочленов степени $N+p$. Значит, I_p^r *стабилизируется при* $r \to \infty$.

3°. Из определений 2 и 1 видно, что сумма в правой части формулы для $d^r s_p$ определяется с точностью до прибавления к s_q $(q > p)$ слагаемых σ_q, удовлетворяющих условиям

$$\sigma_{p+1}f_0 = 0,\ \sigma_{p+1}f_1 + \sigma_{p+2}f_0 = 0, \ldots, \sigma_{p+1}f_{r-2} + \ldots + \sigma_{p+r-1}f_0 = 0.$$

Указанная сумма при прибавлении σ_q к s_q увеличивается на слагаемое $\sigma_{p+1}f_{r-1} + \ldots + \sigma_{p+r}f_0$. Это слагаемое принадлежит I_{p+r}^r по определению 3. Следовательно, *отображение* $d^r\colon S_p^r \to A_{p+r}^r$ *определено корректно*.

4°. *Докажем, что* $S_p^{r+1} = \operatorname{Ker}(d^r\colon S_p^r \to A_{p+r}^r)$. Из определения 1 видно, что S_p^{r+1} состоит из тех элементов s_p из S_p^r, для которых можно выбрать s_q $(q > p)$ так, чтобы удовлетворить, кроме уравнений, определяющих S_p^r, еще одному уравнению $s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 = 0$. Но существование таких s_q эквивалентно условию $s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0 \in I_{p+r}^r$ для любого выбора s_q, удовлетворяющих уравнениям, определяющим S_p^r (см. 3°). Поэтому $s_p \in S_p^{r+1} \leftrightarrow d^r s_p = 0$, что и требовалось.

5°. *Докажем, что* $I_{p+r}^{r+1} \equiv d^r S_p^r \bmod I_{p+r}^r$. Из определения 3 видно, что I_{p+r}^{r+1} состоит из однородных многочленов степени $N + p + r$, допускающих представление

$$a = s_p f_r + \ldots + s_{p+r} f_0, \quad \text{где } s_p f_0 = 0,$$
$$s_p f_1 + s_{p+1} f_0 = 0, \quad \ldots, \quad s_p f_{r-1} + \ldots + s_{p+r} f_0 = 0.$$

Это линейное пространство содержит $I_{p+r}^r = \{a = s_{p+1} f_{r-1} + \ldots + s_{p+r} f_0 \colon s_{p+1} f_0 = 0, s_{p+1} f_1 + s_{p+2} f_0 = 0, \ldots, s_{p+1} f_{r-2} + \ldots + s_{p+r-1} f_0 = 0\}$, так как можно взять $s_p = 0$. Сравнивая определения I_{p+r}^r и I_{p+r}^{r+1}, мы видим, что во второе пространство входят многочлены, представимые в виде суммы из определения $d^r s_p$, и, с точностью до I_{p+r}^r, ничего другого.

Тем самым доказано предложение из п. 14.1.

6°. *Докажем, что приближения к p-компоненте стационарной алгебры сходятся именно к ней*: $S^\infty \cong (S_f^+ \cap \mathfrak{A})/(S_f^+ \cap \mathfrak{A}_{p+1})$.

Л е м м а. *Если* $s_p \in S_p^r$ *при всех* r, *то существует такой формальный ряд* $s = s_p + \ldots$, *что* $sf = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Согласно определению

$$S_p^r = ((\mathfrak{a}_p \cap \partial^{-1}\mathscr{A}_{p+r}) + \mathfrak{a}_{p+1})/\mathfrak{a}_{p+1}.$$

Следовательно,

$$\bigcap_r S_p^r = \left(\left(\mathfrak{a}_p \cap \left(\bigcap_r \partial^{-1}\mathscr{A}_{p+r}\right)\right) + \mathfrak{a}_{p+1}\right)\Big/\mathfrak{a}_{p+1}.$$

Но $\bigcap\limits_r \partial^{-1}\mathscr{A}_{p+r} = \partial^{-1}\bigcap\limits_r \mathscr{A}_{p+r} = \partial^{-1}0$. Поэтому $\bigcap\limits_r S_p^r = ((\mathfrak{a}_p \cap S_f^+) + \mathfrak{a}_{p+1})/\mathfrak{a}_{p+1}$, и лемма доказана.

Обратно, если $sf = 0$, то s_p принадлежит S_p^r при всех r, что и доказывает утверждение 6°.

7°. *Докажем, что приближения к p-компоненте локальной алгебры сходятся именно к ней*:

$$A_p^\infty \cong \mathscr{A}_p/[(\mathscr{A}_p \cap I_f^+) + \mathscr{A}_{p+1}].$$

Действительно, если a_p является начальной p-формой r-го приближения к положительному градиентному идеалу, то эта же форма является

начальной для легко определяемого элемента настоящего положительного градиентного идеала. Обратно, начальная p-форма a_p любого элемента положительного градиентного идеала имеет представление

$$(s_0 + \ldots)(f_0 + \ldots) = a_p + \ldots$$

и, следовательно, входит в I_p^∞ (и даже в I_p^{p+1}).

Тем самым доказана теорема о сходимости из п. 14.2.

8°. *Доказательство теоремы* $T_{r,p}$, $p > r \geqslant 0$. Нужно доказать, что $(N + p)$-квазиструи $[f] \bmod \mathscr{A}_{p+1}$, $[f + \varphi_p] \bmod \mathscr{A}_{p+1}$ переводятся друг в друга формальной заменой переменных неотрицательного порядка $y = x + g(x)$, $\sum g_s \partial/\partial x_s \in \mathfrak{a}_{p-r}$, если $[\varphi_p] \in I_p^{r+1}$. Последнее условие означает, что существует разложение $\varphi_p = s_{p-r} f_r + \ldots + s_p f_0$, где квазиоднородные поля s_q неотрицательного порядка удовлетворяют r условиям

$$s_{p-r} f_0 = 0, \quad \ldots, \quad s_{p-r} f_{r-1} + \ldots + s_{p-1} f_0 = 0.$$

Указанное разложение φ_p и условия на s_q зависят лишь от членов $f_0, \ldots, f_r$ разложения f и не зависят от следующих членов. Рассмотрим однопараметрическое семейство $(N + p)$-квазиструй

$$F(t) = [f + t\varphi_p] \bmod \mathscr{A}_{p+1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Поскольку $p > r$, разложение $F(t)$ при любом t на квазиоднородные по x составляющие начинается со слагаемых $f_0 + \ldots + f_r$, не зависящих от t. Поэтому пространство квазиоднородных многочленов I_p^{r+1}, построенное по $F(t)$ при любом t, одно и то же.

Определим векторное поле s в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ формулой $s = s_{p-r} + \ldots + s_p$. Тогда при любом t производная $(N + p)$-квазиструи $F(t)$ по направлению поля s равна

$$\begin{aligned} sF(t) &= [(s_{p-r} + \ldots + s_p)(f_0 + \ldots + f_p + t\varphi_p)] \bmod \mathscr{A}_{p+1} = \\ &= [s_{p-r} f_0 + \ldots + (s_{p-r} f_r + \ldots + s_p f_0)] \bmod \mathscr{A}_{p+1} = [\varphi_p] \bmod \mathscr{A}_{p+1} \end{aligned}$$

(здесь важно, что $p > r$; при $p = r$ слагаемое $t\varphi_p$ влияло бы на $sF(t)$).

Поле s в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ обращается в 0, так как $s \in \mathfrak{a}_{p-r}$. Поэтому фазовый поток поля s определен в достаточно малой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ при всех t из отрезка $0 \leqslant t \leqslant 1$. Преобразование этого потока за время $t = 1$ определяет p-струю локального диффеоморфизма, переводящего $F(0)$ в $F(1)$, вида $y = x + g(x)$, $\sum g_k \partial/\partial x_k \in \mathfrak{a}_{p-r}$. Этот диффеоморфизм — искомый.

9°. *Доказательство теоремы* T_r, $r \geqslant 0$. Будем последовательно пользоваться теоремами $T_{r,r+1}$, $T_{r,r+2}$, ... для приведения к нормальной форме

членов (квази)степени $N+p$, где $p=r+1, r+2, \ldots$. При этих операциях первые $r+1$ членов разложения $f=f_0+\ldots+f_r+\ldots$ не меняются. Следовательно, при нормализации членов указанных (квази)степеней не меняются пространства I_p^{r+1} и A_p^{r+1}. Поэтому к полученному после первой замены (замены теоремы $T_{r,r+1}$) ряду применима вторая теорема и т. д.

Полученная последовательность формальных замен переменных сходится, так как члены каждой фиксированной степени стабилизируются (ибо $y-x\in\mathfrak{a}_{p-r}$ в теореме $T_{r,p}$). Предельная формальная замена — искомая.

10°. *Доказательство теоремы BT.* Пусть $p=r\geqslant 1$, f удовлетворяет условию B. Докажем теорему $T_{r,r}$. Полагая $p=r$ в доказательстве теоремы $T_{r,p}$ из п. 8°, получим

$$\varphi_r=s_0f_r+\ldots+s_rf_0,$$

где s_q удовлетворяют r условиям $s_0f_0=0$, $s_0f_1+s_1f_0=0, \ldots, s_0f_{r-1}+\ldots$ $\ldots+s_{r-1}f_0=0$. Но $s_0=0$ согласно условию B. Следовательно, ни разложение φ_r, ни условия на s_q не зависят от f_r (но лишь от $f_0, \ldots, f_{r-1}$). Поэтому и при $p=r$ пространство I_p^{r+1}, построенное по $F(t)$, не зависит от t. Оставшаяся часть доказательства теоремы $T_{r,r}$ такая же, как конец доказательства теоремы $T_{r,p}$ при $p>r$ (п. 8°).

11°. *Доказательство теоремы CT.* По определению $I_f^+=\mathfrak{A}^+f$, $I_f=\mathfrak{A}f$. Поэтому $I_f^+\subset I_f$ и $I_f^+\subset\mathscr{A}_0$. Следовательно, $I_f^+\subset I_f\cap\mathscr{A}_0$.

Докажем обратное включение. Пусть $u\in I_f\cap\mathscr{A}_0$. Тогда $u=af$, $a\in\mathfrak{A}$. Рассмотрим ненулевую квазиоднородную компоненту a_q поля a наименьшей квазистепени q. Квазистепени всех квазиоднородных компонент ряда af, кроме a_qf_0, больше квазистепени многочлена a_qf_0. Если $q<0$, то $a_qf_0\neq 0$ по условию C. Следовательно, неравенство $q<0$ противоречит условию $u\in\mathscr{A}_0$. Значит, $q\geqslant 0$, т. е. $a\in\mathfrak{A}^+$, $u\in I_f^+$, что и требовалось доказать.

§ 15. Списки особенностей

В этом параграфе описано начало иерархии классов особенностей голоморфных функций.

15.0. Предварительные замечания.

1°. *Нормальные формы.*

Классом особенностей называется подмножество пространства ростков (или струй) функций в 0, инвариантное относительно действия группы диффеоморфизмов пространства-прообраза, сохраняющих 0. Примерами классов особенностей являются орбиты. Два ростка (две струи) называются *эквивалентными*, если они принадлежат одной орбите.

Другим примером класса является страт $\mu = \text{const}$. *Кратностью* (*числом Милнора*) μ критической точки $0 \in \mathbb{C}^n$ функции f называется индекс особой точки 0 векторного поля $\operatorname{grad} f$. Страт $\mu = \text{const}$ для f определяется как содержащая f связная компонента пространства ростков с фиксированной кратностью μ в 0. Две функции одного страта $\mu = \text{const}$ называются *μ-эквивалентными*.

Чтобы определить *нормальную форму*, рассмотрим пространство многочленов $M = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ как подмножество в пространстве ростков функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ в 0.

Нормальная форма для класса функций K задается гладким отображением $\Phi\colon B \to M$ конечномерного линейного *пространства параметров B* в пространство многочленов, для которого выполнены три условия:

1) $\Phi(B)$ пересекает все орбиты из K;

2) прообраз каждой орбиты в B конечен;

3) прообраз всего дополнения к K содержится в некоторой собственной гиперповерхности в B.

Нормальная форма называется *полиномиальной* (соответственно *аффинной*), если отображение Φ полиномиальное (соответственно линейное неоднородное). Аффинная нормальная форма называется простой, если Φ имеет вид

$$\Phi(b_1, \ldots, b_r) = \varphi_0 + b_1 \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_1} + \ldots + b_r \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_r},$$

где φ_0 — фиксированный многочлен, b_i — числа, а $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}$ — мономы. (В приложениях многочлен φ_0 обычно сам «прост», т. е. является суммой небольшого числа мономов.)

Существование единой нормальной формы (хотя бы полиномиальной) для всего страта $\mu = \text{const}$ отнюдь не очевидно a priori. Удивительным выводом из наших вычислений является существование таких нормальных форм для всех особенностей нашего списка (стало быть, в частности, для всех особенностей с числом модулей 1 и 2). Большинство наших нормальных форм — простые формы; вероятно, все особенности списка имеют простые нормальные формы. Неизвестно, насколько обширен класс функций, для которых страт $\mu = \text{const}$ допускает простую (или хотя бы полиномиальную) нормальную форму (этот вопрос естественно относить к классам стабильной эквивалентности). Дж. Уол (J. Wahl) и В. А. Васильев [76] указали пример страта $\mu = \text{const}$, не допускающего аффинной нормальной формы: ему принадлежит росток

$$f = x^2y^2(x+y)^2(x+2y)^2 + x^9 - y^9.$$

2°. *Серии особенностей*. В списке особенности разбиты на *серии*, обозначенные заглавными буквами (мы используем светлые буквы $A, \ldots, Z$

с различными индексами для обозначения стратов $\mu = \text{const}$ и полужирные буквы $\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{Z}$ с индексами или без них для обозначения классов особенностей, являющихся объединением стратов $\mu = \text{const}$). Хотя серии, несомненно, существуют, не совсем понятно, что такое серия особенностей.

Рассмотрим, например, серии $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$, образованные орбитами ростков $A_k\colon f(x, y) = x^{k+1} + y^2$, $D_k\colon f(x, y) = x^2y + y^{k-1}$. Классы A_k, D_k примыкают друг к другу так *):

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \leftarrow & A_2 & \leftarrow & A_3 & \leftarrow & A_4 & \leftarrow & \ldots \\ & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & & D_4 & \leftarrow & D_5 & \leftarrow & \ldots \end{array}$$

Ясно, что в приведенном примере имеются две серии, $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{D}$. Каков, однако, формальный смысл этого утверждения и выходит ли оно за рамки произвольных наименований?

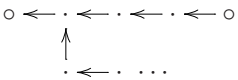
Определить серию $\boldsymbol{A}$ — значит научиться обращать стрелки примыканий так, чтобы от A_k идти к A_{k+1}, не сворачивая к D_{k+1}. В данном случае это нетрудно сделать (особенности $\boldsymbol{A}$ имеют коранг второго дифференциала $\leqslant 1$). В более сложных случаях также удается сформулировать правила обращения стрелок (в каждом случае свои). В результате возникают серии с одним или несколькими индексами (например, трехиндексная серия $T_{k,l,m} = axyz + x^k + y^l + z^m$), причем функции серии могут зависеть от параметров.

Как и в разобранном примере серий $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$, во всех случаях, после того как серия найдена, можно дать ее определение. Однако общее определение серии особенностей неизвестно. Ясно лишь, что серии связаны с особенностями бесконечной кратности (например, $\boldsymbol{D} \sim x^2y$, $\boldsymbol{T} \sim xyz$), так что иерархия серий отражает иерархию неизолированных особенностей.

3°. *Периодичность*. Разбиение многих классов особенностей на страты $\mu = \text{const}$ обнаруживает своеобразную периодичность, которую можно описать следующим образом. Вся стратификация (разбиение) представляет собой цепочку одинаковых фрагментов (зверей). Каждый зверь состоит из точек (стратов), две из которых (голова и хвост) отмечены. Кроме головы и хвоста зверь может содержать соединяющие их стрелками примыканий страты и конечности (серии бесконечной длины). Голова каждого зверя примыкает к хвосту предыдущего.

*) Класс особенностей L *примыкает* к классу K (обозначение: $K \leftarrow L$), если всякая функция $f \in L$ может быть сколь угодно малым шевелением продеформирована в функцию класса K.

Например, стратификация особенностей коранга 2 с 3-струей x^3 дается цепочкой зверей, каждый из которых состоит из пяти точек и одной бесконечной ноги



(J_k в списке).

Причина периодичности в общем случае не ясна. Частичное объяснение удалось получить лишь для квазиоднородных особенностей с помощью техники, близкой к веерам Энриквеса—Демазюра (см. [300]).

Периодичность проявляется, однако, не только при приведении к нормальным формам квазиоднородных функций, но и во всех вычислениях, связанных с классификацией (так что фактически для всех вычислений достаточно рассмотреть лишь одного зверя из цепочки).

Как и существование серий, периодичность наводит на мысль, что в множестве стратов имеется какая-то алгебраическая структура.

Д. Сирсма [454] указал на связь периодичности с разрешением особенностей: сдвиг на период соответствует одному σ-процессу. К сожалению, из этого замечания не удалось вывести периодичность упомянутых выше вычислений.

4°. *Классы малой модальности.* С точки зрения приложений важнейшей характеристикой класса особенностей является его *коразмерность* c в пространстве ростков функций с критической точкой 0 и критическим значением 0.

Действительно, функция общего положения имеет лишь особенности коразмерности $c = 0$ (невырожденные). Вырожденные особенности появляются неустранимо лишь в случае, когда рассматривается семейство функций, зависящих от параметров. При этом класс коразмерности c неустраним малым шевелением лишь в случае, когда число параметров $l \geqslant c$.

Таким образом, *в приложениях всегда нужно исследовать все классы до коразмерности* l (т. е. такие классы, что дополнение к их объединению имеет коразмерность больше l). Эту задачу не следует смешивать с задачей классификации особенностей с коразмерностью орбиты $\leqslant l$ (т. е. с $\mu \leqslant l + 1$). Последняя задача в приложениях встречается лишь как средство решения первой.

С топологической точки зрения важнейшей характеристикой особенности является кратность μ критической точки (равная числу простых критических точек, на которые сложная точка распадается при малом шевелении).

Неожиданным выводом из проведенных вычислений является то, что *алгебраически наиболее естественные результаты получаются не при классификации классов особенностей до определенной коразмерности c или кратности μ, а при классификации классов особенностей малой модальности m.*

Модальность m равна размерности страта $\mu = \text{const}$ в базе миниверсальной деформации без 1 (см. [90]). Поэтому коразмерность c страта $\mu = \text{const}$ в пространстве ростков функций с критической точкой 0 и критическим значением 0, кратность μ и модальность m связаны соотношением

$$\mu = c + m + 1.$$

В настоящее время полностью расклассифицированы:

(1) все особенности, для которых $c \leqslant 10$;

(2) все особенности, для которых $\mu \leqslant 16$;

(3) все особенности, для которых $m \leqslant 2$.

Особенности с числом модулей $m = 0$, 1 и 2 называются соответственно *простыми*, *унимодальными* и *бимодальными*. Их списки приведены ниже. Анализ полученных списков показал, что

1) простые особенности классифицируются в точности по группам Кокстера A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 (т. е. по правильным многогранникам в трехмерном пространстве);

2) унимодальные особенности образуют одну бесконечную трехиндексную серию $\boldsymbol{T}$ и 14 «исключительных» однопараметрических семейств, порожденных квазиоднородными особенностями.

Квазиоднородные унимодальные особенности получаются из автоморфных функций, связанных с 14 замечательными треугольниками на плоскости Лобачевского и с тремя замечательными треугольниками на обычной плоскости точно таким же образом, как простые особенности связаны с правильными многогранниками (см. [127]—[129]).

3) Бимодальные особенности образуют 8 бесконечных серий и 14 исключительных двупараметрических семейств, порожденных квазиоднородными особенностями.

Квазиоднородные бимодальные особенности связаны с 6 типами четырехугольников и 14 треугольниками на плоскости Лобачевского (в последнем случае следует рассматривать автоморфные функции с факторами автоморфности, соответствующими накрытиям с числом листов 2, 3 и 5) (см. [128]).

Все особенности с числом модулей 1 и 2 классифицируются в точности по вырождениям эллиптических кривых, расклассифицированным Кодаирой (см. [144]). В. С. Куликов указал, что для получения этих особенностей

из вырождений эллиптической кривой нужно на минимальном разрешении вырожденного слоя раздуть 1, 2 или 3 точки, после чего исходный слой стянуть (см. [144]).

К сожалению, все перечисленные результаты получены сравнением независимо доказанных классификационных теорем, ни одну из которых не удалось вывести из другой.

15.1. Особенности с числом модулей $m = 0$, 1 и 2.

0°. *Простые особенности* ($m = 0$). Имеются 2 бесконечные серии $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$ и 3 исключительные особенности E_6, E_7, E_8:

$A_k, k \geqslant 1$	$D_k, k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
x^{k+1}	$x^2 + y^{k-1}$	$x^3 + y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$

1°. *Унимодальные особенности* ($m = 1$). Имеются 3 семейства параболических особенностей, трехиндексная серия гиперболических особенностей и 14 семейств исключительных особенностей.

Параболические:

P_8	$x^3 + y^3 + z^3 + axyz$	$a^3 + 27 \neq 0$
X_9	$x^4 + y^4 + ax^2y^2$	$a^2 \neq 4$
J_{10}	$x^3 + y^6 + ax^2y^2$	$4a^3 + 27 \neq 0$

Гиперболические:

$$T_{p,q,r}\colon x^p + y^q + z^r + axyz, \quad a \neq 0, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

14 исключительных семейств:

E_{12}	$x^3 + y^7 + axy^5$	E_{13}	$x^3 + xy^5 + ay^8$
E_{14}	$x^3 + y^8 + axy^6$	Z_{11}	$x^3y + y^5 + axy^4$
Z_{12}	$x^3y + xy^4 + ax^2y^3$	Z_{13}	$x^3y + y^6 + axy^5$
W_{12}	$x^4 + y^5 + ax^2y^3$	W_{13}	$x^4 + xy^4 + ay^6$
Q_{10}	$x^3 + y^4 + yz^2 + axy^3$	Q_{11}	$x^3 + y^2z + xz^3 + az^5$
Q_{12}	$x^3 + y^5 + yz^2 + axy^4$	S_{11}	$x^4 + y^2z + xz^2 + ax^3z$
S_{12}	$x^2y + y^2z + xz^3 + az^5$	U_{12}	$x^3 + y^3 + z^4 + axyz^2$

2°. *Бимодальные особенности* ($m = 2$). Имеются 8 бесконечных серий и 14 исключительных семейств. Пусть $\boldsymbol{a} = a_0 + a_1y$.

4 бесконечные серии бимодальных особенностей коранга 2:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ
$J_{3,0}$	$x^3+bx^2y^3+y^9+cxy^7$	$4b^3+27\neq 0$	16
$J_{3,p}$	$x^3+x^2y^3+\boldsymbol{a}y^{9+p}$	$p>0, a_0\neq 0$	$16+p$
$Z_{1,0}$	$x^3y+dx^2y^3+cxy^6+y^7$	$4d^3+27\neq 0$	15
$Z_{1,p}$	$x^3y+x^2y^3+\boldsymbol{a}y^{7+p}$	$p>0, a_0\neq 0$	$15+p$
$W_{1,0}$	$x^4+\boldsymbol{a}x^2y^3+y^6$	$a_0^2\neq 4$	15
$W_{1,p}$	$x^4+x^2y^3+\boldsymbol{a}y^{6+p}$	$p>0, a_0\neq 0$	$15+p$
$W^{\sharp}_{1,2q-1}$	$(x^2+y^3)^2+\boldsymbol{a}xy^{4+q}$	$q>0, a_0\neq 0$	$15+2q-1$
$W^{\sharp}_{1,2q}$	$(x^2+y^3)^2+\boldsymbol{a}x^2y^{3+q}$	$q>0, a_0\neq 0$	$15+2q$

4 бесконечные серии бимодальных особенностей коранга 3:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ
$Q_{2,0}$	$x^3+yz^2+\boldsymbol{a}x^2y^2+xy^4$	$a_0^2\neq 4$	14
$Q_{2,p}$	$x^3+yz^2+x^2y^2+\boldsymbol{a}y^{9+p}$	$p>0, a_0\neq 0$	$14+p$
$S_{1,0}$	$x^2z+yz^2+y^5+\boldsymbol{a}zy^3$	$a_0^2\neq 4$	14
$S_{1,p}$	$x^2z+yz^2+x^2y^2+\boldsymbol{a}y^{5+p}$	$p>0, a_0\neq 0$	$14+p$
$S^{\sharp}_{1,2q-1}$	$x^2z+yz^2+zy^3+\boldsymbol{a}xy^{3+q}$	$q>0, a_0\neq 0$	$14+2q-1$
$S^{\sharp}_{1,2q}$	$x^2z+yz^2+zy^3+\boldsymbol{a}x^2y^{2+q}$	$q>0, a_0\neq 0$	$14+2q$
$U_{1,0}$	$x^3+xz^2+xy^3+\boldsymbol{a}y^3z$	$a_0(a_0^2+1)\neq 0$	14
$U_{1,2q-1}$	$x^3+xz^2+xy^3+\boldsymbol{a}y^{1+q}z^2$	$q>0, a_0\neq 0$	$14+2q-1$
$U_{1,2q}$	$x^3+xz^2+xy^3+\boldsymbol{a}y^{3+q}z$	$q>0, a_0\neq 0$	$14+2q$

14 исключительных семейств:

E_{18}	$x^3+y^{10}+\boldsymbol{a}xy^7$	E_{19}	$x^3+xy^7+\boldsymbol{a}y^{11}$
E_{20}	$x^3+y^{11}+\boldsymbol{a}xy^8$	Z_{17}	$x^3y+y^8+\boldsymbol{a}xy^6$
Z_{18}	$x^3y+xy^6+\boldsymbol{a}y^9$	Z_{19}	$x^3y+y^9+\boldsymbol{a}xy^7$
W_{17}	$x^4+xy^5+\boldsymbol{a}y^7$	W_{18}	$x^4+y^7+\boldsymbol{a}x^2y^4$
Q_{16}	$x^3+yz^2+y^7+\boldsymbol{a}xy^5$	Q_{17}	$x^3+yz^2+xy^5+\boldsymbol{a}y^8$
Q_{18}	$x^3+yz^2+y^8+\boldsymbol{a}xy^6$	S_{16}	$x^2z+yz^2+xy^4+\boldsymbol{a}y^6$
S_{17}	$x^2z+yz^2+y^6+\boldsymbol{a}zy^4$	U_{16}	$x^3+xz^2+y^5+\boldsymbol{a}x^2y^2$

Все функции перечисленных семейств (при указанных в таблицах ограничениях) бимодальны.

15.2. Особенности коранга 2 с ненулевой 4-струей. Всюду в этом разделе $\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ (если $k = 1$, то $\boldsymbol{a} = 0$).

1°. Особенности коранга 2 с ненулевой 4-струей. Кроме простых особенностей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{D}$, E_6, E_7, E_8 есть еще бесконечная серия классов:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$J_{k,0}$	$x^3 + bx^2y^k + y^{3k} + cxy^{2k+1}$	$k > 1$, $4b^3 + 27 \neq 0$	$6k-2$	$k-1$
$J_{k,i}$	$x^3 + x^2y^k + \boldsymbol{a}x^{3k+i}$	$k > 1$, $i > 0$, $a_0 \neq 0$	$6k-2+i$	$k-1$
E_{6k}	$x^3 + y^{3k+1} + \boldsymbol{a}xy^{2k+1}$	$k \geqslant 1$	$6k$	$k-1$
E_{6k+1}	$x^3 + xy^{2k+1} + \boldsymbol{a}y^{3k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+1$	$k-1$
E_{6k+2}	$x^3 + y^{3k+2} + \boldsymbol{a}xy^{2k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+2$	$k-1$

Здесь $\boldsymbol{c} = c_0 + \ldots + c_{k-3}y^{k-3}$ при $k > 2$; при $k = 2$ полагаем $\boldsymbol{c} = 0$.

2°. Особенности коранга 2 с нулевой 3-струей и ненулевой 4-струей. Имеются 4 бесконечные серии классов $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{W}$.

Особенности классов $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$X_{k,0}$	$x^4 + \boldsymbol{b}x^3y^k + \boldsymbol{a}x^2y^{2k} + xy^{3k}$	$\Delta \neq 0$, $a_0b_0 \neq 9$	$12k-3$	$3k-2$
$X_{k,p}$	$x^4 + \boldsymbol{a}x^3y^k + x^2y^{2k} + \boldsymbol{b}y^{4k+p}$	$a_0^2 \neq 4$, $b_0 \neq 0$, $p > 0$	$12k-3+p$	$3k-2$
$Y^k_{r,s}$	$[(x + \boldsymbol{a}y^k)^2 + \boldsymbol{b}y^{2k+s}](x^2 + y^{2k+r})$	$1 \leqslant s \leqslant r$, $a_0 \neq 0 \neq b_0$	$12k-3+$ $+r+s$	$3k-2$

В случае $k = 1$ эти формулы нужно несколько видоизменить:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$X_{1,0}$	$x^4 + a_0x^2y^2 + y^4$	$a_0^2 \neq 4$	9	1
$X_{1,p}$	$x^4 + x^2y^2 + a_0y^{4+p}$	$a_0 \neq 0$	$9+p$	1
$Y^1_{r,s}$	$x^{4+r} + a_0x^2y^2 + y^{4+s}$	$a_0 \neq 0$	$9+r+s$	1

Конечно, $X_{1,0} = X_9$, $X_{1,p} = T_{2,4,4+p}$, $Y^1_{r,s} = T_{2,4+r,4+s}$ (см. п. 15.1). Здесь

$$\Delta = 4(a_0^3 + b_0^3) - a_0^2b_0^2 - 18a_0b_0 + 27, \quad \boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{2k-2}y^{2k-2}.$$

Особенности класса $\boldsymbol{Z}$.

Особенности $Z^k_{i,0}$ и Z^k_{μ} $(k>1)$ имеют нормальную форму вида $f = (x-\boldsymbol{a}y^k)f_2$, где $a_0\neq 0$ и f_2 дается следующей таблицей:

Обозначение	f_2	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$Z^k_{i,0}$	$x^3+dx^2y^{k+i}+\boldsymbol{c}xy^{2k+2i+1}+y^{3k+3i}$	$4d^3+27\neq 0$, $i>0$	$12k+6i-3$	$3k+i-2$
$Z^k_{12k+6i-1}$	$x^3+\boldsymbol{b}xy^{2k+2i+1}+y^{3k+3i+1}$	$i\geqslant 0$	$12k+6i-1$	$3k+i-2$
Z^k_{12k+6i}	$x^3+xy^{2k+2i+1}+\boldsymbol{b}y^{3k+3i+2}$	$i\geqslant 0$	$12k+6i$	$3k+i-2$
$Z^k_{12k+6i+1}$	$x^3+\boldsymbol{b}xy^{2k+2i+2}+y^{3k+3i+2}$	$i\geqslant 0$	$12k+6i+1$	$3k+i-2$

Особенность $Z^k_{i,p}$ $(k>1, i>0, p>0)$ имеет нормальную форму

$$Z^k_{i,p}\colon (x^2+\boldsymbol{a}xy^k+\boldsymbol{b}y^{2k+1})(x^2+y^{2k+2i+p}),\quad a_0\neq 0,\ \ b_0\neq 0;$$

ее кратность $\mu = 12k+6i+p-3$, модальность $m=3k+i-2$.

При $k=1$ предыдущие формулы видоизменяются следующим образом:

1) верхний индекс k не указывается;

2) особенности $Z_{i,0}$, Z_{6i+11}, Z_{6i+12}, Z_{6i+13} $(i>0)$ имеют нормальные формы вида $f=yf_2$, где f_2 дается предыдущей таблицей;

3) $Z_{i,p}\colon y(x^3+x^2y^{i+1}+\boldsymbol{b}y^{3i+p+3})$, $b_0\neq 0$, $i>0$, $p>0$; $\mu = 9+6i+p$, $m=i+1$.

В формулах этого пункта всюду

$$\boldsymbol{b}=b_0+\ldots+b_{2k+i-2}y^{2k+i-2},\quad \boldsymbol{c}=c_0+\ldots+c_{2k+i-3}y^{2k+i-3}.$$

Особенности класса $\boldsymbol{W}$:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
W_{12k}	$x^4+y^{4k+1}+\boldsymbol{a}xy^{3k+1}+\boldsymbol{c}x^2y^{2k+1}$	$k\geqslant 1$	$12k$	$3k-2$
W_{12k+1}	$x^4+xy^{3k+1}+\boldsymbol{a}x^2y^{2k+1}+\boldsymbol{c}y^{4k+2}$	$k\geqslant 1$	$12k+1$	$3k-2$
$W_{k,0}$	$x^4+\boldsymbol{b}x^2y^{2k+1}+\boldsymbol{a}xy^{3k+2}+y^{4k+2}$	$k\geqslant 1$, $b_0^2\neq 4$	$12k+3$	$3k-1$
$W_{k,i}$	$x^4+\boldsymbol{a}x^3y^{k+1}+x^2y^{2k+1}+\boldsymbol{b}y^{4k+2+i}$	$i>0$, $b_0\neq 0$	$12k+3+i$	$3k-1$
$W^{\sharp}_{k,2q-1}$	$(x^2+y^{2k+1})^2+\boldsymbol{b}xy^{3k+1+q}+\boldsymbol{a}y^{4k+2+q}$	$q>0$, $b_0\neq 0$	$12k+2+2q$	$3k-1$
$W^{\sharp}_{k,2q}$	$(x^2+y^{2k+1})^2+\boldsymbol{b}x^2y^{2k+1+q}+\boldsymbol{a}xy^{3k+2+q}$	$q>0$, $b_0\neq 0$	$12k+3+2q$	$3k-1$
W_{12k+5}	$x^4+xy^{3k+2}+\boldsymbol{a}x^2y^{2k+2}+\boldsymbol{b}y^{4k+3}$	$k\geqslant 1$	$12k+5$	$3k-1$
W_{12k+6}	$x^4+y^{4k+3}+\boldsymbol{a}xy^{3k+3}+\boldsymbol{b}x^2y^{2k+2}$	$k\geqslant 1$	$12k+6$	$3k-1$

В этих формулах $\boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{2k-1}y^{2k-1}$, $\boldsymbol{c} = c_0 + \ldots + c_{2k-2}y^{2k-2}$; как и всюду, $\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ при $k > 1$ и $\boldsymbol{a} = 0$ при $k = 1$.

15.3. Особенности коранга 3 с приведенной 3-струей. Кроме унимодальных особенностей серии $\boldsymbol{T}$ (см. п. 15.1) имеются 3 бесконечные серии классов таких особенностей: $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{U}$.

1°. Серия $\boldsymbol{Q}$. Особенности с 3-струей $x^3 + yz^2$ образуют бесконечную серию классов:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$Q_{k,0}$	$\varphi + \boldsymbol{b}x^2y^k + xy^{2k}$	$k > 1, b_0^2 \neq 4$	$6k+2$	k
$Q_{k,i}$	$\varphi + x^2y^k + \boldsymbol{b}y^{3k+i}$	$k > 1, b_0 \neq 0$	$6k+2+i$	k
Q_{6k+4}	$\varphi + y^{3k+1} + \boldsymbol{b}xy^{2k+1}$	$k \geqslant 1$	$6k+4$	k
Q_{6k+5}	$\varphi + xy^{2k+1} + \boldsymbol{b}y^{3k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+5$	k
Q_{6k+6}	$\varphi + y^{3k+2} + \boldsymbol{b}xy^{2k+2}$	$k \geqslant 1$	$6k+6$	k

В этих формулах $\varphi = x^3 + yz^2$, $\boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{k-1}y^{k-1}$.

2°. Серия $\boldsymbol{S}$. Особенности с 3-струей $x^2z + yz^2$ образуют бесконечную серию классов:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
S_{12k-1}	$\varphi + y^{4k} + \boldsymbol{a}xy^{3k} + \boldsymbol{c}zy^{2k+1}$	—	$12k-1$	$3k-2$
S_{12k}	$\varphi + xy^{3k} + \boldsymbol{c}xy^{4k+1} + \boldsymbol{a}zy^{2k+1}$	—	$12k$	$3k-2$
$S_{k,0}$	$\varphi + y^{4k+1} + \boldsymbol{a}xy^{3k+1} + \boldsymbol{b}zy^{2k+1}$	$b_0^2 \neq 4$	$12k+2$	$3k-1$
$S_{k,i}$	$\varphi + x^2y^{2k} + \boldsymbol{a}x^3y^k + \boldsymbol{b}y^{4k+1+i}$	$i > 0, b_0 \neq 0$	$12k+2+i$	$3k-1$
$S^\sharp_{k,2q-1}$	$\varphi + zy^{2k+1} + \boldsymbol{b}xy^{3k+q} + \boldsymbol{a}y^{4k+q+1}$	$q > 0, b_0 \neq 0$	$12k+2q+1$	$3k-1$
$S^\sharp_{k,2q}$	$\varphi + zy^{2k+1} + \boldsymbol{b}x^2y^{2k+q} + \boldsymbol{a}xy^{3k+q+1}$	$q > 0, b_0 \neq 0$	$12k+2q+2$	$3k-1$
S_{12k+4}	$\varphi + xy^{3k+1} + \boldsymbol{a}zy^{2k+2} + \boldsymbol{b}y^{4k+2}$	—	$12k+4$	$3k-1$
S_{12k+5}	$\varphi + y^{4k+2} + \boldsymbol{a}xy^{3k+2} + \boldsymbol{b}zy^{2k+2}$	—	$12k+5$	$3k-1$

В этих формулах $\varphi = x^2z + yz^2$, $\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ при $k > 1$, $\boldsymbol{a} = 0$ при $k = 1$; $\boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{2k-1}y^{2k-1}$, $\boldsymbol{c} = c_0 + \ldots + c_{2k-2}y^{2k-2}$.

Кроме того, имеются еще классы $\boldsymbol{S}^*_k$ ($k > 1$), подразделяющиеся на $S^*_{k,0}$, $\boldsymbol{SP}_k$, $\boldsymbol{SQ}_k$, $\boldsymbol{SR}_k$ где $\mu(S^*_{k,0}) = 12k-4$, $m(S^*_{k,0}) = \ldots = m(\boldsymbol{SR}_k) = 3k-2$, $\operatorname{codim} \boldsymbol{S}^*_k = 9k-3$.

3°. Серия $\boldsymbol{U}$. Особенности с 3-струей $x^3 + xz^2$ образуют бесконечную серию классов:

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
U_{12k}	$\varphi + y^{3k+1} + \boldsymbol{a}xy^{2k+1} + \boldsymbol{b}zy^{2k+1} + \boldsymbol{d}x^2y^{k+1}$	—	$12k$	$4k-3$
$U_{k,2q}$	$\varphi + xy^{2k+1} + \boldsymbol{a}x^2y^{k+1} + \boldsymbol{b}y^{3k+2+q} + \boldsymbol{c}zy^{2k+1+q}$	$q \geqslant 0, c_0 \neq 0$	$12k+2+2q$	$4k-2$
$U_{k,2q-1}$	$\varphi + xy^{2k+1} + \boldsymbol{a}x^2y^{k+1} + \boldsymbol{b}zy^{2k+1+q} + \boldsymbol{c}z^2y^{k+q}$	$q > 0, c_0 \neq 0$	$12k+1+2q$	$4k-2$
U_{12k+4}	$\varphi + y^{3k+2} + \boldsymbol{a}xy^{2k+2} + \boldsymbol{b}zy^{2k+2} + \boldsymbol{c}x^2y^{k+1}$	—	$12k+4$	$4k-2$

В этих формулах $\varphi = x^3 + xz^2$, $c_0^2 + 1 \neq 0$ при $q = 0$; всюду
$\boldsymbol{a} = a_0 + \ldots + a_{k-2}y^{k-2}$ при $k > 1$, $\boldsymbol{a} = 0$ при $k = 1$;
$\boldsymbol{b} = b_0 + \ldots + b_{k-2}y^{k-2}$ при $k > 1$, $\boldsymbol{b} = 0$ при $k = 1$;
$\boldsymbol{c} = c_0 + \ldots + c_{2k-1}y^{2k-1}$, $\boldsymbol{d} = d_0 + \ldots + d_{2k-2}y^{2k-2}$.
Кроме того, имеются еще классы $\boldsymbol{U}_k^*$ $(k > 1)$, подразделяющиеся на классы $U_{k,0}^*$, $\boldsymbol{UP}_k$, $\boldsymbol{UQ}_k$, $\boldsymbol{UR}_k$, $\boldsymbol{US}_k$, $\boldsymbol{UT}_k$, для которых

$$\mu \geqslant \mu(U_{k,0}^*) = 12k - 4, \quad m(U_{k,0}^*) = \ldots = m(\boldsymbol{UT}_k) = 4k - 3,$$

$$\operatorname{codim}(\boldsymbol{U}_k^*) = 8k - 2.$$

15.4. Серия $\boldsymbol{V}$. Особенности коранга 3 с 3-струей x^2y подразделяются на классы $V_{1,i}$, $V_{1,i}^\sharp$, $\boldsymbol{V}^*$, где

Обозначение	Нормальная форма	Ограничения	Кратность, μ	Модальность, m
$V_{1,0}$	$x^2y + z^4 + az^3y + \boldsymbol{b}z^2y^2 + zy^3$	$\Delta(a, b_0) \neq 0$	15	3
$V_{1,p}$	$x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2 + \boldsymbol{a}y^{4+p}$	$b^2 \neq 4, a_0 \neq 0$	$15 + p$	3
$V_{1,2q-1}^\sharp$	$x^2y + z^3y + ay^2z^2 + y^4 + \boldsymbol{b}xz^{2+q}$	$4a^3 + 27 \neq 0$, $b_0 \neq 0$	$14 + 2q$	3
$V_{1,2q}^\sharp$	$x^2y + z^3y + ay^2z^2 + y^4 + \boldsymbol{b}z^{4+q}$	$4a^3 + 27 \neq 0$, $b_0 \neq 0$	$14 + 2q$	3

Здесь $p > 0$, $q > 0$, $\boldsymbol{a} = a_0 + a_1y$, $\boldsymbol{b} = b_0 + b_1z$. Особенности класса $\boldsymbol{V}^*$ удовлетворяют условиям

$$\mu(\boldsymbol{V}^*) \geqslant 17, \quad m(\boldsymbol{V}^*) \geqslant 3, \quad \operatorname{codim}(\boldsymbol{V}^*) = 13.$$

15.5. Прочие особенности. Все особенности, нормальные формы которых не приведены выше, принадлежат следующим 7 классам:

Обозначение	Коранг	Примыкания	Определение	$c \geqslant$	$\mu \geqslant$	$m \geqslant$	Теорема
$\boldsymbol{N}$	2	$\boldsymbol{N} \to W_{13}$	$j_4 = 0$	12	16	3	**47—49**
$\boldsymbol{S}^*$	3	$\boldsymbol{S}_k^* \to S_{12k-7}$	см. т. **77**	15	20	4	**77—81**
$\boldsymbol{U}^*$	3	$\boldsymbol{U}_k^* \to U_{12k-8}$	см. т. **90**	14	20	5	**90—96**
$\boldsymbol{V}^*$	3	$\boldsymbol{V}^* \to V_{1,1} \cup V_{1,1}^\sharp$	см. т. **98**	13	17	3	**97—102**
$\boldsymbol{V}'$	3	$\boldsymbol{V}' \to \boldsymbol{V}$	$j_3 = x^3$	13	18	4	**103**
$\boldsymbol{V}''$	3	$\boldsymbol{V}'' \to \boldsymbol{V}'$	$j_3 = 0$	16	27	10	**104**
$\boldsymbol{O}$	> 3	$\boldsymbol{O} \to T_{4,4,4}$	corank $\geqslant 4$	10	16	5	**105**

Здесь $k \geqslant 2$. Номера теорем относятся к теоремам § 16. Нормальная форма для особенностей класса $\boldsymbol{O}$, исключая множество коразмерности $c = 11$, такова:

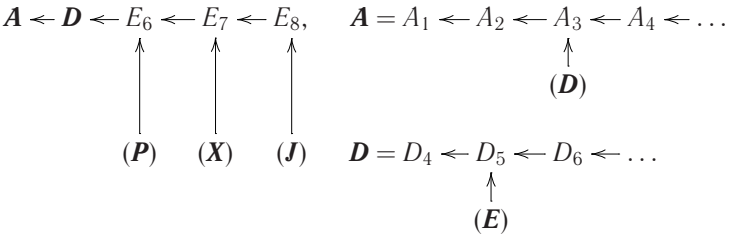
$$x^3 + y^3 + z^3 + u^3 + (ax + by + cz + du)^3 + exyzu, \quad \Delta(a, b, c, d) \neq 0,$$

где Δ — дискриминант.

15.6. Некоторые примыкания. Ниже указаны только те примыкания, которые естественно возникают в ходе классификации (см. § 16) *).

1°. *Особенности с числом модулей $m = 0$, 1 и 2.*

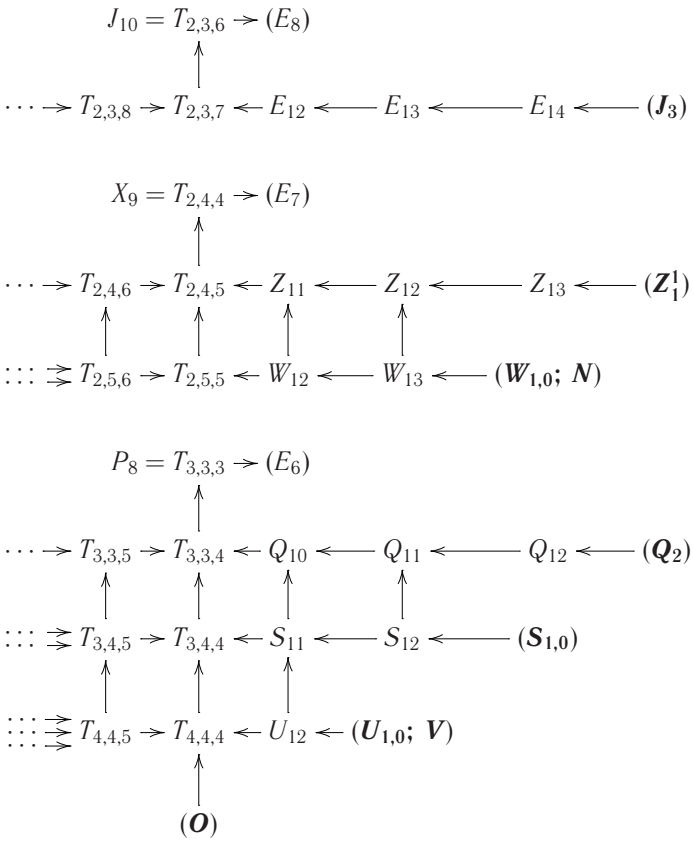
1.0. *Некоторые примыкания простых особенностей*:



Классы $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{J}$ состоят из непростых особенностей. Все распадения простых особенностей описаны О. В. Ляшко в [157].

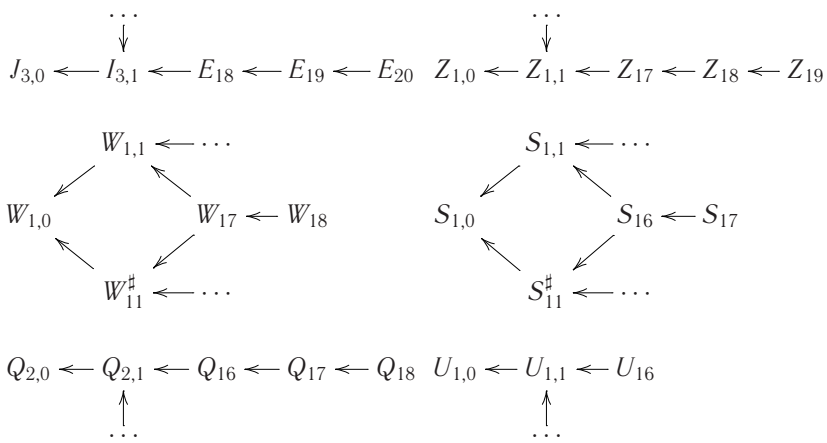
*) Эти примыкания обладают следующим свойством: примыкание вида $\boldsymbol{K} \leftarrow \boldsymbol{L}$ исключает примыкание какой-либо части $\boldsymbol{K}'$ класса $\boldsymbol{K}$ к какой либо части $\boldsymbol{L}'$ класса $\boldsymbol{L}$ (например, примыкание $\boldsymbol{A} \leftarrow \boldsymbol{D}$ исключает примыкание $A_\mu \to D_4$). Примыкания с указанным свойством мы будем называть *сильными*.

1.1. *Некоторые примыкания унимодальных особенностей*:

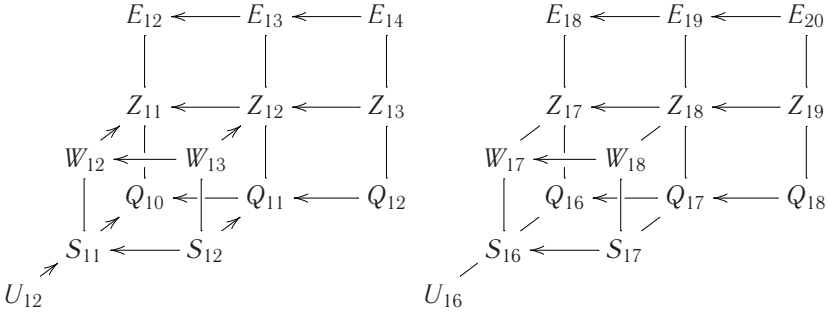


В скобках стоят классы особенностей, модальность которых не равна 1. Полный список примыканий всех особенностей модальности 1 найден Брискорном [275]. Анализ таблиц примыканий указывает на полунепрерывность спектра особенности (набора $l_1 \leqslant \ldots \leqslant l_\mu$ показателей Стинбринка, см. [462]). Список Брискорна примыканий унимодальных особенностей содержит в точности все примыкания, допускаемые гипотезой полунепрерывности, кроме одного ($Q_{11} \to J_{10}$). В. В. Горюнов проверил, что для всех этих примыканий выполняется гипотеза (см. [251]) о полунепрерывности спектра особенности и что условие полунепрерывности исключает возможность всех примыканий, кроме найденных Брискорном и еще одного, а именно исключаемого полунепрерывностью индексов инерции формы пересечений.

1.2. *Некоторые примыкания бимодальных особенностей*:



Пирамиды исключительных особенностей модальности 1 и 2:



Вертикальные отрезки соединяют особенности, получающиеся из одного класса Кодаиры с помощью конструкции В. С. Куликова [144].

2°. *Особенности коранга* 2 *с ненулевой* 4*-струей*.

2.1. *Особенности коранга* 2 *с ненулевой* 3*-струей*:

$$\boldsymbol{J} = \leftarrow \boldsymbol{J_2} \leftarrow \boldsymbol{J_3} \leftarrow \cdots$$

$$\boldsymbol{J_k} = \leftarrow J_{k,0} \leftarrow J_{k,1} \leftarrow E_{6k} \leftarrow E_{6k+1} \leftarrow E_{6k+2} \leftarrow (\boldsymbol{J_{k+1}})$$
$$\uparrow$$
$$J_{k,2} \leftarrow J_{k,3} \leftarrow \cdots$$

2.2. *Особенности коранга* 2 *с нулевой* 3*-струей и ненулевой* 4*-струей*. Все такие особенности образуют одну бесконечную серию классов

$$\boldsymbol{X} = \leftarrow \boldsymbol{X_1} \leftarrow \boldsymbol{X_2} \leftarrow \dots$$

где

$$\boldsymbol{X_k} = \leftarrow X_{k,0} \leftarrow \boldsymbol{X_k^*} \begin{array}{c} \nearrow \boldsymbol{Y_k} \nwarrow \\ \searrow \boldsymbol{Z_k} \swarrow \end{array} \boldsymbol{W_k} \leftarrow (\boldsymbol{X_{k+1}}),$$

причем

$$\boldsymbol{X_k^*} = \leftarrow \overset{\dots}{\Downarrow} X_{k,1} \leftarrow X_{k,2} \leftarrow \cdots, \qquad \boldsymbol{Y_k} = \leftarrow \overset{\dots}{\downarrow} Y^k_{1,1} \leftarrow Y^k_{2,1} \lessdot \vdots\vdots,$$

$$\boldsymbol{Z_k} = \leftarrow \overset{\dots}{\downarrow} \boldsymbol{Z_0^k} \leftarrow \boldsymbol{Z_1^k} \leftarrow \cdots, \qquad \boldsymbol{Z_0^k} = \leftarrow Z^k_{12k-1} \leftarrow Z^k_{12k} \leftarrow Z^k_{12k+1} \leftarrow \cdots,$$

$$\boldsymbol{Z_i^k} = \leftarrow Z^k_{i,0} \leftarrow Z^k_{i,1} \leftarrow Z^k_{12k+6i-1} \leftarrow Z^k_{12k+6i} \leftarrow Z^k_{12k+6i+1} \leftarrow (\boldsymbol{Z_{i+1}^k})$$
$$\uparrow$$
$$Z^k_{i,2} \longleftarrow Z^k_{i,3} \longleftarrow \cdots \quad (i > 0),$$

$$\boldsymbol{W_k} = \leftarrow W_{12k} \leftarrow W_{12k+1} \leftarrow \begin{array}{c} \nearrow W_{k,1} \leftarrow W_{k,2} \longleftarrow \cdots \\ W_{k,0} \\ \searrow W^\sharp_{k,1} \leftarrow W^\sharp_{k,2} \longleftarrow \cdots \end{array} \nwarrow W_{12k+5} \leftarrow W_{12k+6} \leftarrow (\boldsymbol{X_{k+1}}).$$

3°. *Особенности коранга* 3 *с приведенной* 3*-струей*.

3.1. *Особенности коранга* 3 *с* 3*-струей* $x^3 + yz^2$:

$$\boldsymbol{Q} = \leftarrow \boldsymbol{Q_1} \leftarrow \boldsymbol{Q_2} \leftarrow \cdots, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{Q_1} = \leftarrow Q_{10} \leftarrow Q_{11} \leftarrow Q_{12} \leftarrow$$
$$\boldsymbol{Q_k} = \leftarrow Q_{k,0} \leftarrow Q_{k,1} \leftarrow Q_{6k+4} \leftarrow Q_{6k+5} \leftarrow Q_{6k+6} \leftarrow (\boldsymbol{Q_{k+1}}).$$
$$\uparrow$$
$$(k > 1) \qquad Q_{k,2} \leftarrow Q_{k,3} \longleftarrow \cdots$$

3.2. *Особенности коранга* 3 *с* 3-*струей* $x^2z + yz^2$:

$$\boldsymbol{S} = \leftarrow \boldsymbol{S_1} \leftarrow \boldsymbol{S_2} \leftarrow \cdots,$$

где

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & S_{k,1} & \longleftarrow & \cdots & & & & \\ & & & \swarrow & & & \nwarrow & & & & \\ \boldsymbol{S_k} = \leftarrow & S_{12k-1} & \leftarrow & S_{12k} & \leftarrow & S_{k,0} & & S_{12k+4} & \leftarrow & S_{12k+5} & \leftarrow \boldsymbol{S^*_{k+1}} \leftarrow (\boldsymbol{S_{k+1}}) \\ & & & \nwarrow & & & \swarrow & & & & \\ & & & & S^\sharp_{k,1} & \longleftarrow & \cdots & & & & \end{array}$$

Особенности $\boldsymbol{S^*_k}$ $(k > 1)$ подразделяются на классы так:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & \boldsymbol{SQ_k} & & \\ & & & \swarrow & & \nwarrow & \\ \boldsymbol{S^*_k} = \leftarrow & S^*_{k,0} & \leftarrow & \boldsymbol{SP_k} & & (\boldsymbol{S_k}) & \\ & & & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & & & \boldsymbol{SR_k} & & \end{array}$$

3.3. *Особенности коранга* 3 *с* 3-*струей* $x^3 + xz^2$:

$$\boldsymbol{U} = \leftarrow \boldsymbol{U_1} \leftarrow \boldsymbol{U_2} \leftarrow \cdots,$$

где

$$\boldsymbol{U_k} = \leftarrow U_{12k} \leftarrow U_{k,0} \leftarrow \begin{array}{c} U_{k,1} \\ \uparrow \\ U_{k,2} \end{array} \leftarrow U_{12k+4} \leftarrow \boldsymbol{U^*_{k+1}} \leftarrow (\boldsymbol{U_{k+1}}).$$

$$\boldsymbol{U^*_k} = \leftarrow U^*_{k,0} \leftarrow \begin{array}{ccccc} \boldsymbol{UP_k} & \leftarrow & \boldsymbol{UR_k} & \leftarrow & \boldsymbol{UT_k} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \boldsymbol{UQ_k} & \leftarrow & \boldsymbol{US_k} & \leftarrow & (\boldsymbol{U_k}). \end{array}$$

4°. *Особенности коранга* 3 *с* 3-*струей* x^2y:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & V_{1,1} & \leftarrow V_{1,2} & \leftarrow \cdots \\ & & & \swarrow & & \nwarrow & \\ \boldsymbol{V} = & V_{1,0} & & & & V^* & \\ & & & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & & & V^\sharp_{1,1} & \leftarrow V^\sharp_{1,2} & \leftarrow \cdots \end{array}$$

§ 16. Определитель особенностей

Приведенные ниже 105 теорем позволяют найти место любой особенности в списках § 15.

16.1. Обозначения.

f — росток голоморфной функции в изолированной критической точке 0 кратности μ, или его ряд Тейлора в 0, или формальный ряд от переменных x и y или x, y и z, имеющий конечную кратность μ;

$f \sim g$ — ростки или ряды f и g в 0 эквивалентны (существует такой росток диффеоморфизма или ряд h, что $f = g \circ h$);

$\Rightarrow$ — вытекает;

$\Mapsto$ — смотри (ссылки вида $\Mapsto \boldsymbol{i}$ не входят в формулировки теорем; они указывают номер теоремы, где классифицируются особенности рассматриваемого класса);

$j_k f$ — k-струя функции f в 0 (или многочлен Тейлора степени k в 0);

$\boldsymbol{A}, \ldots, \boldsymbol{Z}$ — классы стабильной эквивалентности ростков функций, определенные в § 15;

$m(f)$ — модальность ростка f в 0;

$c(f)$ — коразмерность страта $\mu = \text{const}$ ростка функции f в пространстве ростков функций с критической точкой 0 и критическим значением 0;

$c(\boldsymbol{K})$ — коразмерность класса $\boldsymbol{K}$ в том же пространстве;

$j_{\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}\}} f$ — квазиструя f в 0, определенная мономами $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}$ (или соответствующий многочлен Тейлора) *);

$j_{\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}\}} f \approx g$ — квазиоднородная эквивалентность струй или многочленов Тейлора;

j^*, φ — смысл этих обозначений для теорем **58—65**, **66—81**, **82—89**, **98—102** объяснен перед первой теоремой каждой группы;

---

*) Система n мономов $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}\}$ от $x_i, \ldots, x_n$ с независимыми показателями $\boldsymbol{m}_i \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ определяет гиперплоскость $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$, $\Gamma = \{\boldsymbol{m} : (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) = 1\}$. Если все компоненты α_i вектора $\boldsymbol{\alpha}$ положительны, то $\boldsymbol{\alpha}$ называется *типом квазиоднородности*, а число $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m})$ — *степенью* монома $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$. Многочлен $\sum f_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}}$ *квазиоднороден степени* $d \in \mathbb{Q}$ *типа* $\boldsymbol{\alpha}$, если $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) = d$ $\forall \boldsymbol{m} : f_{\boldsymbol{m}} \neq 0$.

Тип квазиоднородности определяет в алгебре $\mathbb{C}[[x_1, \ldots, x_n]]$ убывающую *кольцевую фильтрацию* $A_0 \supset \ldots$,

$$\boldsymbol{A}_d = \{f : (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) \geqslant d \ \ \forall \boldsymbol{m} : f_{\boldsymbol{m}} \neq 0\}.$$

Факторпространство $\boldsymbol{A}_0 / (\bigcup \boldsymbol{A}_d,\ d > 1)$ называется *пространством квазиструй*, определенных мономами $\{\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{m}_i}\}$ (или определенных типом квазиоднородности $\boldsymbol{\alpha}$). При фиксированной системе координат квазиструи можно отождествить с многочленами, все мономы которых имеют порядок не выше 1 (т. е. показатели которых лежат на Γ или с той же стороны от Γ, что и 0).

Квазиоднородные диффеоморфизмы — это диффеоморфизмы пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющие градуировку алгебры $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Группа Ли квазиоднородных диффеоморфизмов действует на пространствах квазиструй и на пространствах квазиоднородных многочленов. *Квазиоднородная эквивалентность* есть принадлежность одной орбите этого действия.

Δ — дискриминант. В теоремах **36**, **37**, **47**, **48**, **98**, **99**

$$\Delta = 4(a^3 + b^3) + 27 - a^2b^2 - 18ab.$$

16.2. Определитель.

1. $\mu(f) < \infty \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} \operatorname{corank} f \leqslant 1 &\mapsto \mathbf{2};\\ = 2 &\mapsto \mathbf{3};\\ = 3 &\mapsto \mathbf{50};\\ > 3 &\mapsto \mathbf{105}. \end{aligned}$$

2. $\operatorname{corank} f \leqslant 1 \Rightarrow f \in A_k$ $(k \geqslant 1)$.

В теоремах **3**—**49** $f \in \mathbb{C}[[x, y]]$.

3. $j^2 f = 0 \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j^3 f \approx x^2y + y^3 &\mapsto \mathbf{4};\\ \approx x^2y &\mapsto \mathbf{5};\\ \approx x^3 &\mapsto \mathbf{6_1};\\ = 0 &\mapsto \mathbf{13}. \end{aligned}$$

4. $j^3 f = x^2y + y^3 \Rightarrow f \in D_4$.

5. $j^3 f = x^2y \Rightarrow f \in D_k$ $(k > 4)$.

В теоремах **6**—**9** число $k \geqslant 1$.

6$_k$. $j_{x^3,y^{3k}} f(x, y) = x^3 \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j_{x^3,y^{3k+1}} f &\approx x^3 + y^{3k+1} &&\mapsto \mathbf{7_k};\\ j_{x^3,xy^{2k+1}} f &\approx x^3 + xy^{2k+1} &&\mapsto \mathbf{8_k};\\ j_{x^3,y^{3k+2}} f &\approx x^3 + y^{3k+2} &&\mapsto \mathbf{9_k};\\ j_{x^3,y^{3k+2}} f &= x^3 &&\mapsto \mathbf{10_{k+1}}. \end{aligned}$$

7$_k$. $j_{x^3,y^{3k+1}} f = x^3 + y^{3k+1} \Rightarrow f \in E_{6k}$.

8$_k$. $j_{x^3,xy^{2k+1}} f = x^3 + xy^{2k+1} \Rightarrow f \in E_{6k+1}$.

9$_k$. $j_{x^3,y^{3k+2}} f = x^3 + y^{3k+2} \Rightarrow f \in E_{6k+2}$.

В теоремах **10**—**12** число $k > 1$.

10$_k$. $j_{x^3,y^{3k-1}} f = x^3 \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j_{x^3,y^{3k}} f \approx x^3 + ax^2y^k + y^{3k},\ \ 4a^3 + 27 \neq 0 &\mapsto \mathbf{11_k};\\ \approx x^3 + x^2y^k &\mapsto \mathbf{12_k};\\ \approx x^3 &\mapsto \mathbf{6_k}. \end{aligned}$$

11$_k$. $j_{x^3,y^{3k}} f = x^3 + ax^2y^k + y^{3k}$, $4a^3 + 27 \neq 0 \Rightarrow f \in J_{k,0}$.

12$_k$. $j_{x^3,y^{3k}} f = x^3 + x^2y^k \Rightarrow f \in J_{k,p}$ $(p > 0)$.

Серия $\boldsymbol{X}$.

13. $j_3f(x, y) = 0 \Rightarrow$ одно из шести:

$$\begin{aligned} j^4f &\approx x^4 + ax^2y^2 + y^4, \quad a^2 \neq 4 && \mapsto \mathbf{14};\\ &\approx x^4 + x^2y^2 && \mapsto \mathbf{15};\\ &\approx x^2y^2 && \mapsto \mathbf{16};\\ &\approx x^3y && \mapsto \mathbf{17};\\ &\approx x^4 && \mapsto \mathbf{25};\\ &= 0 && \mapsto \mathbf{47}. \end{aligned}$$

14. $j^4f = x^4 + ax^2y^2 + y^4$, $a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in X_9 = X_{1,0} = T_{2,4,4}$.

15. $j^4f = x^4 + x^2y^2 \Rightarrow f \in X_{1,p} = T_{2,4,4+p}$ $(p > 0)$.

16. $j^4f = x^2y^2 \Rightarrow f \in Y^1_{p,q} = T_{2,4+p,4+q}$ $(p \geqslant q > 0)$.

17. $j^4f = x^3y \Rightarrow j_{x^3y,y^4}f = x^3y \mapsto \mathbf{18_1}$.

В теоремах **18**—**21** число $p \geqslant 1$.

18$_p$. $j_{x^3y,y^{3p+1}}f = x^3y \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j_{x^3y,y^{3p+2}}f &\approx x^3y + y^{3p+2} && \mapsto \mathbf{19}_p;\\ j_{x^3y,xy^{2p+2}}f &\approx x^3y + xy^{2p+2} && \mapsto \mathbf{20}_p;\\ j_{x^3y,y^{3p+3}}f &\approx x^3y + y^{3p+3} && \mapsto \mathbf{21}_p;\\ j_{x^3y,y^{3p+3}}f &= x^3y && \mapsto \mathbf{22}_{p+1}. \end{aligned}$$

19$_p$. $j_{x^3y,y^{3p+2}}f = x^3y + y^{3p+2} \Rightarrow f \in Z_{6p+5}$.

20$_p$. $j_{x^3y,xy^{2p+2}}f = x^3y + xy^{2p+2} \Rightarrow f \in Z_{6p+6}$.

21$_p$. $j_{x^3y,xy^{3p+2}}f = x^3y + y^{3p+3} \Rightarrow f \in Z_{6p+7}$.

В теоремах **22**—**24** число $p > 1$.

22$_p$. $j_{x^3y,y^{3p}}f = x^3y \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j_{x^3y,y^{3p+1}}f &\approx y(x^3 + bx^2y^p + y^{3p}), \quad 4b^3 + 27 \neq 0 && \mapsto \mathbf{23}_p;\\ &\approx y(x^3 + x^2y^p) && \mapsto \mathbf{24}_p;\\ &\approx x^3y && \mapsto \mathbf{18}_p. \end{aligned}$$

23$_p$. $j_{x^3y,y^{3p+1}}f = y(x^3 + bx^2y^p + y^{3p})$, $4b^3 + 27 \neq 0 \Rightarrow f \in Z_{p-1,0}$.

24$_p$. $j_{x^3y,y^{3p+1}}f = y(x^3 + x^2y^p) \Rightarrow f \in Z_{p-1,r}$ $(r > 0)$.

Серия $\boldsymbol{W}$.

25. $j_4f(x, y) = x^4 \Rightarrow j_{x^4,y^4}f = x^4 \mapsto \mathbf{26_1}$.

В теоремах **26**—**34** число $k \geqslant 1$.

26$_k$. $j_{x^4,y^{4k}}f = x^4 \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j_{x^4,y^{4k+1}}f &\approx x^4 + y^{4k+1} && \mapsto \mathbf{27}_k.\\ j_{x^4,xy^{3k+1}}f &\approx x^4 + xy^{3k+1} && \mapsto \mathbf{28}_k.\\ j_{x^4,xy^{3k+1}}f &\approx x^4 && \mapsto \mathbf{29}_k. \end{aligned}$$

27$_k$. $j_{x^4,y^{4k+1}}f = x^4 + y^{4k+1} \Rightarrow f \in W_{12k}$.

28$_k$. $j_{x^4,xy^{3k+1}}f = x^4 + xy^{3k+1} \Rightarrow f \in W_{12k+1}$.

29_k. $j_{x^4,xy^{3k+1}}f = x^4 \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j_{x^4,y^{4k+2}}f &\approx x^4 + bx^2y^{2k+1} + y^{4k+2}, \quad b \neq 4 && \Mapsto \mathbf{30_k};\\ &\approx x^4 + x^2y^{2k+1} && \Mapsto \mathbf{31_k};\\ &\approx (x^2 + y^{2k+1})^2 && \Mapsto \mathbf{32_k};\\ &= x^4 && \Mapsto \mathbf{33_k}. \end{aligned}$$

30_k. $j_{x^4,y^{4k+2}}f = x^4 + bx^2y^{2k+1} + y^{4k+2}$, $b \neq 4 \Rightarrow f \in W_{k,0}$.

31_k. $j_{x^4,y^{4k+2}}f = x^4 + x^2y^{2k+1} \Rightarrow f \in W_{k,i}$ $(i > 0)$.

32_k. $j_{x^4,y^{4k+2}}f = (x^2 + y^{2k+1})^2 \Rightarrow f \in W^{\sharp}_{k,i}$ $(i > 0)$.

33_k. $j_{x^4,y^{4k+2}}f = x^4 \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j_{x^4,xy^{3k+2}}f &\approx x^4 + xy^{3k+2} && \Mapsto \mathbf{34_k};\\ j_{x^4,y^{4k+3}}f &\approx x^4 + y^{4k+3} && \Mapsto \mathbf{35_k};\\ j_{x^4,y^{4k+3}}f &= x^4 && \Mapsto \mathbf{36_{k+1}}. \end{aligned}$$

34_k. $j_{x^4,xy^{3k+2}}f = x^4 + xy^{3k+2} \Rightarrow f \in W_{12k+5}$.

35_k. $j_{x^4,y^{4k+3}}f = x^4 + y^{4k+3} \Rightarrow f \in W_{12k+6}$.

В теоремах **36—46** число $k > 1$.

Серия $\boldsymbol{X_k}$.

36_k. $j_{x^4,y^{4k-1}}f = x^4 \Rightarrow$ одно из пяти:

$$\begin{aligned} j_{x^4,y^{4k}}f &\approx x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}, \quad \Delta \neq 0, \quad ab \neq 9 && \Mapsto \mathbf{37_k};\\ &\approx x^2(x^2 + axy^k + y^{2k}), \quad a^2 \neq 4 && \Mapsto \mathbf{38_k};\\ &\approx x^2(x + y^k)^2 && \Mapsto \mathbf{39_k};\\ &\approx x^3(x + y^k) && \Mapsto \mathbf{40_k};\\ &\approx x^4 && \Mapsto \mathbf{26_k}. \end{aligned}$$

37_k. $j_{x^4,y^{4k}}f = x^4 + bx^3y^k + ax^2y^{2k} + xy^{3k}$, $\Delta \neq 0$, $ab \neq 9 \Rightarrow f \in X_{k,0}$.

38_k. $j_{x^4,y^{4k}}f = x^2(x^2 + axy^k + y^{2k})$, $a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in X_{k,p}$ $(p > 0)$.

39_k. $j_{x^4,y^{4k}}f = x^2(x + y^k)^2 \Rightarrow f \in Y^k_{r,s}$ $(1 \leqslant s \leqslant r)$.

40_k. $j_{x^4,y^{4k}}f = x^3(x + y^k) \Rightarrow f \sim f_1f_2$, где $j_{x,y^k}f_1 \approx x + y^k$, $j_{x^3,y^{3k}}f_2 = x^3 \Mapsto \mathbf{41_k}$.

В теоремах **41—44** $i \geqslant 0$, $p > 0$.

41_k. $j_{x^3,y^{3k}}f_2 = x^3 \Rightarrow$ одно из пяти:

$$\begin{aligned} f_2 &\in E_{6(k+i)} && \Mapsto \mathbf{42_{k,i}};\\ f_2 &\in E_{6(k+i)+1} && \Mapsto \mathbf{43_{k,i}};\\ f_2 &\in E_{6(k+i)+2} && \Mapsto \mathbf{44_{k,i}};\\ f_2 &\in E_{k+i+1,0} && \Mapsto \mathbf{45_{k,i+1}};\\ f_2 &\in E_{k+i+1,p} && \Mapsto \mathbf{46_{k,i+1,p}}. \end{aligned}$$

В теоремах **42—46** $f(x, y) = f_1f_2$, где

$$j_{x,y^k}f_1 \approx x + y^k, \quad j_{x^3,y^{3k}}f_2 = x^3.$$

$42_{k,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)} \Rightarrow f \in Z^k_{12k+6i-1}$.

43$_{k,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)+1} \Rightarrow f \in Z^k_{12k+6i}$.
44$_{k,i}$. $f_2 \in E_{6(k+i)+2} \Rightarrow f \in Z^k_{12k+6i+1}$.

В теоремах **45**, **46** числа $i \geqslant 1$, $p > 0$.

45$_{k,i}$. $f_2 \in J_{k+i,0} \Rightarrow f \in Z^k_{i,0}$.
46$_{k,i,p}$. $f_2 \in J_{k+i,p} \Rightarrow f \in Z^k_{i,p}$.
47. $j_4 f = 0 \Rightarrow$ одно из двух:

$$j_5 f \approx x^4 y + ax^3 y^2 + bx^2 y^3 + xy^4, \quad \Delta \neq 0, \quad ab \neq 9 \mapsto \mathbf{48};$$
$$j_5 f \text{ вырождена} \mapsto \mathbf{49}.$$

48. $j_5 f = x^4 y + ax^3 y^2 + bx^2 y^3 + xy^4, \Delta \neq 0 \Rightarrow f \in N_{16}$, т. е. $f \sim x^4 y + ax^3 y^2 + bx^2 y^3 + xy^4 + cx^3 y^3$, $\Delta \neq 0$, $ab \neq 9$; $\mu(f) = 16$, $m(f) = 3$, $c(f) = 12$.
49. $j_5 f$ вырождена $\Rightarrow \mu(f) > 16$, $m(f) > 2$, $c(f) > 12$.

Особенности коранга 3

В теоремах **50—104** $f \in \mathbb{C}[[x, y, z]]$.

50. $j_2 f(x, y, z) = 0 \Rightarrow$ одно из десяти:

$$\begin{aligned}
j_3 f &\approx x^3 + y^3 + z^3 + axyz, \quad a^3 + 27 \neq 0 \mapsto \mathbf{51};\\
&\approx x^3 + y^3 + xyz \mapsto \mathbf{52} \quad (\text{серия } \boldsymbol{P});\\
&\approx x^3 + xyz \mapsto \mathbf{54} \quad (\text{серия } \boldsymbol{R});\\
&\approx xyz \mapsto \mathbf{56} \quad (\text{серия } \boldsymbol{T});\\
&\approx x^3 + yz^2 \mapsto \mathbf{58} \quad (\text{серия } \boldsymbol{Q});\\
&\approx x^2 z + yz^2 \mapsto \mathbf{66} \quad (\text{серия } \boldsymbol{S});\\
&\approx x^3 + xz^2 \mapsto \mathbf{82} \quad (\text{серия } \boldsymbol{U});\\
&\approx x^2 y \mapsto \mathbf{97} \quad (\text{класс } \boldsymbol{V});\\
&\approx x^3 \mapsto \mathbf{103};\\
&= 0 \mapsto \mathbf{104}.
\end{aligned}$$

Серия ***T***.

51. $j_3 f = x^3 + y^3 + z^3 + axyz$, $a^3 + 27 \neq 0 \Rightarrow f \in P_8 = T_{3,3,3}$.
52. $j_3 f = x^3 + y^3 + xyz \Rightarrow f \sim x^3 + y^3 + xyz + \alpha(z)$, $j_3(\alpha) = 0 \mapsto \mathbf{53}$.
53. $f = x^3 + y^3 + xyz + \alpha(z)$, $j_3(\alpha) = 0 \Rightarrow f \in P_{p+5} = T_{3,3,p}$ $(p > 3)$.
54. $j_3 f = x^3 + xyz \Rightarrow f \sim x^3 + xyz + \alpha(y) + \beta(z)$, $j_3(\alpha, \beta) = 0 \mapsto \mathbf{55}$.
55. $f = x^3 + xyz + \alpha(y) + \beta(z)$, $j_3(\alpha + \beta) = 0 \Rightarrow f \in R_{p,q} = T_{3,p,q}$ $(q \geqslant p > 3)$.
56. $j_3 f = xyz \Rightarrow f \sim xyz + \alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z)$, $j_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \mapsto \mathbf{57}$.
57. $f = xyz + \alpha(x) + \beta(y) + \gamma(z)$, $j_3(\alpha + \beta + \gamma) = 0 \Rightarrow f \in T_{p,q,r}$ $(r \geqslant q \geqslant p > 3)$.

Серия ***Q***. В теоремах **58—65**

$$\varphi = x^3 + yz^2, \quad j^*_\lambda = j_{yz^2, x^3, \lambda} \quad (\lambda \text{ — моном}).$$

58. $j_3 f = \varphi \Rightarrow f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y)$, $j_3(\alpha + x\beta) = 0 \mapsto \mathbf{59_1}$.

В теоремах **59—62** число $k \geqslant 1$.

59_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y)$, $j^*_{y^{3k}} f = \varphi \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{3k+1}} f &\approx \varphi + y^{3k+1} && \Mapsto \mathbf{60_k}.\\ j^*_{xy^{2k+1}} f &\approx \varphi + xy^{2k+1} && \Mapsto \mathbf{61_k};\\ j^*_{y^{3k+2}} f &\approx \varphi + y^{3k+2} && \Mapsto \mathbf{62_k};\\ j^*_{y^{3k+2}} f &\approx \varphi && \Mapsto \mathbf{62_k}. \end{aligned}$$

60_k. $j^*_{y^{3k+1}} f = \varphi + y^{3k+1} \Rightarrow f \in Q_{6k+4}$.

61_k. $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi + xy^{2k+1} \Rightarrow f \in Q_{6k+5}$.

62_k. $j^*_{y^{3k+2}} f = \varphi + xy^{3k+2} \Rightarrow f \in Q_{6k+6}$.

В теоремах **63—65** число $k > 1$.

63_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y)$, $j^*_{y^{3k-1}} f = \varphi \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{3k}} f &\approx \varphi + ax^2y^k + xy^{2k},\ a^2 \neq 4 && \Mapsto \mathbf{64_k};\\ &\approx \varphi + x^2y^k && \Mapsto \mathbf{65_k};\\ &= \varphi && \Mapsto \mathbf{59_k}. \end{aligned}$$

64_k. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + ax^2y^k + xy^{2k}$, $a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in Q_{k,0}$.

65_k. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + x^2y^k \Rightarrow f \in Q_{k,i}$ $(i > 0)$.

Серия ***S***. В теоремах **66—81**

$$\varphi = x^2z + yz^2, \quad j^*_\lambda = j_{x^2z, yz^2, \lambda} \quad (\lambda \text{ — моном}).$$

66. $j_3 f = \varphi \Rightarrow f \sim \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y)$, $j_3(\alpha + x\beta + z\gamma) = 0 \Mapsto \mathbf{67_1}$.

В теоремах **67—76** число $k \geqslant 1$.

67_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y)$, $j^*_{y^{4k-1}} f = \varphi \Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{4k}} f &\approx \varphi + y^{4k} && \Mapsto \mathbf{68_k};\\ j^*_{xy^{3k}} f &\approx \varphi + xy^{3k} && \Mapsto \mathbf{69_k};\\ j^*_{xy^{3k}} f &= \varphi && \Mapsto \mathbf{70_k}. \end{aligned}$$

68_k. $j^*_{y^{4k}} f = \varphi + y^{4k} \Rightarrow f \in S_{12k-1}$.

69_k. $j^*_{xy^{3k}} f = \varphi + xy^{3k} \Rightarrow f \in S_{12k}$.

70_k. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y)$, $j^*_{xy^{3k}} f = \varphi \Rightarrow$ одно из четырех:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{4k+1}} f &\approx \varphi + y^{4k+1} + bzy^{2k+1},\ b^2 \neq 4 && \Mapsto \mathbf{71_k};\\ &\approx \varphi + x^2y^{2k} && \Mapsto \mathbf{72_k};\\ &\approx \varphi + zy^{2k+1} && \Mapsto \mathbf{73_k};\\ &= \varphi && \Mapsto \mathbf{74_k}. \end{aligned}$$

71_k. $j^*_{y^{4k+1}} f = \varphi + y^{4k+1} + bzy^{2k+1}$, $b^2 \neq 4 \Mapsto f \in S_{k,0}$.

72_k. $j^*_{y^{4k+1}} f = \varphi + x^2y^{2k} \Mapsto f \in S_{k,i}$ $(i > 0)$.

73_k. $j^*_{y^{4k+1}} f = \varphi + zy^{2k+1} \Mapsto f \in S^\sharp_{k,i}$ $(i > 0)$.

74_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)$, $j^*_{y^{4k+1}}f=\varphi\Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j^*_{xy^{3k+1}}f&=\varphi+xy^{3k+1} &&\Mapsto \mathbf{75_k};\\ j^*_{y^{4k+2}}f&=\varphi+y^{4k+2} &&\Mapsto \mathbf{76_k};\\ j^*_{y^{4k+2}}f&=\varphi &&\Mapsto \mathbf{77_{k+1}}.\end{aligned}$$

75_k. $j^*_{xy^{3k+1}}f=\varphi+xy^{3k+1}\Rightarrow f\in S_{12k+4}$.

76_k. $j^*_{y^{4k+2}}f=\varphi+y^{4k+2}\Rightarrow f\in S_{12k+5}$.

В теоремах **77—81** число $k>1$.

77_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)$, $j^*_{y^{4k-2}}f=\varphi\Rightarrow$ одно из пяти:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{4k-1}}f&\approx\varphi+ax^2y^{2k-1}+bxy^kz+xy^{3k-1},\ \Delta\neq0 &&\Mapsto \mathbf{78_k};\\ &\approx\varphi+xy^kz+ax^3y^{k-1},\ a^2=a &&\Mapsto \mathbf{79_k};\\ &\approx\varphi+x^3y^{k-1} &&\Mapsto \mathbf{80_k};\\ &\approx\varphi+xy^kz &&\Mapsto \mathbf{81_k};\\ &=\varphi &&\Mapsto \mathbf{67_k}.\end{aligned}$$

78_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+ax^2y^{2k-1}+bxy^kz+xy^{3k-1}$, $\Delta\neq0\Rightarrow f\in S^*_{k,0}$;
$\mu(f)=12k-4$, $m(f)\geqslant 3k-2$, $c(S^*_{k,0})=9k-3$.

79_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+xy^kz+ax^3y^{k-1}$, $a^2=a\Rightarrow f\in \boldsymbol{SP_k}$;
$\mu(f)\geqslant 12k-3$, $m(f)\geqslant 3k-2$, $c(\boldsymbol{SP_k})=9k-2$.

80_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+x^3y^{k-1}\Rightarrow f\in \boldsymbol{SQ_k}$;
$\mu(f)\geqslant 12k-2$, $m(f)\geqslant 3k-2$, $c(\boldsymbol{SQ_k})=9k-1$.

81_k. $j^*_{y^{4k-1}}f=\varphi+xy^kz\Rightarrow f\in \boldsymbol{SR_k}$;
$\mu(f)\geqslant 12k-2$, $m(f)\geqslant 3k-2$, $c(\boldsymbol{SR_k})=9k-1$.

Серия $\boldsymbol{U}$. В теоремах **82—89**

$$\varphi=x^3+xz^2,\quad j^*_\lambda=j_{x^3,z^3,\lambda}\quad(\lambda\text{ — моном}).$$

82. $j_3f=\varphi\Rightarrow f\sim\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)+x^2\delta(y)$,

$$j_3(\alpha+x\beta+z\gamma+x^2\delta)=0\Mapsto \mathbf{83_1}.$$

В теоремах **83—89** число $k\geqslant 1$.

83_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)+x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k}}f=\varphi\Rightarrow$ одно из двух:

$$\begin{aligned} j^*_{y^{3k+1}}f&\approx\varphi+y^{3k+1} &&\Mapsto \mathbf{84_k};\\ &=\varphi &&\Mapsto \mathbf{85_k}.\end{aligned}$$

84_k. $j^*_{y^{3k+1}}f=\varphi+y^{3k+1}\Rightarrow f\in U_{12k}$.

85_k. $f=\varphi+\alpha(y)+x\beta(y)+z\gamma(y)+x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k+1}}f=\varphi\Rightarrow$ одно из трех:

$$\begin{aligned} j^*_{xy^{2k+1}}f&\approx\varphi+xy^{2k+1}+czy^{2k+1},\ c(c^2+1)\neq0 &&\Mapsto \mathbf{86_k};\\ &\approx\varphi+xy^{2k+1} &&\Mapsto \mathbf{87_k};\\ &=\varphi &&\Mapsto \mathbf{88_k}.\end{aligned}$$

86_k. $j^*_{xy^{2k+1}}f=\varphi+xy^{2k+1}+czy^{2k+1}$, $c(c^2+1)\neq0\Rightarrow f\in U_{k,0}$.

87$_k$. $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi + xy^{2k+1} \Rightarrow f \in U_{k,p}$ $(p > 0)$.

88$_k$. $f = \varphi + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{xy^{2k+1}} f = \varphi \Rightarrow$ одно из двух:

$$j^*_{y^{3k+2}} f \approx \varphi + y^{3k+2} \mapsto \mathbf{89_k};$$
$$= \varphi \mapsto \mathbf{90_{k+1}}.$$

89$_k$. $j^*_{y^{3k+2}} f = \varphi + y^{3k+2} \Rightarrow f \in U_{12k+4}$.

В теоремах **90**—**96** число $k \geqslant 2$,

$$\varphi = x^2z + xz^2, \quad j^*_\lambda = j_{x^3,z^3,\lambda} \quad (\lambda \text{ — моном}).$$

90$_k$. $f = x^3 + xz^2 + \alpha(y) + x\beta(y) + z\gamma(y) + x^2\delta(y)$, $j^*_{y^{3k-1}} f = x^3 + xz^2 \Rightarrow$ одно из семи:

$$j^*_{y^{3k}} f \approx \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2 + cxy^{2k}, \ \Delta \neq 0 \mapsto \mathbf{91_k};$$
$$\approx \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2, \ 4a \neq b^2, \ a(a+1-b) \neq 0 \mapsto \mathbf{92_k};$$
$$\approx x^3 + ax^2z + xz^2 + y^kz^2, \ a^2 \neq 4 \mapsto \mathbf{93_k};$$
$$\approx \varphi + x^2y^k + axy^kz, \ a^2 \neq a \mapsto \mathbf{94_k};$$
$$\approx \varphi + x^2y^k \mapsto \mathbf{95_k};$$
$$\approx \varphi + xy^kz \mapsto \mathbf{96_k};$$
$$= \varphi \mapsto \mathbf{83_k}.$$

91$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2 + cxy^{2k}$, $\Delta \neq 0 \Rightarrow f \in U^*_{k,0}$;
$\mu(f) = 12k - 4$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(U^*_{k,0}) = 8k - 2$.

92$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + ax^2y^k + bxy^kz + y^kz^2$, $4a \neq b^2$, $a(a+1-b) \neq 0 \Rightarrow f \in \boldsymbol{UP_k}$;
$\mu(f) \geqslant 12k - 3$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(\boldsymbol{UP_k}) = 8k - 1$.

93$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = x^3 + ax^2z + xz^2 + y^kz^2$, $a^2 \neq 4 \Rightarrow f \in \boldsymbol{UQ_k}$;
$\mu(f) \geqslant 12k - 2$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(\boldsymbol{UQ_k}) = 8k$.

94$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + x^2y^k + axy^kz$, $a^2 \neq a \Rightarrow f \in \boldsymbol{UR_k}$;
$\mu(f) \geqslant 12k - 2$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(\boldsymbol{UR_k}) = 8k$.

95$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + x^2y^k \Rightarrow f \in \boldsymbol{US_k}$;
$\mu(f) = 12k - 1$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(\boldsymbol{US_k}) = 8k + 1$.

96$_k$. $j^*_{y^{3k}} f = \varphi + xy^kz \Rightarrow f \in \boldsymbol{UT_k}$;
$\mu(f) \geqslant 12k - 1$, $m(f) \geqslant 4k - 3$, $c(\boldsymbol{UT_k}) = 8k + 1$.

Класс $\boldsymbol{V}$.

97. $j_3 f(x, y, z) = x^2y \Rightarrow f \approx x^2y + \alpha(y, z) + x\beta(z)$, $j_3(\alpha) = j_3(x\beta) = 0 \mapsto \mathbf{98}$.

В теоремах **98** и **102** φ — один из 10 многочленов:

$$z^4 + z^3y, \ \ z^3y + z^2y^2, \ \ z^2y^2 + zy^3, \ \ z^4 + z^2y^2, \ \ z^4, \ \ z^3y, \ \ z^2y^2, \ \ zy^3, \ \ y^4, \ \ 0.$$

98. $f = x^2y + \alpha(y, z) + x\beta(z)$, $j_3 f = x^2y \Rightarrow$ одно из четырех:

$$j_{x^2y,y^4,z^4} f \approx x^2y + z^4 + az^3y^2 + bz^2y^2 + zy^3, \ \Delta \neq 0, \ ab \neq 9 \mapsto \mathbf{99};$$
$$\approx x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2, \ b^2 \neq 4 \mapsto \mathbf{100};$$
$$\approx x^2y + z^3y + az^2y^2 + y^4, \ 4a^3 + 27 \neq 0 \mapsto \mathbf{101};$$
$$\approx x^2y + \varphi \mapsto \mathbf{102}.$$

99. $j_{x^2y,y^4,z^4}f = x^2y + z^4 + az^3y + bz^2y^2 + zy^3$, $\Delta \neq 0 \Rightarrow f \in V_{1,0}$.
100. $j_{x^2y,y^4,z^4}f = x^2y + z^4 + bz^3y + z^2y^2$, $b^2 \neq 4 \Rightarrow f \in V_{1,p}$, $p > 0$.
101. $j_{x^2y,y^4,z^4}f = x^2y + z^3y + az^2y^2 + y^4$, $4a^3 + 27 \neq 0 \Rightarrow f \in V^{\sharp}_{1,p}$, $p > 0$.
102. $j_{x^2y,y^4,z^4}f = x^2y + \varphi \Rightarrow \mu(f) \geqslant 17$, $m(f) \geqslant 3$, $c(f) \geqslant 13$.
103. $j_3f(x, y, z) = x^3 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 18$, $m(f) \geqslant 4$, $c(f) \geqslant 13$.
104. $j_3f(x, y, z) = 0 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 27$, $m(f) \geqslant 10$, $c(f) \geqslant 16$.
105. $\operatorname{corank} f > 3 \Rightarrow \mu(f) > 16$, $m(f) \geqslant 5$, $c(f) \geqslant 10$.

16.3. Доказательства. Теоремы **1**, **17** и **25** очевидны. Теоремы **6**, **18**, **26**, **33**, **59**, **67**, **74**, **83**, **88** доказываются методом поворачивания линейки Ньютона (ср. п. 11.2; более подробные доказательства имеются в [16]). Теоремы **3**, **10**, **13**, **22**, **29**, **36**, **47**, **50**, **52**, **54**, **56**, **58**, **63**, **66**, **70**, **77**, **82**, **85**, **90**, **97**, **98** устанавливают нормальные формы квазиоднородных особенностей; техника корней для нахождения этих форм описана в § 13 (более подробные доказательства имеются в [16]).

Метод § 13 сводит доказательства этих теорем к следующим геометрическим классификационным задачам:

№ теоремы	Серия	Геометрическая задача
3	***D***	Линейная классификация 3-форм в $\mathbb{C}^2$
10, 22	***J***, ***Z***	Аффинная классификация троек точек в $\mathbb{C}^1$
13	***X***	Линейная классификация 4-форм в $\mathbb{C}^2$
29	***W***	Линейная классификация пар точек в $\mathbb{C}^1$
36	***X***	Аффинная классификация четверок точек в $\mathbb{C}^1$
47	***N***	Линейная классификация 5-форм в $\mathbb{C}^2$
50	***P***	Линейная классификация 3-форм в $\mathbb{C}^3$
63	***Q***	Аффинная классификация кубических кривых с конечной точкой возврата в $\mathbb{C}^2$
70	***S***	Аффинная классификация распавшихся кубических кривых, имеющих не менее двух конечных двойных точек в $\mathbb{C}^2$
77	***S****	Аффинная классификация кубических кривых в $\mathbb{C}^2$, имеющих бесконечность простой касательной
85	***U***	Аффинная классификация центрально-симметричных кубических кривых в $\mathbb{C}^2$ с ровно тремя точками на бесконечности
90	***U****	Аффинная классификация кубических кривых с ровно тремя точками на бесконечности в $\mathbb{C}^2$
98	***V***	Аффинная классификация многочленов степени $\leqslant 4$ от одной переменной в $\mathbb{C}^1$

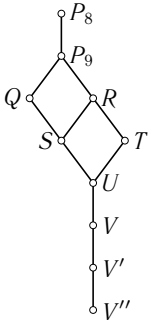
Теорема **50** описывает изображенную на рис. 54 стратификацию 10-мерного пространства кубических форм по особенностям (ср. [190]).

Теоремы **2**, **4**, **5**, **7**, **8**, **9**, **11**, **14**, **19**, **20**, **21**, **23**, **27**, **28**, **30**, **34**, **35**, **37**, **48**, **51**, **60**, **61**, **62**, **64**, **68**, **69**, **71**, **75**, **76**, **78**, **84**, **86**, **89**, **91**, **99** — это следствия

теоремы о нормальной форме полуквазиоднородных особенностей (п. 12.6). Подробные доказательства см. в [16].

Теоремы **12_2**, **15**, **16**, **53**, **55**, **57** доказываются методом кроссвордов (§ 12), подробности см. в [16]. Теоремы **49**, **102—105** также доказываются методами § 12.

Доказательства теорем **12_k** ($k > 2$), **24**, **31**, **32**, **38—46**, **65**, **72**, **73**, **79**, **80**, **81**, **87**, **92—96**, **100**, **101** основаны на спектральной последовательности (см. § 14; подробные вычисления — в [17]).



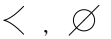
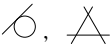
Обозначение	Коразмерность	Кривая
P_8	0	
P_9	1	
Q, R	2	
S, T	3	
U	4	
V	5	
V'	7	
V''	10	

Рис. 54

Доказательство теоремы о классификации простых особенностей.

1°. *Всякая особенность либо принадлежит списку простых особенностей п.* 15.1.0° (с. 203), *либо примыкает к одному из классов* P_8, X_9, J_{10} (эти три класса мы будем называть *огораживающими классами для простых особенностей*).

Доказательство вытекает из теорем **1—5**, **6_1—11_1**, **13**, **14**, **50**, **51**.

При этом теоремы **10_1**, **13** и **50** используются не целиком: нужен лишь первый случай в каждой из них.

2°. *Модальности особенностей каждого из трех огораживающих классов не меньше* 1.

Это вытекает из того, что их внутренняя модальность равна единице. Геометрический смысл этого предложения таков: кубическая кривая в $\mathbb{C}P^2$, четверка прямых, проходящих через нуль в $\mathbb{C}^2$, и три касающихся в точке параболы в $\mathbb{C}^2$ имеют модули (при действиях проективной группы, линейной группы и группы 2-струй диффеоморфизмов соответственно). Например, модуль четверки прямых — это двойное отношение.

3°. *Особенности списка не примыкают к огораживающим.* Класс P_8 имеет коранг 3, класс X_9 эквивалентен функции двух переменных с нулевой 3-струей. Функции двух переменных в списке имеют коранг не более чем 2 и ненулевую 3-струю, поэтому примыкания к P_8 и к X_9 исключены. Примыкания к J_{10} исключаются доказательством теоремы $\mathbf{6_1}$.

Из 1°, 2°, 3° следует, что все особенности списка и только они просты.

Доказательство теоремы о классификации унимодальных особенностей.

1°. *Всякая не простая особенность либо принадлежит списку унимодальных особенностей п.* 15.1.1° (с. 203), *либо примыкает к одному из следующих девяти классов особенностей*: $J_{3,0}$, $W_{1,0}$, $Z_{1,0}$, $\boldsymbol{N}$, $Q_{2,0}$, $S_{1,0}$, $U_{1,0}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{O}$ (эти девять классов мы будем называть *огораживающими классами для унимодальных особенностей*).

Доказательство вытекает из теорем **1—5**, $\mathbf{6_{1,2}}$—$\mathbf{9_{1,2}}$, $\mathbf{10_2}$, $\mathbf{11_2}$, **13—17**, $\mathbf{18_1}$—$\mathbf{21_1}$, $\mathbf{22_2}$, $\mathbf{23_2}$, **25**, $\mathbf{26_1}$—$\mathbf{30_1}$, $\mathbf{36_1}$, $\mathbf{37_1}$, **47**, **48**, **50—58**, $\mathbf{59_1}$—$\mathbf{62_1}$, $\mathbf{63_2}$, $\mathbf{64_2}$, **66**, $\mathbf{67_1}$—$\mathbf{71_1}$, **82**, $\mathbf{83_1}$—$\mathbf{86_1}$, **97**, **98**, **105**. Теоремы **10**, **22**, **29**, **36**, **47**, **63**, **79**, **85**, **98** используются не целиком (нужен лишь первый случай в каждой из них).

2°. *Модальность каждой особенности списка не меньше* 1, *а модальность каждой особенности любого из девяти огораживающих классов больше* 1.

Первое вытекает из того, что все особенности списка примыкают к P_8, X_9 или J_{10}, а второе — из того, что внутренние модальности огораживающих особенностей больше 1.

3°. *Особенности списка не примыкают к огораживающим.*

Квадратичные формы особенностей всех огораживающих классов имеют не менее двух положительных квадратов (см. [10]). Положительный индекс инерции квадратичной формы особенности полунепрерывен (см., например, [203]). Положительный индекс инерции квадратичных форм особенностей $T_{p,q,r}$ меньше двух (см. [91]). Следовательно, примыкание особенностей $T_{p,q,r}$ (как параболических, так и гиперболических) к огораживающим особенностям невозможно. Итак, все особенности $T_{p,q,r}$ унимодальны.

Огораживающие особенности коранга 2 имеют $\mu \geqslant 15$, а для всех исключительных особенностей $\mu \leqslant 14$. Следовательно, примыкание исключительных особенностей к огораживающим коранга 2 невозможно.

К огораживающим особенностям, коранг которых больше двух, могли бы примыкать из исключительных особенностей лишь особенности коранга 3. Но огораживающие особенности, коранг которых больше двух, имеют кратность $\mu \geqslant 14$, а исключительные — $\mu \leqslant 12$. Поэтому такие примыкания также невозможны.

Из 1°, 2°, 3° следует, что все особенности списка и только они унимодальны.

Доказательство теоремы о классификации бимодальных особенностей.

1°. *Всякая не простая и не унимодальная особенность либо принадлежит списку бимодальных особенностей п.* 15.1.2° (с. 203), *либо примыкает к одному из девяти классов*: $J_{4,0}$, $X_{2,0}$, $Z_{2,0}$, $\boldsymbol{N}$, $Q_{3,0}$, $S^*_{2,0}$, $U^*_{2,0}$, $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{O}$ (эти девять классов мы будем называть *огораживающими классами для бимодальных особенностей*).

Доказательство получается добавлением к теоремам, указанным в п. 1° предыдущего доказательства, теорем $\mathbf{6}_3$—$\mathbf{11}_3$, $\mathbf{12}_2$, $\mathbf{18}_2$—$\mathbf{21}_2$, $\mathbf{22}_3$, $\mathbf{23}_3$, $\mathbf{24}_2$, $\mathbf{31}_1$—$\mathbf{35}_1$, $\mathbf{36}_2$, $\mathbf{37}_2$, $\mathbf{59}_2$—$\mathbf{62}_2$, $\mathbf{63}_3$, $\mathbf{64}_3$, $\mathbf{65}_2$, $\mathbf{72}_1$—$\mathbf{76}_1$, $\mathbf{77}_2$, $\mathbf{78}_2$, $\mathbf{87}_1$, $\mathbf{89}_1$, $\mathbf{90}_2$, $\mathbf{91}_2$, **99**. При этом теоремы $\mathbf{10}_3$, $\mathbf{22}_3$, $\mathbf{36}_2$, $\mathbf{63}_3$, $\mathbf{77}_2$, $\mathbf{90}_2$ используются не целиком (нужен лишь первый случай в каждой из них).

2°. *Модальность каждой особенности списка не менее* 2, *а модальность каждой особенности любого из девяти огораживающих классов больше* 2.

Первое вытекает из того, что все особенности списка примыкают к особенностям девяти классов квазиоднородных особенностей, огораживающих унимодальные особенности, а для особенностей этих классов внутренняя модальность не меньше 2.

Второе вытекает из того, что внутренняя модальность квазиоднородных особенностей, огораживающих бимодальные, больше 2.

3°. *Особенности списка не примыкают к огораживающим.*

Квадратичные формы всех особенностей из списка имеют ровно два положительных квадрата в нормальной форме и невырождены (см. [10], [89]—[91]). Квадратичные формы огораживающих особенностей, исключая $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{O}$, имеют два положительных и два нулевых квадрата. Квадратичная форма продеформированной особенности изоморфна сужению формы исходной особенности на подпространство. Это исключает все примыкания особенностей списка к огораживающим, отличным от $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{O}$.

Примыкания к $\boldsymbol{O}$ исключены полунепрерывностью коранга, примыкания к $\boldsymbol{V}$ исключены стратификацией кубических форм (теорема **50**). Примыкания имеющих коранг 2 ростков списка к $\boldsymbol{N}$ исключены полунепрерывностью порядка функции в нуле.

4°. *Примыкания особенностей коранга* 3 *из списка к* $\boldsymbol{N}$ *невозможны.* Более того, *функции трех переменных с приведенной* 3*-струей не могут примыкать к классу* $\boldsymbol{N}$.

Действительно, пусть $f = f_3 + f_4 + \ldots$ — разложение в ряд Тейлора с приведенной (т. е. не содержащей кратных множителей) кубической формой f_3. Пусть $\varphi = \varphi_2 + \varphi_3 + \ldots$ — малая добавка. Если $f + \varphi$ класса $\boldsymbol{N}$,

то существует такая функция u с некритической точкой в нуле, что $f + \varphi = u^2 \bmod \mathfrak{m}^5$. Пусть $u = u_1 + u_2 + u_3 \bmod \mathfrak{m}^4$ — первые члены разложения Тейлора для u. Тогда

$$\varphi_2 = u_1^2, \quad f_3 + \varphi_3 = 2u_1u_2, \quad f_4 + \varphi_4 = 2u_1u_3 + u_2^2.$$

Эта система уравнений относительно u должна быть разрешимой при некоторых сколь угодно малых φ, причем $u_1 \neq 0$. Следовательно, f_3 распадается в произведение линейного и квадратичного множителей, $f_3 = F_1F_2$, таких, что нули функции u_1 близки к нулям функции F_1, а нули функции u_2 — к нулям функции F_2: $u_1 = \varepsilon(F_1 + \alpha_1)$, $u_2 = (F_2 + \beta_2)/2\varepsilon$, где число ε, линейная форма α_1 и квадратичная форма β_2 малы. Теперь из последнего уравнения заключаем, что существуют сколь угодно малые ε, φ_4, α_1 и β_2, такие, что $4\varepsilon^2(f_4 + \varphi_4) - (F_2 + \beta_2)^2$ делится на $F_1 + \alpha_1$. Стало быть, F_2^2 делится на F_1, вопреки приведенности f_3.

Таким образом, особенности классов $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$ (в частности, все особенности коранга 3 в списке) не примыкают к $\boldsymbol{N}$.

Этим закончено доказательство утверждения 3°. Из 1°, 2° и 3° следует, что все особенности списка и только они бимодальны.

§ 17. Вещественные, симметричные и краевые особенности

Здесь обсуждаются три обобщения теории критических точек функций и приводятся таблицы простейших вырождений для вещественного случая, для симметричного случая и для случая функций на многообразии с краем.

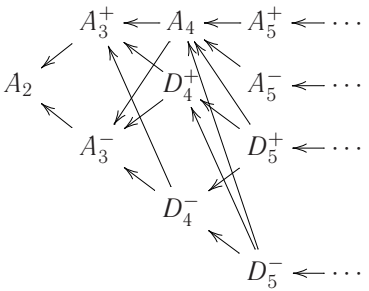
17.1. Вещественные функции. Мы будем рассматривать гладкие вещественные функции с критическими точками 0 и критическими значениями 0. Ростки двух таких вещественных функций в 0 называются *стабильно эквивалентными*, если они становятся эквивалентными (превращаются друг в друга R-эквивалентностью, т. е. заменой независимых переменных) после прямого сложения с невырожденными квадратичными формами. Например, ростки функций $f(x, y) = x^3 - y^2$, $g(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2$ стабильно эквивалентны. Ниже приведена классификация простых и унимодальных вещественных ростков с точностью до стабильной эквивалентности.

Простые ростки:

$A_k^{\pm}, k \geqslant 1$	$D_k^{\pm}, k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
$\pm x^{k+1}$	$x^2y \pm y^{k-1}$	$x^3 \pm y^4$	$x^3 + xy^3$	$x^3 + y^5$

Замечание. Отметим, что $A_{2k}^{+} \sim A_{2k}^{-}$, $A_1^{+} \sim A_1^{-}$; в остальном указанные ростки не эквивалентны. Начало иерархии вырожденных особен-

ностей вещественных функций следующее:



(классы, обозначенные ..., образуют множество коразмерности 5 в пространстве функций с критической точкой 0 и критическим значением 0).

Унимодальные ростки (по В. В. Муравлеву и В. М. Закалюкину):

Обозначения	Нормальная форма	Ограничения
Параболические:		
$P_8 = T_{3,3,3}$	$x^3 + ax^2z \pm xz^2 + y^2z$	$a^2 \neq 4$, если $+$
$X_9 = T_{2,4,4}$	$\pm x^4 + ax^2y^2 \pm y^4$	$a^2 \neq 4$, если $++$ или $--$
$J_{10} = T_{2,3,6}$	$x^3 + ax^2y^2 \pm xy^4$	$a^2 \neq 4$, если $+$
Гиперболические коранга 2:		
$J_{10+k} = T_{2,3,6+k}$	$x^3 \pm x^2y^2 + ay^{6+k}$	$a^2 \neq 0, k > 0$
$X_{9+k} = T_{2,4,4+k}$	$\pm x^4 \pm x^2y^2 + ay^{4+k}$	$a \neq 0, k > 0$
$Y_{r,s} = T_{2,r,s}$	$\pm x^2y^2 \pm x^r + ay^s$	$a \neq 0, r, s > 4$
$\tilde{Y}_r = \tilde{T}_{2,r,r}$	$\pm(x^2 + y^2)^2 + ax^r$	$a \neq 0, r > 4$
Гиперболические коранга 3:		
$P_{8+k} = T_{3,3,3+k}$	$x^3 \pm x^2z + y^2z + az^{k+3}$	$a \neq 0, k > 0$
$R_{l,m} = T_{3,l,m}$	$x(x^2 + yz) \pm y^l \pm az^m$	$a \neq 0, m \geqslant l > 4$
$\tilde{R}_m = \tilde{T}_{3,m,m}$	$x(\pm x^2 + y^2 + z^2) + ay^m$	$a \neq 0, m > 4$
$T_{p,q,r}$	$axyz \pm x^p \pm y^q \pm z^r$	$a \neq 0, p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$
$\tilde{T}_{p,m} = \tilde{T}_{p,m,m}$	$x(y^2 + z^2) \pm x^p + ay^m$	$a \neq 0, p^{-1} + 2m^{-1} < 1$

Исключительные:

E_{12}	$x^3 + y^7 \pm z^2 + axy^5$	W_{13}	$\pm x^4 + xy^4 \pm z^2 + ay^6$
E_{13}	$x^3 + xy^5 \pm z^2 + ay^8$	Q_{10}	$x^3 + y^2z \pm z^4 + axz^3$
E_{14}	$x^3 \pm y^8 \pm z^2 + axy^6$	Q_{11}	$x^3 + y^2z \pm xz^3 + az^5$
Z_{11}	$x^3y + y^5 \pm z^2 + axy^4$	Q_{12}	$x^3 + y^2z \pm z^5 + az^4x$
Z_{12}	$x^3y + xy^4 \pm z^2 + ax^2y^3$	S_{11}	$z(x^2 + yz) \pm y^4 + ay^3z$
Z_{13}	$x^3y \pm y^6 \pm z^2 + axy^5$	S_{12}	$z(x^2 + yz) + xy^3 + ay^5$
W_{12}	$\pm x^4 + y^5 \pm z^2 + ax^2y^3$	U_{12}	$x(x^2 \pm y^2) \pm z^4 + axyz^2$

Здесь a — вещественный параметр.

Относительно приведения к этим нормальным формам особенностей общего положения справедливы те же теоремы, что в комплексном случае (с. 154). Доказательства проводятся методами § 11—16.

З а м е ч а н и е. Поскольку комплексные особенности уже расклассифицированы, можно рассмотреть вещественные формы каждой комплексной особенности. Все вещественно-простые особенности являются вещественными формами комплексно-простых, а вещественно-унимодальные — формами комплексно-унимодальных. Однако этот факт a priori не очевиден и получается лишь из сравнения независимо проведенных комплексной и вещественной классификаций.

Дело в том, что неизвестно, сохраняется ли модальность при комплексификации. Э. Б. Винберг указал пример представления вещественной группы Ли, для которого модальность точки при комплексификации растет; таково, например, естественное действие группы кватернионов в $\mathbb{R}^4$ (число модулей до комплексификации равно 0, а после комплексификации положительно).

Модальность критической точки при комплексификации не уменьшается (В. В. Муравлев), но неизвестно, может ли она расти, как в указанном выше примере.

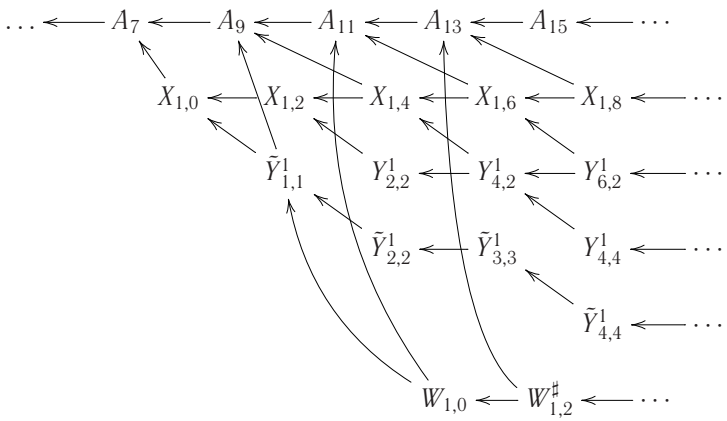
17.2. min-ростки. Здесь приведена составленная В. А. Васильевым ([75]) таблица нормальных форм ростков гладких функций в окрестности точек минимума (с точностью до прибавления константы и положительно определенной квадратичной формы от дополнительных переменных). Приведение к нормальной форме осуществляется гладкой заменой независимых переменных. Число l в таблице указывает, начиная с какого числа параметров семейства точки минимума рассматриваемого типа становятся неустранимыми малым шевелением семейства. В общих семействах функций с $l < 16$ параметрами точки минимума, не эквивалентные перечисленным в таблице, не встречаются *).

Обозначения	Нормальная форма	Ограничения	l
A_{2k-1}	x^{2k}	$k \geqslant 1$	$2k-2$
$X_{1,0} = T_{2,4,4}$	$x^4 + ax^2y^2 + y^4$	$a > -2, a \neq 2$	7
$X_{1,2r} = T_{2,4,4+2r}$	$x^4 + x^2y^2 + ay^{4+2r}$	$a > 0, r \geqslant 1$	$7+2r$
$Y^1_{2r,2q} = T_{2,4+2r,4+2q}$	$x^{4+2r} + ax^2y^2 + y^{4+2q}$	$a > 0, r, q \geqslant 1$	$7+2r+2q$
$\tilde{Y}^1_{r,r} = \tilde{T}_{2,4+r,4+r}$	$(x^2+y^2)^2 + ay^{4+r}$	$a \neq 0, r \geqslant 1$	$7+2r$
$W_{1,0}$	$x^4 + (a+by)x^2y^3 + y^6$	$a^2 < 4$	12
$W^\sharp_{1,2q}$	$(x^2+y^3)^2 + (a+by)x^2y^{3+q}$	$a(-1)^q < 0, q \geqslant 1$	$12+2q$

Здесь a и b — вещественные параметры.

*) В [75] приведены нормальные формы и для некоторых других серий, включая все особенности с $l = 16$.

Важнейшие примыкания:



З а м е ч а н и е. Кратность μ точки минимума всегда нечетна. Диаграмма Ньютона функции в конечнократной точке минимума обладает следующими свойствами: 1) все ее вершины имеют только четные координаты, 2) диаграмма пересекает все оси координат.

Назовем *главной частью* аналитической функции сумму тех слагаемых ее ряда Тейлора, показатели которых принадлежат диаграмме Ньютона. Сумму слагаемых ряда f, показатели которых принадлежат данной грани σ диаграммы, обозначим через f^σ.

Главные части функций в точке минимума обладают следующим свойством: для каждой грани σ многочлен f^σ всюду неотрицателен.

Если к тому же многочлены f^σ не обращаются в нуль вне координатных плоскостей, то функция f в окрестности точки минимума удовлетворяет двусторонней оценке

$$cg \leqslant f \leqslant Cg, \qquad (*)$$

где g — сумма одночленов, показателями которых являются вершины диаграммы Ньютона, с коэффициентами, равными 1. Обратно, из указанной оценки вытекает, что все f^σ положительны вне координатных плоскостей. Оценка $(*)$ выполняется для почти всех функций с фиксированной диаграммой Ньютона, имеющих точку минимума.

Чтобы точнее описать множество главных частей функций, имеющих точку минимума, рассмотрим пространство P многочленов, показатели которых принадлежат данной диаграмме (главными частями могут служить лишь те из этих многочленов, у которых отличны от нуля коэффициенты при одночленах, отвечающих вершинам диаграммы). Пространство многочленов P разбивается некоторой гиперповерхностью (гомеоморфной

гиперплоскости) на две области. Если главная часть функции принадлежит первой области, то функция имеет точку минимума и удовлетворяет оценке (∗). Если главная часть принадлежит второй области, то критическая точка в нуле заведомо не минимум.

Доказательства сформулированных в этом замечании теорем имеются в цитированной выше работе В. А. Васильева. Ср. также [43], [44].

Функции общего положения имеют лишь невырожденные минимумы. Вырождения неустранимы, однако, в семействах функций, зависящих от параметров.

Рассмотрим семейство гладких функций f_λ на замкнутом многообразии, зависящих от k-мерного параметра λ. *Функцией минимума* семейства называется функция $F(\lambda) = \min f_\lambda(x)$.

Функция минимума непрерывна, но, вообще говоря, не всюду дифференцируема (линия горизонта гладкого ландшафта может иметь изломы). Пример функции минимума — расстояние от точки области до ближайшей точки границы (поверхность кучи песка на лопате является графиком функции минимума). Ясно, что эта функция всегда имеет особенности. Знание особенностей функций минимума существенно в задачах вариационного исчисления, оптимального управления, теории игр и т. п.

Развитая выше теория позволяет перечислить особенности функций минимума семейств общего положения, зависящих от $k \leqslant 10$ параметров. Классификация проводится с точностью до R^+-эквивалентности, т. е. с точностью до диффеоморфизмов пространства параметров и прибавления гладкой функции от параметров.

Например, функция минимума однопараметрического семейства общего положения в окрестности каждой особой точки эквивалентна $-|\lambda|$. Для двупараметрических семейств встречаются особенности трех видов, с нормальными формами $-|\lambda_1|$, $-|\lambda_1| - |\lambda_2 + |\lambda_1||$, $\min(x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x)$. Пока размерность пространства параметров меньше 7, список нормальных форм конечен, а начиная с 7 параметров появляются модули.

Согласно Л. Н. Брызгаловой ([43], [44]), число $\nu(k)$ нормальных форм дается таблицей

k	1	2	3	4	5	6	$\geqslant 7$
$\nu(k)$	1	3	5	8	12	17	∞

Л. Н. Брызгалова нашла также все простые и устойчивые ростки функций минимума: с точностью до R^+-эквивалентности они совпадают с особенностями функции минимума семейства многочленов $x^{2r} + \lambda_1 x^{2r-2} + \ldots + \lambda_{2r-2} x$. Все особенности функций минимума семейств общего положения с $k < 7$ параметрами просты и устойчивы.

Во всех изученных до сих пор случаях *функция минимума семейства общего положения локально топологически R-эквивалентна гладкой функции и даже функции Морса*; по В. И. Матову, это остается верным и при большем числе параметров.

17.3. Симметричные особенности. Рассмотрим голоморфную функцию, инвариантную относительно линейного действия компактной группы G в $\mathbb{C}^k$.

1°. Теорема. *Каждая G-инвариантная голоморфная функция, имеющая в нуле невырожденную критическую точку с критическим значением* 0, *приводится к своей квадратичной части G-инвариантной* (*т. е. коммутирующей с действием G*) *заменой независимых переменных, биголоморфной в нуле.*

Аналогичная «эквивариантная лемма Морса» справедлива в вещественно-аналитическом и дифференцируемом случаях.

2°. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$ с координатами $z_0, \ldots, z_n$ плоскость $\mathbb{C}^n = \{z\colon z_0 + \ldots + z_n = 0\}$. Группа $S(n+1)$ перестановок координат переводит эту плоскость в себя. Будем обозначать через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ коэффициенты многочлена $z^{n+1} + \lambda_1 z^{n-1} + \ldots + \lambda_n$ с корнями $z_0, \ldots, z_n$. Это — базис в пространстве симметрических (т. е. $S(n+1)$-инвариантных) функций на плоскости $\mathbb{C}^n$.

Начало иерархии симметрических функций на плоскости $\mathbb{C}^n$ вблизи критической точки 0 выглядит *) следующим образом:

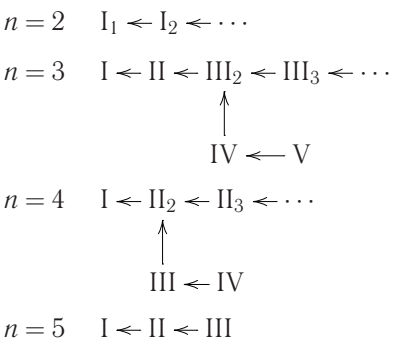
$n+1$	Тип	Нормальная форма	m_f	m_h	codim
2	I_k	$\pm\lambda_1^k$	0	0	$k-1$
3	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
3	II	$\pm\lambda_2$	0	0	1
3	III_k	$\pm\lambda_1^2 + a\lambda_2^k$, $a \neq 0$	1	0	k
3	IV	$\pm\lambda_1\lambda_2 + a\lambda_1^3$	1	0	3
3	V	—	$\geqslant 2$	$\geqslant 2$	4
4	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
4	II_k	$\pm\lambda_2 + a\lambda_1^k$, $a \neq 0$	1	0	$k-1$
4	III	$\pm\lambda_1^2 + a\lambda_3 + b\lambda_1\lambda_3$, $\Delta(a) \neq 0$	2	1	2
4	IV	—	$\geqslant 2$	$\geqslant 2$	3
5	I	$\pm\lambda_1$	0	0	0
5	II	$\pm\lambda_2 + a\lambda_1^2$	1	0	1
5	III	—	$\geqslant 4$	$\geqslant 2$	2

Здесь m_f и m_h — числа модулей для функции и для ее нулевой гиперповерхности уровня (имеется в виду действие группы эквивариантных

*) Согласно [250] и вычислениям В. В. Горюнова.

диффеоморфизмов на пространстве ростков функций с критическим значением 0 в критической точке 0).

Диаграммы примыканий:



3°. Рассмотрим действие группы $S(n)$ перестановок координат в пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n)$.

Группа симметрических (коммутирующих с действием $S(n)$) ростков диффеоморфизмов $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ действует на пространстве ростков симметрических функций в критической точке 0 с критическим значением 0. Росток симметрической функции называется простым, если его k-струя пересекается с конечным (ограниченным при $\to \infty$) числом орбит, т. е. если число модулей функции равно нулю.

Простые симметрические ростки функций в критической точке приводятся (действием группы симметрических диффеоморфизмов) к нормальным формам, которые мы здесь приведем в обозначениях В. И. Гуцу (1976 г.). Пусть $s_p = x_1^p + \ldots + x_n^p$, $S_p = (x_1 - (s_1/n))^p + \ldots + (x_n - (s_1/n))^p$, а при $n = 2$ выполнены равенства $x_1 + x_2 = y$, $x_1 - x_2 = z$. Нормальные формы простых ростков имеют вид

n	Нормальная форма
$\geqslant 1$	$s_1^q + S_2, q \geqslant 2$
2	$y^2 + z^{2q}, q \geqslant 1$
2	$z^2 y + y^p, p \geqslant 3$
2	$z^4 + y^3$
3	$s_1^2 + S_3$

Все таблицы этого пункта основаны на работе [250]. Другие вопросы теории симметричных критических точек обсуждаются в [427], [493], где указана и дальнейшая литература.

17.4. Краевые особенности. Под ростком многообразия с краем мы будем понимать росток пары $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-1})$ (или $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-1})$) в нуле. Мы собираемся классифицировать ростки функций с критическим значением 0 в критической точке 0 на краю многообразия относительно группы диффеоморфизмов, переводящих край в себя.

Т е о р е м а. *Простые критические точки функций на краю многообразия с краем исчерпываются, с точностью до эквивалентности, следующим списком ростков функций $f(x, y)$ в точке $x = y = 0$ края $x = 0$:*

$B_k, k \geqslant 2$	$C_k, k \geqslant 2$	F_4
$\pm x^k \pm y^2$	$xy \pm y^k$	$\pm x^2 + y^3$

Здесь под эквивалентностью функций разного числа переменных понимается стабильная эквивалентность на многообразии с краем (ср. п. 17.1).

З а м е ч а н и я. 1. Множество ростков в не простых критических точках имеет в пространстве функций с критической точкой 0 и критическим значением 0 коразмерность 3; в общих семействах функций, зависящих от $l < 4$ параметров, все критические точки на краю — простые.

2. Коразмерности множеств ростков простых критических точек типов B_k, C_k, F_4 в пространстве ростков с критической точкой 0 и критическим значением 0 равны $k - 2$ (т. е. эти особенности впервые появляются как неустранимые в семействах функций, зависящих от $k - 1$ параметра).

3. Особенности B_2 и C_2 эквивалентны.

4. Эта формулировка не была явно выписана в [250], потому что в 1975 г. еще не была ясна связь краевых особенностей с группами Коксетера. Несколько первых краевых особенностей указано Питтом и Постоном в 1978 г. (см. [428]).

Доказательство приведенной теоремы и подробное обсуждение связи простых краевых особенностей с обозначаемыми теми же буквами группами, порожденными отражениями, простыми алгебрами Ли и диаграммами Дынкина приведено в [22]. В частности, в [22] определена форма пересечений краевой особенности и доказано, что простые особенности совпадают с эллиптическими.

Многие объекты имеют (неформальные) комплексные аналоги: например, комплексным аналогом группы $\mathbb{Z}_2$ является группа $\mathbb{Z}$, комплексным аналогом симметрической группы $S(n)$ — группа кос Артина B_n; комплексный аналог стягиваемых пространств — пространства $K(\pi, 1)$, теории Морса — теория Пикара—Лефшеца. Комплексным аналогом многообразия

с краем $F \geqslant 0$ является многообразие $F = z^2$, т. е. двулистное накрытие исходного комплексного пространства, разветвленное вдоль края.

После перехода к двулистному накрытию функции на многообразии с краем превращаются в функции, симметричные относительно инволюции, меняющей знак одной из координат. Приведенный в п. 17.2 список нормальных форм простых симметричных функций для $n = 2$ получается из списка простых краевых особенностей B_k, C_k, F_4 подстановкой $x = z^2$ (случай $n = 3$ отвечает, таким же образом, простой алгебре Ли G_2). Простые алгебры A_k, D_k и E_6, E_7, E_8 также можно включить в эту схему: им отвечают функции

$A_k, k \geqslant 1$	$D_k, k \geqslant 4$	E_6	E_7	E_8
$\pm y^{k+1} + x$	$y_1^2 y_2 \pm y_2^{k-1} + x$	$y_1^3 \pm y_2^4 + x$	$y_1^3 + y_1 y_2^3 + x$	$y_1^3 + y_2^5 + x$

Точка 0 не критическая для самой функции, но критическая для ее сужения на край, $x = 0$.

Индекс особой точки векторного поля плохо поддается обобщению на случай многообразия с краем, но для дифференциальной 1-формы можно определить индексы краевых особенностей так, что будет иметь место формула Хопфа: эйлерова характеристика компактного многообразия с краем равна сумме индексов всех особенностей 1-формы. Вычисление этих индексов приводит к рассмотрению сигнатур квадратичных форм, естественно определяемых на соответствующих локальных алгебрах. В случае простых особенностей эти сигнатуры равны также сигнатурам форм, определенных при помощи сворачивания инвариантов соответствующих групп, порожденных отражениями. Анализ этого совпадения показывает, что сами формы двойственны. Эта двойственность весьма полезна для угадывания и доказательства различных теорем о нормальных формах. Например, эквивариантной лемме Морса «двойственна» следующая теорема: векторное поле, трансверсальное ласточкиному хвосту, локально выпрямляется диффеоморфизмом, сохраняющим ласточкин хвост. Дальнейшее развитие этой теории приводит, например, к классификации особых проекций общих поверхностей в $\mathbb{R}^3$ (10 вещественных простых нормальных форм *)). Подробности см. в [23], [158]; все простые проектирования гиперповерхностей найдены В. В. Горюновым.

Список простых проектирований гиперповерхностей (не обязательно неособых) на прямую оказался совпадающим со списком простых особенностей функций на многообразии с краем.

*) Поверхности $z = x$, x^2, $x^3 + xy$, $x^3 \pm xy^2$, $x^3 + xy^3$, $x^4 + xy$, $x^4 + x^2y + xy^2$, $x^5 + x^3y \pm xy$; проекция $(x, y, z) \mapsto (y, z)$.

Унимодальные краевые критические точки функций также все раскласс-ифицированы. С точностью до стабильной эквивалентности они исчерпываются следующими списками.

Унимодальные краевые особенности коранга 2 (см. [22]):

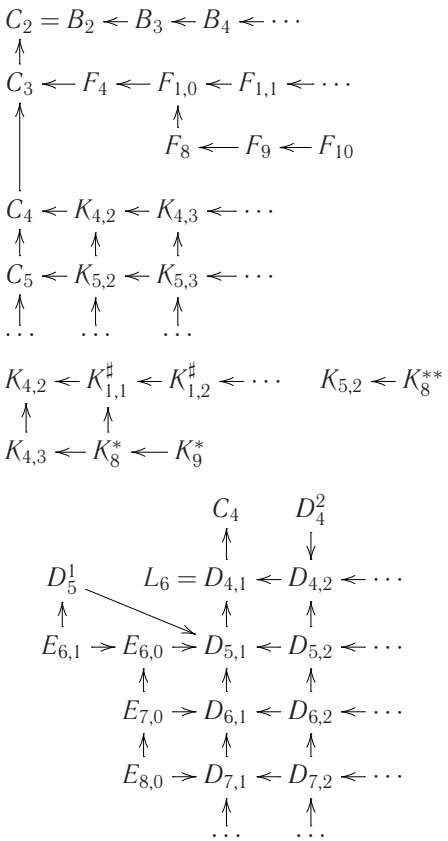
Обозначение	$\mathbb{C}$-нормальная форма	Ограничения	μ
$F_{1,0}$	$x^3+axy^2+y^3$	$4a^3+27\neq 0$	6
$F_{1,p}$	$ax^{p+1}+xy^2+y^3$	$a\neq 0, p\geqslant 1$	$6+p$
F_8	$x^4+y^3+ax^3y$	—	8
F_9	$x^3y+y^3+ax^2y^2$	—	9
F_{10}	$x^5+y^3+ax^4y$	—	10
$K_{4,2}$	$y^4+axy^2+x^2$	$a^2\neq 4$	6
$K_{4,q}$	$y^4+xy^2+ax^q$	$a\neq 0, q>2$	$q+4$
$K_{p,q}$	$y^p+xy^2+ax^q$	$a\neq 0, p>4, q\geqslant 2$	$p+q$
$K^\sharp_{1,2p-3}$	$(x+y^2)^2+ax^py$	$a\neq 0, p>1$	$2p+3$
$K^\sharp_{1,2p-4}$	$(x+y^2)^2+ax^p$	$a\neq 0, p>2$	$2p+2$
K^*_8	$y^4+x^2y+ax^3$	—	8
K^*_9	$y^4+x^3+ax^2y^2$	—	9
K^{**}_9	$y^5+x^2+axy^3$	—	8

Унимодальные краевые особенности коранга 3 (по В. И. Матову):

Обозначение	$\mathbb{R}$-нормальная форма	μ
$L_6=D_{4,1}$	$y_1^2y_2\pm y_2^3+xy_1+axy_2$	6
$D_{k,l}$	$y_1^2y_2\pm y_2^{k-1}+axy_1^l+xy_2$	$k+l+1$
$E_{6,0}$	$y_1^3\pm y_2^4+axy_1+xy_2$	8
$E_{7,0}$	$y_1^3+y_1y_2^3+axy_1+xy_2$	9
$E_{8,0}$	$y_1^3+y_2^5+axy_1+xy_2$	10
D^1_5	$y_1^2y_2\pm y_2^4+xy_1+axy_2^2$	8
$E_{6,1}$	$y_1^3\pm y_2^4+xy_1+axy_2^2$	9
D^2_4	$y_1^2y_2\pm y_2^3+x^2+axy_1^2$	8

В случае L_6 выполнено равенство $a^2\pm 1\neq 0$, а в случае $D_{k,l}$ — неравенства $a\neq 0$, $k\geqslant 4$, $l\geqslant 1$, $k+l>5$.

Важнейшие примыкания:



17.5. Тангенциальные особенности. Бифуркационные диаграммы простых краевых особенностей B_k помогают разобраться в особенностях взаимного расположения поверхности и ее касательных. Мы будем называть такие особенности *тангенциальными*.

Простейшим примером тангенциальной особенности является точка перегиба плоской кривой. Назовем линейный элемент плоскости *особым*, если он при продолжении касается кривой или если он приложен в точке кривой. В окрестности элемента обычной касательной особые элементы образуют в пространстве всех линейных элементов плоскости поверхность, диффеоморфную бифуркационной диаграмме B_2, умноженной на прямую, а в окрестности элемента касательной перегиба — диффеоморфную бифуркационной диаграмме B_3 (см. [22]).

Бифуркационная диаграмма B_k может быть описана как $\{\lambda \in \mathbb{R}^k$: многочлен $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ имеет нулевой или кратный корень$\}$.

Рассмотрим гладкую поверхность в вещественном проективном пространстве. Точки поверхности общего положения следующим образом подразделяются на 7 классов, независимо найденных Е. Е. Ландис и О. А. Платоновой.

Гладкая *кривая параболических точек* делит поверхность на *эллиптическую* и *гиперболическую области*. Точки перегиба асимптотических линий образуют гладкую иммерсированную кривую в неэллиптической области — *линию перегибов*. Кроме описанных двух областей и двух линий на поверхности общего положения встречаются особые точки следующих трех типов: точки простейшего касания линии перегибов с кривой параболических точек, точки простейшего самопересечения линии перегибов и точки простейших вырожденных перегибов (в которых линия перегибов касается асимптотического направления).

Эти 7 классов тангенциальных особенностей проективно инвариантны и устойчивы в том смысле, что при малом шевелении поверхности они не исчезают, а лишь немного деформируются.

Линейный элемент проективного пространства называется *особым* для данной поверхности, если он при продолжении касается поверхности или если он приложен в точке поверхности. Особые элементы ростка поверхности в точке определяются аналогично. Множество особых элементов для данной поверхности является гиперповерхностью в многообразии всех линейных элементов проективного пространства. Рассмотрим росток этой гиперповерхности в каком-либо касательном поверхности линейном элементе.

Т е о р е м а (О. А. Платонова). *Множество особых элементов для ростка поверхности общего положения в любой ее точке локально диффеоморфно произведению бифуркационной диаграммы B_k на евклидово пространство $\mathbb{R}^{5-k}$, где k — кратность пересечения касательного к поверхности элемента с поверхностью* ($k = 2$ *для неасимптотического элемента*, $k = 3$ *для обычного асимптотического*, $k = 4$ *для асимптотических элементов параболической линии и линии перегибов*, *исключая элементы*, *касательные к линии перегибов в точках вырожденного перегиба*, *где* $k = 5$).

Неособый линейный элемент определяет неособый росток проектирования поверхности (пучком прямых из точки приложения элемента). Стратификация многообразия особых элементов с учетом расположения стратов относительно слоев расслоения $PT\mathbb{R}P^3 \to \mathbb{R}P^3$ приводит к классификации ростков проектирований гладких поверхностей общего положения в $\mathbb{R}P^3$ пучками прямых. Классов 14: 10 перечисленных в сноске на с. 234 и $x^3 \pm xy^4$, $x^5 + xy$, $x^4 + x^2y + xy^3$.

Тангенциальные особенности естественно возникают также в задачах дифракции и в вариационной задаче о скорейшем обходе препятствия, где они и встретились О. А. Платоновой.

С другой стороны, Н. Н. Нехорошев в своем исследовании эволюции переменных действия в гамильтоновых системах, близких к интегрируемым, ввел показатели крутизны $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ невозмущенной функции Гамильтона H в области G пространства $\mathbb{R}^n$.

Назовем r-мерную плоскость Λ *допустимой* в точке x из G, если точка x критическая для сужения H на Λ. Обозначим множество всех допустимых в x плоскостей через M_x, и пусть $f_\Lambda = \operatorname{grad}(H/\Lambda)$. Число $\alpha_r \geqslant 1$ называется r-мерным *показателем крутизны* H в G, если оно является точной нижней гранью чисел α, для которых $\exists K > 0\ \exists \delta > 0\colon \forall \xi \in (0, \delta)\ \exists \eta \in (0, \xi]$: $\forall \Lambda \in M_x\ \forall x \in G\ \forall y \in \Lambda$ из равенства $|x - y| = \eta$ вытекает, что $|f_\Lambda(y)| > K\xi^\alpha$.

Е. Е. Ландис обнаружила связь показателей α_r с тангенциальными особенностями поверхностей уровня функции Гамильтона. Из ее результатов следует, что для функций Гамильтона общего положения, зависящих от n переменных, $\alpha_1 \leqslant 2n + 1$; при $n = 3$ также $\alpha_2 \leqslant 2$, причем указанные значения достигаются устойчивым образом. Таким образом, классификация тангенциальных особенностей однопараметрических семейств поверхностей позволяет вычислить все показатели крутизны функций Гамильтона общего положения в каждой точке для систем с двумя и тремя степенями свободы.

Тангенциальные особенности связаны также с особенностями отображения, сопоставляющего касательному линейному элементу поверхности содержащую его проективную прямую.

Рассмотрим пучок геодезических на поверхности в евклидовом трехмерном пространстве. Сопоставим каждой точке поверхности направление геодезической (точку на сфере). На некоторой кривой на поверхности геодезические пучки касаются асимптотических линий. В этих местах построенное отображение на сферу имеет особенности: складку в общей точке и сборки в исключительных.

ГЛАВА III

ОСОБЕННОСТИ КАУСТИК И ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ

Одним из наиболее успешных приложений теории особенностей является приложение к исследованию особенностей и перестроек каустик и волновых фронтов. С математической точки зрения эти задачи связаны с особенностями общего положения отображений весьма специального вида: лагранжевых и лежандровых. В этой главе изложены начала теории лагранжевых и лежандровых особенностей; в § 21 приведена классификация особенностей каустик общего положения в пространстве не более 10 измерений и особенностей волновых фронтов общего положения в пространствах не более 11 измерений.

При движении волнового фронта его особенности скользят вдоль каустики и в отдельные моменты времени испытывают перестройки. Мы приводим в § 22 классификацию перестроек волновых фронтов в однопараметрических семействах общего положения в пространствах не более пяти измерений, а также классификацию перестроек каустик в однопараметрических семействах общего положения в пространствах не более трех измерений.

§ 18. Лагранжевы особенности

Каустику можно видеть на стене, освещенной лучами, отраженными от вогнутой поверхности (например, поверхности чашки). Двигая чашку, можно убедиться, что каустики общего положения имеют лишь стандартные особенности, а все более сложные особенности распадаются на стандартные при малом шевелении. В этом параграфе строится аппарат исследования особенностей каустик — теория лагранжевых особенностей.

18.1. Симплектические многообразия. Каустика — это огибающая семейства лучей. Семейства лучей описываются в геометрической оптике (или в классической механике) при помощи так называемых лагранжевых подмногообразий фазового пространства. В этих терминах каустика — это множество особых значений проектирования лагранжева подмногообразия из фазового пространства на конфигурационное. Мы начнем с напоминания основных определений геометрии фазовых пространств.

Симплектической структурой на многообразии M называется замкнутая невырожденная 2-форма ω.

Пример 1. Линейное пространство $M = \mathbb{R}^{2n}$ с координатами $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ имеет стандартную симплектическую структуру $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$ (замкнутость и невырожденность очевидны).

Пример 2. Пусть V — гладкое n-мерное многообразие (конфигурационное пространство), $\pi\colon T^*V \to V$ — его кокасательное расслоение. $2n$-мерное многообразие $M = T^*V$ называется *фазовым пространством* для конфигурационного пространства V. Фазовое пространство имеет *стандартную симплектическую структуру*, определяемую следующим образом. Пусть $\tau\colon TM \to M$ — касательное расслоение. Определим *стандартную 1-форму* α на T^*M условием $\alpha(\xi) = (\tau\xi)(\pi_*\xi)$. Стандартная симплектическая структура фазового пространства — это 2-форма $\omega = d\alpha$.

Пусть $(q_1, \ldots, q_n)$ — локальные координаты в конфигурационном пространстве и $(p_1, \ldots, p_n)$ — соответствующие координаты в фазовом пространстве. Тогда стандартная 1-форма записывается в виде $\alpha = \sum p_i\, dq_i$ Отсюда следует, что 2-форма $\omega = d\alpha$ замкнута и невырождена (см. пример 1).

Теорема (Дарбу). *Все симплектические структуры на многообразии фиксированной размерности локально эквивалентны* (*диффеоморфны*).

Иными словами, *в окрестности каждой точки всякая симплектическая структура записывается в подходящих координатах в виде* $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$.

Доказательство. Воспользуемся гомотопическим методом. Пусть $\{\omega_t\}$ $(t \in [0, 1])$ — гладко зависящее от t семейство ростков невырожденных 2-форм в окрестности точки нуль, совпадающих в этой точке. Ищем семейство ростков диффеоморфизмов $\{g_t\}$, оставляющих нуль на месте, для которого $g_t^*\omega_t \equiv \omega_0$. Дифференцируя это соотношение по t, получаем гомологическое уравнение в виде

$$L_{v_t}\omega_t = -\gamma_t,$$

где γ_t — известная замкнутая 2-форма (производная ω_t по t), а v_t — искомое векторное поле. Пользуясь тождеством $L = id + di$ (где L — производная Ли, а i — сворачивание: $(i_v\omega)(\xi) = \omega(v, \xi)$), мы можем переписать гомологическое уравнение в виде

$$di_{v_t}\omega_t = -\gamma_t.$$

Выберем теперь 1-форму α_t, равную нулю в точке нуль, так, чтобы выполнялось равенство $d\alpha_t = -\gamma_t$. Уравнение $i_{v_t}\omega_t = \alpha_t$ относительно поля v_t однозначно разрешимо (ввиду невырожденности ω_t). Поле v_t в нуле равно нулю, поэтому определяет искомое семейство ростков диффеоморфизмов $\{g_t\}$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$.

18.2. Гамильтоновы поля. Пусть $H\colon M \to \mathbb{R}$ — функция на симплектическом многообразии (M, ω). Форма ω, будучи невырожденной, определяет изоморфизм между касательным и кокасательным пространствами в каждой точке многообразия: вектору v соответствует 1-форма $i_v\omega$. Дифференциал функции H является 1-формой на многообразии M. Указанный выше изоморфизм сопоставляет функции H векторное поле X_H (так что $dH(\xi) = -\omega(X_H, \xi)$). Это векторное поле называется *гамильтоновым*, а функция H — *гамильтонианом* или *функцией Гамильтона* этого поля.

Система дифференциальных уравнений, заданных гамильтоновым полем, называется *канонической системой уравнений Гамильтона*.

Пример. В стандартном симплектическом пространстве система уравнений Гамильтона имеет вид (ради которого выше введен минус)

$$\dot p = -\partial H/\partial q, \quad \dot q = \partial H/\partial p.$$

Фазовый поток уравнений Гамильтона сохраняет симплектическую структуру. Действительно, поскольку $L = id + di$, получаем

$$L_{X_H}\omega = i_{X_H}d\omega + di_{X_H}\omega = -ddH = 0.$$

Производная функции F вдоль гамильтонова поля с функцией Гамильтона H называется *скобкой Пуассона* (H, F). Очевидно, $(H, F) = dF(X_H) = -\omega(X_F, X_H)$, поэтому скобка Пуассона кососимметрична. Легко проверить, что скобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби, так что пространство функций Гамильтона, снабженное скобкой Пуассона, является алгеброй Ли.

Поле, гамильтониан которого — скобка Пуассона двух функций, является скобкой Пуассона полей, гамильтонианы которых — эти функции.

Две функции *находятся в инволюции*, если их скобка Пуассона равна нулю. Иными словами, функции, находящиеся в инволюции с гамильтонианом, — это первые интегралы уравнений Гамильтона.

При работе с обычными многообразиями имеется два способа понижения размерности: сечения и проектирования (т. е. переход к подмногообразиям и к фактормногообразиям). В классе симплектических многообразий размерность может меняться только на четное число единиц, и понижение осуществляется в два этапа, один из которых — сечение, а другой — проектирование.

Рассмотрим, например, подмногообразие $H = \mathrm{const}$ симплектического многообразия M размерности $2n$. Это подмногообразие нечетномерно, но оно разбито на фазовые кривые гамильтонова поля с гамильтонианом H. Множество фазовых кривых на поверхности $H = \mathrm{const}$ можно рассматривать как $(2n-2)$-мерное многообразие (по меньшей мере локально — в окрестности неособой точки, но иногда и глобально). Это $(2n-2)$-мерное

многообразие N наследует из M симплектическую структуру, определяемую следующим образом: пусть A — поверхность $H = \text{const}$, $\pi\colon A \to N$ — проекция; симплектическая структура $\tilde{\omega}$ на N определяется формулой

$$\tilde{\omega}(\pi_*\xi, \pi_*\eta) = \omega(\xi, \eta)$$

для любых касательных к A в одной точке векторов ξ, η. Легко проверить, что значение правой части зависит лишь от проекций $\pi_*\xi$, $\pi_*\eta$ и определяет на факторе симплектическую структуру.

Пример. Пусть M — стандартное пространство $\mathbb{R}^{2n}$, $H = p^2$, A — гиперповерхность $H = 1$.

Решение уравнений Гамильтона имеет вид $q = q_0 + 2p_0t$, $p = p_0$. Поэтому пространство фазовых кривых из A определено в целом: это многообразие всех ориентированных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Следствие. *Многообразие всех ориентированных прямых в евклидовом пространстве имеет симплектическую структуру.*

Замечание. Многообразие всех ориентированных прямых в евклидовом пространстве диффеоморфно (ко)касательному расслоению сферы.

Действительно, сопоставим нашей прямой $q + pt$ точку $p/|p|$, являющуюся ортом направленной прямой. Эта точка принадлежит единичной сфере евклидова пространства. Касательная плоскость к сфере в точке $p/|p|$ пересекается с исходной прямой в некоторой точке. Эта точка определяет касательный вектор на сфере. Нетрудно проверить, что обе симплектические структуры пространства прямых в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (индуцированные из $\mathbb{R}^{2n}$ и из T^*S^{n-1}) отличаются лишь знаком.

18.3. Лагранжевы подмногообразия. Подмногообразие симплектического пространства называется *изотропным*, если форма, задающая симплектическую структуру, индуцирует на этом подмногообразии нулевую форму.

Пример 1. Плоскость $p = \text{const}$ в стандартном симплектическом пространстве $\{(p, q)\}$ изотропна.

Пример 2. Любая кривая в симплектической двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$ изотропна.

Размерность изотропного подмногообразия не больше половины размерности объемлющего симплектического многообразия (так как симплектическая 2-форма невырождена).

Изотропные подмногообразия наибольшей возможной размерности (т. е. размерности, равной половине размерности объемлющего симплектического пространства) называются *лагранжевыми*.

Пример 3. Среди C_{2n}^n n-мерных координатных плоскостей стандартного $2n$-мерного симплектического пространства лагранжевыми явля-

ются 2^n плоскостей, получаемых следующей конструкцией. Пусть I — подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим n осей координат p_i, $i \in I$, и q_j, $j \notin I$. Плоскость, натянутая на эти оси, лагранжева.

Иными словами, все лагранжевы координатные плоскости получаются из плоскости, натянутой на оси $(p_1, \ldots, p_n)$, поворотом «на 90°» в некоторых из двумерных плоскостей (p_j, q_j) (такой поворот $(p_j, q_j) \mapsto (q_j, -p_j)$ сохраняет симплектическую структуру и, следовательно, переводит лагранжевы плоскости в лагранжевы).

Изотропные подмногообразия примеров 1 и 2 — лагранжевы.

Пример 4. Пусть V — любое подмногообразие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ и L — многообразие ориентированных нормалей к V. Тогда L — лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии всех ориентированных прямых в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим стандартную 1-форму $\alpha = p\,dq$ в $\mathbb{R}^{2n} = T^*\mathbb{R}^n$. Рассмотрим n-мерное подмногообразие, образованное кокасательными векторами, равными 0 на L (при евклидовом отождествлении кокасательных векторов с касательными это — многообразие всех векторов, нормальных к L). Сужение α на указанное подмногообразие равно нулю. Отсюда сразу следует изотропность и лагранжевость многообразия ориентированных нормалей.

Пример 5. Для любой функции $S(q)$, $q \in \mathbb{R}^n$, определим подмногообразие в стандартном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ формулой $p = \partial S/\partial q$. Это подмногообразие лагранжево.

Действительно, на этом многообразии $p\,dq = dS$, поэтому сужение $dp \wedge dq$ на это многообразие равно нулю.

Функция S называется *производящей функцией* лагранжева многообразия.

Всякое лагранжево подмногообразие стандартного симплектического пространства $\mathbb{R}^{2n}$, являющееся графиком отображения $p = f(q)$, локально определяется производящей функцией. (Вследствие лагранжевости графика сужение на график формы $p\,dq$ замкнуто и, значит, локально является дифференциалом функции.)

Пример 6. Росток лагранжева подмногообразия стандартного симплектического пространства является графиком отображения $p = f(q)$, если и только если он трансверсален лагранжевой плоскости $q = \text{const}$. Не всякий лагранжев росток трансверсален этой плоскости. Однако всякий лагранжев росток в $\mathbb{R}^{2n}$ трансверсален одной из 2^n лагранжевых плоскостей координатного направления (см. [14]).

Если лагранжев росток трансверсален плоскости, натянутой на оси p_i $(i \in I)$, q_j $(j \in J)$, то он является графиком ростка отображения $(q_I, p_J) \mapsto (p_I, q_J)$. В этом случае росток записывается при помощи производящей

функции $S(q_I, p_J)$ формулами

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_j$$

(эти формулы получаются из формул примера 5 при повороте «на 90°» в координатных плоскостях (p_j, q_j), $j \in J$). Мы будем называть координаты q_j и импульсы p_j с индексами из J (те, для которых в формуле есть минус) *патологическими*. Если размерность пересечения лагранжевой плоскости с плоскостью $q = \text{const}$ равна k, то производящую функцию можно выбрать с k патологическими аргументами.

Следствие. *Все лагранжевы ростки в $\mathbb{R}^{2n}$ локально симплектически эквивалентны.*

Доказательство. Из утверждения примера 6 следует, что каждый лагранжев росток в подходящей симплектической системе координат записывается при помощи производящей функции: $p = \partial S/\partial q$. Диффеоморфизм $(p, q) \mapsto (p - \partial S/\partial q, q)$ сохраняет симплектическую структуру и приводит росток к виду $p = 0$.

18.4. Лагранжевы расслоения. Расслоение $\pi\colon E^{2n} \to B^n$ называется *лагранжевым*, если пространство E снабжено симплектической структурой и слои — лагранжевы подмногообразия.

Пример 1. *Стандартное лагранжево расслоение* $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $(p, q) \mapsto q$.

Пример 2. *Кокасательное расслоение $T^*B \to B$* любого многообразия B лагранжево. Действительно, вдоль слоев кокасательного расслоения обращается в нуль стандартная 1-форма $\alpha = p\,dq$, а значит, и ее дифференциал $\omega = d\alpha$.

Теорема. *Все лагранжевы расслоения фиксированной размерности локально симплектически диффеоморфны* (*локально = в окрестности каждой точки пространства расслоения*).

Доказательство. Выберем n ростков функций $Q_1, \ldots, Q_n$ на базе расслоения π с независимыми в центре ростка дифференциалами. Ростки их прообразов $(q_1 = \pi^*Q_1, \ldots, q_n = \pi^*Q_n)$ в рассматриваемой точке пространства расслоения также имеют независимые дифференциалы.

Рассмотрим векторные поля X_i с гамильтонианами $(q_1, \ldots, q_n)$. Докажем, что *эти поля касаются слоев расслоения*. Действительно, $dq_i(\xi) = -\omega(X_i, \xi)$, поэтому линейное пространство, порожденное всеми касательными к слою векторами ξ и еще вектором X_i в касательном пространстве T_eE к пространству расслоения в какой-либо точке, изотропно ($\omega = 0$). Но касательное пространство к слою — уже лагранжево (максимальное изотропное) подпространство в линейном симплектическом пространстве T_eE. Поэтому вектор X_i касается слоя.

Мы заключаем, что функции q_i находятся в инволюции:

$$(q_i, q_j) = \omega(X_i, X_j) \equiv 0,$$

так как расслоение лагранжево. Следовательно, поля X_i, X_j коммутируют, а значит, коммутируют и их фазовые потоки.

Выберем какой-либо лагранжев росток в изучаемой точке, трансверсальный слою. Определим функции $p_1, \ldots, p_n$ в окрестности этой точки так: двигаясь от точки выбранного лагранжева ростка в течение времени t_1 вдоль поля $-X_1$, времени t_2 вдоль поля $-X_2$ и т. д., мы приходим в точку, в которой $p_1 = t_1$, $p_2 = t_2, \ldots$

Ростки функций $(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$ образуют локальную систему координат, в которой наше расслоение задается формулой $(p, q) \mapsto q$.

Рассмотрим пересечения поверхностей уровня функций $p_1, \ldots, p_n$. Это — сдвиги выбранного трансверсального слоя лагранжева многообразия посредством симплектических диффеоморфизмов. Следовательно, пересечения лагранжевы. Но $-\omega(X_i, \xi) = dp_i(\xi) = 0$ для любого вектора ξ, касающегося пересечения. Значит, поля X_i касаются пересечений (иначе вектор X_i можно было бы добавить, не нарушая изотропности, к касательному пространству к пересечению).

Теперь уже легко вычислить все попарные скобки Пуассона функций $(p_1, \ldots, q_n)$; мы убеждаемся в том, что в построенных координатах симплектическая структура имеет стандартный вид $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, что и завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Попутно мы построили на каждом слое лагранжева расслоения локальную структуру аффинного пространства (заданную координатами $(p_1, \ldots, p_n)$). Имевшийся в нашей конструкции произвол состоит в выборе функций $(Q_1, \ldots, Q_n)$ и в выборе лагранжева сечения $(p = 0)$. Легко проверить, что изменение того и другого приводит в слое к координатам p, отличающимся от построенных лишь аффинным преобразованием. Действительно, изменение координат Q_i влечет линейное преобразование дифференциалов dQ_i и, значит, полей X_i, а изменение лагранжева сечения — лишь сдвиг начала координат p.

18.5. Лагранжевы эквивалентности. *Лагранжевой эквивалентностью* двух лагранжевых расслоений называется диффеоморфизм пространств расслоений, переводящий слои первого расслоения в слои второго и симплектическую структуру первого в симплектическую структуру второго.

П р и м е р 1. Рассмотрим стандартное лагранжево расслоение $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^n$, $(p, q) \mapsto q$. Для любой функции S на базе расслоения отображение пространства расслоения в себя, заданное формулой $(p, q) \mapsto (p + \partial S/\partial q, q)$, является лагранжевой эквивалентностью.

Пример 2. Для любого линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ отображение пространства стандартного расслоения в себя, заданное формулой $(p, q) \mapsto (A'^{-1}p, Aq)$, является лагранжевой эквивалентностью.

Пример 3. Рассмотрим кокасательное расслоение $T^*B \to B$, и пусть $g\colon B \to B$ — любой диффеоморфизм. Тогда индуцированное отображение $g^*\colon T^*B \to T^*B$ — лагранжева эквивалентность.

Пример 4. Для любой функции $S\colon B \to \mathbb{R}$ отображение $T^*B \to T^*B$, заданное формулой $\xi \mapsto \xi + dS|_{\pi\xi}$, является лагранжевой эквивалентностью расслоения $\pi\colon T^*B \to B$ в себя.

Теорема. *Всякая лагранжева эквивалентность ростка кокасательного расслоения в себя разлагается в произведение эквивалентностей примеров* 3 *и* 4: $\xi \mapsto g^*\xi + dS|_{\pi g^*\xi}$, *где* g — *росток диффеоморфизма базы*, *а* S — *росток функции на базе*.

Доказательство. По определению лагранжева эквивалентность индуцирует диффеоморфизм базы. Применяя эквивалентность примера 3, мы приходим к случаю, когда диффеоморфизм базы тождественный, и должны доказать, что в этом случае эквивалентность описывается примером 4.

Итак, мы должны описать все симплектические диффеоморфизмы вида $(p, q) \mapsto (P(p, q), q)$. Из симплектичности следует, что $P\,dq - p\,dq = dS$. Следовательно, $\partial S/\partial p = 0$, $\partial S/\partial q = P - p$, т. е. $P = p + \partial S/\partial q$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим *действие лагранжевой эквивалентности* Θ, *описанной в теореме*, *на росток лагранжева многообразия* L, являющегося сечением кокасательного расслоения. Росток L задается производящей функцией F по формуле $p = \partial F/\partial q$.

Росток ΘL также является сечением; вычислим его производящую функцию. По доказанному эквивалентность Θ выражается через диффеоморфизм g базы и функцию S на базе по формуле

$$\Theta\xi = g^*\xi + dS|_{\pi g^*\xi}.$$

Теорема. *Производящая функция* $\tilde{F}$ *ростка* ΘL *получается из производящей функции* F *ростка* L *диффеоморфизмом базы и прибавлением функции на базе*:

$$\tilde{F} = F \circ g^{-1} + S.$$

Доказательство. Форма $p\,dq$ инвариантна относительно g^*, поэтому в качестве производящей функции ростка g^*L можно выбрать $F \circ g^{-1}$. Преобразование же $\xi \mapsto \xi + dS|_{\pi\xi}$, очевидно, прибавляет S к производящей функции.

18.6. Лагранжевы отображения. Рассмотрим вложение в пространство лагранжева расслоения $\pi\colon E \to B$ еще одного лагранжева подмногообразия $(i\colon L \to E)$.

Сужение проектирования π на L, т. е. $\pi \circ i\colon L \to B$, называется *лагранжевым отображением*.

Лагранжевы отображения — это отображения многообразий одинаковой размерности, но они образуют специальный класс отображений: особенности общего положения в классе всех отображений и в классе лагранжевых отображений, вообще говоря, различны.

Пример 1. *Градиентное отображение* $q \mapsto \partial S/\partial q$ лагранжево.

Пример 2. *Гауссово отображение* трансверсально ориентированной гиперповерхности в евклидовом пространстве на сферу лагранжево.

Действительно, многообразие ориентированных нормалей к поверхности является лагранжевым подмногообразием в кокасательном расслоении сферы (см. замечание в п. 18.2 и пример 4 в п. 18.3).

Задача. Вычислить производящую функцию гауссова отображения (т. е. производящую функцию лагранжева многообразия нормалей).

Ответ. Это опорная функция исходной гиперповерхности: в точке x гиперповерхности она равна $\langle x, y\rangle$, где y — орт нормали.

Пример 3. *Нормальное отображение*, сопоставляющее вектору $\overrightarrow{uv}$ нормали к поверхности в евклидовом пространстве, приложенному в точке u, точку v самого пространства, лагранжево.

Лагранжевой эквивалентностью лагранжевых отображений называется лагранжева эквивалентность соответствующих расслоений, переводящая лагранжево многообразие-прообраз в первом пространстве расслоения в лагранжево многообразие-прообраз во втором.

Аналогичные определения даются для ростков.

Задача. Докажите, что *каждый росток лагранжева отображения лагранжево эквивалентен ростку градиентного отображения* (*а также ростку гауссова отображения*, *а также ростку нормального отображения*).

Замечание. Все лагранжевы ростки, близкие к данному градиентному (гауссову, нормальному), сами являются градиентными (гауссовыми, нормальными); поэтому явления общего положения в классе градиентных (гауссовых, нормальных) отображений — те же, что в классе всех лагранжевых отображений.

18.7. Каустики. Множество критических значений лагранжева отображения называется *каустикой*.

Пример. Для нормального отображения поверхности в евклидовом пространстве каустика есть множество центров кривизны: чтобы ее

построить, нужно отложить вдоль каждой нормали соответствующие радиусы главных кривизн.

Центры кривизны эллипса образуют астроиду: это кривая с четырьмя точками возврата. Эти особенности устойчивы: при малом шевелении из эллипса получается кривая, центры которой образуют близкую к астроиде каустику с четырьмя точками возврата. Эту каустику можно получить также как огибающую семейства нормалей к эллипсу.

Поверхность центров кривизны трехосного эллипсоида устроена уже довольно сложно, но соответствующие лагранжевы особенности также устойчивы. Их изучил еще А. Кэли (1873 г.).

Каустики лагранжево эквивалентных отображений диффеоморфны, так как сами отображения лево-право эквивалентны.

Из диффеоморфности каустик лагранжева эквивалентность, вообще говоря, не следует. Из диффеоморфности каустик не следует также и лево-правая эквивалентность, а из лево-правой — лагранжева.

Для лагранжевых отображений построена своя теория особенностей, параллельная общей теории особенностей. Оказывается, что теория устойчивых лагранжевых ростков сводится к теории версальных деформаций гладких функций. Это позволяет извлечь из теории особенностей семейств функций значительную информацию о лагранжевых особенностях.

§ 19. Производящие семейства

Росток n-мерного лагранжева многообразия можно задать производящей функцией n переменных. В этом смысле многообразие лагранжевых ростков в $\mathbb{R}^{2n}$ имеет атлас, каждая из 2^n карт которого — пространство ростков функций n переменных (рассматриваемых с точностью до аддитивных постоянных).

Иногда удобнее задавать лагранжев росток при помощи ростка функции большего числа переменных — так называемого производящего семейства. Естественно, одному лагранжеву ростку отвечает много производящих семейств. Однако класс семейств, задающих эквивалентные лагранжевы ростки, удается явно описать. В результате классификация лагранжевых особенностей сводится к задаче теории семейств функций.

19.1. Оптическая длина пути как производящее семейство. Производящие семейства естественно возникают в геометрической оптике. Рассмотрим, например, в евклидовом пространстве два подмногообразия произвольных (не обязательно совпадающих) размерностей: источник света и поверхность наблюдения. Семейство фронтов (эквидистант), распространяющихся от источника, задает и на поверхности наблюдения семейство фронтов. Вообще говоря, через каждую точку поверхности наблюдения про-

ходит несколько фронтов, соответствующих различным лучам, перпендикулярным к источнику и ведущим в данную точку наблюдения, так что семейство фронтов на поверхности наблюдения «многозначно». Однако этому семейству соответствует вполне определенное лагранжево подмногообразие в кокасательном расслоении поверхности наблюдения. Это многообразие образовано импульсами (дифференциалами оптической длины пути), соответствующими всем локальным ветвям семейства фронтов.

Формулами эта ситуация описывается следующим образом. Пусть $x \in \mathbb{R}^k$ — координаты точки источника, $\lambda \in \mathbb{R}^l$ — координаты точки наблюдения, $F(x, \lambda)$ — оптическая длина пути от x до λ. Условие перпендикулярности *) ведущего из x в λ луча к источнику имеет вид $\partial F/\partial x = 0$. Лагранжево многообразие в кокасательном расслоении поверхности наблюдения задается, следовательно, формулой

$$\Lambda = \{\lambda, \varkappa\colon \exists x\colon \partial F/\partial x = 0, \varkappa = \partial F/\partial \lambda\}. \qquad (*)$$

[Мы пользуемся здесь обычными координатами в кокасательном расслоении: точка $(\lambda, \varkappa)$ из R^{2l} — это форма $\varkappa_1 d\lambda_1 + \ldots + \varkappa_l d\lambda_l$ в точке λ из $\mathbb{R}^l$.]

Формула $(*)$ задает l-мерное лагранжево многообразие Λ при помощи функции F от $n = k + l$ переменных. Функцию F можно рассматривать как семейство функций от k переменных x с l параметрами λ. Это семейство Хёрмандер предложил называть *производящим семейством* для лагранжева ростка Λ **).

Следует подчеркнуть, что лагранжево многообразие Λ, вообще говоря, не является сечением кокасательного расслоения: его проектирование на поверхность наблюдения определяет на ней каустики. В то же время исходная функция F предполагалась однозначной.

Формулу $(*)$ можно истолковать еще следующим образом. Рассмотрим в кокасательном расслоении произведения источника и поверхности наблюдения лагранжево подмногообразие-сечение, заданное производящей функцией F:

$$M = \{(x, \lambda;\ y, \varkappa)\colon y = \partial F/\partial x, \varkappa = \partial F/\partial \lambda\}.$$

Многообразие Λ получается из M сечением плоскостью $y = 0$ и последующим проектированием (забыванием x и y).

То же самое можно выразить еще следующим более ученым образом.

*) То есть условие стационарности пути из x в λ по сравнению с путями в λ из соседних точек.

**) Производящие семейства линейных по x функций встречались уже у Якоби и Ли (см. способ задания канонических преобразований функциями избыточного числа переменных в § 126 учебника Уиттеккера «Аналитическая динамика», М., 1937).

19.2. Подготовительные определения. Рассмотрим *вспомогательное расслоение* $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, $\rho(x, \lambda) = \lambda$. Мы будем называть $\mathbb{R}^{k+l}$ *большим пространством*, а R^l — базой. Пространство кокасательного расслоения большого пространства (базы) мы будем называть *большим* (*малым*) *фазовым пространством* соответственно.

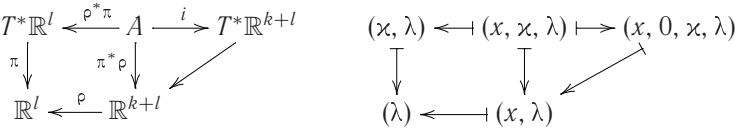
О п р е д е л е н и е. *Смешанным пространством* для ρ называется множество всех векторов, кокасательных к большому пространству, обращающихся в нуль на векторах, касательных к слоям расслоения ρ.

Мы будем обозначать смешанное пространство буквой A.

Смешанное пространство A является подмногообразием большого фазового пространства. Поэтому смешанное пространство A расслоено над большим пространством. Слои естественно изоморфны кокасательным пространствам базы. Это расслоение $A \to \mathbb{R}^{k+l}$ мы будем называть *смешанным расслоением* *).

Смешанное пространство A естественно проектируется на малое фазовое пространство: кокасательный вектор к большому пространству, равный нулю на касательных к слоям вспомогательного расслоения векторам, определяет кокасательный вектор на базе. Слои этого расслоения $A \to T^*\mathbb{R}^l$ изоморфны слоям вспомогательного расслоения ρ **).

Таким образом, смешанное и два кокасательных расслоения образуют коммутативную диаграмму:



О п р е д е л е н и е. Лагранжево подмногообразие большого кокасательного расслоения называется ρ-*правильным*, если оно трансверсально смешанному пространству A для ρ.

19.3. Существование производящего семейства лагранжева ростка.

Т е о р е м а. 1°. *Естественная проекция пересечения* ρ-*правильного лагранжева многообразия с* A *в малое фазовое пространство является лагранжевым* (*иммерсированным*) *подмногообразием.*

2°. *Всякий росток лагранжева многообразия в малом фазовом пространстве может быть получен конструкцией* 1° *из ростка*

*) Смешанное расслоение — это расслоение, индуцированное из кокасательного расслоения π базы при отображении ρ.

**) Это расслоение индуцировано из вспомогательного расслоения ρ при отображении π.

ρ-правильного лагранжева сечения кокасательного расслоения подходящего большого пространства.

Доказательство. А) Пересечение ρ-правильного лагранжева подмногообразия M с A является подмногообразием размерности l в A.

Докажем, что *сужение отображения $\rho^*\pi$ на это подмногообразие невырождено.*

Рассмотрим касательные плоскости α к A и μ к M в точке пересечения как линейные подпространства линейного симплектического пространства, касательного к большому фазовому пространству.

Легко доказывается следующий результат.

Предложение 1. *Кососортогональное дополнение* $\operatorname{ann}\alpha$ *подпространства* α *есть касательное пространство к слою расслоения* $\rho^*\pi$.

Действительно, симплектическая структура имеет вид $\sum dy \wedge dx + \sum d\varkappa \wedge d\lambda$, а α задается уравнением $y = 0$. Значит, $\operatorname{ann}\alpha$ есть координатное x-пространство, а это и есть касательное пространство к слою $\rho^*\pi$. Предложение доказано.

По условию ρ-правильности $\alpha + \mu$ есть все касательное пространство к большому фазовому пространству. Следовательно, $(\operatorname{ann}\alpha) \cap (\operatorname{ann}\mu) = 0$. Но $\operatorname{ann}\mu = \mu$, так как μ лагранжево. Итак, $(\operatorname{ann}\alpha) \cap \mu = 0$. Но согласно доказанному предложению $\operatorname{ann}\alpha$ есть касательное пространство к слою расслоения $\rho^*\pi$. Значит, пересечение M с A не касается слоев этого расслоения. Итак, проектирование — иммерсия.

Б) *Иммерсированное многообразие $L = \rho^*\pi\,(M \cap A)$ лагранжево.*

Действительно, на A выполнено равенство $y = 0$, поэтому $\sum dy \wedge dx + \sum d\varkappa \wedge d\lambda = \sum d\varkappa \wedge d\lambda$. Значит, кососортогональность касательных к $M \cap A$ векторов в большом фазовом пространстве влечет за собой кососортогональность их проекций в малое фазовое пространство. Итак, лагранжевость L следует из лагранжевости M. Утверждение 1° доказано.

В) Произвольный росток лагранжева подмногообразия L в малом фазовом пространстве задается одной из 2^l производящих функций вида $S(\lambda_I, \varkappa_J)$ по формулам

$$\varkappa_I = \partial S/\partial\lambda, \quad \lambda_J = -\partial S/\partial\varkappa_J.$$

Здесь (I, J) — разбиение множества $\{1, \ldots, l\}$ на две части; пусть k — число элементов в J (число патологических аргументов функции S). Будем рассматривать S как семейство функций от второго (k-мерного), патологического аргумента, считая первый аргумент параметром. Рассмотрим семейство $F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle\lambda_J, x\rangle$ функций k-мерного аргумента x, зависящих от l-мерного параметра λ (по параметру λ_J это семейство линейно). Семейство F задает лагранжево сечение M кокасательного расслоения большого

пространства по обычным формулам

$$y = \partial F/\partial x, \quad \varkappa = \partial F/\partial \lambda.$$

Определим вспомогательное расслоение ρ обычной формулой $\rho(x, \lambda) = \lambda$.

Предложение 2. *Лагранжево многообразие M ρ-правильно. Соответствующий ему лагранжев росток в малом фазовом пространстве есть исходное лагранжево подмногообразие L.*

Доказательство. На M локальными координатами являются x и λ; согласно определению F, на M выполнены равенства

$$y = \partial S/\partial x + \lambda_J, \quad \varkappa_J = \partial S/\partial \lambda_J, \quad \varkappa_J = x.$$

Следовательно, $\det(\partial y/\partial \lambda_J) \neq 0$. Это доказывает независимость сужений k форм dy_i на M. Следовательно, многообразие M трансверсально многообразию A с уравнением $y = 0$, т. е. ρ-правильно.

При $y = 0$ из выписанных выше соотношений следует, что

$$\lambda_J = -\partial S/\partial x, \quad \varkappa_J = \partial S/\partial \lambda_J, \quad x = \varkappa_J.$$

Поэтому проекция $M \cap A$ в малое фазовое пространство (забывание x) совпадает с L. Тем самым предложение, а с ним и утверждение 2° теоремы доказаны.

Определение. *Производящим семейством лагранжева ростка L* называется росток функции F на большом пространстве, производящей для ρ-правильного ростка лагранжева многообразия M: $y = \partial F/\partial x$, $\varkappa = \partial F/\partial \lambda$, который после пересечения со смешанным пространством A вспомогательного расслоения $\rho(x, \lambda) = \lambda$ и естественного проектирования в малое фазовое пространство превращается в L.

Иными словами, L выражается через F по формуле (*) п. 19.1.

Замечание 1. Условие ρ-правильности таково: *ранг матрицы $(\partial^2 F/\partial x^2, \partial^2 F/\partial x\, \partial \lambda)$ в точках, где $\partial F/\partial x = 0$, — максимально возможный (равен числу k аргументов x_i)*. Действительно, ρ-правильность означает независимость сужений форм dy_i на M в точках из $M \cap A$, и на M имеем

$$dy_i = \sum (\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j)\, dx_j + \sum (\partial^2 F/\partial x_i \partial \lambda_m)\, d\lambda_m.$$

Замечание 2. Ядро производной лагранжева отображения (проектирования L на базу) выражается через производящее семейство следующим образом.

Будем рассматривать матрицу $\partial^2 F/\partial x^2$ как задающую линейный оператор $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, матрицу $\partial^2 F/\partial \lambda \partial x$ — как задающую линейный оператор $\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^k$, а транспонированную матрицу $\partial^2 F/\partial x \partial \lambda$ — как задающую оператор $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^l$.

Будем обозначать вектор из компонент $du_i(\eta)$ элемента η через $du(\eta)$ (u обозначает x, или y, или λ, или $\varkappa$).

Когда η пробегает ядро производной, вектор $d\varkappa(\eta)$ пробегает образ ядра оператора $\partial^2F/\partial x^2$ под действием оператора $\partial^2F/\partial x\partial\lambda$.

Действительно, мы имеем

$$dy = (\partial^2F/\partial x^2)\,dx + (\partial^2F/\partial\lambda\,\partial x)\,d\lambda,\quad dy(\eta) = 0,\quad d\lambda(\eta) = 0,\quad \varkappa = \partial F/\partial\lambda.$$

Следовательно,

$$dx(\eta) \in \operatorname{Ker}(\partial^2F/\partial x^2),\qquad d\varkappa(\eta) = (\partial^2F/\partial x\,\partial\lambda)\,dx(\eta),$$

что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 3. Из ρ-правильности следует, что отображение $\eta \mapsto d\varkappa(\eta)$ задает *изоморфизм* ядра производной с пространством $(\partial^2F/\partial x\partial\lambda)\operatorname{Ker}(\partial^2F/\partial x^2)$ (так как L иммерсировано в малое фазовое пространство).

С л е д с т в и е. *Размерность ядра производной не превосходит* $\min(k, l)$ (*т. е. размерностей слоя и базы вспомогательного расслоения*).

Таким образом, если размерность ядра производной лагранжева отображения в точке равна m, то размерность k слоя вспомогательного расслоения для задающего это отображение производящего семейства не меньше чем m. Росток производящего семейства со слоями наименьшей возможной размерности ($k = m$) существует. Этот росток построен в п. В) доказательства теоремы (так как число патологических аргументов производящей функции S можно взять равным m).

С л е д с т в и е. *Для ростка в точке производящего семейства с минимально возможной размерностью слоя вспомогательного расслоения $\partial^2F/\partial x^2 = 0$ в рассматриваемой точке.*

19.4. Лагранжева эквивалентность и R^+-эквивалентность производящих семейств.

О п р е д е л е н и е. Диффеоморфизм пространства гладкого расслоения в себя называется *расслоенным*, если он переводит слои в слои (такой диффеоморфизм индуцирует диффеоморфизм базы).

Пусть F_1 и F_2 — два производящих семейства, определенные на пространстве вспомогательного расслоения $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$. Семейства F_1 и F_2 называются *R-эквивалентными*, если одно из них переходит в другое при подходящем расслоенном диффеоморфизме Θ, т. е.

$$F_1(x, \lambda) \equiv F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)), \qquad (**)$$

где $\Theta(x, \lambda) \equiv (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$.

Семейства называются R^+-*эквивалентными*, если одно из них переходит в другое после подходящего расслоенного диффеоморфизма Θ и прибавления подходящей гладкой функции от параметров:

$$F_1(x, \lambda) \equiv F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)) + \Phi(\lambda).$$

Аналогичные определения даются для ростков.

Два ростка семейств F_1, F_2 с общими параметрами λ, но, вообще говоря, разными размерностями пространства аргументов x^1 и x^2 называются *стабильно* R^+-*эквивалентными*, если они становятся R^+-эквивалентными после добавления к аргументам x^i новых аргументов z^i и к функциям F_i невырожденных квадратичных форм Q_i от новых аргументов: $F_1 + Q_1 \underset{R^+}{\sim} F_2 + Q_2$.

Т е о р е м а. *Два ростка лагранжевых отображений лагранжево эквивалентны, если и только если ростки их производящих семейств* R^+-*стабильно эквивалентны*.

Прежде чем доказывать эту теорему, мы рассмотрим один специальный класс лагранжевых эквивалентностей кокасательного расслоения над большим пространством вспомогательного расслоения.

Согласно п. 18.5 каждая лагранжева эквивалентность разлагается в произведение послойно линейной эквивалентности, индуцированной диффеоморфизмом большого пространства, и послойного сдвига, заданного функцией на большом пространстве.

О п р е д е л е н и е. Лагранжева эквивалентность кокасательного расслоения большого пространства называется *расслоенной*, если соответствующий диффеоморфизм большого пространства расслоен (переводит слои вспомогательного расслоения в слои), а соответствующая функция на большом пространстве постоянна вдоль слоев.

П р е д л о ж е н и е 1. *Лагранжева эквивалентность кокасательного расслоения большого пространства расслоена, если и только если она переводит в себя смешанное пространство* A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Расслоенный диффеоморфизм большого пространства индуцирует сохраняющую смешанное пространство лагранжеву эквивалентность, так как смешанное пространство определено вспомогательным расслоением.

2. Сдвиг, определяемый постоянной вдоль слоев функцией $S(\lambda)$, имеет вид $(x, y, \lambda, \varkappa) \mapsto (x, y, \lambda, \varkappa + \partial S/\partial\lambda)$ и переводит многообразие A, заданное уравнением $y = 0$, в себя.

Из 1 и 2 следует, что расслоенная эквивалентность переводит A в себя.

3. Пусть лагранжева эквивалентность переводит A в себя. Рассмотрим косоортогональное дополнение $\operatorname{ann}\alpha$ к касательному пространству α

к A. Лагранжева эквивалентность, переводящая A в себя, сохраняет поле плоскостей $\operatorname{ann}\alpha$ на многообразии A и аффинную структуру слоев кокасательного расслоения. Но $\operatorname{ann}\alpha$ есть касательное пространство к слою расслоения $A \to T^*\mathbb{R}^l$. Следовательно, переводящая A в себя лагранжева эквивалентность переводит в себя поле плоскостей, параллельных x-пространству. Значит, соответствующий диффеоморфизм большого пространства расслоен. Поскольку многообразие A, где $y = 0$, переходит в себя, функция, определяющая сдвиг, от x не зависит. Итак, лагранжева эквивалентность, переводящая A в себя, расслоена. Предложение доказано.

С л е д с т в и е. *Расслоенная лагранжева эквивалентность индуцирует лагранжеву эквивалентность кокасательного расслоения базы вспомогательного расслоения.*

19.5. Доказательство теоремы об эквивалентности. А) Пусть дана R^+-эквивалентность производящего семейства F_1 с семейством F_2. Докажем, что F_2 *также является производящим семейством и что определенные семействами* F_1 *и* F_2 *ростки лагранжевых отображений лагранжево эквивалентны.*

а) По R^+-эквивалентности строим расслоенную лагранжеву эквивалентность: если $F_1(x, \lambda) = F_2(h(x, \lambda), \varphi(\lambda)) + \Phi(\lambda)$, то расслоенный диффеоморфизм $\Theta = (h, \varphi)$ большого пространства и сдвиг, заданный функцией Φ, определяют расслоенную лагранжеву эквивалентность.

б) Эта расслоенная лагранжева эквивалентность переводит росток лагранжева сечения M_1 большего кокасательного расслоения, заданный производящей функцией F_1, в росток лагранжева сечения M_2 с производящей функцией F_2 (см. формулы п. 18.5). Отсюда следует, что M_2 трансверсально A. Значит, семейство F_2 производящее.

в) Лагранжева эквивалентность кокасательного расслоения базы вспомогательного расслоения, индуцированная построенной расслоенной эквивалентностью, переводит лагранжев росток с производящим семейством F_1 в росток с производящим семейством F_2. Утверждение А) доказано.

Б) Пусть дана лагранжева эквивалентность кокасательного расслоения базы вспомогательного расслоения, переводящая росток лагранжева многообразия L_1, заданного производящим семейством F_1, в росток лагранжева многообразия L_2.

Тогда L_2 *можно задать производящим семейством* F_2, R^+*-эквивалентным семейству* F_1.

Действительно, рассмотрим прямое произведение данной расслоенной эквивалентности пространства кокасательного расслоения базы с координатами $(\lambda, \varkappa)$ и тождественного преобразования $(x, y) \mapsto (x, y)$. Это — расслоенная лагранжева эквивалентность кокасательного расслоения большого пространства. Она переводит росток лагранжева сечения M_1, заданный

производящей функцией F_1, в росток лагранжева сечения M_2. Росток M_2 задается производящей функцией F_2. Производящее семейство F_2 — искомое.

В) *Стабильно R^+-эквивалентные производящие семейства задают лагранжево эквивалентные ростки.*

Действительно, производящие семейства $F(x, \lambda)$ и $F(x, \lambda) \pm z^2$ (с параметрами λ) задают один и тот же лагранжев росток:

$$\{\lambda, \varkappa\colon \exists x\colon \partial F/\partial x = 0, \varkappa = \partial F/\partial \lambda\} = \\ = \{\lambda, \varkappa\colon \exists x, z\colon \partial F/\partial x = 0, z = 0, \varkappa = \partial F/\partial \lambda\}.$$

Г) *Любые два производящих семейства одного и того же лагранжева ростка R^+-стабильно эквивалентны.*

Это — наиболее содержательная часть доказательства.

а) *Редукция к случаю $\partial^2 F/\partial x^2 = 0$.* По обобщенной лемме Морса (п. 11.1) существует росток диффеоморфизма $(x, \lambda) \mapsto (u, v, \lambda)$, для которого $F(x, \lambda) = F_1(u, \lambda) + Q(v)$, где Q — невырожденная квадратичная форма и $\partial^2 F_1/\partial u^2$ в рассматриваемой точке есть нуль.

Рассмотрим F_1 как семейство функций от u с параметрами λ. Это семейство производящее и задает тот же лагранжев росток, что и F.

Итак, каждое производящее семейство данного ростка R^+-стабильно эквивалентно такому производящему семейству, что $\partial^2 F/\partial x^2 = 0$, т. е. производящему семейству с размерностью слоя вспомогательного расслоения, имеющей наименьшее возможное значение (равное размерности ядра производной лагранжева отображения). Такое производящее семейство мы будем называть *минимальным*.

б) Утверждение Г) вытекает из утверждения а) и следующего предложения.

Минимальные производящие семейства одного лагранжева ростка R^+-эквивалентны.

в) *Редукция к случаю специального производящего семейства.* Мы уже отмечали, что всякий лагранжев росток допускает производящую функцию с минимальным числом патологических аргументов $\varkappa_j$, $j \in J$ (равным размерности k ядра лагранжева отображения):

$$\varkappa_I = \partial S/\partial \lambda_I, \quad \lambda_J = -\partial S/\partial \varkappa_J$$

(здесь $(\lambda, \varkappa) \mapsto \lambda$ — кокасательное расслоение пространства $\mathbb{R}^l$). Мы зафиксируем этот набор k патологических аргументов.

Предложение. *Для минимального производящего семейства $F(x, \lambda)$, задающего рассматриваемый лагранжев росток,* $\det(\partial^2 F/\partial x \partial \lambda_J) \neq 0$.

Доказательство. Условие трансверсальности, при котором лагранжев росток задается производящей функцией с k патологическими аргументами $\varkappa_j$, $j \in J$, состоит в независимости k форм $d\varkappa_j$ на ядре лагранжева отображения, т. е. в невырожденности отображения, сопоставляющего вектору ядра η вектор с компонентами $d\varkappa_J(\eta)$. Ввиду минимальности семейства это линейное отображение $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ задается матрицей $\partial^2 F/\partial x \partial \lambda_J$. Итак, $\det(\partial^2 F/\partial x \partial \lambda_J) \neq 0$.

Определение. Минимальное производящее семейство F называется *специальным*, если при $\partial F/\partial x = 0$ выполняется условие $x = \partial F/\partial \lambda_J$.

Утверждение пункта б) вытекает из двух лемм.

Лемма 1. *Росток минимального производящего семейства R^+-эквивалентен ростку специального производящего семейства, определяющего тот же лагранжев росток.*

Лемма 2. *Ростки специальных производящих семейств, определяющих один и тот же лагранжев росток, R^+-эквивалентны.*

г) *Доказательство леммы* 1. Пусть F — минимальное производящее семейство. Тогда $\det(\partial^2 F/\partial x \partial \lambda_J) \neq 0$.

Пусть $\varkappa_J(x, \lambda) = \partial F/\partial \lambda_J$. Отображение $(x, \lambda) \mapsto (\varkappa_J(x, \lambda), \lambda)$ задает расслоенный диффеоморфизм большого пространства. Индуцированная лагранжева эквивалентность переводит лагранжево сечение M, заданное производящей функцией F, в новое лагранжево сечение.

Это сечение задает *специальное* производящее семейство. Действительно, это производящее семейство имеет вид $F_1(x, \lambda) \equiv F(u(x, \lambda), \lambda)$, где $(x, \lambda) \mapsto (u(x, \lambda), \lambda)$ — обращение отображения $(x, \lambda) \mapsto (\varkappa_J(x, \lambda), \lambda)$. Из равенства $\partial F_1/\partial x = 0$ следует, что $\partial F/\partial u = 0$, поэтому при $\partial F_1/\partial x = 0$ имеем $\partial F_1/\partial \lambda = \partial F/\partial \lambda = \varkappa_J(u(x, \lambda), \lambda) = x$, что доказывает специальность производящего семейства F_1. Ростки F и F_1 определяют один и тот же лагранжев росток и R-эквивалентны. Лемма 1 доказана.

д) *Доказательство леммы* 2. Пусть F — производящее семейство лагранжева ростка. Рассмотрим *множество критических точек семейства*

$$N = \{x, \lambda\colon \partial F/\partial x = 0\}.$$

Это множество естественно диффеоморфно нашему лагранжеву ростку.

Предложение. *Пусть F_0, F_1 — два специальных производящих семейства одного ростка. Тогда*: 1) *их множества критических значений совпадают*: $N_0 = N_1 = N$; 2) *сужения F_0 и F_1 на N совпадают с точностью до аддитивной постоянной*; 3) *полный дифференциал $F_0 - F_1$ равен* 0 *на всем N.*

Доказательство. 1) Поскольку F_i специально, N_i есть образ нашего лагранжева ростка при отображении, сопоставляющем точке $(\varkappa, \lambda)$

точку $(\varkappa_I, \lambda)$. Поэтому N_i не зависит от i. 2) Точки нашего лагранжева ростка параметризуются значениями λ_I и $\varkappa_I$. В частности, $\varkappa$ определяются по λ_I и x. Значит, $\partial F_i/\partial\lambda$ в точках N однозначно определено лагранжевым ростком и не зависит от i. Отсюда следует утверждение 3), а значит, и 2).

Пусть F_0 и F_1 — два таких специальных производящих семейства одного лагранжева ростка, что значения F_0 и F_1 в начальной точке совпадают. Согласно доказанному предложению $F_0 - F_1$ имеет на множестве критических значений N нуль не ниже *второго* порядка.

Соединим F_0 с F_1 гомотопией $F_t = F_0 + t(F_1 - F_0)$. Тогда F_t — специальное производящее семейство того же ростка. Будем искать такое гладко зависящее от $t \in [0, 1]$ семейство диффеоморфизмов G_t, $G_t(x, \lambda) \equiv \equiv (g(x, \lambda, t), \lambda)$, что $F_t \circ G_t = F_0$ (точнее говоря, G_t — росток диффеоморфизма, оставляющего на месте изучаемую точку). Росток диффеоморфизма G_1 устанавливает R-эквивалентность семейств F_0 и F_1, что и доказывает лемму 2.

Дифференцируя соотношение $F_t \circ G_t = F_0$ по t, мы получаем уравнение

$$(F_1 - F_0) + \sum \xi_i(\partial F_t/\partial x_i) = 0 \qquad (***)$$

относительно компонент зависящего от t векторного поля $\xi = \sum \xi_i(x, \lambda, t)\partial/\partial x_i$ скоростей семейства диффеоморфизмов G_t.

Рассмотрим в пространстве с координатами (x, λ, t) многообразие $N' = N \times \{t\}$. Уравнения $\partial F_t/\partial x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ составляют систему независимых уравнений этого многообразия. По лемме Адамара всякая функция, обращающаяся на этом многообразии в нуль, представима в виде линейной комбинации $\partial F_t/\partial x_i$ (с функциональными коэффициентами). Поэтому всякая функция Φ, имеющая на N нуль второго порядка, представима в виде

$$\Phi(x, \lambda, t) = \sum \xi_i(x, \lambda, t)\partial F_t/\partial x_i, \quad \xi_i|_{N'} \equiv 0.$$

В частности, полагая $\Phi = F_0 - F_1$, мы убеждаемся в разрешимости уравнения $(***)$, причем $\xi|_{N'} \equiv 0$.

Полученное зависящее от t векторное поле ξ обращается в 0 на N и поэтому задает в окрестности изучаемой точки диффеоморфизмы G_t при всех $t \in [0, 1]$. Диффеоморфизм G_1 расслоен (имеет вид $G_1(x, \lambda) = (H(x, \lambda), \lambda)$) и $F_1 \circ G_1 = F_0$. Следовательно, F_1 R-эквивалентно F_0, что и требовалось доказать.

§ 20. Лежандровы особенности

Отложим вдоль каждой внутренней нормали к эллипсу отрезок длины t. Свободные концы этих отрезков образуют кривую, называемую *фронтом* (возмущения, распространяющегося внутрь эллипса в течение времени t).

Если t мало́, фронт гладкий, но для бо́льших t фронт имеет особенности (4 точки возврата). Такие же особенности возникают на фронте, распространяющемся от близкой к эллипсу кривой. В этом параграфе строится аппарат исследования особенностей фронтов — теория лежандровых особенностей.

20.1. Контактные многообразия. Наиболее общее определение фронта дается в терминах геометрии контактной структуры.

Контактной структурой на многообразии называется поле гиперплоскостей *), удовлетворяющее следующему условию максимальной неинтегрируемости: если α — 1-форма, локально задающая данное поле гиперплоскостей (как поле своих нулевых подпространств), то 2-форма $d\alpha$ на каждой плоскости $\alpha = 0$ невырождена.

Плоскости поля называются *контактными плоскостями*. Каждая 1-форма α, локально задающая поле контактных плоскостей, называется *контактной формой*. (Она определяется лишь локально и лишь с точностью до умножения на отличную от 0 функцию.) Нетрудно проверить, что условие невырожденности не зависит от выбора специальной контактной формы, а определяется лишь полем гиперплоскостей.

Поскольку невырожденные кососимметрические билинейные формы бывают лишь на четномерных пространствах, контактная структура может существовать только на нечетномерном многообразии.

Пример 1. Линейное пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$ с координатами $(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; z)$ имеет *стандартную контактную структуру*, заданную формой $\alpha = dz - y\,dx$ (неинтегрируемость очевидна).

Пример 2. Пусть V — гладкое n-мерное многообразие, $J^1(V, \mathbb{R})$ — многообразие 1-струй функций на V. Это многообразие размерности $2n + 1$ имеет естественную контактную структуру: гиперплоскости определяются как замыкания объединений касательных пространств к 1-графикам функций $f\colon V \to \mathbb{R}$ (1-график функции f — это образ отображения, сопоставляющего точке x 1-струю функции f в точке x).

Что эта конструкция определяет контактную структуру, легко проверить с помощью локальных координат в пространстве струй. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — локальные координаты на V, z — координата в $\mathbb{R}$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — значения первых частных производных функции $z = f(x)$. Тогда контактная структура J^1 локально задается формой $\alpha = dz - y\,dx$, как в примере 1.

Пример 3. Пусть B — гладкое многообразие. *Контактным элементом* на B называется гиперплоскость в касательном пространстве к B.

Множество всех контактных элементов, касающихся B в данной точке b, образует проективное пространство PT^*_bB (это — проективизация

*) Плоскостей коразмерности один в касательных пространствах.

кокасательного пространства B в b). Множество всех контактных элементов на B образует *многообразие контактных элементов* размерности $2\dim B - 1$ (пространство проективного кокасательного расслоения B, обозначаемое PT^*B). На PT^*B имеется естественная контактная структура, определяемая так: скорость движения контактного элемента принадлежит контактной гиперплоскости, если скорость движения точки приложения принадлежит самому контактному элементу.

Теорема Дарбу (о контактных структурах). *Все контактные структуры на многообразии фиксированной размерности локально эквивалентны* (*диффеоморфны*).

Иными словами, *в окрестности каждой точки контактного многообразия контактная структура задается в подходящих координатах формой* $dz - y\,dx$.

Теорема Дарбу (о контактных формах). *Все контактные формы на многообразии фиксированной размерности локально эквивалентны* (*диффеоморфны*), *т. е. в подходящих координатах имеют вид* $dz - y\,dx$.

Доказательство. Теорема о структурах вытекает из теоремы о формах, которую мы и будем доказывать. Пусть α — контактная форма. Рассмотрим кососимметрическую 2-форму $d\alpha$ в фиксированном касательном пространстве. Ввиду контактности формы α форма $d\alpha$ имеет одномерное 0-пространство (множество векторов ξ, для которых $d\alpha(\xi, \cdot) \equiv 0$). Рассмотрим поле 0-пространств формы α. Отрезки интегральных кривых этого поля в окрестности U рассматриваемой точки образуют многообразие V четной размерности. Рассмотрим проектирование $\rho\colon U \to V$ вдоль интегральных кривых. *Форма* $d\alpha$ *проектируется в некоторую* 2*-форму* ω *на* V. Действительно, рассмотрим двумерную площадку σ на V, трехмерный цилиндр $\rho^{-1}\sigma$ и цилиндрическую 3-цепь c, образованную частью этого цилиндра между двумя сечениями σ' и σ'' расслоения ρ над σ. Интеграл формы $d\alpha$ по боковой поверхности цилиндра c равен нулю, поэтому интегралы формы $d\alpha$ по σ' и по σ'' одинаковы; их общее значение и есть значение интеграла формы ω по σ. При этом $d\alpha = \rho^*\omega$.

Форма ω замкнута и невырождена (ибо сужение $d\alpha$ на трансверсаль к интегральным кривым обладает этими свойствами ввиду контактности формы α). По симплектической теореме Дарбу на V существуют такие (локальные) координаты (p, q), что $\omega = -\sum dp_i \wedge dq_i$. Положим $x_i = \rho^* q_i$, $y_i = \rho^* p_i$, тогда $\rho^*(p\,dq) = y\,dx$. Следовательно, $d(-y\,dx) = d\alpha$. Значит, $d(\alpha + y\,dx) = 0$. Определим локальную функцию z на U соотношением $\alpha + y\,dx = dz$. Легко проверить, что функции (x, y, z) определяют искомую систему координат: $\alpha = dz - y\,dx$.

З а м е ч а н и е. Иногда форма α и симплектическое фактормногообразие V определены и в целом. Например, рассмотрим сферическое кокасательное расслоение евклидова пространства $ST^*\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n : |y| = 1\}$ с контактной формой, индуцированной из $y\,dx$. Фактормногообразие V есть многообразие ориентированных прямых в $\mathbb{R}^n$; его симплектическая структура уже описана в п. 18.2.

20.2. Лежандровы подмногообразия. Подмногообразие контактного многообразия называется *интегральным*, если его касательная плоскость в каждой точке принадлежит контактной плоскости.

Размерность всякого интегрального многообразия меньше половины размерности контактного многообразия (это вытекает из невырожденности контактной формы на контактной плоскости). Интегральные многообразия наибольшей возможной размерности (равной половине размерности контактной плоскости) называются *лежандровыми* подмногообразиями контактного многообразия.

П р и м е р 1. Плоскость $x = \text{const}$, $z = \text{const}$ в стандартном контактном пространстве с координатами x, y, z и формой $\alpha = dz - y\,dx$ лежандрова.

П р и м е р 2. 1-график любой функции является лежандровым подмногообразием контактного многообразия 1-струй функций.

П р и м е р 3. Множество всех контактных элементов, касающихся данной гиперповерхности многообразия B, является лежандровым подмногообразием пространства проективного кокасательного расслоения PT^*B.

Лежандрово многообразие образуют также все контактные элементы, касающиеся фиксированного подмногообразия любой положительной коразмерности в B (например, точки). В частности, слои проективного кокасательного расслоения $PT^*B \to B$ лежандровы.

П р е д л о ж е н и е. *При локальном проектировании ρ контактного многообразия на симплектическое, построенном в п.* 20.1, *лежандровы подмногообразия контактного пространства локально диффеоморфно отображаются в лагранжевы подмногообразия симплектического пространства. Все лагранжевы подмногообразия симплектического пространства получаются этим способом. Лежандров росток однозначно определяется одной своей точкой и своим лагранжевым образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Локальная диффеоморфность вытекает из трансверсальности 0-пространств форм α и $d\alpha$. Лагранжевость образа следует из того, что сужение $d\alpha$ на лежандрово подмногообразие равно 0. Остальное очевидно $\left(z = \int y\,dx\right)$.

С л е д с т в и е. *Всякий росток лежандрова подмногообразия в $(2n+1)$-мерном контактном пространстве с контактной формой*

$\alpha = dz - y\,dx$ задается одной из 2^n производящих функций S по формулам

$$y_I = \partial S/\partial x_I, \quad x_J = -\partial S/\partial y_J, \quad z = S(x_I, y_J) + \langle x_I, y_J\rangle,$$

где (I, J) — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$ на непересекающиеся подмножества.

20.3. Лежандровы расслоения. Расслоение $\pi\colon E^{2n+1} \to B^{n+1}$ называется *лежандровым*, если его пространство E снабжено контактной структурой, а слои — лежандровы подмногообразия.

Пример 1. *Стандартное лежандрово расслоение* $\mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\alpha = dz - y\,dx$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$.

Пример 2. Отображение забывания производных $J^1(M, \mathbb{R}) \to J^0(M, \mathbb{R}) = M \times \mathbb{R}$.

Пример 3. *Проективное кокасательное расслоение* $\pi\colon PT^*B \to B$.

Пример 4. Пространство $PT^*\mathbb{R}^n$ контактных элементов в $\mathbb{R}^n$ лежандрово расслоено еще и по-другому, над *пространством гиперплоскостей в* $\mathbb{R}^n$. Расслоение сопоставляет контактному элементу содержащую его плоскость. Аналогичным образом, *ориентированные* контактные элементы образуют расслоение над многообразием *ориентированных* гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$.

После факторизации, указанной в доказательстве теоремы Дарбу (см. замечание в п. 20.1), это лежандрово расслоение переходит в лагранжево, а именно в кокасательное расслоение сферы (проверьте!).

Теорема. *Все лежандровы расслоения фиксированной размерности локально контактно диффеоморфны* (*локально = в окрестности каждой точки пространства расслоения*).

Доказательство. Пусть $\pi\colon E^{2n+1} \to B^{n+1}$ — лежандрово расслоение, α — контактная 1-форма, K — контактная плоскость в точке из E, F — касательная плоскость к слою в этой точке ($\dim K = 2n$, $\dim F = n$). По условию F лежит в K, поэтому образ плоскости K при отображении проектирования $\pi_*\colon TE \to TB$ имеет размерность n, т. е. является контактным элементом на B.

Тем самым мы построили отображение из E в PT^*B, переводящее слои расслоения π в слои проективного кокасательного расслоения над B. Покажем, что это отображение — локальный диффеоморфизм.

Введем на B локальные координаты $(q_1, \ldots, q_n, r)$ так, чтобы рассматриваемая точка была началом координат и рассматриваемый контактный элемент имел уравнение $dr = 0$. На E определим локальные координаты $(x_i = \pi^* q_i,\ z = \pi^* r,\ p_1, \ldots, p_n)$ с началом в изучаемой точке.

Контактная форма на E обращается в 0 при dx_i и dz, равных нулю, а в нуле пропорциональна dz. Поэтому можно выбрать ее в виде $\alpha = dz - \sum y_i\,dx_i$, где функции y_i от (x, p, z) равны 0 в нуле.

В этих обозначениях доказываемая невырожденность означает отличие от нуля якобиана $\det(\partial y/\partial p)$ в нуле. Если бы этот определитель был равен 0, то существовал бы такой ненулевой вектор ξ, касательный к слою в нуле (так что $dx(\xi) = 0$, $dz(\xi) = 0$), что $dy(\xi) = 0$. Но тогда для любого вектора η выполнялось бы равенство $d\alpha(\eta, \xi) = -\sum(dy_i \wedge dx_i)(\xi, \eta) = 0$, вопреки невырожденности формы $d\alpha$ на K. Итак, наше отображение — локальный диффеоморфизм.

Одновременно мы доказали, что функции y_i вместе с x и z образуют на E локальную координатную систему. В этой системе координат $\alpha = dz - y\,dx$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$, что и доказывает локальную контактную эквивалентность нашего расслоения стандартному.

20.4. Лежандровы эквивалентности. *Лежандровой эквивалентностью* двух лежандровых расслоений называется диффеоморфизм пространств расслоения, переводящий слои первого расслоения в слои второго.

Пример. Рассмотрим проективное кокасательное расслоение $PT^*B \to B$. Каждый диффеоморфизм базы действует на контактные элементы на ней. Возникающее отображение пространства расслоения PT^*B в себя является лежандровой эквивалентностью (каждый слой она отображает проективно).

Теорема. *Всякая лежандрова эквивалентность ростка проективного кокасательного расслоения в себя индуцирована локальным диффеоморфизмом базы.*

Доказательство. Лежандрова эквивалентность индуцирует диффеоморфизм базы. Если этот диффеоморфизм тождественный, то каждая контактная плоскость остается на месте (ибо остается на месте контактный элемент, в который она проектируется, а контактные элементы разных контактных плоскостей разные). Следовательно, лежандрова эквивалентность однозначно определяется индуцированным диффеоморфизмом базы.

Замечание. Структура любого лежандрова расслоения определяет на слоях структуру локально-проективного пространства; всякая лежандрова эквивалентность задает проективные преобразования слоев и индуцирована диффеоморфизмом базы (ср. две последние теоремы).

20.5. Лежандровы отображения. Рассмотрим вложение в пространство лежандрова расслоения $\pi\colon E \to B$ еще одного лежандрова подмногообразия ($i\colon L \to E$). Сужение проектирования π на L, т. е. $\pi \circ i\colon L \to B$, называется *лежандровым отображением*.

Лежандровы отображения — это отображения в многообразие на 1 большего числа измерений, чем прообраз. Они образуют специальный класс отображений n-мерных многообразий в $(n+1)$-мерные: особенности общего положения в классе всех отображений и в классе лежандровых отображений различны.

Пример 1. Рассмотрим стандартное расслоение $\pi\colon \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\pi(x, y, z) = (x, z)$, с контактной структурой $\alpha = dz - y\,dx$. Определим лежандрово многообразие с производящей функцией S формулой (ср. п. 20.2, I пусто)

$$x = \partial S/\partial y, \quad z = \langle x, y\rangle - S(y).$$

Проекция π этого лежандрова многообразия на пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ задает лежандрово отображение. Образ этого отображения является гиперповерхностью в $\mathbb{R}^{n+1}$ (вообще говоря, особой).

В случае, когда функция S выпукла, образ гладкий и является графиком функции $z = T(x)$. Эта функция T называется *преобразованием Лежандра* исходной функции S.

Пример 2. *Тангенциальное отображение*, сопоставляющее каждой точке гиперповерхности в $\mathbb{R}^n$ касательную гиперплоскость в этой точке, лежандрово (соответствующее лежандрово расслоение описано в примере 4 п. 20.3). Лежандрово также аналогичное отображение *ориентированной* гиперповерхности в многообразие *ориентированных* гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. При факторизации, указанной в доказательстве теоремы Дарбу (см. замечание в п. 20.1), это лежандрово отображение переходит в лагранжево, а именно в гауссово отображение исходной гиперповерхности (почему?).

Эквивалентность лежандровых отображений определяется как лежандрова эквивалентность соответствующих лежандровых расслоений, переводящая первое лежандрово подмногообразие во второе.

Можно доказать, что всякое лежандрово отображение локально эквивалентно отображению из примера 1. В этом смысле все лежандровы особенности сводятся к особенностям преобразований Лежандра (причем совпадают также явления общего положения и т. д.)

20.6. Фронты. Образ лежандрова отображения называется *фронтом* (отображаемого лежандрова многообразия).

Пример. Рассмотрим гладкое подмногообразие (любой положительной коразмерности) в евклидовом пространстве. Отложим по каждой нормали отрезок длины t. Свободные концы построенных отрезков образуют фронт (как мы вскоре докажем).

Более общим образом, рассмотрим вместо евклидовой длины любой «геометрический функционал» вариационного исчисления, т. е. любую

функцию H на пространстве кокасательного расслоения гладкого многообразия B, однородную первой степени однородности по импульсам:

$$H\colon (T^*B \setminus B) \to \mathbb{R}, \quad H(\lambda\xi) = \lambda H(\xi) \ \ \forall \lambda > 0.$$

Мы предположим, что H не обращается в нуль вне нулевого сечения.

Рассмотрим множество E ненулевого уровня функции H (заданное уравнением $H = h$, $h \neq 0$). Многообразие E трансверсально слоям расслоения $\pi\colon T^*B \setminus B \to PT^*B$. Контактная структура многообразия контактных элементов PT^*B переносится локальным диффеоморфизмом $\pi|_E$ на многообразие E.

Т е о р е м а. *Фазовый поток уравнений Гамильтона на E сохраняет контактную структуру.*

С л е д с т в и е. *Фазовый поток уравнений Гамильтона на E переводит лежандровы подмногообразия в лежандровы.*

П р и м е р. Пусть B — риманово пространство, $H = |p|$, $h = 1$. В этом случае E — сферическое кокасательное расслоение, т. е. многообразие трансверсально ориентированных контактных элементов на B. Фазовый поток за время t сдвигает каждый контактный элемент на расстояние t вперед по геодезической, перпендикулярной элементу, сохраняя перпендикулярность. Для любого подмногообразия в B касающиеся подмногообразия трансверсально ориентированные контактные элементы образуют лежандрово подмногообразие. По следствию их сдвиги через время t также образуют лежандрово подмногообразие.

Проекция этого лежандрова многообразия на B есть эквидистанта исходного многообразия (множество свободных концов отрезков геодезических нормалей длины t к исходному многообразию). Следовательно, *эквидистанта является фронтом лежандрова многообразия*.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что все лежандровы особенности реализуются уже в случае эквидистант гиперповерхностей в евклидовом пространстве. В этом смысле исследование лежандровых особенностей совпадает с исследованием эквидистант (можно показать, что близким лежандровым особенностям соответствуют эквидистанты близких гиперповерхностей и обратно, так что особенности общего положения для фронтов лежандровых многообразий те же, что для эквидистант).

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. 1°. Индуцированная с PT^*B контактная структура на E задается сужением на E канонической 1-формы $p\,dq$ на T^*B. Покажем, что *косоортогональное дополнение к нулям этой формы есть касательное пространство к слою расслоения* π (в точках пространства T^*B, не принадлежащих нулевому сечению кокасательного расслоения).

Действительно, форма $p\,dq$ обращается в нуль вдоль любой кривой, π-проекция которой интегральна для контактной структуры. Поэтому интеграл формы симплектической структуры $dp \wedge dq$ вдоль любой площадки, проектирующейся в интегральную кривую, равен нулю. Следовательно, гиперплоскость нулей формы $p\,dq$ и касательная к слою π косоортогональны и, значит, являются косоортогональными дополнениями друг друга.

2°. *Фазовый поток функции Гамильтона H на $T^*B \setminus B$ коммутирует с умножением всех кокасательных векторов на положительную постоянную.*

Действительно, при таком растяжении вектора симплектическая структура $dp \wedge dq$ и функция Гамильтона растягиваются в одинаковое число раз, следовательно, векторное поле Гамильтона не меняется.

3°. Согласно 1° контактная структура на E определена в терминах симплектической структуры на $T^*B \setminus B$ и поля касательных к слоям расслоения π. Фазовый поток с функцией Гамильтона H сохраняет подмногообразие E, симплектическую структуру и (согласно 2°) поле касательных к слоям π. Следовательно, он сохраняет и поле косоортогональных дополнений, т. е. контактную структуру на E. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Фронт лежандрова многообразия имеет, вообще говоря, коразмерность один в объемлющем пространстве (ростки, для которых эта коразмерность больше, образуют множество коразмерности бесконечность в пространстве всех лежандровых ростков).

Лежандрово подмногообразие в PT^*B, имеющее фронтом гладкую гиперповерхность в B, однозначно восстанавливается по этой гиперповерхности: это множество ее касательных плоскостей.

В этом смысле действие лежандровой эквивалентности на лежандрову особенность сводится к действию соответствующего диффеоморфизма базы на фронт. Это замечание применимо не только к отображениям с гладкими фронтами, но и к таким, у которых множество точек регулярности плотно в исходном лежандровом многообразии (последнее условие нарушается лишь для лежандровых ростков, образующих множество коразмерности бесконечность в пространстве всех лежандровых ростков).

20.7. Производящие семейства. В то время как лагранжевы многообразия связаны с функциями, а лагранжевы особенности — с особенностями семейств функций, лежандровы многообразия связаны с гиперповерхностями, а лежандровы особенности — с особенностями семейств гиперповерхностей.

Рассмотрим росток лежандрова подмногообразия пространства проективного кокасательного расслоения, трансверсального слоям. Такое многообразие имеет неособый фронт. Этот фронт называется *производящей гиперповерхностью* исходного ростка.

Лежандровы эквивалентности действуют на производящую гиперповерхность как диффеоморфизмы базы.

Лежандровы производящие семейства гиперповерхностей строятся из производящих гиперповерхностей так же, как лагранжевы производящие семейства — из производящих функций.

Пусть $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ — «вспомогательное расслоение»; мы будем называть $\mathbb{R}^{k+l}$ *большим пространством*, *а* $\mathbb{R}^l$ *— базой*. Контактный элемент к большому пространству либо пересекает касательную плоскость к слою вспомогательного расслоения по гиперплоскости, либо содержит ее целиком. Во втором случае контактный элемент называется ρ-*особым*. Все ρ-особые элементы образуют в многообразии всех контактных элементов $PT^*\mathbb{R}^{k+l}$ подмногообразие. Мы назовем его *смешанным пространством* для вспомогательного расслоения ρ и обозначим через PA. Многообразие PA естественно расслаивается над большим пространством (отображение расслоения определяется проекцией ρ). Слой этого расслоения изоморфен кокасательному пространству базы расслоения ρ (как многообразие всех контактных элементов большого пространства, содержащих фиксированный контактный элемент слоя расслоения ρ).

О п р е д е л е н и е. Лежандрово многообразие, заданное производящей гиперповерхностью, называется ρ-*правильным*, если оно трансверсально смешанному пространству PA вспомогательного расслоения ρ.

Т е о р е м а. 1°. *Естественная проекция пересечения ρ-правильного лежандрова многообразия со смешанным пространством PA вспомогательного расслоения ρ в пространство проективного кокасательного расслоения базы вспомогательного расслоения является иммерсией лежандрова многообразия.*

2°. *Всякий росток лежандрова подмногообразия проективного кокасательного расслоения базы получается этой конструкцией из некоторого порожденного производящей гиперповерхностью ρ-правильного лежандрова подмногообразия подходящего вспомогательного расслоения ρ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о 1°. Рассмотрим в точке пересечения следующие плоскости в касательном пространстве большого проективного расслоения:

Ω — контактная гиперплоскость (размерности $2(k+l)-2$);

a — касательная плоскость к пространству PA (размерности $k+2l$);

f — касательная плоскость к слою расслоения $PA \to T^*\mathbb{R}^l$ (размерности k);

τ — касательная плоскость к рассматриваемому лежандрову многообразию (размерности $k+l-1$).

Легко видеть, что a и f не лежат внутри Ω, поэтому их пересечения с Ω имеют размерности

$$\dim(a \cap \Omega) = k + 2l - 1, \quad \dim(f \cap \Omega) = k - 1.$$

Пространство Ω снабдим линейной симплектической структурой, заданной сужением дифференциала контактной формы на Ω.

Предложение. *Пространства $a \cap \Omega$ и $f \cap \Omega$ являются косоортогональными дополнениями друг друга.*

Поскольку эти подпространства имеют в Ω дополнительные размерности, достаточно доказать их косоортогональность.

Легко построить координаты (q, z), $q \in \mathbb{R}^m$, $m = l - 1$, в $\mathbb{R}^l$ и локальные координаты (p, q, z) в $PT^*\mathbb{R}^l$, координаты (x, q, z) в $\mathbb{R}^{k+l}$ и локальные координаты $(y, p; x, q, z)$ в $PT^*\mathbb{R}^l$ так, что: 1) контактные формы имеют вид $dz - p\,dq$ и $\alpha = dz - y\,dx - p\,dq$ соответственно; 2) PA имеет уравнение $y = 0$; 3) расслоение $PA \to PT^*\mathbb{R}^l$ записывается в виде $(p, x, q, z) \to (p, q, z)$; 4) на плоскости Ω выполнены равенства $p = 0$, $y = 0$, $-d\alpha = \sum dy_i \wedge dx_i + \sum dp_i \wedge dq_i$. Пусть ξ — вектор из $a \cap \Omega$, η — вектор из $f \cap \Omega$. Во введенных обозначениях имеем

$$dy_i(\xi) = 0, \quad dp_i(\xi) = 0, \quad dq_i(\xi) = 0, \quad dy_i(\eta) = 0.$$

Следовательно, $d\alpha(\xi, \eta) = 0$, что и доказывает утверждение.

Мы будем обозначать косоортогональное дополнение в Ω знаком ann. Имеем $\operatorname{ann}(a \cap \Omega) = (f \cap \Omega)$. Поскольку τ касается лежандрова многообразия, $\alpha|\tau = 0$, $d\alpha|\tau = 0$, $\dim \Omega = 2 \dim \tau$. Поэтому $\tau \subset \Omega$ и $\operatorname{ann} \tau = \tau$.

По условию $\tau + (a \cap \Omega) = \Omega$, откуда $(\operatorname{ann} \tau) \cap (\operatorname{ann}(a \cap \Omega)) = 0$. Итак, $\tau \cap (f \cap \Omega) = 0$, следовательно, $\tau \cap f = 0$. Это доказывает невырожденность проектирования из утверждения 1°. Лежандровость образа следует из того, что на PA выполнено равенство $y = 0$, поэтому форма α сводится к $dz - p\,dq$.

Доказательство 2°. Будем пользоваться локальными координатами (p, q, z) в $PT^*\mathbb{R}^l$, введенными выше. Предположим, что дан лежандров росток в точке $p = 0$, $q = 0$, $z = 0$. Такой лежандров росток диффеоморфно проектируется в пространство с координатами (p, q) вдоль оси z. На образе $dz = p\,dq$, поэтому $d(p\,dq) = 0$. Итак, образ — лагранжев росток в координатном симплектическом пространстве $\mathbb{R}^{2(l-1)}$. Исходный лежандров росток является графиком функции $z = \int p\,dq$ на этом лагранжевом ростке.

Но всякий лагранжев росток задается одной из 2^m производящих функций:

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad I \cap J = \varnothing, \quad I \cup J = \{1, \ldots, l-1\}.$$

Следовательно, наш лежандров росток задается формулами вида

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J \rangle.$$

Рассмотрим теперь вспомогательное расслоение $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, где k равно числу патологических аргументов (числу элементов множества J). Будем обозначать координаты в $\mathbb{R}^{k+l}$ и $\mathbb{R}^l$, как в 1°: $\rho(x, q, z) = (q, z)$. Рассмотрим гиперповерхность в большом пространстве, заданную уравнением

$$z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle.$$

Эта гиперповерхность производит лежандрово многообразие

$$\{y, p;\ x, q, z\colon\ y = \partial S/\partial x + q_J,\ \ p_I = \partial S/\partial q_I,\ \ p_J = x,\ \ z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle\}.$$

Это многообразие трансверсально смешанному пространству PA с уравнением $y = 0$, так как $\partial y/\partial q_J = E$. Проекция пересечения с PA в $PT^*\mathbb{R}^l$ есть

$$\{p, q, z\colon\ \exists x\colon\ q_J = -\partial S/\partial x,\ \ p_I = \partial S/\partial q_I,\ \ z = S(q_I, x) + \langle x, q_J\rangle,\ \ x = p_J\},$$

т. е. исходный лежандров росток. Теорема доказана.

О п р е д е л е н и е. Гиперповерхность большого пространства, через которую лежандров росток в пространстве проективного кокасательного расслоения базы вспомогательного расслоения ρ выражается, как в п. 2°, называется *производящим семейством гиперповерхностей* для этого лежандрова ростка (элементы производящего семейства — это пересечения указанной гиперповерхности со слоями расслоения ρ; это, вообще говоря, особые гиперповерхности в слоях, но их объединение неособо).

З а м е ч а н и е. Гиперповерхность Γ в пространстве расслоения $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$ является минимальным производящим семейством, если сужение ρ на Γ имеет трансверсальную особенность Σ^k в смысле § 2.

20.8. Лежандрова эквивалентность лежандровых особенностей и эквивалентность производящих семейств гиперповерхностей.

О п р е д е л е н и е. *Расслоенной эквивалентностью* производящих семейств гиперповерхностей Γ_1, Γ_2 в пространстве расслоения $\rho\colon \mathbb{R}^{k+l} \to \mathbb{R}^l$, $\rho(x, \lambda) = \lambda$, называется расслоенный диффеоморфизм $(x, \lambda) \mapsto (h(x, \lambda), \varphi(\lambda))$, переводящий Γ_1 в Γ_2.

Т е о р е м а. 1°. *Лежандровы ростки, определенные расслоенно эквивалентными производящими семействами гиперповерхностей, лежандрово эквивалентны.*

2°. *Все лежандровы ростки, лежандрово эквивалентные данному, допускают задание производящими семействами гиперповерхностей, расслоенно эквивалентными данному.*

3°. *Все производящие семейства гиперповерхностей для фиксированного лежандрова ростка, у которых размерность слоев вспомогательного расслоения имеет минимальное возможное значение, расслоенно эквивалентны.*

Доказательство. 1°. Расслоенная эквивалентность семейств гиперповерхностей индуцирует лежандрову эквивалентность проективного кокасательного расслоения большого пространства (т. е. $PT^*\mathbb{R}^{k+l}$), сохраняющую смешанное пространство PA. Лежандрово многообразие, порожденное в $PT^*\mathbb{R}^{k+l}$ первой гиперповерхностью, переходит при этом в лежандрово многообразие, порожденное второй. Поэтому пересечение первого с PA переходит в пересечение второго с PA.

Расслоенная эквивалентность порождает диффеоморфизм базы $\mathbb{R}^l$. Индуцированная им лежандрова эквивалентность $PT^*\mathbb{R}^l$ переводит проекцию первого пересечения в проекцию второго, что и доказывает утверждение 1°.

2°. Пусть дана лежандрова эквивалентность в $PT^*\mathbb{R}^l$, переводящая лежандров росток с производящим семейством гиперповерхностей $\Gamma \subset \mathbb{R}^{k+l}$ в новый лежандров росток.

Эта лежандрова эквивалентность индуцирована диффеоморфизмом базы, $\lambda \mapsto \varphi(\lambda)$. Отображение $(x, \lambda) \mapsto (x, \varphi(\lambda))$ задает искомую расслоенную эквивалентность.

3°. Из формул доказательства предыдущей теоремы следует, что при введенных там обозначениях координат лежандров росток, заданный производящим семейством гиперповерхностей $z = F(x, q)$ в точке 0 (а в таком виде локально записывается любое производящее семейство), есть росток в точке нуль многообразия

$$\{p, q, z\colon \exists x\colon \partial F/\partial x = 0,\ p = \partial F/\partial q,\ z = F(x, q)\}. \qquad (**)$$

При этом нетрудно проверить, что выбор координат z и $q_1, \ldots, q_{l-1}$ в $\mathbb{R}^l$ можно провести для фиксированного лежандрова ростка раз и навсегда, независимо от того, каким производящим семейством гиперповерхностей он будет задаваться: требуется лишь, чтобы начальная точка ростка имела координаты $z = 0$, $p = 0$, $q = 0$.

Сравнивая формулу $(**)$ с формулой $(*)$ п. 19.1, мы приходим к следующему выводу.

Предложение. *Производящее семейство гиперповерхностей лежандрова ростка* $(**)$ *является графиком производящего семейства функций* $(*)$ *лагранжева ростка, получающегося из данного лежандрова ростка проектированием вдоль оси* z. *Обратно, график производящего семейства функций для этого лагранжева ростка является производящим семейством гиперповерхностей для исходного ростка. Размерность слоя вспомогательного расслоения в лежандровом случае минимальна, если и только если она минимальна в лагранжевом случае.*

Действительно: 1) условия ρ-правильности как в лежандровом, так и в лагранжевом случае есть условие нормальной разрешимости уравнения

$\partial F/\partial x = 0$ относительно x; 2) минимальная размерность слоя равна размерности ядра производной лагранжева (лежандрова) отображения. Эти размерности совпадают, так как вдоль лежандрова многообразия z — гладкая функция от (x, q).

Из предложения следует, что производящие функции F_1, F_2 для двух любых минимальных производящих семейств гиперповерхностей $z = F_1(x, q)$, $z = F_2(x, q)$ одного лежандрова ростка R^+-эквивалентны: $F_2(x, q) = F_1(h(x, q), q) + \Phi(q)$. Следовательно, их графики расслоенно эквивалентны (относительно расслоения $\rho(x, q, z) = (q, z)$). Это доказывает пункт 3°.

З а м е ч а н и е. То же доказательство позволяет описать все (не обязательно минимальные) производящие семейства гиперповерхностей для данного лежандрова ростка: это графики R^+-стабильно эквивалентных производящих семейств соответствующего лагранжева ростка.

О п р е д е л е н и е. Пусть $\Gamma \subset M$ — гладкая гиперповерхность с невырожденным уравнением $f = 0$. *Удвоением M с ветвлением вдоль* Γ называется гиперповерхность в прямом произведении $M \times \mathbb{R}$, заданная уравнением $u^2 = f(v)$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in M$. [В комплексном случае это — двулистное разветвленное накрытие M с ветвлением вдоль Γ; вещественный тип удвоения зависит от выбора стороны Γ.]

Два семейства гиперповерхностей (во вспомогательных расслоениях с общей базой) называются *стабильно расслоенно эквивалентными*, если они получаются из одного и того же семейства последовательностями удвоений (при каждом удвоении совершается переход от вспомогательного расслоения $\rho(v) = w$ к вспомогательному расслоению $\rho(u, v) = w$).

В этих терминах мы можем окончательно сформулировать предыдущие результаты так.

Т е о р е м а. *Два ростка производящих семейств гиперповерхностей задают лежандрово эквивалентные ростки, если и только если эти семейства гиперповерхностей расслоенно стабильно эквивалентны.*

З а м е ч а н и е. Проведенное выше исследование лежандровых особенностей основано на *функторе контактизации*, сопоставляющем ростку симплектического многообразия росток контактного многообразия на 1 большей размерности, лагранжевым подмногообразиям первого — лежандровы второго и т. д. Имеется также *функтор симплектизации*, сопоставляющий ростку контактного многообразия росток симплектического многообразия на 1 большей размерности. Попытка свести лежандровы особенности к лагранжевым путем симплектизации имеется в статье [130].

§ 21. Классификация лагранжевых и лежандровых особенностей

Теория производящих семейств сводит исследование лагранжевых и лежандровых особенностей к исследованию особенностей семейств функций и гиперповерхностей. Развитый в предыдущих главах аппарат исследования особенностей функций дает поэтому значительную информацию о каустиках и фронтах. Ниже приведены результаты, полученные в этом направлении.

21.1. Лагранжева устойчивость.

Определение. Лагранжево отображение называется *лагранжево устойчивым*, если всякое близкое лагранжево отображение ему лагранжево эквивалентно (в некомпактном случае близость, как всегда, понимается в смысле топологии Уитни).

Росток лагранжева отображения в точке называется *лагранжево устойчивым*, если для всякого отображения с данным ростком существует такая окрестность в пространстве лагранжевых отображений (в топологии сходимости с конечным числом производных на каждом компакте) и такая окрестность исходной точки, что всякое принадлежащее первой окрестности лагранжево отображение имеет во второй окрестности такую точку, что росток этого отображения в этой точке лагранжево эквивалентен исходному.

Из результатов гл. I и § 18 вытекает следующая теорема.

Теорема. *Росток лагранжева отображения, заданного производящим семейством функций $F(x, \lambda)$ с параметром λ, лагранжево устойчив, если и только если деформация F функции $f = F(\cdot, 0)$ R^+-версальна* (*или если однопараметрическое расширение $F(x, \lambda) + \lambda_0$ является R-версальной деформацией*).

Следствие 1. *Росток в нуле лагранжева отображения $(\varkappa, \lambda) \mapsto \lambda_0$, заданный лагранжевым многообразием*

$$\{\lambda, \varkappa\colon \exists x\colon \partial F/\partial x = 0,\ \varkappa = \partial F/\partial \lambda\},$$

где

$$\operatorname{rank}(\partial^2 F/\partial x^2,\ \partial^2 F/\partial x \partial \lambda)_0 = \dim\{x\},$$

лагранжево устойчив, если и только если классы ростков функций $\{1, g_1, \ldots, g_l\ \ (g_i(x) = \partial F/\partial \lambda_i|_{\lambda=0})\}$ порождают линейное пространство

$$Q_f = \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_k]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_k),$$

где

$$f(x) = F(x, 0).$$

Следствие 2. *Всякий устойчивый росток лагранжева отображения записывается в подходящих координатах при помощи*

производящей функции вида

$$S(q_I, p_J) = f(p_J) + \langle q_I, g_I(p_J)\rangle,$$

где $\{1, p_j\ (j \in J), g_i\ (i \in I)\}$ *порождают* Q_f *над* $\mathbb{R}$, *причем число элементов множества патологических аргументов равно размерности ядра производной отображения в нуле.*

Здесь лагранжево многообразие задается уравнениями $p_I = \partial S/\partial q_I$, $q_J = -\partial S/\partial p_J$, лагранжево расслоение — проектированием $(p, q) \mapsto q$.

Доказательство. По формуле п. 19.3 производящее семейство, соответствующее S, имеет вид

$$F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_I, x\rangle = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \lambda_j x_j$$
$$(i \in I,\ j \in J).$$

Применяя следствие 1, получаем условие устойчивости. Поскольку всякая R^+-версальная деформация R^+-эквивалентна деформации указанного вида, следствие 2 доказано.

Пример 1. Пусть $f(p) = p_1^3$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Тогда $n \geqslant 1$, $S = p_1^3$. Отображение задается формулой $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (-3p_1^2, q_2, \ldots$ $\ldots, q_n)$. Это — лагранжева складка. При $n = 1$ лагранжево отображение общего положения имеет лишь такие особенности.

Пример 2. Пусть $f(p) = p_1^4$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Тогда $n \geqslant 2$, $S = \pm p_1^4 + p_1^2 q_2$. Отображение задается формулой $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto$ $\mapsto (\mp 4p_1^3 - 2p_1 q_2, q_2, \ldots, q_n)$. Это — лагранжева сборка в 0.

Можно доказать, что при $n = 2$ лагранжевы отображения общего положения имеют лишь особенности, лагранжево эквивалентные росткам примеров 1 и 2 в нуле, т. е. лишь складки и сборки. Знак при p_1^4 существен: в лагранжевом случае имеется две неэквивалентных сборки.

Следствие 3. *Всякий устойчивый росток лагранжева отображения эквивалентен градиентному ростку* $(p \mapsto -\partial S/\partial p)$, *заданному ростком в нуле функции*

$$S(p) = f(p_J) + \sum (p_i + g_i(p_J))^2, \quad i \in I,$$

где g_i *— ростки, порождающие вместе с* 1 *и* $\{p_j\ (j \in J)\}$ *линейное пространство градиентной алгебры*

$$Q_f = \mathbb{R}[[p_J]]/(\partial f/\partial p_j), \quad j \in J,$$

причем число элементов множества J *можно взять равным корангу* (*размерности ядра производной лагранжева отображения в нуле*).

Доказательство. За координаты на нашем лагранжевом многообразии можно принять (p_J, q_I). В этих координатах многообразие задается

производящей функцией $S'(p_I, q_I) = S(p) + \langle p_I, q_I\rangle$ по формуле $q_J = -\partial S'/\partial p_J$, $p_I = \partial S'/\partial q_I$. Соответствующее S' производящее семейство имеет вид

$$F'(x, \lambda) = f(x) - \sum \lambda_i g_i(x) - \sum \lambda_i^2/4 + \sum \lambda_j x_j, \quad i \in I, \quad j \in J,$$

т. е. R^+-эквивалентно производящему семейству $F_0(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i g_i(x) + \sum \lambda_j x_j$, построенному по производящей функции из следствия 2.

Замечание. Производящее семейство, построенное по исходной производящей функции, имеет большее число переменных:

$$F(x, \lambda) = f(x_I) + \sum (x_i + g_i(x_I))^2 + \langle x, \lambda\rangle.$$

Оно стабильно R^+-эквивалентно F_0 (указание: положить $u_i = x_i + g_i(x_I)$).

Пример. Градиентные складки и сборки задаются ростками в нуле функций $S = p_1^3 \pm p_2^2 \pm \ldots \pm p_n^2$, $S = \varepsilon p_1^4 + (p_2 + p_1^2)^2 \pm p_3^2 \pm \ldots \pm p_n^2$, $\varepsilon = 1$ или -1. Лагранжев тип этих особенностей не зависит от выбора знаков $\pm$, но значениям $\varepsilon = 1$ и -1 отвечают лагранжево неэквивалентные градиентные отображения.

Рассмотрим росток в нуле лагранжева отображения, заданного производящей функцией $S(q_I, p_J)$ по обычным формулам

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad (p, q) \mapsto q.$$

Рассмотрим еще ростки в нуле следующих функций:

$$F(x, \lambda) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_J, x\rangle,$$
$$\Phi(x, \lambda, a) = F(x + a, \lambda),$$
$$f(x) = F(x, 0).$$

Предположим, что f имеет в нуле нуль не ниже второго порядка.

Следствие 4. *Следующие условия эквивалентны.*

1) *Рассматриваемый росток лагранжево устойчив.*

2) *Деформация F функции f R^+-версальна.*

3) *Отображение, сопоставляющее паре (a, λ) росток $\Phi(\cdot, \lambda, a)$ в нуле, трансверсально R^+-орбите ростка f в нуле.*

21.2. Описание каустик.

Теорема. *Каустика лагранжева отображения, заданного производящим семейством F, являющимся деформацией функции f, является компонентой бифуркационного множества функций, образованной значениями параметра, которым отвечают в семействе функции с вырожденными (не морсовскими) критическими точками.*

Само лагранжево отображение лево-право эквивалентно проектированию критического множества (множества всех критических точек всех функций семейства) на пространство параметров.

Доказательство непосредственно вытекает из определений.

Пусть теперь $f \in \mathfrak{m}^2$ — функция с конечнократной критической точкой 0 с нулем не ниже второго порядка в начале координат. Рассмотрим трансверсаль T в $\mathfrak{m}^2$ к R-орбите ростка f в нуле как деформацию ростка f. Эта деформация, как и всякая, индуцирована из неверсальной при некотором отображении трансверсали в базу R-миниверсальной деформации, $\varphi\colon T \to B$. Размерность B равна кратности μ особой точки f в нуле, а размерность T равна $\mu - 1$.

Мы предположим, что выбрана R-версальная деформация вида

$$\tilde{F}(x, \lambda) = F(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1}) + \lambda_\mu,$$

так что F — R^+-миниверсальная деформация. Проекция $\lambda \mapsto (\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-1})$ определяет отображение $\pi\colon B \to \Lambda$, где Λ — база R^+-миниверсальной деформации.

Т е о р е м а. *Устойчивый росток лагранжева отображения лево-право эквивалентен ростку отображения $\pi \circ \varphi\colon T \to \Lambda$ для подходящей функции f.*

Для доказательства достаточно применить предыдущую конструкцию в случае, когда F — производящее семейство данного ростка.

С л е д с т в и е 1. *Каустика устойчивого ростка голоморфного лагранжева отображения есть многообразие истинного ветвления разветвленного накрытия бифуркационного множества нулей над базой R^+-миниверсальной деформации.*

Действительно, бифуркационное множество нулей в базе R-миниверсальной деформации есть как раз $\varphi(T)$.

С л е д с т в и е 2. *Каустика устойчивого голоморфного ростка лагранжева отображения есть росток неприводимой (вообще говоря, особой) комплексной гиперповерхности, биголоморфно эквивалентной алгебраической.*

Алгебраичность вытекает из того, что версальная деформация эквивалентна полиномиальной, а неприводимость следует из неприводимости многообразия вырожденных квадратичных форм.

21.3. Классификация лагранжевых особенностей в малых размерностях. Из доказанных теорем и классификации гл. II непосредственно вытекает такой результат.

С л е д с т в и е 1. *Ростки лагранжевых отображений общего положения для многообразия размерности $n < 6$ в каждой точке*

устойчивы и принадлежат конечному числу классов лагранжевой эквивалентности.

Эти классы соответствуют простым особенностям A_μ, $\mu \geqslant 1$, D_μ, $\mu \geqslant 4$, E_μ (гл. II), для которых $\mu - 1 \leqslant n$: производящее семейство лагранжева ростка является R^+-версальной деформацией функции соответствующего типа.

Например, для $n = 1$ единственная особенность — складка (A_2), при $n = 2$, кроме складок, появляются сборки (A_3), при $n = 3$ — еще A_4 и D_4, при $n = 4$ добавляются A_5 и D_5, наконец, при $n = 5$ добавляются A_6, D_6, E_6.

З а м е ч а н и е. Ростки лагранжевых отображений многообразий размерности не менее чем 6 для открытого множества отображений общего положения в отдельных точках неустойчивы и имеют модули. Это следует из того, что класс особенностей P_8 (см. гл. II) имеет коразмерность $c = 6$.

С л е д с т в и е 2. *Ростки лагранжевых отображений общего положения для многообразий размерностей $n < 6$ в каждой точке эквивалентны росткам проекций $(p, q) \mapsto q$ лагранжевых многообразий $p_I = \partial S/\partial q_I$, $q_J = -\partial S/\partial p_J$, где*

$$
\begin{aligned}
&\textit{при } n \geqslant 1 && A_2\colon S = p_1^3;\\
&\textit{при } n \geqslant 2 \textit{ еще} && A_3\colon S = \pm p_1^4 + q_2 p_1^2;\\
&\textit{при } n \geqslant 3 \textit{ еще} && A_4\colon S = p_1^5 + q_2 p_1^3 + q_3 p_1^2,\\
& && D_4\colon S = p_1^3 \pm p_1 p_2^2 + q_3 p_1^2;\\
&\textit{при } n \geqslant 4 \textit{ еще} && A_5\colon S = \pm p_1^6 + q_2 p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_4 p_1^2,\\
& && D_5\colon S = p_1 p_2^2 \pm p_1^4 + q_3 p_1^3 + q_4 p_1^2;\\
&\textit{при } n \geqslant 5 \textit{ еще} && A_6\colon S = p_1^7 + q_2 p_1^5 + q_3 p_1^4 + q_4 p_1^3 + q_5 p_1^2,\\
& && D_6\colon S = p_1 p_2^2 \pm p_1^5 + q_3 p_1^4 + q_4 p_1^3 + q_5 p_1^2,\\
& && E_6\colon S = p_1^3 \pm p_2^4 + q_3 p_1^2 p_2 + q_4 p_1 p_2 + q_5 p_1^2.
\end{aligned}
$$

С л е д с т в и е 3. *Каустики общего положения на плоскости не имеют других особенностей, кроме точек возврата, соответствующих лагранжевым особенностям A_3. В трехмерном пространстве каустики общего положения не имеют других особенностей, кроме ребер возврата* (A_3) (рис. 55), *ласточкиных хвостов* (A_4) (рис. 56) *и точечных особенностей двух типов, соответствующих двум вещественным формам D_4: кошелька и пирамиды* (рис. 57).

Разумеется, кроме этих особенностей возможны также трансверсальные пересечения различных ветвей каустик друг с другом.

В настоящее время классификация лагранжевых особенностей общего положения доведена до случая многообразий размерности 10. При этом модули появляются, начиная с размерности 6, в бесконечном количестве: нормальные формы содержат произвольные функции, являющиеся инвариантами (функциональные модули). Список нормальных форм общих лагранжевых особенностей отображений пространств, размерность которых не превосходит 10, приведен ниже (в п. 21.7).

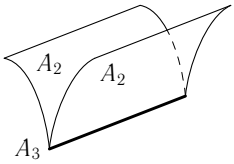


Рис. 55

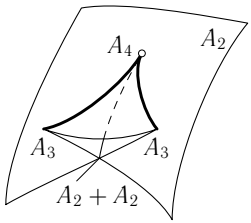


Рис. 56

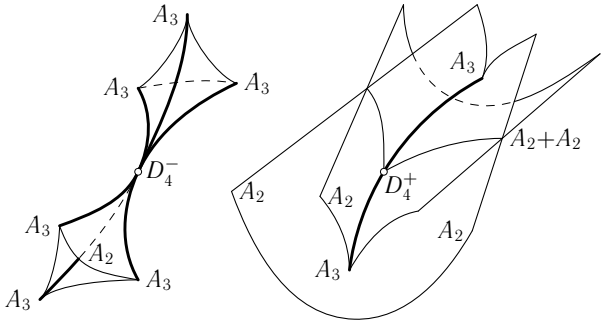


Рис. 57

Каустики можно определить для всех групп, порожденных отражениями, например для групп, соответствующих краевым особенностям B_k, C_k, F_4. Эти каустики (точнее, их части) являются особенностями асимптотик интегралов вида

$$I_h(\lambda) = \int e^{iF(x,\lambda)/h} \frac{1}{\sqrt{x_1}} \varphi(x, \lambda)\, dx_1 \dots dx_n, \quad h \to 0,$$

для фазовых функций F, зависящих общим образом от не слишком большого числа параметров.

Каустики C_4 и F_4 изображены на рис. 58 и 59 соответственно; штрихами обозначены страты краевого вырождения.

На рис. 60 изображены линии особенностей асимптотик в случае двух параметров, а на рис. 61 и 62 — в случае трех параметров.

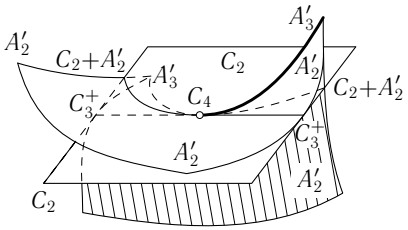


Рис. 58

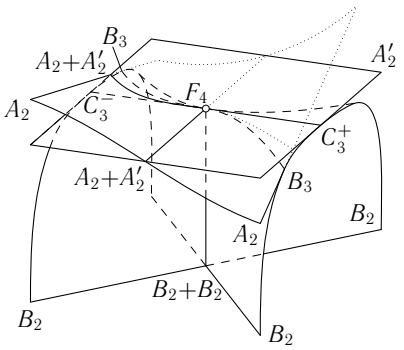


Рис. 59

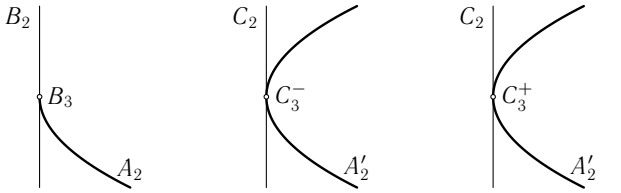


Рис. 60

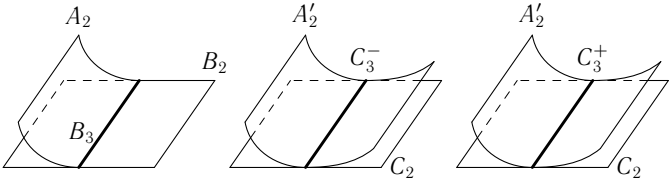


Рис. 61

21.4. Лежандрова устойчивость. Определение лежандровой устойчивости лежандровых отображений и ростков повторяет определения в лагранжевом случае, с заменой слова «лагранжев» на «лежандров».

Т е о р е м а. *Росток лежандрова отображения, заданного производящим семейством гиперповерхностей* $F(x, \lambda) = 0$ *с параметром* λ,

лежандрово устойчив, если и только если деформация F функции f (где $f(x) \equiv F(x, 0)$) V-версальна.

Здесь предполагается, что $F = 0$ — неособое уравнение гиперповерхности; по поводу V-версальности см. § 8 гл. I.

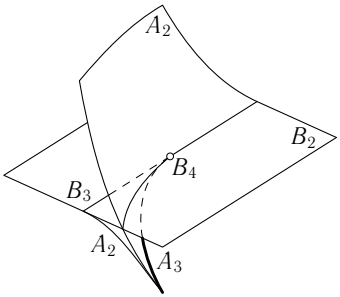


Рис. 62

Следствие 1. *Росток в нуле лежандрова отображения, заданного производящим семейством гиперповерхностей $F(x, \lambda) = 0$, $x \in \mathbb{R}^k$, $\lambda \in \mathbb{R}^l$, с параметром λ, лежандрово устойчив, если и только если классы ростков функций $\{g_1, \ldots, g_l\ (g_i(x) = \partial F/\partial x_i|_{\lambda=0})\}$ порождают линейное пространство*

$$Q_f = \mathbb{R}[[x_1, \ldots, x_k]]/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_k, f),$$

где $f(x) \equiv F(x, 0)$.

Следствие 2. *Всякий устойчивый росток лежандрова отображения записывается в подходящей системе координат при помощи производящей функции вида*

$$S(q_I, p_J) = f(p_J) + \langle q_I, g_I(p_J)\rangle,$$

где $\{p_j, j \in J\}$ и $\{g_i, i \in I\}$ порождают Q_f над $\mathbb{R}$, причем число элементов множества J патологических аргументов равно размерности ядра производной отображения в нуле.

Здесь лежандрово многообразие задается уравнениями

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J\rangle,$$

лежандрово расслоение $(p, q, z) \mapsto (q, z)$.

Пример. Пусть $f = p_1^3$, $J = \{1\}$, $I = \{2, \ldots, n\}$. Тогда $l = n + 1 \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $S = p_1^3$. Отображение задается формулой $(p_1, q_2, \ldots, q_n) \mapsto (-3p_1^2, q_2, \ldots, q_n, z = -2p_1^3)$. Для одномерного лежандрова многообразия ($n = 1$) фронт — плоская кривая с точкой возврата. Таким образом, в отличие от плоских кривых общего положения, фронты лежандровых отображений общего положения могут иметь неустранимые малым шевелением в классе фронтов особенности: точки возврата (еще одно проявление общего принципа — особость притягивает особенности). Других особенностей кривые, являющиеся фронтами лежандровых ростков общего положения, не имеют.

Следствие 3. *Фронты устойчивых ростков лежандровых отображений диффеоморфны графикам обобщенных преобразова-*

ний Лежандра гладких функций вида

$$S(p) = f(p) + \sum (p_i + g_i(p_J))^2, \quad i \in I,$$

где $\{g_i\}$ *— ростки, порождающие вместе с* 1 *и* $\{p_j, j \in J\}$ *линейное пространство алгебры* $\mathbb{R}[[p_J]]/(\partial f/\partial p_j, f)$, $j \in J$, *причем число элементов множества* J *можно взять равным корангу* (*размерности ядра производной лежандрова отображения в нуле*).

Пример 1. Пусть $J = \{1\}$, $I = \varnothing$, $f(p_1) = p_1^3$, $S = f$. График преобразования Лежандра — полукубическая парабола.

Пример 2. Пусть $J = \{1\}$, $I = \{2\}$, $f(p_1) = p_1^4$, $S = p_1^4 + (p_2 + p_1^2)^2$. График преобразования Лежандра имеет особую точку типа «ласточкин хвост» (как нетрудно убедиться).

Рассмотрим росток в нуле лежандрова отображения, заданный производящей функцией $S(q_I, p_J)$ по обычным формулам

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S + \langle p_J, q_J\rangle, \quad (p, q, z) \mapsto (q, z).$$

Рассмотрим еще ростки в 0 следующих функций:

$$F(x, \lambda, z) = S(\lambda_I, x) + \langle \lambda_J, x\rangle + z,$$
$$\Phi(x, \lambda, z, a) = F(x + a, \lambda, z),$$
$$f(x) = F(x, 0, 0).$$

Предположим, что f имеет в 0 нуль не ниже второго порядка.

Следствие 4. *Следующие условия эквивалентны.*

1) *Рассматриваемый росток лежандрово устойчив.*

2) *Деформация* F *функции* f V*-версальна.*

3) *Отображение, сопоставляющее тройке* (a, λ, z) *росток* $\Phi(\cdot, \lambda, z, a)$ *в нуле, трансверсально* V*-орбите ростка* f *в нуле.*

Доказательства теоремы и следствий 1—4 такие же, как в лагранжевом случае.

21.5. Описание фронтов.

Теорема. *Фронт лежандрова отображения, заданного производящим семейством гиперповерхностей* $F(x, \lambda) = 0$, *где* F *— деформация функции* f, *является бифуркационным множеством семейства, т. е. состоит из тех* λ, *для которых гиперповерхность семейства* $\{x\colon F(x, \lambda) = 0\}$ *особая.*

Следствие. *Фронт устойчивого голоморфного ростка лежандрова отображения есть росток* (*вообще говоря, особой*) *комплексной гиперповерхности, биголоморфно эквивалентной алгебраической.*

В случае, когда задающая производящее семейство гиперповерхностей $F = 0$ функция F является V-версальной деформацией *квазиоднородного* ростка f конечной кратности μ, можно сказать больше: комплексный фронт неприводим, имеет неособую нормализацию и является пространством μ-листного разветвленного накрытия над $(\mu - 1)$-мерным пространством (базой R^+-версальной деформации) с ветвлением вдоль соответствующей каустики, причем группа этого накрытия — вся группа перестановок μ листов.

Все это следует из результатов [90] о бифуркационных многообразиях в базе R-версальной деформации. Действительно, для квазиоднородного ростка f принадлежит идеалу, натянутому на $(\partial f/\partial x_i)$, поэтому V-версальная деформация R-версальна.

21.6. Классификация лежандровых особенностей в малых размерностях. Из предыдущего вытекает следующий результат.

Следствие. *Ростки лежандровых отображений общего положения для лежандровых многообразий размерности $n < 6$ в каждой точке устойчивы и принадлежат конечному числу классов лежандровой эквивалентности.*

Эти классы соответствуют простым особенностям A_μ, $\mu \geqslant 1$, D_μ, $\mu \geqslant 4$, E_μ, для которых $\mu - 1 \leqslant n$; производящее семейство является гиперповерхностью нулевого уровня R-версальной деформации функции соответствующего типа.

Ростки лежандровых отображений многообразий размерности $n \geqslant 6$ для открытого множества отображений в отдельных точках неустойчивы и имеют модули.

Ростки лежандровых отображений общего положения для многообразий размерности $n < 6$ в каждой точке эквивалентны росткам проекций $(p, q, z) \mapsto (q, z)$ лежандровых многообразий

$$p_I = \partial S/\partial q_I, \quad q_J = -\partial S/\partial p_J, \quad z = S(q_I, p_J) + \langle p_J, q_J\rangle,$$

где функции S даются таблицей следствия 2 п. 21.3.

Из этих формул следует, например, что фронты общего положения в трехмерном пространстве не имеют других особенностей, кроме ребер возврата (A_2) и особенностей типа «ласточкин хвост» (A_3).

Классификация ростков общих лежандровых отображений многообразий, размерность которых не превосходит десяти, приведена ниже (в п. 21.8).

21.7. Классификация лагранжевых особенностей. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^k, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток гладкой функции в критической точке конечной кратности μ. Мы сопоставим ему несколько лагранжевых особенностей. Пусть Φ — обозначение класса ростка f в гл. II. Размерность лагранжева многообразия мы будем обозначать через l.

1°. *Лагранжева особенность* Φ. Рассмотрим R^+-миниверсальную деформацию

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-1} e_{\mu-1}$$

(мономы $e_1, \ldots, e_{\mu-1}$ порождают $\mathbb{C}$-базис линейного пространства $\mathfrak{m}Q_f = \mathfrak{m}/(\partial f/\partial x)$, где $\mathfrak{m}$ — пространство функций, обращающихся в нуль в начале координат).

Деформацию F можно считать l-параметрической при любом $l \geqslant \mu - 1$ с параметром λ. Росток этой деформации в нуле является производящим семейством ростка лагранжева отображения в $\mathbb{C}^l$.

О п р е д е л е н и е. *Лагранжевой особенностью типа* Φ в $\mathbb{C}^l$, $l \geqslant \mu - 1$, называется особенность, заданная построенным производящим семейством F.

П р и м е р. Семейство $F(x, \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + \lambda_1 x$ задает двумерную особенность типа A_2 (складку на плоскости).

2°. *Лагранжева особенность* $\Phi^\bullet$. Предположим, что f — одна из унимодальных особенностей (см. гл. II). В этом случае мономы e_i выберем так, что росток страта $\mu = \text{const}$ в базе R^+-миниверсальной деформации F есть росток оси $\lambda_{\mu-1}$ в нуле.

Для этого в (полу)квазиоднородном случае достаточно взять в качестве $e_{\mu-1}$ моном J наивысшей (квази)степени, а в случае $T_{p,q,r} = axyz + x^p + y^q + z^r$ выбрать $J = xyz$. [Моном J порождает в Q_f аннулятор максимального идеала; его класс в Q_f пропорционален классу гессиана $\det(\partial^2 f/\partial x^2)$.]

О п р е д е л е н и е. *Лагранжевой особенностью типа* $\Phi^\bullet$ *в* $\mathbb{C}^l$ ($l \geqslant \mu - 2$) называется особенность, заданная ростком в нуле производящего семейства с $l = \mu - 2 + m$ параметрами $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}, \tau_1, \ldots, \tau_m$ ($m > 0$) по формуле

$$F(x; \lambda, \tau) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2} e_{\mu-2} + \omega J,$$

где $\omega = u(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$, а u — росток гладкой функции, равной 0 в начале координат. Особенность $\Phi^\bullet$ отображений в пространство фиксированной размерности $\mu - 2 + m$ мы будем обозначать через Φ^m (так что *точка в* $\Phi^\bullet$ *означает число квадратов в нормальной форме*).

П р и м е р. Пусть $f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + ax_1x_2x_3$ — параболическая особенность класса ${}_aP_8$. Лагранжева особенность ${}_aP_8^0$ отображения шестимерных многообразий задается производящим семейством

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1 x_3 + \lambda_6 x_2 x_3 + u(\lambda) x_1 x_2 x_3.$$

Лагранжев тип этой особенности зависит, как от параметра, от функции u шести переменных, являющейся «функциональным модулем».

Объединение всех лагранжевых ростков типа P_8^0 (со всевозможными a и u) имеет коразмерность 6 в пространстве ростков лагранжевых отображений.

3°. *Лагранжева особенность* O_{16}^0. О п р е д е л е н и е. Особенность O_{16}^0 отображения в $\mathbb{C}^{10}$ задана производящим семейством, зависящим от 10-мерного параметра λ, по формуле

$$F(x, \lambda) = f + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{10} e_{10} + u_1 J_1 + \ldots + u_5 J_5,$$

где f — полуоднородная функция четырех переменных коранга 4 с невырожденной главной кубической частью в нуле; десять мономов e_i степеней 1 и 2 и пять мономов J_i степеней 3 и 4 порождают базис $\mathfrak{m}Q_f$.

В этой формуле $u_1, \ldots, u_5$ — ростки гладких функций от λ, обращающихся в нуль в начале координат. Таким образом, лагранжева особенность O_{16}^0 отображения в $\mathbb{C}^{10}$ имеет модулями пять функций 10 переменных.

Т е о р е м а. *При* $l \leqslant 10$ *росток общего лагранжева отображения в* l*-мерное пространство в каждой точке лагранжево эквивалентен одному из ростков списка* $\{\Phi, \Psi^\bullet, O_{16}^0\}$, *где* Φ — *обозначение простой или унимодальной особенности с* $\mu \leqslant l + 1$, Ψ — *обозначение унимодальной особенности с* $\mu \leqslant l + 2$.

В следующей таблице для $6 \leqslant l \leqslant 10$ указаны особенности, впервые появляющиеся в данной размерности l (следует обратить внимание на то, что Φ при увеличении l сохраняется, а у Ψ^m увеличивается m). Мы пользуемся обозначениями $T_{2,3,r} = J_{r+4}$, $T_{2,4,r} = X_{r+5}$, $T_{3,3,r} = P_{r+5}$, $T_{2,p,q} = Y_{p,q}$, $T_{3,p,q} = R_{p,q}$.

6	7	8	9	10
A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
E_7	E_8	$J_{10}^\bullet$	$J_{10}, J_{11}^\bullet$	$J_{11}, J_{12}^\bullet, E_{12}^\bullet$
	$X_9^\bullet$	$X_9, X_{10}^\bullet$	$X_{10}, X_{11}^\bullet, Y_{5,5}^\bullet$	$X_{11}, X_{12}^\bullet, Y_{5,5}, Y_{5,6}^\bullet$
			$Z_{11}^\bullet$	$Z_{11}, Z_{12}^\bullet, U_{12}^\bullet, W_{12}^\bullet$
$P_8^\bullet$	$P_8, P_9^\bullet$	$P_9, P_{10}^\bullet, Q_{10}^\bullet$	$P_{10}, P_{11}^\bullet, Q_{10}, Q_{11}^\bullet$	$P_{11}, P_{12}^\bullet, Q_{11}, Q_{12}^\bullet$
		$R_{4,4}^\bullet$	$R_{4,4}, R_{4,5}^\bullet$	$R_{4,5}, R_{4,6}^\bullet, R_{5,5}^\bullet, O_{16}^0$
			$S_{11}^\bullet, T_{4,4,4}^\bullet$	$S_{11}, S_{12}^\bullet, T_{4,4,4}, T_{4,4,5}^\bullet$

Таким образом, при $l \geqslant 6$ ростки общих лагранжевых отображений в $\mathbb{C}^l$ в некоторых точках лагранжево неустойчивы и имеют функциональные модули, являющиеся функциями от l переменных.

Простые устойчивые лагранжевы ростки исчерпываются списком A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8.

Доказательство. Мы пользуемся редукцией к R^+-классификации производящих семейств и указанной в гл. II стратификацией пространства ростков функций.

Предположим, что росток лагранжева отображения задан производящим семейством F, являющимся деформацией функции f. Эта деформация R^+-эквивалентна индуцированной из R^+-миниверсальной деформации, т. е. эквивалентна деформации вида

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \varphi_1(\varepsilon)e_1(x) + \ldots + \varphi_{\mu-1}(\varepsilon)e_{\mu-1}(x), \quad \varepsilon \in \mathbb{C}^l.$$

По теореме трансверсальности для лагранжевых отображений общего положения отображение φ трансверсально стратификации базы на страты $\mu = \text{const}$. Следовательно, для простых f деформация F версальна; в этом случае особенность лагранжево эквивалентна соответствующей особенности простого типа Φ_μ, причем $l \geqslant \mu - 1$.

Если f унимодальна, то отображение φ трансверсально оси $\lambda_{\mu-1}$ в базисе R^+-миниверсальной деформации. В этом случае $\varphi_1(\varepsilon), \ldots, \varphi_{\mu-2}(\varepsilon)$ можно принять за часть координат в пространстве параметров; обозначая эти координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}$, мы получим семейство, R^+-эквивалентное исходному:

$$F(x, \varepsilon) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2}e_{\mu-2} + \omega(\varepsilon)J, \quad l \geqslant \mu - 2.$$

Уравнения $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{\mu-2} = 0$ определяют подмногообразие коразмерности $\mu - 2$ в базе $\mathbb{C}^l$. Сужение функции ω на это подмногообразие для общих лагранжевых отображений является морсовской функцией.

Если $\varepsilon = 0$ — некритическая точка этой функции, то можно принять ω за координату $\lambda_{\mu-1}$; лагранжева особенность эквивалентна унимодальной особенности Φ_μ, $l \geqslant \mu - 1$. Если же точка критическая, то, по лемме Морса с параметрами, ω приводится к виду

$$u(\lambda_1, \ldots, \lambda_{\mu-2}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2, \quad m = l - \mu + 2,$$

т. е. лагранжева особенность эквивалентна Φ_μ^m. Случай f класса O_{16}^0 рассматривается аналогичным путем. Других особенностей при $l \leqslant 10$ не встретится по теореме трансверсальности.

Можно проверить, что функция u является модулем. Это видно из следующих соображений (другое доказательство см. в [130]):

1) график функции u является множеством критических значений индуцирующего отображения $\varphi((\lambda, \tau) \mapsto (\lambda, \omega(\lambda, \tau)))$;

2) образ точки ε при индуцирующем отображении φ определен классом R^+-эквивалентности члена $F(\cdot, \varepsilon)$ семейства F почти однозначно.

Последнее следует из того, что набор μ комплексных критических значений, рассматриваемых с точностью до общей аддитивной постоянной,

вообще говоря, определяет точку $(\mu-1)$-мерной базы R^+-миниверсальной деформации с точностью до конечного числа возможностей.

21.8. Классификация лежандровых особенностей. Лежандровы особенности классов Φ и $\Phi^\bullet$ определяются следующим образом. Пусть μ — кратность критической точки 0 функции f (как выше).

1°. *Лежандрова особенность* Φ. Производящее семейство гиперповерхностей этой особенности с l-мерным фронтом есть график производящего семейства функций для лагранжевой особенности Φ отображений в $\mathbb{C}^l$ $(l \geqslant \mu-1)$.

Пример. Лежандрова особенность A_2 с двумерным фронтом определяется трехпараметрическим производящим семейством поверхностей

$$0 = F(x; \lambda_1, \lambda_2, z) \equiv x^3 + \lambda_1 x - z$$

с параметрами λ_1, λ_2, z (фронт — поверхность с ребром возврата).

2°. *Лежандрова особенность* $\Phi^\bullet$ (Φ унимодальная). Производящее семейство гиперповерхностей этой особенности с l-мерным фронтом есть график производящего семейства функций для лагранжевой особенности $\Phi^\bullet$ отображений в $\mathbb{C}^l$ $(l \geqslant \mu-2)$, для которой функция u в 2° п. 21.7 тождественно равна нулю.

Пример. Лежандрова особенность ${}_0P_8^0$ с шестимерным фронтом задается семипараметрическим производящим семейством гиперповерхностей

$$0 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_1 x_2 + \lambda_5 x_1 x_3 + \lambda_6 x_2 x_3 - z.$$

3°. *Лежандрова особенность* Φ^0 с фронтом размерности $l > \mu-2$ получается из определенной выше особенности Φ^0 с фронтом размерности $\mu-2$ прямым умножением на $\mathbb{C}^{l-\mu+2}$. Производящее семейство гиперповерхностей задается формулой $0 = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{\mu-2} e_{\mu-2} - z$ ($(l+1)$-мерный параметр $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l, z)$).

Теорема. *При $l \leqslant 10$ росток общего лежандрова отображения в $(l+1)$-мерное пространство в каждой точке лежандрово эквивалентен одному из ростков списка $\{\Phi, \Psi^\bullet, \Omega^0, O_{16}^0\}$, где Φ — простая или параболическая особенность с $\mu \leqslant l+1$ либо квазиоднородная исключительная особенность с $\mu \leqslant l$; Ψ — параболическая особенность с $\mu \leqslant l+2$; Ω — гиперболическая особенность с $\mu \leqslant l+2$, либо квазиоднородная исключительная особенность с $\mu \leqslant l+1$, либо неквазиоднородная исключительная особенность с $\mu \leqslant l+2$; O_{16}^0 встречается лишь при $l = 10$.*

В следующей таблице для $6 \leqslant l \leqslant 10$ указаны особенности, впервые появляющиеся на фронтах размерности l. Индекс слева от буквы означает

значение модуля a для гиперболических и исключительных особенностей ($a = 0$ соответствует квазиоднородной особенности, $a = 1$ — неквазиоднородной).

6	7	8	9	10
A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}
D_7	D_8	D_9	D_{10}	D_{11}
E_7	E_8	$J_{10}^{\bullet}$	$J_{10}, {}_1J_{11}^0$	${}_1J_{12}^0, {}_1E_{12}^0$
	$X_9^{\bullet}$	$X_9, {}_1X_{10}^0$	${}_1X_{11}^0, {}_1Y_{5,5}^0$	${}_1X_{12}^0, {}_1Y_{5,6}^0$
			${}_1Z_{11}^0$	${}_0Z_{11}^0, {}_1Z_{12}^0, {}_1U_{12}^0, {}_1W_{12}^0$
$P_8^{\bullet}$	$P_8, {}_1P_9^0$	${}_1P_{10}^0, {}_1Q_{10}^0$	${}_1P_{11}^0, {}_0Q_{10}^0, {}_1Q_{11}^0$	${}_1P_{12}^0, {}_0Q_{10}, {}_0Q_{11}^0, {}_1Q_{12}^0$
		${}_1R_{4,4}^0$	${}_1R_{4,5}^0$	${}_1R_{4,6}^0, {}_1R_{5,5}^0, O_{16}^0$
			${}_1S_{11}^0, {}_1T_{4,4,4}^0$	${}_0S_{11}^0, {}_1S_{12}^0, {}_1T_{4,4,5}^0$

Таким образом, при $l \geqslant 6$ ростки общих лежандровых отображений с l-мерными фронтами в некоторых точках лежандрово неустойчивы и имеют модули; число модулей остается конечным при $l \leqslant 9$ (в отличие от лагранжева случая, где функциональные модули появляются уже при $l = 6$). При $l \geqslant 10$ ростки общих лежандровых отображений в $\mathbb{C}^{l+1}$ имеют функциональные модули.

Простые устойчивые лежандровы ростки исчерпываются списком A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8.

Доказательство. Пользуясь результатами исследования лагранжева случая, мы можем сразу взять в качестве производящих семейств гиперповерхностей для ростков общих лежандровых особенностей с l-мерными фронтами графики производящих семейств ростков общих лагранжевых особенностей отображений в $\mathbb{C}^l$.

Однако полученные лежандровы ростки с разными лагранжевыми модулями во многих случаях лежандрово эквивалентны друг другу. Мы должны, таким образом, выяснить, какие из графиков лагранжевых производящих семейств эквивалентны как семейства гиперповерхностей.

Начнем с классификации гиперповерхностей $f = 0$. При переходе к новому отношению эквивалентности (V-эквивалентность вместо R^+-эквивалентности) запас простых и параболических особенностей не меняется. Все гиперболические особенности V-эквивалентны особенностям с модулем $a = 1$ ($x^p + y^q + z^r + axyz \sim x^p + y^q + z^r + xyz$ при $p^{-1} + q^{-1} + r^{-1} < 1$). Исключительные унимодальные особенности делятся на квазиоднородные ($a = 0$) и неквазиоднородные, последние V-эквивалентны особенностям с $a = 1$ (например, E_{12}: $x^3 + y^7 + axy^5 \sim x^3 + y^7 + xy^5$ при $a \neq 0$).

Мы получаем, таким образом, V-стратификацию пространства ростков функций в критической точке со следующими стратами:

Тип особенности f	Коразмерность
Простые и параболические Φ_μ	$\mu - 1$
Гиперболические и исключительные не квазиоднородные ${}_1\Phi_\mu$	$\mu - 1$
Исключительные квазиоднородные ${}_0\Phi_\mu$	μ
O_{16}	10
Прочие	11

Дальнейшее доказательство аналогично рассмотрению лагранжева случая, со следующим изменением: в лежандровом случае функция u отнюдь не модуль. Покажем, что *u можно обратить в нуль V-эквивалентностью*.

Рассмотрим R-миниверсальную деформацию ростка f вида

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_\mu e_\mu.$$

Уравнения $F = 0$ и $EF = 0$, где $E(0, 0) \neq 0$, задают одно и то же семейство гиперповерхностей и одну лежандрову особенность. Вообще говоря, семейства функций F и EF не R-эквивалентны. Однако семейство EF R-эквивалентно индуцированному из F. Индуцирующее отображение базы семейства в себя задает лежандрову эквивалентность, сохраняющую рассматриваемую лежандрову особенность. Таким образом, каждой функции E отвечает диффеоморфизм базы, поднимаемый на лежандрово многообразие. Все такие диффеоморфизмы базы образуют группу. Обозначим ее через G.

Пусть $\varphi_i : B_i \to \mathbb{C}^\mu$ $(i = 1, 2)$ — два отображения в базу нашей деформации, индуцирующие семейства $F_i(x, \varepsilon) \equiv F(x, \varphi_i(\varepsilon))$. Если отображения φ_1 и φ_2 переводятся друг в друга элементом группы G и диффеоморфизмом $B_1 \to B_2$, то семейства гиперповерхностей $F_i = 0$ эквивалентны.

Предположим теперь, что f — унимодальная квазиоднородная особенность и что базис состоит из мономов

$$e_1, \ldots, e_{\mu-2}, \quad e_{\mu-1} = J, \quad e_\mu = 1.$$

Л е м м а. *Всякая гиперповерхность, трансверсальная оси* $\lambda_{\mu-1}$, *переводится в окрестности точки* 0 *в росток гиперплоскости* $\lambda_{\mu-1} = 0$ *диффеоморфизмом из* G.

Доказательство леммы основано на следующих вычислениях. Умножению F на $E = 1 + tg$ отвечает семейство диффеоморфизмов из G, зависящее от времени t. Соответствующее поле скоростей на базе можно вычислить при $t = 0$ следующим образом: $\Lambda = \sum \Lambda_i(\lambda)\partial/\partial\lambda$, где Λ_i — компоненты

разложения

$$-g(x,\lambda)F(x,\lambda)\equiv\sum h_i(x,\lambda)\partial F/\partial x_i+\sum\Lambda_j(\lambda)e_j(x),$$

получающегося при дифференцировании по t соотношения

$$(1+tg)F(H_t(x,\lambda),\varphi_t(\lambda))\equiv F(x,\lambda).$$

Рассмотрим поля $\Lambda^1,\dots,\Lambda^\mu$, получающиеся этой конструкцией при $g=e_1,\dots,e_\mu$. Нетрудно сосчитать, что для непараболических унимодальных особенностей μ функций $\Lambda^i_{\mu-1}=\Lambda^i\lambda_{\mu-1}$ $(i=1,\dots,\mu)$ в нуле независимы; для параболических же особенностей независимы μ функций $\Lambda^i_{\mu-1}$ $(i\ne\mu)$, $\lambda_{\mu-1}$. (Здесь $e_{\mu-1}=J$, $e_\mu=1$.)

[Действительно, для квазиоднородной особенности с весами $\deg x_i=\alpha_i$, $\deg f=1$ обозначим через v эйлерово поле: $v=\sum\alpha_ix_i\partial/\partial x_i$. Тогда $f=vf$, поэтому для $F=f+\sum\lambda_je_j$ находим $F=vF+\sum(1-\deg e_j)\lambda_je_j$. Следовательно,

$$Fe_i=(e_iv)F+\sum(1-\deg e_j)\lambda_je_ie_j.$$

Предположим, что в локальной алгебре $[e_i][e_j]=\sum c^k_{i,j}[e_k]$. Тогда $e_ie_j=$ $=\sum c^k_{i,j}e_k+\sum h^k_{i,j}(x)\partial f/\partial x_k=\sum c^k_{i,j}e_k+\sum h^k_{i,j}\partial F/\partial x_k+O(|\lambda|)$. Следовательно, $\Lambda^i_{\mu-1}=A_i(\lambda)+O(|\lambda|^2)$, где $A_i(\lambda)=\sum c^{\mu-1}_{i,j}(1-\deg e_j)\lambda_j$. Билинейная форма, заданная матрицей $c^{\mu-1}_{i,j}$, невырождена (ср. п. 5.4). В непараболическом случае все $\deg e_j$ отличны от 1, поэтому $\{A_i,\ i=1,\dots,\mu\}$ независимы. В параболическом случае отличны от единицы все $\deg e_j$, кроме $\deg e_{\mu-1}$. В этом случае $\partial A_i/\partial\lambda_{\mu-1}=0$ и $A_\mu=0$. Поэтому формы $(A_1,\dots,A_{\mu-1};\lambda_{\mu-1})$ независимы.]

Это позволяет привести обычным гомотопическим методом к нормальной форме $\lambda_{\mu-1}$ диффеоморфизмами из G функцию φ с $\partial\varphi/\partial\lambda_{\mu-1}(0)\ne0$ в непараболическом случае и к форме $\lambda_{\mu-1}=0$ — поверхность $\varphi=0$ в параболическом (ср. п. 22.2).

Лемма позволяет уничтожить функцию u в лагранжевых нормальных формах, сохраняя класс V-эквивалентности производящего семейства и, следовательно, сохраняя лежандров класс особенности.

З а м е ч а н и е. Приведенные классификационные теоремы найдены В. М. Закалюкиным в его диссертации (МГУ, 1978). В [130] приведены менее полные и частично ошибочные (в лежандровом случае) результаты.

Следует подчеркнуть, что, за исключением случая простых особенностей, мы не утверждаем постоянства топологии в пределах класса, так что наша классификация, вообще говоря, грубее даже топологической. Действительно, топологический тип бифуркационных диаграмм (фронтов) может меняться вдоль страта $\mu=\text{const}$, как еще в 1970 г. заметил Ф. Фам [417].

Фам изучал распадение особенности $J_{3,0} = x^3 + ax^2y^3 + y^9$ на E_6 и E_8 на одном уровне; такое распадение возможно при $a = 0$ и невозможно при близких a. Все распадения простых особенностей функций описаны О. В. Ляшко [157]. Распадению параболических особенностей посвящена серия недавних работ Уолла. Рассматривая распадения особенности P_8, Уолл нашел десятки эллиптических кривых, являющихся исключительными по отношению к распадениям.

§ 22. Бифуркации каустик и волновых фронтов

Распространяющийся волновой фронт не во все моменты времени будет фронтом общего положения: в отдельные моменты он перестраивается. Исследование таких перестроек приводит к задаче об особенностях общего положения в однопараметрических семействах лежандровых отображений. В этом параграфе изучаются однопараметрические семейства общего положения лагранжевых и лежандровых особенностей. Указаны нормальные формы в случаях, когда размерность фронта не превосходит четырех (размерность каустик не превосходит двух).

22.1. Большой фронт и функция времени. Рассмотрим семейство лежандровых отображений, зависящих от одного параметра t. Рассмотрим прямое произведение содержащего фронты l-мерного пространства (т. е. базы лежандрова расслоения) на ось времени. Мы будем называть это прямое произведение *пространством-временем*, а его естественное отображение на ось t — *функцией времени*.

Объединение фронтов, соответствующих всем t, мы назовем *большим фронтом*. Это (вообще говоря) гиперповерхность в пространстве-времени.

Предложение. *Росток большого фронта в каждой точке является ростком фронта лежандрова отображения в пространство-время.*

Доказательство. Пусть временной фронт в момент t задается производящим семейством гиперповерхностей $F_t(x, \lambda) = 0$ (параметр λ — это точка содержащего фронт l-мерного пространства). Рассматривая t как $(l+1)$-й параметр, мы определяем той же формулой производящее семейство гиперповерхностей для лежандрова отображения в пространство-время. Фронт этого отображения совпадает с большим фронтом.

Определение. *Перестройкой фронта* называется диаграмма ростков

$$\Sigma \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{l+1} \xrightarrow{t} \mathbb{R},$$

где i — вложение l-мерного фронта, а t — гладкая функция, дифференциал которой в изучаемой точке отличен от нуля. *Эквивалентностью перестроек* называется коммутативная диаграмма, горизонтали которой — пе-

рестройки, а вертикали — диффеоморфизмы. Эквивалентность называется *сильной*, если последняя вертикаль — сдвиг ($t_2 = t_1 + \text{const}$).

З а м е ч а н и е. Для нашей эквивалентности история прохождения фронта через фиксированные точки пространства у эквивалентных перестроек может быть различной, но фронт первой перестройки в каждый фиксированный момент времени диффеоморфен фронту второй в некоторый (вообще, другой) момент.

Рассмотрим теперь однопараметрическое семейство фронтов общего положения. Большой фронт имеет лишь стандартные особенности (по меньшей мере для пространств небольших размерностей они перечислены). Следовательно, классификация перестроек в общих семействах фронтов сводится к классификации ростков функции на пространстве-времени в некритической точке относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих большой фронт.

Для небольших размерностей пространства особенности большого фронта связаны с простыми особенностями A_μ, D_μ, E_μ. Точнее, росток большого фронта диффеоморфен прямому произведению бифуркационного многообразия нулей функции соответствующего типа в базе $\mathbb{R}^\mu$ R-миниверсальной деформации на пространство $\mathbb{R}^m$ (пространство-время — это $\mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^m$).

Например, для A_2 в трехмерном пространстве-времени большой фронт диффеоморфен цилиндру над полукубической параболой (так как бифуркационное множество нулей функции x^3 есть полукубическая парабола).

Таким образом, мы приходим к задаче о классификации неособых ростков гладких функций в нуле пространства $\mathbb{R}^\mu \times \mathbb{R}^m$ относительно группы диффеоморфизмов, сохраняющих *дискриминантный цилиндр* (прямое произведение бифуркационного многообразия нулей в $\mathbb{R}^\mu$ на $\mathbb{R}^m$).

Выберем в качестве миниверсальных деформаций простых особенностей деформации вида $F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_i e_i(x)$, где $\{e_i\}$ — мономиальный базис локального кольца и e_1 имеет наивысшую квазиоднородную степень (например, для A_μ имеем $F = \pm x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_\mu$). Координаты в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать через $(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ (так что все координаты в пространстве-времени — это $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, \tau_1, \ldots, \tau_m)$).

О п р е д е л е н и е. *Специальной перестройкой* фронта называется перестройка, для которой большой фронт есть описанный выше дискриминантный цилиндр, а функция времени имеет вид

$$t = \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \quad \text{либо} \quad t = \tau_1.$$

Т е о р е м а. *Перестройки в однопараметрических семействах общего положения фронтов в пространствах размерности $l < 6$ локально сильно эквивалентны росткам специальных перестроек в нуле, причем $\mu + m = l + 1$.*

Описываемые этой теоремой перестройки фронтов в трехмерном пространстве изображены на рис. 63.

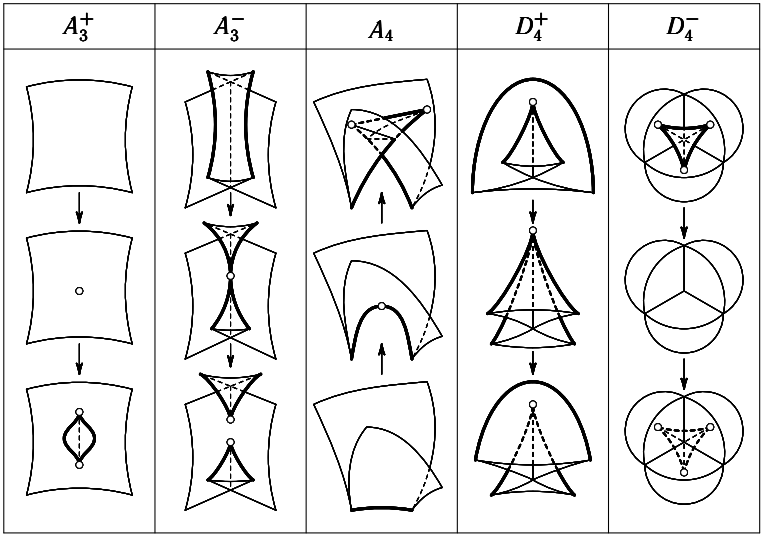


Рис. 63

22.2. Перестройки фронтов и группы, порожденные отражениями. Рассмотрим в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^\mu$ неприводимую группу G, порожденную отражениями типов A_μ, D_μ или E_μ соответственно (для A_μ эта группа перестановок координат в гиперплоскости $x_1 + \ldots + x_{\mu+1} = 0$).

Группа действует и на комплексификации $\mathbb{C}^\mu$ пространства $\mathbb{R}^\mu$. Рассмотрим многообразие ее орбит. Как известно, это пространство B изоморфно $\mathbb{C}^\mu$: координатами в нем служат базисные инварианты $\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu$ (для A_μ это коэффициенты многочлена степени $\mu + 1$ с корнями $\{x_1, \ldots, x_{\mu+1}\}$, в сумме равными нулю).

Отображением Виета назовем отображение $v\colon \mathbb{C}^\mu \to B$, сопоставляющее точке ее орбиту. Прообразом v^*f функции $f\colon B \to \mathbb{C}$ при отображении Виета является симметрическая функция (инвариант) в $\mathbb{C}^\mu$. Функция $v^*\lambda_1$ — инвариант наименьшей (второй) степени (он один, так как группа неприводима).

Большинство орбит состоит из $|G|$ точек. Орбиты из $|G|$ точек называются *регулярными*. Рассмотрим многообразие нерегулярных орбит. Легко видеть, что эта гиперповерхность в $\mathbb{C}^\mu$ диффеоморфна бифуркационной диаграмме нулей соответствующей особенности (например, в случае A_μ это

многообразие многочленов $x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{m-1} + \ldots + \lambda_\mu$ с нулевым дискриминантом).

Диффеоморфизмы $g\colon (\mathbb{C}^\mu, 0) \to (\mathbb{C}^\mu, 0)$ и $h\colon (B, 0) \to (B, 0)$ называются *Виета-согласованными*, если $v \circ g = h \circ v$; в этом случае g называется *поднятием* h, а h — *опусканием* g.

Легко видеть, что поднимаемые диффеоморфизмы (ростки) совпадают с диффеоморфизмами, сохраняющими многообразие нерегулярных орбит, а опускаемые — с эквивариантными (т. е. коммутирующими с действием группы, порожденной отражениями). Для нас важно, что эквивариантные диффеоморфизмы опускаемы; это доказывается так.

Ясно, что эквивариантный диффеоморфизм индуцирует гомеоморфизм пространства орбит, регулярный на многообразии регулярных орбит; по теореме об устранимой особенности регулярность имеется и в остальных точках.

Доказательство теоремы о перестройках (в комплексной ситуации). Для общей невырожденной в нуле функции $t\colon (B, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ имеем $\partial t/\partial\lambda_1 \neq 0$. В этом предположении инвариант v^*t имеет невырожденный в 0 второй дифференциал. По эквивариантной лемме Морса (см. п. 17.3) v^*t превращается в $v^*\lambda_1$ эквивариантным диффеоморфизмом $g\colon (\mathbb{C}^\mu, 0) \to (\mathbb{C}^\mu, 0)$. Опуская этот диффеоморфизм, убеждаемся в эквивалентности ростков t и λ_1 в нуле в группе диффеоморфизмов B, сохраняющих многообразие нерегулярных орбит. Это доказывает теорему в случае $m = 0$.

В случае $m > 0$ нужно сначала рассмотреть сужение t на ребро $0 \times \mathbb{C}^m$ дискриминантного цилиндра. Для функции t общего положения это сужение в каждой точке ребра либо регулярно (тогда $t \sim \tau_1$), либо имеет невырожденную (морсовскую) критическую точку. По лемме Морса с параметрами функция t эквивалентна сумме невырожденной квадратичной формы от τ и функции от λ; последняя в случае общего положения эквивалентна λ_1 (как это доказано при разборе случая $m = 0$). Тем самым теорема доказана в комплексной ситуации. В вещественно-аналитическом и вещественно-дифференцируемом случае теорема также верна (подробности см. в [250]).

Замечание. В. И. Закалюкин [131] распространил теорему о перестройках фронтов на случай любых квазиоднородных особенностей.

В квазиоднородном случае V-версальная деформация R-версальна и может быть выбрана в виде миниверсальной деформации

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 e_1(x) + \ldots + \lambda_\mu e_\mu(x),$$

где e_k — мономы; мы по-прежнему будем предполагать, что e_1 — моном наивысшей (квазиоднородной) степени. Выделим еще все *диагональные мономы* $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ (квазиоднородная степень которых такая же, как у f), если они есть. *Росток функции t общего положения в окрестности*

точки $\lambda = 0$ *пространства* $\mathbb{R}^\mu$ *приводится сохраняющим бифуркационное множество нулей деформации* F *ростка* f *локальным диффеоморфизмом пространства* $\mathbb{R}^\mu$ *к виду* $\pm\lambda_1 + a(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k})$.

Для деформаций с большим, чем μ, *числом параметров* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu, \tau_1, \ldots, \tau_m)$ *ответ имеет вид*

$$\pm\lambda_1 + a(\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_k}) \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2 \quad \textit{либо} \quad \tau_1.$$

Доказательство основано на следующем описании модуля аналитических ростков векторных полей, касающихся дискриминантного многообразия: это свободный модуль с μ образующими над алгеброй ростков функций от λ в 0; образующими являются μ векторных полей

$$v_i \equiv \sum v_{i,j}(\lambda)\partial/\partial\lambda_j,$$

компоненты которых вычисляются из разложений

$$e_i F(x, \lambda) \equiv \sum h_{i,j}(x, \lambda)\partial F/\partial x_j + \sum v_{i,j}(\lambda)e_i(x),$$

существующих по подготовительной теореме. (В случае простых особенностей образующие можно также описать как Виета-опускания градиентов базисных инвариантов, см. [250].)

22.3. Бифуркации каустик. В однопараметрических семействах лагранжевых отображений при некоторых значениях параметра происходят перестройки, так что на мгновение возникают каустики не общего положения. Их можно изучать при помощи пространства-времени, аналогично перестройкам фронтов.

Семейство мгновенных каустик зависящего от времени t лагранжева отображения можно рассматривать как гиперповерхность в пространстве-времени (прямом произведении пространства, где расположена мгновенная каустика, и оси времени). Эта гиперповерхность является каустикой лагранжева отображения в пространство-время.

Действительно, пусть мгновенное лагранжево отображение в момент t локально задается производящим семейством $F_t(x, \lambda)$ с параметром λ из l-мерного пространства. Тогда то же семейство функций от x, рассматриваемое как семейство с параметром (λ, t) из $(l+1)$-мерного пространства, задает лагранжево отображение в пространство-время, каустика которого — гиперповерхность в пространстве-времени, составленная из мгновенных каустик. Мы будем называть эту гиперповерхность *большой каустикой*.

Для общих однопараметрических семейств лагранжевых отображений большая каустика имеет лишь стандартные особенности (во всяком случае в малых размерностях все эти особенности перечислены).

Перестройки каустик и их эквивалентность определяются аналогично тому, как это сделано выше для фронтов. Список нормальных форм функций

времени вычислен В. М. Закалюкиным для случаев, когда большая каустика имеет особенности A_μ или D_μ.

Большую каустику можно описать как множество критических значений отображения $(x, \lambda, \tau) \mapsto (y = \partial F/\partial x, \lambda, \tau)$, где

в случае A_μ: $F = \pm x^{\mu+1} + \lambda_1 x^{\mu-1} + \ldots + \lambda_{\mu-2} x^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^{\mu-2}$, $\tau \in \mathbb{R}^m$;

в случае D_μ: $F = x_1^2 x_2 \pm x_2^{\mu-1} + \lambda_1 x_2^{\mu-2} + \ldots + \lambda_{\mu-3} x_2^2$, $\lambda \in \mathbb{R}^{\mu-3}$, $\tau \in \mathbb{R}^m$

(размерность пространства-времени есть $\mu - 1 + m$).

Обычной эквивалентностью перестроек росток функции времени общего положения можно привести в каждой точке к ростку в нуле следующей функции:

для A_μ $t = \tau_1$ либо $t = \pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$;

для D_μ $t = \tau_1$ либо $t = \pm\lambda_1 + y_1 + a\lambda_2 \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2$

(при $\mu = 4$ нужно заменить $a\lambda_2$ на ay_2; $y_k = \partial F/\partial x_k$).

Для *сильной эквивалентности* вторая формула в случае D_μ усложняется:

$$t = \pm\lambda_1 + Py_1 + Q \pm \tau_1^2 \pm \ldots \pm \tau_m^2,$$

где $P = 1 + a_1\lambda_2 + \ldots + a_\nu\lambda_2^\nu$, $Q = b_1\lambda_2 + \ldots + b_\nu\lambda_2^\nu$, $\mu = 2\nu + 2$ или $2\nu + 3$; при $\mu = 4$ нужно заменить $a\lambda_2$ на ay_2.

В общих однопараметрических семействах каустик в пространствах размерности l, меньшей четырех, встречаются лишь перестройки, эквивалентные перечисленным перестройкам типов A_μ, D_μ с $\mu - 2 + m = l$.

Например, общие перестройки каустик в трехмерном пространстве описываются следующими формулами:

A_3: $F = x^4 + \lambda_1 x^2$, $t = \tau_1$ или $\pm\lambda_1 \pm \tau_1^2 \pm \tau_2^2$;

A_4: $F = x^5 + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2$, $t = \tau_1$ или $\pm\lambda_1 \pm \tau_1^2$;

D_4: $F = x_1^2 x_2 \pm x_2^3 + \lambda_1 x_2^2$, $t = \tau_1$ или $\pm\lambda_1 + y_1 + ay_2 \pm \tau_1^2$;

A_5: $F = x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2$, $t = \pm\lambda_1$;

D_5: $F = x_1^2 x_2 + x_2^4 + \lambda_1 x_2^3 + \lambda_2 x_2^2$, $t = \pm\lambda_1 + y_1 + a\lambda_2$.

На рис. 64, 65 изображены эти перестройки (мы приводим вид каустики при $t = -\varepsilon$, $t = 0$ и $f = +\varepsilon$ для малых ε).

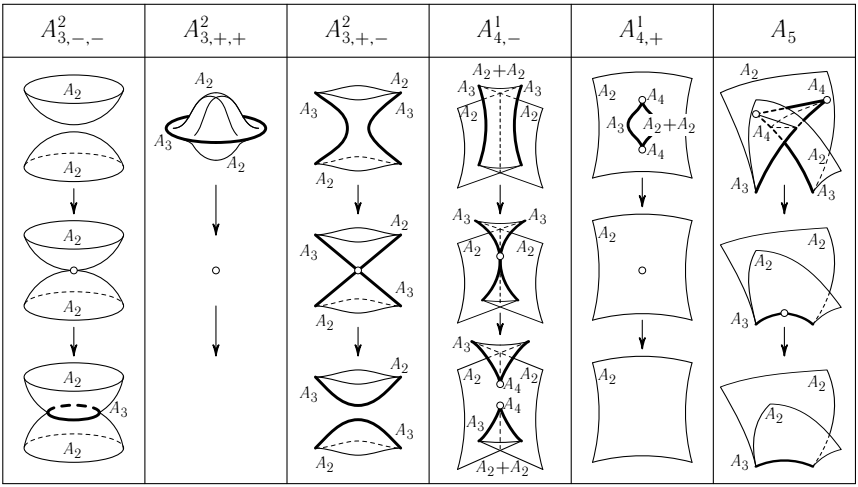


Рис. 64

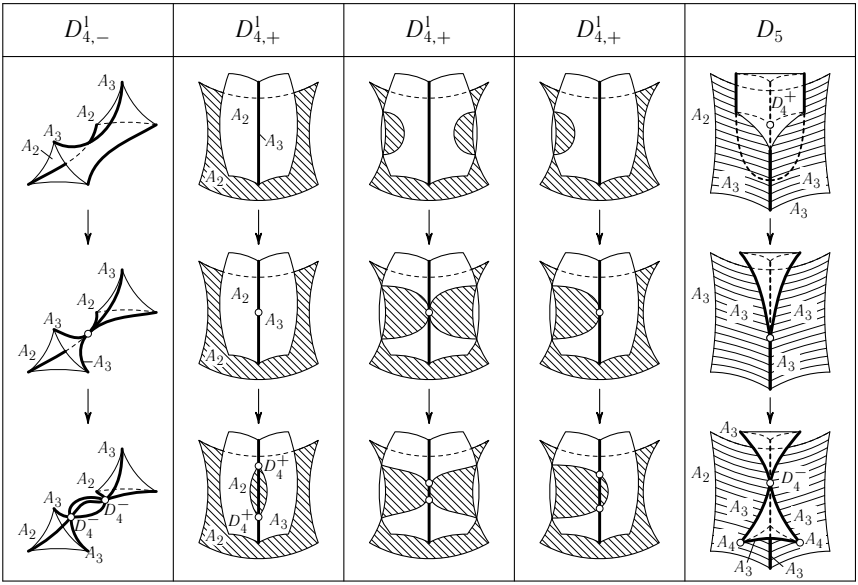


Рис. 65

Несмотря на значительное количество работ по «теории катастроф», изображения перестроек общего положения для каустик в трехмерном пространстве в них, кажется, не публиковались. Эти изображения трехмерных сечений общего положения дают более ясное представление о каустиках A_5 и D_5, чем наборы двумерных сечений и неудачно выбранные трехмерные сечения (см., например, [428]).

П р и м е р. Рассмотрим среду из невзаимодействующих частиц и предположим, что в начальный момент частица, находящаяся в точке x, имела скорость $v(x)$. Движение частиц по инерции определяет отображение $x \mapsto \mapsto x + tv(x)$. При малых t это отображение — диффеоморфизм (если v не слишком плохо ведет себя на бесконечности), но начиная с некоторого момента времени возникают особенности (частицы сталкиваются).

Согласно Я. Б. Зельдовичу, возникновение особенностей (сгущений частиц) в этой ситуации описывает начальную стадию образования галактик, причем начальное поле скоростей потенциально: $v = \operatorname{grad} S$. Мы приходим к исследованию однопараметрического семейства лагранжевых отображений $x \mapsto x + t\partial S/\partial x$; сгущение происходит на каустиках.

Для потенциала S общего положения каустика возникает впервые в момент перестройки типа A_3: $F = x^4 + \lambda x^2$, $t = \lambda + \tau_1^2 + \tau_2^2$. Через малое время ε после момента t_0 рождения каустики она имеет вид линзы (или «летающей тарелочки») с близким к эллипсу ребром возврата; оси этого эллипса имеют при малых ε порядок $\varepsilon^{1/2}$, а толщина — порядок $\varepsilon^{3/2}$.

Я. Б. Зельдович получил эти результаты из следующих соображений. Критические точки в момент t — это точки, для которых $\det(E + t\partial^2 S/\partial x^2) = = 0$, т. е. точки, в которых $\partial^2 S/\partial x^2$ имеет собственное число $\lambda = -1/t$. Рассмотрим собственное число как (трехзначную) функцию от x. Для S общего положения минимальное значение этой функции соответствует невырожденному минимуму, поэтому при малых ε критическое множество близко к эллипсоиду с осями порядка $\varepsilon^{1/2}$.

Направления ядер производной отображения в точках этого «эллипсоида» близки при малых ε к направлению ядра производной в точке рождения особенности при $\varepsilon = 0$. Поэтому множество критических точек сужения отображения на «эллипсоид» близко к эллипсу, по которому эллипсоид пересекается диаметральной плоскостью.

На этом почти эллипсе отображение имеет особенность типа сборки. Отсюда легко выводится приведенное выше описание «линзы» критических значений.

22.4. Классификация диаграмм отображений. Задачи о перестройках каустик и волновых фронтов эквивалентны задачам о классификации диаграмм отображений вида $M \xrightarrow{h} N \xrightarrow{\hat{f}} \mathbb{R}$, где h — лагранжево или лежандрово отображение. Задача о перестройках в общих однопараметрических

семействах гладких отображений приводит к классификации таких же диаграмм для общих отображений $h\colon M \to N$.

Т е о р е м а. *Пусть* $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— отображение Уитни. Тогда для функции* f *общего положения росток диаграммы* $\mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}$ *в каждой точке сильно эквивалентен ростку в нуле, заданному формулами*

$$h\colon y_1 = x_1^{\mu+1} + x_2 x_1^{\mu-1} + \ldots + x_\mu x_1, \quad y_s = x_s \ \ (s = 2, \ldots, n),$$
$$f = \pm y_2 \pm y_{\mu+1}^2 \pm \ldots \pm y_n^2 \ \textit{либо}\ f = y_{\mu+1} \ \ (1 < \mu \leqslant n),$$
$$f = \pm y_1 \pm y_2^2 \pm \ldots \pm y_n^2 \ \textit{либо}\ f = y_2 \ \ (\mu = 1)$$

Доказательство следует из классификации перестроек фронтов, так как сохраняющие фронт A_μ диффеоморфизмы h-поднимаемы (подробности см. в [250]).

При $n \leqslant 3$ отображение h общего положения имеет лишь уитниевские особенности.

С л е д с т в и е. *Перестройки в однопараметрических семействах общего положения отображений пространств одинаковой размерности* $k \leqslant 2$ *сильно эквивалентны перестройкам, заданным ростками в нуле следующих отображений*:

k	$y = h(x)$	f
0	$y = x$ $y = x^2$	$y,\ \pm y^2$ $\pm y$
1	$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2,\ y_2 = x_2$	$y_1,\ \pm y_1^2 \pm y_2^2$ $y_2,\ \pm y_1 \pm y_2^2$ $\pm y_2$
2	$y_1 = x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^4 + x_2 x_1^2 + x_3 x_1,\ y_2 = x_2,\ y_3 = x_3$	$y_1,\ \pm y_1^2 \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $y_2,\ \pm y_1 \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $y_3,\ \pm y_2^2 \pm y_3^2$ $\pm y_2$

Другие геометрические задачи приводят к классификации диаграмм отображений $\mathbb{R} \xleftarrow{f} M \xrightarrow{h} N$.

Рассмотрим, например, задачу об огибающей однопараметрического семейства гиперповерхностей в $N = \mathbb{R}^n$. В этом случае f — вспомогательное расслоение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а h — отображение, вкладывающее слои расслоений f в объемлющее пространство $\mathbb{R}^n$. Огибающая — множество критических значений отображения h.

П р и м е р. Формулы $h\colon y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2,\ f = x_1 + x_2$ задают семейство парабол $y_1 = (c - y_2)^2$ с общей касательной $y_1 = 0$.

Т е о р е м а (Н. А. Никишин, 1975, см. [250]). *Если h — отображение складки, то для отображения f общего положения росток диаграммы $\mathbb{R} \xleftarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^n$ в каждой точке складки формально эквивалентен одному из следующих ростков в нуле*:

$$h\colon\ y_1 = x_1^2,\ \ y_s = x_s\ \ (s \geqslant 2),$$

$$f = x_1 + x_n,\ \ x_n + x_1x_n \pm x_1^2 \pm \ldots \pm x_{n-1}^2,\ \ x_1 \pm x_2^2 \pm \ldots \pm x_n^2,\ \ x_1x_2 + x_3.$$

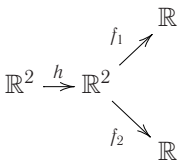
П р и м е р. При $n = 2$ получается три нормальных формы: $f = x_1 + x_2$, либо $x_1 + x_2^2$, либо $x_2 + x_1x_2 + x_1^2$.

Для определенных этими формулами однопараметрических семейств плоских кривых получаем, соответственно: 1) общую точку огибающей; 2) точку срыва кривых семейства с огибающей при слиянии двух точек касания с огибающей («перестройка $W \to U$»); 3) точку возврата кривой семейства на огибающей («перестройка $\gamma \to U$»); кривые семейства можно получить из зонтика Уитни в $\mathbb{R}^3$, пересекая его параллельными трансверсальными плоскостями.

Недавно Дюфур доказал аналогичные теоремы для гладкого случая ([308]).

В голоморфной ситуации, несмотря на простую формальную нормальную форму, имеются функциональные модули, т. е. голоморфный тип ростка диаграммы зависит от произвольной голоморфной функции (С. М. Воронин [86]).

Для задачи о диаграммах



(h — сборка Уитни, $f_{1,2}$ — трансверсальные расслоения) формальная нормальная форма имеет вид

$$h\colon\ y_1 = x_1^3 + x_1x_2,\ \ y_2 = x_2,\ \ f_1 = x_1 + x_2,\ \ f_2 = x_1 - x_2.$$

Дюфур ([307]) доказал, что эта нормальная форма пригодна и в гладком случае. В голоморфной же ситуации, как показал С. М. Воронин, привести диаграмму к такой нормальной форме, вообще говоря, нельзя. Вопрос связан с проблемой сходимости нормальных форм для голоморфных отображений $(\mathbb{C}, 0)$ в себя с собственным числом 1, разлагающихся в произведение двух инволюций. Расходимость возникает поэтому уже для диаграммы

$\mathbb{C} \leftarrow \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, отображения которой имеют общую невырожденную критическую точку.

Формальные нормальные формы общих ростков диаграмм $\mathbb{R} \leftarrow M \rightarrow N$ для обычной (не сильной) эквивалентности в случаях $\dim M = \dim N = n \leqslant 3$ следующие (ср. [250], [19]):

n	$h\colon M \to N$	$f\colon M \to \mathbb{R}$
1	$y = x$ $y = x^2$	x, x^2 $x + \varphi(x^2)$
2	$y_1 = x_1, y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2$ $y_1 = x_1^3 + x_1x_2, y_2 = x_2$	$x_1, \pm x_1^2 \pm x_2^2$ $x_1 + x_2, x_1 \pm x_2^2, x_2 \pm x_1x_2 + x_1^3$ $\pm x_1 + \varphi(h(x))$
3	$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2, y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^3 + x_1x_2, y_2 = x_2, y_3 = x_3$ $y_1 = x_1^4 + x_2x_1^2 + x_3x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3$	$x_1, \pm x_1^2 \pm x_2^2 \pm x_3^2$ $x_1 + x_2, x_1 \pm x_2^2 \pm x_3^2, x_2 + x_1x_3, x_2 \pm x_1x_2 + x_1^3 \pm x_1x_3^2$ $x_1 + x_3, x_1 \pm x_3^2 + \varphi(y_1(x), y_2(x)), x_3 \pm x_1^2 + x_1\varphi(y_1(x), y_2(x))$ $\pm x_1 + \varphi(y(x))$

22.5. Классификация особенностей выпуклых оболочек. К исследованию лежандровых особенностей тесно примыкает задача об особенностях выпуклых оболочек поверхностей в линейном пространстве.

Теорема 1 (см. [132]). *Для компактных поверхностей общего положения в $\mathbb{R}^3$ росток выпуклой оболочки в каждой точке локальным диффеоморфизмом объемлющего пространства приводится к одному из следующих ростков в нуле*:

1) $z = 0$;
2) $z = 0$ *при* $x \leqslant 0$, $z = x^2$ *при* $x \geqslant 0$;
3) $z = 0$ *при* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$; $z = x^2$ *при* $(x \geqslant 0, y \leqslant x)$;
   $z = \alpha^{-1}y^2$ *при* $y \geqslant 0$, $y \geqslant \alpha x$;
   $z = x^2 + (\alpha - 1)^{-1}(x - y)^2$ *при* $x \leqslant y \leqslant \alpha x$,

где $\alpha > 1$, (x, y, z) — *координаты в* $\mathbb{R}^3$.

Выпуклая оболочка в целом есть объединение конечного числа гладких развертывающихся поверхностей с краем или с углами, диффеоморфных треугольнику (T), квадрату (Q), кругу (S), полукругу (D) и цилиндру (C), а также конечного числа выпуклых поверхностей (U). Указанные в скобках числа поверхностей каждого типа удовлетворяют соотношениям $3T - D = 2Q$, $T + U + S - Q \geqslant 1$.

Теорема 2 (см. [197]). *Для компактных кривых общего положения в* $\mathbb{R}^3$ *росток выпуклой оболочки в каждой точке локальным диффеоморфизмом объемлющего пространства приводится к одному из следующих шести видов*:

1) $z = 0$;
2) $z = 0$ *при* $x \leqslant 0$, $z = x^2$ *при* $x \geqslant 0$;
3) $z = |x|$;
4) $y = 4u^3 + 2xu$, $z = 3u^4 + u^2x$, *где* $2u^2 + x \geqslant 0$ (*оборванный ласточкин хвост*);
5) $z = x^2$ *при* $x \geqslant 0$, $y \leqslant x$; $z = y^2$ *при* $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$; $z = 0$ *при* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$;
6) $z \geqslant x^2$ *при* $x + y = 0$; $z = x^2$ *при* $0 \leqslant x \leqslant -y$; $z = y^2$ *при* $0 \leqslant y \leqslant -x$; $z = 0$ *при* $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

Классификация особенностей выпуклых оболочек многообразий размерности k в $\mathbb{R}^n$ при больших значениях k и n не проведена. Согласно В. Д. Седых, модули имеются в точности при $\max(k, n-k-1) \geqslant 2$. В случае $1 \leqslant k \leqslant n-3$ заведомо имеются функциональные модули, являющиеся функциями от k переменных, а в случаях $k = n-1$ или $n-2$, $n \geqslant 5$ — от $\geqslant 1$ переменных. В случае $k = 2$, $n = 4$ число модулей, по-видимому, равно 2.

Особенности выпуклых оболочек встречаются в теории оптимального управления. Рассмотрим, например, скорости выхода системы из фиксированной точки фазового пространства при всевозможных положениях рулей. Эти векторы образуют множество, называемое *индикатрисой скоростей*. Предположим, что индикатриса — гладкое, но не выпуклое многообразие. Тогда скорости выхода с учетом смешанных стратегий образуют выпуклую оболочку индикатрисы.

Множество достижимости цели определяется как множество точек фазового пространства, из которых можно добраться до цели за конечное время. Классификация особенностей выпуклых оболочек является одним из этапов исследования особенностей границы множества достижимости.

Рассмотрим, в частности, управляемую систему на двумерном замкнутом многообразии, заданную гладким полем индикатрис, и пусть цель — гладкая замкнутая кривая. А. А. Давыдов расклассифицировал особенности границы множества достижимости для полей индикатрис и целей общего положения. С точностью до локального диффеоморфизма они такие же, как особенности в нуле кривых $y = x^\alpha \operatorname{sgn} x$ и особенности образов кривых $y = (1 + c \operatorname{sgn} x)|x|^\alpha$ при отображении «складка». Особенности этих видов встречаются устойчиво, а от всех более сложных особенностей границы множества достижимости можно избавиться малым шевелением поля индикатрис. В первом случае $\alpha = 1$, 2 или 3 [27].

22.6. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. Лагранжево многообразие фазового пространства описывает на уровне геометрической оптики волновое состояние в конфигурационном пространстве. Волновое состояние в области определяет волновое состояние на краю области. Мы приходим, таким образом, к понятию *лагранжева края* лагранжева многообразия.

Два лагранжевых иммерсированных подмногообразия пространств касательных расслоений называются *лагранжево кобордантными*, если их разность является лагранжевым краем иммерсированного лагранжева многообразия.

Простейшая ситуация, где встречаются лежандровы кобордизмы, состоит в следующем. Рассмотрим волновой фронт, распространяющийся в воздухе. Следы фронта на поверхности земли в разные моменты времени могут топологически различаться, но они (точнее, соответствующие им лежандровы многообразия) лежандрово кобордантны.

Из классов лагранжево (лежандрово) кобордантных иммерсированных многообразий строятся группы.

Группа классов ориентированного лагранжева кобордизма плоских ориентированных кривых изоморфна $\mathbb{Z} + \mathbb{R}$ (инварианты — индекс Маслова и площадь).

Группа классов ориентированного лежандрова кобордизма ориентированных лежандровых кривых в многообразии 1-струй функций $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ изоморфна $\mathbb{Z}$. Образующей этой группы является класс кривой, проекция которой в многообразие 0-струй имеет вид бантика (восьмерки с заостренными вершинами).

Одномерный волновой фронт (ориентированный и вооруженный, т. е. трансверсально ориентированный) на плоскости или на сфере лежандрово кобордантен нескольким бантикам (точнее, кобордантны соответствующие лежандровы подмногообразия многообразия контактных элементов).

Группа классов лежандрова кобордизма ориентированных и вооруженных фронтов на проективной плоскости также изоморфна $\mathbb{Z}$, но образующей является класс фронта с одной точкой возврата и одной точкой перегиба, $y^2 = x^3$ (бантик — удвоенная образующая).

Класс ориентированного вооруженного фронта на проективной плоскости определяется числом точек возврата с учетом знаков. Это число равно также числу точек перегиба: перегиб считается положительным, если кривая проходит точку перегиба, удаляясь от вооружающей нормали.

Дальнейшие сведения о лагранжевых и лежандровых кобордизмах см. в [25], где приведены формальные определения и вычислены различные группы классов кобордизма фронтов на двумерных поверхностях.

В самое последнее время Я. М. Элиашберг свел вычисление групп лагранжевых и лежандровых кобордизмов к чисто гомотопической задаче. Например, группа классов ориентированного лежандрова кобордизма лежандровых подмногообразий в $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ изоморфна стабильной гомотопической группе

$$\lim_{k\to\infty} \pi_{n+k}(T\lambda_k),$$

где λ_k — тавтологическое расслоение над многообразием Грассмана ориентированных лагранжевых плоскостей в $\mathbb{R}^{2k}$, T — пространство Тома.

В. А. Васильев ([79], [80]) построил характеристические классы на лагранжевых и лежандровых многообразиях, двойственные стратам классификации критических точек функций (индекс Маслова соответствует A_2, есть пятимерный класс, соответствующий A_6 или E_6, и т. д.).

Часть II

МОНОДРОМИЯ И АСИМПТОТИКИ ИНТЕГРАЛОВ

ГЛАВА IV

ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ИЗОЛИРОВАННЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ

Введение

При топологическом исследовании изолированной критической точки комплексно-аналитической функции возникает задача описания топологии ее множества уровня. Топология множества уровня или множества меньших значений гладкой вещественнозначной функции на многообразии может быть исследована при помощи теории Морса (см. [173]). В ней изучаются перестройки множества меньших значений и множества уровня функции при прохождении критического значения. В комплексном случае при прохождении критического значения перестройки множества уровня не происходит, поскольку все неособые множества уровня, близкие к одному критическому, одинаковы как топологические пространства и даже как дифференцируемые многообразия. Комплексным аналогом теории Морса, описывающим топологию множества уровня комплексно-аналитической функции, является теория Пикара—Лефшеца (исторически возникшая раньше). В теории Пикара—Лефшеца основным изучаемым преобразованием является не прохождение критического значения, а обход вокруг него в плоскости $\mathbb{C}$ значений функции.

Зафиксируем окружность, обходящую вокруг критического значения. Каждая точка этой окружности является значением функции. Множества уровня, соответствующие этим значениям, образуют расслоение над окружностью. Обход окружности определяет отображение множества уровня над начальной точкой окружности в себя. Это отображение называется (классической) *монодромией* критической точки.

Простейшим содержательным примером, в котором все это можно явно увидеть и вычислить до конца, является функция двух переменных

$$f(z, w) = z^2 + w^2, \quad (z, w) \in \mathbb{C}^2.$$

Она имеет единственную критическую точку $z = w = 0$. Критическое значение $f = 0$. Критическое множество уровня $V_0 = \{(z, w) : z^2 + w^2 = 0\}$ состоит из двух комплексных прямых, пересекающихся в точке 0. Все остальные множества уровня

$$V_\lambda = \{(z, w) : z^2 + w^2 = \lambda\} \quad (\lambda \neq 0)$$

топологически одинаковы: они диффеоморфны цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}^1$ (рис. 66).

Чтобы в этом убедиться, рассмотрим риманову поверхность функции $w = \sqrt{\lambda - z^2}$ (рис. 67). Эта поверхность склеивается из двух экземпляров плоскости комплексной переменной z, соединенных по разрезу $(-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda})$.

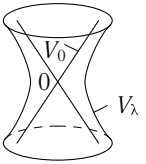


Рис. 66

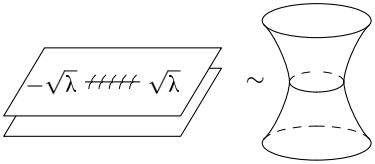


Рис. 67

Каждый экземпляр разрезанной плоскости гомеоморфен половине цилиндра; линии разреза соответствует на цилиндре окружность. Итак, все (вещественно четырехмерное) пространство $\mathbb{C}^2$ разбито на особый слой V_0 и неособые слои V_λ, диффеоморфные цилиндрам, — прообразы критического значения 0 и некритических значений $\lambda \neq 0$ при отображении

$$f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0).$$

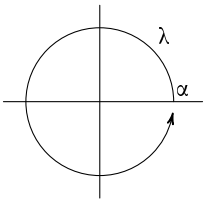


Рис. 68

Перейдем к построению монодромии. Рассмотрим на плоскости значений функции путь, обходящий вокруг критического значения 0 в положительном направлении (против часовой стрелки): $\lambda(t) = \exp(2\pi i t)\alpha$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\alpha > 0$ (рис. 68). Проследим за изменением слоя $V_{\lambda(t)}$ при изменении t от 0 до 1. Для этого рассмотрим римановы поверхности функций

$$w = \sqrt{\lambda(t) - z^2}.$$

Обе точки ветвления $z = \pm\sqrt{\lambda(t)} = \exp(\pi i t)(\pm\sqrt{\alpha})$ при возрастании параметра t движутся, обходя вокруг точки $z = 0$ в положительном направлении. Когда t изменяется от 0 до 1, каждая из этих точек совершает пол-оборота

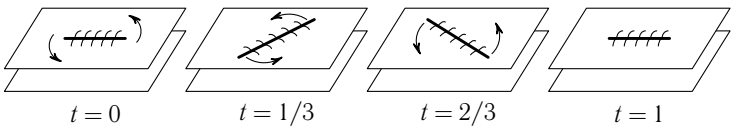


Рис. 69

и приходит на место другой. Таким образом, обходу $\lambda(t)$ вокруг критического значения 0 соответствует серия римановых поверхностей, изображенная на рис. 69, начинающаяся и кончающаяся одной и той же поверхностью V_α.

Теперь легко построить непрерывно зависящее от t семейство диффеоморфизмов начального слоя $V_{\lambda(0)} = V_\alpha$ в слой $V_{\lambda(t)}$ над точкой $\lambda(t)$

$$\Gamma_t\colon V_{\lambda(0)} \to V_{\lambda(t)},$$

начинающееся с тождественного преобразования Γ_0 и заканчивающееся *монодромией* $\Gamma_1 = h$. Например, можно определить Γ_t следующим образом. Выберем гладкую «срезающую функцию» $\chi(r)$ так, чтобы выполнялись равенства $\chi(r) = 1$ при $0 \leqslant r \leqslant 2\sqrt{\alpha}$, $\chi(r) = 0$ при $r \geqslant 3\sqrt{\alpha}$. Положим

$$g_t(z) = \exp\{\pi i t \cdot \chi(|z|)\} \cdot z.$$

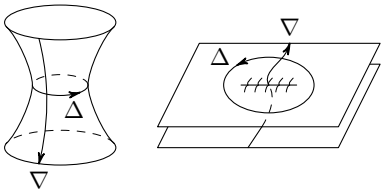


Рис. 70

Семейство диффеоморфизмов g_t плоскости комплексной переменной z в себя определяет искомое семейство диффеоморфизмов Γ_t. Получающийся диффеоморфизм цилиндра $h = \Gamma_1\colon V_\alpha \to V_\alpha$ является тождественным вне достаточно большого компакта (при $|z| > 3\sqrt{\alpha}$).

Рассмотрим теперь действие монодромии h на гомологии неособого слоя V_α. Группа $H_1(V_\alpha; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ одномерных гомологий цилиндра V_α порождена классом гомологий «горловой» окружности Δ (рис. 70). При $\alpha \to 0$ окружность Δ стягивается в точку 0. Поэтому она называется *исчезающим циклом Пикара—Лефшеца*.

Рассмотрим еще группу $H_1^{\text{замк}}(V_\alpha; \mathbb{Z})$ одномерных гомологий слоя V_α с замкнутыми носителями. В соответствии с двойственностью Пуанкаре эта группа также изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. Она порождена классом гомологий «коисчезающего цикла» ∇ — линии на цилиндре, идущей из бесконечности на бесконечность и один раз трансверсально пересекающей исчезающий цикл Δ (см. рис. 70). При этом мы будем предполагать, что цикл ∇ ориентирован таким образом, что индекс пересечения $(\nabla \circ \Delta)$ его с исчезающим циклом Δ, определенный комплексной ориентацией слоя V_α, равен $+1$.

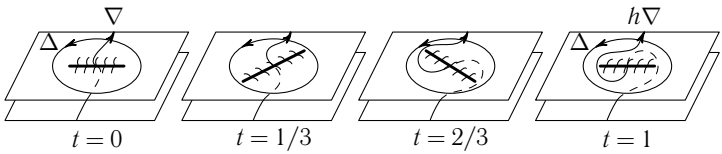


Рис. 71

Рис. 69 позволяет проследить за действием диффеоморфизмов Γ_t на исчезающий и коисчезающий циклы (рис. 71).

Заметим, что диффеоморфизм $h = \Gamma_1$ цилиндра $V_\alpha \approx S^1 \times \mathbb{R}^1$ можно представить себе так: он неподвижен вне некоторого кольца, а окружности, составляющие кольцо, поворачивает на разные углы, меняющиеся в пределах от 0 на одном его краю до 2π на другом. Таким образом, под действием преобразования монодромии h исчезающий цикл Δ переходит в себя, а коисчезающий перекручивается один раз вокруг цилиндра (рис. 72).

Диффеоморфизм h неподвижен вне некоторого компакта. Вне этого компакта циклы ∇ и $h\nabla$ совпадают. Поэтому цикл $h\nabla - \nabla$ сосредоточен в компактной части цилиндра. Из рис. 72 (или из рис. 71) видно, что

$$h\nabla - \nabla = -\Delta.$$

Таким же образом для любого цикла δ с замкнутым носителем возникает цикл с компактным носителем $h\delta - \delta$. Тем самым определено отображение из гомологий слоя V_α с замкнутыми носителями в его гомологии с компактными носителями. Оно называется *вариацией* и обозначается

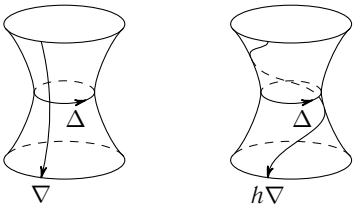


Рис. 72

$$\mathrm{Var}\colon H_1^{\text{замк}}(V_\alpha;\, \mathbb{Z}) \to H_1(V_\alpha;\, \mathbb{Z}).$$

Из рис. 72 или 71 видно, что для всякого цикла $\delta \in H_q^{\text{замк}}(V_\alpha;\, \mathbb{Z})$ имеет место соотношение

$$\mathrm{Var}\delta = (\Delta \circ \delta)\Delta.$$

Здесь $(\Delta \circ \delta)$ — индекс пересечения циклов Δ и δ, определяемый комплексной ориентацией слоя V_α. Это соотношение называется *формулой Пикара—Лефшеца*.

Заметим, что, вообще говоря, диффеоморфизмы Γ_t определены только с точностью до гомотопии и априори преобразование Γ_1 не обязательно неподвижно вне компакта. Например, напрашивающееся семейство диффеоморфизмов

$$\Gamma_t'\colon (z, w) \mapsto (z \cdot \exp(\pi i t),\, w \cdot \exp(\pi i t))$$

определяет отображение

$$\Gamma_1' = h'\colon (z, w) \mapsto (-z, -w),$$

которое не является неподвижным вне компакта и поэтому не годится для определения вариации (хотя и годится для определения действия монодромии на компактные гомологии).

Таким образом, мы рассмотрели основные понятия теории Пикара—Лефшеца: исчезающие циклы, монодромию и вариацию для простейшего примера функции $f(z, w) = z^2 + w^2$.

В общем случае произвольной функции любого числа переменных топология слоя V_λ уже не будет столь простой, как в разобранном примере. Исследование топологии слоя V_λ, монодромии и вариации в общем случае — трудная задача, решенная полностью лишь для некоторых специальных особенностей. В этой главе рассказывается о некоторых методах и результатах, полученных в этом направлении.

Основной метод, которым мы будем пользоваться, — метод деформаций (или шевелений). При малом шевелении сложная критическая точка функции n переменных распадается на простейшие. Эти простейшие критические точки устроены, как критическая точка 0 функции $f(z_1, \ldots, z_n) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$, и исследуются полностью, подобно тому, как выше был разобран случай $n = 2$. Вместо цилиндра V_λ, получающегося в случае $n = 2$, в общем случае неособый слой (многообразие уровня $V_\lambda = \{(z_1, \ldots, z_n)\colon z_1^2 + \ldots + z_n^2 = \lambda\}$, $\lambda \neq 0$) диффеоморфен пространству TS^{n-1} касательного расслоения $(n-1)$-мерной сферы (при $n = 2$ получается цилиндр). Исчезающий цикл в слое V_1 — это вещественная сфера $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n\colon z_1^2 + \ldots + z_n^2 = 1\}$.

Если сложная критическая точка распадается при деформации на μ простейших, то и критических значений у продеформированной функции будет, вообще говоря, μ штук (рис. 73). В этом случае в плоскости значений

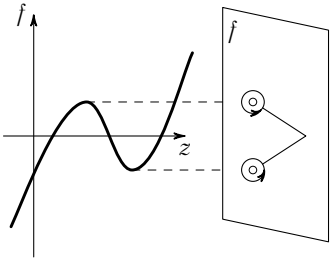


Рис. 73

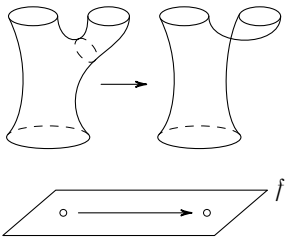


Рис. 74

продеформированной функции можно обходить все μ критических значений. Таким образом возникает не один диффеоморфизм монодромии h, а целая *группа монодромии* $\{h_\gamma\}$, где γ пробегает фундаментальную группу множества некритических значений.

Неособый слой V_λ пошевеленной функции устроен (внутри некоторого шара вокруг критической точки исходной функции) так же, как неособый слой исходной функции. Когда значение λ подходит к одному из критических значений пошевеленной функции, на неособом слое исчезает некоторый цикл — сфера, размерность которой равна половине (вещественной) размерности слоя V_λ (рис. 74). Подходя таким образом ко всем μ критиче-

ским значениям, мы определяем в неособом слое μ исчезающих циклов — сфер средней размерности. Оказывается, что неособый слой гомотопически эквивалентен букету этих сфер.

В случае, когда вещественная размерность неособого слоя делится на 4 (т. е. когда число переменных n нечетно), индекс пересечения задает в группе гомологий $H_{n-1}(V_\lambda; \mathbb{Z})$ неособого многообразия уровня симметричную билинейную форму. Индекс самопересечения каждого из исчезающих циклов равен (в зависимости от числа переменных n) $+2$ или -2. Действие обхода вокруг соответствующего исчезающему циклу критического значения сводится к отражению относительно зеркала, ортогонального этому циклу в смысле скалярного произведения, заданного индексом пересечения.

Например, для функции трех переменных

$$f(z_1, z_2, z_3) = z_1^{k+1} + z_2^2 + z_3^2$$

удобным шевелением является

$$\bar{f}(z_1, z_2, z_3) = f(z_1, z_2, z_3) - \varepsilon z_1.$$

Эта функция имеет $\mu = k$ критических точек $(\sqrt[k]{\varepsilon/(k+1)}\xi_m, 0, 0)$, где ξ_m $(m = 1, \ldots, k)$ — корни k-й степени из единицы. Соответствующие исчезающие циклы могут быть выбраны так, что они будут иметь следующие индексы пересечений: $(\Delta_i \circ \Delta_i) = -2$, $(\Delta_1 \circ \Delta_2) = (\Delta_2 \circ \Delta_3) = \ldots$ $\ldots = (\Delta_{k-1} \circ \Delta_k) = 1$ (остальные пересечения будут равны нулю). Группа монодромии порождена отражениями в ортогональных дополнениях к циклам Δ_m и совпадает с группой Вейля A_k (см. [45]), т. е. с группой $S(k+1)$ перестановок $k+1$ элементов.

В этой главе мы обычно (кроме § 27) будем иметь дело с изолированными особенностями функций. Поэтому под термином «особенность» будет пониматься росток голоморфной функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, имеющий в нуле изолированную критическую точку (т. е. точку, в которой все частные производные функции f равны нулю).

Пусть $G\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ — росток в нуле аналитического отображения, U — окрестность нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, в которой определен представитель ростка G, G_λ — такое аналитическое по λ из окрестности нуля в $\mathbb{C}$ семейство отображений $U \to \mathbb{C}^p$, что $G_0 = G$. *Малым шевелением* $\tilde{G}$ отображения G мы будем называть отображение G_λ для достаточно малого λ, не указывая каждый раз явно это семейство и ограничение на величину параметра λ.

Всюду абсолютные группы гомологий считаются приведенными по модулю точки, а относительные группы гомологий пары «многообразие—край» — по модулю фундаментального цикла (волна над буквой H, кото-

рую обычно используют для обозначения приведенных групп гомологий, при этом будет опускаться). Все гомологии рассматриваются с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}$ целых чисел, если специально не оговорено противное.

Пусть $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное векторное пространство с координатами $x_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, \ldots, n$; u_j и v_j вещественны). Пространство $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, рассматриваемое как $2n$-мерное вещественное векторное пространство, имеет выделенную ориентацию, которую мы будем называть комплексной. Эта ориентация определяется тем, что положительно ориентированной системой координат в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ объявляется $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$. Комплексные многообразия будут рассматриваться с их комплексной ориентацией, если специально не оговорено противное. При таком выборе ориентации индекс пересечения комплексных подмногообразий всегда неотрицателен.

§ 23. Элементы теории Пикара—Лефшеца

В этом параграфе определяются такие понятия теории Пикара—Лефшеца, как исчезающие циклы, операторы монодромии и вариации, операторы Пикара—Лефшеца, и т. д. Как уже говорилось, они используются при исследовании топологии критических точек голоморфных функций.

23.1. Операторы монодромии и вариации. Пусть $f\colon M^n \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция на n-мерном комплексном многообразии M^n, имеющем гладкий край ∂M^n (в вещественном смысле), U — некоторая стягиваемая компактная область в плоскости $\mathbb{C}$ с гладкой границей ∂U. Будем предполагать, что выполнены следующие условия:

1) для некоторой окрестности U' области U ограничение функции f на прообраз области U' является собственным отображением $f^{-1}(U') \to U'$, т. е. отображением, при котором прообраз любого компактного множества компактен;

2) ограничение функции f на $\partial M^n \cap f^{-1}(U')$ является регулярным отображением на U', т. е. отображением, дифференциал которого эпиморфен;

3) функция f имеет на прообразе $f^{-1}(U')$ области U' конечное число критических точек p_i ($i = 1, \ldots, \mu$) с критическими значениями $z_i = f(p_i)$, лежащими внутри области U, т. е. в $U - \partial U$.

Из условия 2) следует, что ограничение функции f на $\partial M^n \cap f^{-1}(U)$ определяет локально тривиальное, а следовательно (поскольку область U предполагается стягиваемой), и тривиальное расслоение $\partial M^n \cap f^{-1}(U) \to U$. Структура прямого произведения в пространстве этого расслоения единственна с точностью до гомотопии. Кроме того, ограничение функции f на прообраз $f^{-1}(U - \{z_i\})$ множества некритических значений является локально тривиальным расслоением.

Будем обозначать через F_z ($z \in U$) множество уровня функции f ($F_z = f^{-1}(z)$). Если $z \in U$ — некритическое значение функции f, то соответствующее множество уровня F_z является компактным $(n-1)$-мерным комплексным многообразием с гладким краем $\partial F_z = F_z \cap \partial M^n$. Зафиксируем некритическое значение z_0, принадлежащее границе ∂U области U. Пусть γ — некоторая петля в дополнении к множеству критических значений $U - \{z_i\colon i = 1, \ldots, \mu\}$ с началом и концом в точке z_0 ($\gamma\colon [0, 1] \to U - \{z_i\}$, $\gamma(0) = \gamma(1) = z_0$). (Не ограничивая общности, можно считать, что все встречающиеся петли и пути являются кусочно гладкими.) Обход вдоль петли γ порождает непрерывное семейство отображений $\Gamma_t\colon F_{z_0} \to M^n$ (поднятие гомотопии), для которого Γ_0 — тождественное отображение многообразия уровня F_{z_0} в себя, $f(\Gamma_t(x)) = \gamma(t)$, т. е. отображение Γ_t переводит многообразие уровня F_{z_0} в многообразие уровня $F_{\gamma(t)}$. Гомотопия Γ_t может быть (и будет) выбрана согласованной со структурой прямого произведения на $\partial M^n \cap f^{-1}(U)$ *). В этом случае отображение $h_\gamma = \Gamma_1\colon F_{z_0} \to F_{z_0}$ тождественно на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0}. Оно определено однозначно с точностью до (неподвижной по краю ∂F_{z_0}) гомотопии классом петли γ в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений.

О п р е д е л е н и е. Преобразование h_γ неособого множества уровня F_{z_0} в себя называется *монодромией* петли γ. Действие h_{γ^*} преобразования h_γ в гомологиях неособого множества уровня $H_*(F_{z_0})$ называется *оператором монодромии* петли γ.

Оператор монодромии однозначно определен классом петли γ в фундаментальной группе дополнения к множеству критических значений.

Мы будем рассматривать также автоморфизм $h^{(r)}_{\gamma^*}$, индуцированный преобразованием h_γ в группе относительных гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ неособого множества уровня по модулю края. Во введении к этой главе мы вместо группы относительных гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ пользовались группой $H_1^{\text{замк}}(V_\alpha)$ гомологий с замкнутыми носителями (в соответствии с изоморфизмом $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \cong H_*^{\text{замк}}(F_{z_0} - \partial F_{z_0})$).

Пусть δ — относительный цикл в паре $(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Поскольку преобразование h_γ тождественно на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0}, граница цикла $h_\gamma\delta$ совпадает с границей цикла δ. Поэтому разность $h_\gamma\delta - \delta$ является абсолютным циклом в многообразии F_{z_0}. Нетрудно видеть, что соответствие $\delta \mapsto h_\gamma\delta - \delta$ задает корректно определенный гомоморфизм $\mathrm{var}_\gamma\colon H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \to H_*(F_{z_0})$.

*) На самом деле, в качестве $\{\Gamma_t\}$ может быть выбрано семейство диффеоморфизмов $F_{z_0} \to F_{\gamma(t)}$, но это нам в дальнейшем не понадобится.

О п р е д е л е н и е. Гомоморфизм $\mathrm{var}_\gamma\colon H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0}) \to H_*(F_{z_0})$ называется *оператором вариации* петли γ.

Нетрудно видеть, что автоморфизмы h_{γ^*} и $h^{(r)}_{\gamma^*}$ связаны с оператором вариации соотношениями $h_{\gamma^*} = \mathrm{id} + \mathrm{var}_\gamma \cdot i_*$, $h^{(r)}_{\gamma^*} = \mathrm{id} + i_* \cdot \mathrm{var}_\gamma$, где $i_*\colon H_*(F_{z_0}) \to H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ — естественный гомоморфизм, индуцированный включением $F_{z_0} \hookrightarrow (F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Если класс петли γ в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений равен произведению $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ классов γ_1 и γ_2, то $\mathrm{var}_\gamma = \mathrm{var}_{\gamma_1} + \mathrm{var}_{\gamma_2} + \mathrm{var}_{\gamma_2} \cdot i_* \cdot \mathrm{var}_{\gamma_1}$, $h_{\gamma^*} = h_{\gamma_2^*} \cdot h_{\gamma_1^*}$, $h^{(r)}_{\gamma^*} = h^{(r)}_{\gamma_2^*} \cdot h^{(r)}_{\gamma_1^*}$. Поэтому соответствие $\gamma \mapsto h_{\gamma^*}$ является (анти)гомоморфизмом фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений в группу $\mathrm{Aut}\, H_*(F_{z_0})$ автоморфизмов группы $H_*(F_{z_0})$ гомологий неособого множества уровня.

Будем обозначать через $(a \circ b)$ индекс пересечения циклов (или классов гомологий) a и b. Это обозначение будет использоваться как в случае, когда оба цикла a и b абсолютные, так и в случае, когда один из них относительный. Напомним, что многообразие уровня F_{z_0} является комплексным многообразием и поэтому обладает выделенной ориентацией, которая и определяет индекс пересечения циклов на нем.

Л е м м а 1. *Пусть* $a, b \in H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ *— относительные классы гомологий,* $\dim a + \dim b = 2n - 2$, $\gamma \in \pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$. *Тогда* $(\mathrm{var}_\gamma a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (\mathrm{var}_\gamma a \circ b) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем относительные циклы, являющиеся представителями классов гомологий a и b, так, чтобы их границы (лежащие на краю ∂F_{z_0} многообразия уровня F_{z_0}) не пересекались. Это можно сделать по соображениям размерности ($\dim \partial a + \dim \partial b = 2n - 4 < 2n - 3 = \dim \partial F_{z_0}$). Выбранные циклы мы также будем обозначать через a и b. Для таких циклов имеет смысл их индекс пересечения, не являющийся, конечно, инвариантом их классов в группе гомологий $H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$. Имеем

$$\mathrm{var}_\gamma a = h_\gamma a - a, \quad \mathrm{var}_\gamma b = h_\gamma b - b,$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{var}_\gamma a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (\mathrm{var}_\gamma a \circ b) + (a \circ \mathrm{var}_\gamma b) = \\ = (h_\gamma a \circ h_\gamma b) - (a \circ h_\gamma b) - (h_\gamma a \circ b) + (a \circ b) + \\ + (h_\gamma a \circ b) - (a \circ b) + (a \circ h_\gamma b) - (a \circ b) = 0,\end{aligned}$$

так как $(h_\gamma a \circ h_\gamma b) = (a \circ b)$.

С л е д с т в и е. *Для* $a, b \in H_*(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$ *справедливо равенство*

$$(h^{(r)}_{\gamma^*} a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (\mathrm{var}_\gamma a \circ b) = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $(h^{(r)}_{\gamma^*} a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (\mathrm{var}_\gamma a \circ b) = (i_* \cdot \mathrm{var}_\gamma a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (a \circ \mathrm{var}_\gamma b) + (\mathrm{var}_\gamma a \circ b) = 0$, так как $h^{(r)}_{\gamma^*} = \mathrm{id} + i_* \cdot \mathrm{var}_\gamma$, $(i_* \cdot \mathrm{var}_\gamma a \circ \mathrm{var}_\gamma b) = (\mathrm{var}_\gamma a \circ \mathrm{var}_\gamma b)$.

23.2. Исчезающие циклы и группа монодромии. Предположим теперь, что все критические точки p_i функции f невырожденны (т. е. $\det(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k) \neq 0$), а все критические значения $z_i = f(p_i)$ различны ($i = 1, \ldots, \mu$). Напомним, что в этом случае функция f называется *морсовской*.

О п р е д е л е н и е. *Группой монодромии* (морсовской) функции f называется образ гомоморфизма фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений в группу $\operatorname{Aut} H_*(F_{z_0})$ автоморфизмов группы $H_*(F_{z_0})$ гомологий неособого множества уровня F_{z_0}, сопоставляющего петле γ оператор монодромии $h_{\gamma^*}: H_*(F_{z_0}) \to H_*(F_{z_0})$.

Пусть в области U задан путь $u: [0, 1] \to U$, соединяющий некоторое критическое значение z_i с некритическим значением z_0 ($u(0) = z_i$, $u(1) = z_0$) и не проходящий через критические значения функции f при $t \neq 0$. По лемме Морса в окрестности невырожденной критической точки p_i на многообразии M^n существует локальная система координат $x_1, \ldots, x_n$, в которой функция f записывается в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = z_i + \sum_{j=1}^{n} x_j^2$. Для значения параметра t, близкого к нулю, зафиксируем в многообразии уровня $F_{u(t)}$ сферу $S(t) = \sqrt{u(t) - z_i} \cdot S^{n-1}$, где $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n): \sum_j x_j^2 = 1, \operatorname{Im} x_j = 0\}$ — стандартная единичная $(n-1)$-мерная сфера.

Поднятие гомотопии t от нуля до единицы определяет семейство $(n-1)$-мерных сфер $S(t) \subset F_{u(t)}$ в многообразиях уровня $F_{u(t)}$ для всех $t \in (0, 1]$. Заметим, что при $t = 0$ сфера $S(t)$ вырождается в критическую точку p_i.

О п р е д е л е н и е. Класс гомологий $\Delta \in H_{n-1}(F_{z_0})$, представленный $(n-1)$-мерной сферой $S(1)$ в выделенном неособом многообразии уровня F_{z_0}, называется *исчезающим* (вдоль пути u) *циклом Пикара—Лефшеца*.

Легко видеть, что гомотопический класс пути u в классе путей в области U, соединяющих критическое значение z_i с некритическим значением z_0 и не проходящих через критические значения функции f при $t \neq 0$, определяет класс гомологий исчезающего цикла Δ с точностью до ориентации.

О п р е д е л е н и е. Набор циклов $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ из группы $H_{n-1}(F_{z_0})$ $(n-1)$-мерных гомологий неособого множества уровня F_{z_0} называется *отмеченным*, если:

1) цикл Δ_i ($i = 1, \ldots, \mu$) является исчезающим вдоль несамопересекающегося пути u_i, соединяющего критическое значение z_i с некритическим значением z_0;

2) пути u_i и u_j при $i \neq j$ имеют единственную общую точку $u_i(1) = u_j(1) = z_0$;

3) пути $u_1, \dots, u_\mu$ занумерованы в том порядке, в котором они входят в точку z_0, считая по часовой стрелке, начиная от границы ∂U области U (см. рис. 75).

З а м е ч а н и е. Выбор некритического значения z_0 на границе ∂U области U диктовался необходимостью перенумерации элементов отмеченного набора исчезающих циклов в соответствии с условием 3).

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 - 3\lambda x$, где λ — малое положительное число. Эта функция является шевелением функции $f_0(x) = x^3$ (имеющей особенность типа A_2 в смысле ч. I), но сейчас это нам не понадобится. Функция f имеет две критические точки ($x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$) с критическими значениями $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ соответственно. В качестве некритического значения функции f возьмем $z_0 = 0$. Соединим критические значения z_i ($i = 1, 2$) с некритическим значением z_0 отрезками u_1 и u_2. Многообразие уровня $\{f = 0\}$ состоит из трех точек $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ и $x_3 = \sqrt{3\lambda}$ (см. рис. 76). Легко видеть, что

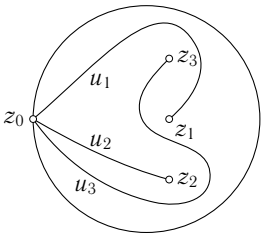


Рис. 75

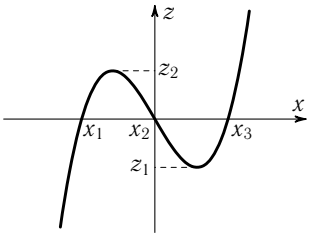


Рис. 76

исчезающими (вдоль описанных путей u_1 и u_2, соединяющих критические значения z_1 и z_2 с некритическим значением 0) циклами являются разности $\Delta_1 = \{x_3\} - \{x_2\}$ и $\Delta_2 = \{x_2\} - \{x_1\}$ нульмерных классов гомологий, представленных точками x_1, x_2 и x_3. Заметим, что ориентации этих циклов выбираются нами произвольно: любой из них может быть умножен на (-1).

Для большей наглядности мы выбрали некритическое значение $z_0 = 0$. Это предполагает, конечно, специальный выбор области U. В данном месте это не очень существенно, но дальше при определении отмеченных базисов исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня вырожденной особенности в качестве области U будет рассматриваться круг достаточно большого (по сравнению с критическими значениями пошевеленной функции) радиуса. Выбор некритического значения на границе достаточно большого круга диктуется тем, что в противном случае, во-первых, отождествление групп гомологий неособых многообразий

уровня особенности и ее шевеления является неоднозначным и, во-вторых, неоднозначным становится порядок, в котором исчезающие циклы должны входить в отмеченный базис. Для «исправления» рассмотренного выше примера можно выбрать некритическое значение z_0^*, достаточно большое по абсолютной величине ($|z_0^*| \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$), соединить его с некритическим значением $z_0 = 0$ путем, не проходящим через критические значения функции f, и проследить за изменением неособого многообразия уровня $f = z$ при движении z вдоль этого пути от $z_0 = 0$ до z_0^*. Аналогичное построение в более общем случае мы проделаем позже (п. 24.9). Здесь мы для простоты рассуждений несколько видоизменим пример.

1*. Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 + 3\lambda x$, где λ — положительное число. Критическими точками функции f являются $x = -\sqrt{\lambda}i$ и $x = +\sqrt{\lambda}i$, критическими значениями — $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}i$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}i$. В качестве области U возьмем круг достаточно большого радиуса r с центром в нуле ($r \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$). Рассмотрим два некритических значения функции f: $z_0 = 0$ и $z_0^* = r$. Критические значения $z_{1,2}$ соединим с $z_0 = 0$ отрезками, идущими по мнимой оси, $z_0 = 0$ соединим с $z_0^* = r$ отрезком положительной вещественной полуоси. Тем самым мы получили пути u_1 и u_2, соединяющие критические значения $z_{1,2}$ с некритическим значением z_0^*. Как и раньше, нулевое многообразие уровня функции f состоит из трех точек $x_1 = -\sqrt{3\lambda}i$, $x_2 = 0$ и $x_3 = +\sqrt{3\lambda}i$. Многообразие уровня $\{f = z_0^*\}$ близко к многообразию уровня $\{f_0 = z_0^*\}$ функции $f_0(x) = x^3$ (поскольку $|z_0^*| = r \gg 2\lambda\sqrt{\lambda}$). Поэтому оно состоит из трех точек $x_1^* \approx \exp(-2\pi i/3)\sqrt[3]{z_0^*}$, $x_2^* \approx \sqrt[3]{z_0^*}$, $x_3^* \approx \exp(2\pi i/3)\sqrt[3]{z_0^*}$. Нетрудно видеть, что вдоль отрезка, соединяющего критическое значение $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}i$ (соответственно, $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}i$) с некритическим значением $z_0 = 0$, исчезает цикл $\{x_2\} - \{x_1\}$ (соответственно, $\{x_3\} - \{x_2\}$). Далее, очевидно, что при движении некритического значения z по отрезку положительной полуоси от $z_0 = 0$ к $z_0^* = r$ точки многообразия $\{f = z\}$ перемещаются таким образом, что точка x_2 остается на вещественной оси, точка x_1 — в нижней, а точка x_3 — в верхней полуплоскости. Поэтому при изменении z от z_0 до z_0^* точки x_1, x_2 и x_3 переходят в точки x_1^*, x_2^* и x_3^* соответственно. Следовательно, вдоль описанных путей u_1 и u_2, соединяющих критические значения z_1 и z_2 функции f с некритическим значением z_0^*, исчезают циклы $\Delta_1 = \{x_2^*\} - \{x_1^*\}$ и $\Delta_2 = \{x_3^*\} - \{x_2^*\}$ соответственно. Легко видеть, что исчезающие циклы Δ_1 и Δ_2 образуют отмеченный набор.

2. В качестве другого примера рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ (λ — малое положительное число). Эта функция является шевелением функции $f_0(x, y) = x^3 + y^2$, также имеющей особенность типа A_2 в смысле ч. I. Функция f имеет те же критические значения $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$, что и функция из первого примера. Эти значения

принимаются в точках $(\sqrt{\lambda}, 0)$ и $(-\sqrt{\lambda}, 0)$ соответственно. Соединим критические значения z_1 и z_2 с некритическим значением $z_0 = 0$ отрезками u_1 и u_2 вещественной оси. Нулевое многообразие уровня функции f (комплексная кривая $\{f = 0\}$) является графиком двузначной функции $y = \sqrt{-x^3 + 3\lambda x}$ и поэтому является двулистным разветвленным накрытием плоскости комплексной переменной x, ветвящимся в точках $x_1 = -\sqrt{3\lambda}$, $x_2 = 0$ и $x_3 = \sqrt{3\lambda}$. Оно может быть получено из двух экземпляров плоскости комплексной переменной x с разрезами от точки x_1 до точки x_2 и от точки x_3 до бесконечности (см. рис. 77), склеенных крест-накрест вдоль этих разрезов. При изменении z вдоль вещественной оси от $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ до $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ многообразие $\{f = z\}$ деформируется. Изменение точек $\tilde{x} = \tilde{x}_1(z)$, $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_2(z)$ и $\tilde{x}_3 = \tilde{x}_3(z)$ ветвления этого многообразия как двулистного накрытия над плоскостью комплексной переменной x показано на рис. 78. Из него видно, что исчезающими циклами, соответствующими критическим значениям $z_1 = -2\lambda\sqrt{\lambda}$ и $z_2 = 2\lambda\sqrt{\lambda}$ и описанным путям u_1 и u_2, соединяющим их

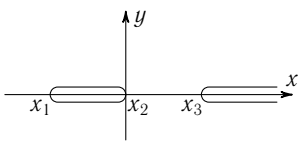


Рис. 77

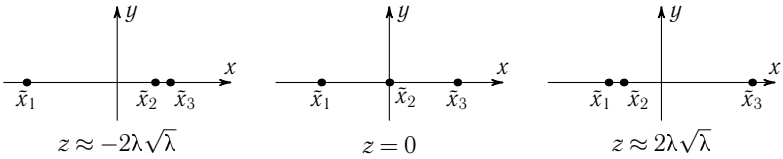


Рис. 78

с некритическим значением 0, являются одномерные циклы Δ_1 и Δ_2, изображенные на рис. 79 (пунктиром показана часть цикла, лежащая на втором листе поверхности; ориентации исчезающих циклов опять могут быть выбраны произвольно).

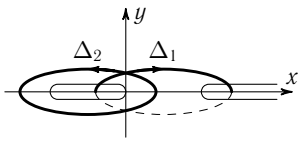


Рис. 79

Пусть опять u — путь, соединяющий некоторое критическое значение z_i с некритическим значением z_0.

О п р е д е л е н и е. *Простой петлей*, соответствующей пути u, называется элемент фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений, представленный петлей, идущей по пути u от точки z_0 к точке z_i, обходящей точку z_i в положительном направлении (против часовой стрелки) и возвращающейся по пути u в точку z_0.

Область U с выколотыми из нее μ критическими значениями $\{z_i\colon i = 1, \dots, \mu\}$ функции f гомотопически эквивалентна букету μ окружностей. Поэтому фундаментальная группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений функции f является свободной группой с μ образующими. Если $\{u_i\colon i = 1, \dots, \mu\}$ — система путей, определяющая отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$, то группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ порождена простыми петлями $\tau_1, \dots, \tau_\mu$, соответствующими путям $u_1, \dots, u_\mu$.

О п р е д е л е н и е. Набор исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$, определяемый набором путей $\{u_i\}$, называется *слабо отмеченным*, если фундаментальная группа $\pi_1(U - \{z_i\}, z_0)$ дополнения к множеству критических значений является свободной группой с образующими $\tau_1, \dots, \tau_\mu$, соответствующими путям $u_1, \dots, u_\mu$.

Заметим, что перестановка элементов сохраняет слабую отмеченность набора, но не сохраняет его отмеченность.

Если набор путей $\{u_i\colon i = 1, \dots, \mu\}$ определяет слабо отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ в группе $(n-1)$-мерных гомологий неособого многообразия уровня, то группа монодромии функции f порождена операторами монодромии $h_{\tau_i *}$ простых петель τ_i $(i = 1, \dots, \mu)$, соответствующих путям u_i. Поэтому группа монодромии (морсовской) функции f всегда является группой, порожденной μ образующими.

О п р е д е л е н и е. Оператор монодромии $h_i = h_{\tau_i *}\colon H_*(F_{z_0}) \to H_*(F_{z_0})$ простой петли τ_i называется *оператором Пикара—Лефшеца*, соответствующим пути u_i (или исчезающему циклу Δ_i).

П р и м е р ы. 1. Рассмотрим морсовскую функцию $f(x) = x^3 + 3\lambda x$ из примера 1* (с. 316) к определению отмеченных наборов исчезающих циклов. Пусть τ_i — простая петля (с началом и концом в точке z_0^*), соответствующая пути u_i. При движении некритического значения z вдоль петли τ_1 многообразие уровня $\{f = z\}$ меняется следующим образом: точки x_1^* и x_2^* сближаются, делают по пол-оборота вокруг общего центра, меняясь местами, и расходятся на прежние места; точка x_3^* возвращается на свое место. Поэтому монодромия h_{τ_1} петли τ_1 меняет местами точки x_1^* и x_2^* и сохраняет точку x_3^*. Отсюда следует, что $h_1\Delta_1 = h_{\tau_1^*}\Delta_1 = h_{\tau_1^*}(\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_2^*\} = -\Delta_1$, $h_1\Delta_2 = h_{\tau_1^*}\Delta_2 = h_{\tau_1^*}(\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_1^*\} = \Delta_2 + \Delta_1$. Точно так же $h_2\Delta_2 = -\Delta_2$, $h_2\Delta_1 = \Delta_2 + \Delta_1$.

Группа $H_{n-1}(F_z, \partial F_z)$ гомологий неособого многообразия уровня по модулю края является группой, двойственной к группе $H_{n-1}(F_z)$ (приведенной по модулю точки при $n = 1$). В данном случае ее роль исполняет группа обычных нульмерных гомологий многообразия уровня $\{f = z_0^*\}$ (состоящего из трех точек x_1^*, x_2^* и x_3^*), профакторизованная по подгруппе, порожденной «максимальным циклом» $\{x_1^*\} + \{x_2^*\} + \{x_3^*\}$. Она порождена двумя циклами ∇_1 и ∇_2, такими что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. В качестве таких циклов можно взять

$\nabla_1 = -\{x_1^*\}$, $\nabla_2 = \{x_3^*\}$. Из описания преобразования монодромии h_{τ_1} следует, что $\mathrm{var}_{\tau_1}\nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\mathrm{var}_{\tau_1}\nabla_2 = 0$. Для петли τ_2 имеем $\mathrm{var}_{\tau_2}\nabla_1 = 0$, $\mathrm{var}_{\tau_2}\nabla_2 = -\Delta_2$.

Рассмотрим теперь петлю τ, определяемую формулой $\tau(t) = z_0^* \exp(2\pi i t)$. Петля τ обходит критические значения функции f один раз в положительном направлении (против часовой стрелки) по кругу большого радиуса. Из того, что при больших $|z|$ множество уровня $\{f = z\}$ близко к множеству уровня $\{x^3 = z\}$, следует, что преобразование монодромии h_τ петли τ переводит точки x_1^*, x_2^* и x_3^* друг в друга циклически ($x_1^* \to x_2^* \to x_3^* \to x_1^*$). Отсюда вытекает, что $h_{\tau^*}\Delta_1 = h_{\tau^*}(\{x_2^*\} - \{x_1^*\}) = \{x_3^*\} - \{x_2^*\} = \Delta_2$, $h_{\tau^*}\Delta_2 = h_{\tau^*}(\{x_3^*\} - \{x_2^*\}) = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$. Эти соотношения можно вывести также из того, что петля τ гомотопна произведению $\tau_2\tau_1$ простых петель τ_2 и τ_1 и, следовательно, $h_{\tau^*} = h_1 \cdot h_2$. Для оператора вариации имеем $\mathrm{var}_\tau\nabla_1 = -\{x_2^*\} + \{x_1^*\} = -\Delta_1$, $\mathrm{var}_\tau\nabla_2 = \{x_1^*\} - \{x_3^*\} = -\Delta_1 - \Delta_2$.

Группа монодромии морсовской функции f порождена операторами $h_1 = h_{\tau_1^*}$ и $h_2 = h_{\tau_2^*}$ монодромии петель τ_1 и τ_2 (операторами Пикара—Лефшеца). Все элементы этой группы сохраняют форму пересечений в группе $H_0(F_{z_0^*})$ гомологий неособого многообразия уровня (приведенной по модулю точки), порожденной исчезающими циклами Δ_1 и Δ_2. Чтобы описать группу монодромии нагляднее, рассмотрим на евклидовой плоскости шестерку векторов длины $\sqrt{2}$, составляющих друг с другом углы, равные $\pi/3$ (рис. 80). Нетрудно видеть, что группа $H_0(F_{z_0^*})$ (как модуль над кольцом целых чисел с целочисленной билинейной формой на нем) изоморфна целочисленной решетке на плоскости, порожденной векторами Δ_1 и Δ_2 (см. рис. 80; шесть векторов, изображенных на рисунке, — это элементы решетки, квадраты длин которых равны 2). При этом оператор h_1 реализуется отражением относительно прямой L_1, ортогональной вектору Δ_1, а оператор h_2 — относительно прямой L_2, ортогональной вектору Δ_2. Отсюда следует, что группа преобразований решетки, порожденная операторами h_1 и h_2 (группа монодромии морсовской функции f), изоморфна группе $S(3)$ перестановок трех элементов (а именно — трех векторов $(2\Delta_1 + \Delta_2)$, $(-\Delta_1 + \Delta_2)$ и $(-\Delta_1 - 2\Delta_2)$).

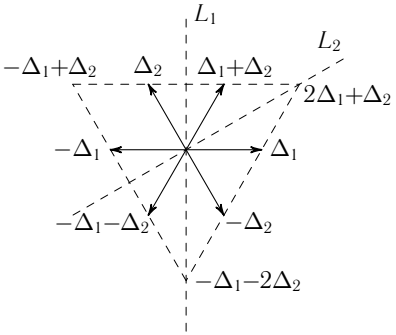


Рис. 80

2. В примере 2 (с. 316) описание многообразия уровня $\{f = z\}$ как двулистного разветвленного накрытия над плоскостью комплексной

переменной x, ветвящегося в трех точках, позволяет проследить за действиями преобразований монодромии h_{τ_1} и h_{τ_2} и получить соотношения $h_1\Delta_1 = \Delta_1$, $h_1\Delta_2 = \Delta_2 + \Delta_1$, $h_2\Delta_1 = \Delta_1 - \Delta_2$, $h_2\Delta_2 = \Delta_2$, $\mathrm{var}_{\tau_1}\nabla_1 = -\Delta_1$, $\mathrm{var}_{\tau_1}\nabla_2 = 0$, $\mathrm{var}_{\tau_2}\nabla_1 = 0$, $\mathrm{var}_{\tau_2}\nabla_2 = -\Delta_2$. Мы не будем проводить здесь соответствующие геометрические рассмотрения, оставив их читателю *). Укажем только относительные циклы, которые могут быть взяты в качестве ∇_1 и ∇_2 (образующих группы $H_1(F_{z_0^*}, \partial F_{z_0^*})$ относительных гомологий неособого многообразия уровня функции f по модулю края, таких, что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$): см. рис. 81.

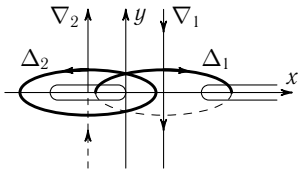


Рис. 81

Группа монодромии морсовской функции $f(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ изоморфна подгруппе группы невырожденных матриц размера (2×2), порожденной матрицами $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующими операторам Пикара—Лефшеца h_1 и h_2. Эта группа совпадает с группой всех целочисленных матриц с определителем $(+1)$.

23.3. Теорема Пикара—Лефшеца. Пусть τ — простая петля, соответствующая пути u, соединяющему критическое значение z_i с некритическим значением z_0, $\Delta \in H_{n-1}(F_{z_0})$ — цикл, исчезающий вдоль пути u. Мы хотим определить действие операторов var_τ и h_{τ^*} в соответствующих группах гомологий.

Не ограничивая общности, можно считать, что критическое значение $z_i = u(0)$ равно нулю, в окрестности критической точки p_i функция f имеет вид $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_j x_j^2$ (при достаточно малом $\|(x_1, \ldots, x_n)\|$, например, при $\sum\limits_j |x_j|^2 \leqslant 4\varepsilon^2$; в точке p_i все локальные координаты x_j равны нулю), некритическое значение z_0 достаточно близко к критическому значению 0 (например, $|z_0| = \varepsilon^2$), а $u(t) = tz_0$. Кроме того, мы будем предполагать, что все ненулевые критические значения функции f по модулю больше $4\varepsilon^2$. Линейная замена координат позволяет считать, что $\varepsilon = 1$, $z_0 = 1$. Петля τ может быть заменена гомотопной ей петлей τ': $\tau'(t) = \exp(2\pi i t)$, $t \in [0, 1]$.

Пусть $r = r(x_1, \ldots, x_n) = \|x\| = \left(\sum\limits_j |x_j|^2\right)^{1/2} = \left(\sum\limits_j x_j\bar{x}_j\right)^{1/2}$ — норма вектора $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Обозначим через $\tilde{F}_z$ пересечение множества уровня F_z с (замкнутым) шаром $\bar{B}_2 = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon r \leqslant 2\}$ радиуса 2 в пространстве $\mathbb{C}^n$.

*) Они аналогичны тем, которые проводились во введении для более простого случая.

Л е м м а 2. *При* $|z| < 4$ *множество уровня* F_z *трансверсально к* $(2n-1)$*-мерной сфере* $S_2 = \partial \bar{B}_2$ (*множество уровня* F_z *является многообразием при* $z \neq 0$, *нулевое множество уровня* F_0 *является многообразием всюду, кроме нуля*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in F_z \cap S_2$ и множество уровня F_z не трансверсально к сфере S_2 в точке x. Тогда $dr^2(x)$ линейно выражается через $df(x)$ и $d\bar{f}(x)$, т. е. $dr^2(x) = \alpha\, df(x) + \beta\, d\bar{f}(x)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Имеем $df(x) = 2\sum x_j\, dx_j$, $d\bar{f}(x) = 2\sum \bar{x}_j\, d\bar{x}_j$, $dr^2(x) = \sum \bar{x}_j\, dx_j + \sum x_j\, d\bar{x}_j$, откуда следует, что $\bar{x}_j = 2\alpha x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Но не все координаты x_j равны нулю. Поэтому $|2\alpha| = 1$, а значит, $r^2(x) = 2\alpha f(x)$, $|f(x)| = r^2(x) = 4$, что и требовалось доказать.

Из этой леммы следует, что множества $\tilde{F}_z = F_z \cap \bar{B}_2$ являются при $0 < |z| < 4$ многообразиями с краем, диффеоморфными между собой. Очевидно, что множество $\tilde{F}_0$ является конусом с вершиной в нуле и поэтому стягиваемо.

Л е м м а 3. *При* $0 < |z| < 4$ *многообразие* $\tilde{F}_z$ *диффеоморфно пространству расслоения дисков касательного расслоения к стандартной* $(n-1)$*-мерной сфере* S^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не теряя общности, можно считать, что $z = 1$, т. е. рассматривать многообразие $\tilde{F}_1$. Пусть $x_j = u_j + iv_j$, где числа u_j и v_j вещественны. В координатах u_j, v_j многообразие $\tilde{F}_1$ задается уравнениями $\sum u_j^2 - \sum v_j^2 = 1$, $\sum u_j v_j = 0$, $\sum u_j^2 + \sum v_j^2 \leqslant 4$. В вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ с координатами $\tilde{u}_j$, $\tilde{v}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ пространство расслоения дисков касательного расслоения к стандартной $(n-1)$-мерной сфере, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^n$, может быть задано в виде $\sum \tilde{u}_j^2 = 1$, $\sum \tilde{u}_j \tilde{v}_j = 0$, $\sum \tilde{v}_j^2 \leqslant \rho^2$ ($\rho > 0$ — радиус дисков расслоения, от которого тип пространства расслоения как дифференцируемого многообразия, конечно, не зависит). Нетрудно проверить, что преобразование $\tilde{u}_j = u_j / \sqrt{\sum u_j^2}$, $\tilde{v}_j = v_j$ задает требуемый диффеоморфизм (при $\rho^2 = 3/2$).

Отсюда следует, что $H_k(\tilde{F}_1) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_{n-1}(\tilde{F}_1) = \mathbb{Z}$. При этом группа гомологий $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ порождена исчезающим циклом Пикара—Лефшеца Δ, представленным стандартной $(n-1)$-мерной сферой $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon \sum u_j^2 = 1, v_j = 0\}$.

Будем временно рассматривать многообразие $\tilde{F}_1$ с ориентацией, определяемой структурой касательного расслоения к сфере. Это означает, что в точке $(1, 0, \ldots, 0)$ многообразия $\tilde{F}_1$ положительно ориентированной системой координат является $u_2, u_3, \ldots, u_n, v_2, v_3, \ldots, v_n$. Ориентация $\tilde{F}_1$ как комплексного многообразия определяется следующим упорядочением координат: $u_2, v_2, u_3, v_3, \ldots, u_n, v_n$. Легко видеть, что эти две ориентации отличаются знаком $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$.

Индекс самопересечения нулевого сечения в пространстве касательного расслоения к многообразию совпадает с эйлеровой характеристикой этого многообразия. Это утверждение может быть доказано следующим образом. По одному из определений, эйлерова характеристика многообразия N — это количество особых точек общего векторного поля ν на многообразии N, считаемых с кратностью $+1$ или -1 в соответствии с их индексами ($\nu\colon N \to TN$, $\nu(x) \in T_xN$). Для вычисления индекса самопересечения $(N \circ N)$ многообразия N как нулевого сечения касательного расслоения TN в пространстве этого расслоения можно выбрать шевеление $\tilde{N}$ многообразия N в пространстве TN, которое пересекается с N трансверсально в конечном числе точек, и определить индексы пересечений $(N \circ \tilde{N})$ циклов N и $\tilde{N}$ в этих точках. В качестве такого шевеления можно взять $\tilde{N} = \{(x, \nu(x))\}$, где $x \in N$, $\nu(x) \in T_xN$, ν — векторное поле общего вида на многообразии N. Точки пересечений циклов N и $\tilde{N}$ совпадают с особыми точками векторного поля ν. При этом несложные вычисления показывают, что индекс пересечения циклов N и $\tilde{N}$ в некоторой точке пересечения совпадает с индексом этой точки как особой точки векторного поля ν.

Эйлерова характеристика $\chi(S^{n-1})$ $(n-1)$-мерной сферы S^{n-1} равна $1 + (-1)^{n-1}$, т. е. равна 0 при четном n и 2 — при нечетном. Из того, что многообразие $\tilde{F}_1$ диффеоморфно пространству расслоения дисков касательного расслоения к $(n-1)$-мерной сфере, следует, что индекс самопересечения исчезающего цикла Δ в многообразии $\tilde{F}_1$, ориентированном в соответствии со структурой пространства касательного расслоения к сфере на нем, равен $\chi(S^{n-1}) = 1 + (-1)^{n-1}$. Отсюда вытекает следующий результат.

Л е м м а 4. *Индекс самопересечения исчезающего цикла* Δ *в* комплексном *многообразии* $\tilde{F}_1$ *равен*

$$(\Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(1 + (-1)^{n-1}) = \begin{cases} 0 & \text{при } n \equiv 0 \bmod 2, \\ +2 & \text{при } n \equiv 1 \bmod 4, \\ -2 & \text{при } n \equiv 3 \bmod 4. \end{cases}$$

По теореме двойственности Пуанкаре относительные группы гомологий $H_k(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ являются нулевыми при $k \neq n-1$, группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$ целых чисел. При этом группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ порождена относительным циклом ∇, двойственным к исчезающему циклу Δ, т. е. таким, что индекс пересечения $(\nabla \circ \Delta)$ равен единице. В качестве представителя цикла ∇ может быть выбрано неособое подмногообразие

$$T = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \tilde{F}_1 \colon u_1 > 0, \;\; u_2 = \ldots = u_n = 0\}$$

многообразия $\tilde{F}_1$, ориентированное подходящим образом. При диффеоморфизме многообразия уровня $\tilde{F}_1$ с пространством касательного расслоения

к сфере, построенном в лемме 3, подмногообразию T соответствует слой этого расслоения, т. е. шар в касательном пространстве к сфере S^{n-1} в точке $(1, 0, \ldots, 0)$.

Рассмотрим ограничение отображения f на $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$ (B_2 — открытый шар радиуса 2, $\bar{D}_1$ — замыкание диска радиуса 1 в плоскости $\mathbb{C}$). Оно определяет локально тривиальное, а следовательно, и тривиальное, расслоение $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2 \to \bar{D}_1$ над единичным диском $\bar{D}_1$. Поднятие Γ_t гомотопии $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ до гомотопии слоя F_1 может быть выбрано согласованным со структурой прямого произведения на пространстве этого расслоения $f^{-1}(\bar{D}_1) \setminus B_2$. Относительный цикл δ размерности k из $(F_1, \partial F_1)$ может быть представлен в виде $\delta = \delta_1 + \delta_2$, где δ_1 — относительный цикл из $(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1)$, а δ_2 — цепь в $F_1 \setminus B_2$. Преобразование обхода $h_{\tau'} = \Gamma_1$ неподвижно на $F_1 \setminus B_2$. Поэтому оно сохраняет цепь и нетривиально действует только на цикл δ_1. Таким образом, $\mathrm{var}_{\tau'}(\delta) = \mathrm{var}_{\tau'}(\delta_1)$ (здесь мы используем одни и те же обозначения для операторов монодромии $\mathrm{var}_{\tau'}$, соответствующих парам $(M^n, \partial M^n)$ и $(\bar{B}_2, \partial \bar{B}_2)$). Если размерность k цикла δ отлична от $(n-1)$, то $\delta_1 = 0$ в группе относительных гомологий $H_k(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1)$ (так как сама эта группа является нулевой). Отсюда вытекает следующее утверждение.

Л е м м а 5. *Во всех размерностях, кроме $(n-1)$-й, оператор вариации $\mathrm{var}_{\tau'}$ является нулевым, а операторы $h_{\tau'*}$ и $h^{(r)}_{\tau'*}$ — тождественными.*

Если $k = \dim \delta = (n-1)$, то $\delta_1 = m\nabla$ в группе гомологий $H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial \tilde{F}_1)$. При этом $m = (\delta \circ \Delta)$. Поэтому для того, чтобы определить действие оператора вариации $\mathrm{var}_{\tau'}$, достаточно вычислить класс гомологий $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla)$.

Т е о р е м а П и к а р а — Л е ф ш е ц а.

$$\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = (-1)^{n(n+1)/2}\Delta.$$

С л е д с т в и е. *Для $a \in H_{n-1}(F_{z_0}, \partial F_{z_0})$*

$$\mathrm{var}_{\tau}(a) = (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta)\Delta,$$

$$h^{(r)}_{\tau*}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta) i_*(\Delta);$$

для $a \in H_{n-1}(F_{z_0})$

$$h_{\tau*}(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta)\Delta.$$

Последняя формула обычно называется *формулой Пикара—Лефшеца*. Для нечетного числа переменных n она вместе с леммой 4 показывает, что оператор Пикара—Лефшеца $h_{\tau*}$ является отражением пространства $H_{n-1}(F_{z_0})$ в гиперплоскости, ортогональной (в смысле формы пересечения) соответствующему исчезающему циклу Δ.

Доказательство теоремы Пикара—Лефшеца может быть получено с помощью элементарных, хотя и довольно громоздких, прямых вычислений

(см., например, [120]). Мы приведем ниже ее более инвариантное доказательство (см. п. 24.4). Здесь мы докажем ее для случая нечетного числа переменных n.

Существует естественное поднятие Ω_t гомотопии $t \mapsto \tau'(t) = \exp(2\pi i t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ до гомотопии слоя $\tilde{F}_1 \mapsto \tilde{F}_{\tau'(t)}$, не согласованное, впрочем, со структурой прямого произведения на краю. Это поднятие задается формулой $\Omega_t(x) = \exp(\pi i t)x$. Гомотопия Ω_t не годится для определения действия оператора вариации $\mathrm{var}_{\tau'}$, но нетрудно видеть, что с ее помощью можно определить действие оператора монодромии $h_{\tau'*}$ на группе $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ гомологий слоя. Очевидно, что преобразование Ω_1 является умножением на (-1). В частности, на исчезающей сфере Δ оно совпадает с отражением в центре. Отсюда следует, что $\Omega_{1*}(\Delta) = h_{\tau'*}(\Delta) = (-1)^n\Delta$.

Пусть $i_*\colon H_{n-1}(\tilde{F}_1) \to H_{n-1}(\tilde{F}_1, \partial\tilde{F}_1)$ — естественный гомоморфизм, индуцированный включением $\tilde{F}_1 \hookrightarrow (\tilde{F}_1, \partial F_1)$. Поскольку $(\Delta \circ \Delta) = (i_*(\Delta) \circ \Delta)$, $(\nabla \circ \Delta) = 1$, из леммы 4 вытекает, что

$$i_*(\Delta) = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}(1 + (-1)^{n-1})\nabla = \begin{cases} 0 & \text{при } n \equiv 0 \bmod 2, \\ 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}\nabla & \text{при } n \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Так как группа $H_{n-1}(\tilde{F}_1)$ гомологий слоя изоморфна группе целых чисел и порождена исчезающим циклом Δ, то $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = m\Delta$ для некоторого целого числа m. Из того, что $h_{\tau'*} = \mathrm{id} + \mathrm{var}_{\tau'} \cdot i_*$, для нечетного числа переменных n получаем $-\Delta = h_{\tau'*}(\Delta) = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-2}{2}}\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = \Delta + 2(-1)^{\frac{n-1}{2}}m\Delta$. Отсюда следует, что $m = (-1)^{\frac{n+1}{2}}$; для нечетного n это равенство совпадает с утверждением теоремы Пикара—Лефшеца.

§ 24. Топология неособого множества уровня и оператор вариации особенности

24.1. Неособое множество уровня особенности. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку. Из теоремы о неявных функциях следует, что в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ множество уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ является неособым аналитическим многообразием, а множество уровня $f^{-1}(0)$ является неособым многообразием вне нуля. В точке $0 \in \mathbb{C}^n$ это множество уровня имеет особую точку.

Л е м м а 1. *Существует такое* $\rho > 0$, *что сфера* $S_r \subset \mathbb{C}^n$ *радиуса* $r \leqslant \rho$ *с центром в нуле трансверсально пересекается с множеством уровня* $f^{-1}(0)$.

Действительно, функция $\|x\|^2$ может принимать на множестве $f^{-1}(0)$ (в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$) лишь конечное число критических значений

(для случая, когда f — полином, это утверждение, например, автоматически вытекает из «леммы об отборе кривых» из [174]; в общем случае оно выводится из аналогичных соображений). Выберем в качестве ρ такое число, квадрат которого меньше всех критических значений функции $\|x\|^2$ на многообразии $f^{-1}(0) - 0$. Условие того, что все критические значения функции $\|x\|^2$ на $f^{-1}(0) - 0$ больше, чем ρ^2, эквивалентно тому, что при $r \leqslant \rho$ сфера S_r радиуса r с центром в нуле (являющаяся многообразием уровня функций $\|x\|^2$) трансверсально пересекается с многообразием $f^{-1}(0) - 0$.

Из леммы 1 следует, что для достаточно малого $\varepsilon_0 > 0$ многообразие уровня $f^{-1}((\varepsilon))$ также трансверсально к сфере S_ρ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Таким образом, функция $f\colon \bar{B}_\rho \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям 1)—3) п. 23.1 (с шаром $\bar{B}_\rho$ радиуса ρ с центром в нуле в качестве M^n, диском $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ радиуса ε_0 с центром в нуле в плоскости $\mathbb{C}$ в качестве U и единственной критической точкой 0). Нас будет интересовать топология множества уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ в окрестности нуля.

О п р е д е л е н и е. *Неособым множеством уровня* особенности f вблизи критической точки 0 называется множество

$$V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n\colon f(x) = \varepsilon,\ \|x\| \leqslant \rho\}$$

при $0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, которое является комплексным многообразием с краем.

Многообразие V_ε определено однозначно с точностью до диффеоморфизма. Известно ([174]), что оно имеет гомотопический тип букета нескольких сфер размерности $(n-1)$. Количество $\mu = \mu(f)$ этих сфер называется *кратностью* или *числом Милнора* особенности f. Группы гомологий $H_k(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня являются нулевыми при $k \neq (n-1)$, $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^\mu$ — свободная абелева группа с μ образующими. Утверждение о группах гомологий $H_k(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня мы докажем ниже (см. теорему 1). С небольшим дополнением (доказательством односвязности многообразия V_ε, которое выводится из тех же соображений, что и теорема 1) отсюда вытекает и результат о гомотопическом типе неособого множества уровня (для $n > 2$).

Фундаментальная группа $\pi_1(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0)$ дополнения к множеству критических значений изоморфна группе целых чисел и порождена классом петли γ_0, обходящей критическое значение 0 один раз в положительном направлении (против часовой стрелки). Можно, например, положить

$$\gamma_0(t) = \varepsilon \cdot \exp(2\pi i t) \quad (|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0,\ t \in [0, 1]).$$

О п р е д е л е н и е. *Классической монодромией* $h\colon V_\varepsilon \to V_\varepsilon$ особенности f называется монодромия h_{γ_0} петли γ_0. *Оператором классической монодромии* особенности f называется автоморфизм $h_* = h_{\gamma_0 *}$ группы

$H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня V_ε. *Оператором вариации* особенности f называется оператор

$$\mathrm{Var}_f = \mathrm{var}_{\gamma_0} \colon H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon)$$

вариации петли γ_0.

Базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon) \cong \mathbb{Z}^{\mu(f)}$ неособого множества уровня V_ε особенности f может быть построен следующим образом. Пусть $\tilde{f} = f_\lambda$ — шевеление функции f, определенное в окрестности шара $\bar{B}_\rho$ (в качестве $\tilde{f}$ можно, например, взять шевеление $f_\lambda = f + \lambda g$, где g — линейная функция $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$). Для достаточно малых λ ($|\lambda| \leqslant \lambda_0$) множество уровня $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon)$ трансверсально к сфере S_ρ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, и критические значения функции $\tilde{f}$ на шаре $\bar{B}_\rho$ по модулю меньше ε_0. Легко показать, что неособое множество уровня $\tilde{f}^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ диффеоморфно неособому множеству уровня V_ε функции f при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$. Из теоремы Сарда следует, что почти все шевеления $\tilde{f}$ функции f имеют в шаре $\bar{B}_\rho$ только невырожденные критические точки с различными критическими значениями (в примере так будет для почти всех линейных функций g).

Докажем, например, что функция $\tilde{f} = f + g$ является морсовской для почти всех линейных функций $g\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Для этого рассмотрим отображение $df\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, задаваемое формулой

$$df(x) = (\partial f/\partial x_1(x), \ldots, \partial f/\partial x_n(x)) \quad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n).$$

Почти все значения $(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{C}^n$ являются некритическими для этого отображения (теорема Сарда). Если $(l_1, \ldots, l_n)$ — некритическое значение отображения df, то функция $f - \sum\limits_j l_j x_j$ имеет только невырожденные критические точки. Действительно, критические точки функции $f - \sum\limits_j l_j x_j$ — это точки, в которых $\partial f/\partial x_j - l_j = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, т. е. прообразы точки $(l_1, \ldots, l_n)$ при отображении df. Поскольку значение $(l_1, \ldots, l_n)$ является некритическим для отображения df, в этих точках матрица $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_k)$ имеет ненулевой определитель, что и означает невырожденность соответствующих критических точек функции $\tilde{f} = f - \sum l_j x_j$. Множество некритических значений отображения df открыто. Поэтому добавление к функции $\tilde{f}$ подходящей малой линейной функции не выводит ее из класса функций, имеющих невырожденные критические точки, и позволяет добиться того, чтобы ее критические значения стали попарно различными.

Мы снова получили ситуацию, описанную в § 23. Пусть, как и раньше, $F_z = \tilde{f}^{-1}(z) \cap \bar{B}_\rho(|z| \leqslant \varepsilon_0)$, функция $\tilde{f}$ имеет в шаре $\bar{B}_\rho$ несколько критических точек p_i с различными критическими значениями z_i ($|z_i| < \varepsilon_0$, $i = 1, \ldots, \mu$), $\{u_i\}$ — система путей, соединяющих критические значения z_i с некритическим значением z_0 ($|z_0| = \varepsilon_0$) и определяющих в группе гомо-

логий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого множества уровня функции $\tilde{f}$ отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$. Напомним, что последнее означает, что пути u_i являются несамопересекающимися и попарно не имеют общих точек, кроме точки z_0.

Т е о р е м а 1. *Отмеченный набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ образует базис (свободной абелевой) группы $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности f. В частности, количество невырожденных критических точек функции $\tilde{f}$ в множестве $\bar{B}_\rho \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$ (на которые распадается критическая точка 0 функции f) равно кратности $\mu(f)$ особенности f. Группы $H_k(F_{z_0})$ являются нулевыми при $k \neq (n-1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X = \bar{B}_\rho \cap f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$, $\tilde{X} = \bar{B}_\rho \cap \tilde{f}^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0})$, где $\rho > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ описаны выше. Покажем, что пространство X является стягиваемым.

Из того, что множество $f^{-1}(0)$ нулевого уровня функции f трансверсально к сферам S_r радиуса $r \leqslant \rho$ с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$, немедленно вытекает, что множество $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ гомеоморфно конусу над многообразием $f^{-1}(0) \cap S_\rho$ и, следовательно, стягиваемо. Стягивание множества $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ в точку 0, принадлежащую ему, можно осуществить с помощью векторного поля на нем, ортогонального к подмногообразиям $f^{-1}(0) \cap S_r$, $r \leqslant \rho$ (напомним, что множество $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является многообразием всюду, кроме нуля).

В свою очередь пространство $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является деформационным ретрактом пространства $X = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$. Построить требуемую деформационную ретракцию пространства X можно, например, следующим образом. Выберем последовательность $\rho = r_0 > r_1 > r_2 > \ldots > 0$, монотонно стремящуюся к нулю. Пусть ε_i — такие числа, что $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > 0$ и множество уровня $f^{-1}(\varepsilon)$ трансверсально к сфере S_{r_i} радиуса r_i с центром в нуле при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_i$. Функция f определяет локально тривиальные, а следовательно, и тривиальные расслоения $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i}) \to \bar{D}_{\varepsilon_i}$. При этом тривиализации этих расслоений могут быть выбраны так, что они будут совпадать на пересечениях $E_i \cap E_{i-1} = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_{i-1}})$. Рассмотрим деформацию g_t диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$, определенную при $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$ и задаваемую формулой

$$g_t(x) = \begin{cases} t \cdot \dfrac{x}{\|x\|} & \text{при } \|x\| \geqslant t, \\ x & \text{при } \|x\| \leqslant t. \end{cases}$$

Отображение g_t переводит диск $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ радиуса ε_0 в диск радиуса t, оставляя последний неподвижным. Отображение g_0 является деформационной ретракцией диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ в точку 0. Поскольку функция f определяет локально

тривиальное расслоение $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0} - 0) \cap \bar{B}_{r_0} \to \bar{D}_{\varepsilon_0} - 0$, существует семейство G_t $(0 < t \leqslant \varepsilon_0)$ отображений множества $X = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_{r_0}$ в себя, поднимающее гомотопию g_{t_0}. Это семейство можно выбрать согласованным со структурой прямого произведения на множествах $E_i = f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_i}) \cap (\bar{B}_{r_0} - B_{r_i})$ при $t \leqslant \varepsilon_i$. Нетрудно видеть, что при этом семейство G_t $(0 < t \leqslant \varepsilon_0)$ естественным образом доопределяется до семейства G_t с $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon_0$, в котором отображение G_0 является деформационной ретракцией множества X на нулевое множество уровня $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_{r_0}$.

Если $\tilde{f}$ — достаточно малое шевеление функции f, то пространство $\tilde{X}$ диффеоморфно пространству X (как гладкое многообразие с углами; на самом деле достаточно того, что пространство $\tilde{X}$ гомотопически эквивалентно пространству X) и поэтому тоже стягиваемо.

Функция $\tilde{f}$ отображает пространство $\tilde{X}$ в диск $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ и вне критических значений $z_1, z_2, \ldots, z_\mu$ является локально тривиальным расслоением со слоем F_{z_0}. Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{i,t} u_i(t) = V$ образов путей u_i. Оно является деформационным ретрактом диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$. Нетрудно видеть, что деформационная ретракция диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ на пространство V может быть поднята до деформационной ретракции пространства $\tilde{X}$ на пространство $Y = \tilde{f}^{-1}(V)$ (аналогично тому, как деформационная ретракция диска $\bar{D}_{\varepsilon_0}$ в точку 0 поднимается до деформационной ретракции пространства X на нулевое множество уровня $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$). Если из пространства Y выкинуть особые слои $\tilde{f}^{-1}(z_i)$, то оставшееся пространство $Y - \bigcup\limits_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ будет расслоено над стягиваемым пространством $V - \{z_i \colon i = 1, \ldots, \mu\}$. Следовательно, оно гомеоморфно прямому произведению слоя F_{z_0} на пространство $V - \{z_i \colon i = 1, \ldots, \mu\}$ и поэтому гомотопически эквивалентно слою F_{z_0}.

Нетрудно показать, что с точностью до гомотопического типа пространство Y получается из слоя F_{z_0} заклеиванием исчезающих сфер Δ_i n-мерными шарами $Ш_i$. Здесь мы определим только отображение в одну сторону, определяющее гомотопическую эквивалентность рассматриваемых пространств. Пусть $s_i(t) \colon S_i^{n-1} \to S_i(t) \subset F_{u_i(t)}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ — семейство отображений стандартной $(n-1)$-мерной сферы S_i^{n-1} (индекс i просто фиксирует номер экземпляра), определяющее исчезающий цикл $\Delta_i = s_i(1)$ $(s_i(0) \colon S_i^{n-1} \to p_i)$. Пусть $Ш_i$ — n-мерный шар, являющийся конусом над сферой S_i^{n-1} $(Ш_i = [0, 1] \times S_i^{n-1}/0 \times S_i^{n-1})$. Пространство $F_{z_0} \cup_{\{\Delta_i\}} \{Ш_i\}$, получающееся из слоя F_{z_0} заклеиванием исчезающих циклов Δ_i n-мерными шарами $Ш_i$, — это факторпространство $F_{z_0} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\mu} Ш_i$ по отношению эквивалентности $s_i(1)(a) \sim (1, a)$ $(a \in S_i^{n-1}, (1, a) \in Ш_i, i = 1, \ldots, \mu)$. Отображение φ его в пространство Y, которое является гомотопической эквивалент-

ностью, может быть задано следующим образом: $\varphi(x) = x$ при $x \in F_{z_0} \subset Y$, $\varphi(t, a) = s_i(t)(a)$ при $(t, a) \in Ш_i$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $a \in S_i^{n-1}$.

Имеет место точная гомологическая последовательность пары $\left(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} f^{-1}(z_i)\right)$:

$$\ldots \to H_{k+1}(Y) \to H_{k+1}\left(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right) \to H_k\left(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right) \to$$
$$\to H_k(Y) \to \ldots$$

Здесь $H_i(Y) = 0$ (поскольку пространство Y гомотопически эквивалентно стягиваемому пространству X; напомним, что гомологии рассматриваются приведенными по модулю точки),

$$H_{k+1}\left(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right) = \bigoplus_{i=1}^{\mu} H_{k+1}(Ш_i, \partial Ш_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq n-1, \\ \mathbb{Z}^\mu & \text{при } k = n-1, \end{cases}$$

$H_k\left(Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right) = H_k(F_{z_0})$. Из точности последовательности следует, что

$$H_k(F_{z_0}) \cong H_{k+1}\left(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq 1, \\ \mathbb{Z}^\mu & \text{при } k = n-1, \end{cases}$$

причем образующая группы $H_n(Ш_i, \partial Ш_i)$ переходит в исчезающий цикл Δ. Отсюда и следует утверждение теоремы.

Нетрудно видеть, что из рассмотрения точной гомотопической последовательности пары $\left(Y, Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)\right)$ выводится односвязность пространства $Y - \bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{f}^{-1}(z_i)$ или, что то же самое, односвязность неособого множества уровня F_{z_0} при $n > 2$.

Из теоремы 1 вытекает, что кратность критической точки особенности f равна количеству невырожденных критических точек, на которые она распадается при шевелении общего вида. Это количество равно количеству (близких к нулю) прообразов общей точки при отображении $df\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ $(df(x_1, \ldots, x_n) = (\partial f/\partial x_1(x), \ldots, \partial f/\partial x_n(x)))$. Отсюда может быть получена следующая формула для кратности изолированной критической точки функции f:

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n),$$

где $\mathcal{O}_n$ — кольцо ростков в нуле голоморфных функций n переменных, $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ — идеал в кольце $\mathcal{O}_n$, порожденный частными производными функции f (якобиев идеал ростка f). Это утверждение доказано в ч. I, § 5.

24.2. Исчезающие циклы и группа монодромии особенности. В п. 24.1 было показано, что почти все шевеления $\tilde{f}$ особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ являются морсовскими, т. е. имеют в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ только невырожденные критические точки в количестве, равном кратности особенности f, причем все критические значения $z_1, \ldots, z_\mu$ функции $\tilde{f}$ различны. При этом неособое множество уровня V_ε особенности f диффеоморфно неособому многообразию уровня $F_{z_0} = \tilde{f}^{-1}(z_0) \cap \bar{B}_\rho$ функции $\tilde{f}$. Наличие такого диффеоморфизма позволяет ввести следующие определения.

Определение. *Исчезающим циклом* Δ в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого множества уровня особенности f называется элемент этой группы, соответствующий циклу в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого множества уровня функции f, исчезающему вдоль пути, соединяющему некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0.

Определение. Базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня, состоящий из отмеченного набора исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$, называется *отмеченным базисом*. Базис, состоящий из слабо отмеченного набора исчезающих циклов, называется *слабо отмеченным*.

Теорема 1 утверждает, что любой отмеченный набор исчезающих циклов образует базис. Позже будет показано, что базис образует и любой слабо отмеченный набор (см. п. 24.6).

Замечание. Термины «отмеченный» и «слабо отмеченный» были введены А. М. Габриэловым. В работе [371] отмеченный базис называется геометрическим.

Определение. *Группой монодромии* особенности f называется группа монодромии (морсовской) функции $\tilde{f}$.

Нетрудно показать, что множество исчезающих циклов и группа монодромии особенности f не зависят от выбора морсовского шевеления $\tilde{f} = f_\lambda$ функции f. Для этого рассмотрим другое такое шевеление $\tilde{\tilde{f}} = f'_\nu$. Шевеления f_λ и f'_ν могут быть включены в одно двупараметрическое семейство функций $f_{\lambda,\nu}$ ($f_{\lambda,0} = f_\lambda$, $f_{0,\nu} = f'_\nu$). В качестве такого семейства можно, например, взять $f_{\lambda,\nu} = f_\lambda + f'_\nu - f$. В пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами (λ, ν) значения параметров (λ, ν), которым соответствуют неморсовские функции $f_{\lambda,\nu}$, образуют (в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$) множество, которое является образом аналитического множества комплексной размерности 1. Поэтому оно не разделяет пространство $\mathbb{C}^2$ значений параметров (λ, ν). Отсюда следует, что шевеления $\tilde{f} = f_\lambda$ и $\tilde{\tilde{f}} = f'_\nu$ могут быть соединены непрерывным однопараметрическим семейством морсовских функций $f_{\lambda(t),\nu(t)}$ ($t \in [0, 1]$, $f_{\lambda(0),\nu(0)} = \tilde{f}$, $f_{\lambda(1),\nu(1)} = \tilde{\tilde{f}}$). Легко видеть, что вдоль такого семейства морсовских функций не меняются множество исчезающих циклов и группа монодромии.

По тем же соображениям не зависят от выбора шевеления понятия отмеченного и слабо отмеченного базисов.

Из результатов § 23 следует, что группа монодромии особенности f порождена операторами Пикара—Лефшеца h_i, соответствующими элементам Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого множества уровня функции f вблизи критической точки. При нечетном числе переменных n эти операторы являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных (в смысле формы пересечения) исчезающим циклам Δ_i. Поэтому при нечетном числе переменных группа монодромии особенности является группой, порожденной отражениями.

П р и м е р ы. В качестве примеров можно рассмотреть функции $f(x) = x^3$ и $f(x, y) = x^3 + y^2$, имеющие особенности типа A_2 в смысле ч. I. Их морсовские шевеления могут быть выбраны в виде $\tilde{f}(x) = x^3 \pm 3\lambda x$ и $\tilde{f}(x, y) = x^3 - 3\lambda x + y^2$ соответственно, где λ — малое положительное число. Отмеченные базисы в гомологиях неособого многообразия уровня и группы монодромии морсовских функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x, y)$ (совпадающие с отмеченными базисами и группами монодромии особенностей $f(x)$ и $f(x, y)$) рассмотрены в примерах к п. 23.2.

24.3. Оператор вариации и форма Зейферта особенности. В п. 24.1 было введено понятие оператора вариации особенности. Для того чтобы изучить свойства этого оператора, дадим другую его интерпретацию ([312], [381]).

Пусть, как и выше, $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку, ρ — достаточно маленькое положительное число, S^{2n-1}_ρ — сфера радиуса ρ с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$. Положим $K = f^{-1}(0) \cap S^{2n-1}_\rho$. Из того, что множество уровня $f^{-1}(0)$ трансверсально пересекается со сферой S^{2n-1}_ρ, следует, что K является гладким подмногообразием сферы S^{2n-1}_ρ коразмерности два. Обозначим через T достаточно малую открытую трубчатую окрестность многообразия K в сфере S^{2n-1}_ρ. Определим отображение $\Phi\colon S^{2n-1}_\rho \setminus T \to S^1 \subset \mathbb{C}$ дополнения к трубчатой окрестности многообразия K в окружность формулой $\Phi(x) = f(x)/|f(x)| = \exp(i \arg f(x))$. В [174, § 4] показано, что отображение Φ является гладким расслоением. При этом ограничение отображения Φ на границу $\partial(S^{2n-1}_\rho \setminus T) = \partial T$ имеет естественную структуру тривиального расслоения $K \times S^1 \to S^1$.

Ограничение функции f на $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$ определяет расслоение над окружностью $S^1_{\varepsilon_0}$ радиуса ε_0, лежащей в комплексной прямой $\mathbb{C}$, слоем которого является неособое многообразие уровня $V_{\varepsilon_0} = f^{-1}(\varepsilon_0) \cap \bar{B}_\rho$ особенности f. При этом, как было объяснено выше, ограничение функции f на край $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap S_\rho$ многообразия $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$ также имеет структуру тривиального расслоения. Операторы классической монодромии

и вариации особенности определялись с помощью расслоения $f^{-1}(S^1_{\varepsilon_0}) \cap \cap \bar{B}_\rho \to S^1_{\varepsilon_0}$.

Лемма 2 (см. [174, § 5]). *Описанные два расслоения над окружностями S^1 и $S^1_{\varepsilon_0}$ эквивалентны (относительно изоморфизма окружностей, являющегося умножением на ε_0). В частности, слой $\Phi^{-1}(z)$ расслоения Φ диффеоморфен неособому множеству уровня особенности f вблизи критической точки.*

Таким образом, при определении оператора вариации Var_f особенности f можно пользоваться расслоением Φ. Как и раньше, через $\Gamma_t\colon \Phi^{-1}(1) \to \to \Phi^{-1}(\exp(2\pi i t))$ будем обозначать семейство диффеоморфизмов, являющееся поднятием гомотопии $t \mapsto \exp(2\pi i t)$ ($\Gamma_0 = \mathrm{id}$, $t \in [0, 1]$) и согласованное со структурой прямого произведения на границе.

Сделаем небольшое отступление с целью напомнить некоторые определения.

Пусть M — ориентированное (вещественное) n-мерное многообразие с краем ∂M, $e_1, \ldots, e_{n-1}$ — репер в касательном пространстве к краю ∂M в некоторой точке, e_0 — внешняя нормаль к краю ∂M в многообразии M в этой же точке. Говорят, что репер $e_1, \ldots, e_{n-1}$ определяет ориентацию края ∂M, если репер $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ является положительно ориентированным репером в касательном пространстве к многообразию M. Аналогичное соглашение имеет место для цепей и их границ.

Пусть a и b — непересекающиеся $(n-1)$-мерные циклы в $(2n-1)$-мерной сфере S^{2n-1}. При $n = 1$ будем дополнительно предполагать, что циклы a и b гомологичны нулю. При $n > 1$ это условие выполняется автоматически. Выберем в сфере S^{2n-1} n-мерную цепь A, граница которой совпадает с циклом a. Легко видеть, что индекс пересечения $(A \circ b)$ цепей A и b в сфере S^{2n-1} (который определен, поскольку граница цепи A, равная a, не пересекается с циклом b) не зависит от выбора цепи A. Действительно, если A' — другая такая цепь, то разность $A - A'$ будет абсолютным n-мерным циклом в сфере S^{2n-1}, откуда $((A - A') \circ b) = 0$, т. е. $(A \circ b) = (A' \circ b)$. Индекс пересечения $(A \circ b)$ цепей A и b называется *коэффициентом зацепления* циклов a и b и обозначается $l(a, b)$.

Другой способ вычисления коэффициента зацепления состоит в следующем. Пусть D^{2n} — шар, границей которого является сфера S^{2n-1}. Выберем две n-мерные цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в шаре D^{2n}, границы которых совпадают с циклами a и b соответственно и которые целиком лежат внутри шара D^{2n}, за исключением своих границ. В этом случае имеет смысл индекс пересечения $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в шаре D^{2n} и $l(a, b) = (A \circ b)_S = (-1)^n(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D = = (\tilde{B} \circ \tilde{A})_D = (-1)^n l(b, a)$.

Чтобы доказать это утверждение, надо заметить, что индекс пересечения $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$ корректно определен, т. е. не зависит от конкретного выбора

цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, для которых $\partial\tilde{A} = a$, $\partial\tilde{B} = b$. Шар D^{2n} можно рассматривать как конус над сферой S^{2n-1}, т. е. как факторпространство произведения $[0, 1] \times S^{2n-1}$ отрезка $[0, 1]$ на сферу S^{2n-1} по подпространству $\{0\} \times S^{2n-1}$ (слоям $\{t\} \times S^{2n-1}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ соответствуют в шаре концентрические сферы радиуса t). После этого в качестве цепи $\tilde{B}$ можно взять конус над циклом b с вершиной в центре шара D^{2n} $(\tilde{B} = [0, 1] \times b/\{0\} \times b)$, а в качестве цепи $\tilde{A}$ — объединение цилиндра $[1/2, 1] \times a$ над циклом a и цепи $\{1/2\} \times A$, лежащей на сфере $\{1/2\} \times S^{2n-1}$ радиуса $1/2$ ($A \subset S^{2n-1}$, $\partial A = a$; для $n = 1$ см. рис. 82). В этом случае цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ будут пересекаться в точках вида $(1/2, x)$, где x — точка пересечения цепи A с циклом b. Знак, которым отличаются соответствующие индексы пересечения, может быть несложно вычислен.

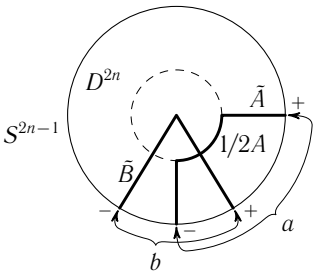


Рис. 82

Вернемся к рассмотрению особенности f. Пусть a и b — $(n-1)$-мерные циклы в слое $\Phi^{-1}(1)$ расслоения $\Phi\colon S^{2n-1}_{\rho} \setminus T \to S^1$. Цикл $\Gamma_{1/2^*} b$ лежит в слое $\Phi^{-1}(-1)$ и поэтому не пересекается с циклом a. Следовательно, имеет смысл коэффициент зацепления циклов a и $\Gamma_{1/2^*} b$ как циклов, лежащих в $(2n-1)$-мерной сфере.

О п р е д е л е н и е. *Формой Зейферта* особенности f называется билинейная форма L на группе гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ $(\cong H_{n-1}(V_\varepsilon))$, определяемая формулой $L(a, b) = l(a, \Gamma_{1/2^*} b)$, где $a, b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$.

Теорема двойственности Александера утверждает, что коэффициент зацепления определяет двойственность групп гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$. Нетрудно видеть, что слой $\Phi^{-1}(-1)$ является деформационным ретрактом пространства $S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1)$. Следовательно, группа гомологий $H_{n-1}(S^{2n-1} - \Phi^{-1}(1))$ изоморфна группе $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$. Так как преобразование $\Gamma_{1/2^*}$ является изоморфизмом групп гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(\Phi^{-1}(-1))$, форма Зейферта определяет двойственность группы гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ самой себе, т. е. является невырожденной целочисленной билинейной формой с определителем, равным (± 1). Заметим, что форма Зейферта L, вообще говоря, не обладает свойством симметрии.

Пусть $b \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $a \in H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$, $\partial\Phi^{-1}(1)$ — абсолютный и относительный по модулю края классы гомологий.

Л е м м а 3. $L(\mathrm{Var}_f a, b) = (a \circ b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем относительный $(n-1)$-мерный цикл в паре $(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$, являющийся представителем класса гомологий a (его мы также будем обозначать через a). Рассмотрим отображение

$[0, 1]\times a \to S^{2n-1}$ цилиндра над циклом a в сферу, переводящее $(t, c)\in[0, 1]\times$ $\times a$ в $\Gamma_t(c) \in S^{2n-1}$. При таком отображении нижнее основание $\{0\} \times a$ цилиндра $[0, 1]\times a$ переходит в цепь a, верхнее основание $\{1\}\times a$ — в цепь $\Gamma_1 a$, боковая поверхность $[0, 1] \times \partial a$ отображается в границу ∂T трубчатой окрестности многообразия K. Поэтому это отображение определяет n-мерную цепь в сфере S^{2n-1} (его образ), граница которой состоит из двух частей: вариации $\mathrm{Var}_f a = \Gamma_1 a - a$ цикла a (лежащей в слое $\Phi^{-1}(1)$) и цикла, лежащего на ∂T. Затягивая вторую часть ее границы внутри трубчатой окрестности T по радиусам, мы получаем цепь A в сфере S^{2n-1}, граница которой лежит в слое $\Phi^{-1}(1) \subset S^{2n-1}$ и равна $\mathrm{Var}_f(a)$. При этом пересечение цепи A с циклом $\Gamma_{1/2^*} b$ совпадает с пересечением циклов $\Gamma_{1/2^*} a$ и $\Gamma_{1/2^*} b$ в слое $\Phi^{-1}(-1)$. Таким образом,

$$L(\mathrm{Var}_f a, b) = l(\mathrm{Var}_f a, \Gamma_{1/2^*} b) =$$
$$= (A \circ \Gamma_{1/2^*} b)_S = (\Gamma_{1/2^*} a \circ \Gamma_{1/2^*} b)_{\Phi^{-1}(-1)} = (a \circ b)_{\Phi^{-1}(1)},$$

что и требовалось доказать.

Так как форма Зейферта L определяет двойственность группы гомологий $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ самой себе, а индекс пересечения — двойственность групп $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$ и $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1))$, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 2. *Оператор вариации* Var_f *особенности* f *является изоморфизмом групп гомологий* $H_{n-1}(\Phi^{-1}(1), \partial\Phi^{-1}(1)) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(\Phi^{-1}(1))$, *или, что то же самое, группа* $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon) \xrightarrow{\sim} H_{n-1}(V_\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е. Если бы мы уже имели доказательство теоремы Пикара—Лефшеца в общем случае, то этот результат можно было бы получить, расписывая матрицу оператора Var_f в отмеченном базисе группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ и двойственном к нему базисе группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (см. п. 24.5).

Из этой теоремы и леммы 3 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Если* $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, *то*

$$L(a, b) = (\mathrm{Var}_f^{-1} a \circ b).$$

З а м е ч а н и е. Определения коэффициента зацепления и формы Зейферта иногда отличаются от приводимых здесь знаком или перестановкой аргументов (например, в [312]).

Форма Зейферта $L(a, b)$ очень полезна при изучении топологического строения особенностей. В частности, оказывается, что форма Зейферта (или оператор вариации $(H_{n-1}(V_\varepsilon))^* \to H_{n-1}(V_\varepsilon)$) определяет форму пересечений на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня.

Т е о р е м а 4. *Для* $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$ *выполняется равенство*

$$(a \circ b) = -L(a, b) + (-1)^n L(b, a).$$

Доказательство. Так как оператор вариации особенности является изоморфизмом, существуют такие относительные циклы $a', b' \in \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, что $a = \mathrm{Var}_f a'$, $b = \mathrm{Var}_f b'$. Остается применить утверждение леммы 1 п. 23.1 к циклам a' и b'.

Кроме формы пересечений, оператор вариации определяет также действие оператора классической монодромии особенности. Оператор, обратный оператору вариации, действует из группы $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня в двойственную ей группу $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. Ему соответствует оператор $(\mathrm{Var}_f^{-1})^T\colon H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, определенный тем, что $((\mathrm{Var}_f^{-1})^T a \circ b) = L(a, b) = (\mathrm{Var}_f^{-1} b \circ a)$ для $a, b \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$. В матричной записи это условие означает, что матрица оператора $(\mathrm{Var}_f^{-1})^T$ получается из матрицы оператора Var_f^{-1} транспонированием.

Теорема 5 ([368]). *Оператор h_* классической монодромии особенности выражается через ее оператор вариации Var_f по формуле*

$$h_* = (-1)^n \mathrm{Var}_f (\mathrm{Var}_f^{-1})^T.$$

Доказательство. Имеет место равенство $(x \circ y) = (i_* x \circ y)$, где $x, y \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, i_* — гомоморфизм $H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, индуцированный вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$. Вместе с теоремой 4 оно дает

$$i_* = -\mathrm{Var}_f^{-1} + (-1)^n (\mathrm{Var}_f^{-1})^T.$$

Для оператора классической монодромии особенности имеем $h_* = \mathrm{id} + \mathrm{Var}_f i_* = \mathrm{id} - \mathrm{Var}_f \mathrm{Var}_f^{-1} + (-1)^n \mathrm{Var}_f (\mathrm{Var}_f^{-1})^T = (-1)^n \mathrm{Var}_f (\mathrm{Var}_f^{-1})^T$, что и требовалось доказать.

Аналогичное утверждение имеет место для действия классической монодромии в относительной группе гомологий.

Теорема 6. $h_*^{(r)} = (-1)^n (\mathrm{Var}^{-1})^T \mathrm{Var}$.

24.4. Доказательство теоремы Пикара—Лефшеца. Здесь мы используем обозначения п. 23.3.

Из того, что оператор вариации $\mathrm{var}_{\tau'}\colon H_{n-1}(\tilde F_1, \partial \tilde F_1) \to H_{n-1}(\tilde F_1)$, как оператор вариации особенности $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, является изоморфизмом (теорема 2), следует, что $\mathrm{var}_{\tau'}(\nabla) = \pm\Delta$. Для определения знака в этой формуле воспользуемся теоремой 3. В определении расслоения Φ (для критической точки 0 функции $x_1^2 + \ldots + x_n^2$) можно считать, что $\rho = 1$. Расслоение $\Phi\colon S^{2n-1} \setminus T \to S^1$ задается формулой $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{|x_1^2 + \ldots + x_n^2|}$ ($|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = 1$). Слой $\Phi^{-1}(1)$ этого расслоения диффеоморфен многообразию уровня $\tilde F_1$. При этом исчезающему циклу Δ в многообразии $\tilde F_1$ соответствует в слое $\Phi^{-1}(1)$ цикл, определяемый

уравнениями $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, $\operatorname{Im} x_j = 0$. Этот цикл мы также будем обозначать через Δ.

Имеем $(\operatorname{Var}^{-1}\Delta \circ \Delta) = L(\Delta, \Delta) = l(\Delta, \Gamma_{1/2^*}\Delta) = (-1)^n(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D$, где $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ — n-мерные цепи в шаре $D = D^{2n}$, границы которых лежат на сфере S^{2n-1} и равны Δ и $\Gamma_{1/2^*}\Delta$ соответственно. Нетрудно видеть, что для вычисления коэффициента зацепления $l(\Delta, \Gamma_{1/2^*}\Delta)$ можно воспользоваться семейством диффеоморфизмов $\Gamma_t\colon \Phi^{-1}(1) \to \Phi^{-1}(\exp(2\pi it))$, которое не обязательно согласовано со структурой прямого произведения на границе. В качестве него можно взять семейство, определяемое формулой $\Gamma_t(x_1, \ldots, x_n) = (\exp(\pi it)x_1, \ldots, \exp(\pi it)x_n)$. Тогда цикл $\Gamma_{1/2^*}\Delta$ будет определяться уравнениями $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = -1$ и $\operatorname{Re} x_j = 0$. В качестве цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ можно взять цепи в шаре D^{2n}, задаваемые уравнениями $\{\operatorname{Im} x_j = 0\}$ и $\{\operatorname{Re} x_j = 0\}$ соответственно. При этом ориентации цепей $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ согласованы при помощи отображения $\tilde{A}$ в $\tilde{B}$, являющегося умножением на i. Если положительно ориентированной системой координат на диске $\tilde{A}$ является набор $u_1, \ldots, u_n$ $(x_j = u_j + iv_j)$, то положительно ориентированной системой координат на диске $\tilde{B}$ будет $v_1, \ldots, v_n$. Цепи $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ являются гладкими многообразиями (n-мерными дисками) и пересекаются трансверсально в точке 0. Отсюда следует, что $(\tilde{A} \circ \tilde{B})_D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Поэтому $(\operatorname{Var}^{-1}\Delta \circ \Delta) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, т. е. $\operatorname{Var}^{-1}\Delta = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\nabla$, $\operatorname{Var}\nabla = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\Delta$, что и требовалось доказать.

24.5. Матрица пересечений особенности. Как уже говорилось, группа монодромии особенности порождена операторами Пикара—Лефшеца h_i, соответствующими элементам Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого множества уровня особенности f вблизи критической точки. По теореме Пикара—Лефшеца имеем $h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(a \circ \Delta_i)\Delta_i$. Таким образом, матрица попарных пересечений элементов слабо отмеченного базиса определяет группу монодромии особенности.

О п р е д е л е н и е. Матрица $S = (\Delta_i \circ \Delta_j)$ называется *матрицей пересечений* особенности f (в базисе $\{\Delta_i\}$).

З а м е ч а н и е. Здесь мы считаем i номером столбца, а j — номером строки. Такая запись матрицы билинейной формы совпадает с ее записью как матрицы оператора (в данном случае — i_*) из пространства гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ в двойственное пространство $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ в базисе $\{\Delta_i\}$ и двойственном к нему базисе $((\Delta_i \circ \Delta_j) = (i_*\Delta_i \circ \Delta_j))$.

О п р е д е л е н и е. *Билинейной формой, ассоциированной с особенностью* f, называется целочисленная билинейная форма, определенная на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности f индексом пересечения.

Билинейная форма, ассоциированная с особенностью, симметрична при нечетном числе переменных n и кососимметрична при четном. Матрица пересечений особенности является матрицей этой формы в базисе $\{\Delta_i\}$. Диагональные элементы матрицы пересечений определяются леммой 4 п. 24.3 и равны 0 при четном n и ± 2 — при нечетном.

Если $\tilde{f}$ — шевеление функции f, $\{\Delta_i\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов, определяемый системой путей $u_1, \ldots, u_\mu$, то петля τ', обходящая в положительном направлении все критические значения, на которые распадается нулевое критическое значение функции f, гомотопна произведению $\tau_\mu \cdot \ldots \cdot \tau_1$ простых петель, соответствующих путям $u_\mu, \ldots, u_1$ (рис. 83). Отсюда вытекает следующий результат.

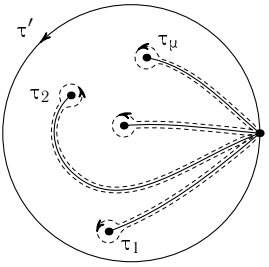


Рис. 83

Л е м м а 4. *Оператор классической монодромии особенности f равен произведению $h_1 \cdot \ldots \cdot h_\mu$ операторов Пикара—Лефшеца, соответствующих элементам Δ_i отмеченного базиса в гомологиях неособого многообразия уровня.*

Действие оператора вариации особенности f может быть определено по формулам

$$\mathrm{Var}_f = \mathrm{var}_{\tau_\mu \cdot \ldots \cdot \tau_1} = \sum_{r=1}^{\mu} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} \mathrm{var}_{\tau_{i_1}} \cdot i_* \cdot \mathrm{var}_{\tau_{i_2}} \cdot i_* \cdot \ldots \cdot i_* \cdot \mathrm{var}_{\tau_{i_r}}, \qquad (*)$$

$$\mathrm{var}_{\tau_i}(a) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i)\Delta_i \quad (a \in H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)).$$

Выберем в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$, являющейся двойственной к группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, базис $\{\nabla_i\}$, двойственный к базису $\{\Delta_i\}$, т. е. такой, что $(\nabla_i \circ \Delta_j) = \delta_{ij}$. Из формул $(*)$ следует, что $\mathrm{Var}_f(\nabla_i) = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \Delta_i + \sum\limits_{j<i} c_i^j \Delta_j$, где c_i^j — некоторые целые числа. Тем самым нами доказано следующее утверждение.

Л е м м а 5. *В отмеченном базисе матрица оператора вариации Var_f особенности f является верхней треугольной матрицей с диагональными элементами, равными $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.*

Теми же свойствами обладает и матрица оператора Var_f^{-1}, которая по теореме 3 совпадает с матрицей формы Зейферта L особенности f (см. замечание в начале пункта, определяющее матричную запись билинейных форм).

Пусть S — матрица пересечений особенности f в каком-нибудь базисе, L — матрица формы Зейферта (или оператора Var^{-1}) этой особенности

в том же базисе, H — матрица оператора классической монодромии h_*, $H^{(r)}$ — матрица оператора $h_*^{(r)}$ в двойственном базисе. Теоремы 4, 5 и 6 означают, что $S = -L + (-1)^n L^T$, $H = (-1)^n L^{-1} L^T$, $H^{(r)} = (-1)^n L^T L^{-1}$ (значок ^{T} означает транспонированную матрицу). Если $\{\Delta_i\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов, то в нем матрица L является верхней треугольной, а матрица L^T — нижней треугольной. Таким образом, в отмеченном базисе имеет инвариантный смысл разложение матрицы пересечений в сумму верхней треугольной и нижней треугольной матриц.

Выше говорилось, что матрица пересечений особенности в отмеченном базисе определяет ее оператор классической монодромии (в том же базисе). Имеет место и обратное утверждение. Прежде чем его доказать, сформулируем одно полезное общее утверждение.

Лемма 6. *Пусть A и B — верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали, $C = A \cdot B^T$. Тогда матрицы A и B восстанавливаются по матрице C.*

Следующая формулировка этого утверждения эквивалентна исходной.

Лемма 7. *Пусть A и B — верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали. Если AB^T — единичная матрица, то A и B — тоже единичные.*

Доказательство этой леммы не представляет труда.

Теорема 7 ([371]). *Матрица оператора классической монодромии особенности в отмеченном базисе определяет ее оператор вариации и матрицу пересечений.*

Доказательство получается применением леммы 6 к равенству $H = (-1)^n \tilde{L}^{-1} \tilde{L}^T$, $\tilde{L} = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} L$, в котором $\tilde{L}$ и $\tilde{L}^{-1}$ — верхние треугольные матрицы с единицами на диагонали.

24.6. Замены базиса. Система путей $\{u_i\}$, определяющая отмеченный или слабо отмеченный базис, может быть выбрана неоднозначно. Меняя исходную систему путей, можно получать разные базисы из исчезающих циклов в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности вблизи критической точки. Мы опишем некоторые элементарные операции замены базиса, сохраняющие его отмеченность или слабую отмеченность.

Пусть $\{u_i\}$ — система путей, определяющая отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в группе $H_{n-1}(F_{z_0}) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня. Это означает, что u_i — несамопересекающиеся пути, соединяющие критические значения z_i шевеления $\tilde{f}$ функции f с некритическим значением z_0 и пересекающиеся попарно только в точке z_0. Пусть τ_i — простые петли, соответствующие путям u_i.

О п р е д е л е н и е о п е р а ц и и α_m $(1 \leqslant m < \mu)$. Определим новую систему путей $\{\tilde{u}_i\}$ следующим образом: $\tilde{u}_i = u_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{u}_{m+1} = u_m$; $\tilde{u}_m = u_{m+1}\tau_m$. Здесь под $u_{m+1}\tau_m$ понимается путь, получающийся последовательным прохождением пути u_{m+1} и петли τ_m. Очевидно (см. ниже), что система путей $\{\tilde{u}_i\}$ определяет слабо отмеченный набор исчезающих циклов $\{\tilde{\Delta}_i\}$. Нетрудно видеть, что можно немного продеформировать систему путей $\{\tilde{u}_i\}$ так, чтобы она стала удовлетворять условиям определения отмеченного базиса (рис. 84). Поэтому базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$ является отмеченным. Связь

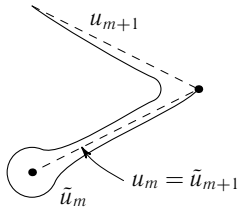


Рис. 84

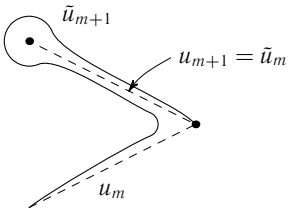


Рис. 85

базиса $\{\tilde{\Delta}_i\}$ с базисом $\{\Delta_i\}$ дается следующими формулами: $\tilde{\Delta}_i = \Delta_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{\Delta}_{m+1} = \Delta_m$; $\tilde{\Delta}_m = h_m(\Delta_{m+1}) = \Delta_{m+1} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot (\Delta_{m+1} \circ \Delta_m)\Delta_m$ (преобразование Пикара—Лефшеца). Операцию перехода от отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$ к отмеченному базису $\{\tilde{\Delta}_i\}$, описываемую этими формулами, обозначим через α_m.

О п р е д е л е н и е о п е р а ц и и β_{m+1} $(1 \leqslant m < \mu)$. Пусть система путей $\{\tilde{u}'_i\}$ определена следующим образом: $\tilde{u}'_i = u_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{u}'_m = u_{m+1}$; $\tilde{u}'_{m+1} = u_m\tau_{m+1}^{-1}$ (рис. 85). Эта система путей определяет отмеченный базис $\{\tilde{\Delta}'_i\}$, связанный с базисом $\{\Delta_i\}$ следующими формулами: $\tilde{\Delta}'_i = \Delta_i$ при $i \neq m, m+1$; $\tilde{\Delta}'_m = \Delta_{m+1}$; $\tilde{\Delta}'_{m+1} = h_{m+1}^{-1}(\Delta_m) = \Delta_m + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\Delta_{m+1} \circ \Delta_m)\Delta_{m+1}$ (обратное преобразование Пикара—Лефшеца). Операцию перехода от отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$ к отмеченному базису $\{\tilde{\Delta}'_i\}$, описываемую этими формулами, обозначим через β_{m+1}.

Нетрудно видеть, что операция β_{m+1} является обратной к операции α_m в том смысле, что последовательное применение их в любом порядке приводит к исходному базису. Рассмотрим свободную группу, порожденную элементами α_m $(m = 1, \ldots, \mu - 1)$. Каждому элементу этой группы (слову из букв α_m и α_m^{-1}) соответствует операция замены отмеченного базиса (считается, что действие α_m^{-1} на базис совпадает с действием операции β_{m+1}). Очевидно, что действия операций $\alpha_m\alpha_{m'}$ и $\alpha_{m'}\alpha_m$ совпадают при $|m - m'| \geqslant 2$. Кроме того, совпадают действия операций $\alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_m$ и $\alpha_{m+1}\alpha_m\alpha_{m+1}$

для любого m от 1 до $(\mu - 2)$. «Доказательство» этого факта приведено на рис. 86.

Таким образом, на множестве отмеченных базисов группы гомологий неособого множества уровня вблизи критической точки действует факторгруппа свободной группы с $\mu - 1$ образующей α_m $(m = 1, \ldots, \mu - 1)$ по соотношениям $\alpha_{m+1}\alpha_m\alpha_{m+1} = \alpha_m\alpha_{m+1}\alpha_m$ при $1 \leqslant m < \mu - 1$, $\alpha_m\alpha_{m'} = \alpha_{m'}\alpha_m$ при $|m - m'| \geqslant 2$. Эта группа является группой кос из μ нитей (см., например, [42]; см. также п. 25.3).

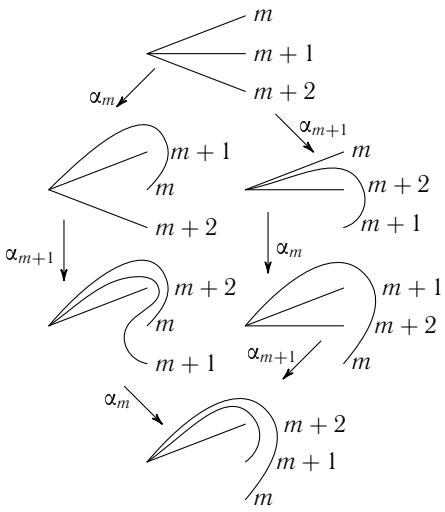


Рис. 86

Рассмотрим операции, сохраняющие слабую отмеченность набора исчезающих циклов. Предварительно покажем, что всякий такой набор образует базис в гомологиях неособого многообразия уровня.

Теорема 8. *Любой слабо отмеченный набор исчезающих циклов образует базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня.*

Пусть $\{\Delta_i\}$ — слабо отмеченный набор исчезающих циклов, определенный системой путей $\{u_i\}$, τ_i — соответствующие простые петли. Набор петель $\{\tau_i\}$ является системой свободных образующих фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений. Чтобы доказать, что набор исчезающих циклов $\{\Delta_i\}$ образует базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, достаточно показать, что любой исчезающий цикл Δ (определенный при помощи пути v, соединяющего критическое значение z_j с некритическим значением z_0) линейно выражается через циклы $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ с целыми коэффициентами. Можно считать, что пути u_j и v совпадают около критического значения z_j. В этом случае петля $\gamma = u_j^{-1}v$ может рассматриваться как элемент фундаментальной группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений. При этом $\Delta = \pm h_{\gamma^*}\Delta_j$ (знак зависит от ориентации исчезающих циклов Δ и Δ_j). В группе $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ петля γ может быть разложена по образующим $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$. Следовательно, исчезающий цикл Δ может быть получен из цикла Δ_j последовательным применением нескольких операторов Пикара—Лефшеца h_i и обратных им, а поэтому линейно выражается через циклы $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ с целыми коэффициентами.

Определение операций $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ замены слабо отмеченного базиса. Пусть $\{u_i\}$ — система путей, определяющая слабо отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия уровня. Для $m \neq m'$ определим операцию замены базиса $\alpha_m(m')$ ($\beta_m(m')$), соответствующую замене пути $u_{m'}$ на путь $u_{m'}\tau_m$ ($u_{m'}\tau_m^{-1}$), т. е. переводящую слабо отмеченный базис $\{\Delta_i\}$ в базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$, определяемый формулами

$$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i \quad \text{при } i \neq m',$$

$$\tilde{\Delta}_{m'} = h_m(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\Delta_{m'} \circ \Delta_m)\Delta_m$$

$$\left(\tilde{\Delta}_{m'} = h_m^{-1}(\Delta_{m'}) = \Delta_{m'} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(\Delta_m \circ \Delta_{m'})\Delta_m\right).$$

Действие операций $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ на системе простых петель $\{\tau_i\}$ состоит в замене петли $\tau_{m'}$ на сопряженную ей в фундаментальной группе $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$ дополнения к множеству критических значений ($\tau_m^{-1}\tau_{m'}\tau_m$ для $\alpha_m(m')$ и $\tau_m\tau_{m'}\tau_m^{-1}$ для $\beta_m(m')$). Таким образом, если исходная система простых петель являлась системой свободных образующих группы $\pi_1(U - \{z_i\}; z_0)$, то этим же свойством будет обладать и система простых петель, полученная после применения операции $\alpha_m(m')$ или $\beta_m(m')$. Поэтому операции $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ сохраняют слабую отмеченность базиса.

Легко видеть, что операции $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ взаимно обратны. При нечетном числе переменных n эти операции совпадают. Если отмеченные базисы рассматривать как слабо отмеченные и, в частности, отвлечься от порядка исчезающих циклов, то действие операции α_m совпадает с действием операции $\alpha_m(m+1)$, а β_{m+1} — с $\beta_{m+1}(m)$.

Доказано ([352]), что любые два слабо отмеченных базиса могут быть получены друг из друга итерациями операций $\alpha_m(m')$ и $\beta_m(m')$ с последующей перенумерацией и сменой ориентации части элементов базиса

24.7. Оператор вариации и матрица пересечений «прямой суммы» особенностей.

Определение. *Прямой суммой* особенностей $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ и $g\colon (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ функций n и m переменных соответственно называется особенность функции $(n+m)$ переменных $f \oplus g\colon (\mathbb{C}^{n+m}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, определяемая формулой $(f \oplus g)(x, y) = f(x) + g(y)$ ($x \in \mathbb{C}^n$, $y \in \mathbb{C}^m$, $(x, y) \in \in \mathbb{C}^{n+m} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$).

Лемма 8. *Кратность $\mu(f \oplus g)$ прямой суммы особенностей f и g равна произведению $\mu(f)\mu(g)$ их кратностей.*

Действительно, если $\tilde{f}(x)$ — шевеление особенности f, имеющее $\mu(f)$ невырожденных критических точек p_i, $\tilde{g}(y)$ — шевеление особенности g, имеющее $\mu(g)$ невырожденных критических точек q_i, то $\tilde{f}(x) + \tilde{g}(y)$ — шеве-

ление особенности $f \oplus g$, имеющее $\mu(f)\mu(g)$ невырожденных критических точек (p_i, q_i) $(i = 1, \ldots, \mu(f); j = 1, \ldots, \mu(g))$.

М. Себастьяни и Р. Том ([451]) доказали, что оператор классической монодромии особенности $f \oplus g$ равен тензорному произведению операторов классической монодромии особенностей f и g. А. М. Габриэлов ([89]) получил описание матрицы пересечений особенности $f \oplus g$ при условии, что известны матрицы пересечений особенностей f и g в отмеченных базисах. Мы изложим эти результаты в форме, несколько отличной от [451] и [89].

Нам понадобится одно топологическое понятие.

О п р е д е л е н и е. *Джойном* (или *соединением*) $X * Y$ топологических пространств X и Y называется факторпространство прямого произведения $X \times I \times Y$ $(I = [0, 1])$ по отношению эквивалентности:

$$(x, 0, y_1) \sim (x, 0, y_2) \quad \text{для любых} \quad y_1, y_2 \in Y, x \in X;$$
$$(x_1, 1, y) \sim (x_2, 1, y) \quad \text{для любых} \quad x_1, x_2 \in X, y \in Y.$$

Можно считать, что пространства X и Y вложены в их джойн $X * Y$ как нижнее и верхнее основания соответственно ($\{(x, 0, y)\}$ и $\{(x, 1, y)\}$). При этом джойн $X * Y$ можно представлять себе как пространство, заметаемое непересекающимися отрезками, соединяющими все точки пространства X со всеми точками пространства Y. Если рассмотреть проекцию $(x, t, y) \mapsto t$ джойна $X * Y$ в отрезок $I = [0, 1]$, то прообраз точки 0 совпадает с пространством X, точки 1 — с пространством Y, а точки $t \in (0, 1)$ — с произведением $X \times Y$.

Если Y — пространство, состоящее из одной точки, то джойн $X * Y$ совпадает с конусом над пространством X. Если Y — пространство, состоящее из двух точек, то джойн $X * Y$ гомеоморфен надстройке над пространством X (факторпространству цилиндра $[-1, 1] \times X$ над пространством X по отношению эквивалентности $(-1, x_1) \sim (-1, x_2)$, $(1, x_1) \sim (1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in X$). Если пространство X гомеоморфно k-мерной сфере S^k, Y — l-мерной сфере S^l, то джойн $X * Y$ гомеоморфен $(k + l + 1)$-мерной сфере S^{k+l+1}.

Л е м м а 9. *Пусть группы гомологий пространств X и Y либо не имеют кручений, либо считаются с коэффициентами в поле. Тогда группа гомологий $H_n(X * Y)$ джойна пространств X и Y изоморфна группе* $\bigoplus_{0 \leqslant k \leqslant n-1} H_k(X) \oplus H_{n-k-1}(Y)$.

Иначе говоря, $H_*(X * Y) = H_*(X) \oplus H_*(Y)$, где считается, что $\dim(a \otimes b) = \dim a + \dim b + 1$ для $a \in H_*(X)$, $b \in H_*(Y)$. При этом если α — цикл в пространстве X, β — цикл в пространстве Y, то циклом, соответствующим $\alpha \otimes \beta$ в пространстве $X * Y$, является джойн циклов α и β. Здесь существенно, что группы гомологий считаются приведенными по модулю точки.

Вложение $H_k(X) \otimes H_{n-k-1}(Y) \hookrightarrow H_n(X * Y)$, вообще говоря, определено только с точностью до умножения на (± 1). Его выбор определяется способом выбора ориентации джойна циклов. Можно, например, считать, что ориентация джойна циклов $a * b$ индуцируется обычной ориентацией прямого произведения $a \times I \times b$. Заметим, впрочем, что формулируемые ниже результаты не зависят от этого выбора.

Пусть f — особенность $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, V_ε — неособое многообразие уровня особенности f вблизи критической точки ($V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{\beta}_\rho$), u — путь, соединяющий некритическое значение ε с критическим значением 0.

Л е м м а 10. *Существует такое непрерывное семейство отображений* $H_t\colon V_\varepsilon \to V_{u(t)} = f^{-1}(u(t)) \cap \bar{B}_\rho$ $(t \in [0, 1])$, *что*

1) $H_0 = \mathrm{id}\colon V_\varepsilon \to V_\varepsilon$;

2) H_t *является вложением* $V_\varepsilon \to V_{u(t)}$ *при* $0 \leqslant t < 1$;

3) H_1 *переводит* V_ε *в точку* $0 \in \mathbb{C}^n$.

Доказательство этого утверждения может быть проведено аналогично тому, как в теореме 1 показано, что пространство $f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho$ является деформационным ретрактом пространства $f^{-1}(\bar{D}_{\varepsilon_0}) \cap \bar{B}_\rho$.

Семейство отображений H_t определено однозначно с точностью до изотопии. Оно задает вложение конуса над неособым многообразием уровня V_ε в пространство $\mathbb{C}^n$ $((x, t) \mapsto H_t(x)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Пусть теперь f и g — две особенности m и n переменных соответственно, $V_\varepsilon(f) = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_{\rho_1}$ и $V_\varepsilon(g) = g^{-1}(\varepsilon \cap \bar{B}_{\rho_2})$ — неособые многообразия уровня особенностей f и g, u — несамопересекающийся путь в плоскости значений функции f, соединяющий ε с нулем (не теряя общности, можно считать, что $u(t) = (1 - t)\varepsilon$). Определим путь v, соединяющий ε с нулем в плоскости значений функции g, формулой $v(t) = \varepsilon - u(1 - t)$. Пусть $H_t(f)$ и $H_t(g)$ — семейства отображений $V_\varepsilon(f) \to V_{u(t)}(f)$ и $V_\varepsilon(g) \to V_{v(t)}(g)$, описанные в лемме 10. Определим вложение j джойна $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ неособых многообразий уровня $V_\varepsilon(f)$ и $V_\varepsilon(g)$ в множество уровня $(f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \subset \mathbb{C}^{n+m}$ формулой $j(x, t, y) = (H_t(f)x, H_{1-t}(g)y)$ при $x \in V_\varepsilon(f)$, $y \in V_\varepsilon(g)$, $t \in [0, 1]$. При выполнении естественных ограничений на радиусы ρ_1, ρ_2 и ρ (например, $\rho_1 \leqslant \rho/\sqrt{2}$, $\rho_2 \leqslant \rho/\sqrt{2}$) j является вложением джойна $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$ в многообразие уровня $V_\varepsilon(f \oplus g) = (f \oplus g)^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ особенности $f \oplus g$ вблизи критической точки.

Отображение $j\colon V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(\rho) \to V_\varepsilon(f \oplus g)$ вместе с изоморфизмом $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)) \cong H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$ определяет гомоморфизм

$$j_*\colon H_{n-1}(V_\varepsilon(f)) \otimes H_{m-1}(V_\varepsilon(g)) \to H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g)).$$

В работе [451] доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 9. *Гомоморфизм j_* является изоморфизмом, вложение $j\colon V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \to V_\varepsilon(f \oplus g)$ является гомотопической эквивалентностью.*

То, что неособое многообразие уровня $V_\varepsilon(f \oplus g)$ особенности $f \oplus g$ гомотопически эквивалентно джойну $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$, можно объяснить следующим образом. Рассмотрим функцию f на многообразии $V_\varepsilon(f \oplus g)$ (точнее, — функцию $f \circ \pi_1$, где $\pi_1\colon V_\varepsilon(f \oplus g) \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+m} \cong \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ — проекция на первое слагаемое). Прообраз $(f \circ \pi_1)^{-1}(z)$ точки $z \in \mathbb{C}$ состоит из точек $(x, y) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$, для которых $f(x) = z$, $g(y) = \varepsilon - z$. Поэтому (если отвлечься от тонкостей, связанных с радиусами шаров, в которых рассматриваются неособые многообразия уровня функций) $(f \circ \pi_1)^{-1}(z) = f^{-1}(z) \times g^{-1}(\varepsilon - z)$. Отображение $(f \circ \pi_1)\colon V_\varepsilon(f \oplus g) \to \mathbb{C}$ является невырожденным вне прообразов точек 0 и ε. Рассмотрим в плоскости $\mathbb{C}$ отрезок $J = u([0, 1])$, являющийся образом пути u. Он соединяет точки 0 и ε ($u(0) = \varepsilon$, $u(1) = 0$). Над дополнением к отрезку J отображение $f \circ \pi_1$ определяет локально тривиальное расслоение. Отрезок J является деформационным ретрактом плоскости $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ является деформационным ретрактом пространства $V_\varepsilon(f \oplus g)$ и поэтому гомотопически эквивалентно ему. При этом многообразие $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(t))$ при $t \in (0, 1)$ диффеоморфно произведению $V_\varepsilon(f) \times V_\varepsilon(g)$ неособых многообразий уровня особенностей f и g. Пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ диффеоморфно $f^{-1}(\varepsilon) \times g^{-1}(0)$. Пространство $g^{-1}(0)$ стягивается в точку. Поэтому $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(0))$ стягивается на пространство, диффеоморфное неособому многообразию уровня $V_\varepsilon(f)$. Точно так же пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(u(1)) = f^{-1}(0) \times g^{-1}(\varepsilon)$ стягивается на пространство, диффеоморфное неособому многообразию уровня $V_\varepsilon(g)$. Такое описание слоев отображения $(f \circ \pi_1)\colon (f \circ \pi_1)^{-1}(J) \to J$ над точками отрезка J совпадает с описанием прообразов точек $t \in I = [0, 1]$ при проекции $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g) \to I$ (см. определение джойна). Поэтому пространство $(f \circ \pi_1)^{-1}(J)$ гомотопически эквивалентно джойну $V_\varepsilon(f) * V_\varepsilon(g)$. Немного более аккуратные рассуждения позволяют превратить это объяснение в доказательство.

В дальнейшем мы будем отождествлять группу гомологий $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ неособого многообразия уровня особенности $f \oplus g$ с тензорным произведением групп $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ и $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Это отождествление определяет также отождествление относительной группы гомологий $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g), \partial V_\varepsilon(f \oplus g))$ (являющейся двойственной к группе $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$) с тензорным произведением групп $H_{n-1}(V_\varepsilon(f), \partial V_\varepsilon(f))$ и $H_{m-1}(V_\varepsilon(g), \partial V_\varepsilon(g))$.

Т е о р е м а 10 (П. Делинь, см. [301]).

$$\mathrm{Var}_{f \oplus g} = (-1)^{nm} \mathrm{Var}_f \otimes \mathrm{Var}_g.$$

Для доказательства достаточно проверить, что для любых классов гомологий $a_1, a_2 \in H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$, $b_1, b_2 \in H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$ имеет место равенство

$$([\mathrm{Var}^{-1}_{f\oplus g}(a_1 \otimes b_1)] \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{nm}(\mathrm{Var}^{-1}_f a_1 \circ a_2) \cdot (\mathrm{Var}^{-1}_g b_1 \circ b_2).$$

Мы не будем подробно проводить это доказательство, а только наметим основные его шаги (впрочем, восстановить его целиком не представляет труда).

Пусть $H_t(f)$ — семейство отображений $V_\varepsilon(f) \to V_{(1-t)\varepsilon}(f) = f^{-1}((1-t)\varepsilon) \cap \cap \bar{B}_\rho$, описанное в лемме 10 (для определенности мы считаем, что $u(t) = (1-t)\varepsilon$). Как уже говорилось, семейство $H_t(f)$ определяет вложение конуса над многообразием уровня $V_\varepsilon(f)$ в пространство $\mathbb{C}^n$. Пусть A_1 — конус над циклом a_1, определенный семейством $H_t(f)$. Конус A_1 является n-мерной цепью, граница которой лежит в неособом многообразии уровня $V_\varepsilon(f)$ и совпадает с циклом a_1. Пусть $\Gamma_t(f)\colon V_\varepsilon(f) \to V_{\exp(2\pi i t)\varepsilon}(f)$ — семейство отображений, получаемое поднятием гомотопии $\varepsilon \mapsto \exp(2\pi i t)\varepsilon$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $\tilde{a}_2 = \Gamma_{1/2}(f)(a_2)$ — $(n-1)$-мерный цикл в многообразии уровня $V_{-\varepsilon}(f)$. Пусть $\tilde{A}_2$ — конус над циклом $\tilde{a}_2$, аналогичный построенному выше. Из рассуждений п. 24.3 выводится, что $(\mathrm{Var}^{-1}_f a_1 \circ a_2) = (-1)^n(A_1 \circ \tilde{A}_2)$, причем цепи A_1 и $\tilde{A}_2$ пересекаются только в нуле. Точно так же определяются цепи B_1 и $\tilde{B}_2$, причем $(\mathrm{Var}^{-1}_g b_1 \circ b_2) = (-1)^m(B_1 \circ \tilde{B}_2)$.

Чтобы определить таким же способом $([\mathrm{Var}^{-1}_{f\oplus g}(a_1 \otimes b_1)] \circ \widetilde{[a_2 \otimes b_2]})$, надо построить конусы C_1 и $\tilde{C}_2$ над циклами $a_1 \otimes b_1$ и $\widetilde{a_2 \otimes b_2} = \Gamma_{1/2}(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2)$. Нетрудно видеть, что в качестве C_1 можно взять $(A_1 \times B_1) \cap \{(x, y)\colon (f(x) + g(y))/\varepsilon \leqslant 1\}$. Аналогичное утверждение имеет место и для конуса $\tilde{C}_2$. В качестве него можно взять $(\tilde{A}_2 \times \tilde{B}_2) \cap \cap \{(x, y)\colon (f(x) + g(y))/(-\varepsilon) \leqslant 1\}$. (Здесь надо воспользоваться тем, что $\Gamma_t(f \oplus g)(a_2 \otimes b_2) = \Gamma_t(f)(a_2) \otimes \Gamma_t(g)(b_2)$.) Отсюда $([\mathrm{Var}^{-1}_{f\oplus g}(a_1 \otimes b_1)] \circ \circ [a_2 \otimes b_2]) = (-1)^{n+m}(C_1 \circ \tilde{C}_2) = (-1)^{n+m}([A_1 \times B_1] \circ [\tilde{A}_2 \times \tilde{B}_2]) = = (-1)^{n+m+nm}(A_1 \circ \tilde{A}_2)(B_1 \circ \tilde{B}_2) = (-1)^{nm}(\mathrm{Var}^{-1}_f a_1 \circ a_2) \times (\mathrm{Var}^{-1}_g b_1 \circ b_2)$, что и требовалось.

Пусть $\{\Delta_i\}$ $(i = 1, \ldots, \mu(f))$ — отмеченный базис в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon(f))$ гомологий неособого многообразия уровня особенности f, $\{\Delta'_j\}$ $(j = 1, \ldots \ldots, \mu(g))$ — отмеченный базис в группе $H_{m-1}(V_\varepsilon(g))$. Из теоремы 9 следует, что элементы $\tilde{\Delta}_{ij} = j_*(\Delta_i \otimes \Delta'_j)$ образуют базис в группе $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ гомологий неособого многообразия уровня особенности $f \oplus g$. Матрица пересечений S особенности $f \oplus g$ в этом базисе может быть получена с помощью теоремы 10 из формулы $S = -L + (-1)^{n+m}L^T$, где L — матрица оператора $\mathrm{Var}^{-1}_{f\oplus g}$ (или формы Зейферта). Из нее вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 11. *Индексы пересечений циклов* $\tilde{\Delta}_{ij}$ *определяются следующими формулами*:

$$(\tilde{\Delta}_{ij_1} \circ \tilde{\Delta}_{ij_2}) = \operatorname{sgn}(j_2 - j_1)^n (-1)^{nm+\frac{n(n-1)}{2}} (\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

при $j_1 \neq j_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1)^m (-1)^{nm+\frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})$$

при $i_1 \neq i_2$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j_2}) = 0$$

при $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0$,

$$(\tilde{\Delta}_{i_1 j_1} \circ \tilde{\Delta}_{i_2 j_2}) = \operatorname{sgn}(i_2 - i_1)(-1)^{nm} (\Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2})(\Delta'_{j_1} \circ \Delta'_{j_2})$$

при $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0$.

Этот результат получен А. М. Габриэловым в [89]. Кроме того, там доказано следующее утверждение.

Т е о р е м а 12. *Циклы* $\tilde{\Delta}_{ij}$ *являются исчезающими и образуют отмеченный базис в группе* $H_{n+m-1}(V_\varepsilon(f \oplus g))$ *гомологий неособого многообразия уровня особенности* $f \oplus g$. *При этом подразумевается, что они упорядочены лексикографически, т. е. цикл* $\tilde{\Delta}_{i_1 j_1}$ *предшествует циклу* $\tilde{\Delta}_{i_2 j_2}$, *если* $i_1 < i_2$ *или* $i_1 = i_2$, $j_1 < j_2$.

Теорема 10 является обобщением уже упоминавшегося результата М. Себастьяни и Р. Тома ([451]), описывающего оператор классической монодромии $h_{*(f \oplus g)}$ особенности $f \oplus g$.

Т е о р е м а 13. $h_{*(f \oplus g)} = h_{*f} \otimes h_{*g}$.

Эта теорема является непосредственным следствием теоремы 10 и соотношения $h_* = (-1)^n \operatorname{Var}(\operatorname{Var}^{-1})^T$ (теорема 5 п. 24.3). Наоборот, теорема 10 — следствие теорем 13, 12, соотношения $h_* = (-1)^n \operatorname{Var}(\operatorname{Var}^{-1})^T$ и теоремы 7 (п. 24.5), утверждающей, что матрица оператора классической монодромии особенности в отмеченном базисе определяет матрицу ее оператора вариации.

Теоремы 11 и 12 дают следующее описание диаграммы Дынкина особенности $f \oplus g$ (определение см. в следующем пункте). Множество ее вершин совпадает с прямым произведением множеств вершин диаграмм, соответствующих особенностям f и g. Две вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) соединены между собой:

1) ребром той же кратности, что и вершины j_1 и j_2 во второй диаграмме, если $i_1 = i_2$;

2) ребром той же кратности, что и вершины i_1 и i_2 в первой диаграмме, если $j_1 = j_2$;

3) ребром кратности, равной взятому со знаком минус произведению кратностей ребер, соединяющих вершины i_1 и i_2 в первой диаграмме и j_1 и j_2 — во второй диаграмме, если $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) > 0$.

Если $(i_2 - i_1)(j_2 - j_1) < 0$, то вершины (i_1, j_1) и (i_2, j_2) не соединены между собой.

24.8. Стабилизация особенностей. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку.

Определение. Росток функции $f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ $((\mathbb{C}^{n+m}, 0) \to (\mathbb{C}, 0))$ называется *стабилизацией* ростка f.

Кратность особенности совпадает с кратностью ее стабилизации. Действительно, если $\tilde{f}$ — шевеление особенности f, рассыпающее ее нулевую критическую точку на μ невырожденных, то $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ — шевеление ее стабилизации, обладающее тем же свойством. При этом функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ имеют одинаковые множества критических значений. Связь матрицы пересечений особенности с матрицей пересечений ее стабилизации дается следующей теоремой, которая является частным случаем теорем 11 и 12.

Теорема 14. *Пусть $\{\Delta_i\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f(x)$. Существует такой отмеченный базис $\{\tilde{\Delta}_i\}$ особенности $f(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$, что матрица пересечений его элементов определяется соотношением*

$$(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j) = [\operatorname{sgn}(j - i)]^m (-1)^{nm + \frac{m(m-1)}{2}} (\Delta_i \circ \Delta_j) \quad \textit{при } i \neq j.$$

При этом отмеченные базисы $\{\Delta_i\}$ и $\{\tilde{\Delta}_i\}$ соответствуют одинаковым наборам путей, соединяющих критические значения шевелений $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{f}(x) + \sum_{j=1}^{m} y_j^2$ с некритическим значением.

Из теоремы 14 следует, что матрицы пересечений стабилизации особенности определяют друг друга. Кроме того, при $m \equiv 0 \bmod 4$ индексы пересечений $(\tilde{\Delta}_i \circ \tilde{\Delta}_j)$ и $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ для всех i и j совпадают, а при $m \equiv 2 \bmod 4$ — отличаются знаком. Таким образом, с каждой особенностью связаны две симметрические и две кососимметрические билинейные формы (формы пересечений ее стабилизации). При этом симметрические (и кососимметрические) формы отличаются только знаком. С каждой особенностью связаны

также две группы преобразований целочисленной решетки $\mathbb{Z}^\mu$ (группы монодромии ее стабилизации). Оператор классической монодромии особенности $f(x)$ совпадает с оператором классической монодромии ее стабилизации $f(x)+\sum_{j=1}^{m} y_j^2$ при четном m и отличается от него знаком при нечетном.

Теорема 14 позволяет при формулировке результатов о матрице пересечений особенностей ограничиваться случаем размерностей, имеющих фиксированный вычет по модулю 4. В большинстве случаев удобно бывает считать, что количество переменных сравнимо с 3 по модулю 4.

О п р е д е л е н и е. *Квадратичной формой особенности* называется квадратичная форма, определенная индексом пересечения в гомологиях неособого многообразия уровня ее стабилизации с количеством переменных $N \equiv 3 \bmod 4$.

Для этой стабилизации индексы самопересечения исчезающих циклов $(\Delta_i \circ \Delta_i)$ равны (-2), а операторы Пикара—Лефшеца действуют в группе гомологий неособого многообразия уровня по формуле $h_i(a) = a + (a \circ \Delta_i)\Delta_i$. Отсюда видно, что $h_i(\Delta_i) = -\Delta_i$ и что преобразование h_i является отражением в гиперплоскости, ортогональной к вектору Δ_i. Ортогональность понимается в смысле скалярного произведения, определяемого квадратичной формой особенности. Таким образом, соответствующая группа монодромии является группой, порожденной отражениями. Такие группы (или соответствующие квадратичные формы, которые их определяют) удобно описывать с помощью некоторого графа.

О п р е д е л е н и е. *Диаграммой Дынкина* особенности называется граф, определяемый следующим образом:

1) его вершины находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами Δ_i слабо отмеченного базиса в гомологиях неособого многообразия уровня стабилизации особенности с количеством переменных $N \equiv \equiv 3 \bmod 4$;

2) i-я и j-я вершины графа соединены ребром кратности $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (ребра отрицательной кратности изображаются пунктирными линиями).

Диаграмма Дынкина особенности определяет ее группу монодромии (хотя эффективное описание последней обычно бывает довольно сложной задачей). Если диаграмма Дынкина особенности (с известным количеством переменных) задана в отмеченном базисе и ее вершины перенумерованы в соответствующем порядке, то по ней можно определить билинейную форму особенности, а также ее операторы вариации, классической монодромии, и т. д.

24.9. Пример. Рассмотрим особенность $f(x) = x^{k+1}$ (особенность типа A_k по терминологии гл. II ч. I). Многообразие уровня V_ε состоит из $(k+1)$ точек — корней степени $(k+1)$ из ε. Кратность этой особенности

равна k, группа гомологий $H_0(V_\varepsilon)$ (приведенная по модулю точки) изоморфна группе $\mathbb{Z}^k$.

Функция $\tilde f(x) = x^{k+1} - \lambda x$ ($\lambda \neq 0$) является морсовским шевелением особенности f. Мы будем считать, что число λ вещественно и больше нуля. Нулевое многообразие уровня $\tilde f^{-1}(0)$ функции $\tilde f$ также состоит из $(k+1)$ точек: $x_0 = 0$, $x_m = \sqrt[k]{\lambda}\xi_m$ ($m = 1, \ldots, k$). Здесь ξ_m — корни степени k из единицы, занумерованные в направлении по часовой стрелке: $\xi_m = \exp(-2\pi i m/k)$. Критические точки функции $\tilde f$ определяются из уравнения $\tilde f'(x) = (k+1)x^k - \lambda = 0$. Поэтому функция $\tilde f$ имеет k критических точек $p_m = \sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\,\xi_m$ с критическими значениями $z_m = -\dfrac{\lambda k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\,\xi_m$ ($m = 1, \ldots, k$).

Выберем в качестве некритического значения z_0 большое по модулю $\left(|z_0| \gg \dfrac{\lambda k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}\right)$ отрицательное число. Пусть u_m — путь, соединяющий критическое значение z_m функции $\tilde f$ с нулем по радиусу ($u_m(t) = (1-t)z_m$, $t \in [0, 1]$), v — путь, идущий от нуля к z_0 по отрицательному лучу вещественной оси и обходящий критическое значение $z_k = -\dfrac{\lambda k}{k+1}\sqrt[k]{\lambda/(k+1)}$ в положительном направлении (против часовой стрелки), см. рис. 87.

Легко видеть, что система путей $\{u_m \cdot v\}$ определяет отмеченный базис исчезающих циклов $\{\Delta_m\}$ в группе гомологий $H_0(\tilde f^{-1}(z_0))$ (так как малым шевелением ее можно привести к системе путей, удовлетворяющей определению отмеченного базиса). Для того чтобы вычислить индексы пересечений $(\Delta_m \circ \Delta_{m'})$ исчезающих циклов в группе гомологий $H_0(\tilde f^{-1}(z_0))$, удобно гомотопировать точку z_0 вдоль пути v до нуля. Тем самым мы сведем задачу к вычислению индексов пересечений исчезающих циклов, определенных в группе $H_0(f^{-1}(0))$ системой путей $\{u_m\}$ (эти циклы мы также будем обозначать через Δ_m).

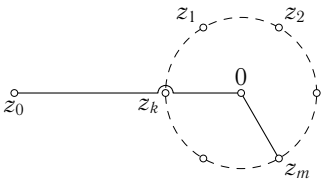


Рис. 87

Легко показать, что вдоль пути u_m исчезает цикл $\Delta_m = x_m - x_0$ (т. е. при движении в плоскости значений функции $\tilde f$ по пути u_m от нуля к критическому значению z_m точки x_m и x_0 сливаются). Следовательно, $(\Delta_m \circ \Delta_m) = 2$, $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = 1$ для любых $m \neq m'$. Для стабилизации $f(x) + y_1^2 + y_2^2$ соответствующие формулы имеют вид $(\Delta_m \circ \Delta_m) = -2$, $(\Delta_m \circ \Delta_{m'}) = -1$ для любых $m \neq m'$. Мы получим диаграмму Дынкина особенности f следующего вида: k вершин, каждые две из которых соединены пунктирным отрезком (т. е. ребром кратности (-1)).

Упростим эту диаграмму при помощи операций замены отмеченного базиса. Операция α_{k-1} ($\Delta'_{k-1} = \Delta_k - \Delta_{k-1}$, $\Delta'_k = \Delta_{k-1}$) приводит диаграмму к следующему виду: все вершины, кроме $(k-1)$-й, попарно соединены пунктирными отрезками (ребрами кратности (-1)), $(k-1)$-я вершина соединена только с k-й отрезком кратности $(+1)$. Операции α_{k-2} ($\Delta''_{k-2} = \Delta'_{k-1}$, $\Delta''_{k-1} = \Delta'_{k-2}$), $\alpha_{k-3}, \ldots, \alpha_1$ не меняют вид диаграммы, а сводятся только к перенумерации вершин. Последовательное применение операций $\alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \ldots, \alpha_2, \alpha_{k-1}, \ldots, \alpha_3, \ldots$ $\ldots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k-2}, \alpha_{k-1}$ приводит к классической диаграмме Дынкина A_k (рис. 88). Полученный при этом базис исчезающих циклов описывается формулами $\Delta^0_1 = (x_k - x_{k-1})$, $\Delta^0_2 = (x_{k-1} - x_{k-2})$, $\ldots$, $\Delta^0_{k-1} = (x_2 - x_1)$, $\Delta^0_k = (x_1 - x_0)$.

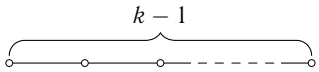


Рис. 88

При движении в плоскости значений функции f по пути v от нуля до некритического значения z_0 точки x_m ($m = 0, 1, \ldots, k$) перемещаются по комплексной плоскости $\mathbb{C}$, приближаясь к лучам $\arg x = \dfrac{\pi(2s+1)}{k+1}$ (при $z_0 \to -\infty$). При этом точки x_0 и x_k сближаются по вещественной оси, делают по четверти оборота против часовой стрелки вокруг критической точки p_k и снова расходятся. Легко показать, что на лучах $\arg x = \dfrac{\pi(2s+1)}{(k+1)}$ $\left(\text{т. е. } x = t \cdot \exp\left(\dfrac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right),\ t > 0\right)$ функция $\tilde{f}(x) = x^{k+1} - \lambda x$ не принимает отрицательных вещественных значений, кроме случая четного k и $s = k/2$. Действительно, $\tilde{f}(x) = -t^{k+1} - \lambda t \exp\left(\dfrac{\pi i(2s+1)}{k+1}\right)$, где второе слагаемое вещественно только при четном k и $s = k/2$. В этом случае по лучу $x = -t$ $(t > 0)$ движется точка $x_{k/2}$. Отсюда следует, что при движении в плоскости значений функции $\tilde{f}$ по лучу v от нуля к значению z_0 точки x_m приближаются к точкам $\tilde{x}_m = \sqrt[k+1]{-z_0}\exp\left(\dfrac{\pi i(2m+1)}{k+1}\right)$ $(m = 0, 1, \ldots, k)$. Если, кроме того, пройти в плоскости значений в отрицательном направлении (по часовой стрелке) от точки z_0 к точке $z'_0 = -z_0$, то точки $\tilde{x}_m$ перейдут в точки

$$\tilde{\tilde{x}}_m = \sqrt[k+1]{-z_0}\exp\left(\frac{-2\pi i(m+1)}{k+1}\right) \quad (m = 0, 1, \ldots, k).$$

Мы приходим к следующему результату.

Т е о р е м а 15. *На многообразии уровня* $V_1 = \{x\colon x^{k+1} = 1\}$ *особенности* $f(x) = x^{k+1}$ *отмеченный базис образуют исчезающие циклы* $\Delta_1 = \zeta_1 - \zeta_2$, $\Delta_2 = \zeta_2 - \zeta_3$, $\ldots$, $\Delta_k = \zeta_k - \zeta_{k+1}$, *где* $\zeta_j = \exp\left(\dfrac{2\pi i(j-1)}{k+1}\right)$ — *корни* $(k+1)$-*й степени из единицы* $(j = 1, \ldots, k+1)$. *Индексы пересе-*

чений этих циклов даются формулами $(\Delta_j \circ \Delta_j) = 2$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j+1}) = -1$, $(\Delta_j \circ \Delta_{j'}) = 0$ *при* $|j - j'| \geqslant 2$.

Первые вычисления формы пересечения и оператора классической монодромии для функции нескольких переменных были проделаны Ф. Фамом ([207]) для особенности вида $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{a_k}$ $(a_k \geqslant 2)$. Кратность этой особенности равна $\prod_{k=1}^{n} (a_k - 1)$. Ф. Фам доказал, что в группе $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня функции f существует такой базис $e_{i_1 \dots i_n}$ $(0 \leqslant i_k \leqslant a_k - 2)$ $\left($в обозначениях Ф. Фама $e_{i_1 \dots i_n} = \left(\prod_{k=1}^{n} \omega_k^{i_k}\right) e\right)$, что

$$(e_{i_1 \dots i_n} \circ e_{i_1 \dots i_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (1 + (-1)^{n-1}),$$
$$(e_{j_1 \dots j_n} \circ e_{j_1 \dots j_n}) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-1)^{\sum_k (j_k - i_k)},$$

если $i_k \leqslant j_k \leqslant i_k + 1$ для всех k. В остальных случаях (кроме получающегося из предыдущего перестановкой циклов) $(e_{i_1 \dots i_n} \circ e_{j_1 \dots j_n}) = 0$.

Результат Ф. Фама может быть получен из теоремы 11 (п. 24.7). Применение ее к особенности $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k^{a_k}$ дает ту же матрицу пересечений, что и у Ф. Фама, если в качестве отмеченного базиса особенности $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$ использовать базис, описанный в теореме 15. Для особенности $f_k(x_k) = x_k^{a_k}$ положим $\varepsilon = 1$, $u(t) = (1 - t)$, $H(t)x_k = \sqrt[a_k]{1 - t}\, x_k$. Последовательное применение конструкции, описанной в п. 24.7, к отмеченным базисам особенностей $f_k(x_k)$, определяемым теоремой 15, приводит, как нетрудно убедиться, к базису, построенному Ф. Фамом в [207]. Мы получаем следующий результат.

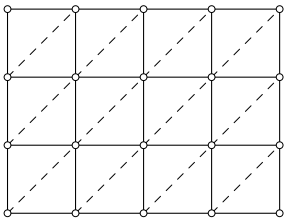


Рис. 89

П р е д л о ж е н и е. *Базис Фама является отмеченным относительно лексикографического упорядочения его элементов.*

Это значит, что диаграмма Дынкина особенности Фама имеет вид, изображенный на рис. 89 ($n = 2$, $a_1 = 6$, $a_2 = 5$).

§ 25. Бифуркационные диаграммы и группа монодромии особенности

Характеристики особенности, рассматривавшиеся в § 24 (кратность особенности, ее матрица пересечений, группа монодромии и т. д.), связаны с такими объектами, как бифуркационные диаграммы нулей и функций

особенности, ее разрешение, ее полярные кривые. Некоторые из этих связей будут изложены в этом параграфе.

25.1. Бифуркационные диаграммы особенности. Для того, чтобы определить бифуркационные диаграммы особенности, напомним определение ее версальной деформации (более подробное изложение см. в ч. I, § 8).

О п р е д е л е н и е. *Деформацией* особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется такой росток голоморфной функции $F(x, \nu)$ ($\nu \in \mathbb{C}^l$, $F\colon (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$), что $F(x, 0) = f(x)$.

Пространство $\mathbb{C}^l$ называется *пространством параметров* или *базой* деформации F.

О п р е д е л е н и е. Деформация $F(x, \nu)$ особенности f называется *версальной*, если любая деформация $G(x, \eta)$ ($\eta \in \mathbb{C}^m$) особенности f ($G(x, 0) = f(x)$) «эквивалентна деформации, индуцированной из F», т. е. существуют такое аналитическое отображение $\psi\colon (\mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^l, 0)$ пространства параметров и такое аналитическое семейство $g(x, \nu)$ ($g\colon (\mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$, $g(\cdot, 0) = \mathrm{id}\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) локальных замен координат, что $G(x, \nu) = F(g(x, \nu), \psi(\nu))$.

Размерность l базы $\mathbb{C}^l$ версальной деформации $F(x, \nu)$ не меньше кратности μ особенности f. Существует (и единственна в естественном смысле) версальная деформация особенности f с базой, размерность которой в точности равна μ. Эта деформация называется *миниверсальной*.

Миниверсальная деформация $F(x, \nu)$ особенности f может быть построена следующим образом. В п. 24.1 указывалось, что факторкольцо кольца $\mathcal{O}_n$ ростков голоморфных функций $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ по идеалу, порожденному частными производными функции f (якобиеву идеалу), как комплексное векторное пространство имеет размерность, равную кратности μ особенности f. Пусть ростки функций $\varphi_i\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ($i = 0, 1, \ldots, \mu - 1$) порождают базис этого пространства. Тогда деформация $F(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=0}^{\mu-1} \nu_i \varphi_i(x)$ является миниверсальной ($\nu = (\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{\mu-1})$). В качестве φ_0 может быть взят росток функции, тождественно равной единице.

Пусть $F(x, \nu)$ — миниверсальная деформация особенности f ($\nu \in \mathbb{C}^\mu$), $W_\nu = \{x \in \mathbb{C}^n\colon F(x, \nu) = 0, \|x\| \leqslant \rho\}$ — множество нулевого уровня функции $F(\cdot, \nu)$. Поскольку $F(x, 0) = f(x)$ и множество $\{x \in \mathbb{C}^n\colon f(x) = 0\}$ трансверсально к сфере S_ρ достаточно малого радиуса ρ, существует такое $\varepsilon > 0$, что при $\|\nu\| \leqslant \varepsilon$ множество $\{x \in \mathbb{C}^n\colon F(x, \nu) = 0\}$ трансверсально к сфере S_ρ. Отсюда следует, что если множество W_ν неособо, то оно диффеоморфно неособому множеству уровня функции f вблизи критической точки. Те значения параметра ν, для которых W_ν особо, образуют множество (комплексной) коразмерности один.

О п р е д е л е н и е. *Бифуркационной диаграммой нулей* (или *бифуркационной диаграммой множеств*) особенности f называется пространство $\Sigma_\varepsilon\{\nu \in \mathbb{C}^\mu\colon \|\nu\| \leqslant \varepsilon,\ 0$ — критическое значение функции $F(\cdot, \nu)$ в шаре $\|x\| \leqslant \rho\}$.

П р и м е р ы. 1. Миниверсальная деформация особенности A_2 ($f(x) = x^3$) может быть выбрана в виде $F(x; \lambda_1, \lambda_2) = x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$. Локальное нулевое множество уровня функции $F(\cdot; \lambda_1, \lambda_2)$ не имеет особенностей, если многочлен $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ не имеет кратных корней. Поэтому бифуркационная диаграмма нулей Σ состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, для которых многочлен $x^3 + \lambda_1 x + \lambda_2$ имеет вид $(x - a)^2(x - b)$, где $2a + b = 0$. Имеем $\lambda_1 = 2ab + a^2 = -3a^2$, $\lambda_2 = -a^2 b = 2a^3$. Следовательно, бифуркационная

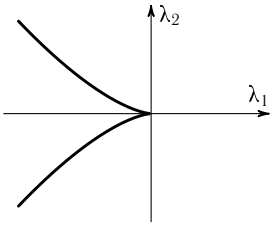


Рис. 90

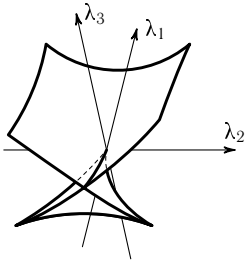


Рис. 91

диаграмма Σ описывается уравнением $\lambda_1^3 + \frac{27}{4}\lambda_2^3 = 0$. Она (точнее, конечно, — ее вещественная часть) изображена на рис. 90.

2. Миниверсальная деформация особенности A_3 ($f(x) = x^4$) может быть выбрана в виде $F(x; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$. Локальное множество уровня функции $F(\cdot; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ не имеет особенностей, если многочлен $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ не имеет кратных корней. Поэтому бифуркационная диаграмма нулей Σ состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{C}^3$, для которых многочлен $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3$ имеет вид $(x - a)^2(x - b)(x - c)$, где $2a + b + c = 0$. Бифуркационная диаграмма Σ носит название «ласточкина хвоста». Она изображена на рис. 91.

Топологический тип пары $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$ ($D_\varepsilon = \{\nu \in \mathbb{C}^\mu\colon \|\nu\| \leqslant \varepsilon\}$ — шар радиуса ε в базе миниверсальной деформации F) не зависит от ε для достаточно малых ε и не зависит от выбора миниверсальной деформации особенности f. Пространство $(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ (открытое подпространство шара D_ε) является базой локально тривиального расслоения $\{(x, \nu) \in \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^\mu\colon \|x\| \leqslant \rho,\ \|\nu\| \leqslant \varepsilon,\ \nu \notin \Sigma_\varepsilon,\ F(x, \nu) = 0\} \to D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ с проекцией $(x, \nu) \mapsto \nu$. Слой $W_\nu = \{x \in \mathbb{C}^n\colon F(x, \nu) = 0,\ \|x\| \leqslant \rho\}$ этого расслоения диффеоморфен неособому множеству уровня особенности f.

Как во всяком расслоении, фундаментальная группа базы действует в гомологиях слоя. Таким образом, имеется естественное представление

$$\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) = \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon, \nu) \to \operatorname{Aut} H_{n-1}(W_\nu) = \operatorname{Aut} H_{n-1}(V_\lambda).$$

Теорема 1. *Образ представления* $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1}(V_\lambda)$ *фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме нулей особенности* f *в гомологиях неособого многообразия уровня совпадает с группой монодромии особенности* f.

Для доказательства надо выбрать миниверсальную деформацию $F(x, \nu)$ особенности f в виде $F_0(x, \nu') - \nu_0$, где $\nu' \in \mathbb{C}^{\mu-1}$, $\nu_0 \in \mathbb{C}$, $\nu = (\nu_0, \nu')$. В качестве шевеления $f_\lambda(x)$ особенности f можно взять шевеление вида $F_0(x, \nu'(\lambda))$. Пусть ρ — естественная проекция базы $\mathbb{C}^\mu$ миниверсальной деформации в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$, переводящая $\nu = (\nu_0, \nu')$ в ν'. Если $f_\lambda(x)$ — морсовская функция (λ достаточно мало), то прямая $L = \rho^{-1}(\nu'(\lambda))$ находится в общем положении с многообразием Σ_ε. Прямая L пересекается с бифуркационной диаграммой Σ_ε в таких точках $(\nu_0, \nu'(\lambda)) \in \mathbb{C}^\mu$, для которых ν_0 является критическим значением функции $f_\lambda(x)$. Количество таких точек равно кратности $\mu(f)$ особенности f. Пространство $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ совпадает с дополнением к множеству критических значений функции f_λ. Ограничение расслоения $\{(x, \nu)\colon \nu \notin \Sigma_\varepsilon, F(x, \nu) = 0\} \to D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$, описанного выше, на $L \setminus \Sigma_\varepsilon$ совпадает с расслоением неособых многообразий уровня функции f_λ над дополнением к множеству ее критических значений. Отсюда следует, что естественное представление $\pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1}(V_\lambda)$, образом которого является группа монодромии особенности f, пропускается через фундаментальную группу дополнения к бифуркационной диаграмме:

$$\pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1}(V_\lambda),$$

где i_* — гомоморфизм фундаментальных групп, индуцированный вложением $L \setminus \Sigma_\varepsilon \hookrightarrow D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$. Из того, что прямая L находится в общем положении с многообразием Σ_ε, выводится, что гомоморфизм $i_*\colon \pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ является эпиморфизмом. Отсюда следует, что образ представления $\pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon) \to \operatorname{Aut} H_{n-1}(V_\lambda)$ совпадает с группой монодромии особенности f.

То, что гомоморфизм $i_*\colon \pi_1(L \setminus \Sigma_\varepsilon) \to \pi_1(D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon)$ эпиморфен, является вариантом теоремы Зарисского ([511]), состоящей в следующем. Пусть M — неособая аффинная алгебраическая гиперповерхность в пространстве $\mathbb{C}^n$, L — (комплексная) прямая общего положения в пространстве $\mathbb{C}^n$. Такая прямая трансверсально пересекается с гиперповерхностью M в m точках $p_1, \ldots, p_m$. Теорема Зарисского утверждает, в частности, что для прямой L общего положения гомоморфизм фундаментальных групп $i_*\colon \pi_1(L \setminus M) \to \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$, индуцированный вложением $i\colon L \setminus M \to \mathbb{C}^n - M$,

является эпиморфизмом. Фундаментальная группа $\pi_1(L \setminus M) = \pi_1(L - \{p_i\})$ прямой с m выколотыми точками является свободной группой, порожденной m образующими. В качестве этих образующих могут быть взяты простые петли, соответствующие системе непересекающихся путей на комплексной прямой L, соединяющих точки p_i с базисной точкой $p_0 \in L \setminus M$. Таким образом, фундаментальная группа дополнения к гиперповерхности M является группой, порожденной m описанными образующими.

Теорема Зарисского описывает также все соотношения между образующими. Для того, чтобы это сделать, рассмотрим проекцию $\pi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ пространства $\mathbb{C}^n$ вдоль прямой L и ее ограничение $\pi|_M\colon M \to \mathbb{C}^{n-1}$ на гиперповерхность M. Общность положения прямой L позволяет, в частности, предполагать, что дискриминантное множество отображения $\pi|_M$ (образ множества его критических точек) является приведенной гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Более подробно это означает следующее. Замыкание множества критических значений отображения $\pi|_M$ является комплексной гиперповерхностью N в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$. Если $q \in \mathbb{C}^{n-1} - N$, то прообраз $\pi|_M^{-1}(q)$ состоит из m точек, в каждой из которых дифференциал отображения $\pi|_M$ невырожден. Во всех неособых точках гиперповерхности N, за исключением множества коразмерности 1, сливаются две точки прообраза. Около такой точки гиперповерхность M может быть локально задана уравнением $x_0 + x_1^2 = 0$, где проекция π переводит точку $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ в точку $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$, N локально задается в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ уравнением $x_1 = 0$. Пусть $q_0 \in \mathbb{C}^{n-1}$ — N-образ прямой L при проекции π, L_1 — прямая общего положения в пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$, проходящая через точку q_0. Можно предполагать, что прямая L_1 пересекает гиперповерхность N только в неособых точках, в которых сливаются две точки из прообраза $\pi|_M^{-1}(q)$, причем все эти пересечения трансверсальны. В этом случае $\pi^{-1}(L_1) \cap M$ является неособой кривой в двумерном комплексном пространстве $\pi^{-1}(L_1)$, а $\pi|_{\pi^{-1}(L_1)\cap M}\colon \pi^{-1}(L_1) \cap M \to L_1$ — m-листным разветвленным накрытием над прямой L_1. Пусть $q_1, \ldots, q_k$ — точки пересечения прямой L_1 с дискриминантным множеством N, τ — произвольная петля в пространстве $L_1 - \{q_1, \ldots, q_k\}$ с началом и концом в точке q_0. Обходу петли τ соответствует гомеоморфизм T_τ пары пространств $(\pi^{-1}(q_0), \pi^{-1}(q_0) \cap M) = (L, L \cap M)$ самой на себя, определенный, конечно, с точностью до изотопии. Этот гомеоморфизм индуцирует преобразование $T_{\tau*}\colon \pi_1(L \setminus M) \to \pi_1(L \setminus M)$ фундаментальной группы прямой с m выколотыми точками $L \setminus M$ в себя. Очевидно, что если $a \in \pi_1(L \setminus M)$, то $i_* a = i_* T_{\tau*} a$, где $i_*\colon \pi_1(L \setminus M) \to \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$. Теорема Зарисского утверждает, что гомоморфизм $\pi_1(\pi^{-1}(L_1) \setminus M) \to \pi_1(\mathbb{C}^n - M)$, индуцированный вложением, является изоморфизмом, а соотношения описанного вида порождают все соотношения между образующими фундаментальной

группы $\pi_1(\mathbb{C}^n - M)$. Естественно, что в качестве образующих системы соотношений могут быть взяты соотношения $i_*a = i_*T_{\tau_i}{}_*a$ для системы $\{\tau_i\}$ простых петель, соответствующих системе непересекающихся путей, соединяющих точки $q_1, \ldots, q_k$ с точкой q_0. Отсюда следует, что группа $\pi_1(\mathbb{C}^n - M)$ является группой с m образующими и mk соотношениями.

Локальный вариант этой теоремы, часть которого мы здесь используем, формулируется аналогичным образом. Его доказательство приведено в [347].

Если γ — петля в дополнении $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме нулей особенности f, то по аналогии с п. 24.1 через h_{γ^*} будем обозначать соответствующий автоморфизм группы гомологий неособого многообразия уровня особенности f (h_{γ^*} принадлежит группе монодромии особенности f).

Особенности соответствует еще одна бифуркационная диаграмма — бифуркационная диаграмма функций. Для ее определения рассмотрим миниверсальную деформацию $F_0(x, \nu)$ особенности f в классе функций, равных нулю в точке 0. Такая деформация имеет $(\mu - 1)$ параметр. Будем называть ее *ограниченной миниверсальной деформацией*. В качестве нее можно, например, взять деформацию $F_0(x, \nu) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu-1} \nu_i \varphi_i(x)$, где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{\mu-1})$, $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{\mu-1}$ — ростки, порождающие базис факторкольца кольца ростков в нуле голоморфных функций по якобиеву идеалу $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ особенности f, $\varphi_0 \equiv 1$, $\varphi_i(0) = 0$ при $i \geqslant 1$ (деформация $F_0(x, \nu)$ отличается от миниверсальной деформации $F(x, \nu)$ отсутствием слагаемого $\nu_0 \cdot 1$, которое не влияет на тип функции).

В маленькой шаровой окрестности D_ε нуля в базе $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации рассмотрим множество тех значений параметров ν, при которых функция $F_0(\cdot, \nu)$ в окрестности B_ρ нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ является морсовской, т. е. имеет только невырожденные критические точки (в количестве μ штук) с различными критическими значениями. Дополнение $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к нему называется *бифуркационной диаграммой функций* особенности f. Топологический тип пары $(D_\varepsilon, \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$, конечно, не зависит от ε для достаточно малых ε. Множество $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ является гиперповерхностью в пространстве $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Она, очевидно, приводима, так как является объединением двух гиперповерхностей. Одна из них (комплексная каустика) — это множество значений параметров ν, для которых функция $F_0(\cdot, \nu)$ имеет вырожденные критические точки, а вторая (страт Максвелла) — множество тех значений ν, для которых она имеет критические точки с совпадающими критическими значениями.

Примеры. 1. Бифуркационная диаграмма функций особенности A_2, очевидно, состоит из одной точки $\lambda = 0$ в базе $\mathbb{C}^1$ ограниченной миниверсальной деформации.

2. Бифуркационная диаграмма функций особенности A_3 состоит из тех значений $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, при которых многочлен $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$ либо имеет вырожденную критическую точку, либо имеет две невырожденные критические точки с одинаковыми критическими значениями. Второе из этих множеств совпадает с множеством $\{\lambda_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^2$. Первое может быть описано условием, что многочлен $4x^3 + 2\lambda_1 x + \lambda_2$ (производная многочлена $x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x$) имеет кратный корень. Это условие будет выполнено при $\lambda_1^3 + \frac{27}{8}\lambda_2^2 = 0$. Бифуркационная диаграмма функций особенности A_3 изображена на рис. 92.

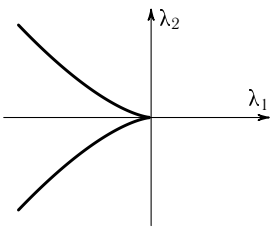


Рис. 92

Имеется естественное отображение (проекция) ρ базы миниверсальной деформации $\mathbb{C}^\mu$ на базу ограниченной миниверсальной деформации $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Можно показать, что росток пространства $\bar{\Sigma}_\varepsilon$ совпадает с множеством нерегулярных значений отображения $\Sigma_\varepsilon \to \mathbb{C}^{\mu-1}$, являющегося композицией вложения $\Sigma_\varepsilon \hookrightarrow \mathbb{C}^\mu$ и проекции ρ. Над дополнением к бифуркационной диаграмме функций $\bar{\Sigma}_\varepsilon$ особенности f это отображение определяет μ-листное накрытие.

25.2. Связность диаграммы Дынкина и «неприводимость» оператора классической монодромии особенности. В п. 25.1 указывалось, что бифуркационная диаграмма функций особенности всегда приводима (за исключением тривиальных случаев особенностей кратности один и два). В отличие от нее бифуркационная диаграмма нулей особенности неприводима.

Теорема 2 (см., например, [90]). *Бифуркационная диаграмма нулей Σ_ε особенности f является неприводимым аналитическим множеством. Более того, существует росток собственного отображения $(\mathbb{C}^{\mu-1}, 0) \to (\mathbb{C}^\mu, 0)$, образ которого совпадает с пространством Σ_ε и которое является изоморфизмом вне множества особых точек пространства Σ_ε.*

Отображение пространства $\mathbb{C}^{\mu-1}$ в базу миниверсальной деформации $\mathbb{C}^\mu$ особенности f, указанное в теореме, может быть построено, следующим образом. Рассмотрим множество ростков функций $g\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, удовлетворяющих условиям $g(0) = 0$, $dg(0) = 0$. На нем действует группа ростков аналитических диффеоморфизмов пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющих точку 0. Орбита особенности f под действием этой группы является неособым комплексным многообразием коразмерности $\mu - 1$ (для строгости следует рассматривать все в пространстве струй достаточно высокого порядка). Трансверсаль к орбите в точке f имеет размерность $(\mu - 1)$ и определяет некоторую $(\mu - 1)$-параметрическую деформацию

особенности f. Как всякая деформация особенности f, она эквивалентна деформации, индуцированной из миниверсальной при некотором отображении ее базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ в базу $\mathbb{C}^{\mu}$ миниверсальной деформации. Поскольку все функции рассматриваемой деформации имеют 0 критическим значением, все пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$ переходит при этом отображении в бифуркационную диаграмму нулей Σ_ε. Это и есть отображение, описанное в теореме 2.

С помощью этой конструкции легко показать, что каустика (т. е. часть бифуркационной диаграммы функций особенности, состоящая из точек базы ограниченной миниверсальной деформации, для которых соответствующая функция имеет вырожденные критические точки) неприводима. Каустика является образом (относительно канонической проекции) подмножества бифуркационной диаграммы нулей Σ_ε, состоящего из точек базы миниверсальной деформации, для которых соответствующая функция имеет вырожденную критическую точку на нулевом множестве уровня. В трансверсали к орбите особенности, которая, как это было объяснено, является нормализацией бифуркационной диаграммы Σ_ε, этому подмножеству соответствует часть диаграммы, определяемая условием вырождения второго дифференциала. Условие вырождения квадратичной формы (второго дифференциала), состоящее в обращении определителя в нуль, определяет в пространстве квадратичных форм неприводимое подмножество, откуда следует неприводимость каустики.

Из этого утверждения А. М. Габриэлов ([90]) и Ф. Лаццери ([371]) вывели следующий результат.

Т е о р е м а 3. *Диаграмма Дынкина любой особенности в отмеченном базисе связна.*

Это утверждение вытекает из теоремы 4 (см. ниже). Такой же результат имеет место и для слабо отмеченного базиса.

С л е д с т в и е. *Пусть* $f_t(x)$ $(t \in [0, t_0])$ — *деформация особенности* f, *и пусть для малых* $t \neq 0$ *функция* $f_t(x)$ *имеет в окрестности нуля в пространстве* $\mathbb{C}^n$ k *различных критических точек* $p_1(t), \ldots, p_k(t)$. *Предположим, что все критические значения* $f_t(p_i(t))$ $(i = 1, \ldots, k)$ *функции* f_t *совпадают. Тогда* $k = 1$, *т. е. функция* f_t *имеет только одну критическую точку* (*кратности* $\mu(f)$).

Действительно, легко видеть, что если $k > 1$, то исчезающие циклы, соответствующие разным критическим точкам деформации $f_t(x)$ особенности f, будут иметь нулевой индекс пересечения. Поэтому диаграмма Дынкина особенности f распадается на k несвязных компонент, что противоречит теореме 3.

Мы здесь докажем несколько более сильное утверждение, чем теорема 3.

Т е о р е м а 4. *Группа монодромии особенности транзитивно действует на множестве исчезающих циклов в гомологиях неособого множества уровня вблизи критической точки, т. е. для любых исчезающих циклов Δ_1 и Δ_2 существует элемент из группы монодромии особенности, переводящий Δ_1 в $\pm\Delta_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и при доказательстве теоремы 1, рассмотрим миниверсальную деформацию особенности f вида $F(x, \nu) = F_0(x, \nu') - \nu_0$, где $\nu' \in \mathbb{C}^{\mu-1}$, $\nu_0 \in \mathbb{C}$, $\nu = (\nu_0, \nu')$; в качестве шевеления $\tilde{f}$ особенности f возьмем функцию $\tilde{f} = F_0(x, \nu')$ с фиксированным значением параметров ν'. При этом ν' выберем так, чтобы функция $F_0(x, \nu')$ была морсовской. Это будет выполнено для почти всех значений параметров ν' (кроме тех, которые лежат в бифуркационной диаграмме функций особенности). Если L — (комплексная) прямая $\rho^{-1}(\nu')$ ($\rho\colon \mathbb{C}^{\mu} \to \mathbb{C}^{\mu-1}$ — проекция базы миниверсальной деформации), то пересечение $L \cap \Sigma_\varepsilon$ состоит из точек (z_i, ν') $(i = 1, \ldots, \mu)$, где z_i — критические значения функции $\tilde{f}$.

Исчезающий цикл Δ_k $(k = 1, 2)$ в гомологиях неособого множества уровня $\{\tilde{f} = z_0\}$ определяется путем u_k, соединяющим критическое значение z_{i_k} с некритическим значением z_0 и не проходящим через критические значения функции $\tilde{f}$. При этом для простоты будем считать, что для очень малых t выполняется равенство $u_k(t) = z_{i_k} + t$. Пути u_1 и u_2 можно рассматривать как пути на комплексной прямой $L \subset \mathbb{C}^{\mu}$. Из неприводимости бифуркационной диаграммы Σ_ε вытекает связность множества неособых точек пространства Σ_ε. Те (неособые) точки пространства Σ_ε, в которых проекция $\rho\colon \Sigma_\varepsilon \to \mathbb{C}^{\mu-1}$ является вырожденной, образуют подмножество (комплексной) коразмерности один. Поэтому их выкидывание из множества неособых точек пространства Σ_ε не нарушает его связности. Отсюда следует, что точки (z_{i_1}, ν') и (z_{i_2}, ν') можно соединить путем v ($v(0) = (z_{i_1}, \nu')$, $v(1) = (z_{i_2}, \nu')$), целиком лежащим в множестве неособых точек пространства Σ_ε, в которых оно невырожденно проектируется на пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}$. Рассмотрим петлю w в дополнении к бифуркационной диаграмме нулей Σ_ε в пространстве $\mathbb{C}^{\mu}$ (начинающуюся и заканчивающуюся в точке (z_0, ν')), которая определяется следующим образом. Она идет от точки (z_0, ν') до точки $(z_{i_1} + t_0, \nu') = (u_1(t_0), \nu')$ с достаточно малым t_0 по пути u_1, затем она идет от точки $(z_{i_1} + t_0, \nu')$ до точки $(z_{i_2} + t_0, \nu') = (u_2(t_0), \nu')$ по пути $v + (t_0, 0)$, идущему параллельно пути v, и, наконец, возвращается в точку (z_0, ν') по пути u_2. Нетрудно видеть, что оператор монодромии h_{w^*}, соответствующий петле w, переводит исчезающий цикл Δ_1 в исчезающий цикл Δ_2 (может быть — с изменением ориентации), что и требовалось доказать.

Теорема 3 является непосредственным следствием теоремы 4. Действительно, пусть диаграмма Дынкина особенности f в (слабо отмеченном) базисе $\{\Delta_i\}$ является несвязной. Из теоремы Пикара—Лефшеца следует, что

операторы Пикара—Лефшеца (и их композиции) при действии на базисный исчезающий цикл переводят его в цикл, являющийся линейной комбинацией базисных исчезающих циклов из той же компоненты связности диаграммы. Поэтому в этом случае не существует оператора из группы монодромии особенности f, переводящего базисный исчезающий цикл в базисный исчезающий цикл из другой компоненты связности диаграммы, что противоречит теореме 4. Из этих рассуждений вытекает, что диаграмма Дынкина особенности является связной также и в случае, если кратности ее ребер рассматриваются по модулю $m > 1$.

Из теоремы 3 можно вывести некоторые свойства оператора классической монодромии особенности. Сформулируем одно утверждение о треугольных матрицах, нужное для этого.

Лемма 1. *Пусть A и B — верхние треугольные матрицы размера $\mu \times \mu$ с единицами на диагонали. Предположим, что $A \cdot B^T$ — такая матрица, что на пересечении ее первых k столбцов с последними $(\mu - k)$ строками стоят нули. Тогда тем же свойством обладает и матрица B^T, т. е. матрица B является прямой суммой верхних треугольных матриц размеров $k \times k$ и $(\mu - k) \times (\mu - k)$.*

Доказательство не представляет труда.

Теорема 5. *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис группы $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ гомологий неособого множества уровня особенности, I — такое подмножество множества индексов $\{1, \ldots, \mu\}$, что линейная оболочка базисных элементов Δ_i с $i \in I$ инвариантна относительно оператора классической монодромии h_*. Тогда или $I = \varnothing$, или $I = \{1, \ldots, \mu\}$.*

Мы докажем чуть более сильное (на первый взгляд) утверждение, которое на самом деле в точности эквивалентно теореме 5.

Пусть $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_k\}$ — набор исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности f, определяемых системой путей $\{u_i\}$ $(i = 1, \ldots, k)$, соединяющих часть критических значений шевеления $\tilde{f}$ особенности f с ее некритическим значением z_0 и не проходящих (при $t \neq 0$) через критические значения функции $\tilde{f}$. Предположим, что пути u_i являются несамопересекающимися и не пересекают друг друга в точках, отличных от их концов, совпадающих с z_0.

Теорема 6. *Если линейная оболочка исчезающих циклов $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ инвариантна относительно оператора классической монодромии особенности, то или $k = 0$, или $k = \mu(f)$.*

Доказательство. Будем считать, что циклы $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ (и пути $u_1, \ldots, u_k$) занумерованы в порядке, который фиксируется условием 3) определения отмеченного базиса (см. п. 23.2). Легко видеть, что система

путей $\{u_i\colon i=1, \dots, k\}$ может быть дополнена до системы путей $\{u_i\colon i=1, \dots, k, \dots, \mu\}$, определяющей отмеченный базис $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_\mu$ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$. Условие инвариантности линейной оболочки элементов $\Delta_1, \dots, \Delta_k$ относительно оператора классической монодромии h_* означает, что в матрице H оператора h_* в базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_k, \dots, \Delta_\mu$ стоят нули на пересечениях первых k столбцов с последними $(\mu - k)$ строками. Применяя лемму 1 к равенству $H = (-1)^n L^{-1} L^T$ (где L — матрица формы Зейферта особенности), получаем, что матрица L является прямой суммой матриц размеров $k \times k$ и $(\mu - k) \times (\mu - k)$. Следовательно, этим же свойством обладает и матрица пересечений особенности f в отмеченном базисе $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$, равная $-L + (-1)^n L^T$. При $k \neq 0, \mu$ это означает, что диаграмма Дынкина особенности f распадается в несвязное объединение двух диаграмм (с количеством вершин k и $(\mu - k)$), что противоречит теореме 3.

Следствие. *Если оператор классической монодромии особенности является умножением на единицу или на минус единицу, то особенность невырождена, т. е. ее кратность μ равна единице.*

Это утверждение (как гипотеза Себастьяни) было доказано Н. А'Кампо в [243]. Там оно было выведено из следующего результата.

Теорема 7. *След $\operatorname{tr} h_*$ оператора классической монодромии особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ функции n переменных равен $(-1)^n$.*

25.3. Бифуркационные диаграммы простых особенностей. Известно (см. п. 25.6), что для простых особенностей A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 с нечетным числом переменных группа монодромии совпадает с соответствующей одноименной классической группой Вейля (см. [45]). Эта группа является образом фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме нулей Σ_ε особенности. Для простых особенностей пространство Σ_ε может быть получено следующим образом.

Пусть $\mathbb{R}^k$ — векторное пространство, на котором канонически действует группа Вейля W (A_k, D_k или E_k соответственно), $\mathbb{C}^k = \mathbb{R}^k \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — его комплексификация. Действие группы W на пространстве $\mathbb{R}^k$ естественным образом продолжается до действия на комплексификации $\mathbb{C}^k$. Пусть S — объединение нерегулярных орбит действия группы W, т. е. множество точек, на которых действие группы W не свободно (имеет нетривиальную стационарную подгруппу). Оно совпадает с объединением (комплексных) зеркал, отражения относительно которых принадлежат группе W. Рассмотрим факторпространство $\mathbb{C}^k/W$. Известно ([45]), что оно как аналитическое пространство изоморфно k-мерному линейному комплексному пространству.

Теорема 8 ([9]). *Для простых особенностей A_k, D_k, E_k пара $(\mathbb{C}^k/W, S/W)$ изоморфна (в окрестности нуля) паре $(D_\varepsilon, \Sigma_\varepsilon)$, где Σ_ε — бифуркационная диаграмма нулей особенности.*

Пример. Пусть $f(x) = x^{k+1}$ (особенность A_k). В этом случае группа Вейля W является группой перестановок $(k+1)$-го элемента. Действие ее на пространстве $\mathbb{C}^k$ определяется следующим образом. Пространство $\mathbb{C}^k$ вкладывается в пространство $\mathbb{C}^{k+1}$ на единицу большей размерности в виде гиперплоскости $\sum_{i=1}^{k+1} x_i = 0$, а действие группы W на нем получается сужением ее действия на пространстве $\mathbb{C}^{k+1}$ в виде группы перестановок координат. Изоморфизмом факторпространства $\mathbb{C}^{k+1}/W$ с пространством $\mathbb{C}^{k+1}$ является отображение, переводящее класс точки $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ в точку $(\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1})$, где $\sigma_i = \sigma_i(x_1, \ldots, x_{k+1})$ — i-я элементарная симметрическая функция от переменных $x_1, \ldots, x_{k+1}$ ($\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_{k+1}, \ldots, \sigma_{k+1} = x_1 \cdot \ldots \cdot x_{k+1}$). То, что это отображение является изоморфизмом комплексных многообразий, следует из основной теоремы о симметрических функциях (любая аналитическая симметрическая функция от $x_1, \ldots, x_{k+1}$ может быть единственным способом представлена в виде аналитической функции от симметрических многочленов $\sigma_1, \ldots, \sigma_{k+1}$). При этом изоморфизме пространство $\mathbb{C}^k/W$ изоморфно отображается на координатную гиперплоскость $\sigma_1 = 0$. Зеркала (нерегулярные орбиты) определяются условием $x_i = x_j$. Миниверсальная деформация особенности $f(x)$ имеет вид $F(x, t_0, \ldots, t_{k-1}) = x^{k+1} + t_{k-1}x^{k-1} + \ldots + t_1 x + t_0$. При этом $t_i = (-1)^{k+1-i}\sigma_{k+1-i}(x_1, \ldots, x_{k+1})$, где $(x_1, \ldots, x_{k+1})$ — корни уравнения $F(x, t_0, \ldots, t_{k-1}) = 0$, $t_k = x_1 + \ldots + x_{k+1} = 0$. Бифуркационная диаграмма нулей состоит из тех значений параметров $t = (t_0, t_1, \ldots, t_{k-1})$, при которых функция $F(\cdot, t)$ имеет критическую точку с критическим значением, равным нулю, т. е. имеет кратный корень $x_i = x_j$. Отсюда видно, как в этом случае определить изоморфизм, указанный в теореме 8.

Примерно так же доказывается теорема 8 для других простых особенностей.

Напомним, что пространством типа $K(\pi, 1)$ называется пространство, фундаментальная группа π_1 которого совпадает с группой π, а все последующие гомотопические группы $(\pi_2, \pi_3, \ldots)$ тривиальны. Пространство типа $K(\pi, 1)$ является базой главного расслоения с группой π и с гомотопически тривиальным пространством расслоения.

В [42] доказано, что пространство $\mathbb{C}^k/W - S/W$ регулярных орбит действия группы W является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — обобщенная группа кос Брискорна группы Вейля W. Если W — группа Вейля типа A_k, то π — обычная группа кос Артина из $(k+1)$ нитей.

Небольшое отступление. *Группы кос.*

Для того чтобы изложение было более независимым, приведем некоторые определения и результаты из теории кос. Более подробное изложение можно найти в [42].

Наглядно-геометрическое определение состоит в том, что косой называется объект, изображенный на рис. 93. Коса состоит из n непересекающихся нитей в пространстве $\mathbb{R}^3$, соединяющих n фиксированных точек на нижнем основании (отрезке) с такими же точками на верхнем основании и идущих монотонно вверх от нижнего основания до верхнего. Две косы считаются эквивалентными, если их можно продеформировать одна в другую, не нарушая монотонности нитей и не допуская их пересечений друг с другом. Косы можно перемножать, приставляя одну из них к другой (рис. 94).

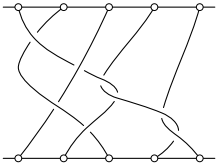


Рис. 93

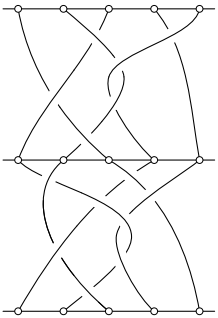


Рис. 94

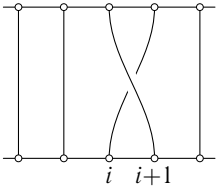


Рис. 95

Относительно такого умножения косы из n нитей (точнее, их классы эквивалентности) образуют группу $B(n)$. Единицей этой группы является «незапутанная» коса, состоящая из вертикальных отрезков, соединяющих точки верхнего и нижнего оснований. Коса, обратная к данной, получается из нее отражением в горизонтальной плоскости.

Нетрудно видеть, что группа $B(n)$ кос из n нитей порождена $n-1$ образующей $g_1, \ldots, g_{n-1}$, где g_i — коса, «перепутывающая» i-ю и $(i+1)$-ю нити (рис. 95). Эти образующие связаны соотношениями $g_i g_j = g_j g_i$ при $|i-j|>1$, $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, (n-2))$. Можно показать, что указанные образующие и соотношения определяют группу $B(n)$. Каждой косе очевидным образом соответствует перестановка n элементов. Поэтому определен естественный эпиморфизм группы кос $B(n)$ на группу $S(n)$ перестановок n элементов. Ядро $\hat{B}(n)$ этого гомоморфизма называется *группой крашеных кос* из n нитей. Крашеная коса — это такая коса, каждая нить которой возвращается в ту же точку, из которой она выходит.

Более формальное определение группы кос, проясняющее значение для задач анализа, может быть получено следующим образом. Часть пространства $\mathbb{R}^3$, заключенная между горизонтальными плоскостями, содержащими нижнее и верхнее основания, может быть отождествлена с произведением

$I \times \mathbb{C}$ отрезка $I = [0, 1]$ и плоскости комплексных чисел $\mathbb{C}$. При таком отождествлении каждому числу $t \in [0, 1]$ коса непрерывным образом соотносит неупорядоченный набор из n различных комплексных чисел. При этом значениям $t = 0$ и $t = 1$ соответствует один и тот же фиксированный набор чисел. Таким образом, группа кос $B(n)$ отождествляется с фундаментальной группой пространства всех неупорядоченных наборов из n различных комплексных чисел. Точно так же группа крашеных кос $\hat{B}(n)$ отождествляется с фундаментальной группой пространства всех упорядоченных наборов из n различных комплексных чисел.

Пусть $\mathbb{C}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\colon x_i \in \mathbb{C}\}$ — пространство упорядоченных наборов из n комплексных чисел, S — объединение всех гиперплоскостей, определяемых уравнениями $x_i = x_j$, $(\mathbb{C}^n - S)$ — пространство упорядоченных наборов из n различных комплексных чисел. Имеем $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n - S)$.

На пространстве $\mathbb{C}^n$ перестановками координат действует группа $S(n)$ перестановок n элементов. Пространство $\mathbb{C}^n/S(n)$ является пространством неупорядоченных наборов из n комплексных чисел. Оно изоморфно n-мерному комплексному векторному пространству. Изоморфизм состоит в сопоставлении неупорядоченному набору комплексных чисел $(x_1, \ldots, x_n) \in \in \mathbb{C}^n/S(n)$ многочлена $p(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ с корнями $x_1, \ldots, x_n$ (или его коэффициентов, которые с точностью до знаков являются элементарными симметрическими функциями $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$: $\sigma_1 = = x_1 + \ldots + x_n, \ldots, \sigma_n = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$). Пространству $\Sigma = S/S(n)$ соответствует множество многочленов с кратными корнями. Таким образом, $(\mathbb{C}^n - S)/S(n) = \mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma$ является пространством неупорядоченных наборов из n различных комплексных чисел; группа кос $B(n)$ совпадает с его фундаментальной группой $\pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$.

Имеет место более сильный результат, утверждающий, что пространство $(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ для группы $B(n)$ кос из n нитей. Это означает, что $\pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = B(n), \pi_k(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = = 0$ при $k > 1$. Поскольку пространство $\mathbb{C}^n - S$ является ($n!$-листным) накрытием пространства $(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma)$, утверждение о пространстве $\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma$ эквивалентно утверждению, что пространство $\mathbb{C}^n - S$ является пространством типа $K(\pi, 1)$ (для группы $\hat{B}(n)$ крашеных кос из n нитей).

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим отображение пространства $\mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n\colon x_i \neq x_j\}$ в пространство $\{(x_1, \ldots \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : x_i \neq x_j\}$, переводящее точку $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ в точку $(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Легко видеть, что это отображение является расслоением со слоем $\mathbb{C} - \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$. Поскольку слой этого расслоения имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй, требуемое утверждение доказывается индукцией по размерности n.

Группа $S(n)$ перестановок n элементов является одной из конечных групп, порожденных отражениями. Действие группы $S(n)$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ перестановками координат приводимо. Оно распадается в прямую сумму двух действий: действия на подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$, задаваемом уравнением $x_1 + \ldots + x_n = 0$, и тривиального действия на одномерном пространстве $x_1 = \ldots = x_n$. На подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ это действие совпадает с обычным действием группы Вейля типа A_{n-1}, изоморфной группе $S(n)$ перестановок n элементов. Объединение зеркал всех отражений в группе $S(n)$ на пространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ (которыми являются гиперплоскости, задаваемые уравнениями $x_i = x_j$) и его факторпространство по действию этой группы мы, как и прежде, будем обозначать через S и Σ (это не должно вызвать путаницы). При этом $\mathbb{C}^n - S = (\mathbb{C}^{n-1} - S) \times \mathbb{C}^1$, $\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma = (\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma) \times \mathbb{C}^1$. Поэтому $\hat{B}(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n - S) = \pi_1(\mathbb{C}^{n-1} - S)$, $B(n) = \pi_1(\mathbb{C}^n/S(n) - \Sigma) = \pi_1(\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma)$. Описание группы крашеных кос $\hat{B}(n)$ и группы кос $B(n)$ как фундаментальных групп пространств $\mathbb{C}^{n-1} - S$ и $\mathbb{C}^{n-1}/S(n) - \Sigma$ соответственно подсказывает обобщение этого определения.

Пусть W — конечная неприводимая группа, порожденная отражениями, действующая в вещественном векторном пространстве $\mathbb{R}^n$ размерности n. Группа W действует также на его комплексификации $\mathbb{C}^n$. Можно показать, что факторпространство $\mathbb{C}^n/W$ изоморфно комплексному векторному пространству размерности n (см. [45]). Пусть $\{V_i\}$ — множество всех гиперплоскостей в пространстве $\mathbb{R}^n$, отражения относительно которых принадлежат группе W, $V_{i\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ — их комплексификации. Вне подпространства $S = \bigcup_i V_{i\mathbb{C}}$ группа W действует свободно. Пусть $\Sigma = S/W$. Фундаментальная группа $B_W = \pi_1(\mathbb{C}^n/W - \Sigma)$ пространства $\mathbb{C}^n/W - \Sigma$ называется (обобщенной) группой кос Брискорна группы W; фундаментальная группа $\hat{B}_W = \pi_1(\mathbb{C}^n - S)$ называется (обобщенной) группой крашеных кос Брискорна группы W. Имеет место точная последовательность $1 \to \hat{B}_W \to B_W \to W \to 1$.

Лемма 2. *Пространства $\mathbb{C}^n/W - \Sigma$ и $\mathbb{C}^n - S$ являются пространствами типа $K(\pi, 1)$ (для групп B_W и $\hat{B}_W$ соответственно).*

Для группы W типа A_{n-1} (группа перестановок n элементов) эта лемма уже доказана. Покажем, как она может быть доказана для групп W типа B_n (изоморфных группам типа C_n) и D_n. Естественно, что утверждение леммы достаточно доказать только для пространства $\mathbb{C}^n - S$.

Для группы W типа B_n зеркалами отражений, принадлежащих группе W, являются гиперплоскости $\{x_i \pm x_j = 0\}$ и $\{x_i = 0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Используя индукцию, мы можем считать, что пространство $\{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}\colon x_i \pm x_j \neq 0, x_i \neq 0\}$ является пространством типа $K(\pi, 1)$.

Естественная проекция

$$\mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i \pm x_j \neq 0,\ x_i \neq 0\} \to$$
$$\to \{(x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1} : x_i \pm x_j \neq 0,\ x_i \neq 0\}$$

является локально тривиальным расслоением со слоем $\mathbb{C} - \{0, \pm x_1, \pm x_2, \ldots, \pm x_{n-1}\}$. Поскольку слой этого расслоения имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй, отсюда вытекает требуемое утверждение о пространстве $\mathbb{C}^n - S$.

Для группы W типа D_n зеркалами отражений, принадлежащих группе W, являются гиперплоскости $\{x_i \pm x_j = 0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим отображение

$$\mathbb{C}^n - S = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n : x_i \pm x_j \neq 0\} \to$$
$$\to \{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : y_i \neq y_j,\ y_i \neq 0\},$$

задаваемое формулами $y_i = x_n^2 - x_i^2$. Это отображение является локально тривиальным расслоением. Слой его является аффинной комплексной кривой и поэтому имеет тривиальные гомотопические группы, начиная со второй. Точно так же, как для пространства $\mathbb{C}^n - S$, соответствующего группе типа B_n, с помощью рассмотрения проекции $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ индукцией по n доказывается, что база $\{(y_1, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1} : y_i \neq y_j,\ y_i \neq 0\}$ этого расслоения является пространством типа $K(\pi, 1)$. Отсюда следует, что и пространство $\mathbb{C}^n - S$ этого расслоения является пространством типа $K(\pi, 1)$.

В общем случае эта лемма вытекает из следующего общего утверждения, принадлежащего Делиню ([298]). Пусть в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено конечное число гиперплоскостей V_i. Пусть $V_{i\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}^n$ — их комплексификации. Предположим, что все компоненты дополнения объединения $\bigcup\limits_i V_i$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ являются открытыми симплициальными конусами (т. е. имеют ровно по n граней). Тогда пространство $\mathbb{C}^n - \left(\bigcup\limits_i V_{i\mathbb{C}}\right)$ является пространством типа $K(\pi, 1)$

Из теоремы 8 и леммы 2 вытекает следующий результат.

Т е о р е м а 9. *Для простых особенностей дополнение $D_\varepsilon - \Sigma_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме нулей является пространством типа* $K(\pi, 1)$.

О. В. Ляшко и Э. Лойенга (см. [383]) доказали, что для простых особенностей дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме функций также является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — подгруппа индекса $\mu! N^\mu |W|^{-1}$ в группе кос Артина из μ нитей (здесь $|W|$ — порядок соответствующей группы Вейля, а N — число Коксетера, т. е. на языке особенностей — порядок оператора классической монодромии).

Вложение фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon)$ дополнения к бифуркационной диаграмме функций простой особенности в группу кос из μ нитей строится следующим образом. Группу кос из μ нитей можно рассматривать как фундаментальную группу пространства многочленов вида $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, не имеющих кратных корней. В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$ с координатами $(a_0, a_1, \ldots, a_{\mu-2})$ точки, соответствующие многочленам с кратными корнями, образуют алгебраическую поверхность Ξ. Дополнение к ней является пространством типа $K(\pi, 1)$, где π — группа кос из μ нитей. Каждой точке ν базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации особенности f соответствует функция $F(\cdot, \nu)$ — шевеление особенности f. Если каждое критическое значение считать столько раз, какова его кратность, то в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ эта функция имеет ровно μ критических значений. Бифуркационная диаграмма функций $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ особенности f выделяется в базе $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации тем условием, что ее точкам соответствуют функции $F(\cdot, \nu)$ имеющие менее чем μ различных критических значений. Таким образом, при $\nu \in \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ некоторые критические значения функции $F(\cdot, \nu)$ совпадают.

Пусть ν — точка базы $\mathbb{C}^{\mu-1}$ ограниченной миниверсальной деформации, $F(\cdot, \nu)$ — соответствующая ей функция, $z_1, \ldots, z_\mu$ — ее критические значения в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$ (значения z_i не обязательно все различны), $\bar{z} = \sum_{i=1}^{\mu} z_i/\mu$ — их среднее арифметическое, $\tilde{z}_i = z_i - \bar{z}$ $(i = 1, \ldots, \mu)$. Пусть $p_\nu(x) = \prod_{i=1}^{\mu}(x - \tilde{z}_i)$ — многочлен степени μ с корнями $\tilde{z}_1, \ldots, \tilde{z}_\mu$. Поскольку $\sum_{i=1}^{\mu} \tilde{z}_i = 0$, коэффициент при мономе $x^{\mu-1}$ в многочлене $p_\nu(x)$ равен нулю. Поэтому многочлен $p_\nu(x)$ принадлежит пространству $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$ многочленов вида $x^\mu + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + a_1 x + a_0$. Ставя в соответствие точке $\nu \in \mathbb{C}^{\mu-1}$ многочлен $p_\nu(x) \in \mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$, мы получаем отображение $\psi\colon \mathbb{C}^{\mu-1} \to \mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$ базы ограничений миниверсальной деформации в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$. При этом отображение ψ переводит бифуркационную диаграмму функций $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ в пространство Ξ многочленов с кратными корнями, а дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме — в пространство $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ многочленов, не имеющих кратных корней. Прямыми вычислениями показывается, что на дополнении к бифуркационной диаграмме $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ отображение ψ является невырожденным, т. е. имеет ранг, равный $(\mu - 1)$. Прообразом нуля при отображении ψ является множество значений параметров $\nu \in \mathbb{C}^{\mu-1}$, при которых функция $F(\cdot, \nu)$ имеет единственное критическое значение. В соответствии со следствием из теоремы 3 отсюда вытекает,

что она имеет единственную критическую точку. Таким образом, прообраз нуля при отображении ψ совпадает со стратом $\mu = \text{const}$ в базе ограниченной миниверсальной деформации. Для простых особенностей (и только для них!) этот страт состоит из одной точки $\nu = 0$. Отсюда следует, что отображение $\psi\colon \mathbb{C}^{\mu-1} \to \mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)}$ является собственным в окрестности нуля, а его ограничение на дополнение $\mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon$ к бифуркационной диаграмме функций определяет накрытие над пространством $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ многочленов без кратных корней. Таким образом, дополнение к бифуркационной диаграмме функций $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ простой особенности является накрытием над пространством типа $K(\pi, 1)$, откуда следует, что оно само является пространством того же типа. При этом отображение ψ индуцирует вложение фундаментальной группы дополнения к бифуркационной диаграмме $\tilde{\Sigma}_\varepsilon$ в фундаментальную группу пространства $\mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ многочленов без кратных корней, являющуюся группой кос из μ нитей.

Если $p\colon E \to B$ — накрытие, то его группой скольжений называется группа $\mathrm{Aut}(p) = \{h\colon E \to E\colon h$ — гомеоморфизм, $ph(x) = p(x)$ для $x \in E\}$. Нетрудно видеть, что группа $\mathrm{Aut}(p)$ скольжений накрытия p изоморфна факторгруппе $N(\pi_1(E))/\pi_1(E)$, где $N(\pi_1, (E))$ — нормализатор подгруппы $\pi_1(E)$ в группе $\pi_1(B)$, т. е. $\{g \in \pi_1(B)\colon g\pi_1(E)g^{-1} = \pi_1(E)\}$.

Для простых особенностей группа скольжений $\mathrm{Aut}(\psi)$ накрытия $\psi\colon \mathbb{C}^{\mu-1} - \tilde{\Sigma}_\varepsilon \to \mathbb{C}^{\mu-1}_{(a)} - \Xi$ дополнения к бифуркационной диаграмме функций над пространством многочленов без кратных корней, построенного выше, описана в [154]. Она является циклической для всех простых особенностей, кроме A_1 и D_4. Ее порядок равен числу Коксетера соответствующей группы Вейля (или, что то же самое, — порядку оператора классической монодромии) для особенностей типов A_μ ($\mu \neq 1$), D_μ ($\mu \neq 4$) и E_6, а для особенностей типов E_7 и E_8 — половине числа Коксетера. Для особенности типа D_4 группа $\mathrm{Aut}(\psi)$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_3 \oplus S(3)$, где $S(3)$ — группа перестановок трех элементов; для особенности типа A_1 группа $\mathrm{Aut}(\psi)$ тривиальна.

В вещественном случае, т. е. когда рассматривается вещественная миниверсальная деформация вещественной особенности, Э. Лойенга ([385]) доказал, что дополнение к бифуркационной диаграмме простой особенности имеет стягиваемые компоненты. Эти компоненты взаимно однозначно соответствуют классам W-сопряженных элементов второго порядка в классе смежности Wn, где $n \in N/W$ — некоторый элемент второго порядка, W — соответствующая группа Вейля, N — ее нормализатор в группе всех линейных преобразований. Группа N/W совпадает с группой автоморфизмов соответствующей классической диаграммы Дынкина.

О. В. Ляшко ([157]) описал все распадения простых особенностей, встречающиеся в базе ее ограниченной миниверсальной деформации. Пусть

$f_\lambda(x)$ $(\lambda \in (\mathbb{C}, 0))$ — деформация особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Говорят, что при деформации f_λ особенность f распадается по типу $X = (X_1, \ldots, X_k)$, где $X_i = (X_{i1} \ldots . X_{ij_i})$, если для достаточно близких к нулю (но отличных от него) значений параметра λ функция f_λ имеет (в малой окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$) k различных критических значений $z_1, \ldots, z_k$, причем критическое значение z_i достигается в j_i критических точках, в которых функция f_λ имеет особенности типов $X_{i1}, \ldots, X_{ij_i}$. Будем говорить, что диаграмма Дынкина E (в отмеченном базисе $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$) распадается по типу $(E_1, \ldots, E_k)$, где $E_i = (E_{i1}, \ldots, E_{ij_i})$, если:

1) $\{E_i\}$ — разбиение множества вершин диаграммы E на непересекающиеся подмножества, причем вершины каждой из диаграмм E_i (базисные исчезающие циклы) занумерованы в диаграмме E последовательными целыми числами;

2) вершины диаграммы E_i соединены между собой ребрами той же кратности, какой они соединены в диаграмме E;

3) E_{ij} — компоненты связности диаграммы E_i $(j = 1, \ldots, j_i)$.

Распадение особенности f по типу $X = (X_1, \ldots, X_k)$ $(X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{ij_i}))$ называется согласованным с распадением ее диаграммы E по типу $(E_1, \ldots, E_k)$ $(E_i = (E_{i1}, \ldots, E_{ij_i}))$, если для любого i набор $E_{i1}, \ldots, E_{ij_i}$ является набором диаграмм Дынкина критических точек $X_{i1}, \ldots, X_{ij_i}$, отвечающих i-му критическому значению. Легко показать, что если особенность f распадается по типу $X = (X_1, \ldots, X_k)$, то существует такой отмеченный базис $\{\Delta_p\}$, в котором диаграмма Дынкина E особенности f распадается по типу $(E_1, \ldots, E_k)$ согласованно с распадением особенности. О. В. Ляшко доказал, что для простых особенностей имеет место и обратное утверждение: если диаграмма E простой особенности f в некотором отмеченном базисе распадается по типу $(E_1, \ldots, E_k)$ $(E_i = (E_{ik}, \ldots, E_{ij_i}))$, то существует деформация особенности f, при которой она распадается согласованно с распадением диаграммы E.

Более подробное описание всех распадений простых особенностей см. в [157].

25.4. Страт $\mu = \text{const}$ и топологический тип особенности. Деформациями, мало меняющими топологию особенности, должны быть деформации, сохраняющие ее кратность.

Действительно, для количества переменных $n \neq 3$ Ле и Раманужам ([375]) доказали, что при такой деформации не меняется топологический тип особого множества уровня (точнее — пары $(\bar{B}_\rho, f^{-1}(0) \cap \bar{B}_\rho)$, где B_ρ — шар достаточно малого радиуса ρ с центром в критической точке) и не меняется дифференцируемый тип расслоения Милнора. Ограничение $n \neq 3$ происходит из-за того, что при доказательстве используется теорема об h-кобордизме.

Тимурян ([475]) доказал, что при деформации с постоянной кратностью не меняется и топологический тип функции. Это означает следующее. Пусть $F(x, t)$ — гладкая по $t \in \mathbb{R}^p$ деформация особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $n \neq 3$, $F(x, 0) = f(x)$, такая, что при любом t росток $F(\cdot, t)$ имеет в нуле критическую точку одной и той же кратности $\mu = \mu(f)$ с критическим значением, равным нулю. Тогда существуют окрестности U нуля в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^p$, U_0 нуля в $\mathbb{C}^n$ и D нуля в $\mathbb{R}^p$ и гомеоморфизм $\alpha\colon U \to U_0 \times D$ ($\alpha(0, t) = (0, t)$), делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\alpha} & U_0 \times D \\ \downarrow{\scriptstyle F} & & \downarrow{\scriptstyle f\times \mathrm{id}} \\ \mathbb{C} & \xleftarrow{\pi} & \mathbb{C} \times D \end{array}$$

(здесь π — проекция на первый сомножитель).

Легко показать, что вдоль страта $\mu = \mathrm{const}$ не меняются матрица пересечений и группа монодромии особенности.

Однако другие характеристики особенности, имеющие «более аналитический» характер, могут меняться. Так, Ф. Фам показал ([417]), что при деформации с постоянной кратностью может меняться топология бифуркационной диаграммы нулей особенности, а точнее — ее разбиение на части в соответствии с особенностями нулевого множества уровня.

Чтобы построить такой пример, рассмотрим особенность $f(x, y) = y^3 + x^9$, кратность которой равна 16. Ее миниверсальная деформация имеет базу размерности 16 и задается формулой

$$F(x, y, u, v) = y^3 + u(x)y + v(x),$$

где $u(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_7 x^7$, $v(x) = v_0 + v_1 x + \ldots + v_7 x^7 + x^9$, $u = (u_0, u_1, \ldots, u_7)$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_7)$. Пусть $X = F^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^{18}$ — нулевое множество уровня деформации F и $G\colon X \to \mathbb{C}^{16}_{u,v}$ — ее проекция на базу деформации. Обозначим через $X^{*\alpha}$ (аналитическое) множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет степень 3 (т. е. локально задается уравнением, принадлежащим кубу максимального идеала) и порядок касания не меньше чем a. Нетрудно видеть, что множество $X^{*\alpha}$ состоит из четверок (x, y, u, v), для которых $y = 0$, x является корнем уравнения $u(x) = 0$ кратности не меньше чем 2α и корнем уравнения $v(x) = 0$ кратности не меньше чем 3α. В частности, $X^{**} = X^{*3} = \{(x, y, u, v)\colon x = y = 0, v = 0, u_i = 0$ для $i < 6\}$. Проекция T^{**} множества X^{**} на базу $\mathbb{C}^{16}_{u,v}$ миниверсальной деформации имеет размерность, равную двум, и является стратом $\mu = \mathrm{const}$ в ней.

Рассмотрим множество $T^{*5/3} = G(X^{*5/3})$. Оно состоит из таких наборов $(u, v) \in \mathbb{C}^{16}_{u,v}$, что полиномы $u(x)$ и $v(x)$ имеют общий корень кратности 4

для $u(x)$ и кратности 5 для $v(x)$. Множество $G^{-1}(T^{*5/3}) \cap X^{*4/3}$ может быть представлено в виде объединения двух множеств: $X^{*5/3}$ и X'. Здесь X' — это множество таких наборов $(x, y, u, v) \in \mathbb{C}^{18}$, что $y = 0$, x является корнем уравнения $u(x) = 0$ кратности 3 и уравнения $v(x) = 0$ кратности 4 и, кроме того, многочлены $u(x)$ и $v(x)$ имеют другой общий корень кратности 4 для $u(x)$ и 5 для $v(x)$. Пересечение X'' этих двух множеств $X^{*5/3}$ и X' (точнее — его замыкания) состоит из таких наборов $(x, y, u, v) \in \mathbb{C}^{18}$, что $y = 0$, x является корнем кратности 7 для уравнения $u(x) = 0$ и корнем кратности 9 для уравнения $v(x) = 0$. Отсюда следует, что $v = (v_0, \ldots, v_7) = 0$, $x = 0$ и $u_0 = \ldots = u_6 = 0$. Таким образом, множество X'' лежит в множестве X^{**}, но не совпадает с ним. Это означает, что множества $X^{*\alpha}$ по-разному подходят к разным точкам множества X^{**}, откуда следует, что бифуркационная диаграмма нулей меняется вдоль семейства $\{\mu = \text{const}\}$ $(= T^{**})$.

Нетрудно видеть, что $X^{*4/3}$ — это множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет особенность типа E_6, $X^{*5/3}$ — множество точек $z \in X$, в которых кривая $G^{-1}(G(z))$ имеет особенность типа E_8. Поэтому $G(X')$ является множеством (точнее его замыканием) тех значений $(u, v) \in \mathbb{C}^{16}_{u,v}$, для которых кривая $G^{-1}(u, v)$ имеет две особенности типов E_6 и E_8. Проведенное рассуждение показывает, что страт бифуркационной диаграммы нулей, состоящий из точек, в которых соответствующая функция имеет особенности типов E_6 и E_8 на нулевом множестве уровня, меняется (просто исчезает) вдоль семейства $\{\mu = \text{const}\}$ (T^{**}) особенности $x^3 + y^9$.

С. М. Гусейн-Заде и Н. Н. Нехорошев ([123]) показали, что при деформации с постоянной кратностью невырожденного однородного многочлена степени 22 от двух переменных меняется наибольшая из кратностей примыкающих особенностей типа A_k.

Имеется недоказанная гипотеза, состоящая в том, что в базе ограниченной миниверсальной деформации особенности страт $\mu = \text{const}$, т. е. множество значений параметров, при которых соответствующая функция имеет критическую точку той же кратности, что и исходная особенность, является неособым многообразием. А. М. Габриэлов доказал ([90]), что размерность этого множества равна модальности особенности.

Гипотеза о гладкости страта $\mu = \text{const}$ в базе ограниченной миниверсальной деформации доказана для случая, когда количество переменных $n = 2$. Первым это сделал, по-видимому, Вол (Wahl J., 1971). По этому поводу см. [274]; см. также статью Тесье [468].

25.5. Разрешение особенности и некоторые свойства оператора классической монодромии. Полезным инструментом исследования топологии особенности является ее разрешение.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — особенность, т. е. росток голоморфной функции, имеющий в нуле изолированную критическую точку.

О п р е д е л е н и е. *Разрешением* особенности f называется такое собственное аналитическое отображение $\pi\colon (Y, Y_0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ неособого комплексного многообразия Y, что:

1) отображение $\pi|_{Y-Y_0}$ является аналитическим изоморфизмом $Y - Y_0 \to \mathbb{C}^n - 0$ (или окрестности пространства Y_0 в Y на окрестность нуля в $\mathbb{C}^n$);

2) подпространство $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ пространства Y является объединением неособых $(n-1)$-мерных многообразий (дивизоров) на Y, находящихся в общем положении;

3) в окрестности любой точки из $Y_0 = \pi^{-1}(0)$ существует такая локальная система координат $y_1, \ldots, y_n$, в которой $f \circ \pi(y_1, \ldots, y_n) = y_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{k_n}$; якобиан отображения π равен $g(y_1, \ldots, y_n) y_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{m_n}$, где $g(0, \ldots, 0) \neq 0$.

Существование разрешения любой особенности является следствием теоремы Хиронаки ([220]). В случае, когда f — функция двух переменных, ее разрешение может быть построено при помощи нескольких последовательных σ-процессов (см. [235], а также п. 26.3) в особых точках.

Многие топологические характеристики особенности (например, ее кратность, характеристический многочлен оператора классической монодромии и другие) могут быть выражены через топологические характеристики дивизоров, вклеиваемых при разрешении особенности. Прежде чем сформулировать соответствующие результаты, введем некоторые понятия.

Характеристический многочлен $P_f(z)$ (оператора классической монодромии) особенности f — это $\det(z \cdot \mathrm{id} - h_*|_{H_{n-1}(V_\varepsilon)})$ (здесь V_ε — неособое многообразие уровня особенности f). Корнями характеристического многочлена $P_f(z)$ являются собственные значения оператора h_* классической монодромии особенности.

Через характеристический многочлен $P_f(z)$ особенности f выражается также определитель $\det S$ формы пересечений в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z})$ неособого многообразия уровня особенности f. Он имеет инвариантный смысл, поскольку определитель замены базиса целочисленной решетки $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z})$ равен (± 1). Определитель формы пересечений совпадает с определителем матрицы оператора $i_*\colon H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; \mathbb{Z})$. Если $\det S \neq 0$, то с точностью до знака он равен порядку группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon; \mathbb{Z}) / \operatorname{Im} i_*$. Имеем

$$\begin{aligned}\det S &= \det(-\mathrm{Var}^{-1} + (-1)^n (\mathrm{Var}^{-1})^T) = \\ &= (-1)^{\mu \frac{n(n+1)}{2}} \det(-\mathrm{id} + (-1)^n \mathrm{Var}(\mathrm{Var}^{-1})^T) = \\ &= (-1)^{\mu \frac{n(n+1)}{2}} \det(-\mathrm{id} + h_*) = (-1)^{\mu \frac{(n-1)(n-2)}{2}} P_f(1).\end{aligned}$$

Иногда вместо характеристического многочлена особенности удобнее пользоваться так называемой ζ-функцией преобразования h классической

монодромии особенности. Во-первых, ответы для нее получаются обычно более красивыми, а во-вторых, ζ-функция монодромии определена и для неизолированных особенностей, в то время как характеристический многочлен практически теряет смысл. Многие из следующих ниже утверждений сохраняются и для неизолированных критических точек, но мы не будем это специально оговаривать.

О п р е д е л е н и е. *ζ-функцией преобразования* $g\colon X \to X$ топологического пространства X (для определенности — конечного клеточного комплекса) называется рациональная функция

$$\zeta_g(z) = \prod_{q \geqslant 0} \{\det[\mathrm{id} - zg_*|_{H_q(X;R)}]\}^{(-1)^q}.$$

В этом определении учитываются и нульмерные гомологии пространства X, т. е. гомологии не считаются приведенными по модулю точки. Определение имеет смысл и для пары пространств X, Y и преобразования $g\colon X \to X$, переводящего подпространство Y в себя. В этом случае в формуле для ζ-функции фигурирует действие преобразования g на относительных гомологиях $H_q(X, Y; R)$.

О п р е д е л е н и е. *ζ-функцией монодромии* особенности f называется ζ-функция преобразования классической монодромии h неособого многообразия уровня V_ε особенности f в себя.

Для изолированных особенностей имеем $H_q(V_\varepsilon) = 0$ при $q \neq 0$, $n-1$. Следовательно, $\zeta_f(z) = (1-z)(z^\mu P_f(z^{-1}))^{(-1)^{n-1}}$, откуда $P_f(z) = z^\mu \left(\dfrac{z}{z-1}\zeta_f(z^{-1})\right)^{(-1)^{n-1}}$, где μ — кратность особенности. Таким образом, характеристический многочлен $P_f(z)$ и ζ-функция $\zeta_f(z)$ особенности выражаются друг через друга.

Легко видеть, что степень рациональной функции $\zeta_f(z)$ (степень числителя минус степень знаменателя) равна эйлеровой характеристике $\chi(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня V_ε.

Следующий результат позволяет выразить ζ-функцию особенности через топологические инварианты дивизоров, вклеиваемых при ее разрешении. Пусть $\pi\colon (Y, Y_0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — разрешение особенности f, S_m — множество точек пространства Y_0, в окрестности которых функция $f \circ \pi$ в некоторой локальной системе координат имеет вид x_1^m (очевидно, что в множества S_m не входят пересечения вклеиваемых дивизоров).

Т е о р е м а 10 (Н. А'Кампо [244]).

$$\chi(V_\varepsilon) = \sum_{m \geqslant 1} m\chi(S_m), \quad \zeta_f(z) = \prod_{m \geqslant 1} (1-z^m)^{\chi(S_m)}.$$

Для доказательства используется то свойство, что если преобразование $h\colon X \to X$ сохраняет подпространство Y, то $\zeta_{h_X}(z) = \zeta_{h_Y}(z) \cdot \zeta_{h_{(X,Y)}}(z)$, где

h_X, h_Y, $h_{(X,Y)}$ — преобразование h, рассматриваемое на соответствующем пространстве (или паре пространств). Существует отображение $\varphi\colon V_\varepsilon \to (f\circ\pi)^{-1}(0)$ (стягивание неособого слоя на особый), при котором точки из S_m имеют по m прообразов, а прообразы пересечений вклеиваемых дивизоров в количестве k штук являются расслоениями $(k-1)$-мерных торов. Преобразование классической монодромии h можно считать согласованным с этим отображением в том смысле, что оно сохраняет прообразы при отображении φ точек пространства $(f\circ\pi)^{-1}(0)$, действуя на нем тривиально. При этом над точками из множества S_m преобразование h производит циклическую перестановку прообразов. ζ-функция циклической перестановки m точек равна $(1-z^m)$. Отсюда следует, что ζ-функция преобразования классической монодромии h, ограниченного на прообраз $\varphi^{-1}(S_m)$ множества S_m, равна $(1-z^m)^{\chi(S_m)}$. Над точками из пересечений вклеиваемых дивизоров преобразование h представляет собой диффеоморфизмы торов, которые являются сдвигами и поэтому не дают вклада в ζ-функцию.

Идея такой конструкции принадлежит Клеменсу ([287]).

Из формулы для ζ-функции особенности, приведенной в теореме 10, вытекает, что все собственные числа оператора классической монодромии изолированной особенности являются корнями различных степеней из единицы. Поэтому некоторая степень (N) оператора классической монодромии имеет все собственные числа, равные единице. В качестве N можно взять число, которое делится на кратности m всех дивизоров, вклеенных при разрешении. Таким образом, имеет место следующий результат.

Т е о р е м а 11. *Оператор* $(h_*^N - \mathrm{id})$ *является нильпотентным, т. е.* $(h_*^N - \mathrm{id})^k = 0$ *для некоторого* k.

Эта теорема принадлежит Брискорну ([41]), Кацу ([358]) и ряду других авторов. Ее обобщение на случай ростка аналитической функции на аналитическом пространстве, все множества уровня которой могут иметь особенности, получено в [373].

Из рассмотрения разрешения изолированной особенности можно получить оценку на величину показателя степени k, который, как нетрудно видеть, равен максимальному размеру жордановых клеток у оператора классической монодромии. Для этого надо взять отображение $\mathbb{C}_u \to \mathbb{C}_z$, переводящее u в $z = u^N$, и рассмотреть над $\mathbb{C}_u$ семейство многообразий, индуцированное из семейства $\{(f\circ\pi)(x) = z\}$ над $\mathbb{C}_z$ при помощи этого отображения. Разрешая слой над нулем, мы получим вклейку, в которую все дивизоры входят с кратностью, равной 1 (т. е. $S_m = \varnothing$ при $m > 1$). Оператор $\tilde{h}_*$ монодромии этого семейства равен h_*^N. Пусть Z_i — часть слоя над нулем, являющаяся объединением всех пересечений вклеиваемых неособых дивизоров по i штук. Имеем $Z_1 = (f\circ\pi)^{-1}(0) \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \ldots \supset Z_n \supset Z_{n+1} = \varnothing$. Как и раньше, мы имеем отображение неособого слоя на особый нулевой,

которое согласовано с преобразованием монодромии. При этом доказывается, что если a — цикл на неособом слое, который лежит в прообразе множества Z_i, то цикл $\tilde{h}_* a - a$ гомологичен циклу, лежащему в прообразе множества Z_{i+1}. Отсюда следует, что $(\tilde{h}_* - \mathrm{id})^n = 0$, т. е. $(h_*^N - \mathrm{id})^n = 0$. Таким образом, в качестве показателя степени k в теореме 11 может быть взято количество переменных n, и, следовательно, жордановы клетки оператора классической монодромии h_* имеют размеры не более $n \times n$. Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 12. *Размер клеток жордановой нормальной формы оператора h_* классической монодромии особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ функции n переменных не превосходит $n \times n$.*

Например, если f — особенность функции двух переменных, то максимальный размер жордановых клеток ее оператора классической монодромии может быть равен двум. Для особенности $f(x, y) = (x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$ он действительно равен двум. Показать, что оператор классической монодромии особенности f не диагонализируется, можно следующим способом. Квадратичная форма особенности f может быть найдена методами § 26. В п. 26.4 показано, что она имеет следующие индексы инерции: положительный индекс инерции $\mu_+ = 1$, нулевой индекс инерции $\mu_0 = 1$, отрицательный индекс инерции $\mu_- = \mu - 2 = 9$. Из формулы Пикара—Лефшеца вытекает, что собственными векторами оператора h_* классической монодромии особенности, отвечающими собственному значению 1, являются элементы пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon)$, ортогональные в смысле формы пересечений всем исчезающим циклам отмеченного базиса $\{\Delta_i\}$, а следовательно, и всем элементам пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon)$. Таким образом, для особенности функции $\hat{f}(x, y, t) = f(x, y) + t^2$ подпространство векторов $a \in H_{n-1}(V_\varepsilon)$, удовлетворяющих условию $h_* a = a$, одномерно. Для характеристического многочлена $P_{\hat{f}}(z)$ имеем $P_{\hat{f}}(z) = \det(z \cdot \mathrm{id} - h_*) = \det(z \cdot \mathrm{id} + L^{-1}L^T) = = \det(zL + L^T) = \det(zL^T + L) = z^\mu \det(L^T + z^{-1}L) = z^\mu P_{\hat{f}}(z^{-1})$. Следовательно, $P_{\hat{f}}(z)$ является возвратным многочленом степени μ (коэффициенты при мономах z^ν и $z^{\mu-\nu}$ совпадают). Кратность корня возвратного многочлена, равного единице, всегда четна. Поэтому пространство элементов группы гомологий $H_2(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня особенности $\hat{f}(x, y, t)$, присоединенных к собственному значению 1 оператора классической монодромии h_*, имеет четную размерность и, следовательно, не совпадает с пространством собственных векторов с собственным значением 1. В свою очередь, оператор классической монодромии особенности $f(x, y)$ получается из оператора классической монодромии особенности $\hat{f}(x, y, t)$ умножением на (-1) и поэтому тоже не диагонализируется (а именно, он имеет жорданову клетку размера 2×2, отвечающую собственному значению (-1)).

Стинбринк ([462]) доказал, что размер клеток жордановой нормальной формы оператора классической монодромии особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, отвечающих собственному значению 1, не превосходит $(n-1)\times(n-1)$. См. также п. 35.2.Д.

Для квазиоднородных особенностей $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ росток f принадлежит своему якобиеву идеалу $J_f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$, а оператор классической монодромии h_* имеет конечный порядок, т. е. диагонализируется. Бриансон и Шкода ([273]) доказали, что для произвольных особенностей $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ n переменных n-я степень ростка f принадлежит якобиеву идеалу J_f. При этом, как было объяснено выше, размер жордановых клеток оператора классической монодромии h_* не превосходит $n \times n$. Исходя из этих соображений, Шерк ([445]) выдвинул гипотезу, что если k-я степень ростка f принадлежит якобиеву идеалу J_f, то размер жордановых клеток оператора классической монодромии особенности f не превосходит $k \times k$. В [446] он доказал эту гипотезу. По этому поводу см. также теорему 19 п. 36.3.Д.

Имеется способ построения разрешения особенности по ее диаграмме Ньютона (так называемое торическое разрешение). Для почти всех функций с данной диаграммой Ньютона он действительно приводит к разрешению особенности. Конструкцию этого разрешения можно найти в [49]. См. также § 30.

Исходя из такого разрешения и теоремы 10, в [481] получено описание ζ-функции (или характеристического многочлена) оператора классической монодромии особенности по ее диаграмме Ньютона.

Пусть $\Gamma \subset N^n$ — диаграмма Ньютона (N — множество неотрицательных целых чисел). *ζ-функцией диаграммы* Γ назовем функцию $\zeta_\Gamma(z) = \prod_{l=1}^{n} (\zeta^l(z))^{(-1)^{l-1}}$, где полиномы $\zeta^l(z)$ определены ниже (они определяются по пересечениям диаграммы Γ со всеми возможными l-мерными координатными плоскостями в пространстве $\mathbb{R}^n$).

Если L — такое l-мерное аффинное подпространство в пространстве $\mathbb{R}^n$, что $L \cap N^n$ является l-мерной целочисленной решеткой, то условимся считать l-мерный объем параллелепипеда, натянутого на любой базис в $L \cap N^n$, равным единице. Для множества $I \subset \{1, \ldots, n\}$ с числом элементов $\#I = l$ положим $L_I = \{k \in \mathbb{R}^n\colon k_i = 0 \text{ при } i \notin I\}$. Пусть $\Gamma_j(I)$ $(j = 1, \ldots, j(I))$ — все $(l-1)$-мерные грани полиэдра $L_I \cap \Gamma$ и $L_j(I)$ — $(l-1)$-мерные аффинные подпространства, в которых они лежат. Факторгруппа решетки $N^n \cap L_I$ по подгруппе, порожденной векторами из $N^n \cap L_j(I)$, является циклической. Ее порядок обозначим через $m_j(I)$. Пусть $V_j(I)$ — $(l-1)$-мерный объем грани $\Gamma_j(I)$ в пространстве $L_j(I)$. Заметим, что $m_j(I)(l-1)!V_j(I)$ равняется l-мерному объему конуса над $\Gamma_j(I)$ с вершиной в начале координат, умноженному на $l!$.

Положим

$$\zeta^l(z) = \prod_{I:\ \#I=l} \prod_{j=1}^{j(I)} (1 - z^m j^{(I)})^{(l-1)!V_j(I)}.$$

Теорема 13. *Для почти всех функций* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *с диаграммой Ньютона* Γ ζ*-функция оператора классической монодромии особенности* f *совпадает с* ζ*-функцией диаграммы* Γ.

Условия, выделяющие множество функций, для которых выполнено утверждение теоремы 13, могут быть выражены через коэффициенты, с которыми входят в разложение ростка f мономы, лежащие на диаграмме Ньютона Γ (см. § 30). Вообще говоря, может случиться, что все функции с диаграммой Ньютона Γ имеют неизолированную особенность. Тем не менее теорема 13 остается верной.

Поскольку степень ζ-функции оператора монодромии особенности совпадает с эйлеровой характеристикой ее неособого многообразия уровня, из теоремы 13 следует результат А. Г. Кушниренко ([146]), выражающий кратность особенности через ее диаграмму Ньютона.

25.6. Группы монодромии и отмеченные базисы простых особенностей. Наиболее эффективное описание группы монодромии имеется для простых особенностей, т. е. для особенностей, не имеющих непрерывных модулей (см. ч. I, § 15). Как и для любых особенностей, здесь имеются два принципиально разных случая: особенности с нечетным числом переменных и особенности с четным числом переменных. В первом случае операторы Пикара—Лефшеца являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных в смысле формы пересечений соответствующим исчезающим циклам; группа монодромии является группой, порожденной отражениями. Во втором случае описание операторов Пикара—Лефшеца не столь привычно.

Как известно, группа монодромии особенности определяется ее матрицей пересечений в слабо отмеченном базисе. Для простых особенностей имеет место следующее утверждение.

Теорема 14. *Для простых особенностей* A_k $(x^{k+1} + \sum t_i^2)$, D_k $(x^2y + y^{k-1} + \sum t_i^2)$, E_6 $(x^3 + y^4 + \sum t_i^2)$, E_7 $(x^3 + xy^3 + \sum t_i^2)$, E_8 $(x^3 + y^5 + \sum t_i^2)$ *существуют отмеченные базисы исчезающих циклов, в которых их диаграммы Дынкина совпадают с классическими диаграммами соответствующих одноименных алгебр Ли* (рис. 96).

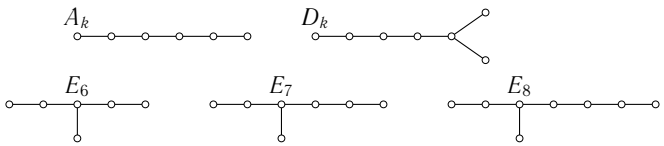


Рис. 96

Группы монодромии этих особенностей с нечетным числом переменных конечны и изоморфны группам Вейля соответствующих алгебр.

Описание классических групп Вейля см. в [45].

Для особенностей типа A_k теорема 14 доказана в п. 24.9. Для остальных простых особенностей ее доказательство, основанное на том, что эти особенности стабильно эквивалентны особенностям функций двух переменных, будет проведено в п. 26.1.

Способ построения диаграмм Дынкина простых особенностей с нечетным числом переменных непосредственно по самой группе монодромии найден Маккеем ([399]).

Обозначим через $M_f^{(\text{н})}$ и $M_f^{(\text{ч})}$ группы монодромии особенностей, стабильно эквивалентных особенности f, с нечетным и четным числом переменных соответственно. Образующими групп $M_f^{(\text{н})}$ и $M_f^{(\text{ч})}$ являются преобразования целочисленной решетки, определяемые формулами Пикара—Лефшеца. Эти преобразования совпадают по модулю два. Следовательно, соответствующие группы преобразований гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}_2)$ неособого многообразия уровня с коэффициентами в группе $\mathbb{Z}_2$ ($H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2)^\mu$) одинаковы. Поэтому имеется одна группа монодромии $M_f^{\mathbb{Z}_2}$ особенности по модулю два, действующая на бинарной решетке $(\mathbb{Z}_2)^\mu$. Определены естественные эпиморфизмы $M_f^{(\text{н})} \to M_f^{\mathbb{Z}_2}$ и $M_f^{(\text{ч})} \to M_f^{\mathbb{Z}_2}$, индуцированные гомоморфизмом $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$. Следовательно, группа $M_f^{\mathbb{Z}_2}$ монодромии в гомологиях с коэффициентами $\mathbb{Z}_2$ является факторгруппой как группы $M_f^{(\text{н})}$, так и группы $M_f^{(\text{ч})}$.

Для простых особенностей описание группы $M_f^{\mathbb{Z}_2}$ вытекает из того факта, что ядро гомоморфизма $M_f^{(\text{н})} \to M_f^{\mathbb{Z}_2}$ либо тривиально (и в этом случае $M_f^{\mathbb{Z}_2} \cong M_f^{(\text{н})}$), либо содержит $\pm$тождественное преобразование (в этом случае $M_f^{\mathbb{Z}_2} \cong M_f^{(\text{н})}/\mathbb{Z}_2$). Ядро отображения $M_f^{(\text{н})} \to M_f^{\mathbb{Z}_2}$ совпадает с группой $\mathbb{Z}_2$ тогда и только тогда, когда группа $M_f^{(\text{н})}$ монодромии особенности f с нечетным числом переменных содержит преобразование, являющееся умножением на (-1).

Для простых особенностей с четным числом переменных группа монодромии $M_f^{(\text{ч})}$ описывается следующим результатом.

Т е о р е м а 15 (А. Н. Варченко, С. В. Чмутов [232]; см. также [245], [485]). *Для простых особенностей с четным числом переменных группа монодромии совпадает с группой всех линейных операторов на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z})$, удовлетворяющих следующим трем условиям*:

1) *оператор g сохраняет* (*кососимметрическую*) *форму пересечений особенности*;

2) *ограничение оператора g на ядро формы пересечений* (*т. е. на множество векторов, ортогональных ко всем элементам решетки* $\mathbb{Z}^\mu$) *является тождественным преобразованием*;

3) *оператор g, приведенный по модулю* 2, *принадлежит группе* $M_f^{\mathbb{Z}_2}$ *монодромии в гомологиях с коэффициентами в группе* $\mathbb{Z}_2$.

Необходимость выполнения условий 1)—3) для любых (не обязательно простых) особенностей очевидна. Для особенности f функции двух переменных размерность ядра K формы пересечений равна $r-1$, где r — количество неприводимых компонент у ростка кривой $\{f=0\}$. Поэтому для простых особенностей имеем: $\dim K=0$ для особенностей A_{2s}, E_6, E_8; $\dim K=1$ для особенностей A_{2s+1}, D_{2s+1}, E_7; $\dim K=2$ для особенностей D_{2s}.

В [285] получено обобщение теоремы 15 на случай произвольных особенностей. По теореме Фробениуса ([165]) в целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\mu = H_{n-1}(V_\varepsilon;\mathbb{Z})$ с кососимметрической формой пересечений на ней можно выбрать такой (целочисленный) базис $e_1,\dots,e_n,\ f_1,\dots,f_n,\ g_1,\dots,g_l$ ($2n+l=\mu(f)$), что $(e_i\circ f_i)=\lambda_i$, $(e_i\circ f_j)=0$ при $i\neq j$, $(e_i\circ e_j)=(f_i\circ f_j)=(g_i\circ g_j)=(e_i\circ g_j)=(f_i\circ g_j)=0$, причем целое число λ_i делит число λ_{i-1} ($i=2,\dots,n$). Последовательность чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ определена однозначно.

Аналогично группе $M_f^{\mathbb{Z}_2}$ монодромии в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon;\mathbb{Z}_2)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_2$ можно определить группу $M_f^{\mathbb{Z}_k}$ монодромии в гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon;\mathbb{Z}_k)$ с коэффициентами в циклической группе $\mathbb{Z}_k$. В следующем утверждении особую роль будет играть случай $k=2\lambda_1$, где целое число λ_1 определено в предыдущем абзаце.

Т е о р е м а 16. *Группа монодромии $M_f^{(\text{ч})}$ изолированной особенности функции с четным числом переменных совпадает с группой всех линейных операторов g на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\mu=H_{n-1}(V_\varepsilon;\mathbb{Z})$, удовлетворяющих условиям* 1) *и* 2) *теоремы* 15, *а также следующему условию*:

3′) *оператор g, приведенный по модулю $2\lambda_1$, принадлежит группе $M_f^{\mathbb{Z}_{2\lambda_1}}$ монодромии в гомологиях с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{2\lambda_1}$.*

Для всех особенностей функций двух переменных $\lambda_1=1$ ([233]).

Янсен обобщил указанный результат С. В. Чмутова на полные пересечения ([354]) и дал классификацию кососимметрических исчезающих решеток ([355]). Г. Г. Ильюта перенес результаты С. В. Чмутова на краевые особенности ([134]).

В п. 25.3 указано, что задача описания всех распадений простой особенности, встречающихся в базе ограниченной миниверсальной деформации, редуцируется к задаче описания всех ее диаграмм Дынкина в отмеченных базисах. Отсюда естественно возникает задача описания всех отмеченных базисов особенности.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — произвольный росток функции, имеющий изолированную критическую точку в нуле, $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu$ неособого многообразия уровня. В таком базисе оператор вариации Var_f особенности f записывается верхней треугольной матрицей (см. п. 24.5). Оператор h_* классической монодромии особенности f является произведением $h_1 \circ \ldots \circ h_\mu$ операторов Пикара—Лефшеца h_i ($h_i(a) = a + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (a \circ \Delta_i)\Delta_i$), соответствующих исчезающим циклам $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ (см. там же).

Оказывается, что для простых особенностей имеют место и обратные утверждения.

Теорема 17 ([121]). *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — базис группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\mu$ неособого многообразия уровня простой особенности f. Предположим, что в базисе $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ оператор вариации Var_f особенности f записывается верхней треугольной матрицей. Тогда $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов.*

Теорема 18. *Пусть $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — базис из исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня простой особенности f. Предположим, что оператор h_* классической монодромии особенности f является произведением $h_1 \circ \ldots \circ h_\mu$ операторов Пикара—Лефшеца, соответствующих исчезающим циклам $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$. Тогда $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ — отмеченный базис исчезающих циклов.*

Доказательство теоремы 18 содержится в письме П. Делиня к Э. Лойенге (1980 г., не опубликовано). При доказательстве и того, и другого утверждения используется следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — простая особенность нечетного числа переменных n, $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{C}$ — ее малое морсовское шевеление, определенное в окрестности U нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, $z_1, \ldots, z_\mu$ — критические значения функции $\tilde{f}$, z_0 — некритическое значение, причем $|z_i| < |z_0|$ ($i = 1, \ldots, \mu$), Δ — произвольный исчезающий цикл в гомологиях неособого множества уровня F_{z_0} функции $\tilde{f}$.

Лемма 3 ([121]). *Цикл Δ является исчезающим вдоль некоторого несамопересекающегося пути u, соединяющего некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0 и лежащего целиком внутри круга $|z| < |z_0|$ (за исключением конца, совпадающего с некритическим значением z_0).*

В формулировке этого результата существенными являются условия, что f — функция нечетного числа переменных, а также что путь u лежит внутри круга $|z| < |z_0|$. В случае, когда f — особенность функции четного числа переменных, утверждение леммы 3 не имеет места. Отказ от требова-

ния, чтобы путь u лежал внутри круга $|z| < |z_0|$, делает лемму тривиальной (верной для любых особенностей любого числа переменных) и бессодержательной. Лемма 3 эквивалентна следующему утверждению.

Лемма 4. *Существует отмеченный базис исчезающих циклов* $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ *в гомологиях неособого многообразия уровня особенности* f *с первым элементом* Δ_1, *совпадающим с исчезающим циклом* Δ.

Неизвестно, имеют ли место аналоги теорем 17 и 18 и леммы 3 для непростых особенностей.

25.7. Полярные кривые и матрицы пересечений особенностей. В работе [322] получены результаты, связывающие матрицу пересечений изолированной особенности $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с матрицей пересечений одной из особенностей $f + z^2$ или $f|_{z=0}$ и инвариантами полярной кривой особенности f по отношению к линейной функции z. Они позволяют определить матрицы пересечений для большого числа особенностей, а также бывают полезны при доказательствах утверждений о матрицах пересечений особенностей, использующих индукцию по размерности n (такая индукция использовалась, например, в [233] при доказательстве теоремы 16 п. 25.6). Настоящий пункт содержит краткое изложение результатов работы [322]. Полярные кривые особенностей возникают и в других задачах. Более подробное изложение теории полярных кривых можно найти в [469].

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции с изолированной особенностью в нуле, $z\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ — линейная функция. Рассмотрим росток отображения $(f, z)\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$. Множество критических точек этого отображения является ростком аналитического пространства. Обозначим его через $\Gamma_z(f)$. Нетрудно видеть, что $\Gamma_z(f)$ — росток кривой, т. е. $\dim \Gamma_z(f) = 1$. Это, например, следует из того, что критическими точками отображения (f, z) являются критические точки всех функций вида $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \in \mathbb{C}$), а каждая из функций $f - \varepsilon z$ имеет (в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$) конечное множество критических точек.

Определение. Кривая $\Gamma_z(f)$ называется *полярной кривой* особенности f по отношению к линейной функции z.

Другим (эквивалентным) способом описания полярной кривой $\Gamma_z(f)$ является следующий: кривая $\Gamma_z(f)$ состоит из всех точек $x \in \mathbb{C}^n$, в которых касательное пространство к множеству уровня функции f (проходящему через эту точку) параллельно фиксированной гиперплоскости $\{z = 0\}$, т. е. из всех точек $x \in \mathbb{C}^n$, в которых дифференциал df пропорционален дифференциалу dz.

Пусть $\Gamma_z(f) = \bigcup\limits_i \Gamma_i$ — разложение ростка кривой $\Gamma_z(f)$ на неприводимые компоненты. Как было указано, критические точки функции $(f - \varepsilon z)$

лежат на кривой $\Gamma_z(f)$ при всех ε. Пусть μ_i — количество критических точек функции $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащих на компоненте Γ_i (считая с их кратностями). Очевидно, что $\mu(f) = \sum\limits_i \mu_i$.

Критические точки функций $f|_{z=\varepsilon}$ (на гиперплоскостях $\{z = \varepsilon\} \subset \mathbb{C}^n$) также лежат на полярной кривой $\Gamma_z(f)$. Пусть $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, ν_i — количество критических точек функции $f|_{z=\varepsilon}$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащих на компоненте Γ_I (считая с их кратностями). Если функция $f|_{z=0}$ имеет изолированную критическую точку в нуле, то ни одна из компонент Γ_i не лежит в гиперплоскости $\{z = 0\}$ и $\mu(f|_{z=0}) = \sum\limits_i \nu_i$.

Если $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$, то $f|_{\Gamma_i} \not\equiv 0$. Действительно, если $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$, то $df|_{\Gamma_i} = 0$, $dz|_{\Gamma_i} = 0$, $z|_{\Gamma_i} \equiv 0$. На кривой Γ_i функция f может быть разложена в ряд по (дробным) степеням z (это разложение совпадает с разложением Пюизо образа кривой Γ_i при отображении $(f, z)\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, см. п. 26.3). Пусть $a_i z^{\alpha_i}$ — первый член этого разложения ($a_i \neq 0$). Имеем $\alpha_i > 1$. Это следует из того, что при $\varepsilon \to 0$ корни уравнения $f'_z = \varepsilon$ (определяющего критические точки функции $(f - \varepsilon z)$) должны стремиться к нулю. Если $\Gamma_i \subset \{z = 0\}$ (в этом случае функция $f|_{z=0}$ имеет неизолированную критическую точку), то $f|_{\Gamma_i} \equiv 0$. В этом случае будем считать, что $\alpha_i = 1$.

Л е м м а 5. *Если* $\alpha_i > 1$, *то* $\mu_i = \nu_i(\alpha_i - 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $\alpha_i > 1$, то $\Gamma_i \not\subset \{z = 0\}$ и $f = a_i z^{\alpha_i} + \ldots$ ($a \neq 0$). Предположим, что компонента Γ_i входит в полярную кривую $\Gamma_z(f)$ с кратностью один. Это значит, что критические точки функции $f - \varepsilon z$ ($\varepsilon \neq 0$), лежащие на компоненте Γ_i, невырождены. В противном случае доказательство должно быть слегка изменено. Запишем разложение Пюизо образа кривой Γ_i при отображении $(f; z)\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ в виде $z = z(t) = t^k$, $f = f(t) = a_i t^m + \ldots$ (ряд по целым степеням переменной t), где t — униформизующий параметр. Имеем $\alpha_i = m/k$. Число μ_i равно количеству (ненулевых) корней уравнения $f'_t - \varepsilon z'_t$, обращающихся в нуль при $\varepsilon \to 0$. Число ν_i равно количеству корней уравнения $z(t) = \varepsilon$. Очевидно, что $\mu_i = m - k$, $\nu_i = k$, откуда $\mu_i/\nu_i = (m - k)/k = \alpha_i - 1$, что и требовалось доказать.

Знание полярной кривой особенности позволяет проследить за поведением критических точек и критических значений при шевелениях специального вида. Например, рассмотрим малое шевеление $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ функции $f + z^2$. Критические точки функции F_ε лежат на полярной кривой $\Gamma_z(f)$ особенности f. Рассмотрим те критические точки, которые лежат на компоненте Γ_i и обращаются в нуль при $\varepsilon \to 0$. Они могут быть определены из уравнения $(F_\varepsilon)'_z|_{\Gamma_i} = 0$. Имеем $a_i \alpha_i z^{\alpha_i - 1} + 2(z - \varepsilon) + o(z^{\alpha_i - 1}) = 0$.

При $\alpha_i > 2$ отсюда следует, что $z = \varepsilon + O(\varepsilon^{\alpha_i - 1})$, $F_\varepsilon = a_i \varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i})$. Количество таких критических точек равно ν_i.

При $\alpha_i = 2$ и $a_i \neq -1$ имеем $z = \varepsilon/(a_i+1) + o(\varepsilon)$, $F_\varepsilon = \varepsilon^2 a_i/(a_i+1) + o(\varepsilon^2)$. Количество таких критических точек также равно ν_i.

При $\alpha_i < 2$ в первом приближении имеем $f'_z = 2\varepsilon$, что совпадает с уравнением, определяющим критические точки функции $(f - 2\varepsilon z)$. Количество таких критических точек равно μ_i. Имеем $z = (2\varepsilon/(a_i\alpha_i))^{1/\alpha_i - 1} + \ldots = o(\varepsilon)$. Поэтому $F_\varepsilon = \varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Если $a_i \neq -1$ при $\alpha_i = 2$, то число Милнора $\mu(f + z^2)$ особенности $f + z^2$ равно* $\sum\limits_{i:\ \alpha_i < 2} \mu_i + \sum\limits_{i:\ \alpha_i \geqslant 2} \nu_i$.

Следствие. *Справедливо неравенство $\mu(f + z^2) \leqslant \mu(f|_{z=0})$, причем $\mu(f + z^2) = \mu(f|_{z=0})$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i \geqslant 2$ для всех i.*

Нетрудно показать, что если $f \in m^k$, т. е. если разложение Тейлора ростка f не содержит членов степени меньше чем k, то при выборе линейной функции z общего положения $\alpha_i \geqslant k$ для всех i.

Для определения матрицы пересечений особенности f требуется знание матрицы пересечений особенности $f + z^2$ в отмеченном базисе специального вида. Опишем этот базис. Пусть A — множество всех различных значений показателей α_i. Из асимптотик критических значений шевеления $F_\varepsilon = f + (z - \varepsilon)^2$ функции $f + z^2$, описанных перед леммой 6, вытекает, что для достаточно малого $\varepsilon \neq 0$ можно выбрать положительные числа r'_α и r''_α для $\alpha = 2$ и для $\alpha \in A$, $\alpha > 2$ так, что $r''_\alpha < r'_\beta$ при $\alpha > \beta$, критические значения функции F_ε в критических точках, принадлежащих компоненте Γ_i с $\alpha_i = \alpha > 2$, содержатся в кольце $\{u\colon r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$, а критические значения функции F_ε в критических точках, принадлежащих компоненте Γ_i с $\alpha_i = \alpha \leqslant 2$, содержатся в кольце $\{u\colon r'_2 < |u| < r''_2\}$. Пусть $\sigma(r)$ — непрерывная монотонная невозрастающая функция, такая, что $\sigma(r) = \alpha - 1$ при $r'_\alpha \leqslant r \leqslant r''_\alpha$. Положим $V_m = \{u\colon \arg u + 2\pi\sigma(|u|) \geqslant \pi(2m-1)\}$, где $m = 1, 2\ldots$, $-\pi \leqslant \arg u \leqslant \pi$. Предположим, что $(-a_i)^{q_i} \notin \mathbb{R}_+$, где $\alpha_i = p_i/q_i$, $(p_i, q_i) = 1$ ($\mathbb{R}_+$ — положительная полуось). В этом случае критические значения функции F_ε не принадлежат ни полуоси $\mathbb{R}_-$, ни границам областей V_m. Рассмотрим систему путей, соединяющих критические значения функции F_ε с некритическим значением 0, которая определяет отмеченный базис исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f + z^2$. От этой системы путей потребуем, чтобы все пути пересекали полуось $\mathbb{R}_-$ только в нуле и все пути, проведенные из критических значений функции F_ε, принадлежащих области V_m, содержались бы в V_m. В качестве такой системы путей можно, в частности, выбрать систему отрезков, соединяющих критические значения функции F_ε с нулем. Одним из основных результатов работы [322] является следующее утверждение.

Т е о р е м а 19. *Пусть* $\{\Delta_j\}$ *— отмеченный базис исчезающих циклов для особенности* $f + z^2$, *определенный описанной системой путей. Тогда*

1) *Существует отмеченный базис исчезающих циклов* $\{\Delta_j^m\}$ *для особенности* f *со следующими индексами пересечений*:

$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^m) = (\Delta_j \circ \Delta_{j'}),$$
$$(\Delta_j^m \circ \Delta_j^{m'}) = (m' - m)^{n-1} \quad \textit{при} \ |m' - m| = 1,$$
$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = (-1)^n (\Delta_j \circ \Delta_{j'}) \quad \textit{при} \ |m' - m| = 1, \ (m' - m)(j' - j) < 0,$$
$$(\Delta_j^m \circ \Delta_{j'}^{m'}) = 0 \quad \textit{при} \ |m' - m| > 1 \ \textit{или} \ (m' - m)(j' - j) > 0.$$

При этом пара (m, j) *допустима* (*т. е. ей соответствует исчезающий цикл* Δ_j^m), *если и только если цикл* Δ_j *исчезает вдоль пути, содержащегося в* V_m.

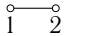
2) *При* $m > 1$ $\Delta_j^m = h_* \Delta_j^{m-1}$, *где* h_* *— оператор классической монодромии особенности* f.

3) *Условие допустимости пары* (m, j) *может быть переформулировано следующим образом*: *для каждого* i *допустимыми являются первые* μ_i *пар из* (m, j), *где цикл* Δ_j *исчезает в критической точке, принадлежащей компоненте* Γ_i *полярной кривой* $\Gamma_z(f)$.

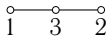
Аналогичная связь существует между матрицами пересечений особенностей f и $f|_{z=0}$ в случае, если $f|_{z=0}$ имеет изолированную особенность. Функция $G_\varepsilon = f|_{z=\varepsilon}$ является малым шевелением особенности $f|_{z=0}$. Критические значения функции G_ε в критических точках, принадлежащих компоненте Γ_i, равны $a_i \varepsilon^{\alpha_i} + o(\varepsilon^{\alpha_i})$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, для достаточно малого ε можно выбрать положительные числа r'_α и r''_α для всех $\alpha \in A$ так, что $r'\alpha < r''_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, $r''_\alpha < r'_\beta$ при $\alpha > \beta$ и критические значения функции G_ε в критических точках, принадлежащих кривой Γ_i с $\alpha_i = \alpha$, содержатся в кольце $\{u\colon r'_\alpha < |u| < r''_\alpha\}$. Определим функцию $\sigma(r)$, области V_m и систему путей, соединяющих критические значения функции G_ε с некритическим значением 0 точно так же, как для функции F_ε, с той лишь разницей, что в рассмотрение включаются все $\alpha \in A$, а не только $\alpha \geqslant 2$. Пусть $\{\tilde\Delta'_j\}$ — отмеченный базис исчезающих циклов для особенности $f|_{z=0}$, определяемый такой системой путей, $\{\tilde\Delta_j\}$ — соответствующий отмеченный базис исчезающих циклов (определяемый той же системой путей) для особенности $f|_{z=0} + z^2$, стабильно эквивалентной особенности $f|_{z=0}$. Связь матриц пересечений особенностей $f|_{z=0}$ и $f|_{z=0} + z^2$ в отмеченных базисах $\{\tilde\Delta'_j\}$ и $\{\tilde\Delta_j\}$ соответственно дается теоремой 14 п. 24.8.

Т е о р е м а 20. *Предположим, что росток* $f|_{z=0}$ *имеет изолированную особенность в нуле. В этом случае в теореме* 19 *особенность* $f + z^2$ *и отмеченный базис исчезающих циклов* $\{\Delta_j\}$ *могут быть заменены на* $f|_{z=0} + z^2$ *и* $\{\tilde{\Delta}_j\}$ *соответственно.*

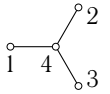
Теорема 20 сводит задачу о вычислении матрицы пересечений особенности f функции n переменных к задаче о вычислении матрицы пересечений особенности $f|_{z=0}$ функции $(n-1)$ переменной в отмеченном базисе специального вида и показателей α_i для компонент Γ_i полярной кривой $\Gamma_z(f)$. Результаты вычислений для большинства особенностей, расклассифицированных в § 15 ч. I, сведены в таблице, приведенной на с. 386. Здесь матрица пересечений особенности $f|_{z=0}$ в отмеченном базисе $\{\tilde{\Delta}'_j\}$, а следовательно, и особенности $f|_{z=0} + z^2$ в отмеченном базисе $\{\tilde{\Delta}_j\}$, определена одной из следующих диаграмм Дынкина:



для особенности f из серий J и E;



для особенности f из серий X, Y, Z и W;



для особенности f из серий Q, S, T и U.

В последнем столбце таблицы приведены числа $M_1, \ldots, M_{\mu'}$ ($\mu' = \mu(f|_{z=0})$), где натуральное число M_j определяется тем, что в отмеченном базисе $\{\Delta_j^m\}$ особенности f присутствуют циклы Δ_j^m с $1 \leqslant m \leqslant M_j$.

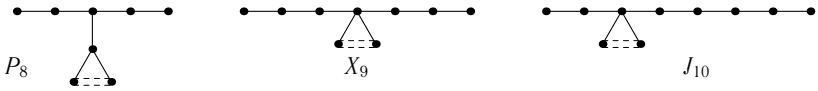
Для особенностей коранга 2 (т. е. для особенностей из серий J, E, X, Y, Z и W) аналогичные диаграммы могут быть легко получены методами § 26.

25.8. Формы пересечений унимодальных и бимодальных особенностей. В § 15 ч. I приведена классификация унимодальных и бимодальных особенностей функций. Здесь мы приведем результаты об их квадратичных формах.

Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей и их группы монодромии были вычислены А. М. Габриэловым [91]. Они могут быть получены с помощью результатов, изложенных в п. 25.7. Обозначим через μ_+, μ_0 и μ_- положительный, нулевой и отрицательный индексы инерции квадратичной формы особенности, т. е. количество положительных, нулевых и отрицательных диагональных элементов в диагонализации формы пересечений особенности, стабильно эквивалентной данной и зависящей от $n \equiv 3 \bmod 4$ переменных ($\mu_+ + \mu_0 + \mu_- = \mu$).

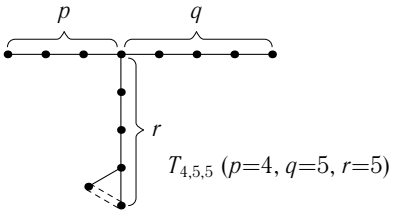
Особенность	$M_1, \ldots, M_{\mu'}$
$J_{k,i}$	$3k+i-1, 3k-1$
E_{6k}	$3k, 3k$
E_{6k+1}	$3k+1, 3k$
E_{6k+2}	$3k+1, 3k+1$
$X_{k,p}$	$4k-1, 4k-1, 4k+p-1$
$Y^k_{r,s}$	$4k+r-1, 4k+s-1, 4k-1$
$Z^k_{i,p}$	$4k-1, 4k+3i-p-1, 4k+3i-1$
$Z^k_{12k+6i-1}$	$4k+3i, 4k-1, 4k+3i$
Z^k_{12k+6i}	$4k+3i+1, 4k-1, 4k+3i$
$Z^k_{12k+6i+1}$	$4k+3i+1, 4k-1, 4k+3i+1$
W_{12k}	$4k, 4k, 4k$
W_{12k+1}	$4k+1, 4k, 4k$
$W_{k,i}$	$4k+1, 4k+1, 4k+i+1$
$W^{\#}_{k,2q-1}$	$4k+q+1, 4k+q, 4k+1$
$W^{\#}_{k,2q}$	$4k+q+1, 4k+q+1, 4k+1$
W_{12k+5}	$4k+2, 4k+1, 4k+2$
W_{12k+6}	$4k+2, 4k+2, 4k+2$
$Q_{k,i}$	$2, 2, 3k-1, 3k+i-1$
Q_{6k+4}	$2, 2, 3k, 3k$
Q_{6k+5}	$2, 2, 3k+1, 3k$
Q_{6k+6}	$2, 2, 3k+1, 3k+1$
S_{12k-1}	$2, 4k-1, 4k-1, 4k-1$
S_{12k}	$2, 4k, 4k-1, 4k-1$
$S_{k,i}$	$2, 4k, 4k, 4k+i$
$S^{\#}_{k,2q-1}$	$2, 4k+q, 4k+q-1, 4k$
$S^{\#}_{k,2q}$	$2, 4k+q, 4k+q, 4k$
S_{12k+4}	$2, 4k+1, 4k, 4k+1$
S_{12k+5}	$2, 4k+1, 4k+1, 4k+1$
$T_{p,q,r}$	$p-1, q-1, r-1, 2$
U_{12k}	$3k, 3k, 3k, 3k$
$U_{k,2q-1}$	$3k+q, 3k+q, 3k, 3k+1$
$U_{k,2q}$ $(q>0)$	$3k+q+1, 3k+q, 3k, 3k+1$
U_{12k+4}	$3k+1, 3k+1, 3k+1, 3k+1$

Теорема 21. *Диаграммы Дынкина параболических особенностей P_8, X_9 и J_{10} в некоторых слабо отмеченных базисах имеют вид*



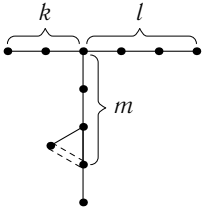
Для этих особенностей $\mu_+ = 0$, $\mu_0 = 2$.

Диаграммы Дынкина гиперболических особенностей $T_{p,q,r}$ имеют вид



Для этих особенностей $\mu_+ = \mu_0 = 1$.

Диаграммы Дынкина 14-ти исключительных унимодальных особенностей имеют вид



Здесь (k, l, m) *— так называемые числа Габриэлова особенности* (см. ч. I, введение к гл.II), $\mu = k + l + m$. *Для этих особенностей* $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.

Между числами Габриэлова (ЧГ) и числами Долгачёва (ЧД; см. ч. I, введение к гл. II) исключительных унимодальных особенностей существует «странная двойственность», выражающаяся в том, что ЧГ каждой особенности совпадают с ЧД некоторой (вообще говоря — другой) особенности, а ЧГ последней — с ЧД исходной. Объяснение этой двойственности дано Долгачёвым и Пинкамом ([129], [423]). Оказывается, что ЧД квазиоднородной унимодальной особенности в некотором смысле являются ее ЧГ на бесконечности и наоборот.

Квадратичные формы и диаграммы Дынкина бимодальных особенностей от двух переменных и их индексы инерции могут быть легко получены методами § 26. Для бимодальных особенностей трех переменных диаграммы Дынкина получены А. М. Габриэловым (см. п. 25.7), но они неудобны для вычислений, например, индексов инерции их квадратичных форм. Индексы инерции квадратичных форм всех бимодальных особенностей могут быть получены с помощью двух общих результатов, принадлежащих Стинбринку. Один из них дает способ вычисления индексов инерции квадратичных форм для квазиоднородных особенностей.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ($n \equiv 3 \bmod 4$) — квазиоднородная особенность с весами $w_1, \dots, w_n$ и степенью 1 $\left($это означает, что $f(x_1, \dots, x_n) = \sum a_{\beta_1 \dots \beta_n} x_1^{\beta_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i \beta_i = 1\right)$, имеющая изолированную критическую точку в нуле. Положим $l(\alpha) = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + 1) w_i$ ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$). Пусть мономы $x^{\alpha^{(j)}}$ ($j = 1, 2, \dots, \mu$) порождают базис локального кольца $J = \mathcal{O}_n/(\partial f/\partial x_i)$ особенности f. Через $[c]$ обозначим целую часть числа c.

Т е о р е м а 22 ([461]). *Имеют место следующие утверждения*:

μ_+ — *количество* $\alpha^{(j)}$, *для которых* $l(\alpha^{(j)}) \notin \mathbb{Z}$, $[l(\alpha^{(j)})]$ *четна*;

μ_- — *количество* $\alpha^{(j)}$, *для которых* $l(\alpha^{(j)}) \notin \mathbb{Z}$, $[l(\alpha)^{(j)}]$ *нечетна*;

μ_0 — *количество* $\alpha^{(j)}$, *для которых* $l(\alpha^{(j)}) \in \mathbb{Z}$.

Это утверждение в виде гипотезы было сформулировано ранее В. И. Арнольдом (см. [120]).

Среди бимодальных особенностей часть (но не все) имеют квазиоднородных представителей. Для этих особенностей из теоремы 22 получаем, что $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$. Для вычисления индексов инерции квадратичных форм остальных бимодальных особенностей используются следующие факты.

Т е о р е м а 23 ([204]). *Пусть* $f_t(x)$ — *непрерывная деформация особенности* $f_0\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ($t \in [0, 1]$), *причем* $\mu(f_0) = \mu$, $\mu(f_t) = \mu'$ *при* $0 < t \leqslant 1$. *Тогда* $\mu \geqslant \mu'$ *и группа* $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; \mathbb{Z})$ *гомологий неособого множества уровня* $V_{t,\lambda}$ *ростка функции* f_t *около нуля имеет естественное вложение в группу* $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; \mathbb{Z})$ *гомологий неособого множества уровня* $V_{0,\lambda}$ *ростка* f_0. *При этом отмеченный базис группы* $H_{n-1}(V_{t,\lambda}; \mathbb{Z})$ *может быть расширен до отмеченного базиса группы* $H_{n-1}(V_{0,\lambda}; \mathbb{Z})$.

Т е о р е м а 24 ([460]). *Для любой особенности* $\mu_+ + \mu_0$ *четно*.

Из этих результатов выводится следующая теорема.

Т е о р е м а 25. *Квадратичные формы всех бимодальных особенностей имеют следующие индексы инерции*: $\mu_+ = 2$, $\mu_0 = 0$.

§ 26. Матрицы пересечений особенностей функций двух переменных

Метод вычисления матриц пересечений особенностей функций двух переменных, описанный в этом параграфе, принадлежит С. М. Гусейн-Заде ([117], [118]) и Н. А'Кампо ([246], [247]). Он применим ко всем особенностям двух переменных. Его использование позволяет существенно упростить многие вычисления, связанные с квадратичной формой особенности (например, вычисление ее сигнатуры).

26.1. Матрицы пересечений вещественных особенностей. Матрица пересечений вещественной особенности функции двух переменных f может быть определена по (вещественной) линии нулевого уровня шевеления функции $\tilde{f}$ специального вида.

Пусть $f(x, y)$ — росток вещественной (т. е. принимающей вещественные значения на $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$) голоморфной функции $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, имеющий в нуле изолированную (в пространстве $\mathbb{C}^2$) критическую точку. Предположим, что существует такое вещественное шевеление $\tilde{f}$ функции f, что все ее критические точки (на которые распадается критическая точка 0 функции f) вещественны и невырождены, а значения функции $\tilde{f}$ во всех седловых точках равны нулю. Нетрудно видеть, что в этом случае значения функции $\tilde{f}$ во всех минимумах отрицательны, а во всех максимумах — положительны. Если такое шевеление существует, то матрица пересечений особенности f может быть определена по вещественной кривой $\{\tilde{f}(x, y) = 0\}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для того чтобы сформулировать соответствующий результат, введем некоторые определения.

Пусть в (открытом) круге D в плоскости $\mathbb{R}^2$ задана (вещественная) кривая l (замкнутая в топологическом смысле), имеющая в качестве особенностей только простые двойные самопересечения в конечном числе и трансверсально подходящая к границе круга D. Кривой l сопоставляются симметрическая и кососимметрическая целочисленные билинейные формы на решетке по правилам, описанным ниже.

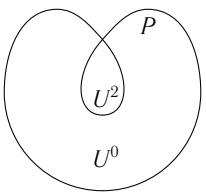


Рис. 97

Каждая связная компонента дополнения кривой l является криволинейным многоугольником. При этом у такого многоугольника некоторые пары вершин могут совпадать (как на рис. 97). Разобьем множество компонент дополнения кривой l на два класса (первый и второй) так, чтобы две компоненты, имеющие общую сторону, относились бы к разным классам. Такое разбиение на два класса возможно и единственно с точностью до перестановки классов. Сопоставим каждой точке p_j самопересечения кривой l формальную образующую Δ_j^1,

каждой относительно компактной в D (т. е. не граничащей с дополнением D) компоненте дополнения кривой l из первого класса (U_i^0) — формальную образующую Δ_i^0, а из второго класса (U_k^2) — формальную образующую Δ_k^2. Обозначим через $n_{10}(j, i)$ (соответственно, через $n_{21}(k, j)$) количество вершин криволинейного многоугольника U_i^0 (соответственно, U_k^2), совпадающих с точкой p_j. Числа $n_{10}(j, i)$ и $n_{21}(k, j)$ могут принимать значения 0, 1 или 2. Через $n_{20}(k, i)$ обозначим количество общих сторон криволинейных многоугольников U_k^2 и U_i^0. Так, например, в ситуации, изображенной на рис. 97, $n_{20} = 1$, $n_{10} = 2$, $n_{21} = 1$ ($i = j = k = 1$).

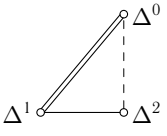


Рис. 98

Натянем на образующие $\{\Delta_m^s\}$ целочисленную решетку и будем считать базис Δ_k^2, Δ_j^1, Δ_i^0 отмеченным базисом этой решетки (порядок элементов Δ_m^σ с одинаковым σ несущественен). Разбиение компонент дополнения кривой l на два класса используется только для фиксирования порядка элементов Δ_m^σ в отмеченном базисе.

О п р е д е л е н и е. *Квадратичная форма, соответствующая кривой l*, определяется следующей таблицей скалярных произведений образующих:

$$(\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) = -2\delta_{mm'}, \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1) = n_{10}(j, i),$$
$$(\Delta_j^1 \circ \Delta_k^2) = n_{21}(k, j), \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) = -n_{20}(k, i).$$

О п р е д е л е н и е. *Кососимметрическая билинейная форма, соответствующая кривой l*, определяется следующей таблицей скалярных произведений (совпадение обозначений с предыдущим определением не создает путаницы):

$$(\Delta_m^\sigma \circ \Delta_{m'}^\sigma) = 0, \qquad (\Delta_j^1 \circ \Delta_i^0) = n_{10}(j, i),$$
$$(\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1) = n_{21}(k, j), \qquad (\Delta_i^0 \circ \Delta_k^2) = n_{20}(k, i)$$

(здесь при перестановке аргументов скалярное произведение меняет знак).

Диаграммой Дынкина кривой l мы будем называть диаграмму Дынкина соответствующей квадратичной формы. Ее вершины соответствуют самопересечениям кривой l и относительно компактным в D компонентам дополнения кривой l. Правило соединения вершин следует из таблицы индексов пересечений. Например, на рис. 98 изображена диаграмма Дынкина кривой рис. 97. Заметим, что эта диаграмма не является диаграммой Дынкина никакой особенности.

Пусть $\tilde{f}$ — шевеление особенности f, описанное выше, т. е. такое, что все критические точки функции $\tilde{f}$ (на которые распадается особенность f) вещественны, а значения функции $\tilde{f}$ во всех седловых точках равны нулю. В этом случае вещественная кривая $\{\tilde{f} = 0\}$ (в маленьком круге D с центром в нуле) имеет только простые двойные самопересечения. Компоненту дополне-

ния этой кривой отнесем к первому классу, если функция $\tilde{f}$ принимает на ней отрицательные значения, и ко второму — в противном случае. Критические значения функции $\tilde{f}(x, y)$ (или, что то же самое, — функции трех переменных $\tilde{f}(x, y) + t^2$) по предположению лежат на вещественной оси в плоскости $\mathbb{C}$ значений функции $\tilde{f}$. Выберем такое z_0, что $\operatorname{Im} z_0 > 0$, и зафиксируем систему путей, соединяющих некритическое значение z_0 с критическими значениями функции $\tilde{f}$, потребовав, чтобы эти пути целиком лежали в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, за исключением их концов, совпадающих с критическими значениями. Заметим, что критические точки функции $\tilde{f}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с самопересечениями вещественной кривой $\{\tilde{f} = 0\}$ и относительно компактными компонентами ее дополнения, так как в каждой такой компоненте имеется ровно по одной критической точке функции $\tilde{f}$ (максимуму или минимуму). Зафиксировав таким способом систему путей, мы определили отмеченные базисы исчезающих циклов в гомологиях неособых многообразий уровня особенностей $f(x, y)$ и $f(x, y) + t^2$. Эти базисы мы также будем обозначать через $\{\Delta^\sigma_m\}$. При этом циклы Δ^1_j исчезают в седловых точках p_j функции $\tilde{f}$, циклы Δ^0_i — в минимумах, лежащих в компонентах U^0_i, а циклы Δ^2_k — в максимумах, лежащих в компонентах U^2_k.

Теорема 1. *Форма пересечений в гомологиях неособого многообразия уровня особенности $f(x, y)$ в описанном отмеченном базисе $\{\Delta^\sigma_m\}$ совпадает с кососимметрической билинейной формой, соответствующей вещественной кривой $\{\tilde{f} = 0\}$, а форма пересечений*

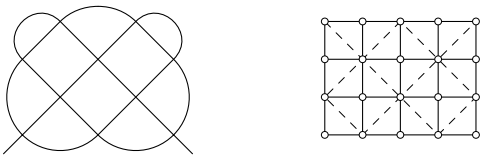


Рис. 99

особенности трех переменных $f(x, y) + t^2$ — с квадратичной формой, соответствующей той же кривой.

Примеры. 1. Пусть $f(x, y) = x^m + y^n$. Кратность этой особенности равна $(m - 1)(n - 1)$. Положим $\tilde{f}(x, y) = \lambda^{mn}\big(T_m(\lambda^{-n}x) + 2^{n-m}T_n\big(\lambda^{-m}2^{\frac{m-n}{n}}y\big)\big)$. Здесь $T_n(x) = 2^{1-n}\cos(n \cdot \arccos x)$ — многочлены Чебышёва. Нетрудно видеть, что шевеление $\tilde{f}$ особенности f удовлетворяет условиям теоремы 1. Кривая $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon \tilde{f}(x, y) = 0\}$ и ее диаграмма Дынкина изображены на рис. 99 ($m = 6, n = 5$). При $m = k + 1, n = 2$ мы, как и в п. 24.9, получаем классическую диаграмму Дынкина A_k, но с другим порядком вершин.

2. Функция $f(x, y) = x(x^{k-2} - y^2)$ (особенность типа D_k), $k \geqslant 4$. Ее кратность равна k. Нетрудно подобрать шевеление $\tilde{f}$ функции f, нулевая линия уровня которого (при $k = 9$) изображена на рис. 100 (для этого можно взять

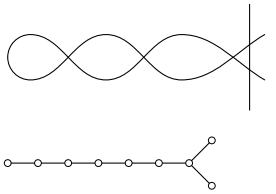


Рис. 100

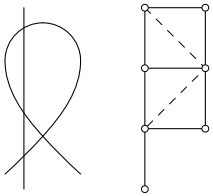


Рис. 101

шевеление функции $x^{k-2} - y^2$, подобное описанному в предыдущем примере, и умножить его на $(x - 2\lambda^2)$). Ее диаграмма Дынкина является классической диаграммой D_k.

3. Функция $f(x, y) = x^3 + xy^3 = x(x^2 + y^3)$ (особенность типа E_7). Шевелением, удовлетворяющим условиям теоремы 1, является $\tilde{f}(x, y) = (x + \lambda^{3/2}/3)(x^2 + y^3 - \lambda^2 y - 2\lambda^3/3\sqrt{3})$. Кривая $\{\tilde{f} = 0\}$ и ее диаграмма Дынкина приведены на рис. 101.

Недостатком теоремы 1 является то, что обычно бывает сложно подобрать шевеление $\tilde{f}$, удовлетворяющее ее условиям. Кроме того, диаграммы таких особенностей, как, например, E_6 ($x^3 + y^4$), E_7 и E_8 ($x^3 + y^5$), при наиболее естественных выборах шевелений получаются отличными от их классических форм и требуют преобразования. Оказывается, что проще бывает построить не шевеление функции, а шевеление ее нулевой линии уровня. Описание соответствующей процедуры будет дано в следующих пунктах. Сформулированный ниже результат позволяет в некоторой степени устранить второй из названных недостатков.

Пусть кривая l такая же, как и раньше. Если отвлечься от самопересечений, то кривая l состоит из нескольких окружностей и интервалов. Это означает, что существует такое собственное невырожденное отображение $\chi\colon L \to D$ одномерного гладкого многообразия L в круг D, что $\operatorname{Im}\chi = l$ и χ отображает L на l взаимно однозначно вне особых точек кривой l (самопересечений). Пусть $\chi_t\colon L \to D$ ($t \in [0, 1]$) — гомотопия отображения χ ($\chi = \chi_0$) в классе собственных невырожденных отображений, постоянных на прообразе окрестности границы круга D. Если χ_t — гомотопия общего вида, то тип кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ (как одномерного гладкого подмногообразия круга D с простыми самопересечениями) будет меняться при конечном числе значений параметра t. При этих значениях параметра t будет происходить перестройка одного из следующих трех типов: 1) сливаются и исчеза-

ют две точки самопересечения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ (рис. 102, при исключительном значении параметра происходит простое касание двух ветвей кривой $\operatorname{Im}\chi_t$);

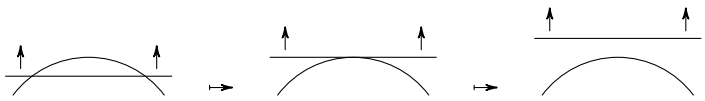


Рис. 102

2) появляются две новые точки самопересечения (этот тип перестройки переходит в предыдущий при смене направления изменения параметра t); 3) сливаются и расходятся три точки самопересечения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ (рис. 103, при исключительном значении параметра на кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ возникает точка тройного пересечения). Другие типы перестроек коразмерности

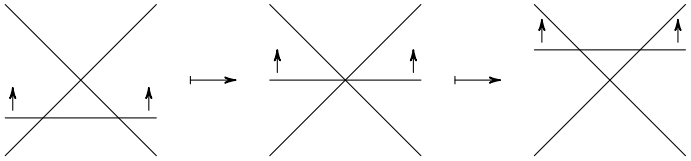


Рис. 103

один отсутствуют, в связи с тем что на отображение χ_t наложено условие невырожденности (необращение в нуль его дифференциала). При первых двух типах перестроек не сохраняется общее число точек самопересечения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$, и поэтому меняется размерность целочисленной решетки, сопоставляемой ей. При перестройках третьего типа размерность решетки сохраняется. Оказывается, что если все перестройки кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ относятся к третьему типу, то не меняется и билинейная форма, соответствующая кривой $\operatorname{Im}\chi_t$. Происходит только замена базиса в решетке, на которой она определена.

О п р е д е л е н и е. Гомотопия χ_t называется *допустимой*, если ни для какого значения параметра $t \in [0, 1]$ не существует точек $h_1 \neq h_2$ из L, для которых $\chi_t(h_1) = \chi_t(h_2)$, $\operatorname{Im} d\chi_t(h_1) = \operatorname{Im} d\chi_t(h_2)$ ($d\chi_t$ — дифференциал отображения χ_t), и, кроме того, кривая $\operatorname{Im}\chi_1$ имеет только простые двойные самопересечения.

Можно показать, что допустимая гомотопия — это гомотопия, при которой все перестройки кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ относятся к третьему типу (и $t = 1$ не является исключительным значением параметра, т. е. при нем не происходит перестройки кривой). Если χ_t — допустимая гомотопия, то кривые $\operatorname{Im}\chi_0 = l$ и $\operatorname{Im}\chi_1$ имеют одно и то же количество самопересечений (а также одно и то

же количество компонент дополнения). Поэтому целочисленные решетки, соответствующие этим кривым, имеют одинаковую размерность.

Теорема 2. *Пусть* $\chi_t\colon L \to D$ *— допустимая гомотопия. Тогда симметрическая и кососимметрическая билинейные формы, соответствующие кривой* $\operatorname{Im}\chi_1$, *получаются из форм, соответствующих кривой* $\operatorname{Im}\chi_0 = l$, *при помощи операций замены отмеченного базиса.*

Для доказательства можно явно указать замену базиса, которая соответствует одной перестройке кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ третьего типа. При этом преобразуются только четыре исчезающих цикла, соответствующие трем точкам самопересечения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$, которые сливаются при этой перестройке, и криволинейному треугольнику с вершинами в этих точках — компоненте связности дополнения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$. Явный вид такой замены базиса может быть получен для одного примера, в котором соответствующая гомотопия χ_t может быть реализована деформацией шевеления $\tilde{f}$ особенности (например, для $\tilde{f}_t(x, t) = x \cdot y \cdot (x + y + t)$ исключительное значение параметра $t = 0$). Наборы путей, определяющие отмеченные базисы в этом случае, описаны перед формулировкой теоремы 1. Выход параметра t в комплексную область и полуобход исключительного значения $t = 0$ позволяет проследить за преобразованием соответствующей системы путей.

Пусть $t = t_0$ — значение параметра, при котором происходит перестройка кривой $\operatorname{Im}\chi_t$, относящаяся к третьему типу. Для определенности предположим, что при $t < t_0$ треугольник с вершинами в трех сливающихся точках относится к первому классу компонент дополнения кривой $\operatorname{Im}\chi_t$ (соответствующему компонентам, на которых шевеление $\tilde{f}$ принимает отрицательные значения). При $t > t_0$ аналогичный треугольник будет относиться ко второму классу. Пусть Δ_m, Δ_{m+1}, Δ_{m+2} — исчезающие циклы, соответствующие трем точкам самопересечения, Δ_{m+3} — цикл, соответствующий треугольнику с вершинами в них. Тогда последовательность операций β_{m+3}, β_{m+2}, β_{m+1}, β_{m+1}, β_{m+2}, β_{m+3}, β_{m+3}, β_{m+2}, β_{m+1} эквивалентна рассматриваемой перестройке кривой $\operatorname{Im}\chi_t$.

В качестве примера применения теоремы 2 на рис. 104 изображено приведение диаграмм Дынкина особенностей E_6 $(x^3 + y^4)$, E_7 $(x^3 + xy^3)$ и E_8 $(x^3 + y^5)$ (см. примеры 1 и 3) к классическому виду при помощи допустимой гомотопии.

Таким образом, завершено доказательство теоремы 12 п. 25.6.

Небольшое видоизменение позволяет приспособить описанный метод вычисления матрицы пересечений особенности двух переменных для краевых особенностей (см. ч. I, п. 17.4) и доказать, что диаграммы Дынкина особенностей B_k, C_k и F_4 являются классическими диаграммами соответствующих алгебр Ли, а их группы монодромии (для случая нечетного числа переменных) — соответствующими классическими группами Вейля (п. 27.2).

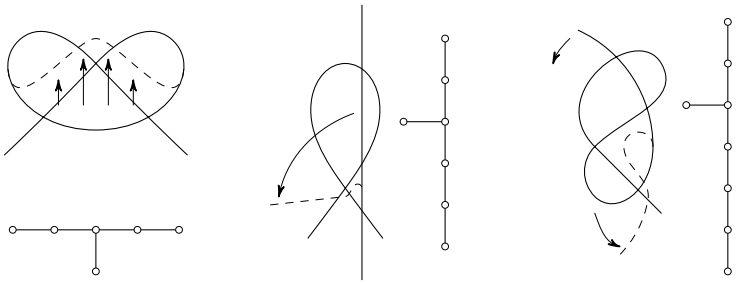


Рис. 104

26.2. Ростки комплексных кривых и особенности функций двух переменных. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющей изолированную критическую точку в нуле. Росток кривой $M(f) = \{\bar{x} \in \mathbb{C}^2\colon f(\bar{x}) = 0\}$ может быть приводим. Пусть $M(f) = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$ — его представление в виде объединения неприводимых компонент (r — их количество). Для каждого из ростков неприводимых комплексных кривых M_i существует такой росток отображения $\varphi_i\colon (\mathbb{C}_i, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ (униформизация), что $\operatorname{Im}\varphi_i = M_i$ и φ является изоморфизмом кривых $\mathbb{C}_i$ и M_i вне нуля. Росток φ_i определен с точностью до ростка голоморфного изоморфизма $(\mathbb{C}_i, 0) \to (\mathbb{C}_i, 0)$ (замены параметра униформизации). Для малых шевелений $\tilde{\varphi}_i$ отображений φ_i общего положения комплексная кривая $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im}\tilde{\varphi}_i$ (в окрестности нуля) имеет в качестве особенностей только простые двойные точки. Их количество, которое, конечно, не зависит от выбора шевелений, обозначим через $s = s\{\varphi_i\} = s(f)$.

Л е м м а 1. *Кратность особенности f равна* $\mu(f) = 2s(f) - (r-1)$.

Задача о вычислении матрицы пересечений произвольной особенности функции двух переменных может быть сведена к случаю вещественной особенности при помощи следующего утверждения.

Т е о р е м а 3. *Для любого набора ростков отображений* $\{\varphi_i\}$ $(\varphi_i\colon (\mathbb{C}_i, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, φ_i *отображает комплексную прямую* $\mathbb{C}_i$ *взаимно однозначно на ее образ и* $\operatorname{Im}\varphi_i \neq \operatorname{Im}\varphi_j$ *при* $i \neq j$*) существует набор вещественных ростков отображений* $\{\psi_i\}$, *лежащий в той же компоненте связности множества* $s = \text{const}$ *в пространстве всех наборов из r отображений* $(\mathbb{C}_i, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, *что и* $\{\varphi_i\}$.

При этом отображения (или кривые) $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_i\}$ имеют одинаковые пары Пюизо и одинаковые порядки попарных касаний, что и дает способ построения отображений $\{\psi_i\}$.

С л е д с т в и е. *Для любой особенности функции двух переменных существует вещественная особенность, лежащая в той же компоненте связности множества* $\mu = \text{const}$ *в пространстве всех ростков функций* $(\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *и имеющая поэтому ту же матрицу пересечений.*

Для особенностей большего количества переменных аналогичное утверждение не доказано.

Если все отображения φ_i вещественны и существуют их вещественные шевеления $\tilde{\varphi}_i$, такие, что кривая $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i$ имеет только простые двойные точки и все эти s точек вещественны, то диаграмма Дынкина вещественной кривой $\left(\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbb{R}^2$ является диаграммой Дынкина особенности f, соответствующей набору отображений $\{\varphi_i\colon i = 1, \ldots, r\}$. Это следует из того, что шевеление $\tilde{f}$ особенности f, соответствующее шевелению $\{\tilde{\varphi}_i\}$ набора отображений $\{\varphi_i\}$, удовлетворяет условиям теоремы 1 (п. 26.1).

Т е о р е м а 4. *Для любого набора ростков вещественных отображений* $\{\varphi_i\}$ $(\varphi_i\colon (\mathbb{C}_i, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0))$ *существуют вещественные шевеления* $\{\tilde{\varphi}_i\}$, *для которых кривая* $\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i$ *имеет только простые двойные точки и все эти точки вещественны.*

Заметим, что оба существующих доказательства этой теоремы носят конструктивный характер, т. е. содержат способы построения таких шевелений. Один из этих способов (более удобный для изложения, но не более эффективный) будет описан в п. 26.3.

Из теоремы 4 следует, что если $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — такая вещественная особенность, что кривая $\{f = 0\}$ вещественна (т. е. вещественны все ее неприводимые компоненты), то существует ее вещественное шевеление $\tilde{f}$, удовлетворяющее условиям теоремы 1, т. е. имеющее только невырожденные вещественные критические точки с одинаковыми критическими значениями во всех седловых точках.

26.3. Разрешение особенностей функций двух переменных и построение их вещественных шевелений. Разрешение особенности функции $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ (или кривой $\{(x, y)\colon f(x, y) = 0\}$) может быть построено при помощи последовательности σ-процессов.

Рассмотрим комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ и точку 0 на нем. *σ-процесс* с центром в точке 0 — это отображение $\sigma\colon \Pi^n \to \mathbb{C}^n$ n-мерного комплексного многообразия Π^n, которое устроено следующим образом: вне прообраза точки $0 \in \mathbb{C}^n$ отображение σ является аналитическим изоморфизмом, прообразом $\sigma^{-1}(0)$ точки 0 является $(n-1)$-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ (проективизация пространства $\mathbb{C}^n$), которое подклее-

но к дополнению $\Pi^n - \sigma^{-1}(0) \approx \mathbb{C}^n - 0$ так, что прямая в пространстве $\mathbb{C}^n$, проходящая через нуль, примыкает к той точке проективизации $\mathbb{C}P^{n-1}$ пространства $\mathbb{C}^n$, которая ей соответствует. Таким образом, многообразие Π^n получается из пространства $\mathbb{C}^n$ вклеиванием $(n-1)$-мерного проективного пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$ вместо точки 0.

σ-процесс с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть описан следующим образом. Пусть $(\mathbb{C}^n - 0) \to \mathbb{C}P^{n-1}$ — отображение проективизации, сопоставляющее каждому ненулевому вектору из пространства $\mathbb{C}^n$ прямую, порожденную им. Рассмотрим график этого отображения как подпространство произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Он не является замкнутым подмногообразием пространства $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Однако можно показать, что его замыкание Π^n является неособым n-мерным замкнутым подмногообразием произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Естественная проекция $\Pi^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ является взаимно однозначным отображением вне нуля пространства $\mathbb{C}^n$. Прообразом нуля является проективное пространство $0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Отображение $\Pi^n \to \mathbb{C}^n$ является σ-процессом с центром в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Другое (координатное) описание многообразия Π^n — следующее. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в пространстве $\mathbb{C}^n$, $u_1 : \ldots : u_n$ — соответствующие однородные координаты в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть Π^n — подпространство в произведении $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$, заданное уравнениями $x_i u_j = u_i x_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, $(u_1 : \ldots : u_n) \in \mathbb{C}P^{n-1}$. Ниже будет показано, что Π^n является n-мерным многообразием. Обозначим через σ: $\Pi^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1} \to \mathbb{C}^n$ проекцию на первый сомножитель. Если $x = (x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, то прообраз $\sigma^{-1}(x)$ точки $x \in \mathbb{C}^n$ состоит из одной точки $(x_1, \ldots, x_n;\ x_1 : \ldots : x_n)$. Поэтому вне прообраза точки $0 \in \mathbb{C}^n$ отображение σ устанавливает изоморфизм $\Pi^n - \sigma^{-1}(0) \to \mathbb{C}^n - 0$. Прообразом точки $0 \in \mathbb{C}^n$ является пространство $0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$, изоморфное проективному пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Пусть L — прямая в пространстве $\mathbb{C}^n$, проходящая через точки 0 и $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Она состоит из точек вида $(tx_1^0, \ldots, tx_n^0)$ $(t \in \mathbb{C})$. Прообраз $\sigma^{-1}(L - 0)$ прямой L без точки 0 состоит из точек произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$, имеющих вид $(tx_1^0, \ldots, tx_n^0;\ x_1^0 : \ldots : x_n^0)$ $(t \neq 0)$. Поэтому замыканием пространства $\sigma^{-1}(L - 0)$ является прямая $\{(tx_1^0, \ldots, tx_n^0;\ x_1^0 : \ldots : x_n^0)\} \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Эта прямая проходит через точку $(0, \ldots, 0;\ x_1^0 : \ldots : x_n^0)$ прообраза $\sigma^{-1}(0) = 0 \times \mathbb{C}P^{n-1}$, соответствующую прямой L.

Чтобы показать, что пространство Π^n является неособым комплексным многообразием, рассмотрим его в окрестности точки $(0, \ldots, 0, u_1^0 : \ldots : u_n^0) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Пусть, например, $u_1^0 \neq 0$. Поскольку $u_1 : \ldots : u_n$ — однородные координаты в пространстве $\mathbb{C}P^{n-1}$, можно считать, что $u_1^0 = 1$. Пусть $\mathbb{C}_1^{n-1} \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ — аффинная часть проективного пространства $\mathbb{C}P^{n-1}$, заданная условием $u_1 = 1$. В части $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_1^{n-1}$ произведения $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}P^{n-1}$ простран-

ство Π^n может быть задано уравнениями $x_j = x_1 u_j$ $(j = 2, \ldots, n)$. Отсюда видно, что пространство $\Pi^n \cap (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^{n-1}_1)$ изоморфно n-мерному комплексному векторному пространству с координатами $x_1, u_2, \ldots, u_n$ и поэтому неособо. Из уравнений, определяющих пространство Π^n, вытекает, что в части, определяемой условием $u_1 = 1$, координаты $u_2, \ldots, u_n$ выражаются через координаты $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ по формулам $u_j = x_j/x_1$ $(j = 2, \ldots, n)$.

Нетрудно показать, что описанная конструкция не зависит от выбора координат $x_1, \ldots, x_n$ в пространстве $\mathbb{C}^n$ и поэтому применима к любому комплексно-аналитическому пространству и его неособой точке. Для доказательства надо проверить, что любой локальный комплексно-аналитический изоморфизм $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ поднимается до комплексно-аналитического изоморфизма $\Pi^n \to \Pi^n$ в окрестности прообраза $\sigma^{-1}(0) = \mathbb{C}P^{n-1}$.

Пусть теперь $n = 2$, $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющей изолированную критическую точку в нуле, $M = \{(x, y)\colon f(x, y) = 0\}$ — росток комплексно-аналитической кривой в пространстве $\mathbb{C}^2$. При σ-процессе $\sigma\colon \Pi^2 \to \mathbb{C}^2$ с центром в нуле вместо точки $0 \in \mathbb{C}^2$ вклеивается проективная прямая $\mathbb{C}P^1 \subset \Pi^2$ с координатами $(u\colon v)$. В этом случае композиция $f \circ \sigma$ является голоморфной функцией на окрестности пространства $\sigma^{-1}(0)$ в многообразии Π^2. Функция $f \circ \sigma$ будет, вообще говоря, иметь неизолированные критические точки. Она обращается в нуль на вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \subset \Pi^2$, причем прямая $\mathbb{C}P^1$ входит в дивизор $\{f \circ \sigma = 0\}$ с кратностью, равной степени m ростка $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Это означает, что в окрестности точки $(1 : 0) \in \mathbb{C}P^1 \subset \Pi^2$, заданной условием $u = 1$, функция $f \circ \sigma$ имеет вид $f \circ \sigma = x^m \cdot g_1$, где g_1 не обращается тождественно в нуль на вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Степень m ростка f — это наименьшая из степеней мономов, входящих в разложение функции f с ненулевыми коэффициентами. Аналогичное соотношение $(f \circ \sigma = y^m \cdot g_2)$ имеет место и в окрестности точки $(0\colon 1) \in \mathbb{C}P^1 \subset \Pi^2$, заданной условием $v = 1$. Поэтому в качестве особенностей функции $f \circ \sigma$ надо рассматривать не все те точки, в которых ее дифференциал обращается в нуль. Таких точек слишком много, и среди них большинство — такие, в окрестности которых функция $f \circ \sigma$ эквивалентна функции x^m. Надо учитывать только точки, в которых функция g_1 (или g_2) обращается в нуль. Однако g_1 (или g_2) — это функция на части многообразия Π^2, определяемой условием необращения в нуль одной из координат. Определить ее на многообразии Π^2 инвариантным способом невозможно (не рассматривая ее как сечение некоторого расслоения).

Чтобы избежать трудностей такого рода, мы будем рассматривать не особенность функции $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, а особенность ростка кривой $M = \{f = 0\}$. В соответствии с п. 26.2 задачу построения вещественных ше-

велений особенности f, нужных для определения ее матрицы пересечений, можно заменить задачей построения вещественных шевелений кривой M. Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$ — разложение ростка M на неприводимые компоненты. Каждая из кривых M_i может быть задана уравнением $f_i = 0$ степени m_i (где $f = \prod_{i=1}^{r} f_i$, $m = \sum_{i=1}^{r} m_i$).

Рассмотрим временно одну из неприводимых кривых M_i (индекс i будем пока опускать). Как уже говорилось, существует росток отображения $\varphi\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$, образом которого является росток M и которое вне нуля является изоморфизмом $\mathbb{C} - 0 \to M - 0$. Отображение φ задается формулами $x = x(t) = at^m + \ldots$, $y = y(t) = bt^m + \ldots$, где многоточие обозначает сумму членов более высоких степеней (t — координата на прямой $\mathbb{C}$, x и y — координаты в плоскости $\mathbb{C}^2$; либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$). Можно показать, что натуральное число m совпадает со степенью ростка функции, определяющей кривую M. Линейная замена координат в пространстве $\mathbb{C}^2$ позволяет убрать член степени m ряда $y(t)$, т. е. считать, что $x(t) = at^m + \ldots$, $y(t) = bt^n + \ldots$, где $n > m$, $a \neq 0$. После этого (локальная) замена $\tilde{t} = \sqrt[m]{x(t)} = \sqrt[m]{a}\sqrt[m]{t^m + \ldots} = \sqrt[m]{a}(t + \ldots)$ координаты на прямой $\mathbb{C}$ позволяет считать, что $x(t) = t^m$, $y(t) = bt^n + \ldots$ $(n > m)$. Если n делится на m $(n = k \cdot m)$, то замена $\tilde{x} = x$, $\tilde{y} = y - bx^k$ уничтожает член степени n у ряда $y(t)$. Поэтому после замен переменных в прообразе $\mathbb{C}$ и в образе $\mathbb{C}^2$ можно считать, что отображение φ задается формулами $x(t) = t^m$, $y(t) = \sum_{k \geqslant n} a_k t^k$ $(n > m, a_m \neq 0)$, где n не делится на m. При этом наибольшее общее кратное чисел m, n и тех чисел k, для которых $a_k \neq 0$, равно 1. Нетрудно видеть, что в этом случае кривая M касается координатной прямой $y = 0$. Уравнение кривой M может быть записано в виде $y = \sum_{k \geqslant n} a_k x^{k/m}$. Ряд $\sum_{k \geqslant n} a_k x^{k/m}$ по дробным степеням переменной x называется *рядом Пюизо* кривой M. Пару натуральных чисел (n, m) назовем *старшими показателями Пюизо* кривой M.

Для более полного описания ростка кривой M используют набор так называемых характеристических пар Пюизо. Представим отношение n/m в виде несократимой дроби n_1/m_1. Пара (n_1, m_1) называется первой характеристической парой Пюизо ростка кривой M. Если наибольший общий делитель чисел n и m (который равен m/m_1) равен единице, то этим исчерпываются все характеристические пары Пюизо. Если $m/m_1 > 1$, то пусть $k_2 = \min\{k\colon a_k \neq 0,\ k \text{ не делится на } m/m_1\}$. Представим отношение $k_2/(m/m_1)$ в виде несократимой дроби n_2/m_2. Пара (n_2, m_2) называется второй характеристической парой Пюизо ростка кривой M. Если $m/(m_1 m_2) = 1$, то этими двумя парами исчерпываются характеристические

пары Пюизо. Если $m/(m_1m_2) > 1$, то пусть $k_3 = \min\{k\colon a_k \neq 0,\ k$ не делится на $m/(m_1m_2)\}$, $k_3/(m/(m_1m_2)) = n_3/m_3, \ldots$ В конце концов мы получаем последовательность взаимно простых пар натуральных чисел (n_1, m_1), $(n_2, m_2), \ldots, (n_g, m_g)$, называемых *характеристическими парами Пюизо* кривой M. При этом $m_1 \cdot \ldots \cdot m_g = m$, $n_{j-1}m_i < n_j$. Можно показать, что характеристические пары Пюизо дают довольно подробное описание топологии ростка кривой M. В частности, ростки кривых с одинаковыми характеристическими парами Пюизо топологически эквивалентны между собой и являются нулевыми многообразиями уровня особенностей ростков функций, находящихся в одном семействе $\mu = \text{const}$.

Проследим за тем, что происходит с кривой M при σ-процессе $\sigma\colon \Pi^2 \to \mathbb{C}^2$. В аффинной части многообразия Π^2, определяемой условием $u = 1$, координатами являются x и $v = y/x$ ($(u\colon v)$ — однородные координаты на проективной прямой $\mathbb{C}P^1 \subset \Pi^2$). Из формул $x(t) = t^m$, $y(t) = t^n + \ldots$ вытекает, что в координатах (x, v) на многообразии Π^2 выполняются равенства $x(t) = t^m$, $v(t) = t^{n-m} + \ldots$ Отсюда следует, что прообраз $\sigma^{-1}(M - 0)$ кривой M без нуля при σ-процессе пополняется до кривой $\sigma^{-1}(M)$ в многообразии Π^2. При этом кривая $\sigma^{-1}(M)$ пересекается с вклеенной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$ в точке $(1 : 0)$. Из параметрических уравнений, определяющих кривую $\sigma^{-1}(M)$, вытекает, что они в некотором смысле имеют меньшую степень, чем уравнения кривой M. Если $m < n < 2m$, то степень кривой $\sigma^{-1}(M)$ (равная $n - m$) просто меньше, чем степень кривой M. Если же $n > 2m$, то степень кривой $\sigma^{-1}(M)$ (равная m) совпадает со степенью кривой M, однако первый из старших показателей Пюизо $(n - m, m)$ у кривой $\sigma^{-1}(M)$ меньше, чем у кривой M.

Таким образом, особенность кривой $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$ в описанном смысле проще, чем особенность кривой M. Производя σ-процесс на поверхности Π^2 с центром в особой точке кривой $\tilde{M} = \sigma^{-1}(M)$, мы получаем поверхность $\tilde{\Pi}^2$ ($\tilde{\sigma}\colon \tilde{\Pi}^2 \to \Pi^2$) и кривую $\tilde{\tilde{M}} = \tilde{\sigma}^{-1}(\tilde{M})$ на ней, особенность которой будет еще проще. Комплексная проективная прямая на поверхности $\tilde{\Pi}^2$, которая вклеивается при этом σ-процессе, будет трансверсально пересекаться с проективной прямой, вклеиваемой при первом σ-процессе, причем только в одной точке. Повторяя этот процесс нужное число раз, мы, наконец, дойдем до того, что прообраз кривой M будет неособым.

Пусть теперь кривая M не обязательно неприводима ($M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$). Производя σ-процесс в нуле, затем — в особых точках прообразов кривых $M_i, \ldots$, мы дойдем до такого положения, при котором все r прообразов кривых M_i будут неособыми. Это означает, что мы получим аналитическое отображение $\pi\colon (Z, Z_0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ (суперпозицию σ-процессов) неособой аналитической поверхности Z в пространство $\mathbb{C}^2$, обладающее

следующими свойствами: 1) ограничение отображения π на $Z - Z_0$ является изоморфизмом $Z - Z_0 \to \mathbb{C}^2 - 0$; 2) подпространство $Z_0 = \pi^{-1}(0)$ является объединением комплексных проективных прямых на поверхности Z, находящихся в общем положении; 3) прообразы $\pi^{-1}(M_i)$ кривых $M_i \subset \mathbb{C}^2$ (замыкания $\pi^{-1}(M_i - 0)$) являются неособыми кривыми на поверхности Z. Общность положения проективных прямых, из которых состоит подпространство Z_0, означает, что они имеют только парные взаимные пересечения, причем две проективные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально в одной точке.

Кривые $\pi^{-1}(M_i)$ могут касаться друг друга, а также вклеенных комплексных проективных прямых. Нетрудно видеть, что σ-процесс в точке касания двух неособых кривых понижает степень их касания, а σ-процесс в точке их трансверсального пересечения разводит их, т. е. делает не пересекающимися. Поэтому, произведя дополнительно нужное число σ-процессов, можно считать, что кривые $\pi^{-1}(M_i)$ не пересекаются друг с другом и пересекаются с прообразом Z_0 нуля трансверсально в его неособых точках (т. е. не в точках пересечения разных вклеенных проективных прямых).

Такое отображение $\pi\colon (Z, Z_0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ мы будем называть *разрешением* кривой $M = \{(x, y)\colon f(x, y) = 0\}$. Можно показать, что это отображение является разрешением особенности функции f в смысле п. 25.5.

Пусть, например, кривая M неприводима и задается параметрическими уравнениями $x = t^2$, $y = t^5$, σ-процесс с центром в нуле приводит ее к кривой вида $x = t^2$, $y = t^3$. Тогда σ-процесс в особой точке этой кривой приводит к неособой кривой, касающейся вклеенной проективной прямой, причем это касание является простым; σ-процесс в точке касания приводит к тому,

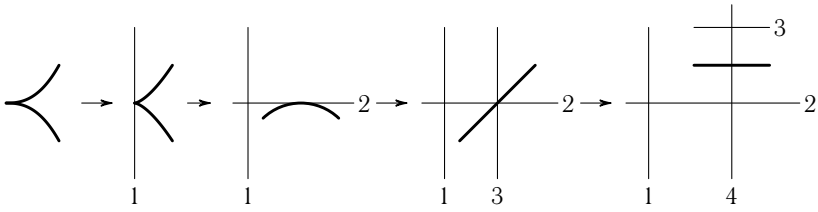


Рис. 105

что прообраз кривой M будет пересекаться с двумя вклеенными проективными прямыми в точке их пересечения. Наконец, σ-процесс в этой точке пересечения окончательно приведет прообраз рассматриваемой кривой и все вклеенные проективные прямые в общее положение (рис. 105; для ясности кривая M и ее прообразы изображены более жирными линиями, а вклеенные проективные прямые перенумерованы в порядке вклеивания).

Другой пример (для особенности функции $f(x, y) = x(x^2 + y^3)$, $M = M_1 \cup M_2$, $M_1 = \{x = 0\}$, $M_2 = \{x^2 + y^3 = 0\}$) приведен на рис. 106.

Нетрудно показать, что кратность, а следовательно, и матрица пересечений особенности функции, соответствующей кривой $M = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$, определяется тем, какие из вклеенных проективных прямых и прообразов кривых M_i пересекаются между собой, и не зависит от того, в каких конкретно

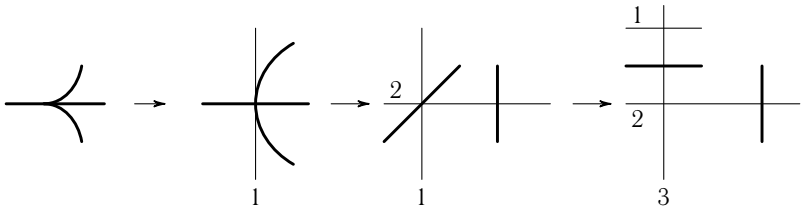


Рис. 106

точках они (трансверсально) пересекаются. Отсюда следует, что без вреда для кратности особенности и ее матрицы пересечений мы можем считать, что все вклеенные проективные прямые и прообразы кривых M_i вещественны (т. е. все σ-процессы производились только в вещественных точках соответствующих поверхностей, а кривые M_i сами были вещественными). В этом случае на рис. 105 и 106 изображены вещественные части вклеенных проективных прямых и кривых M_i.

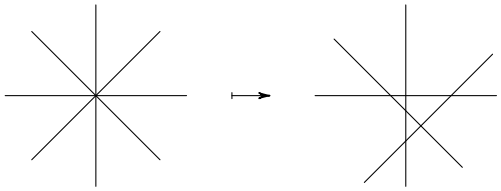


Рис. 107

Изложенная выше конструкция по сути дела является доказательством теоремы 3.

Стягивание одной из вклеенных проективных прямых (последней по порядку вклеивания) приводит к ситуации, когда несколько *неособых* кривых (вклеенных проективных прямых и прообразов кривых M_i) пересекаются в одной точке, причем попарно трансверсально. Шевелением можно добиться, чтобы эти кривые не имели более чем парных пересечений, а простые парные пересечения все были бы вещественными (рис. 107).

Стягивая так все вклеенные проективные прямые (в порядке, обратном их вклеиванию при разрешении особенности) и на каждом шаге шевелением избавляясь от более чем парных пересечений, мы дойдем до таких шевелений исходных кривых M_i, которые имеют только простые двойные пересе-

чения (как сами с собой, так и друг с другом), причем все эти пересечения вещественны. Таким образом, нами будут построены шевеления кривых M_i, требующиеся для определения матрицы пересечений особенности в соответствии с п. 26.2.

Для особенностей, разрешения которых изображены на рис. 105 и 106, соответствующие построения проведены на рис. 108 и 109.

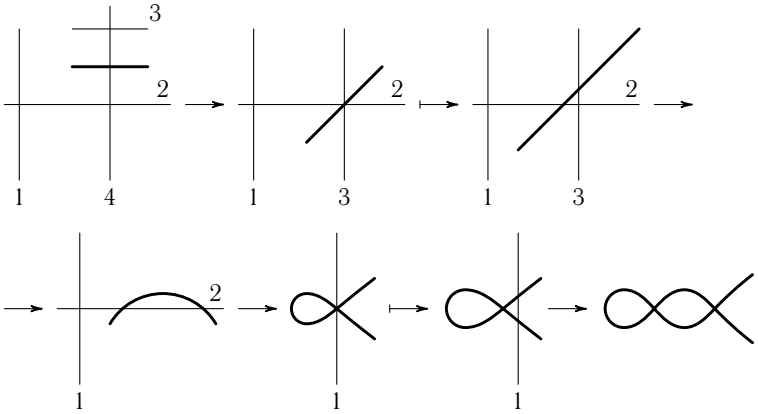


Рис. 108

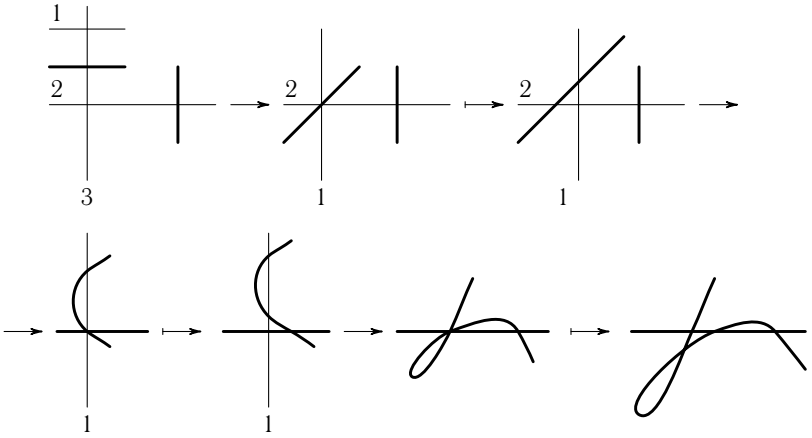


Рис. 109

Описанный способ построения вещественных шевелений обладает тем недостатком, что для его проведения требуется построение разрешения

особенности при помощи последовательности σ-процессов, что является довольно длинной процедурой. Например, для особенности $x^m + y^n$, рассматриваемой в п. 26.1 (пример 1), этот способ требует многочисленных (хотя и простых) построений. Более эффективным является способ, основанный на индукции по парам Пюизо особенности, однако он более сложен для описания.

26.4. Частичная диагонализация квадратичной формы особенности. Уже говорилось, что возможность представления диаграммы Дынкина особенности функции двух переменных в виде диаграммы Дынкина вещественной кривой позволяет существенно упрощать некоторые вычисления, связанные с соответствующей квадратичной формой (например, вычисление ее индексов инерции).

Индексы пересечений (формальных) исчезающих циклов, соответствующих вещественной кривой l (см. п. 26.1), связаны между собой соотношением специального вида.

Л е м м а 2. *Имеет место равенство*

$$2n_{20}(k, i) = \sum_j n_{21}(k, j)n_{10}(j, i).$$

Доказательство может быть получено из простых геометрических рассмотрений.

Вложим целочисленную решетку с базисом Δ_i^0, Δ_j^1, Δ_k^2 в вещественное линейное пространство $\mathbb{R}^\mu$ с тем же базисом и продолжим квадратичную форму $(x \circ y)$ на все пространство $\mathbb{R}^\mu$. Определим в пространстве $\mathbb{R}^\mu$ новый базис $\bar\Delta_i^0$, $\bar\Delta_j^1$, $\bar\Delta_k^2$ по формулам $\bar\Delta_i^0 = \Delta_i^0 + \frac{1}{2}\sum_j(\Delta_i^0 \circ \Delta_j^1)\Delta_j^1$, $\bar\Delta_j^1 = \Delta_j^1$, $\bar\Delta_k^2 = \Delta_k^2 + \frac{1}{2}\sum_j(\Delta_k^2 \circ \Delta_j^1)\Delta_j^1$. Пользуясь леммой 2, нетрудно проверить, что $(\bar\Delta_i^0 \circ \bar\Delta_j^1) = (\bar\Delta_k^2 \circ \bar\Delta_j^1) = (\bar\Delta_k^2 \circ \bar\Delta_i^0) = 0$. Кроме того, $(\bar\Delta_j^1 \circ \bar\Delta_{j'}^1) = -2\delta_{ij'}$. Тем самым мы произвели частичную диагонализацию матрицы пересечений.

Нетрудно видеть, что $(\bar\Delta_i^0 \circ \bar\Delta_i^0) = -2 + \frac{1}{2}\sum_j[n_{10}(j, i)]^2$, $(\bar\Delta_k^2 \circ \bar\Delta_k^2) = -2 + \frac{1}{2}\sum_j[n_{21}(k, j)]^2$. Отсюда следует, что если среди областей, ограниченных кривой l (или кривой, получающейся из нее при помощи допустимой гомотопии), имеется хотя бы один четырехугольник, то ее квадратичная форма не является отрицательно определенной, а если среди них есть многоугольник с количеством сторон больше четырех, то она не является и неположительно определенной.

Продемонстрируем одно применение этой конструкции. Для квадратичной формы на решетке $\mathbb{Z}^\mu$ имеет смысл говорить о ее определителе,

так как определитель замены базиса в целочисленной решетке равен ± 1. Обозначим через $D(f)$ определитель квадратичной формы, соответствующей особенности f. Определитель $D(f)$ равен нулю, если отображение $i_*\colon H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ групп гомологий, индуцированное вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)$ (для особенности $f(x, y) + t^2$), не является мономорфизмом, и с точностью до знака равен порядку коядра $H_{n-1}(V_\varepsilon, \partial V_\varepsilon)/\operatorname{Im} i_*$ отображения i_* в противном случае (матрица отображения i_* и есть матрица пересечений особенности).

Т е о р е м а 5. *Пусть* $f\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — *особенность функции двух переменных и* r — *количество неприводимых сомножителей, на которые может быть разложен росток функции* f (*т. е. количество неприводимых компонент у кривой* $\{f = 0\}$). *Тогда* $D(f)$ *делится на* 2^{r-1}.

В частности, если функция f приводима, т. е. $r > 1$, то отображение i_* (для особенности $f(x, y) + t^2$) не может быть изоморфизмом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с теоремами 3 и 4 (п. 26.2) построим такой набор вещественных отображений $\tilde{\varphi}_i\colon \mathbb{C}_i \to \mathbb{C}^2$ (определенных в окрестности нуля), что диаграмма Дынкина кривой $\left(\bigcup_{i=1}^{r} \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbb{R}^2$ совпадает с диаграммой Дынкина особенности f. Пусть $\{\Delta_m^\sigma\}$ — базис решетки, на которой определена квадратичная форма $(x \circ y)$, соответствующая этой кривой. Количество самопересечений s кривой $\left(\bigcup \operatorname{Im} \tilde{\varphi}_i\right) \cap \mathbb{R}^2$ равно количеству базисных элементов Δ_j^1. Количество остальных элементов базиса (Δ_i^0 и Δ_k^2) равно $s - (r - 1)$ (ср. с леммой 1 п. 26.2). Матрица перехода от базиса $\{\Delta_m^\sigma\}$ целочисленной решетки к базису $\{\bar{\Delta}_m^\sigma\}$ пространства $\mathbb{R}^\mu$, описанному выше, имеет определитель, равный $+1$. Поэтому определитель $D(f)$ совпадает с определителем матрицы квадратичной формы особенности f в базисе $\{\bar{\Delta}_m^\sigma\}$. Этот определитель разлагается в произведение трех определителей: $|(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_{i'}^0)|$, $|(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_{k'}^2)|$ и $|(\bar{\Delta}_j^1 \circ \bar{\Delta}_{j'}^1)|$. Последний из них равен $(-2)^s$. Легко видеть, что индексы пересечений $(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_{i'}^0)$ и $(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_{k'}^2)$ принадлежат множеству полуцелых чисел $(1/2 \cdot \mathbb{Z})$. Поэтому $|(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_{i'}^0)| \cdot |(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_{k'}^2)| \in \in 2^{-s+(r-1)} \cdot \mathbb{Z}$, откуда следует, что определитель $D(f) = \pm 2^s \cdot |(\bar{\Delta}_i^0 \circ \bar{\Delta}_{i'}^0)| \times \times |(\bar{\Delta}_k^2 \circ \bar{\Delta}_{k'}^2)|$ принадлежит множеству $2^{r-1}\mathbb{Z}$, что и требовалось доказать.

Например, для особенности A_k ($f(x, y) = x^{k+1} + y^2$) определитель $D(f)$ равен $(-1)^k(k + 1)$.

Приведем еще один пример применения частичной диагонализации квадратичной формы особенности функции двух переменных. Рассмотрим особенность функции $f(x, y) = x^5 + x^2y^2 + y^5$. Она эквивалентна особенности функции $(x^3 + y^2)(x^2 + y^3)$. Вещественное шевеление кривой $\{f(x, y) = = 0\}$, имеющее только вещественные простые двойные самопересечения,

изображено на рис. 110. Кратность особенности f равна 11. В базисе $\bar{\Delta}_m^\sigma$, определенном выше, квадратичная форма особенности f распадается в прямую сумму трех квадратичных форм. Одна из них — на шестимерном подпространстве, порожденном элементами $\bar{\Delta}_j^1$, — является отрицательно определенной. Вторая — на одномерном подпространстве, порожденном элементом $\bar{\Delta}^2$, которому на рис. 110 соответствует четырехугольник U^2, — является нулевой. Наконец, третья — на четырехмерном подпространстве, порожденном элементами $\bar{\Delta}_1^0, \dots, \bar{\Delta}_4^0$, которым на рис. 110 соответствуют «одноугольники» и треугольники $U_1^0, \dots, U_4^0$. При этом $(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_1^0) = (\bar{\Delta}_4^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = -3/2$, $(\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = -1/2$, $(\bar{\Delta}_1^0 \circ \bar{\Delta}_2^0) = (\bar{\Delta}_2^0 \circ \bar{\Delta}_3^0) = (\bar{\Delta}_3^0 \circ \bar{\Delta}_4^0) = 1/2$ (см. рис. 111, где указаны индексы самопересечений и индексы пересечений базисных элементов $\bar{\Delta}_i^0$, умноженные для удобства на два). Такая форма легко диагонализируется и имеет положительный индекс инерции, равный 1, а отрицательный — равный 3. Отсюда следует, что квадратичная форма особенности f имеет положительный индекс инерции $\mu_+ = 1$, нулевой $\mu_0 = 1$ и отрицательный $\mu_- = \mu - 2 = 9$. Поэтому эта особенность является гиперболической в смысле ч. I.

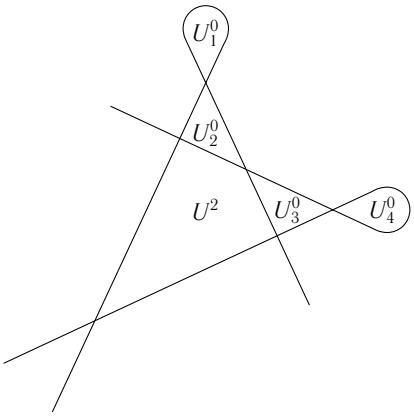


Рис. 110

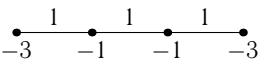


Рис. 111

§ 27. Формы пересечений краевых особенностей и топология полных пересечений

В этом параграфе будут кратко изложены некоторые обобщения, связанные в основном с понятиями формы пересечений и исчезающих циклов, для особенности функций на многообразии с краем, для полных пересечений и т. д.

27.1. Особенности с действиями конечных групп. Некоторые понятия и результаты, изложенные в предыдущих параграфах, могут быть обобщены на случай, когда рассматривается росток функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, инвариантный относительно линейного действия конечной группы G на пространстве $\mathbb{C}^n$. Кроме того, на этом пути естественным образом возникают

особенности, соответствующие алгебрам Ли B_k, C_k, F_4 и G_2, корневые системы которых содержат векторы разной длины.

Пусть имеется линейное представление конечной группы G на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$. Преобразование пространства $\mathbb{C}^n$, соответствующее элементу g группы G, мы будем обозначать через T_g. Предположим, что $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток функции, инвариантный относительно действия группы G, т. е. такой, что $f(T_g x) = f(x)$ для $g \in G$. В этом случае группа G действует на неособом многообразии уровня $V_\varepsilon = f^{-1}(\varepsilon) \cap \bar{B}_\rho$ функции f вблизи критической точки, а тем самым — на его группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ с коэффициентами в группах $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

В случае, когда f — обычная особенность функции (т. е. когда группа G тривиальна), кратностью особенности f называется размерность пространства $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ (или $H_{n-1}(V_\varepsilon, \mathbb{C})$). Естественным аналогом размерности для случая, когда группа G не тривиальна, является G-модуль $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})]$ (или $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})]$) как элемент кольца $R_{\mathbb{R}}(G)$ (соответственно $R_{\mathbb{C}}(G)$) вещественных (соответственно, комплексных) представлений группы G (см. [201]). Будем обозначать через $[H]$ элемент $[H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})]$ кольца $R(G) = R_{\mathbb{C}}(G)$ комплексных представлений группы G.

Пусть $\mathcal{O}_n$ — кольцо ростков в нуле голоморфных функций n переменных, $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ — якобиев идеал ростка f, т. е. идеал, порожденный частными производными функции f. Размерность факторкольца Q_f кольца $\mathcal{O}_n$ по якобиеву идеалу $(\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ (как комплексного векторного пространства) совпадает с кратностью особенности f. Действие группы G на пространстве $\mathbb{C}^n$ определяет ее представление на кольце $\mathcal{O}_n$. В случае, когда росток f инвариантен относительно действия группы G, это представление естественным образом определяет представление группы G на векторном пространстве Q_f. Как уже говорилось, размерности векторных пространств $H = H_{n-1}(v_\varepsilon; \mathbb{C})$ и Q_f совпадают. Соотношение между $[H]$ и $[Q_f]$ как элементами группы $R(G)$ выявлено в [488].

На пространстве $\mathbb{C}^n$, на котором определен росток функции f, линейно действует группа G. Поэтому она действует и на его n-й внешней степени $\lambda^n\mathbb{C}^n$, которая является одномерным векторным пространством. Действие элемента $g \in G$ на пространстве $\lambda^n\mathbb{C}^n$ совпадает с умножением на определитель $\det T_g$ оператора T_g.

Представлению группы G на векторном пространстве V соответствует ее представление на двойственном векторном пространстве V^*. Например, представлению группы G на пространстве $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ гомологий неособого многообразия уровня соответствует двойственное представление на пространстве $H^* = H^{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ когомологий неособого многообразия уровня.

Теорема 1 ([488]). *G-модули* (*т. е. векторные пространства с представлениями группы G*) *H и $Q_f^* \otimes_{\mathbb{C}} \lambda^n \mathbb{C}^n$ изоморфны.*

Изоморфизм, существование которого утверждается в теореме 1, определен не канонически.

В п. 25.5 указывалось, что вместо вычисления кратности особенности, т. е. размерности группы гомологий неособого многообразия уровня V_ε, часто бывает удобно вычислять его эйлерову характеристику $\chi(V_\varepsilon)$. Если X — топологическое пространство (для определенности — конечный клеточный комплекс), на котором действует группа G, то *эквивариантной эйлеровой характеристикой* $\chi_G(X)$ пространства X называется элемент $\sum\limits_q (-1)^q [H_q(X; \mathbb{C})]$ кольца $R(G)$ комплексных представлений группы G, где $[H_q(X; \mathbb{C})]$ — элемент кольца $R(G)$, определенный группой q-мерных гомологий пространства X с соответствующим представлением G. Эквивариантная эйлерова характеристика $\chi_G(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня V_ε равна $[\mathbb{C}] + (-1)^{n-1}[H]$, где $[\mathbb{C}]$ — элемент кольца $R(G)$, определенный одномерным пространством $\mathbb{C}$ с тривиальным представлением группы G (группа $H_0(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ нульмерных гомологий неособого многообразия уровня одномерна, а представление группы G на ней тривиально).

Если действие группы G согласовано со структурой клеточного комплекса на пространстве X, то на векторном пространстве $C_q(X; \mathbb{C})$ q-мерных клеточных цепей пространства X с коэффициентами в поле $\mathbb{C}$ определено естественное представление группы G. Можно показать, что, по аналогии с соотношением $\chi(X) = \sum\limits_q (-1)^q \dim C_q(X; \mathbb{C})$ для обычной эйлеровой характеристики, для эквивариантной эйлеровой характеристики имеет место формула $\chi_G(X) = \sum\limits_q (-1)^q [C_q(X; \mathbb{C})]$.

Известно (см., например, [201]), что элемент $[V]$ из кольца $R(G)$ комплексных представлений группы G определяется своим характером $[V](g) = \operatorname{tr} T_g|_V$ как функцией на группе G ($\operatorname{tr} T_g|_V$ — след оператора $T_g|_V$). Если X — клеточный комплекс с действием группы G, согласованным со структурой клеточного комплекса, то значение $\chi_G(X)(g)$ характера элемента $\chi_G(X) \in R(G)$ на $g \in G$ совпадает с (обычной) эйлеровой характеристикой $\chi(X_g)$ множества X_g неподвижных точек действия элемента g на пространстве X. Это вытекает из того, что вне множества X_g элемент g переставляет клетки и поэтому эти клетки дают нулевой вклад в $\operatorname{tr}(g_*|_{C_q(V_\varepsilon;\mathbb{C})})$. Клетки же, лежащие в X_q, остаются на месте и дают в $\operatorname{tr}(g_*|_{C_q(V_\varepsilon;\mathbb{C})})$ единичный вклад.

Отсюда следует следующее утверждение.

Теорема 2. *Характер эквивариантной эйлеровой характеристики неособого многообразия уровня особенности f определяется формулой $\chi_G(V_\varepsilon)(g) = 1 + (-1)^{d_g - 1} \mu_g$, где d_g — размерность подпро-*

странства пространства $\mathbb{C}^n$, на котором элемент $g \in G$ действует тривиально, μ_g — кратность ограничения функции f на это подпространство.

Кратность μ_g определена, поскольку если функция f имеет изолированную критическую точку в нуле в пространстве $\mathbb{C}^N$, то и на подпространствах, неподвижных относительно элемента $g \in G$, она также имеет изолированные критические точки.

Следствие. *Характер естественного представления группы G на пространстве гомологий $H = H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{C})$ неособого многообразия уровня определяется формулой* $[H](g) = (-1)^{n-d_g}\mu_g$.

Если G — конечная подгруппа унитарной группы $U(n)$, порожденная отражениями, то $\mathbb{C}^n/G \cong \mathbb{C}^n$. Росток функции $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, инвариантный относительно действия группы G, определяет росток функции f_* на $(\mathbb{C}^n/G, 0) \cong (\mathbb{C}^n, 0)$.

Теорема 3 ([488]). *Имеет место равенство*

$$\mu(f_*) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(-1)^{n-d_g}\mu_g,$$

где $|G|$ — количество элементов в группе G.

Пример. Пусть $G = \mathbb{Z}_2$ — группа из двух элементов, действующая на пространстве $\mathbb{C}^n$ с координатами $x_1, \dots, x_n$ по формуле $\sigma(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($\sigma \in \mathbb{Z}_2$ — неединичный элемент группы). Изоморфизм пространства $\mathbb{C}^n/\mathbb{Z}_2$ с пространством $\mathbb{C}^n$ с координатами $y_1, \dots, y_n$ определяется формулами $y_1 = x_1^2$, $y_i = x_i$ при $2 \leqslant i \leqslant n$. В этом случае $|G| = 2$, подпространство пространства $\mathbb{C}^n$, инвариантное относительно преобразования σ, совпадает с $(n-1)$-мерным пространством $\{x_1 = 0\}$. Из теоремы 3 следует, что $\mu(f_*) = \frac{1}{2}(\mu(f) - \mu(f\{x_1 = 0\})$, где $\mu(f|_{\{x_1=0\}})$ — кратность ограничения ростка f на подпространство $\{x_1 = 0\}$. Нетрудно видеть, что $f|\{x_1 = 0\} = f_*|_{\{y_1=0\}}$. Поэтому $\mu(f) = 2\mu(f_*) + \mu(f_*|_{\{y_1=0\}})$.

Рассмотрим действие группы $\mathbb{Z}_2$ в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ неособого многообразия уровня функции f. Группа $\mathbb{Z}_2$ имеет два неприводимых вещественных представления: тривиальное и умножение на (-1). Поэтому группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon; \mathbb{R})$ распадается в прямую сумму $H^+ \oplus H^-$, где H^+ — пространство инвариантных относительно инволюции σ_* циклов, а H^- — пространство антиинвариантных циклов; $\dim H^+ + \dim H^- = \mu(f)$.

Следствие из теоремы 2 дает $[H](\sigma) = \dim H^+ - \dim H^- = -\mu(f|_{\{x_1=0\}}) = -\mu(f_*|_{\{y_1=0\}})$. Так как $\dim H^+ + \dim H^- = 2\mu(f_*) + \mu(f_*|_{\{y_1=0\}})$, получаем, что $\dim H^+ = \mu(f_*)$, $\dim H^- = \mu(f_*) + \mu(f_*|_{\{y_1=0\}})$.

Эти формулы могут быть доказаны и непосредственно (без использования теорем 2 и 3), что оставляется в качестве упражнения для читателя.

Классификация особенностей функций, инвариантных относительно такого действия циклической группы $\mathbb{Z}_2$, совпадает с классификацией особенностей функций на многообразии с краем (см. ч. I, § 17). Классификация особенностей малой коразмерности функций, инвариантных относительно действия группы $(\mathbb{Z}_2)^q$ (интерпретируемая как классификация особенностей функций на многообразии с «углами»), рассматривалась, в частности, в [455].

27.2. Особенности функций на многообразии с краем. Здесь будут вкратце изложены аналоги некоторых обсуждавшихся понятий для особенностей функций на многообразии с краем. Более подробное изложение и мотивировку введения соответствующих понятий можно найти в [22].

Пусть f — особенность функции на многообразии с краем (см. ч. I, § 17). Это означает, что f — росток голоморфной функции $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ на комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^n$, в котором зафиксирована гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$, причем как на пространстве $\mathbb{C}^n$, так и на подпространстве $\mathbb{C}^{n-1}$ функция f имеет изолированную критическую точку в нуле (или вообще не имеет критической точки в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$). Можно считать, что гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$ задается уравнением $x_1 = 0$, где $x_1, \dots, x_n$ — координаты на пространстве $\mathbb{C}^n$.

Пусть $\hat{\mathbb{C}}^n$ — двулистное накрытие пространства $\mathbb{C}^n$, ветвящееся вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1}$. Если $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ — координаты в пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$, то разветвленное накрытие $\hat{\mathbb{C}}^n \to \mathbb{C}^n$ определяется формулами $x_1 = \hat{x}_1^2$, $x_2 = \hat{x}_2, \dots, x_n = \hat{x}_n$. На пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$ имеется естественная инволюция $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, т. е. определено действие циклической группы $\mathbb{Z}_2$ второго порядка. Ростку f отвечает росток $\hat{f}$ $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) = f(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$ функции на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$, который инвариантен относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$. Локальному аналитическому автоморфизму пространства $\mathbb{C}^n$, сохраняющему подпространство $\mathbb{C}^{n-1}$, отвечает эквивариантный относительно действия группы $\mathbb{Z}_2$ локальный аналитический автоморфизм пространства $\hat{\mathbb{C}}^n$. Таким образом, особенности функций на многообразии с краем естественным образом можно рассматривать как ростки функций $\hat{f}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$, инвариантных относительно инволюции $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \mapsto (-\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)$. Наоборот, каждому такому ростку отвечает особенность функции на многообразии $\mathbb{C}^n$ с краем $\mathbb{C}^{n-1}$.

Особенности f функции на многообразии с краем можно сопоставить неособые многообразия уровня двумя способами. Самой функции f соответствует ее неособое многообразие уровня $V_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^n \colon f(x) = \varepsilon,\ \|x\| \leqslant \rho\}$, являющееся $(n-1)$-мерным комплексным многообразием с границей (понимаемой в обычном вещественном смысле). Краю $\mathbb{C}^{n-1}$ соответствует $(n-2)$-мерное комплексное подмногообразие $V'_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \colon f(x) = \varepsilon,$

$\|x\| \leqslant \rho\}$ — неособое многообразие уровня ограничения функции f на гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$.

Из точной гомологической последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$

$$\ldots \to H_{n-1}(V'_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V_\varepsilon) \to \ldots,$$

в которой $H_k(V_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_k(V'_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-2$, следует, что $H_k(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) = 0$ при $k \neq n-1$, $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ — свободная абелева группа, размерность которой равна сумме кратностей критической точки функции f на пространстве $\mathbb{C}^n$ и критической точки ее ограничения на пространство $\mathbb{C}^{n-1}$. Из общих теорем гомотопической топологии следует (по крайней мере при количестве переменных $n > 2$, когда пространство $V_\varepsilon / V'_\varepsilon$ односвязно; для $n = 2$ доказательство еще проще), что факторпространство $V_\varepsilon / V'_\varepsilon$ имеет гомотопический тип букета нескольких сфер. Количество $\mu = \mu(f|_{x_1})$ этих сфер называется *кратностью* краевой особенности f (в обозначении зафиксирована сама функция и координата, обращающаяся в нуль на краю $\mathbb{C}^{n-1}$). Как показано, кратность $\mu(f|_{x_1})$ краевой особенности равна сумме $\mu(f) + \mu(f|_{\{x_1=0\}})$ кратностей особых точек функции f на пространствах $\mathbb{C}^n$ и $\mathbb{C}^{n-1}$.

Базис в группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ может быть построен следующим образом. Пусть $\tilde{f}$ — шевеление особенности f общего вида. Последнее означает, что функция $\tilde{f}$ на пространстве $\mathbb{C}^n$ и ее ограничение $\tilde{f}|_{\mathbb{C}^{n-1}}$ на край $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ являются морсовскими и, кроме того, критические значения функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$ различны. В частности, функция $\tilde{f}$ не имеет критических точек, лежащих на гиперплоскости $\{x_1 = 0\}$. Пусть $\mu(f) = \mu_0$, $\mu(f|_{\{x_1=0\}}) = \mu_1$, $z_1, \ldots, z_{\mu_0}$ — критические значения функции $\tilde{f}$ в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$, $z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$ — критические значения ограничения функции $\tilde{f}$ на подпространство $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$, z_0 — некритическое значение функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$. Пусть $F_{z_0} = \{x \in \mathbb{C}^n : \tilde{f}(x) = z_0, \|x\| \leqslant \rho\}$ и $F'_{z_0} = F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$ — неособые многообразия уровня функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$. Как и для обычных особенностей функций, при выполнении естественных ограничений пара многообразий (F_{z_0}, F'_{z_0}) диффеоморфна паре $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Если u — путь, соединяющий некоторое критическое значение z_i функции $\tilde{f}$ с некритическим значением z_0 (и не проходящий через критические значения функций $\tilde{f}$ и $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$), то, как и раньше, ему соответствует исчезающий цикл Δ в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0})$ неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}$, изоморфной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня функции f. При этом, поскольку путь u не проходит через критические значения функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, поднятие гомотопии $t \mapsto u(t)$ до гомотопии слоя может быть выбрано так, что оно сохраняет подмногообразия $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. В этом случае цикл Δ целиком лежит вне подмногообразия $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$.

Из точной последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ следует, что естественный гомоморфизм $i_*\colon H_{n-1}(V_\varepsilon) \to H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, индуцированный вложением $V_\varepsilon \hookrightarrow (V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, является мономорфизмом. Поэтому пути u отвечает исчезающий цикл в относительных гомологиях $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ неособого многообразия уровня по модулю подмногообразия $\{x_1 = 0\}$.

Если u — путь, соединяющий критическое значение z'_j функции $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$ (не являющееся критическим для функции $\tilde f$) с некритическим значением z_0 ($u(0) = z'_j$, $u(1) = z_0$) и не проходящий через критические значения функций $\tilde f$ и $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$, то ему соответствует исчезающий «полуцикл» $\Delta' \in H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, определяемый следующим способом. Пусть $p'_j \in \mathbb{C}^{n-1}$ — критическая точка функции $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$, $\tilde f(p'_j) = z'_j$. Можно показать, что в окрестности точки p'_j локальной заменой координат, сохраняющей гиперплоскость $\{x_1 = 0\}$, функция $\tilde f$ может быть приведена к виду $\tilde f = -x_1 + \sum\limits_{k=2}^{n} x_k^2 + z'_j$. Без потери общности можно считать, что $z'_j = 0$ и что для малых t выполняется равенство $u(t) = t$. В этом случае для малых $t > 0$ на неособом многообразии уровня $F_{u(t)} = \{\tilde f = t\}$ имеется $(n-1)$-мерное вещественное подмногообразие $D^{n-1}(t)$ с краем, определяемое соотношениями $\operatorname{Im} x_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\sum\limits_{k=2}^{n} x_k^2 \leqslant t$, $x_1 = \sum\limits_{k=2}^{n} x_k^2 - t \leqslant 0$ (см. рис. 112 для $n = 2$). Многообразие $D^{n-1}(t)$ диффеоморфно $(n-1)$-мерному шару. Его граница ($(n-2)$-мерная сфера) лежит на подмногообразии $F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$. Изменение t от 0 до 1 определяет непрерывное семейство $(n-1)$-мерных дисков $D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)'}$, для которых $S^{n-2}(t) = \partial D^{n-1}(t) \subset F_{u(t)} \cap \{x_1 = 0\}$ для всех значений $t \in [0, 1]$. При этом $D^{n-1}(t) \cap \{x_1 = 0\} = \partial D^{n-2}(t)$. Диск $D^{n-1}(1) \subset F_{z_0}$ с границей $\partial D^{n-1}(t) = S^{n-2}(t)$, лежащий в подмногообразии $F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\}$, определяет относительный цикл Δ' в группе гомологий $H_{n-1}(F_{z_0}, F_{z_0} \cap \{x_1 = 0\})$, изоморфной группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

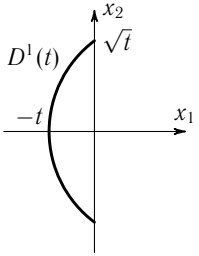


Рис. 112

Пусть $u_1, \ldots, u_{\mu_0}$ (соответственно $u_1, \ldots, u'_{\mu_1}$) — система путей, соединяющих критические значения $z_1, \ldots, z_{\mu_0}$ (соответственно $z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$) функции $\tilde f$ (соответственно $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$) с некритическим значением z_0, и определяющая в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\tilde f$ (соответственно $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$) отмеченный базис исчезающих циклов. При этом будем предполагать, что пути $u_1, \ldots, u_{\mu_0}, u'_1, \ldots, u'_{\mu_1}$ не проходят через критические значения $z_1, \ldots, z_{\mu_0}, z'_1, \ldots, z'_{\mu_1}$ функций $\tilde f$ и $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$ (при $t \neq 0$).

Как объяснено выше, такие системы путей определяют набор исчезающих циклов $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}$ и набор исчезающих полуциклов $\Delta_1, \dots, \Delta'_{\mu_1}$ в относительной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$). Граничный гомоморфизм $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon) \to H_{n-2}(V'_\varepsilon)$ пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ переводит исчезающий полуцикл Δ'_j в исчезающий цикл в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\tilde{f}|_{\{x_1=0\}}$, соответствующий пути u'_j. Отсюда и из точной последовательности пары $(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ следует, что набор элементов $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}, \Delta'_1, \dots, \Delta_{\mu_1}$ образует базис в относительной группе гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$.

Можно показать, что размерность группы гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ совпадает с размерностью базы миниверсальной деформации краевой особенности $f|_{x_1}$, которая равна $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n/(x_1\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)$, где $\mathcal{O}_n$ — кольцо ростков голоморфных функций в нуле в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Все сказанное выше подсказывает, что относительная группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ краевой особенности должна играть ту же роль, что и абсолютная группа гомологий $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ обычных особенностей. Однако оказывается, что на группе $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ нельзя инвариантным образом определить форму пересечений и получить аналог формулы Пикара—Лефшеца. Это вынуждает вместо нее иметь дело с другой группой, также изоморфной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^\mu = \mathbb{Z}^{\mu_0+\mu_1}$ размерности $\mu = \mu(f|_{x_1})$, но не имеющей канонически определенного изоморфизма с группой $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Эта группа определяется следующим способом.

Краевой особенности f можно поставить в соответствие еще одно неособое многообразие уровня — многообразие уровня $\hat{V}_\varepsilon$ соответствующей инвариантной относительно группы $\mathbb{Z}_2$ функции $\hat{f}$ на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$. На этом многообразии уровня определено действие инволюции, индуцированное из ее действия на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^n$. Факторпространство пространства $\hat{V}_\varepsilon$ по действию этой инволюции совпадает с многообразием уровня V_ε функции f. Многообразие $\hat{V}_\varepsilon$ является разветвленным накрытием над многообразием V_ε с ветвлением вдоль подмногообразия V'_ε. При этом $\dim H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon) = 2\dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$ (см. пример в п. 27.1). В группе гомологий $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon, \mathbb{Z})$ выделяются два подпространства H^+ и H^-, соответствующие двум возможным неприводимым вещественным представлениям группы $\mathbb{Z}_2$. Подпространство H^+ состоит из инвариантных относительно действия инволюции σ классов гомологий (т. е. таких, что $\sigma_* a = a$), а подпространство h^- — из антиинвариантных ($\sigma_* a = -a$). В примере в п. 27.1 показано, что $\dim H^+ = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon)$, $\dim H^- = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon) + \dim H_{n-2}(V'_\varepsilon) = \dim H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$. Группа H^-, изоморфная целочисленной решетке размерности $\mu(f|_{\{x_1=0\}})$, играет для краевых особенностей роль, которую группа $H_{n-1}(V_\varepsilon)$ играет для обычных особенностей. В частности, на ней (как на подгруппе группы $H_{n-1}(\hat{V}_\varepsilon)$ гомологий неособого многообразия) определена форма пересечений.

Базис группы H^- может быть построен следующим образом. Пусть $\Delta_1, \dots, \Delta_{\mu_0}$, $\Delta'_1, \dots, \Delta'_{\mu_1}$ — базис из исчезающих циклов и полуциклов группы $H_{n-1}(V_\varepsilon, V'_\varepsilon)$, построенный выше по системе путей $u_1, \dots, u_{\mu_0}$, $u'_1, \dots, u'_{\mu_1}$, соединяющих критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}$, $z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$ функций $\tilde f$ и $\tilde f|_{\{x_1=0\}}$ с некритическим значением z_0. Прообраз цикла Δ_i ($i = 1, \dots, \mu_0$) при отображении $\hat V_\varepsilon \to V_\varepsilon$ (являющемся двулистным разветвленным накрытием, ветвящимся вдоль подмногообразия V'_ε) состоит из двух циклов $\Delta_i^{(1)}$ и $\Delta_i^{(2)}$, каждый из которых изоморфно проектируется на цикл Δ_i. Их разность $\hat\Delta_i = \Delta_i^{(1)} - \Delta_i^{(2)}$ является антиинвариантным циклом в гомологиях многообразия $\hat V_\varepsilon$. Прообраз полуцикла Δ'_j также состоит из двух полуциклов $\Delta_j'^{(1)}$ и $\Delta_j'^{(2)}$, изоморфно проектирующихся на Δ'_j, однако полуциклы $\Delta_j'^{(1)}$ и $\Delta_j'^{(2)}$ имеют общую границу (лежащую на многообразии ветвления). Поэтому их разность $\hat\Delta'_j = \Delta_j'^{(1)} - \Delta_j'^{(2)}$ также является абсолютным антиинвариантным циклом в гомологиях многообразия $\hat V_\varepsilon$. Циклы $\hat\Delta_1, \dots, \hat\Delta_{\mu_0}$, $\hat\Delta'_1, \dots, \hat\Delta'_{\mu_1}$ образуют базис в группе H^- антиинвариантных классов гомологий.

Их можно описать также следующим способом. Рассмотрим функцию $\hat{\tilde f}(\hat x_1, \dots, \hat x_n) = \tilde f(\hat x_1^2, \hat x_2, \dots, \hat x_n)$. Она имеет $\mu_0 + \mu_1$ критических значений $z_1, \dots, z_{\mu_0}, z'_1, \dots, z'_{\mu_1}$. При этом критические значения $z_1, \dots, z_{\mu_0}$ дважды вырождены и принимаются в парах различных критических точек. Каждому из этих критических значений (z_i) соответствуют два исчезающих цикла $\hat\Delta_i^1$ и $\hat\Delta_i^2$. При этом можно считать, что $\sigma_*\hat\Delta_i^1 = \hat\Delta_i^2$. Критическому значению z'_j соответствует один исчезающий цикл Δ'_j. Нетрудно видеть, что $\sigma_*\hat\Delta'_j = -\hat\Delta'_j$. Циклы $\hat\Delta_i = \hat\Delta_i^1 - \hat\Delta_i^2$, а также циклы $\hat\Delta'_j$ являются антиинвариантными, а циклы $\hat\Delta_i^1 + \hat\Delta_i^2$ — инвариантными относительно действия инволюции σ. Набор циклов $\{\hat\Delta_i, \hat\Delta'_j\}$ совпадает с описанным выше.

Таким образом, для краевых особенностей определена целочисленная решетка H^- с формой пересечений на ней. Базис решетки H^-, построенный по системе путей $\{u_i, u'_j\}$, соединяющих критические значения z_i и z'_j функции $\hat{\tilde f}$ с некритическим значением z_0, содержит μ_0 «длинных» исчезающих циклов $\hat\Delta_i$ ($= \Delta_i^{(1)} - \Delta i^{(2)}$) и μ_1 «коротких» исчезающих циклов $\hat\Delta'_j$. Если количество переменных n сравнимо с 3 по модулю 4, то $(\hat\Delta_i \circ \hat\Delta_i) = -4$, $(\hat\Delta'_j \circ \hat\Delta'_j) = -2$.

На решетке H^- действует группа монодромии, являющаяся образом естественного представления $\pi_1(\mathbb{C} - \{z_i, z'_j\}) \to \operatorname{Aut} H^-$ фундаментальной группы дополнения к множеству критических значений функции $\hat{\tilde f}$. Группа монодромии порождена операторами монодромии, отвечающими простым петлям τ_i и τ'_j, соответствующим путям u_i и u'_j. При этом про-

стой петле τ'_j соответствует обычный оператор Пикара—Лефшеца $h'_j(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta'_j)\Delta'_j$, а петле τ_i — оператор Пикара—Лефшеца $h_i(a) = a + (-1)^{n(n+1)/2}(a \circ \Delta_i)\Delta_i/2$. Заметим, что индекс пересечения $(a \circ \Delta_i)$ антиинвариантного цикла $a \in H^-$ с длинным исчезающим циклом Δ_i всегда четен. При $n \equiv 1 \bmod 2$ операторы h_i и h'_j являются отражениями в гиперплоскостях, ортогональных (в смысле формы пересечений) исчезающим циклам Δ_i и Δ'_j соответственно.

Для краевых особенностей, как и для обычных, определены миниверсальная деформация и бифуркационные диаграммы множеств и функций. Миниверсальная деформация краевой особенности $f|_{x_1}$ может быть задана в виде

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{\mu} \lambda_i \varphi_i(x) \quad (x \in \mathbb{C}^n, \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu) \in \mathbb{C}^\mu),$$

где ростки $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mu$ порождают базис векторного пространства $\mathcal{O}_n \Big/ \left(x_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Множество (точнее, его росток в нуле) значений параметров $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$ в базе миниверсальной деформации, для которых либо соответствующая функция $F(\cdot, \lambda)$, либо ее ограничение на край $\mathbb{C}^{n-1} = \{x_1 = 0\}$ имеет нуль критическим значением, называется *бифуркационной диаграммой множеств* краевой особенности $f|_{x_1}$ (и обозначается Σ). Условие, выделяющее значения параметров $\lambda \in \Sigma$, может быть заменено на эквивалентное условие, состоящее в том, что нуль является критическим значением функции

$$\hat{F}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda) = F(\hat{x}_1^2, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n, \lambda).$$

Бифуркационная диаграмма множеств краевой особенности приводима. Она является объединением двух компонент. Первая состоит из тех значений параметров λ, для которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет нуль критическим значением, а вторая — из тех значений λ, для которых ее ограничение на край $\mathbb{C}^{n-1}$ имеет нуль критическим значением. Иногда удобнее бывает говорить, что вторая компонента состоит из тех значений λ, для которых гиперповерхность $\{x\colon F(x, \lambda) = 0\} \subset \mathbb{C}^n$ не трансверсальна к краю $\mathbb{C}^{n-1}$. Такая формулировка не требует специальных оговорок для случая $n = 1$.

Из того, что бифуркационная диаграмма множеств обычной особенности неприводима (теорема 2, п. 25.2), следует, что каждая из описанных компонент бифуркационной диаграммы множеств краевой особенности неприводима. Так же, как в теореме 4 п. 25.2, отсюда выводится, что группа монодромии краевой особенности транзитивно действует на множествах коротких и длинных исчезающих циклов (не перемешивая, конечно, их между собой).

Для простых краевых особенностей B_k, C_k, F_4 (ч. I, § 17) бифуркационная диаграмма множеств может быть получена способом, описанным в п. 25.3 для обычных особенностей функций. Это означает, что она биголоморфно эквивалентна многообразию нерегулярных орбит соответствующей группы, порожденной отражениями, действующей на комплексификации евклидова пространства. При этом зеркала двух типов (ортогональные к длинным и коротким корням соответственно) порождают две компоненты бифуркационной диаграммы множеств простой краевой особенности.

Покажем, как это проверяется для простых особенностей типа B_k ($f(x_1) = x_1^k$, $n = 1$) и C_k ($f(x_1, x_2) = x_1x_2 + x_2^k$, $n = 2$). Их миниверсальные деформации могут быть заданы в виде

$$F = x_1^k + \lambda_1 x_1^{k-1} + \ldots + \lambda_k \quad \text{для} \quad B_k,$$
$$F = x_1x_2 + x_2^k + \lambda_1 x_2^{k-1} + \ldots + \lambda_k \quad \text{для} \quad C_k.$$

И в том и в другом случае нуль не является критическим значением функции $F(\cdot, \lambda)$, если многочлен $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ не имеет кратных корней, и локальное многообразие уровня функции $F(\cdot, \lambda)$ трансверсально к краю $\{x_1 = 0\}$, если нуль не является корнем этого многочлена. Таким образом, бифуркационные диаграммы множеств особенностей B_k и C_k отождествляются с пространством многочленов вида $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$, имеющих кратные либо нулевые корни.

Группы Вейля B_k и C_k одинаковы. Они состоят из преобразований пространства $\mathbb{R}^k$ (или его комплексификации $\mathbb{C}^k$), являющихся перестановками координат с произвольными изменениями их знаков. Зеркалами являются гиперплоскости $z_i = 0$ и $z_i = \pm z_j$. В одном случае первые из них соответствуют коротким циклам, а вторые — длинным; в другом — наоборот. Пространство орбит действия группы Вейля на комплексификации $\mathbb{C}^k$ отождествляется с пространством многочленов степени k вида $x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \ldots + \lambda_k$ (с комплексными коэффициентами), если точке $(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ сопоставить многочлен с корнями $z_1^2, \ldots, z_k^2$. Пространство многочленов степени k изоморфно k-мерному комплексному векторному пространству. Пространство нерегулярных орбит (т. е. образ объединения зеркал при отображении факторизации) состоит из многочленов с кратными либо нулевыми корнями, т. е. совпадает с бифуркационными диаграммами множеств особенностей B_k и C_k.

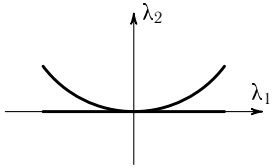


Рис. 113

Бифуркационные диаграммы множеств особенностей B_2 и C_2 состоят из двух кривых $\lambda_2 = 0$ и $4\lambda_2 = \lambda_1^2$ (рис. 113).

Описание базисов из исчезающих циклов и формы пересечений для простых краевых особенностей (и для других краевых особенностей двух переменных) может быть получено методами § 26. Можно показать, что для краевых особенностей имеются аналоги теорем 26.1, 26.3 и 26.4, однако мы не будем на этом останавливаться. Для простых особенностей B_k $(\pm x^k \pm y^2)$, C_k $(xy \pm y^k)$ и F_4 $(\pm x^2 + y^3)$ соответствующие эквивариантные ростки функций на накрытии $\hat{\mathbb{C}}^2$ пространства $\mathbb{C}^2$ задаются формулами $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^{2k} + \hat{y}^2$ для B_k, $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{y}(\hat{x}^2 - \hat{y}^{k-1})$ для C_k и $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) = \hat{x}^4 + \hat{y}^3$ для F_4 (выбор знаков произведен с таким расчетом, чтобы кривые $\{\hat{f} = 0\}$ были вещественными). Как обычные ростки функций они имеют особенности типов A_{2k-1}, D_{k+1} и E_6 соответственно. Легко построить шевеления $\tilde{\hat{f}}$ ростков функций $\hat{f}$ (или ростков кривых $\{\hat{f} = 0\}$), которые бы удовлетворяли условиям теоремы 26.1 и были бы инвариантными относительно инволюции, действующей на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^2$. В действительности этими свойствами будут обладать шевеления особенностей A_{2k-1}, D_{k+1} и E_6, использовавшиеся в § 26. Соответствующие вещественные кривые $\{\tilde{\hat{f}} = 0\}$ изображены на рис. 114. Пунктиром нанесена линия $x = 0$. Базис группы гомологий

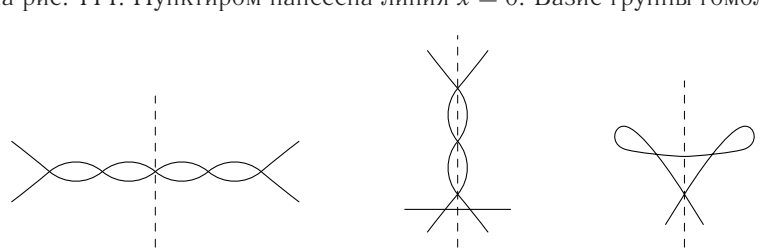


Рис. 114

локального многообразия уровня особенности $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y}) + \hat{t}^2$, описанный в теореме 26.1, инвариантен относительно инволюции σ: $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t}) \to (-\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$, действующей на пространстве $\hat{\mathbb{C}}^3$, в том смысле, что $\sigma_* \Delta = -\Delta$, если базисный исчезающий цикл Δ соответствует критической точке функции $\hat{f}(\hat{x}, \hat{y})$, лежащей на прямой $\{\hat{x} = 0\}$, и $\sigma_* \Delta_1 = \Delta_2$, если Δ_1 и Δ_2 — базисные исчезающие циклы, соответствующие критическим точкам, расположенным симметрично относительно прямой $\{\hat{x} = 0\}$. Отсюда сразу следует, что диаграммы Дынкина особенностей B_k, C_k и F_4 устроены так, как это показано на рис. 115. При этом правила чтения этих диаграмм несколько отличаются от правил п. 24.8. Стрелки на ребрах направлены от вершин, соответствующих длинным исчезающим циклам (с индексом самопересечения (-4)), к вершинам, соответствующим коротким исчезающим циклам (с индексом самопересечения (-2)). Индекс пересечения исчезающих

циклов, соответствующих вершинам, соединенным ребром кратности k, равен $2k$, если оба цикла длинные, и k — в противном случае (если оба короткие или один из них длинный, а другой — короткий). Для диаграмм особенностей B_k, C_k и F_4, приведенных на рис. 115, это означает, что угол между исчезающими циклами, соответствующими вершинам, соединенным ребром кратности 1, равен $2\pi/3$, а угол между исчезающими циклами, соответствующими вершинам, соединенным ребром кратности 2, равен $3\pi/4$.

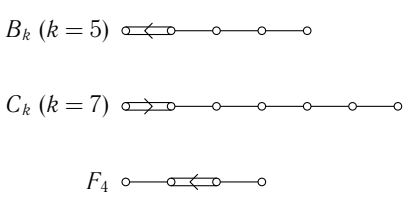


Рис. 115

И. Г. Щербак ([239]) показала, что переход от функции $f(x, y)$ с краем $\{x = 0\}$ к функции $f(x, y) + zx$ с краем $\{z = 0\}$ определяет на множестве классов стабильно эквивалентных краевых особенностей инволюцию, переставляющую особенность в некраевом смысле и сужение на край.

27.3. Топология полных пересечений. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_p)$: $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ — росток аналитического отображения, определяющий полное пересечение с изолированной особенностью в нуле ($n \geqslant p$, $f_i\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$). Это означает, что во всех точках ростка аналитического пространства $\{f = 0\}$ (т. е. $\{x \in \mathbb{C}^n\colon f_1(x) = \ldots = f_p(x) = 0\}$), кроме нулевой, отображение f имеет ранг, равный p, т. е. его дифференциал является эпиморфизмом, или, что то же самое, $\operatorname{rk}(\partial f_i/\partial x_j) = p$. Отсюда следует, что вне нуля пространство $\{f = 0\}$ является неособым $(n - p)$-мерным комплексным многообразием.

Аналогично лемме 1 п. 24.1 нетрудно показать, что существует такое $\rho > 0$, что для всех $0 < r \leqslant \rho$ сфера $S_r \subset \mathbb{C}^n$ радиуса r с центром в нуле трансверсально пересекается с многообразием $\{f = 0\}$. В этом случае для достаточны малых $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ ($\|z\| \leqslant \varepsilon_0$) пространство $\{f = z'\}$ будет трансверсально пересекаться со сферой S_ρ. Пространство $\{f = z\}$, вообще говоря, не является неособым при $z \neq 0$. Множество (точнее — росток) Σ тех точек $z \in \mathbb{C}^p$ ($\|z\| \leqslant \varepsilon_0$), для которых пространство $\{f = z\}$ имеет внутри шара B_ρ радиуса ρ с центром в нуле особые точки, называется дискриминантным множеством отображения f. Нетрудно видеть, что при $z \in \Sigma$ аналитическое пространство $\{f = z\}$ имеет внутри шара B_ρ только изолированные особенности. Из теоремы Сарда следует, что дополнение к множеству Σ всюду плотно в шаре $\{z\colon \|z\| \leqslant \varepsilon_0\} \subset \mathbb{C}^p$. Для $z \notin \Sigma$ ($\|z\| \leqslant \varepsilon_0$) пространство $F_z = \{f = z\} \cap B_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n\colon \|x\| \leqslant \rho, f(x) = z\}$ является неособым $(n - p)$-мерным комплексным многообразием с краем $\{f = z\} \cap S_\rho$. Для всех $z \notin \Sigma$, $\|z\| \leqslant \varepsilon_0$, многообразия F_z диффеоморфны между собой. Они называются *неособыми многообразиями уровня* отображения f.

Имеет место результат, аналогичный теореме 1 п. 24.1.

Т е о р е м а 4 ([346]). *Если росток отображения* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$ *определяет полное пересечение с изолированной особенностью в нуле, то неособое многообразие уровня* F_z *отображения* f *гомотопически эквивалентно букету нескольких сфер размерности* $(n-p)$.

Наметим основные идеи доказательства этой теоремы.

Для $p = 1$ утверждение теоремы 4 следует из теоремы 1 п. 24.1 и поэтому выполняется. Предположим, что оно уже доказано для отображений $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, определяющих полные пересечения размерности $(n-p+1)$ с изолированными особенностями в нуле. Особые точки отображения $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, т. е. точки $x \in \mathbb{C}^n$, для которых $\operatorname{rk}(\partial f_i/\partial x_j) < p$, образуют росток аналитического пространства S. Дискриминантное множество $(\Sigma, 0) \subset (\mathbb{C}^p, 0)$ является образом ростка пространства S при отображении f. Прообраз нуля при отображении $f|_S\colon S \to \mathbb{C}^p$ состоит из одной точки $0 \in \mathbb{C}^n$. Следовательно, отображение $f|_S$ является собственным (в достаточно малой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$), и поэтому росток дискриминантного множества Σ является ростком аналитического подпространства размерности (по крайней мере не больше, чем) $(p-1)$ в пространстве $(\mathbb{C}^p, 0)$. Отсюда вытекает, что для почти всех прямых $l \subset \mathbb{C}^p$, проходящих через нуль, пересечение $l \cap \Sigma$ имеет нуль изолированной точкой. Зафиксируем одну из таких прямых. Мы можем считать, что ε_0 выбрано столь малым, что внутри шара $\{\|z\| \leqslant \varepsilon_0\}$ в пространстве $\mathbb{C}^p$ пересечение $l \cap \Sigma$ состоит из одной точки $0 \in \mathbb{C}^p$. Сделав, если необходимо, линейную замену системы координат $z_1, \ldots, z_p$ в пространстве $\mathbb{C}^p$, мы можем считать, что она выбрана так, что прямая l совпадает с координатной осью $z_1 = \ldots = z_{p-1} = 0$. В этом случае подпространство $f^{-1}(l) \subset (\mathbb{C}^n, 0)$, которое совпадает с нулевым многообразием уровня отображения $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1})\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, является полным пересечением размерности $(n-p+1)$ с изолированной особой точкой в нуле. Мы показали, что почти все линейные замены системы уравнений $f_1 = \ldots = f_p = 0$, определяющей полное пересечение размерности $(n-p)$ с изолированной особенностью в нуле, приводят к такой системе уравнений, что первые $(p-1)$ из них $(f_1 = \ldots = f_{p-1} = 0)$ также определяют полное пересечение (размерности $(n-p+1)$) с изолированной особенностью в нуле.

По предположению индукции для почти всех достаточно малых $z' = (z_1, \ldots, z_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ множество $F' = F'_{z'} = (f')^{-1}(z') \cap B_\rho$ является неособым $(n-p+1)$-мерным комплексным многообразием с краем и гомотопически эквивалентно букету нескольких сфер размерности $(n-p+1)$. Можно показать, что для достаточно малых z' вся нетривиальность

гомотопического типа пространства $F'_{z'}$ сосредоточена в малой окрестности нуля. Более точно это означает, в частности, что для $\|z'\| \ll \varepsilon_p^0$ пространство $F' = F'_{z'}$ гомотопически эквивалентно своему подпространству $F'' = F' \cap f_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}) = \{x \in F' \colon f_p(x) \leqslant \varepsilon_p^0\}$. Для доказательства этого нужна некоторая аккуратность в проведении индукции, останавливаться на которой мы не будем.

Ограничение $f_p|_{F'}$ функции f_p на F' определяет отображение многообразия F' в комплексную прямую $\mathbb{C}$, обладающее свойствами, описанными в п. 23.1 (с кругом $\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}$ в качестве области U). Функция $f_p|_{F'}$, вообще говоря, может иметь вырожденные критические точки. Заменив функцию $f_p|_{F'}$ на ее малое шевеление $\tilde{f}_p$, мы получим функцию на многообразии F', также обладающую указанными свойствами. Мы можем считать, что на пространстве $\tilde{F}'' = \tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\})$ функция $\tilde{f}_p$ имеет только невырожденные критические точки в количестве ν_0 штук с различными критическими значениями $z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}$, лежащими внутри круга $\{|z_p| < \varepsilon_p^0\}$. Пространство $\tilde{F}''$ диффеоморфно пространству F'' и поэтому имеет гомотопический тип букета нескольких сфер размерности $(n-p+1)$. Неособые многообразия уровня $\tilde{f}_p^{-1}(z_p)$ функции $\tilde{f}_p$ на многообразии F' диффеоморфны неособым многообразиям уровня функции $f_p|_{F'}$ (при $|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0$), которые совпадают с неособыми многообразиями уровня отображения f.

Мы получили ситуацию, очень похожую на ту, которая рассматривалась при доказательстве теоремы 1 п. 24.1. Роль функции $\tilde{f}$ на шаре B_ρ в пространстве $\mathbb{C}^n$ играет функция $\tilde{f}_p$ на многообразии F'. Над дополнением к множеству $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}\}$ ее критических значений в круге $\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}$ функция $\tilde{f}_p$ определяет локально тривиальное расслоение, слоями которого являются неособые многообразия уровня отображения f. Единственное отличие состоит в том, что прообраз круга $\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}$ при отображении $\tilde{f}_p$ не стягиваем, а гомотопически эквивалентен букету нескольких (μ_1) сфер размерности $(n-p+1)$. Пусть $z^{(0)}$ — некритическое значение функции $\tilde{f}_p$ с $|z^{(0)}| = \varepsilon_p^0$, $\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)}) = F$, $\tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\}) = \tilde{F}''$ (пространство $\tilde{F}''$ гомотопически эквивалентно букету μ_1 сфер размерности $(n-p+1)$).

Выберем систему путей u_i $(i = 1, \ldots, \nu_0)$, соединяющих критические значения $z^{(1)}, \ldots, z^{(\nu_0)}$ функции $\tilde{f}_p$ с некритическим значением $z^{(0)}$ и удовлетворяющих условиям, сформулированным в определении отмеченного базиса (п. 23.2). Это означает, что пути u_i являются несамопересекающимися и не имеют общих точек, отличных от выбранного некритического значения $z^{(0)}$. Как и раньше, такая система путей определяет набор из ν_0 исчезающих циклов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ в группе $H_{n-p}(F; \mathbb{Z})$ гомологий неособого мно-

гообразия уровня F отображения f. Проводя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1 п. 24.1, мы получаем, что:

1) пространство $\tilde{F}'' = \tilde{f}_p^{-1}(\{|z_p| \leqslant \varepsilon_p^0\})$ гомотопически эквивалентно своему подпространству $X = \tilde{f}_p^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{\nu_0}\{u_i(t)\}\right)$, являющемуся прообразом объединения путей u_i;

2) факторпространство $X/F = X/\tilde{f}_p^{-1}(z^{(0)})$ гомотопически эквивалентно букету ν_0 сфер размерности $(n-p+1)$;

3) под действием граничного гомоморфизма $H_{n-p+1}(X/F) = H_{n-p+1}(X, F) \to H_{n-p}(F)$ пары (X, F) циклы, соответствующие этим сферам, переходят в классы гомологий исчезающих циклов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$.

Отсюда следует односвязность неособого многообразия уровня F отображения f (при $(n-p) > 1$; при $(n-p) \leqslant 1$ доказательство теоремы 4 еще проще). Из общих утверждений о комплексных подмногообразиях в пространстве $\mathbb{C}^n$ вытекает, что группы $H_i(F; \mathbb{Z})$ гомологий пространства F являются нулевыми при $i > (n-p)$, а группа $H_{(n-p)}(F;\mathbb{Z})$ является свободной абелевой. Это следует, например, из того, что всякое неособое комплексное подмногообразие шара B_ρ в пространстве $\mathbb{C}^n$, имеющее (комплексную) размерность m, гомотопически эквивалентно конечному клеточному комплексу (вещественной) размерности m. Это утверждение может быть доказано точно так же, как теорема Андреотти и Франкела в [173], отличающаяся тем, что комплексное многообразие рассматривается не в шаре B_ρ, а во всем пространстве $\mathbb{C}^n$.

Из точной гомологической последовательности пары (X, F)

$$\ldots \to H_{i+1}(X) \to H_{i+1}(X, F) \to H_i(F) \to H_i(X) \to \ldots$$

вытекает, что $H_i(F) = 0$ при $i \neq (n-p)$ и имеет место короткая точная последовательность

$$0 \to H_{n-p+1}(X) \to H_{n-p+1}(X, F) \to H_{n-p}(F) \to 0,$$

в которой все группы являются свободными абелевыми. Отсюда следует, что неособое многообразие уровня F отображения f гомотопически эквивалентно букету $(\nu_0 - \mu_1)$ сфер размерности $(n-p)$, где μ_1 — ранг группы $(n-p+1)$-мерных гомологий неособого многообразия уровня F' отображения $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1})$, а ν_0 — количество критических точек функции f_p на многообразии F' (считая с их кратностями). Тем самым теорема 4 доказана.

По аналогии со случаем обычной особенности функции $(\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ число $\mu_0 = (\nu_0 - \mu_1)$, равное рангу группы $(n-p)$-мерных гомологий неособого многообразия уровня F ростка отображения $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$, называется *числом Милнора* изолированной особенности ростка f.

При доказательстве теоремы 4 нами была построена короткая точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}^{\mu_1} \to \mathbb{Z}^{\nu_0} \to H_{n-p}(F; \mathbb{Z}) \to 0,$$

где μ_1 — число Милнора изолированной особенности ростка $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1}) \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$, получающегося из ростка f откидыванием одной из компонент (f_p), ν_0 — количество критических точек (с учетом кратностей) функции f_p на неособом многообразии уровня ростка отображения f' вблизи особой точки. Базис группы $\mathbb{Z}^{\nu_0}$ образуют (формальные) исчезающие циклы $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$, соответствующие путям $u_1, \ldots, u_{\nu_0}$, описанным выше. Их индексы пересечений на неособом многообразии уровня F ростка f определяют билинейную форму на группе $\mathbb{Z}^{\nu_0}$. Группа $\mathbb{Z}^{\mu_1}$ совпадает с группой линейных соотношений между исчезающими циклами $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ в группе $H_{n-p}(F)$ гомологий неособого многообразия уровня отображения f. Она, конечно, лежит в ядре формы, определяемой на группе $\mathbb{Z}^{\nu_0}$ индексами пересечений.

Натуральные числа μ_1 и ν_0, естественно, зависят от выбора системы координат $z_1, \ldots, z_p$ в пространстве $\mathbb{C}^p$. Однако нетрудно видеть, что для системы координат $z_1, \ldots, z_p$ общего вида числа μ_1 и ν_0 зависят только от самого ростка $f \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^p, 0)$. Таким образом, для изолированной особенности ростка полного пересечения инвариантно определяется короткая точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}^{\mu_1} \to \mathbb{Z}^{\nu_0} \to H_{n-p}(F) (= \mathbb{Z}^{\mu_0}) \to 0.$$

Аналогичным образом для ростка $f' \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-1}, 0)$ определена короткая точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z}^{\mu_2} \to \mathbb{Z}^{\nu_1} \to \mathbb{Z}^{\mu_1} \to 0$$

и далее — короткие точные последовательности

$$0 \to \mathbb{Z}^{\mu_2} \to \mathbb{Z}^{\nu_2} \to \mathbb{Z}^{\mu_2} \to 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$0 \to \mathbb{Z}^{\mu_{p-1}} \to \mathbb{Z}^{\nu_{p-2}} \to \mathbb{Z}^{\mu_{p-2}} \to 0,$$

$$0 \to \mathbb{Z}^{\nu_{p-1}} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}^{\mu_{p-1}} \to 0.$$

Все вместе они дают длинную точную последовательность (резольвенту)

$$0 \to \mathbb{Z}^{\nu_{p-1}} \to \mathbb{Z}^{\nu_{p-2}} \to \ldots \to \mathbb{Z}^{\nu_2} \to \mathbb{Z}^{\nu_1} \to \mathbb{Z}^{\nu_0} \to H_{n-p}(F; \mathbb{Z}) \to 0,$$

состоящую из свободных абелевых групп. Здесь ν_i — количество критических точек (считая с их кратностями) функции f_{p-i} на неособом многообразии уровня ростка отображения $(f_1, \ldots, f_{p-i-1}) \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^{p-i-1}, 0)$ (при выборе системы координат общего вида в пространстве $(\mathbb{C}^p, 0)$).

Для ростка отображения, определяющего полное пересечение с изолированной особенностью, может быть определена его матрица пересечений как матрица пересечений исчезающих циклов $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$, определенных выше, а также — соответствующая диаграмма (для $n - p \equiv 2 \bmod 4$). Напомним, что циклы $\Delta_1, \ldots, \Delta_{\nu_0}$ порождают группу $H_{n-p}(F; \mathbb{Z})$ $(n-p)$-мерных гомологий неособого многообразия уровня, но не образуют в ней базиса. Поэтому всегда (кроме тривиального случая, когда полное пересечение, определяемое отображением $f' = (f_1, \ldots, f_{p-1})$, является неособым, а потому полное пересечение, определяемое отображением f, изоморфно ростку гиперповерхности) матрица пересечений ростка такого отображения является вырожденной, а количество вершин в соответствующей диаграмме больше числа Милнора особенности.

27.4. Особенности проекций на прямую. *Проекцией* (*на прямую*) называется тройка $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{C}, 0)$, где E — росток полного пересечения коразмерности p в пространстве $\mathbb{C}^n$, имеющий изолированную особую точку в нуле, $\pi\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — линейная проекция вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1} = \pi^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$. Две проекции $E_1 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ и $E_2 \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ считаются эквивалентными, если существует коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} E_1 & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^n, 0) & \to & (\mathbb{C}, 0) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ E_2 & \hookrightarrow & (\mathbb{C}^n, 0) & \to & (\mathbb{C}, 0) \end{array}$$

в которой все вертикальные стрелки являются изоморфизмами в окрестности нуля.

Как всегда, особенность проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ называется простой, если среди ее малых шевелений содержится конечное число проекций, различных относительно описанной эквивалентности. Простые особенности проекций описаны в [111]. Они существуют при $p = 1$ и $p = 2$. Для описания их представителей выберем в пространстве $\mathbb{C}^n$ такую систему координат $(x_1, \ldots, x_n)$, что проекция π переводит точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ в $x_1 \in \mathbb{C}$. При $p = 1$ простые особенности проекций существуют при всех $n \geqslant 2$. Они задаются уравнениями $f_1 = 0$ со следующими функциями $f_1(x_1, \ldots, x_n)$ (здесь $q = x_3^2 + \ldots + x_n^2$):

A_0: $f_1 = x_2$;

X_μ: $f_1 = x_1 + X_\mu$, где X_μ — одна из простых особенностей функций от $n-1$ переменной $x_2, \ldots, x_n$ (A_μ, D_μ или E_μ, $\mu > 0$);

B_μ: $f_1 = x_1^\mu + x_2^2 + q$ $(\mu \geqslant 2)$;

C_μ: $f_1 = x_1 x_2 + x_2^\mu + q$ $(\mu \geqslant 3)$;

F_4: $f_1 = x_1^2 + x_2^3 + q$.

При $p=2$ простые особенности проекций существуют при $n=3$. Они задаются уравнениями $f_1=f_2=0$ со следующими функциями f_1 и f_2:
$C^{k,l}_{k+l}\colon f_1=x_2x_3,\ f_2=x_1+x_2^k+x_3^l$ $(2\leqslant k\leqslant l)$;
$F_{2k+1}\colon f_1=x_2^2+x_3^3,\ f_2=x_1+x_3^k$ $(k\geqslant 2)$;
$F_{2k+4}\colon f_1=x_2^2+x_3^3,\ f_2=x_1+x_2x_3^k$ $(k\geqslant 1)$.

Если зафиксировать линейную проекцию $\pi\colon(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ вдоль гиперплоскости $\mathbb{C}^{n-1}\subset\mathbb{C}^n$, то ростки полных пересечений E_1 и E_2, входящие в эквивалентные особенности проекций $E_i\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ $(i=1,2)$, получаются друг из друга под действием локального аналитического изоморфизма $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$, переводящего гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}$ в себя. Таким образом, особенности проекции $E\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ соответствует росток полного пересечения E с изолированной особенностью в нуле, рассматриваемый с точностью до локального аналитического диффеоморфизма $(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C}^n,0)$, переводящего гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}\subset\mathbb{C}^n$ в себя. Поэтому особенности проекций являются обобщением и в некотором смысле — смешением краевых особенностей и особенностей ростков полных пересечений, рассмотренных соответственно в п. 27.2 и 27.3.

В соответствии с п. 27.2 и 27.3 для краевых особенностей (т. е. для изолированных особенностей ростков функций или гиперповерхностей в пространстве $(\mathbb{C}^n,0)$, рассматриваемых с точностью до локальных аналитических изоморфизмов пространства $(\mathbb{C}^n,0)$, сохраняющих гиперплоскость $\mathbb{C}^{n-1}\subset\mathbb{C}^n$) и для изолированных особенностей ростков полных пересечений в пространстве $(\mathbb{C}^n,0)$, как и для обычных особенностей функций, можно определить целочисленную решетку с целочисленной билинейной формой и выделенные (отмеченные) наборы элементов, порождающие ее. Отличие от обычных особенностей функций состоит в первом случае в том, что среди этих элементов имеются и «короткие», и «длинные» исчезающие циклы (при $n\equiv 3 \bmod 4$ их индексы самопересечений равны (-2) и (-4) соответственно). Во втором случае отличие состоит в том, что набор этих элементов избыточен в том смысле, что их количество больше размерности решетки: они линейно зависимы в ней. Исходя из соображений, описанных в п. 27.2 и 27.3, для особенности проекции $E\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ также определяется целочисленная решетка с целочисленной билинейной формой и выделенные наборы элементов, порождающие ее. При этом указанные наборы обладают обоими указанными отличиями от случая обычных особенностей функций: они включают как короткие, так и длинные исчезающие циклы, и количество элементов в них больше размерности решетки.

Точная конструкция решетки и отмеченных наборов элементов в ней следующая. Пусть полное пересечение $E\hookrightarrow(\mathbb{C}^n,0)$ определяется набором уравнений $f_1=f_2=\ldots=f_p=0$ $(\dim E=n-p)$. Сделав линейную заме-

ну общего вида этой системы уравнений, мы можем считать, что система уравнений $f_1 = f_2 = \ldots = f_{p-1} = 0$ определяет полное пересечение размерности $(n - p + 1)$ с изолированной особенностью в нуле (см. п. 27.3). Неособое многообразие уровня $F' = F'_{z'} = \{f_1 = z_1, \ldots, f_{p-1} = z_{p-1}\} \cap B_\rho$ имеет гомотопический тип букета сфер размерности $(n - p + 1)$, количество которых не зависит от конкретного выбора линейной замены системы уравнений общего вида. Пересечение этого многообразия уровня с гиперплоскостью $\mathbb{C}^{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ является неособым $(n - p)$-мерным подмногообразием в многообразии F' (опять при общем выборе системы уравнений), а функция f_p определяет функцию на многообразии F', имеющую изолированные критические точки. Заменив, если это необходимо, функцию f_p на ее малое шевеление, можно считать, что она имеет на многообразиях F' и $F' \cap \mathbb{C}^{n-1}$ только невырожденные критические точки с различными критическими значениями. Для пары многообразий $(F', F' \cap \mathbb{C}^{n-1})$ и функции f_p на ней можно реализовать конструкцию, описанную в п. 27.2 для пары $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^{n-1})$. Это означает, что следует рассмотреть двулистное накрытие $\hat{F}'$ многообразия F', ветвящееся вдоль подмногообразия $F' \cap \mathbb{C}^{n-1}$, и функцию $\hat{f}_p$, получающуюся из f_p поднятием на пространство накрытия. На многообразии уровня функции $\hat{f}_p$ действует инволюция, переставляющая листы накрытия. В группе целочисленных гомологий неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ выделяется подгруппа H^-, состоящая из классов гомологий, антиинвариантных относительно этой инволюции. Подгруппа H^- и является целочисленной решеткой, сопоставляемой особенности проекции $E \hookrightarrow (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Системе путей, соединяющих критические значения функции $\hat{f}_p$ с некритическим значением (и удовлетворяющей условиям, накладываемым на систему путей, определяющую отмеченный базис), соответствует система «обычных» исчезающих циклов в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ на многообразии $\hat{F}'$: по два для каждого критического значения функции $f_p|_{F'}$ и по одному для каждого критического значения функции $f_p|_{F' \cap \mathbb{C}^{n-1}}$. Инволюция переставляет первые из них и действует на вторые умножением на (-1). Разности циклов, соответствующих критическим значениям функции $f_p|_{F'}$, и циклы, соответствующие критическим значениям функции $f_p|_{F' \cap \mathbb{C}^{n-1}}$, порождают группу H^- антиинвариантных циклов в гомологиях неособого многообразия уровня функции $\hat{f}_p$ на многообразии $\hat{F}'$. Этот набор циклов и следует рассматривать как отмеченный в целочисленной решетке H^-.

Поскольку многообразие $\hat{F}'$ (в отличие от пространства $\mathbb{C}^n$) имеет, вообще говоря, нетривиальные гомологии, количество этих циклов больше размерности решетки H^- (их количество равно сумме размерностей решетки H^- и решетки, состоящей из антиинвариантных классов гомологий многообразия $\hat{F}'$). Индексы пересечений описанных циклов позволяют по тем

же правилам, что и в п. 27.2, определить соответствующую диаграмму Дынкина. При этом надо иметь в виду, что эти правила определяют диаграмму по индексам пересечений исчезающих циклов при $n - p \equiv 2 \bmod 4$.

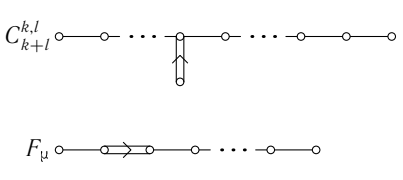


Рис. 116

Поэтому при $p = 2$ ($n - p = 1$) следует формально проделать такой же пересчет матрицы пересечений, который происходит при добавлении к обычной особенности функции квадрата одной новой переменной (см. п. 24.8), и дальше строить диаграмму так, как если бы выполнялось соотношение $n - p \equiv 2 \bmod 4$. В данном случае это означает, что i-я и j-я вершины соединены ребром кратности $(\Delta_i \circ \Delta_j)$ (если хотя бы один из циклов Δ_i и Δ_j короткий) или $(\Delta_i \circ \Delta_j)/2$ (если оба цикла длинные) при $i < j$ (в соответствии с обычным порядком циклов $\{\Delta_k\}$ в отмеченном наборе); стрелки на ребрах направлены от вершин, соответствующих длинным исчезающим циклам, к вершинам, соответствующим коротким исчезающим циклам.

Нетрудно видеть, что простые особенности проекций на прямую с $p = 1$ имеют диаграммы, совпадающие с одноименными диаграммами обычных особенностей функций или краевых особенностей. Диаграммы особенностей проекций $C^{k,l}_{k+l}$ ($2 \leqslant k \leqslant l$) и F_μ ($\mu \geqslant 5$) имеют вид, изображенный на рис. 116 ([111]; нумерация вершин опущена).

ГЛАВА V

ОСЦИЛЛИРУЮЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ

Эта глава посвящена исследованию асимптотик осциллирующих интегралов, т. е. интегралов вида

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n,$$

при больших значениях вещественного параметра τ. Здесь f и φ — гладкие функции. Функция f называется *фазой*, функция φ называется *амплитудой*. Согласно принципу стационарной фазы основной вклад в асимптотику дают окрестности критических точек фазы. В главе обсуждаются связи асимптотик с различными характеристиками критических точек фазы (разрешением особенностей, многогранниками Ньютона), излагаются методы вычисления асимптотик. В следующей главе обсуждаются связи асимптотик с монодромией и смешанными структурами Ходжа критических точек.

В последнее десятилетие теория особенностей исключительно тесно связана с исследованием осциллирующих интегралов. С одной стороны, многие разумные задачи теории особенностей возникли из попыток понять природу поведения интегралов. С другой стороны, многие из исследований критических точек нашли прямые приложения в исследованиях асимптотик. В качестве первого примера напомним, что классификация простых критических точек функции возникла как побочный продукт вычисления асимптотик простейших осциллирующих интегралов (см. [8], [10]). В качестве второго примера отметим связь асимптотик интегралов и смешанных структур Ходжа критических точек (см. гл. VI).

§ 28. Обсуждение результатов

28.1. Примеры, определения.

А. Осциллирующие интегралы и коротковолновые колебания. Задачи оптики, акустики, квантовой механики, теории уравнений в частных производных, теории вероятностей, теории чисел приводят к необходимости исследовать осциллирующие интегралы при больших значениях параметра.

Пример. Рассмотрим поверхность в трехмерном пространстве. Предположим, что каждая точка поверхности излучает сферическую волну

фиксированной частоты и фиксированной длины. Предположим, что длина волны мала по сравнению с размерами поверхности и со скоростью изменения амплитуды волны при изменении точки поверхности.

Суммарный колебательный режим в точке y пространства задается функцией $e^{2\pi i\omega t}\int_S \frac{e^{2\pi i\|x-y\|/\lambda}}{\|x-y\|}\,\varphi(x)\,dx$, где t — время, ω — частота, λ — длина волны, S — поверхность, излучающая волны, φ — амплитуда, dx — элемент площади поверхности. Таким образом, сложное колебание задается осциллирующим интегралом, в котором роль большого вещественного параметра играет величина, обратная к длине волны, а фазой служит функция расстояния от точки поверхности до фиксированной точки пространства. Основной вклад в сложное колебание (т. е. в осциллирующий интеграл) дают окрестности критических точек фазы. Если все критические точки фазы невырождены, то вклад в сложное колебание от каждой из них пропорционален длине волны. Если фаза имеет вырожденные критические точки, то вклад их малых окрестностей в сложное колебание еще больше, а именно, порядок вклада пропорционален длине волны в некоторой степени, меньшей чем 1.

Как правило, функция на поверхности, равная расстоянию до фиксированной точки пространства, имеет только невырожденные критические точки. Точка пространства называется *каустической* или *фокальной*, если функция на поверхности, равная расстоянию до точки, имеет вырожденную критическую точку. Критические точки образуют в пространстве новую поверхность, называемую *каустикой*. В точках каустики сложное колебание имеет нестандартно большую величину. Если поверхность излучает световые волны, то каустика — это поверхность нестандартно ярких точек. Ее можно видеть на стене, освещенной лучами, отраженными от вогнутой поверхности (например, поверхности чашки). Каустику можно определить по-другому. Каустика — это множество критических значений экспоненциального отображения пространства нормального расслоения излучающей поверхности. Напомним определение экспоненциального отображения. Точкой пространства нормального расслоения является пара, состоящая из точки поверхности и приложенного в ней вектора, перпендикулярного к поверхности. Экспоненциальное отображение сопоставляет такой паре точку пространства, являющуюся конечной точкой вектора. Наконец, есть третье описание каустики. На нормали к излучающей поверхности отложим главные радиусы кривизны. Поверхность конечных точек всех таких отрезков является каустикой (см. [104]).

Укажем еще один пример появления осциллирующих интегралов.

Одной из классических задач теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными является задача построения асимптотики по параметру решения задачи Коши с быстро осциллирующими на-

чальными данными. Асимптотические методы (см. [166]—[168]) приводят в этой задаче к следующему результату. Для любого натурального числа N в малой окрестности любой точки y^0 решение задачи Коши представимо в виде конечной суммы осциллирующих интегралов

$$\int e^{i\tau F(y,x)}\varphi(y, x, (i\tau)^{-1})\,dx$$

и остаточного члена порядка $o(\tau^{-N})$ при $\tau \to +\infty$. В этом интеграле F — вещественнозначная функция, τ — большой параметр задачи, x — вещественные параметры, функция φ финитна по x и является полиномом по $(i\tau)^{-1}$. Поэтому вычисление асимптотики решения задачи Коши сводится к вычислению асимптотик осциллирующих интегралов.

Многочисленные примеры физических задач, в которых возникает необходимость исследования асимптотик интегралов, см. в работах М. Берри, Дж. Ни, цитированных в библиографии. Отметим также интересные статьи [34], [182], [324].

Б. Принцип стационарной фазы гласит: основной вклад в осциллирующий интеграл дают окрестности критических точек фазы.

Теорема 1. *Пусть амплитуда осциллирующего интеграла имеет компактный носитель. Пусть фаза осциллирующего интеграла не имеет критических точек на носителе амплитуды. Тогда при стремлении параметра осциллирующего интеграла к $+\infty$ интеграл стремится к нулю быстрее любой степени параметра.*

Доказательство. Пусть сначала интеграл одномерный. Проинтегрируем его по частям:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx = \frac{-1}{i\tau}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau f(x)}(\varphi(x)/f'(x))'dx.$$

Повторяя интегрирование достаточное число раз, получим утверждение теоремы. Многомерный случай сводится к одномерному с помощью разбиения единицы и перехода к новым переменным интегрирования, в которых функция фазы — одна из переменных.

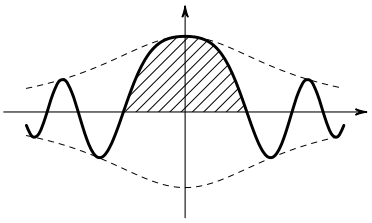


Рис. 117

В. Интеграл Френеля. Осциллирующий интеграл, фаза которого имеет только невырожденные критические точки, называется *интегралом Френеля*.

Пример. Рассмотрим одномерный осциллирующий интеграл, фазой которого служит функция x^2. На рис. 117 изображен график $y = \cos(\tau x^2)\varphi(x)$

вещественной части подынтегрального выражения осциллирующего интеграла. Ясно, что при больших значениях параметра τ интеграл пропорционален площади под первым витком графика, т. е. пропорционален величине $\varphi(0)\tau^{-1/2}$. Точное вычисление показывает, что при стремлении параметра τ к $+\infty$ осциллирующий интеграл представим в виде суммы величины

$$\varphi(0)\sqrt{\pi/\tau}\exp(i\pi/4)$$

и остаточного члена порядка $O(\tau^{-3/2})$ (см. [209]).

Рассмотрим многомерный интеграл Френеля

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\tau f(x))\,\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n. \qquad (*)$$

Т е о р е м а 2 (см. [208], [209]). *Предположим, что фаза интеграла* $(*)$ *имеет невырожденную критическую точку в начале координат, а носитель амплитуды компактен и не содержит других критических точек фазы. Тогда при стремлении параметра интеграла к* $+\infty$ *интеграл представим в виде*

$$\varphi(0)(2\pi/\tau)^{n/2}\exp(i\tau f(0)+(i\pi/4)\operatorname{sign} f''_{xx}(0))\,|\det f''_{xx}(0)|^{-1/2}+O(\tau^{-n/2-1}),$$

где $\operatorname{sign} f''_{xx}(0)$ *— сигнатура матрицы вторых производных фазы в начале координат,* $\det f''_{xx}(0)$ *— определитель матрицы вторых производных фазы в начале координат.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме Морса фаза имеет вид $y_1^2+\ldots$ $\ldots+y_k^2-y_{k+1}^2-\ldots-y_n^2$ в подходящей системе координат в окрестности критической точки. Поэтому теорему достаточно доказать в этом случае. Этот случай с помощью теоремы Фубини легко сводится к утверждению предыдущего примера. Теорема доказана.

Г. К а у с т и к и. В приложениях, как правило, фазы и амплитуды осциллирующих интегралов зависят от дополнительных параметров. Рассмотрим такой интеграл. Предположим, что фаза является общим семейством функций, зависящих от дополнительных параметров (см. по этому поводу гл. II ч. I). В этом случае интеграл является интегралом Френеля для почти всех значений параметров и при этих значениях имеет порядок $\tau^{-n/2}$ (теорема 2). Множество значений параметров, при которых фаза имеет вырожденную критическую точку, образует гиперповерхность в пространстве параметров. Эта гиперповерхность называется *каустикой*. При каустических значениях параметров порядок стремления интеграла к нулю определяется вырожденными критическими точками фазы.

Д. А с и м п т о т и к и о с ц и л л и р у ю щ и х и н т е г р а л о в в б л и з и к а у с т и к и. Предположим, что при выделенном значении дополнительных параметров фаза осциллирующего интеграла имеет един-

ственную критическую точку и фаза, рассматриваемая как семейство функций, зависящих от параметров, является семейством функций общего положения. В этом случае каустика в окрестности выделенного значения параметров называется *элементарной*.

Примеры элементарных каустик, встречающихся при числе параметров 2 и 3, изображены на рис. 118—122, где около каждой части каустик приведены типы вырожденных критических точек фазы, имеющихся

Рис. 118

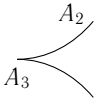


Рис. 119

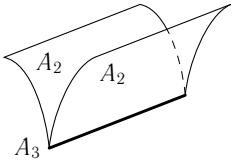


Рис. 120

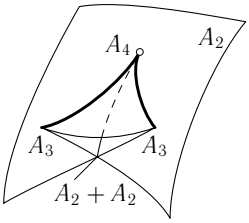


Рис. 121

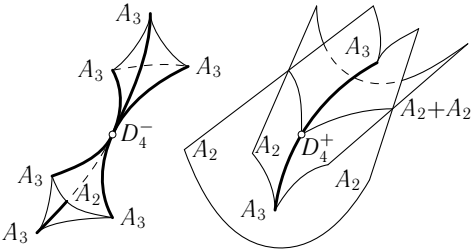


Рис. 122

при этих каустических значениях параметров. Например, $A_2 + A_2$ означает, что фаза имеет две критические точки типа A_2, а остальные критические точки фазы невырождены. Каждая вырожденная критическая точка фазы дает в интеграл вклад порядка $\tau^{\beta - n/2}$. Число β для критических точек типов A_k, D_k равно соответственно $(k-1)/(2k+2)$, $(k-2)/(2k-2)$ (см. ниже теорему 4).

Согласно результатам гл. III ч. I для фаз, зависящих общим образом от двух или трех параметров, каждая элементарная каустика локально диффеоморфна одной из каустик, изображенных на рис. 118—122. Значениям параметров, переходящим друг в друга при локальном диффеоморфизме, отвечают интегралы равных порядков.

Предположим, что дополнительных параметров четыре и один из параметров выделен; мы будем называть его временем. Тогда в зависимости от времени каустики перестраиваются. Для семейств функций общего положе-

ния все возможные перестройки указаны на рис. 123, 124. Классификация перестроек каустик выполнена В. М. Закалюкиным (см. гл. III ч. I). Каждая

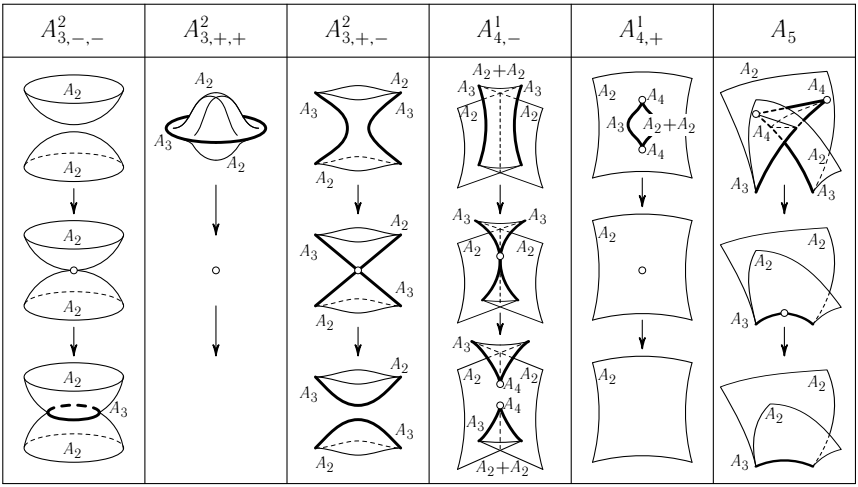


Рис. 123

перестройка имеет свое обозначение. Соответствующие этим обозначениям семейства приведены в п. 22.3 ч. I.

Отметим, что на рис. 123 (перестройка $A^2_{3,+,+}$) изображена единственная перестройка, для которой при положительном времени каустика отсутствует, а при отрицательном времени она имеется. Согласно В. М. Закалюкину, эта перестройка, возможно, объясняет феномен исчезновения «летающих тарелок».

Е. Осциллирующие интегралы по полупространству. Вернемся к примеру п. А. Предположим, что излучающая поверхность непрозрачна для испускаемых волн. Тогда в выделенную точку пространства приходят волны только от видимой части поверхности. Поэтому сложное колебание в точке пространства выражается суммой осциллирующих интегралов, каждый из которых берется по части поверхности. Таким образом, при изучении коротковолновых колебаний полезно уметь вычислять асимптотики осциллирующих интегралов по области с границей. Мы разберем случай гладкой границы.

Рассмотрим осциллирующий интеграл по части пространства $\mathbb{R}^n$, заданной условием положительности первой координаты, при этом фазу и амплитуду интеграла будем считать гладкими функциями на всем пространстве.

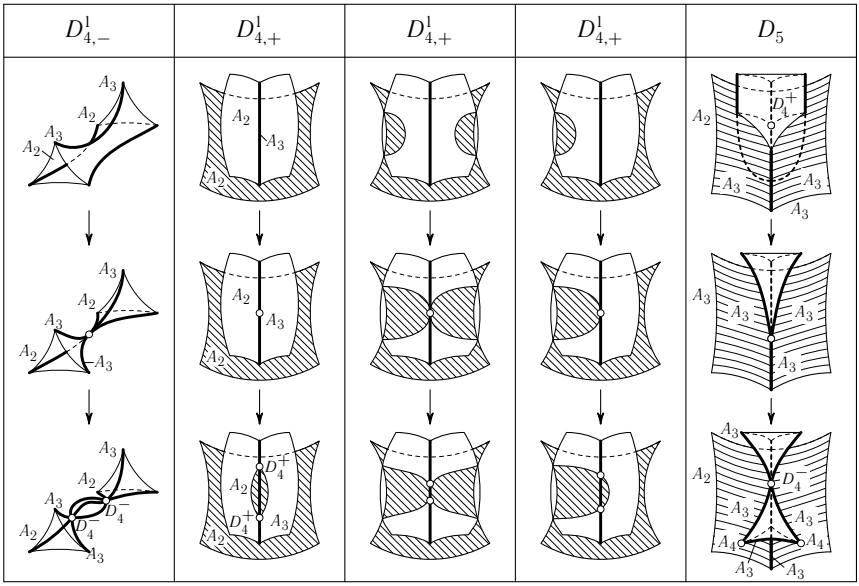


Рис. 124

Т е о р е м а 1′. *Пусть амплитуда осциллирующего интеграла по полупространству имеет компактный носитель. Пусть фаза осциллирующего интеграла по полупространству не имеет критических точек на носителе амплитуды в области интегрирования. Пусть ограничение фазы на границу полупространства не имеет критических точек на носителе амплитуды. Тогда при стремлении параметра осциллирующего интеграла к $+\infty$ интеграл стремится к нулю быстрее любой степени параметра.*

Д о к а з а т е л ь с т в о достаточно провести в случае, когда носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки границы полупространства. Изменив переменные интегрирования, перейдем к случаю, в котором полупространство интегрирования задается условием положительности первой переменной, а фаза есть вторая переменная. Далее, интегрируя по частям по второй переменной достаточное число раз, получим теорему.

Предположим, что фаза осциллирующего интеграла по полупространству не имеет критических точек на границе полупространства. Предположим, что все ее критические точки внутри полупространства невырождены и критические точки ее ограничения на границу полупространства интегрирования тоже невырождены. Осциллирующий интеграл с такой фазой будем называть *интегралом Френеля* по *полупространству*.

Т е о р е м а 2′. *Рассмотрим интеграл Френеля по полупространству, в котором первая координата положительна. Предположим, что начало координат не является критической точкой фазы, но является невырожденной критической точкой ограничения фазы на границу полупространства. Предположим, что носитель амплитуды компактен, не содержит критических точек фазы и не содержит других критических точек ограничения фазы на границу полупространства. Тогда при стремлении параметра интеграла к $+\infty$ интеграл представим в виде*

$$\varphi(0)(i\tau)^{-1}(2\pi/\tau)^{(n-1)/2}\exp(i\tau f(0)+(i\pi/4)\operatorname{sign}\tilde f''_{x'x'}(0))\times$$
$$\times|\det\tilde f''_{x'x'}(0)|^{-1/2}+O(\tau^{-(n+1)/2}),$$

где $\operatorname{sign}\tilde f''_{x'x'}$ *— сигнатура матрицы вторых производных в критической точке ограничения фазы на границу,* $\det f''_{x'x'}(0)$ *— определитель матрицы вторых производных в критической точке ограничения фазы на границу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В окрестности начала координат изменим первую переменную так, чтобы полупространство интегрирования по-прежнему задавалось условием ее положительности, а фаза интеграла приняла вид $x_1+h(x_2,\dots,x_n)$. Теперь теорема 2′ сводится к теореме 2 интегрированием по частям по первой переменной.

Предположим, что фаза и амплитуда осциллирующего интеграла по полупространству зависят от дополнительных параметров. Предположим, что фаза, рассматриваемая как семейство функций, зависящих от параметров, является семейством функций общего положения (см. гл. II ч. I). В этом случае интеграл является интегралом Френеля для почти всех значений параметров. Те значения параметров, при которых интеграл не является интегралом Френеля, образуют гиперповерхность в пространстве параметров, называемую *каустикой*.

Предположим, что при выделенном значении параметров фаза имеет единственную критическую точку на границе полупространства интегрирования. Каустика в окрестности такого значения параметров называется *элементарной*.

Примеры элементарных каустик, встречающихся при числе параметров 2 и 3, изображены на рис. 125—129.

При каустическом значении параметров либо фаза имеет вырожденную критическую точку в полупространстве интегрирования, либо фаза имеет критическую точку на границе, либо ограничение фазы на границу имеет вырожденную критическую точку. На рисунках около каждой части каустики приведены обозначения этих критических точек. Нормальные формы

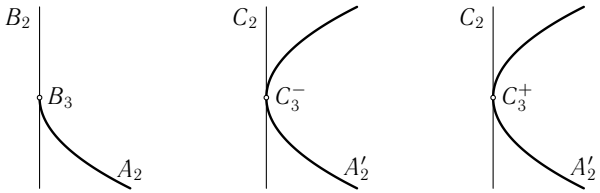


Рис. 125

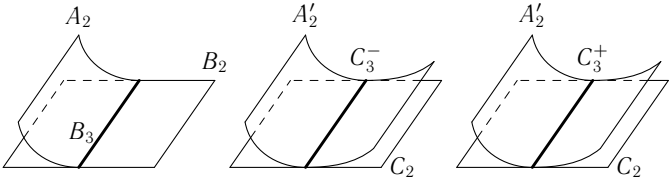


Рис. 126

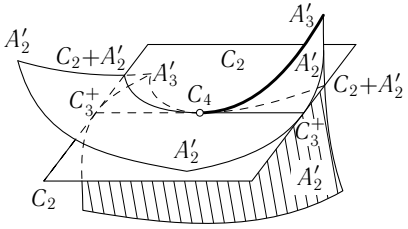


Рис. 127

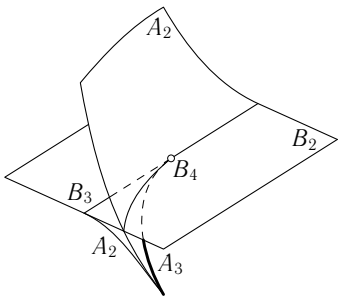


Рис. 128

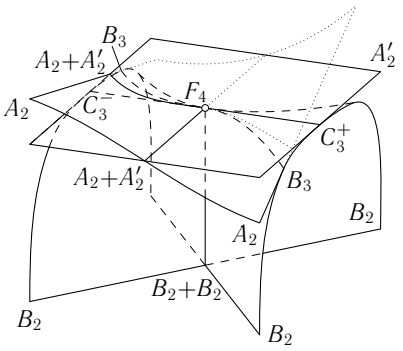


Рис. 129

критических точек, обозначенных на каустиках, см. в § 17 ч. I, а также в [22]. Каждая указанная критическая точка дает в интеграл вклад порядка $\tau^{\beta-n/2}$. Числа β для критических точек типов A_k', D_k', B_k, $C_k^{\pm}$, F_4 равны соответственно $-1/(k+1)$, $-1/(2k-2)$, $(k-1)/2k$, 0, $1/6$ (см. ниже теорему 30.9).

Согласно [22] (см. также § 17 ч. I) для фаз осциллирующих интегралов по полупространству, зависящих общим образом от двух или трех параметров, каждая элементарная каустика локально диффеоморфна одной из каустик, изображенных на рис. 125—129. Значениям параметров, переходящим друг в друга при локальном диффеоморфизме, отвечают интегралы равных порядков.

Ж. З о н ы с в е т а, т е н и, п о л у т е н и (по К. П. Мандрыкину). Предположим, что фаза и амплитуда осциллирующего интеграла зависят от дополнительных параметров. Рассмотрим пространство параметров и расположенную в нем каустику. Рассмотрим произвольное значение параметров вне каустики. Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего этому значению параметров, имеет только невырожденные критические точки либо вообще не имеет критических точек. В первом случае осциллирующий интеграл имеет порядок $\tau^{-n/2}$, где n — размерность пространства интегрирования; во втором случае осциллирующий интеграл при $\tau \to +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени параметра τ. В соответствии с этими случаями область вне каустики назовем

зоной света, если значениям параметров из этой области отвечают осциллирующие интегралы, фазы которых имеют хотя бы одну критическую точку;

зоной тени, если значениям параметров из этой области отвечают осциллирующие интегралы, фазы которых не имеют ни одной критической точки.

П р и м е р. На рис. 120—122 изображены каустики, отвечающие критическим точкам типов $A_2, A_3, A_4, D_4^{\pm}$. На рисунках каустик, отвечающих A_2, A_4, D_4^+, зоны тени расположены под каустиками. Остальные области вне каустик, изображенных на рисунке, — зоны света.

Предположим теперь, что наш осциллирующий интеграл есть интеграл по полупространству. Рассмотрим произвольное значение параметров вне каустики. Имеются следующие три возможности.

1) Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, имеет хотя бы одну критическую точку в полупространстве интегрирования. В этом случае интеграл имеет порядок $\tau^{-n/2}$.

2) Фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, не имеет критических точек в полупространстве интегрирования, однако ограничение фазы на границу полупространства интегри-

рования имеет хотя бы одну критическую точку. В этом случае интеграл имеет порядок $\tau^{-(n+1)/2}$ (теорема 2′).

3) Как фаза осциллирующего интеграла, отвечающего выделенному значению параметров, не имеет критических точек в полупространстве интегрирования, так и ее ограничение на границу полупространства интегрирования не имеет критических точек. В этом случае интеграл при $\tau \to +\infty$ стремится к нулю быстрее любой степени параметра τ.

В соответствии с этими тремя возможностями области вне каустики назовем *зонами света*, *полутени*, *тени* соответственно.

Пример. На рис. 126—129 изображены каустики, отвечающие критическим точкам типов B_3, $C_3^{\pm}$, C_4, B_4, F_4. Укажем зоны тени и полутени на этих рисунках, остальные области вне каустик — зоны света.

На рис. 126, *а* зона полутени — над каустикой. На рис. 126, *б* зона полутени — под каустикой. На рис. 126, *в* зона тени — над каустикой; зона полутени — между двумя листами каустики. На рис. 127 полутень — с одной из сторон плоскости каустики. На рис. 128 полутень — справа над плоскостью каустики. На рис. 129 тень — над всей каустикой; полутень — за каустикой под плоскостью каустики; полутень также — справа между плоскостью каустики и линейчатой поверхностью (третьей частью каустики).

Интересно, существуют ли критические точки, вне каустик которых лежат две зоны тени? Вероятно, зоны тени обладают какими-то свойствами выпуклости.

3. Теорема 3 (об асимптотическом разложении; см. [39], [40], [49], [257], [389]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\tau f(x))\, \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n. \tag{1}$$

Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки x_0. Тогда осциллирующий интеграл разлагается в асимптотический ряд

$$\exp(i\tau f(x^0)) \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,a}(\varphi)\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k \quad \textit{при} \quad \tau \to +\infty, \tag{2}$$

если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности этой критической точки фазы. Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой такой обобщенной функции лежит в критическом множестве фазы.

Пример (см. [209]). Рассмотрим интеграл Френеля. Предположим, что фаза интеграла имеет невырожденную критическую точку в начале координат, а носитель амплитуды компактен и не содержит других критических точек фазы. Тогда при стремлении параметра к $+\infty$ интеграл разлагается в асимптотический ряд

$$\exp(i\tau f(0))\tau^{-n/2}\sum_{i=0}^{\infty} a_j\tau^{-j}.$$

Число a_j равно линейной комбинации $(2j)$-х смешанных производных амплитуды в начале координат. Число a_0 указано в теореме 2.

Замечание. В теореме 3 условие аналитичности фазы выполняется практически всегда: фаза есть полином в подходящих координатах в окрестности конечнократной критической точки. Бесконечнократных критических точек очень мало: коэффициенты ряда Тейлора бесконечнократной критической точки удовлетворяют бесконечному множеству независимых алгебраических соотношений.

Мы приведем два доказательства теоремы 3. Одно, основанное на теореме Хиронаки о разрешении особенностей, изложено в §29. Другое доказательство, использующее комплексно-аналитические рассуждения, см. в §33.

В асимптотическом ряде осциллирующего интеграла фаза и амплитуда неравноправны: фаза определяет показатели степеней параметра, а амплитуда определяет коэффициенты при степенях параметра. Зависимость от фазы более существенна. Как правило, при исследовании осциллирующего интеграла фазу фиксируют, разрешая амплитуде меняться. В примере п. А об излучении волн поверхностью фаза отвечает за геометрию излучающей поверхности, а амплитуда отвечает за интенсивность излучения.

И. Показатель осцилляции и показатель особости. Основными характеристиками асимптотического ряда осциллирующего интеграла являются показатель степени параметра в максимальном члене ряда, степень логарифма параметра в максимальном члене ряда, числовой коэффициент максимального члена ряда и, наконец, множество всех показателей степеней параметра, встречающихся в ряде.

Определение. *Множеством показателей* аналитической фазы в критической точке называется множество всех чисел α, обладающих следующим свойством: для любой окрестности критической точки найдется амплитуда с носителем в этой окрестности, для которой в асимптотическом ряде (2) найдется такое число k, что коэффициент $a_{k,\alpha}$ не равен нулю. *Показателем осцилляции* аналитической фазы в критической точке называется максимальное число в множестве показателей. Показатель осцилляции

обозначается через β. *Кратностью показателя осцилляции* аналитической фазы в критической точке называется максимальное число k, обладающее следующим свойством: для любой окрестности критической точки найдется амплитуда с носителем в этой окрестности, для которой в асимптотическом ряде (2) коэффициент $a_{k,\beta}$ не равен нулю. Кратность показателя осцилляции обозначается через K.

Пример. Множество показателей фазы n переменных в невырожденной критической точке есть множество всех чисел вида $-n/2-l$, где $l=0, 1, \ldots$ Показатель осцилляции этой критической точки равен $-n/2$, его кратность равна нулю.

Показатель осцилляции и его кратность обладают следующим простым свойством. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_l)$ — аналитические функции, имеющие критические точки в началах координат. Тогда для функции $f(x_1, \ldots, x_n)+g(y_1, \ldots, y_l)$ показатель осцилляции в начале координат и его кратность равны соответственно сумме показателей осцилляции и сумме кратностей показателей осцилляции критических точек функций f и g: $\beta(f+g)=\beta(f)+\beta(g)$, $K(f+g)=K(f)+K(g)$ (это — следствие теоремы Фубини, см. § 31). Аддитивность показателя осцилляции и его кратности мотивирует следующее определение.

Определение. *Показателем особости* аналитической фазы n переменных в критической точке называется увеличенный на $n/2$ показатель осцилляции в этой критической точке. *Кратностью показателя особости* называется кратность показателя осцилляции.

Показатель особости и его кратность равны нулю в невырожденной критической точке фазы. Показатель особости и его кратность равны в стабильно эквивалентных критических точках.

К. Таблицы показателей особости. В этой главе вычисляются (в перечисленных ниже случаях) основные характеристики критической точки фазы осциллирующего интеграла: показатель осцилляции, его кратность, множество показателей, указывается, при каких амплитудах старший член асимптотического ряда отличен от нуля. Утверждения, доказанные в этой главе, позволяют вычислить показатели особости и их кратности для всех критических точек, расклассифицированных в гл. II ч. I, т. е. для всех простых, унимодальных и бимодальных критических точек, для всех критических точек кратности, меньшей чем 16, для всех критических точек, состоящих в классах коразмерности, меньшей 10 (см. § 15 ч. I).

Результаты вычислений сведены в таблицы 1—5. В первой строке таблиц стоят обозначения типов критических точек фазы. Соответствующие этим обозначениям нормальные формы критических точек указаны в п. 15.1, 17.1 ч. I. Во второй строке таблиц стоят показатели особости. Смысл наших таблиц таков: если в окрестности критической точки фаза

приводится к табличному виду диффеоморфизмом пространства, то ее показатель особости равен показателю особости соответствующей табличной функции.

Таблица 1. Простые особенности

A_k	D_k	E_6	E_7	E_8
$\frac{k-1}{2k+2}$	$\frac{k-2}{2k-2}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{7}{15}$

Таблица 2. Унимодальные особенности

$P_8, X_9, J_{10}, J_{10+k}, X_{9+k}, Y_{r,s}, \tilde{Y}_r, P_{s+k}, R_{l,m}, \tilde{R}_m, T_{p,q,r}, \tilde{T}_{p,m}$
$\frac{1}{2}$

E_{12}	E_{13}	E_{14}, Q_{10}	Z_{12}	Z_{13}, Q_{11}	W_{12}	W_{13}, S_{11}	Q_{12}	S_{12}	U_{12}
$\frac{11}{21}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{6}{11}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{15}{26}$	$\frac{7}{12}$

Таблица 3. Бимодальные особенности

$J_{3,0}$ $J_{3,p}$	$Z_{1,0}, E_{19}$ $Z_{1,p}$	$W_{1,0}, W^{\#}_{1,2q-1}, Q_{2,0}, Z_{17}$ $W_{1,p}, W^{\#}_{1,2q}, Q_{2,p}$	$S_{1,0}, S^{\#}_{1,2q-1}, W_{17}$ $S_{1,p}, S^{\#}_{1,2q}, Q_{17}$
$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{5}$

S_{17}	$U_{1,0}, U_{1,2q-1}, U_{1,2q}$	E_{18}	E_{20}	Z_{18}	Z_{19}	W_{18}	Q_{16}	Q_{18}	S_{16}	U_{16}
$\frac{5}{8}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{17}{30}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{10}{17}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{17}{28}$	$\frac{25}{42}$	$\frac{29}{48}$	$\frac{21}{34}$	$\frac{19}{30}$

Таблица 4. Особенности коранга 2 с ненулевой 4-струей

$J_{k,0}, J_{k,i}$	E_{6k}	E_{6k+1}	E_{k+2}	$X_{k,0}, X_{k,p}, Y^k_{r,s}$
$\frac{2k-1}{3k}$	$\frac{6k-1}{9k+3}$	$\frac{4k}{6k+3}$	$\frac{6k+1}{9k+6}$	$\frac{3k-1}{4k}$

$Z^k_{i,0}, Z^k_{i,p}, Z^k_{12k+6i-1}, Z^k_{12k+6i}, Z^k_{12k+6i+1}$ (при $k>2$)	$Z^2_{i,0}Z^2_{i,p}$
$\frac{3k-1}{4k}$	$\frac{2i+5}{3i+8}$

Z^2_{23+6i}	Z^2_{24+6i}	Z^2_{25+6i}	$Z_{i,0}, Z_{i,p}$	Z_{6i+11}	Z_{6i+12}	Z_{6i+13}
$\frac{6i+17}{9i+27}$	$\frac{4i+12}{6i+19}$	$\frac{6i+19}{9i+30}$	$\frac{2i+2}{3i+4}$	$\frac{6i+8}{9i+15}$	$\frac{4i+6}{6i+11}$	$\frac{6i+10}{9i+18}$

W_{12k}	W_{12k+1}	$W_{k,0}, W_{k,i}, W^{\#}_{k,2q-1}, W^{\#}_{k,2q}$	W_{12k+5}	W_{12k+6}
$\frac{12k-1}{16k+4}$	$\frac{9k}{12k+4}$	$\frac{12k+2}{16k+8}$	$\frac{9k+3}{12k+8}$	$\frac{12k+5}{16k+12}$

Таблица 5. Особенности коранга 3 с приведенной 3-струей и 3-струей x^2y

$Q_{k,0}$, $Q_{k,i}$	Q_{6k+4}	Q_{6k+5}	Q_{6k+6}	S_{12k-1}	S_{12k}
$\frac{4k-1}{6k}$	$\frac{12k+1}{18k+6}$	$\frac{8k+2}{12k+6}$	$\frac{12k+5}{18k+12}$	$\frac{12k-3}{16k}$	$\frac{18k-3}{24k+2}$

$S_{k,0}$, $S^{\#}_{k,2q-1}$, $S_{k,i}$, $S^{\#}_{k,2q}$	S_{12k+4}	S_{12k+5}	U_{12k}	$U_{k,2q}$
$\frac{6k}{8k+2}$	$\frac{18k+3}{24k+10}$	$\frac{12k+3}{16k+8}$	$\frac{15k-1}{18k+6}$	$\frac{10k+1}{12k+6}$

U_{12k+4}, $U_{k,2q-1}$	$V_{1,0}$, $V^{\#}_{1,2q-1}$, $V_{1,p}$, $V^{\#}_{1,2q}$
$\frac{15k+4}{18k+12}$	$\frac{5}{8}$

Для критических точек типов J_{10+k}, X_{9+k}, $Y_{r,s}$, P^{-}_{8+k}, $R_{l,m}$, $\tilde{R}^{+,-}_{m}$, $\tilde{R}^{-,+}_{m}$, $T_{p,q,r}$ $(p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}<1)$, $X_{1,p}$ $(p>0)$, $Y^{1}_{r,s}$, $Z^{3}_{i,0}$, Z^{3}_{35+6i}, Z^{3}_{36+6i}, Z^{3}_{37+6i}, $Z^{3}_{i,p}$ *кратность показателя особости равна* 1, *для всех остальных критических точек таблиц* 1—5 *кратность показателя особости равна* 0. *Для всех критических точек таблиц* (*кроме* P^{+}_{8+k}, $\tilde{R}^{+,+}_{m}$, $\tilde{R}^{-,-}_{m}$, $\tilde{T}_{p,m}$) *коэффициент* $a_{K,\beta}$ *старшего члена асимптотического ряда* (2) *равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы. Для критических точек типов* P^{+}_{8+k}, $\tilde{R}^{+,+}_{m}$, $\tilde{R}^{-,-}_{m}$, $\tilde{T}_{p,m}$ *справедливо то же утверждение о мнимой части коэффициента* $a_{K,\beta}$.

Доказательства этих утверждений см. в § 31.

28.2. Формулировка результатов. Основные результаты этой главы формулируются в терминах многогранников Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы. Многогранник Ньютона — это выпуклый многогранник, образованный показателями одночленов, присутствующих в ряде Тейлора. Мы рассматриваем класс критических точек с фиксированным многогранником Ньютона и доказываем, что почти все критические точки класса имеют единый показатель осцилляции. Мы доказываем формулу, выражающую этот общий показатель осцилляции через геометрию многогранника Ньютона. Исключение составляют критические точки, у которых коэффициенты ряда Тейлора удовлетворяют конечному множеству явно указанных алгебраических условий.

Класс критических точек с фиксированным многогранником Ньютона полезно рассматривать при изучении дискретных инвариантов критических точек. Как правило, инвариант принимает единое значение для почти всех точек класса; его общее значение просто выражается через геометрию многогранника Ньютона (см. п. 28.2.Г, 25.5, а также [37], [38], [49], [75], [126], [136], [146], [148], [221]—[224], [227], [350], [351], [365], [462], [481], [443]).

А. Многогранник Ньютона. Рассмотрим положительный октант пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. множество точек с неотрицательными координатами. Определим многогранник Ньютона произвольного подмножества октанта, состоящего из точек с целыми координатами. В каждую точку подмножества перенесем параллельно положительный октант. *Многогранником Ньютона* называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ объединения всех построенных октантов. Многогранник Ньютона является выпуклым многогранником с вершинами в точках с неотрицательными целыми координатами. Вместе с каждой точкой он содержит положительный октант, параллельно перенесенный в эту точку. *Диаграммой Ньютона* подмножества называется объединение всех компактных граней его многогранника Ньютона.

Рассмотрим степенной ряд $f = \sum a_k x^k$ с вещественными или комплексными коэффициентами (здесь $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $x^k = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$). *Носителем ряда* называется множество показателей всех одночленов, входящих в ряд с ненулевыми коэффициентами. Носитель ряда является подмножеством положительного октанта, состоящим из точек с неотрицательными целыми координатами. Выбросим из носителя начало координат (если оно входит в носитель). Полученное множество называется *приведенным носителем*

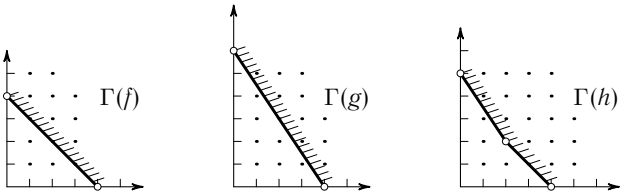


Рис. 130

ряда. *Многогранником Ньютона степенного ряда* называется многогранник Ньютона его приведенного носителя. *Диаграммой Ньютона степенного ряда* называется диаграмма Ньютона его приведенного носителя.

Многогранник Ньютона обозначается через Γ, диаграмма Ньютона обозначается через Δ.

Пример. Для функций $f = (x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^5$, $g = (x_1^2 - x_2^3)^2$, $h = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_1^5 + x_2^5$ многогранники Ньютона и диаграммы Ньютона рядов Тейлора в начале координат изображены на рис. 130.

Для любой грани γ многогранника Ньютона степенного ряда γ-*частью* этого степенного ряда называется степенной ряд, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат грани γ; при этом каждый одночлен

входит с тем коэффициентом, с каким он входит в исходный степенной ряд. Если грань γ компактна, то γ-часть — многочлен. *Главной частью* степенного ряда называется многочлен, составленный из одночленов, показатели которых принадлежат диаграмме Ньютона степенного ряда; при этом одночлены входят с теми коэффициентами, с которыми они входят в исходный степенной ряд. γ-часть ряда f обозначается через f_γ, главная часть ряда обозначается через f_Δ.

Пример. Для функций из предыдущего примера главными частями рядов Тейлора являются многочлены $f_\Delta = (x_1^2 + x_2^2)^2$, $g_\Delta = (x_1^2 - x_2^3)^2$, $h_\Delta = (x_1 + x_2)^2 x_1^2 + x_2^5$.

Б. Невырожденность главной части. Определим понятие невырожденности главной части степенного ряда. В дальнейшем мы увидим, что функции, ряды Тейлора которых имеют невырожденную главную часть, обладают хорошими свойствами: их дискретные характеристики просто выражаются через геометрию их многогранников Ньютона; см. п. 28.2.Г.

Определение (см. [146], [365]). Главная часть степенного ряда f с вещественными коэффициентами (соответственно — степенного ряда с комплексными коэффициентами) называется $\mathbb{R}$-*невырожденной* (соответственно, $\mathbb{C}$-*невырожденной*), если для любой компактной грани γ многогранника Ньютона ряда многочлены $\partial f_\gamma/\partial x_1, \ldots, \partial f_\gamma/\partial x_n$ не имеют общих нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ (соответственно в $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$).

Пример. Все главные части предыдущего примера $\mathbb{C}$-вырождены, главная часть f_Δ $\mathbb{R}$-невырождена, главные части g_Δ, h_Δ $\mathbb{R}$-вырождены.

Замечание. Для любой компактной грани γ многочлен γ-части квазиоднороден. По теореме Эйлера об однородных функциях общие нули в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ всех первых частных производных многочлена γ-части лежат на многообразии нулевого уровня многочлена γ-части.

Следующая лемма показывает, что рядов с вырожденными главными частями мало.

Лемма 1 (см. [146], [365]). *Множество $\mathbb{R}$-вырожденных (соответственно, $\mathbb{C}$-вырожденных) главных частей является собственным полуалгебраическим (соответственно, конструктивным) подмножеством в пространстве всех главных частей, отвечающих данному многограннику Ньютона, дополнение к которому всюду плотно.*

Доказательство. Для фиксированной компактной грани γ многогранника Ньютона докажем, что в пространстве многочленов, являющихся γ-частью, полуалгебраическое подмножество составляют те многочлены, у которых многообразие нулевого уровня имеет особые точки в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$, и дополнение к нему всюду плотно.

Полуалгебраичность гарантирует теорема Тарского—Зайденберга (см. [109], [452]). Докажем плотность дополнения. Многообразие нулевого уровня задается уравнением $\sum_{k\in\gamma} c_k x^k = 0$. Выделим один из этих мономов. Тогда многообразие нулевого уровня в $(\mathbb{R}\setminus 0)^n$ можно задать уравнением

$$c_{k_0} = -\sum_{k\in\gamma\setminus k_0} c_k x^{k-k_0}.$$

По теореме Бертини—Сарда только конечное множество значений коэффициента c_{k_0} (при фиксированных остальных коэффициентах) отвечает особому многообразию нулевого уровня. Лемма доказана.

В. Расстояние до многогранника и удаленность многогранника. При исследовании осциллирующих интегралов используются геометрические характеристики многогранника Ньютона, называемые расстоянием до многогранника и удаленностью многогранника. Рассмотрим биссектрису положительного октанта в $\mathbb{R}^n$, т. е. прямую, состоящую из точек с равными координатами. Биссектриса пересекается с границей многогранника Ньютона ровно в одной точке. Эта точка называется *центром границы* многогранника Ньютона. Координата центра (с произвольным номером) называется *расстоянием до многогранника Ньютона*. *Удаленностью многогранника Ньютона* называется взятая с минусом величина, обратная к расстоянию.

Пример. Для функций f, g, h из примера на с. 442 расстояния до многогранников Ньютона равны соответственно 2, 12/5, 2, удаленности многогранников Ньютона равны соответственно $-1/2$, $-5/12$, $-1/2$.

Чем дальше от начала координат расположен многогранник Ньютона, тем больше его удаленность. Назовем многогранник Ньютона *далеким*, если его удаленность больше -1. Другими словами, многогранник Ньютона далекий, если ему не принадлежит точка $(1, \ldots, 1)$.

Рассмотрим открытую грань, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона. Уменьшенная на 1 коразмерность этой грани называется *кратностью* удаленности. В частности, если указанная грань есть вершина многогранника, то кратность равна $n-1$, если указанная грань есть ребро многогранника, то кратность равна $n-2$, и т. д.

Пример. Для функций f, g, h из примера на с. 442 кратность удаленности их многогранников Ньютона равна соответственно 0, 0, 1.

Г. Формулировка основного результата. Основной результат этой главы гласит: показатель осцилляции критической точки фазы определяется удаленностью многогранника Ньютона ее ряда Тейлора (при условиях, сформулированных в следующих двух теоремах).

Теорема 4 (см. [49]). *Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. Предположим, что главная*

часть ряда Тейлора фазы в этой критической точке $\mathbb{R}$*-невырождена и многогранник Ньютона этого ряда далекий. Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен удаленности многогранника Ньютона.*

Пример 1. Вырожденная критическая точка в начале координат фазы $x_1^{k_1} + x_2^{k_2}$ удовлетворяет условиям теоремы. Ее показатель осцилляции равен $-1/k_1 - 1/k_2$.

Пример 2. Критическая точка в начале координат фазы f из примера на с. 442 удовлетворяет условиям теоремы. Ее показатель осцилляции равен $-1/2$.

Следующие утверждения дополняют теорему.

а) Пусть выполнены условия теоремы; тогда кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна кратности удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой критической точке.

б) Если главная часть ряда Тейлора критической точки фазы $\mathbb{R}$-невырождена, то показатель осцилляции критической точки не больше удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.

в) Рассмотрим критическую точку в начале координат фазы $x_4^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9 + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))x_5$. Тогда главная часть ряда Тейлора критической точки $\mathbb{R}$-невырождена; удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора меньше -1; показатель осцилляции критической точки меньше удаленности многогранника Ньютона.

г) Если многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы далекий, то показатель осцилляции критической точки фазы не меньше удаленности многогранника.

д) Если многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки фазы далекий и эта критическая точка конечнократна, то коэффициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла (коэффициент $a_{K,\beta}$ ряда (2) на с. 437) равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

е) Пусть главная часть ряда Тейлора критической точки фазы $\mathbb{R}$-невырождена и удаленность многогранника Ньютона равна -1. Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен -1, если выполнено хотя бы одно из двух условий:

открытая грань, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, имеет размерность меньше $n - 1$;

замыкание γ открытой грани, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона, компактно, и γ-часть ряда Тейлора имеет нули на $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

ж) Если выполнены предположения дополнения е), то кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна кратности удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора или на 1 меньше кратности удаленности.

Теорема 4 и дополнения а), б), г), д), е), ж) доказаны в § 30, дополнение в) доказано в § 31.

Согласно теореме 4 показатель осцилляции критической точки фазы можно выразить через многогранник Ньютона ее ряда Тейлора, если главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$-невырождена и многогранник Ньютона ряда Тейлора далекий. Система координат, в которой ряд Тейлора обладает такими свойствами, существует не всегда. Например, ее нет для критической точки в начале координат функции g из примера на с. 442. Тем не менее для критических точек функций двух переменных предположение о существовании указанной системы координат можно отбросить.

Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. *Удаленностью критической точки* фазы называется верхняя грань удаленностей многогранников Ньютона рядов Тейлора фазы во всех системах локальных аналитических координат с началом в критической точке.

Локальная система аналитических координат с началом в критической точке фазы называется *приспособленной* к критической точке, если удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой системе координат имеет наибольшее возможное значение, равное удаленности критической точки.

Теорема 5 (см. [49]). *Пусть фаза — аналитическая функция двух переменных в окрестности своей критической точки. Тогда показатель осцилляции критической точки равен ее удаленности.*

Следующие утверждения дополняют теорему.

а) В условиях теоремы существует система координат, приспособленная к критической точке.

б) Если критическая точка фазы двух переменных конечнократна, то коэффициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла (коэффициент $a_{K,\beta}$ ряда (2) на с. 437) равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.

в) Показатель осцилляции больше удаленности для критической точки в начале координат фазы $(-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^9 + x_2^9 + x_3^9$ трех переменных.

Теорема 5 и дополнения а), б) обсуждаются в п. 30.4, дополнение в) доказано в § 31 (см. также [49]).

В [49] описан алгоритм нахождения системы координат, приспособлен-

ной к критической точке фазы двух переменных. Для нахождения приспособленных координат полезна следующая лемма.

Л е м м а 2 (см. [49]). *Локальная система координат с началом в критической точке фазы двух переменных приспособлена к критической точке, если выполнено хотя бы одно из следующих условий.*

а) *Центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора фазы в этой системе координат является вершиной многоугольника.*

б) *Центр границы многоугольника Ньютона лежит на некомпактном ребре многоугольника.*

в) *Центр границы многоугольника Ньютона лежит на компактном ребре многоугольника, и ни тангенс, ни котангенс угла, образованного ребром и первой осью координат в* $\mathbb{R}^2$, *не равны целому числу* (*отметим, что перенумерация осей меняет тангенс с котангенсом и не влияет на выполнение сформулированного условия*).

П р и м е р. Рассмотрим функции g, h из примера на с. 442. Система координат x_1, x_2 приспособлена к критическим точкам этих функций (соответственно в силу п. в), а) леммы 2). По теореме 5 показатели осцилляции равны соответственно $-5/12$, $-1/2$.

З а м е ч а н и е 1. Утверждение о том, что коэффициент при старшем члене асимптотического ряда пропорционален значению амплитуды в критической точке (см. дополнения теорем 4, 5), можно использовать при решении следующей задачи интегральной геометрии, поставленной И. М. Гельфандом в 1957 г. на конгрессе в Амстердаме.

З а д а ч а. Пусть φ — гладкая функция с носителем, сосредоточенным в малой окрестности критической точки гладкой функции f. Зная интегралы функции φ по всем гиперповерхностям уровня функции f, восстановить значение функции φ в указанной критической точке.

Для решения этой задачи достаточно взять коэффициент при старшем члене асимптотического ряда осциллирующего интеграла с фазой f и амплитудой φ, если критическая точка функции f конечнократна и ее удаленность больше -1. Подробнее см. в п. 29.3.

З а м е ч а н и е 2. Показатель особости неотрицателен для критических точек фаз одной и двух переменных (см. теоремы 4, 5), для критических точек, удовлетворяющих условиям дополнения г) теоремы 4. Пользуясь дополнением г) теоремы 4, можно доказать, что показатель особости неотрицателен для критических точек фаз трех переменных. По-видимому, показатель особости неотрицателен всегда. Это означает, что, гипотетически, порядок сложного коротковолнового колебания в каустической точке всегда больше порядка сложного коротковолнового колебания в некаустической точке (см. п. 28.1.А, 28.1.Г). В частности, световая каустика, по-видимому, всегда выделяется своей яркостью.

В § 35 определен комплексный показатель особости критической точки голоморфной функции. Комплексный показатель особости всегда неотрицателен, см. п. 35.3. Доказательство этого факта использует связь асимптотик интегралов и смешанных структур Ходжа.

28.3. Разрешение особенностей. Доказательство теорем 3—5 использует разрешение особенностей критической точки фазы.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x. Предположим, что значение функции в этой точке равно 0. *Разрешением особенностей критической точки* называются n-мерное аналитическое многообразие Y и его аналитическое отображение $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^n$, обладающие следующими свойствами.

1. В каждой точке прообраза критической точки x найдется система локальных координат, в которой функция $f \circ \pi$ и якобиан отображения π равны одночленам с точностью до умножения на не обращающиеся в нуль функции.

2. В малой окрестности критической точки x найдется собственное аналитическое подмножество, вне которого в этой окрестности отображение π аналитически обратимо.

3. Прообраз любого компакта из малой окрестности точки x компактен.

Замечание 1. Из первого условия, в частности, следует, что в окрестности прообраза точки x гиперповерхность нулевого уровня функции $f \circ \pi$ локально устроена как объединение координатных гиперплоскостей.

Замечание 2. Иногда требования к отображению π усиливают, заменяя свойство 2 на свойство $2'$ или даже на свойство $2''$ и добавляя свойство 4.

$2'$. В малой окрестности точки x отображение π обратимо вне гиперповерхности нулевого уровня функции f.

$2''$. В малой окрестности точки x отображение π обратимо вне критического множества функции f.

4. В малой окрестности прообраза точки x гиперповерхность нулевого уровня функции $f \circ \pi$ является объединением неособых $(n-1)$-мерных подмногообразий.

Теорема 6 (Хиронака; см. [220], [257]). *Существует разрешение особенностей* (*со свойствами* 1, $2''$, 3, 4) *критической точки аналитической функции.*

Эта теорема сформулирована в [257], она является частным случаем общей теоремы Хиронаки о разрешении особенностей (см. [220]).

Замечание 3. Понятие разрешения особенностей имеет естественный комплексный аналог. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x. Разрешением называются n-мерное комплексное аналитическое многообразие Y и его аналитиче-

ское отображение $\pi\colon Y \to \mathbb{C}^n$, которые обладают сформулированными выше свойствами. И в этом случае справедлива теорема Хиронаки.

Теорема Хиронаки сводит исследование осциллирующего интеграла с аналитической фазой к исследованию суммы осциллирующих интегралов, фаза каждого из которых — одночлен. Для этого в интеграле надо сделать замену переменных с помощью отображения π. Осциллирующие интегралы с одночленной фазой называются *элементарными*. Элементарные интегралы изучаются в § 29. Для них несложно указать показатель осцилляции, его кратность, множество показателей. Поэтому при исследовании осциллирующего интеграла с аналитической фазой важно знать разрешение особенностей фазы, уметь следить за тем, как асимптотический ряд для исследуемого интеграла складывается из асимптотических рядов элементарных интегралов, следить за тем, не сокращаются ли при этом старшие члены. Результатом такого анализа является выражение показателя осцилляции и аналогичных характеристик в терминах разрешения особенностей фазы (теорема 29.5). Теоремы 4, 5 — это переформулировки свойств разрешения особенностей, участвующих в этом анализе, в терминах многогранников Ньютона.

28.4. Асимптотики объемов. Асимптотики осциллирующего интеграла тесно связаны с асимптотиками объема множества тех точек, в которых фаза принимает значения, меньшие, чем заданное число, при изменении этого числа и стремлении его к критическому значению фазы.

А. Форма Гельфанда — Лере. При изучении осциллирующих интегралов очень полезен следующий прием, сводящий многомерный осциллирующий интеграл к одномерному. Прием состоит в применении теоремы Фубини. А именно, рассмотрим осциллирующий интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Используя теорему Фубини, сведем интеграл к повторному, в котором сначала интегрируем вдоль гиперповерхностей уровня фазы, а затем по оставшейся переменной — значению фазы. Для этого в интеграле перейдем к новым переменным, одна из которых — фаза.

Сделаем два замечания. Во-первых, фазу можно брать в качестве переменной только вне ее критических точек. Поэтому исключим из рассмотрения объединение гиперповерхностей критических уровней фазы. Объединение этих гиперповерхностей имеет нулевую меру и не влияет на интеграл. Во-вторых, для интегрирования по гиперповерхностям уровня не нужно знать каждую из остальных новых переменных. Достаточно знать на гиперповерхностях уровня форму $(n-1)$-мерной плотности, которая после умножения на дифференциал фазы становится формой объема пространства.

Такая форма плотности называется *формой Гельфанда—Лере* и обозначается $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$.

Итак, осциллирующий интеграл преобразован к виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t} \left(\int_{f=t} \varphi \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df \right) dt.$$

В этом представлении осциллирующий интеграл является преобразованием Фурье функции, задаваемой внутренним интегралом. Функция одной переменной, определяемая внутренним интегралом, называется *функцией Гельфанда—Лере*.

Функция Гельфанда—Лере — гладкая вне критических значений фазы. В окрестности критического значения фазы функция Гельфанда—Лере разлагается в асимптотический ряд вида $\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(t - t_0)^{\alpha}(\ln(t - t_0))^k$. Зная асимптотический ряд функции Гельфанда—Лере, можно определить асимптотический ряд осциллирующего интеграла, и наоборот, асимптотики осциллирующего интеграла дают информацию об асимптотиках функции Гельфанда—Лере. Эти свойства функции Гельфанда—Лере обсуждаются в § 29.

Б. Объем множества меньших значений. Предположим, что фаза имеет изолированный минимум и минимальное значение фазы равно нулю. Предположим также, что амплитуда в окрестности точки минимума тождественно равна 1. Обозначим через J функцию Гельфанда—Лере и рассмотрим новую функцию $V(t) = \int_0^t J(s)\, ds$. Очевидно, что при отрицательных значениях аргумента эта функция равна нулю, а при малых положительных значениях аргумента эта функция равна объему множества точек, в которых фаза принимает значения, меньшие заданного. Таким образом, асимптотики функции объема множества меньших значений определяют асимптотики осциллирующего интеграла в случае, когда фаза имеет изолированный минимум, а амплитуда равна константе в окрестности точки минимума фазы.

Укажем порядки скорости стремления к нулю объема множества меньших значений для простейших изолированных точек минимума. Классификация критических точек минимума, не устранимых малым шевелением из семейства функций, зависящих от не более чем 16 параметров, приведена В. А. Васильевым в [75], там же вычислены асимптотики объемов меньших значений. Согласно этой классификации единственными точками минимума, не устранимыми малым шевелением из семейств функций, зависящих от не более чем 5 параметров, являются точки минимума, в которых функция диффеоморфизмом пространства приводится к виду $A_s\colon x_1^{s+1} + x_2^2 + \ldots$ $\ldots + x_n^2$, где $s = 1, 3, 5$. При малых положительных t главный член асимп-

тотики объема множества меньших значений имеет вид $\mathrm{const} \cdot t^{-\beta+n/2}$, где β соответственно равно 0, $1/4$, $1/3$.

Сформулируем общую теорему о вычислении порядка скорости стремления к нулю объема множества меньших значений.

Т е о р е м а 7 (ср. [75]). *Предположим, что аналитическая функция имеет изолированный минимум и минимальное значение равно нулю. Тогда при $t \to +0$ функция V объема множества меньших значений разлагается в асимптотический ряд $\sum\limits_{\alpha} \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$. Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, составленных из положительных рациональных чисел. Если дополнительно известно, что ряд Тейлора функции в точке минимума имеет $\mathbb{R}$-невырожденную главную часть, то показатель α максимального члена асимптотического ряда равен взятой с минусом удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.*

Эта теорема доказана в п. 30.3.В.

З а м е ч а н и я. 1. При изменении формы объема пространства (т. е. при умножении ее на положительную функцию) порядок старшего члена предыдущего асимптотического ряда не меняется.

2. Предыдущий асимптотический ряд сходится при малых положительных значениях t.

В. П л о щ а д ь п о в е р х н о с т и у р о в н я. В п. 30.3.В сформулирована теорема о вычислении асимптотики площади компактной поверхности уровня при стремлении уровня к критическому.

Г. М н о ж е с т в о т о ч е к с м а л ы м г р а д и е н т о м. Еще одной характеристикой критической точки, подобной рассмотренным выше, является скорость стремления к нулю объема множества тех точек, в которых длина градиента меньше чем заданное число, при стремлении этого заданного числа к нулю.

Предположим, что в пространстве задана риманова метрика. Эта метрика (с помощью матрицы, обратной к матрице метрики) определяет метрику на кокасательном расслоении к пространству. В этой метрике вычислим квадрат длины градиента $\partial f = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n)$ рассматриваемой функции f. В окрестности выделенной критической точки функции для каждого малого положительного значения t рассмотрим объем $V(t)$ множества тех точек окрестности, в которых квадрат длины градиента меньше t. Будем интересоваться асимптотикой объема при $t \to +0$. Поскольку все метрики в окрестности точки взаимно ограничены, порядок главного члена асимптотики не зависит от выбора метрики.

П р и м е р. Для критических точек типов A_μ, D_4, D_μ ($\mu > 4$), E_6, E_7, E_8 главный член асимптотики функции V при $t \to +0$ имеет вид

const $\cdot\ t^{-\alpha+n/2}(\ln t)^k$, где (α, k) соответственно равны $((\mu-1)/2\mu, 0)$, $(1/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(7/12, 0)$, $(5/8, 0)$, $(5/8, 0)$.

Для вычисления асимптотики объема множества точек с малым градиентом можно пользоваться теоремой 7, примененной к функции (df, df), а также теоремами 4, 5.

28.5. Равномерные оценки. Наряду с асимптотиками индивидуальных осциллирующих интегралов часто бывает полезно знать равномерные оценки осциллирующих интегралов, зависящих от дополнительных параметров.

Определим понятия равномерной оценки и равномерного показателя осцилляции.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Назовем ее деформацией всякую гладкую функцию $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$, равную функции f при нулевом значении второго аргумента.

О п р е д е л е н и е. В критической точке x^0 фазы f имеет место *равномерная оценка с показателем* α, если для любой деформации F фазы f найдется такая окрестность в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ точки $x^0 \times 0$, что для любой гладкой функции φ с носителем в этой окрестности и для любого положительного ε существует число $C(\varepsilon, \varphi)$, для которого при всех положительных τ выполняется неравенство

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x,y)}\varphi(x, y)\,dx_1 \ldots dx_n\right| < C(\varepsilon, \varphi)\tau^{\alpha+\varepsilon}.$$

Нижняя грань таких чисел α называется *равномерным показателем осцилляции* фазы в критической точке.

Очевидно, что равномерный показатель осцилляции не меньше индивидуального.

Возникает естественное предположение, сформулированное В. И. Арнольдом в [10], [16], [249], что равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному показателю, т. е. что осциллирующий интеграл допускает равномерную по дополнительным параметрам оценку сверху величиной, пропорциональной значению интеграла при исходном значении дополнительных параметров.

Для справедливости этого предположения необходимо, чтобы индивидуальный показатель осцилляции был полунепрерывен сверху при непрерывных изменениях критической точки. А именно, необходимо, чтобы показатель осцилляции сложной критической точки был не меньше показателя осцилляции более простой критической точки, полученной при распадении сложной. Анализ таблиц показателей особостей и известных примыканий друг к другу критических точек, классифицированных в гл. II ч. I, показывает, что для них имеет место такая полунепрерывность.

Т е о р е м а 8. *Равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному для критических точек функций одной переменной* (И. М. Виноградов [81]), *для простых критических точек* (Дж. Дюистермаат [311]), *для параболических* (И. Колен де Вердье [289]), *для гиперболических критических точек серии* $T_{p,q,r}$ (В. Н. Карпушкин [140]), *для критических точек функций двух переменных* (В. Н. Карпушкин [138]).

С л е д с т в и е. *Для критических точек, встречающихся неустранимо в семействах фаз общего положения, зависящих от не более чем семи параметров, равномерный показатель осцилляции равен индивидуальному.*

Согласно теореме 8 при движении по каустике, отвечающей одной из критических точек, перечисленных в теореме, интенсивность коротковолнового колебания в предельной точке не меньше, чем интенсивность колебания в близкой допредельной точке. Удивительно, но это явление не имеет места для всех каустик. А именно, имеются примеры вырожденных критических точек фаз, для которых равномерный показатель осцилляции больше индивидуального (см. [49]).

Эти примеры изложены в § 31. Критические точки из построенных примеров очень вырождены, коразмерность таких критических точек порядка 80 и более (т. е. эти критические точки устранимы малым шевелением из семейств функций с меньшим числом параметров).

Согласно построенным примерам существуют критическая точка и ее деформация, обладающие следующим свойством. Показатель осцилляции критической точки при выделенном значении параметра деформации меньше, чем показатель осцилляции критической точки при общем значении параметра деформации, т. е. модуль осциллирующего интеграла при выделенном значении параметра деформации существенно меньше, чем модуль интеграла при общем значении параметра.

Было бы интересно выяснить, *можно ли указанное явление наблюдать физически в виде подмножества каустики, более темного по сравнению со своим окружением*? Как уже отмечалось, такое явление не наблюдается на каустиках общего положения в маломерных пространствах (теорема 8 и ее следствие).

З а м е ч а н и е. Доказательство В. Н. Карпушкина равенства равномерного и индивидуального показателей осцилляции для критических точек функций двух переменных основано на теореме 5. Как уже отмечалось, равенство равномерного и индивидуального показателей осцилляции возможно только при условии полунепрерывности сверху индивидуального показателя осцилляции при деформациях критической точки. Согласно теореме 5 для функций двух переменных это свойство полунепрерывности можно

переформулировать так: пусть задано произвольное семейство функций двух переменных, зависящих от параметра и имеющих критическую точку в начале координат, тогда удаленность этой критической точки полунепрерывно сверху зависит от параметра. Вероятно, это утверждение справедливо для функций любого числа переменных. Интересная задача в этой области — выразить равномерный показатель осцилляции через другие характеристики критической точки (многогранники Ньютона, разрешение особенностей и т. п.). Быть может, равномерный показатель осцилляции выражается через удаленности критических точек, стабильно эквивалентных данной. Другим вероятным кандидатом для выражения равномерного показателя осцилляции является комплексный показатель осцилляции, определенный в § 35. Комплексный показатель осцилляции определяется для критической точки голоморфной функции, он является комплексным аналогом показателя осцилляции. Б. Мальгранж в [389] сформулировал гипотезу о полунепрерывности комплексного показателя осцилляции при деформациях критической точки. Комплексный показатель осцилляции является одним из спектральных чисел критической точки голоморфной функции (спектр определен в § 35). В п. 36.3 сформулирована гипотеза В. И. Арнольда о полунепрерывности спектра при деформациях критической точки, доказанная в [64]—[68], [464].

В этой главе изучаются асимптотики индивидуальных осциллирующих интегралов. В этом пункте мы обсудили их равномерные оценки. Есть еще один подход к оценкам интегралов — это оценки в среднем. Сформулируем соответствующий результат.

Рассмотрим осциллирующий интеграл, зависящий от дополнительных параметров,

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x,y)} \varphi(x, y)\, dx_1, \ldots, dx_n.$$

Обозначим через Σ множество критических точек фазы, т. е.

$$\Sigma = \{(x, y)\colon \partial F/\partial x_j(x, y) = 0, j = 1, \ldots, n\}.$$

Т е о р е м а 9 (см. [311]). *Предположим, что Σ — подмногообразие, т. е. дифференциалы $d(\partial F/dx_j)$, $j = 1, \ldots, n$, линейно независимы в каждой точке множества Σ. Предположим, что носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности одной из точек множества Σ. Тогда при $\tau \to +\infty$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\int |I(\tau, y)|^2 dy \approx \sum_{l=n}^{\infty} a_l(\varphi)\tau^{-l},$$

где числовые коэффициенты a_l являются обобщенными функциями амплитуды с носителями на Σ. В частности, старший коэффици-

ент a_n пропорционален интегралу квадрата модуля амплитуды по критическому множеству Σ.

Это утверждение соответствует утверждению об унитарности канонического оператора Маслова (см. [166]—[168], [104]) и означает, что хотя при индивидуальных значениях дополнительных параметров асимптотическое поведение интеграла имеет сложный характер, интеграл от квадрата модуля осциллирующего интеграла ведет себя так же, как если бы фаза имела только невырожденные критические точки по переменным интегрирования.

Доказательство теоремы 9 основано на том, что интеграл от квадрата модуля есть осциллирующий интеграл. Его фаза $F(x, y) - F(z, y)$ имеет критические точки на множестве $\{(x, y, z)\colon x = z, (x, y) \in \Sigma\}$ (если x, z достаточно близки), критические точки невырождены в трансверсальном направлении к этому множеству.

28.6. Число целых точек в семействе гомотетичных областей. В пространстве $\mathbb{R}^n$ рассмотрим ограниченную область D с гладкой границей. Мы будем оценивать разность между объемом области, растянутой в λ раз, и числом $N(\lambda)$ точек с целыми координатами, находящихся в растянутой области, т. е. разность

$$R(\lambda) = \lambda^n V(D) - N(\lambda).$$

Изучение этого вопроса мотивируется следующими причинами (см. [289]).

1) Случай, в котором D есть эллипсоид, рассматривался в теории чисел в связи с исследованием арифметических свойств квадратичных форм (см. [137], [363]).

2) Если область D определена условием $\{f \leqslant 1\}$, где $f\colon \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}_+$ — гладкая однородная функция (скажем, однородный многочлен), то функция $N(\lambda)$ интерпретируется как спектральная функция псевдодифференциального оператора P на торе $\mathbb{R}^n/(2\pi\mathbb{Z})^n$, заданного своим спектральным разложением

$$P(\exp(i\langle k, x\rangle)) = f(k)\exp(i\langle k, x\rangle).$$

3) Аналогичным образом исследуется проблема, возникающая при численном интегрировании: пусть f — гладкая функция и $N_f(\lambda) = \sum\limits_{x \in \lambda D \cap \mathbb{Z}^n} f(x/\lambda)$. Требуется оценить разность $R_f(\lambda) = \lambda^n \int_D f\,dx - N_f(\lambda)$.

Разность $R(\lambda)$ оценивают степенью параметра λ: $R(\lambda) = O(\lambda^\beta)$

Тривиальная оценка для любой области получается, если взять $\beta = n - 1$. Действительно, разность $R(\lambda)$ меньше, чем объем окрестности ширины $2\sqrt{n}$ границы растянутой области.

Для шара радиуса 1 с центром в начале координат $\beta \geqslant n - 2$. Точнее, найдется сколь угодно большое λ, для которого на сфере $\lambda\partial D$

лежит $\sim \lambda^{n-2}$ точек с целыми координатами. Действительно, рассмотрим целые точки, лежащие между сферами $(\lambda+1)\partial D$ и $\lambda\partial D$. Их число пропорционально объему, т. е. пропорционально величине $(\lambda+1)^n - \lambda^n \sim \lambda^{n-1}$. Между этими сферами проходит приблизительно λ сфер с центром в начале координат, у которых квадрат радиуса — целое число. Поэтому λ^{n-1} целых точек лежит на λ сферах, и, значит, найдется сфера, на которой лежит не меньше чем $\sim \lambda^{n-2}$ точек.

Наилучшее (наименьшее) число β зависит от вида области. Наиболее исследован случай области на плоскости.

Теорема 10 (см. [430], [432], [289]). *Предположим, что $n=2$. Обозначим через l максимальный порядок обращения в нуль кривизны границы области. Тогда если $l=0$ или 1 (это ситуация общего положения), то в качестве β можно взять $2/3$. Если $l \geqslant 1$, то в качестве β можно взять $1-1/(l+2)$. Более того, если $l \geqslant 2$, то, вообще говоря, β нельзя взять меньшим (например, для $D=\{x^{2k}+y^{2k} \leqslant 1\}$).*

В многомерной ситуации исследован только случай строго выпуклой области и при $n \leqslant 7$ случай области с границей, находящейся в общем положении.

Теорема 11 (см. [430], [431]). *Если область $D \subset \mathbb{R}^n$ выпукла и вторая квадратичная форма ее границы невырождена, то в качестве β можно взять $n-2+2/(n+1)$.*

Теорема 12 (см. [289]). *Предположим, что $n \leqslant 7$. Пусть X — компактное ориентированное гладкое многообразие размерности $n-1$. Тогда существует открытое всюду плотное подмножество в пространстве всех вложений многообразия X в $\mathbb{R}^n$, обладающее следующим свойством: если вложение принадлежит подмножеству и образ вложения ограничивает область в $\mathbb{R}^n$, то для этой области в качестве числа β можно взять $n-2+2/(n+1)$.*

Как показывает пример шара с центром в начале координат, оценку с $\beta = n-2+2/(n+1)$, вообще говоря, нельзя существенно улучшить.

А. Формула суммирования Пуассона. Объясним, каким образом оценка числа целых точек связана с осциллирующими интегралами.

Число точек целочисленной решетки в растянутой области λD равно числу точек уплотненной решетки $\frac{1}{\lambda}\mathbb{Z}^n$ в исходной области. Будем для простоты предполагать, что λ — натуральное число и что область D лежит в стандартном n-мерном кубе с ребрами длины 1. В этом случае мы можем рассматривать область как область тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ и подсчитывать на торе точки проекции решетки $\frac{1}{\lambda}\mathbb{Z}^n$, попавшие в D. Обозначим через χ харак-

теристическую функцию области D, т. е. функцию, равную 1 на D и равную 0 на ее дополнении $\bar{D}$. Тогда

$$R(\lambda) = \lambda^n \int_{\mathbb{T}^n} \chi \, dx - \sum_{0 \leqslant x_1, \ldots, x_n \leqslant \lambda - 1} \chi(x/\lambda).$$

Разложим характеристическую функцию в ряд Фурье:

$$\chi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{\chi}(k) \exp(2\pi i \langle k, x \rangle),$$

и рассмотрим аналогичную разность для каждого члена ряда:

$$\lambda^n \int \exp(2\pi i \langle k, x \rangle) \, dx - \sum_x \exp(2\pi i \langle k, x \rangle / \lambda).$$

Для $k = 0$ эта разность равна нулю. Если $k \neq 0$, то равен нулю первый член этой разности, и остается вычислить второй член. Второй член является произведением сумм n геометрических прогрессий. Суммируя их, получаем, что второй член разности равен нулю, если хотя бы одна из координат вектора k не делится на λ. Если же все координаты вектора k делятся на λ, то сумма равна $-\lambda^n$. Это соображение показывает, что

$$R(\lambda) = -\lambda^n \sum_{k \in \lambda \mathbb{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(k) = -\lambda^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n \setminus 0} \hat{\chi}(\lambda k). \tag{3}$$

Эта формула называется *формулой суммирования Пуассона*. К сожалению, для характеристической функции она неверна: при выводе формулы мы переставили порядки суммирования по k и суммирования по точкам уплотненной решетки. Для справедливости формулы Пуассона достаточно, чтобы ряд Фурье мажорировался абсолютно сходящимся рядом с постоянными коэффициентами. В частности, формула Пуассона справедлива для всякой гладкой финитной функции χ на $\mathbb{R}^n$.

Для исследования разности $R(\lambda)$ сначала сглаживают характеристическую функцию, затем применяют формулу Пуассона и исследуют ее правую часть (см., например, [289]). Для сглаживания характеристическую функцию свертывают с эталонной функцией. Преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье характеристической функции и эталонной. Поэтому при изучении правой части формулы Пуассона, примененной к сглаженной характеристической функции, важно знать, как ведут себя коэффициенты Фурье $\hat{\chi}(\lambda k)$ характеристической функции при $\lambda \to \infty$. Коэффициенты Фурье — это осциллирующие интегралы.

Б. Преобразование Фурье характеристической функции. Коэффициент Фурье

$$\hat{\chi}(k) = \int_D \exp(-2\pi i \langle k, x\rangle)\, dx$$

является осциллирующим интегралом, в котором роль большого параметра играет длина вектора k, а роль фазы играет функция $-\langle \alpha(k), x\rangle$, где $\alpha(k) = k/\|k\|$ — соответствующий вектор единичной длины. Этот интеграл по формуле Стокса преобразуется в осциллирующий интеграл по границе области. Фазой нового интеграла по-прежнему служит функция $-\langle \alpha(k), x\rangle$. Следовательно, величина коэффициента Фурье $\hat{\chi}(k)$ при больших длинах вектора k определяется критическими точками ограничения на границу линейной функции $\langle \alpha(k), x\rangle$. Например, если область выпукла и вторая квадратичная форма границы невырождена, то все критические точки ограничения невырождены и $\hat{\chi}(k) \sim \|k\|^{-(n+1)/2}$ (теорема 2).

Разберем подробнее случай области на плоскости. Критические точки ограничения функции $\langle \alpha(k), x\rangle$ на кривую ∂D — это те точки, в которых вектор нормали к кривой равен $\pm\alpha(k)$. Если в такой точке кривизна кривой отлична от нуля, то критическая точка невырождена и ее вклад в коэффициент Фурье имеет порядок $\|k\|^{-3/2}$. Если в точке границы с нормалью $\pm\alpha(k)$ кратность нуля кривизны равна l, то критическая точка имеет тип A_{l+1} и в этом случае ее вклад в коэффициент Фурье имеет порядок $\|k\|^{-1-1/(l+2)}$. Нормаль в точке границы, в которой обращается в нуль кривизна, может иметь иррациональный тангенс наклона. Такая точка границы не будет критической ни для одной функции $\langle \alpha(k), x\rangle$. Вклад такой точки в сумму (3) определяется тем, с какой скоростью тангенс наклона ее нормали приближается рациональными числами. Если тангенс наклона хорошо приближается рациональными числами со сравнительно небольшими числителем и знаменателем, то критические точки ограничения линейной функции $\langle \alpha(k), x\rangle$ с вектором k сравнительно небольшой длины будут почти вырожденными и будут давать большой вклад в сумму (3). В общем положении кривая на плоскости имеет в качестве вырождений только точки перегиба, т. е. у кривой общего положения кратности нулей функции кривизны не больше 1. Поэтому для кривой общего положения критические точки ограничения на границу линейной функции либо невырождены, либо имеют тип A_2. Следовательно, в общем положении можно ожидать, что $R(\lambda) \sim \lambda^{2/3}$. Эти рассуждения объясняют теорему 10.

В. Оценка, усредненная по поворотам. Основной вклад в коэффициенты Фурье характеристической функции области дают окрестности тех точек границы, в которых нормаль имеет рациональное направление и кривизна обращается в нуль. Ранделу принадлежит идея о том,

что после поворота области таких точек, вообще говоря, не будет и средняя по поворотам оценка может быть лучше индивидуальной оценки.

Теорема 13 (см. [432], [433], [61], [63]). *Обозначим через ds меру Хаара на специальной ортогональной группе SO_n. Обозначим через $P(\lambda, s)$ разность, соответствующую области, растянутой в λ раз и затем повернутой преобразованием $s \in SO_n$. Тогда*

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)|\, ds = O(\lambda^{n-2+2/(n+1)}).$$

Теорема 14 (см. [432], [433], [61], [63]). *Обозначим через G группу всех движений вида st, где $s \in SO_n$, t — параллельный перенос пространства $\mathbb{R}^n$. Пусть $I \subset G$ — подгруппа всех параллельных переносов на векторы с целыми координатами. Обозначим через H факторпространство G/I. Пространство H топологически эквивалентно $SO_n \times \mathbb{T}^n$, где $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ — n-мерный тор. Обозначим через dh меру Хаара на H. Тогда*

$$\left(\int_H |R(\lambda, h)|^2 dh\right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

Аналог теоремы 13 для многогранников в $\mathbb{R}^n$ доказан Тарнопольска-Вейсс.

Теорема 15 (см. [466]). *Пусть D — многогранник, в $\mathbb{R}^n$, содержащий начало координат и обладающий следующим свойством: продолжения его граней не проходят через начало координат. Тогда*

$$\int_{SO_n} |R(\lambda, s)|\, ds = O((\ln \lambda)^{2+\delta}).$$

Доказательства теорем 13, 14 основаны на оценке квадрата модуля коэффициента Фурье характеристической функции области.

Теорема 16 (см. [61], [63]). *При $\|k\| \to \infty$ справедлива оценка*

$$\int_{SO_n} |\hat{\chi}(k, s)|^2\, ds = O(\|k\|^{-(n+1)}). \tag{4}$$

Если граница области зависит бесконечно дифференцируемым образом от дополнительных параметров, то эта оценка равномерна по дополнительным параметрам при условии, что параметры мало отличаются от исходных значений.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 9.

Выведем теорему 14 из теоремы 16. Каждый элемент $h \in H$ однозначно представляется в виде st, где $s \in SO_n$, $t \in \mathbb{T}^n$. Зафиксируем s. Тогда $R(\lambda, h)$ — функция на $\mathbb{T}^n$. Разложим ее в ряд Фурье:

$$R(\lambda, st) = \sum_k a(\lambda, s, k) e^{2\pi i \langle k, t\rangle}.$$

Простое прямое вычисление показывает, что $a(\lambda, s, 0) = 0$, $a(\lambda, s, k) = (-1)^{n+1}\hat{\chi}(-\lambda k, s)\lambda^n$. Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\int_{SO_n}\left(\int_{\mathbb{T}^n}|R(\lambda, st)|^2 dt\right) ds = \int_{SO_n}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n\setminus 0}\lambda^{2n}|\hat{\chi}(-\lambda k, s)|^2 ds.$$

Теперь теорема 14 следует из (4).

Замечание. Для области, граница которой имеет невырожденную вторую квадратичную форму, справедлива оценка $\hat{\chi}(k) \sim \|k\|^{-(n+1)/2}$ (см. п. Б). Поэтому для такой области

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n}|R(\lambda, t)|^2\, dt\right)^{1/2} = O(\lambda^{(n-1)/2}).$$

Д. Доказательство теоремы 12 основано на двух интересных утверждениях о равномерных оценках осциллирующих интегралов, зависящих от дополнительных параметров. В этих утверждениях предполагается, что все критические точки фазы простые или параболические.

Теорема 17 (см. [289]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$I(\tau, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau F(x,y)}\varphi(x, y)\, dx.$$

Предположим, что при каждом значении дополнительных параметров все критические точки фазы этого интеграла являются простыми или параболическими. Тогда имеет место неравенство

$$|I(\tau, y)| \leqslant \text{const}\cdot\tau^{-n/2}\sum_{(x,y)\in\Sigma\cap\operatorname{supp}\varphi}|\det F''_{xx}(x, y)|^{-1/2},$$

где через Σ обозначено множество всех критических точек фазы по переменным интегрирования, через F''_{xx} обозначена матрица вторых производных фазы по переменным интегрирования.

Чтобы сформулировать следующую теорему, сделаем несколько замечаний. Пусть $F\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^\mu\to\mathbb{R}$ — минимальная версальная деформация простой или параболической критической точки (μ — кратность критической точки). Обозначим через W_r подмножество базы деформации, состоящее из всех точек y, для которых функция $F(\cdot, y)$ имеет критическую точку кратности r. Множество W_r имеет коразмерность $r-1$, за исключением того случая, когда исходная критическая точка является параболической. В этом случае размерность множества W_μ равна 2. Будем обозначать через $\beta(\sigma)$ показатель осцилляции критической точки типа σ.

Теорема 18 (см. [289]). *Предположим, что фаза осциллирующего интеграла $I(\tau, y)$ является минимальной версальной деформацией простой или параболической критической точки. Тогда если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности*

исходной критической точки, то осциллирующий интеграл допускает оценку

$$|I(\tau, y)| \leqslant \varphi_p(y)\tau^{\beta_p},$$

где $\beta_p = \max\{\beta(\sigma)\colon \sigma$ *— критическая точка кратности* p*, примыкающая к исходной критической точке*$\}$ *и*

$$\varphi_p(y) \leqslant \mathrm{const} \cdot d(y, W_{p+1})^{-\alpha^p_{p+1}} \dots d(y, W_\mu)^{-\alpha^p_\mu}.$$

В этой формуле d *— расстояние в произвольной римановой метрике на базе версальной деформации, числа* $\alpha^p_{p+1}, \dots, \alpha^p_\mu$ *— положительные рациональные числа, определяемые по исходной критической точке* (см. в [289] их определение).

З а м е ч а н и я. 1. В этой теореме $p = 1, \dots, \mu$. Для $p = \mu$ теорема утверждает оценку осциллирующего интеграла с равномерным показателем, равным индивидуальному показателю исходной критической точки.

2. Все простые и параболические критические точки квазиоднородны. База версальной деформации квазиоднородной критической точки имеет естественную квазиоднородную структуру. Простые и параболические критические точки выделяются в классе квазиоднородных критических точек условием неотрицательности весов квазиоднородности базы версальной деформации. Неотрицательность весов — основа доказательства теорем 17, 18. Теоремы доказываются индукцией по кратности исходной критической точки. В базе версальной деформации рассматривается квазисфера. По индуктивным предположениям при ограничении параметров деформации на квазисферу требуемая оценка уже доказана. Эта оценка распространяется на всю базу с помощью квазиоднородной структуры. Числа α^p_j, участвующие в теореме, конструируются из весов квазиоднородности базы и показателей осцилляции примыкающих критических точек.

28.7. Наибольший показатель особости. Рассмотрим критические точки, которые неустранимы малым шевелением из семейств функций n переменных, зависящих от l параметров. Максимум их показателей особости в зависимости от l, n имеет вид $\beta_l(n) = 1/2 - 1/N$, где число N при $n \geqslant 3$ дается таблицей

l	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10, $n=3$	11, $n=3$	10, $n>3$
N	$+2$	$+3$	$+4$	$+6$	$+8$	$+12$	∞	∞	-24	-16	-12	-8	-6

Все числа $\beta_l = \beta_l(n)$ рациональны (см. п. 29.4). При достаточно больших n число β_l не зависит от n (следствие теоремы Кушниренко в п. 12.7 ч. I и теоремы о выделении квадратов в п. 11.1 ч. I).

Вычисление всех рациональных чисел кажется трудной задачей. По-видимому, $\beta_l \sim \sqrt{2l}/6$. Гипотетически невырожденная кубическая форма от n переменных является в своей коразмерности критической точкой с максимальным показателем особости (т. е. при $l = n(n+1)/2$). Иными словами, $\beta_{n(n+1)/2} = n/6$ (см. [10]). Из теоремы 5 следует, что $\beta_l(2) \sim 1 - \sqrt{2/l}$. Из теоремы 5 также следует, что при $n = 2$ максимум показателей особости при заданной кратности μ имеет асимптотику $1 - 2/\sqrt{\mu}$.

28.8. Расположение материала главы. В § 29 мы определяем форму Гельфанда—Лере и обсуждаем ее свойства. Мы рассматриваем критическую точку одночлена и выражаем ее показатель осцилляции и множество показателей через показатели одночлена. Мы вводим дискретные характеристики разрешения особенностей критической точки аналитической фазы и выражаем через них показатель осцилляции и множество показателей критической точки.

В § 30 мы доказываем теорему 4. Для этого по многограннику Ньютона мы строим аналитическое многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$. Построенные многообразие и его отображение разрешают особенности всякой критической точки с данным многогранником Ньютона при условии, что главная часть ее ряда Тейлора $\mathbb{R}$-невырождена. В § 31 доказывается аддитивность показателя осцилляции и его кратности, объясняются вычисления показателей табличных функций, приводятся примеры, демонстрирующие отсутствие полунепрерывности показателя осцилляции при деформациях критической точки.

§ 29. Элементарные интегралы и разрешение особенностей фазы

В этом параграфе изучаются асимптотики осциллирующего интеграла, фаза которого — одночлен. Указывается связь асимптотик осциллирующего интеграла с полюсами мероморфной функции $F(\lambda) = \int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$, где f — фаза, φ — амплитуда осциллирующего интеграла. Вводятся дискретные характеристики разрешения особенностей критической точки фазы: вес разрешения, набор кратностей. Описывается связь этих характеристик и основных характеристик асимптотического поведения осциллирующего интеграла: показателя осцилляции, его кратности и множества показателей.

29.1. Форма Гельфанда—Лере. При исследовании интегралов вида $\int e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx$, $\int f^\lambda(x)\varphi(x)\,dx$, где τ, λ — параметры, удобно за одну из переменных взять функцию f. В этом случае интегралы превращаются в обычные преобразования Фурье и Меллина интеграла по оставшимся переменным. Подынтегральное выражение в этом последнем интеграле называется формой Гельфанда—Лере.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, ω — гладкая дифференциальная n-форма на $\mathbb{R}^n$. Будем искать такую гладкую дифференциальную $(n-1)$-форму ψ, для которой

$$df \wedge \psi = \omega. \tag{1}$$

Лемма 1. *Если в точке отличен от нуля дифференциал функции f, то в окрестности точки существует форма ψ со свойством* (1). *Ограничение этой формы на произвольное многообразие уровня функции определено однозначно.*

Форма со свойством (1) называется *формой Гельфанда—Лере* формы ω и обозначается через ω/df.

Для доказательства леммы достаточно перейти к координатам, в которых функция — одна из координат.

Пример. Пусть $f(x, y) = y^2 - x^3 - sx$ (где s — число) — функция, $\omega = dx \wedge dy$ — форма площади. Тогда на кривой уровня t форма Гельфанда—Лере равна

$$-dx/2y = -dx/2\sqrt{x^3 + sx + t}.$$

Интеграл такой формы называется *эллиптическим*.

Докажем два замечательных свойства формы Гельфанда—Лере.

Ориентируем многообразия уровня функции стандартным образом.

Лемма 2. 1) *Пусть ω — гладкая дифференциальная n-форма с компактным носителем. Предположим, что носитель формы не пересекается с критическим множеством функции f. Тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \tag{2}$$

2) *Пусть ψ — гладкая дифференциальная $(n-1)$-форма с компактным носителем. Предположим, что носитель формы не пересекается с критическим множеством функции f. Тогда*

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{f=t} \psi \right) = \int_{f=t} d\psi/df. \tag{3}$$

Доказательство. Свойство (2) — очевидное следствие теоремы Фубини. Свойство (3) — следствие теоремы Стокса (см. [41], [155]).

Следствие. *Пусть f — аналитическая функция, не равная константе, ω — гладкая дифференциальная n-форма с компактным носителем; тогда*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)} \omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{f=t} \omega/df \right) dt. \tag{4}$$

Действительно, мера объединения особых многообразий уровня равна нулю.

29.2. Асимптотики интегралов формы Гельфанда—Лере

О п р е д е л е н и е. *Элементарным осциллирующим интегралом* называется интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\pm i\tau x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}|\,\varphi(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n, \tag{5}$$

где $k_1,\dots,k_m$, $m_1,\dots,m_n$ — неотрицательные целые числа, φ — гладкая функция с компактным носителем, τ — вещественный параметр.

Далее функцию $\pm x_1^{k_1}\dots x_n^{k_n}$ будем обозначать через f, а форму $|x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n}|\,\varphi(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_n$ — через ω. Будем предполагать, что $k_1+\dots+k_n\geqslant 2$.

Для не равных нулю значений t положим $J(t)=\int_{f=t}\omega/df$. Тогда J — гладкая функция на $\mathbb{R}\setminus 0$, равная нулю вне достаточно большого интервала. Функцию J назовем *функцией Гельфанда—Лере* формы ω.

Асимптотическое поведение при $\tau\to+\infty$ элементарного интеграла будем изучать следующим образом. Сначала выясним асимптотику функции Гельфанда—Лере, а затем, пользуясь формулой (4) и стандартными формулами для асимптотик однократных осциллирующих интегралов [209], получим асимптотическое разложение элементарного интеграла.

Мы воспользуемся следующей теоремой.

Т е о р е м а 1 (см. [356]). *Функция Гельфанда—Лере разлагается в асимптотический ряд*

$$J(t)\approx\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}a^{+}_{k,\alpha}t^{\alpha}(\ln t)^k \quad \textit{при} \quad t\to+0, \tag{6}$$

$$J(t)\approx\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1}a^{-}_{k,\alpha}t^{\alpha}(\ln t)^k \quad \textit{при} \quad t\to-0, \tag{7}$$

где α пробегает некоторое ограниченное снизу дискретное подмножество вещественных чисел. Эти асимптотические разложения можно почленно дифференцировать.

Теорему 1 нетрудно доказать индукцией по n.

Чтобы описать асимптотическое разложение функции Гельфанда—Лере, мы рассмотрим интегралы $F_{\pm}=\int_{\pm f>0}(\pm f)^{\lambda}\omega$, где λ — комплексный параметр. Мы докажем, что интегралы являются мероморфными функциями параметра. Мы выразим коэффициенты рядов (6), (7) и показатели α в этих рядах через полюсы и коэффициенты Лорана полученных мероморфных функций. Затем явно укажем эти полюсы и коэффициенты Лорана.

А. А с и м п т о т и к и ф у н к ц и и Г е л ь ф а н д а — Л е р е и п о л ю с ы е е п р е о б р а з о в а н и я М е л л и н а. Пусть $J\colon(0,\infty)\to\mathbb{R}$ — гладкая функция, равная нулю для достаточно больших значений аргумента.

Предположим, что имеет место асимптотическое разложение

$$J(t) \approx \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{l} a^{+}_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k \quad \text{при} \quad t \to +0, \tag{8}$$

где α пробегает некоторое ограниченное снизу дискретное подмножество вещественных чисел. Рассмотрим интеграл $F(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t)\, dt$, где λ — комплексный параметр. Интеграл корректно определен при достаточно больших значениях вещественной части параметра и при этих условиях голоморфно зависит от параметра.

Т е о р е м а 2 (см. [94]). *Функция F аналитически продолжается на всю комплексную прямую как мероморфная функция. Аналитическое продолжение имеет полюсы в точках $\lambda = -(\alpha + 1)$, где α пробегает то же дискретное множество, что и в разложении* (8). *Коэффициент при $(\alpha + 1 + \lambda)^{-(k+1)}$ в разложении Лорана в точке $\lambda = -(\alpha + 1)$ равен $(-1)^k k!\, a_{k,\alpha}$.*

Доказательство с очевидностью следует из формулы

$$\int_0^1 t^{\alpha+\lambda} (\ln t)^k dt = (-1)^k k! / (\alpha + \lambda + 1)^{k+1}.$$

Б. П о л ю с ы и к о э ф ф и ц и е н т ы Л о р а н а п р е о б р а з о в а н и я М е л л и н а ф у н к ц и и Г е л ь ф а н д а — Л е р е. Пусть $f = \pm x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ — одночлен. Рассмотрим два интеграла

$$F_{\pm}(\lambda) = \int_{\pm f > 0} (\pm f)^{\lambda} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}|\, \varphi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

где λ — комплексный параметр. По формуле (2) на с. 463 получаем

$$F_{+}(\lambda) = \int_0^{\infty} t^{\lambda} J(t)\, dt, \quad F_{-}(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} (-t)^{\lambda} J(t)\, dt,$$

где J — функция Гельфанда—Лере. Согласно теоремам 1, 2 интегралы $F_{\pm}$ — мероморфные функции параметра. Явно укажем полюсы и коэффициенты Лорана этих функций.

Л е м м а 3. 1) *Функции $F_{\pm}$ голоморфны вне точек комплексной прямой, принадлежащих следующим n арифметическим прогрессиям*:

$$-(m_1 + 1)/k_1, -(m_1 + 2)/k_1, \dots; \quad -(m_2 + 1)/k_2, -(m_2 + 2)/k_2, \dots; \quad \dots$$
$$\dots; \quad -(m_n + 1)/k_n, -(m_n + 2)/k_n, \dots$$

В точке, принадлежащей ровно r из этих прогрессий, функции $F_{\pm}$ имеют полюс не выше r-го порядка.

2) *Все коэффициенты разложений Лорана функций $F_{\pm}$ в произвольной точке комплексной прямой суть обобщенные функции амплитуды φ.*

Доказательство. Достаточно доказать заключения для интеграла

$$F(\lambda)=\int_0^a\dots\int_0^a x_1^{k_1\lambda+m_1}\dots x_n^{k_n\lambda+m_n}\varphi(x)\,dx_1\dots dx_n,$$

где a — положительное число. Удобно рассмотреть более общий интеграл

$$\tilde F(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\int_0^a\dots\int_0^a x_1^{k_1\lambda_1+m_1}\dots x_n^{k_n\lambda_n+m_n}\varphi(x)\,dx_1\dots dx_n.$$

Пусть N — большое натуральное число. Сделаем преобразование

$$\tilde F=\int_0^a\dots\int_0^a x^{k\lambda+m}R\varphi\,dx+\sum_{l_1=0}^{N}\frac{a^{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1}}{k_1\lambda_1+m_1+l_1+1}\times$$

$$\times\frac{1}{l_1!}\int_0^a\dots\int_0^a x_2^{k_2\lambda_2+m_2}\dots x_n^{k_n\lambda_n+m_n}\frac{\partial^{l_1}\varphi}{\partial x_1^{l_1}}(0,x_2,\dots,x_n)\,dx_2\dots dx_n,\quad(9)$$

где $R\varphi$ — разность функции φ и ее многочлена Тейлора степени N по x_1.

Первый из этих интегралов не имеет особенностей по λ_1 при $\operatorname{Re}(k_1\lambda_1)+m_1+N+1>0$, а полюсы по λ_1 других членов в правой части принадлежат первой из указанных в лемме прогрессий. Повторяя последовательно с каждым интегралом в правой части ту же процедуру по другим переменным, а затем полагая $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=\lambda$, получим первую часть леммы. Это рассуждение позволяет явно аналитически продолжить интеграл в окрестность наперед заданной точки комплексной прямой (см. [94]). Каждый коэффициент разложения Лорана в произвольной точке прямой равен сумме интегралов функции φ и ее производных по некоторым координатным подпространствам. Это означает вторую часть леммы.

Лемма 4. *Пусть число λ_0 принадлежит ровно r арифметическим прогрессиям из леммы* 3. *Пусть для определенности это первые r прогрессий и $\lambda_0=-(m_1+l_1+1)/k_1=\dots=-(m_r+l_r+1)/k_r$, где $l_1,\dots,l_r$ — некоторые неотрицательные целые числа. Тогда коэффициент при $(\lambda-\lambda_0)^{-r}$ разложения Лорана в точке λ_0 функции F равен*

$$\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{k_j}\frac{1}{l_j!}\Bigg(\int_{x_1=\dots=x_r=0}x_{r+1}^{k_{r+1}\lambda+m_{r+1}}\dots x_n^{k_n\lambda+m_n}\times$$

$$\times\frac{\partial^{l_1+\dots+l_r}\varphi}{\partial x_1^{l_1}\dots\partial x_r^{l_r}}(0,\dots,0,x_{r+1},\dots,x_n)\,dx_{r+1}\dots dx_n\Bigg)_{\lambda=\lambda_0},$$

где $\left(\int\right)_{\lambda=\lambda_0}$ означает аналитическое продолжение интеграла в скобках в точку λ_0.

Лемма 4 — следствие формулы (9).

Лемма 5. 1) *Пусть* $\beta = \max\{-(m_1+1)/k_1, \ldots, -(m_n+1)/k_n\}$ — *максимальное число объединения арифметических прогрессий из леммы* 3. *Пусть число* β *принадлежит ровно* r *арифметическим прогрессиям из леммы* 3. *Предположим, что амплитуда* φ *в интегралах* F_+, F_- *неотрицательна, а ее значение в начале координат положительно. Тогда сумма коэффициентов, стоящих при* $(\lambda-\beta)^{-r}$ *в разложениях Лорана функций* F_+ *и* F_-, *положительна, и каждый из этих коэффициентов неотрицателен.*

2) *Пусть среди чисел* $k_1, \ldots, k_n$ *в точности одно равно* 1. *Предположим, что это число* k_1. *Пусть* λ_0 — *число, принадлежащее первой прогрессии из леммы* 3 *и не принадлежащее ни одной другой прогрессии из леммы* 3. (*В частности, это означает, что* $\lambda_0 = -(m_1+l+1)$, *где* l — *неотрицательное целое число.*) *Обозначим через* a^+, a^- *коэффициенты, стоящие при* $(\lambda-\lambda_0)^{-1}$ *в разложениях Лорана в точке* λ_0 *функций* F_+, F_- *соответственно. Тогда* $a^+ = (-1)^l a^-$.

3) *Пусть функция* f *имеет минимум в начале координат, т. е.* $f = +x_1^{k_1}\ldots x_n^{k^n}$, *где все показатели четны. Тогда* $F_-(\lambda) \equiv 0$. *Кроме того, если* β, r, φ — *те же, что и в п.* 1), *то больше нуля коэффициент, стоящий при* $(\lambda-\beta)^{-r}$ *в разложении Лорана функции* F_+.

Эта лемма — очевидное следствие леммы 4 и разбиения интегралов F_+, F_- в сумму интегралов по координатным октантам.

В. Асимптотики элементарного осциллирующего интеграла.

Теорема 3 (ср. [49]). 1) *Элементарный осциллирующий интеграл* (*см.* (5) *на с.* 464) *при* $\tau \to +\infty$ *разлагается в асимптотический ряд*

$$\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k, \tag{10}$$

где числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ *являются обобщенными функциями амплитуды* φ, *а параметр* α *пробегает арифметические прогрессии из леммы* 3. *Если число* α *принадлежит ровно* r *арифметическим прогрессиям из леммы* 3, *то* $a_{k,\alpha} \equiv 0$ *при* $k \geqslant r$.

2) *Пусть* $\beta = \max\{-(m_1+1)/k_1, \ldots, -(m_n+1)/k_n\}$ — *максимальное число объединения арифметических прогрессий леммы* 3. *Пусть* r — *число арифметических прогрессий леммы* 3, *которым принадлежит* β. *Далее, пусть* β *не является нечетным целым числом. Предположим, что амплитуда* φ *неотрицательна, а ее значение в начале координат положительно. Тогда вещественная часть числового коэффициента старшего члена асимптотического ряда* (*т. е. вещественная часть числа* $a_{r-1,\beta}$) *не равна нулю и имеет тот же знак,*

что и число $\cos(\pi\beta/2)$, *и, таким образом, знак вещественной части определяется числом* β.

3) *Пусть* $k_1 = 1$ *и* m_1 *четно, т. е. пусть гиперповерхность* $x_1 = 0$ *не принадлежит критическому множеству фазы элементарного интеграла и не принадлежит подмножеству, на котором подынтегральное выражение элементарного интеграла не является гладким. Тогда в разложении* (10) *число* α *пробегает только арифметические прогрессии из леммы* 3 *с номерами* $2, \dots, n$.

4) *Пусть фаза элементарного интеграла имеет минимум в начале координат, т. е. пусть* $f = +x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, *где все показатели четны. Пусть амплитуда* φ *неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда* (*т. е. число* $a_{r-1,\beta}$) *не равен нулю и имеет тот же аргумент, что и число* $\exp(-\pi i\beta/2)$, *где числа* β, r *определены в п.* 1); *таким образом, аргумент коэффициента определяется числом* β.

Теорема 3 легко выводится из теорем 1, 2 и лемм 3, 5 с помощью следующих стандартных формул. Пусть $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с компактным носителем, тождественно равная 1 в окрестности начала координат. Тогда при $\tau \to +\infty$ с точностью до бесконечно малой сколь угодно высокого порядка

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{i\tau t} t^\alpha (\ln t)^k \theta(t)\, dt &\approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(-i\tau)^{\alpha+1}}, \\ \int_{-\infty}^0 e^{i\tau t} (-t)^\alpha (\ln(-t))^k \theta(t)\, dt &\approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(i\tau)^{\alpha+1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

В этих формулах $\arg(\pm i\tau) = \pm\pi/2$, Γ — гамма-функция (см. [209]).

Г. Асимптотики элементарного интеграла Лапласа.

Определение. *Элементарным интегралом Лапласа* называется интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}} |x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}|\, \varphi(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n,$$

где $k_1, \dots, k_n, m_1, \dots, m_n$ — неотрицательные целые числа, $k_1, \dots, k_n$ четны, $k_1 + \dots + k_n \geqslant 2$, φ — гладкая функция с компактным носителем, τ — вещественный параметр.

Теорема 4. 1) *Элементарный интеграл Лапласа при* $\tau \to +\infty$ *разлагается в асимптотический ряд* (10), *обладающий свойствами, указанными в заключении п.* 1) *теоремы* 3.

2) *Пусть амплитуда* φ *неотрицательна и положительно ее значение в начале координат. Тогда в асимптотическом ряде элементарного интеграла Лапласа положителен числовой коэффициент при старшем члене* (*т. е. коэффициент* $a_{r-1,\beta}$), *где числа* r, β *определены в п.* 2) *теоремы* 3.

Доказательство теоремы 4 совпадает с доказательством теоремы 3, ссылки на формулы (11) нужно заменить ссылками на формулу (см. [209]).

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} t^\alpha (\ln t)^k \theta(t)\, dt \approx \frac{d^k}{d\alpha^k} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}.$$

29.3. Асимптотики и разрешение особенностей.

А. Вес разрешения особенностей и набор кратностей. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, аналитическую в окрестности своей критической точки x. Предположим, что значение функции в этой точке равно 0. Рассмотрим разрешение особенностей этой критической точки (см. п. 28.3). Введем характеристики разрешения особенностей, через которые выразим показатель осцилляции критической точки, его кратность и множество показателей.

Разрешение особенностей — это многообразие Y и его отображение $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^n$, обладающие свойствами, указанными в п. 28.3. В малой окрестности прообраза критической точки x рассмотрим разложение на неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$. С каждой неприводимой компонентой, пересекающейся с прообразом точки x, корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции $f \circ \pi$ и якобиана отображения π. Эти числа обозначим через k, m соответственно. Упорядоченная пара (k, m) называется *кратностью компоненты*, число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты*.

Определение. *Набором кратностей* разрешения особенностей называется множество всех попарно различных кратностей, обладающих следующим свойством: $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$.

Набор кратностей обозначим через Кр.

Определение. *Весом разрешения особенностей* называется максимум весов компонент, кратности которых обладают следующим свойством: $(k, m) \neq (1, 0)$, $k > 0$. Таким образом, вес разрешения равен числу $\max\{-(m+1)/k\colon (k, m) \in \text{Кр}\}$.

Замечание. Набор кратностей конечен в силу собственности отображения π.

Пример. Пусть f — однородный многочлен степени N, имеющий в начале координат конечнократную критическую точку. Пусть $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^n$ — σ-процесс в начале координат (см. п. 26.3, а также § 4 гл. II в [235]). Это

отображение разрешает особенности многочлена в начале координат. Набор кратностей разрешения состоит из одной пары $(N, n-1)$. Вес разрешения равен $-n/N$.

Определим понятие кратности числа относительно разрешения особенностей. Для этого сначала определим понятие кратности числа в точке прообраза критической точки.

Пусть α — число, y — точка прообраза (относительно отображения разрешения) критической точки x. Рассмотрим малую окрестность точки y и разложение в ней на неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции $f \circ \pi$. *Кратностью числа α в точке y* называется число пересекающихся в ней неприводимых компонент веса α. *Кратностью числа α относительно разрешения особенностей* называется максимум кратностей числа α в точках прообраза критической точки x. Очевидно, что кратность числа является целым числом, заключенным в пределах от 0 до n.

Пример. Рассмотрим критическую точку и ее разрешение, указанные в предыдущем примере. Пусть $n \neq N$. Тогда кратность числа $-n/N$ относительно указанного разрешения равна 1. Кратность числа -1 равна 0, если функция f знакоопределена, и равна 1 в противном случае. Кратности остальных чисел равны 0.

Б. Асимптотический ряд осциллирующего интеграла.

Теорема 5 (см. [49]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1 \dots dx_n.$$

Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности своей критической точки. Предположим, что значение фазы в этой критической точке равно 0. *Рассмотрим разрешение особенностей критической точки. Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности критической точки фазы, то имеют место следующие утверждения.*

1) *Осциллирующий интеграл разлагается в асимптотический ряд*

$$\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k \quad \textit{при} \quad \tau \to +\infty.$$

Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой обобщенной функции лежит в критическом множестве фазы. Параметр α пробегает следующие арифметические прогрессии. Одна из них — отрицательные целые числа, а другие параметризуются элементами набора кратностей разре-

шения особенностей критической точки фазы. Паре (k, m) *отвечает арифметическая прогрессия* $-(m+1/k)$, $-(m+2)/k$, ...

2) *С каждой точкой* y *из прообраза критической точки свяжем следующие арифметические прогрессии. А именно, пусть* (k_1, m_1), ..., (k_n, m_n) *суть кратности пересекающихся в* y *неприводимых компонент гиперповерхности нулевого уровня функции* $f \circ \pi$. *Рассмотрим арифметические прогрессии из леммы* 3, *отвечающие кратностям* (k_1, m_1), ..., (k_n, m_n). *Скажем, что эти прогрессии ассоциированы с точкой* y. *Предположим, что для любой такой точки* y *число* α *входит в не более, чем* k *ассоциированных с* y *арифметических прогрессий. Тогда* $a_{k,\alpha} = 0$.

3) *Если вес разрешения особенностей критической точки фазы больше* -1, *то*

а) *показатель осцилляции критической точки фазы равен весу разрешения особенностей*;

б) *кратность показателя осцилляции критической точки фазы равна уменьшенной на* 1 *кратности числа, равного весу разрешения особенностей, относительно разрешения особенностей*;

в) *если амплитуда неотрицательна и ее значение в критической точке фазы положительно, то отличен от нуля числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла* (*т. е. коэффициент* $a_{K,\beta}$, *где* β — *показатель осцилляции,* K — *кратность показателя осцилляции*);

г) *если критическая точка фазы конечнократна, то числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла равен значению амплитуды в критической точке фазы, умноженному на отличную от нуля константу, зависящую только от фазы.*

4) *Если критическая точка фазы является точкой максимума или минимума, то справедливы заключения* а)—г) n. 3) *теоремы.*

5) *Обозначим через* π *отображение разрешения особенностей. Предположим, что не найдется точки из прообраза критической точки фазы, в которой пересекаются хотя бы две неприводимые компоненты гиперповерхности нулевого уровня функции* $f \circ \pi$, *кратности которых равны* $(1, 0)$. (*Отметим, что это предположение выполняется, если фаза имеет конечнократную критическую точку* (*если* $n = 2$, *нужно дополнительно исключить случай невырожденной критической точки*).) *Тогда параметр* α *в асимптотическом ряде осциллирующего интеграла пробегает только арифметические прогрессии из* n. 1) *теоремы, параметризованные элементами набора кратностей разрешения особенностей. В частности, показатель ос-*

цилляции критической точки фазы не больше веса разрешения особенностей.

6) *Пусть* β *— вес разрешения особенностей,* k *— кратность числа* β *относительно разрешения особенностей. Рассмотрим множество всех точек прообраза* (*относительно отображения разрешения особенностей*), *в которых кратность числа* β *равна* k. *Предположим, что это множество не пересекается ни с одной неприводимой компонентой гиперповерхности нулевого уровня функции* $f \circ \pi$, *кратность которой равна* $(1, 0)$. *Предположим, что выполняются условия* п. 5). *Также предположим, что вес разрешения особенностей не является нечетным целым числом. Тогда справедливы заключения* а)—г) *п.* 3) *теоремы.*

7) *Предположим, что вес разрешения особенностей равен* -1 *и кратность числа* -1 *относительно разрешения особенностей не меньше* 2. *Тогда показатель осцилляции критической точки фазы равен* -1. *Более того, кратность показателя осцилляции равна кратности числа* -1 *относительно разрешения особенностей или на* 1 *меньше кратности числа* -1.

З а м е ч а н и я. 1. Эта теорема влечет теорему 28.3 об асимптотическом разложении.

2. Разрешение особенностей критической точки определено неоднозначно. Однако если для одного разрешения вес больше -1, то для всякого другого разрешения вес тоже больше -1 и не зависит от разрешения (п. 3) теоремы 5). Интересно было бы найти чисто алгебраическое доказательство этого факта.

3. Практически всегда критическая точка имеет разрешение особенностей веса больше -1. Достаточные условия для этого см. в теореме 30.5, а также в дополнении г) теоремы 28.4.

4. В п. 31.2 (см. также [49]) приведен пример критической точки и ее разрешения особенностей, обладающих следующими свойствами: вес разрешения меньше -1, показатель осцилляции меньше веса разрешения.

5. Вернемся к задаче о восстановлении значения функции φ в критической точке функции f по интегралам функции φ вдоль гиперповерхностей уровня функции f, см. п. 28.3. Для конечнократной критической точки функции f, удовлетворяющей условиям одного из п. 3), 4), 6) теоремы 5, эта задача может быть решена следующим образом. В качестве плотности на гиперповерхностях уровня функции f возьмем дифференциальную $(n-1)$-форму Гельфанда—Лере $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$. Таким образом, зная функцию Гельфанда—Лере $J(t) = \int_{f=t} \varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$, нужно восстановить значение функции φ в критической точке. Согласно формуле (4)

на с. 463, осциллирующий интеграл — это преобразование Фурье функции Гельфанда—Лере. Поэтому утверждение 3, г) теоремы 5 дает решение задачи.

Пример. Пусть f — однородный многочлен степени N, имеющий в начале координат конечнократную критическую точку. Разрешение особенностей этой критической точки указано в примере на с. 469. Набор кратностей разрешения состоит из пары $(N, n-1)$. Согласно теореме 5 в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла с фазой f параметр α пробегает арифметическую прогрессию $-n/N, -(n+1)/N, \ldots$ Если $N > n$ (или многочлен f знакоопределен), то показатель осцилляции критической точки равен $-n/N$, кратность показателя осцилляции равна 0.

Доказательство теоремы. Сделаем в осциллирующем интеграле замену переменных с помощью отображения $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^n$ разрешения особенностей. Тогда интеграл преобразуется в интеграл по Y. Воспользовавшись достаточно мелким разбиением единицы, преобразуем последний интеграл в сумму элементарных интегралов (это возможно, поскольку π — разрешение особенностей).

Теперь п. 1), 2) теоремы 5 непосредственно следуют из п. 1) теоремы 3. Аналогично, п. 3), 4), 5), 6) теоремы 5 следуют соответственно из п. 2), 4), 3), 2) теоремы 3.

Докажем п. 7). Имеем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\, dx = \int_0^\infty e^{i\tau t} J(t)\, dt + \int_0^\infty e^{-i\tau t} J(-t)\, dt,$$

где J — функция Гельфанда—Лере. Используя разрешение особенностей и теорему 2, получаем

$$J(\pm t) \approx a^{\pm}_{r,0}(\ln t)^r + \ldots + a^{\pm}_{0,0} + \sum_{\alpha>0} t^\alpha (\ln t)^k a^{\pm}_{k,\alpha},$$

где $(r+1)$ — кратность числа -1 относительно разрешения особенностей, $a^{\pm}_{k,\alpha}$ — вещественные числа. Если амплитуда знакопостоянна и отлична от нуля в критической точке фазы, то согласно лемме 5 числа $a^{\pm}_{r,0}$ имеют один и тот же знак, поэтому их сумма отлична от нуля. Применяя формулы (11) на с. 468, убеждаемся, что в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла вещественная часть коэффициента, стоящего при $(\ln\tau)^{r-1}/\tau$, пропорциональна $a^+_{r,0} + a^-_{r,0}$, а коэффициент, стоящий при $(\ln\tau)^r/\tau$, пропорционален $a^+_{r,0} - a^-_{r,0}$, причем коэффициенты пропорциональности отличны от нуля. Утверждение п. 7) доказано.

Замечание. Предположения п. 3), 4), 6) теоремы 5 нужны для того, чтобы на старший член асимптотического ряда не влияли точки неособой части гиперповерхности нулевого уровня функции f.

В. Асимптотики интеграла Лапласа. *Интегралом Лапласа* называется интеграл вида

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n,$$

где τ — положительный вещественный параметр. Функции f, φ называются соответственно *фазой* и *амплитудой*.

Пусть фаза имеет точку минимума и является аналитической функцией в окрестности точки минимума. Предположим, что значение фазы в точке минимума равно нулю.

Теорема 6. *Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности точки минимума, то при* $\tau\to+\infty$ *интеграл Лапласа разлагается в асимптотический ряд*

$$\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi)\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k,$$

для которого справедливы заключения п. 1), 2), 4) *теоремы* 5.

Доказательство теоремы 6 получается из доказательства теоремы 5 заменой ссылок на теорему 3 ссылками на теорему 4.

Следствие. *Для каждого малого положительного значения* t *обозначим через* $V(t)$ *объем множества тех точек, в которых значение фазы меньше* t. *Тогда при* $t\to+0$ *функция* V *разлагается в асимптотический ряд*

$$\sum_{\alpha}\sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}t^{-\alpha}(\ln t)^k.$$

Здесь параметр α *пробегает конечное множество арифметических прогрессий, составленных из отрицательных рациональных чисел. Этими арифметическими прогрессиями являются прогрессии из п.* 1) *теоремы* 5. *О коэффициентах ряда и о порядке главного члена ряда справедливы утверждения заключений п.* 2), 4) *теоремы* 5.

Доказательство следствия. Производная функции V равна функции Гельфанда—Лере фазы f и единичной амплитуды.

29.4. Рациональность наибольших показателей особости $\beta_l(n)$, определенных в п. 28.7. Рассмотрим многочлен степени N с неопределенными коэффициентами и с нулевыми свободными и линейными членами

$$f(x,a)=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n\geqslant 0\\ 1<|k_1+\ldots+k_n|\leqslant N}} a_{k_1,\ldots,k_n}x_1^{k_1}\ldots k_n^{k_n}.$$

При фиксированных вещественных коэффициентах a многочлен определяет функцию $f(\cdot,a)\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, имеющую в начале координат критическую точку.

Согласно теореме 5, существует арифметическая прогрессия, содержащая множество показателей этой критической точки.

Т е о р е м а 7. *Существует единая арифметическая прогрессия, содержащая множество показателей критических точек в начале координат фаз $f(\cdot, a)$ при всех a.*

Теорема 7 следует из леммы 6.

Л е м м а 6. *Предположим, что в пространстве коэффициентов многочлена f выделено полуалгебраическое множество A. Тогда существуют его собственное алгебраическое подмножество $B \subset A$ и арифметическая прогрессия Q, обладающие следующим свойством: для любого $a \in A \setminus B$ множество показателей критической точки в начале координат фазы $f(\cdot, a)$ принадлежит Q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Можно считать, что множество A неособо и связно. Пусть f' — ограничение многочлена f на многообразие $\mathbb{R}^n \times A$. Рассмотрим разрешение особенностей $\pi\colon Y \to \mathbb{R}^n \times A$ гиперповерхности нулевого уровня функции f'; см. [220]. Из теоремы Сарда—Бертини следует существование собственного алгебраического подмножества $B \subset A$, обладающего следующим свойством: для любого $a \in A \setminus B$ ограничение отображения разрешения особенностей на прообраз множества $\mathbb{R}^n \times a$ является разрешением особенностей гиперповерхности нулевого уровня функции $f(\cdot, a)\colon \mathbb{R}^n \times a \to \mathbb{R}$, более того, топология этого разрешения и все кратности локально постоянно зависят от a. Теперь лемма следует из теоремы 5.

§ 30. Асимптотики и многогранники Ньютона

Мы рассматриваем класс критических точек фаз, ряд Тейлора которых имеет фиксированный многогранник Ньютона. Если многогранник Ньютона далекий, то почти все критические точки класса имеют единый показатель осцилляции. Этот единый показатель осцилляции равен удаленности многогранника Ньютона. Критическая точка класса имеет типичный показатель осцилляции, если $\mathbb{R}$-невырождена главная часть ее ряда Тейлора. (Напомним, что условия $\mathbb{R}$-невырожденности — явно выписываемые алгебраические условия на конечное множество коэффициентов Тейлора; см. п. 28.2.) Сформулированное утверждение составляет теорему 28.4. Ее доказательство — цель настоящего параграфа. Доказательство использует разрешение особенностей критических точек фаз. В предыдущем параграфе мы определили числовую характеристику разрешения особенностей — вес и доказали, что если вес больше -1, то показатель осцилляции критической точки равен весу (теорема 29.5). В этом параграфе мы построим многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$, которые разрешают особенности почти всех критических точек рассматриваемого класса. Мы докажем, что вес

построенного разрешения особенностей равен удаленности многогранника Ньютона. Таким образом, мы докажем теорему 28.4.

Разрешение особенностей строится по многограннику Ньютона и состоит из трех этапов. На первом этапе по многограннику Ньютона строится разбиение положительного октанта пространства на выпуклые конусы, каждый из которых задается конечным множеством линейных условий с рациональными коэффициентами. На втором этапе конусы измельчают, чтобы построить новое разбиение положительного октанта. Новое разбиение вписано в предыдущее, все его конусы симплициальны и кратность их равна 1 (определения см. в п. 30.1.А). На третьем этапе по новому разбиению строят многообразие и его отображение на $\mathbb{R}^n$. Многообразие и отображение разрешают особенности почти всех критических точек рассматриваемого класса.

Каждый этап использует лишь результат предыдущего этапа: на втором этапе не используется многогранник Ньютона, на третьем этапе не используется первое разбиение. На первом и третьем этапе начальные данные однозначно определяют результат. Результат второго этапа (новое разбиение) не определяется однозначно первоначальным разбиением. Таким образом, разрешение особенностей не определяется однозначно многогранником Ньютона, хотя строится по многограннику Ньютона.

Мы изложим сначала третий этап. Мы построим многообразие по набору конусов с упомянутыми выше свойствами и определим его естественную проекцию на $\mathbb{R}^n$ (см. п. 30.1.Е). Затем мы изложим первые два этапа и докажем, что построенные в результате трех этапов многообразие и отображение разрешают особенности критических точек класса с $\mathbb{R}$-невырожденными главными частями рядов Тейлора. В заключение мы выведем теорему 28.4 из теоремы 29.5.

На многообразии, которое будет построено в этом параграфе, естественным образом действует группа — n-мерный тор (подробнее см. в п. 30.1.Г). Многообразия с действием тора называются торическими. Далеко продвинутую теорию торических многообразий см. в [360], [125]. Орбиты действия тора на торическом многообразии находятся во взаимно однозначном соответствии с некоторой совокупностью выпуклых конусов, строящихся по многообразию. В свою очередь, эта совокупность конусов однозначно определяет торическое многообразие. Наш третий этап построения разрешения особенностей является этим стандартным (в теории торических многообразии) переходом от совокупности конусов к многообразию. Торические многообразия замечательны тем, что большинство аналитических и топологических конструкций на них сводится к линейно алгебраическим конструкциям на соответствующей совокупности конусов. Например, см. в этом параграфе наше вычисление веса разрешения особенностей.

К исследованию особенностей многогранники Ньютона впервые были применены в [146], [365]. С многогранниками Ньютона торические многообразия впервые были связаны А. Г. Хованским (см. [38], [221], [222], а также [49], [481]).

30.1. Построение многообразия.

А. Конус, скелет, кратность, веер. *Конусом, порожденным векторами* $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, называется конус, состоящий из линейных комбинаций этих векторов с неотрицательными коэффициентами. Конус с вершиной в начале координат называется *рациональным*, если он может быть порожден конечным множеством векторов с целыми координатами. *Скелетом* рационального конуса называется множество всех примитивных (не кратных) целочисленных векторов в гранях размерности 1. Очевидно, что скелет конуса порождает сам конус.

Пример. Конус, изображенный на рис. 131, является рациональным. Его скелет составляют векторы (3, 1), (1, 2).

Рациональный конус называется *симплициальным*, если линейно независимы векторы, составляющие его скелет.

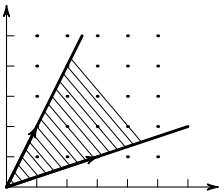


Рис. 131

Кратностью симплициального конуса старшей размерности n называется индекс подрешетки, порожденной векторами скелета, в целочисленной решетке пространства. Очевидно, что кратность конуса равна 1 тогда и только тогда, когда его скелет образует базис целочисленной решетки пространства. Более того, если кратность больше 1, то конусу принадлежит целочисленный вектор, являющийся такой линейной комбинацией векторов скелета, в которой все коэффициенты неотрицательны, меньше 1 и хотя бы один коэффициент не равен 0.

Пример. Конус, изображенный на рис. 131, симплициален (все двумерные рациональные конусы симплициальны). Кратность конуса равна 5.

Задача. Докажите, что кратность конуса равна модулю определителя, составленного из координат векторов скелета.

Веером называется конечное множество рациональных конусов, обладающих следующими свойствами:

а) каждая грань конуса из множества тоже принадлежит множеству;

б) пересечение любых двух конусов из множества является гранью каждого из них.

Веер называется *простым*, если

в) все конусы веера симплициальны и скелет любого конуса можно дополнить до базиса целочисленной решетки всего пространства.

Б. Мономиальные отображения. Рациональное отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ вида $x_i \circ h = x_1^{a_i^1} \ldots x_n^{a_i^n}$, $i = 1, \ldots, n$, где a_i^j — целочисленная

матрица с определителем, равным ± 1, называется *мономиальным*. Область определения мономиального отображения всегда содержит дополнение объединения координатных гиперплоскостей.

Очевидно, что отображение, обратное к мономиальному, мономиально и задается обратной матрицей. Область определения мономиального отображения совпадает со всем пространством тогда и только тогда, когда матрица мономиального отображения имеет неотрицательные элементы.

Пусть задана упорядоченная пара базисов целочисленной решетки пространства $\mathbb{R}^n$. Мономиальное отображение называется *ассоциированным* с этой парой, если оно задается матрицей сопряженного оператора к оператору, переводящему второй базис в первый и записанному во втором базисе. Таким образом, в столбцах стоят координаты векторов первого базиса, выраженных через второй базис.

Пример. Пусть в целочисленной решетке пространства $\mathbb{R}^2$ заданы два базиса: первый — (1, 0), (1, 1), второй — (1, 0), (0, 1). Тогда мономиальное отображение h, ассоциированное с этой парой, задается формулой

$$x_1 \circ h = x_1^1 x_2^1, \quad x_2 \circ h = x_1^0 x_2^1.$$

Лемма 1. *Если изменить порядок в паре, то ассоциированное с парой мономиальное отображение изменится на обратное. Если заданы три базиса, то отображение, ассоциированное с первым и третьим базисом, равно суперпозиции отображения, ассоциированного с первым и вторым базисами, и отображения, ассоциированного со вторым и третьим базисами. А именно,* $h_{1,3} = h_{2,3} \circ h_{1,2}$.

Доказательство очевидно.

В. Многообразие, ассоциированное с простым веером. Пусть задан простой веер. По вееру мы построим неособое n-мерное вещественное аналитическое многообразие. Конструкция многообразия обобщает построение стандартных компактификаций пространства $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. А именно, для вееров, указанных на рис. 132, *а*, *б*, конструкция приводит, соответственно, к многообразиям $(\mathbb{R}P^1)^n$, $\mathbb{R}P^n$.

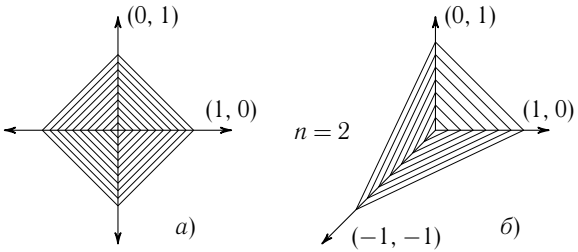


Рис. 132

Карты многообразия находятся во взаимно однозначном соответствии с n-мерными конусами веера. Каждая карта — это $\mathbb{R}^n$. Мы введем отношение эквивалентности для точек разных карт. Затем на множестве классов эквивалентности введем топологию и структуру многообразия.

Нам удобно для каждого конуса веера упорядочить векторы его скелета. Зафиксируем эти порядки. Впоследствии будет легко убедиться, что многообразие, которое мы построим, не зависит от этих порядков.

С любой упорядоченной парой карт связано мономиальное отображение из первой карты во вторую — это мономиальное отображение, ассоциированное с упорядоченной парой базисов целочисленной решетки пространства, где первый (соответственно второй) базис — это базис, порожденный скелетом того n-мерного конуса, который отвечает первой (соответственно второй) карте. Для будущего многообразия это мономиальное отображение будет играть роль функции перехода из первой карты во вторую.

Скажем, что точка первой карты *эквивалентна* точке второй карты, если мономиальное отображение, связанное с этими картами, определено в точке первой карты и переводит эту точку в упомянутую точку второй карты.

Пример. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^2$ скелет первого конуса составляют векторы (1, 1), (1, 2), а скелет второго конуса составляют векторы (1, 1), (3, 2). Тогда мономиальное отображение h из первой карты во вторую задано формулами $x_1 \circ h = x_1^1 x_2^4$, $x_2 \circ h = x_1^0 x_2^{-1}$. Поэтому, например, точка (0, 2) первой карты эквивалентна точке $(0, 1/2)$ второй карты.

Введенное отношение на парах точек будет отношением эквивалентности, если мы проверим его симметричность. Симметричность следует из леммы 2.

Лемма 2. *Мономиальное отображение, связанное с упорядоченной парой карт, обладает следующим свойством. Если задана последовательность точек первой карты, для которой выполнены условия*:

а) *последовательность имеет конечный предел в первой карте*;

б) *мономиальное отображение определено в точках последовательности*;

в) *последовательность образов точек последовательности имеет конечный предел во второй карте*,

то мономиальное отображение определено и невырождено в предельной точке последовательности.

Доказательство леммы основано на том, что пересечение конусов, отвечающих двум картам, является гранью каждого из них. Достаточно разобрать случай, когда последовательность точек лежит на гладкой кривой и предельная точка последовательности отвечает нулевому значе-

нию параметра кривой. Существование такой кривой следует из леммы об отборе кривых, см. [174]. Итак, пусть кривая имеет вид $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, где числа $c_1, \ldots, c_n$ не равны нулю. Тогда ее образ имеет вид $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, где $m_j = \sum a_j^i k_i$ и a_j^i — матрица мономиального отображения. По условию, показатели k_j, m_j неотрицательны. Согласно формулам, вектор $(m_1, \ldots, m_n)$ есть линейная комбинация столбцов матрицы a_j^i с коэффициентами $k_1, \ldots, k_n$. По определению в столбцах стоят координаты векторов скелета конуса, отвечающего первой карте, выраженных через векторы скелета конуса, отвечающего второй карте. Неотрицательность чисел m_j означает, что указанная линейная комбинация векторов первого скелета принадлежит второму конусу. Однако пересечение конусов является гранью каждого из них. Поэтому, если в линейной комбинации коэффициент k_j отличен от нуля, то в j-м столбце матрицы мономиального отображения все элементы, кроме одного, равны 0, а оставшийся коэффициент равен 1. Положительность коэффициента k_j означает, что предельная точка кривой при $t \to 0$ лежит на гиперплоскости $x_j = 0$. Согласно доказанному выше, мономиальное отображение определено и невырождено в общей точке этой гиперплоскости. Лемма доказана.

Итак, на парах точек карт задано отношение эквивалентности. Определим на множестве классов эквивалентности топологию и структуру аналитического многообразия. Каждая карта естественным образом вкладывается в качестве подмножества в множество классов эквивалентности. Скажем, что множество открыто, если открыты его пересечения со всеми картами. Из леммы 2 легко следует, что это определение задает на множестве классов эквивалентности структуру хаусдорфова топологического пространства. Вложения карт определяют покрытие топологического пространства открытыми множествами и определяют гомеоморфизмы этих множеств и $\mathbb{R}^n$. По построению функции перехода, связанные с этими гомеоморфизмами, являются мономиальными отображениями в области определения. Таким образом, по простому вееру мы построили аналитическое многообразие. Это многообразие будем называть *многообразием, ассоциированным с простым веером*.

З а д а ч а. Докажите, что $(\mathbb{R}P^1)^n$ и $\mathbb{R}P^n$ являются многообразиями, ассоциированными с веерами, изображенными соответственно на рис. 132, *а*, *б*.

Г. Н а м н о г о о б р а з и и, а с с о ц и и р о в а н н о м с п р о с т ы м в е е р о м, д е й с т в у е т т о р. Пространство $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$ относительно покоординатного умножения образует группу, называемую n-мерным тором. Тор действует сам на себе. Его действие естественно продолжается на $\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим многообразие, ассоциированное с простым веером. На картах многообразия действует тор. Легко видеть, что это действие продолжает-

ся до действия тора на всем многообразии. Опишем орбиты этого действия.

Имеется одна n-мерная орбита — изоморфная тору. В произвольной карте это $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$.

Орбиты размерности $n-1$ находятся во взаимно однозначном соответствии с одномерными конусами простого веера. Действительно, каждая карта пересекается с n орбитами размерности $n-1$. Их замыкания в локальных координатах совпадают с координатными гиперплоскостями. Поставим в соответствие $(n-1)$-мерной орбите, лежащей в гиперплоскости $x_j = 0$, вектор с номером j скелета конуса, отвечающего карте. (Напомним, что векторы скелетов конусов веера упорядочены.)

Лемма 3. 1) *Это соответствие корректно определяет взаимно однозначное соответствие между множеством* $(n-1)$*-мерных орбит и множеством одномерных конусов простого веера*.

2) *Замыкание произвольной* $(n-1)$*-мерной орбиты* — $(n-1)$*-мерное подмногообразие*.

Доказательство. Рассмотрим две карты многообразия и функцию перехода из первой карты во вторую. Пусть $(n-1)$-мерная орбита, лежащая в первой карте, переходит в $(n-1)$-мерную орбиту, лежащую во второй карте. Пусть для простоты обозначений эти орбиты и в первой, и во второй картах лежат в гиперплоскостях $x_1 = 0$. Докажем, что им соответствует один и тот же одномерный конус. Действительно, функция перехода — мономиальное отображение. По предположению, в первом столбце матрицы мономиального отображения все элементы нулевые, кроме первого, который равен 1. Это по определению функций перехода означает, что в скелетах конусов, отвечающих двум картам, первые векторы одинаковы, что и требовалось доказать. Аналогично доказывается, что если в разных картах $(n-1)$-мерные орбиты соответствуют одному и тому же одномерному конусу, то эти орбиты совпадают.

Утверждение второй части леммы тривиально. Лемма доказана.

Аналогично предыдущему устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством k-мерных орбит и $(n-k)$-мерных конусов простого веера. Замыкания орбит являются подмногообразиями. В локальных картах это координатные плоскости. Если одна орбита лежит в замыкании другой орбиты, то конус, отвечающий второй орбите, является гранью конуса, отвечающего первой орбите, подробнее см. в [360].

Д. Отображения многообразий, ассоциированных с простыми веерами. Пусть заданы два веера. Скажем, что первый веер *вписан* во второй веер, если для любого конуса первого веера найдется содержащий его конус второго веера.

Рассмотрим два простых веера. Предположим, что первый веер вписан во второй веер. Рассмотрим многообразия, ассоциированные с этими

веерами. Определим аналитическое отображение первого многообразия во второе. Для этого определим ограничение отображения на каждую карту первого многообразия. Рассмотрим произвольную карту первого многообразия. Карта отвечает n-мерному конусу первого веера. По предположению, найдется конус второго веера, содержащий этот конус первого веера. Конус второго веера, разумеется, тоже n-мерен. Поэтому конусу второго веера отвечает карта второго многообразия. Итак, мы имеем упорядоченную пару карт. Рассмотрим связанное с этими картами мономиальное отображение из первой карты во вторую (см. п. 30.1.В). Элементы матрицы этого мономиального отображения неотрицательны, поскольку первый конус вложен во второй. Таким образом, мы определили аналитическое отображение произвольной карты многообразия, ассоциированного с первым веером, в одну из карт многообразия, ассоциированного со вторым веером.

Лемма 4. *Эти локальные отображения согласованы и корректно определяют аналитическое отображение первого многообразия во второе.*

Лемма 4 — прямое следствие леммы 1.

Замечание. На каждом многообразии имеется единственная n-мерная орбита действия тора. Построенное отображение устанавливает изоморфизм этих орбит.

Теорема 1 (см. [360]). *Пусть заданы два простых веера и первый веер вписан во второй. Рассмотрим ассоциированные с веерами многообразия и построенное выше отображение первого многообразия во второе. Утверждается, что если объединение конусов первого веера содержит объединение конусов второго веера, то это отображение — собственное. Обратное тоже справедливо.*

Следствие. *В условиях теоремы первое многообразие отображается на второе многообразие.*

Действительно, отображение собственное и обратимо на всюду плотном множестве.

Прямая теорема следует из леммы 5. Обратная теорема доказывается аналогично.

Лемма 5. *Пусть в одной из карт второго многообразия задана кривая вида $x_j(t) = t^{m_j}(d_j + O(t))$, $m_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$, где числа $d_1, \ldots, d_n$ не равны нулю. Тогда существует карта первого многообразия, в которой прообраз кривой имеет конечный предел при $t \to 0$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Нам надо подобрать карту первого многообразия и кривую в этой карте вида $x_j(t) = t^{k_j}(c_j + O(t))$, $j = 1, \ldots, n$, где числа $c_1, \ldots, c_n$ не равны нулю, образ которой совпадал бы с нашей кривой. Ограничимся указанием того, какую именно карту надо взять. Рассмотрим базис, образованный скелетом

конуса, отвечающего карте второго многообразия. Рассмотрим линейную комбинацию векторов этого базиса с неотрицательными коэффициентами $m_1, \ldots, m_n$. В результате получится вектор, принадлежащий конусу. По условию найдется n-мерный конус первого веера, который содержит этот вектор. Этому n-мерному конусу первого веера соответствует карта первого многообразия. В этой карте прообраз нашей кривой имеет конечный предел. Проверку этого факта мы оставляем читателю.

Е. Важный пример. Рассмотрим два простых веера. Предположим, что второй веер состоит из одного n-мерного конуса и его граней. Предположим, что объединение конусов первого веера совпадает с n-мерным конусом, порождающим второй веер. Согласно конструкции п. В с каждым веером ассоциировано многообразие. Многообразие, ассоциированное со вторым веером, состоит из одной карты и изоморфно $\mathbb{R}^n$. Согласно конструкции п. Д имеется собственное аналитическое отображение многообразия, ассоциированного с первым веером, на многообразие, ассоциированное со вторым веером, т. е. на $\mathbb{R}^n$. Это отображение обратимо вне объединения координатных гиперплоскостей.

Этот пример будет использован в п. 30.2 для построения разрешения особенностей.

Задача. Пусть $n = 2$ и в качестве первого веера взят веер, изображенный на рис. 133. Докажите, что отображение на $\mathbb{R}^2$ многообразия, ассоциированного с первым веером, совпадает с σ-процессом в начале координат.

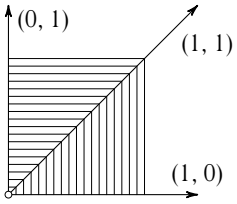


Рис. 133

Ж. Комплексный аналог. Конструкции многообразия и отображения многообразий, изложенные в этом пункте, имеют естественный комплексно-аналитический аналог. Вместо карт, изоморфных $\mathbb{R}^n$, надо брать карты, изоморфные $\mathbb{C}^n$, и все отображения задавать теми же формулами. Видоизмененные конструкции будут приводить к комплексно-аналитическим многообразиям и их комплексно-аналитическим отображениям. Построенные таким образом комплексные многообразия имеют естественные вещественные части. Вещественные части являются вещественными многообразиями и совпадают с многообразиями, построенными в этом пункте. Комплексно-аналитические отображения сохраняют вещественные части. Ограничения комплексно-аналитических отображений на вещественные части совпадают с отображениями, построенными в этом пункте.

30.2. Разрешение особенностей.

А. Веер, ассоциированный с многогранником Ньютона. Рассмотрим многогранник Ньютона, т. е. выпуклый много-

гранник в $\mathbb{R}^n$ с вершинами в точках с неотрицательными целыми координатами, который вместе с каждой точкой содержит положительный октант, параллельно перенесенный в эту точку (см. п. 28.2.А). Обозначим многогранник через Γ.

Опорной функцией многогранника Ньютона называется функция на положительном октанте пространства, сопряженного с $\mathbb{R}^n$. Ее значение на ковекторе a положительного октанта полагается равным $\min\limits_{k\in\Gamma}\langle a, k\rangle$. Опорная функция обозначается через l_Γ.

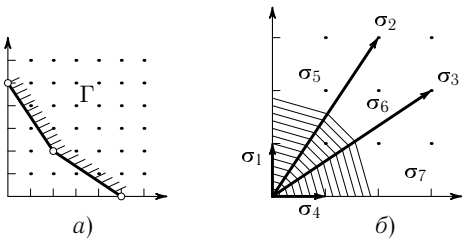
Следом (на многограннике Ньютона) ковектора a положительного октанта называется грань многогранника, выделенная условием $\{k \in \Gamma\colon \langle a, k\rangle = l_\Gamma(a)\}$. *Совместным следом* ковекторов положительного октанта называется пересечение их следов.

Два ковектора положительного октанта называются *эквивалентными* относительно многогранника Ньютона, если совпадают их следы.

Лемма 6. *Замыкание любого класса эквивалентности является рациональным конусом в пространстве, сопряженном с* $\mathbb{R}^n$. *Более того, совокупность всех таких конусов образует веер.*

Доказательство легко следует из определения опорной функции; подробнее см. в [221].

Веер, образованный замыканиями классов эквивалентности, называется *веером, ассоциированным с многогранником Ньютона*. Объединение конусов, составляющих этот веер, совпадает с положительным октантом пространства, сопряженного с $\mathbb{R}^n$.



а) *б*)

Рис. 134

Пример. На рис. 134, *а* изображен многогранник Ньютона в $\mathbb{R}^2$. На рис. 134, *б* изображен ассоциированный с ним веер.

Б. Простой подчиненный веер. Простой веер в пространстве, сопряженном с $\mathbb{R}^n$, называется *подчиненным многограннику Ньютона*, если он вписан в веер, ассоциированный с многогранником, и если объединение конусов, составляющих этот простой веер, совпадает с положительным октантом.

Лемма 7 (см. [360]). *Существует простой веер, подчиненный многограннику Ньютона.*

Алгоритм построения простого веера, вписанного в заданный веер и имеющего то же объединение всех входящих в него конусов, указан на с. 32—35 в [360]. Мы не будем подробно воспроизводить алгоритм. Укажем его основные моменты.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом этапе конусы первоначально заданного веера произвольным образом разбиваются на симплициальные. На втором этапе алгоритма нужно сделать кратности всех n-мерных конусов разбиения равными 1. Это делается убывающей индукцией по числу конусов с максимальной кратностью, а затем убывающей индукцией по числу, равному максимуму кратностей конусов разбиения. На каждом шаге второго этапа надо симплициальный конус кратности больше 1 разбить на симплициальные конусы меньшей кратности. Это делается добавлением одномерного конуса, порожденного правильно подобранным целочисленным вектором. В качестве этого вектора надо взять целочисленный вектор, являющийся такой линейной комбинацией векторов скелета, в которой все коэффициенты неотрицательны, меньше 1 и хотя бы один коэффициент не равен 0.

Пример. На рис. 134, *б* изображен веер, ассоциированный с многогранником, изображенным на рис. 134, *а*. Все конусы этого веера симплициальны. Кратности конусов σ_5, σ_6, σ_7 равны соответственно 3, 5, 3. Пример простого веера, подчиненного указанному многограннику, изображен на рис. 135.

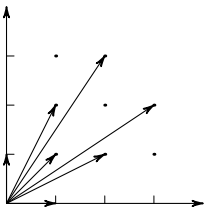


Рис. 135

В. Теорема о разрешении особенностей. Рассмотрим простой веер, подчиненный многограннику Ньютона. С простым веером ассоциировано многообразие. Это, многообразие называется *многообразием, подчиненным многограннику Ньютона*. Объединение конусов, составляющих простой веер, совпадает с положительным октантом, который, в частности, является симплициальным конусом кратности 1. Согласно конструкции из п.30.1.Д многообразие, подчиненное многограннику, проектируется на $\mathbb{R}^n$ (см. п. 30.1.Е). Эта проекция называется *ассоциированной* с многообразием, подчиненным многограннику Ньютона. Проекция является собственным аналитическим отображением.

Теорема 2 (о разрешении особенностей; см. [38], [49], [221], [481]). *Рассмотрим сходящийся степенной ряд n переменных без свободного члена, с вещественными коэффициентами и с $\mathbb{R}$-невырожденной главной частью. Ряд задает аналитическую функцию в окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, и ассоциированную с многообразием проекцию многообразия на $\mathbb{R}^n$. Утверждается, что многообразие и проекция разрешают особенности в начале координат функции, заданной рядом.*

Доказательство теоремы основано на двух формулируемых ниже леммах.

Г. Вспомогательные леммы. Рассмотрим два симплициальных n-мерных конуса кратности 1 в пространстве, сопряженном с $\mathbb{R}^n$. Предположим, что второй конус совпадает с положительным октантом. Пусть скелеты конусов упорядочены, причем скелет второго конуса упорядочен стандартным образом: $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$. Обозначим через $a^j = (a^j_1, \ldots, a^j_n)$ ковектор с порядковым номером j скелета первого конуса. Скелеты конусов задают упорядоченную пару базисов целочисленной n-мерной решетки. С парой базисов ассоциировано мономиальное отображение (см. п. 30.1.Б). Обозначим его через h. Матрица (a^j_i) этого мономиального отображения имеет неотрицательные элементы, поскольку первый конус вложен во второй. Рассмотрим степенной ряд f переменных $x_1, \ldots, x_n$. Мономиальное отображение с неотрицательной матрицей индуцирует преобразование степенного ряда в степенной ряд $f \circ h$.

Лемма 8. 1) *Максимальная степень переменной x_j, на которую делится степенной ряд после мономиального преобразования, равна значению опорной функции многогранника Ньютона исходного степенного ряда на ковекторе с порядковым номером j скелета первого конуса.*

2) *Якобиан мономиального отображения равен с точностью до знака одночлену, в котором показатель переменной x_j равен уменьшенной на 1 сумме координат ковектора с порядковым номером j скелета первого конуса.*

3) *Диаграмма Ньютона степенного ряда после мономиального преобразования является точкой тогда и только тогда, когда все ковекторы внутренности первого конуса эквивалентны относительно многогранника Ньютона исходного степенного ряда.*

4) *Образ координатной гиперплоскости $x_j = 0$ содержится в координатной плоскости, заданной равенствами $x_i = 0$, $i \in I$, где I — множество номеров всех отличных от нуля координат ковектора с порядковым номером j скелета первого конуса.*

Доказательство очевидно.

Предположим, что степенной ряд f имеет вещественные коэффициенты и сходится. Функцию, задаваемую рядом, будем обозначать той же буквой. Рассмотрим функцию $f \circ h$, индуцированную из функции f мономиальным отображением. С каждой координатной гиперплоскостью связаны два числа: кратность нуля на гиперплоскости функции $f \circ h$ и кратность нуля на гиперплоскости якобиана мономиального отображения. Первое число обозначим через k, второе через m. Число, равное $-(m + 1)/k$, называлось в §29 весом гиперплоскости. Веса играют основную роль в теореме 29.5. Объясним геометрический смысл веса координатной гиперплоско-

сти. Пусть для определенности это гиперплоскость, заданная уравнением $x_1 = 0$.

Обозначим через Γ многогранник Ньютона исходного степенного ряда. Рассмотрим гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, заданную уравнением $\langle a^1, x\rangle = l_\Gamma(a^1)$, где a^1 — ковектор с номером 1 скелета первого конуса, l_Γ — опорная функция многогранника Γ. Пересечение этой гиперплоскости с многогранником есть след ковектора a^1. Гиперплоскость пересекается с биссектрисой положительного октанта ровно в одной точке $(t, \ldots, t)$. Согласно лемме 8, вес координатной гиперплоскости $x_1 = 0$ равен $-(a^1_1 + \ldots + a^1_n)/l_\Gamma(a^1) = -1/t$, см. рис. 136. Это замечание объясняет появление в теореме 28.4 числа, равного удаленности многогранника Ньютона.

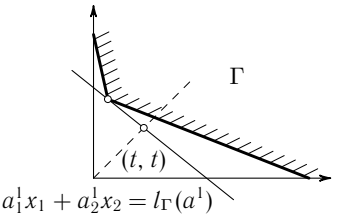


Рис. 136

Сформулируем вторую вспомогательную лемму.

Л е м м а 9. *Пусть выполнены условия леммы* 8. *Предположим, что* 1) *при мономиальном отображении h гиперплоскость, заданная уравнением $x_1 = 0$, отображается в начало координат*; 2) *степенной ряд f (без свободного члена) сходится и имеет $\mathbb{R}$-невырожденную главную часть*; 3) *все ковекторы внутренности первого конуса эквивалентны относительно многогранника Ньютона ряда f. Тогда в каждой точке гиперплоскости $x_1 = 0$ найдутся локальные координаты, в которых функция $f \circ h$ и якобиан отображения h равны одночленам с точностью до умножения на не обращающиеся в нуль функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что упомянутые локальные координаты найдутся для точки, в которой первые s евклидовых координат равны нулю, а остальные евклидовы координаты отличны от нуля. По условию ряд $f \circ h$ представим в виде $x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_n^{l_\Gamma(a^n)}(\mathrm{const} + O(x_1, \ldots, x_n))$, где $\mathrm{const} \neq 0$ (см. п. 1), 3) леммы 8). Перепишем ряд $f \circ h$ в виде $x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_s^{l_\Gamma(a_s)}(f_0(x_{s+1}, \ldots, x_n) + O(x_1, \ldots, x_s))$. Достаточно доказать, что гиперповерхность, заданная уравнением $f_0 = 0$, не имеет особых точек в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. Все координаты ковектора a^1 положительны (п. 4) леммы 8), поэтому f_0 — многочлен. Обозначим через γ совместный след ковекторов $a^1, \ldots, a^s$. Обозначим через γ непустую компактную грань многогранника Ньютона, являющуюся совместным следом ковекторов $a^1, \ldots, a^s$. Через f_γ обозначим γ-часть ряда f. Очевидно, что $f_\gamma \circ h = x_1^{l_\Gamma(a^1)} \ldots x_s^{l_\Gamma(a^s)} f_0$. В силу $\mathbb{R}$-невырожденности главной части ряда f первые частные производные γ-части не имеют общих нулей в $(\mathbb{R} \setminus 0)^n$. Отображение h задает диффеоморфизм

$(\mathbb{R}\setminus 0)^n \to (\mathbb{R}\setminus 0)^n$, поэтому многочлены f_0, $\partial f_0/\partial x_{s+1}$, …, $\partial f_0/\partial x_n$ не имеют общих нулей в $(\mathbb{R}\setminus 0)^n$, что и требовалось доказать.

Д. Доказательство теоремы 2. Проверим выполнение трех пунктов определения разрешения особенностей, приведенных на с. 448. Рассмотрим многообразие, подчиненное многограннику Ньютона ряда f, и ассоциированную с ним проекцию многообразия на $\mathbb{R}^n$. Согласно теореме 1, проекция является собственным аналитическим отображением. Следовательно, выполнен п. 3 определения разрешения особенностей. Проекция обратима вне объединения координатных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, выполнен п. 2 определения. Наконец, п. 1 является прямым следствием леммы 9. Теорема доказана.

Замечание 1. Разрешение особенностей в теореме 2 определяется простым веером, подчиненным многограннику Ньютона. Изменяя веер, можно наделить разрешение особенностей дополнительными свойствами. А именно, можно выбрать такой простой веер, подчиненный многограннику Ньютона, для которого отображение разрешения особенностей, указанное в теореме 2, обратимо вне гиперповерхности нулевого уровня функции, заданной степенным рядом (см. [481]). Обратимость отображения вне гиперповерхности нулевого уровня означает выполнение условия 2 на с. 448.

Лемма 10. *Разрешение особенностей, указанное в теореме* 2, *удовлетворяет условию* 2′ *на с.* 448, *если простой веер, определяющий разрешение, обладает следующим дополнительным свойством. Конусом этого веера является всякий конус веера, ассоциированного с многогранником, если этот конус симплициален и его скелет можно дополнить до базиса целочисленной решетки.*

Пример. На рис. 134, 135 изображены многогранник Ньютона, ассоциированный с ним веер и простой веер, подчиненный многограннику Ньютона. Простой веер обладает свойством, указанным в лемме 10.

Лемма легко доказывается с помощью п. 1), 4) леммы 8; см. также [481].

Лемма 11. *Существует простой веер, подчиненный многограннику Ньютона и обладающий свойством, указанным в лемме* 10.

Такой простой веер можно построить с помощью алгоритма, указанного в п. 30.2.Б.

Замечание 2. Сформулируем комплексный аналог теоремы 2.

Теорема 2′ (см. [38], [221], [481]). *Рассмотрим сходящийся степенной ряд от n переменных без свободного члена, с комплексными коэффициентами и с* $\mathbb{C}$*-невырожденной главной частью. Ряд задает аналитическую функцию в окрестности начала координат в* $\mathbb{C}^n$. *Рассмотрим комплексное аналитическое многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, и ассоциированную с многообразием проекцию многообразия на* $\mathbb{C}^n$ (см. п. 30.1.Ж).

Утверждается, что многообразие и проекция разрешают особенности в начале координат функции, заданной рядом (т. е. функция, многообразие и его отображение на $\mathbb{C}^n$ *обладают свойствами* 1—3 *на с.* 448).

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 2.

Как и теорема 2, теорема 2′ допускает усиление: существует такое многообразие, подчиненное многограннику Ньютона степенного ряда, для которого разрешение особенностей из теоремы 2′ обладает свойством 2 на с. 448 (см. [481]).

30.3. Приложения к осциллирующим интегралам.

А. Теорема 3 (см. [49]). *Рассмотрим осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n,$$

в котором фаза f *является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что ряд Тейлора фазы в начале координат имеет* $\mathbb{R}$*-невырожденную главную часть. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора и простой веер, подчиненный этому многограннику Ньютона. Об этих объектах справедливы утверждения* 1)—5).

1) *Множество показателей фазы в начале координат принадлежит объединению следующих арифметических прогрессий, зависящих только от веера и не зависящих от коэффициентов ряда Тейлора. Одна последовательность — это отрицательные целые числа. Остальные прогрессии параметризуются одномерными конусами веера, на которых отлична от нуля опорная функция многогранника Ньютона. Такому конусу отвечает арифметическая прогрессия* $-(a^1+\ldots+a^n)/l_\Gamma(a), -(1+a^1+\ldots+a^n)/l_\Gamma(a), \ldots,$ *где* $a=(a^1,\ldots,a^n)$ *— примитивный ковектор, порождающий конус,* l_Γ *— опорная функция многогранника Ньютона.*

2) *Показатель осцилляции фазы в начале координат не больше удаленности многогранника Ньютона.*

3) *Показатель осцилляции фазы в начале координат равен удаленности многогранника Ньютона, если выполнено хотя бы одно из следующих трех условий.*

а) *Многогранник Ньютона является далеким.*

б) *Фаза имеет в начале координат максимум или минимум.*

в) *Обозначим через* γ *замыкание открытой грани многогранника Ньютона, которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона* (см. п. 28.2.B); *требуется, чтобы* γ*-часть ряда Тейлора фазы в начале координат не имела нулей в* $(\mathbb{R}\setminus 0)^n$ *и удаленность*

многогранника Ньютона не была целым нечетным числом (*условие отсутствия нулей выполняется*, *в частности*, *если* γ *— вершина многогранника*).

4) *Если выполнено хотя бы одно из условий* а)—в) *п.* 3) *теоремы*, *то кратность показателя осцилляции фазы в начале координат равна кратности удаленности многогранника Ньютона* (*в частности*, *если биссектриса положительного октанта натыкается на вершину многогранника Ньютона*, *то кратность равна* $n-1$, *если на ребро*, *то кратность равна* $n-2$, *и т. д.*). *Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат*, *амплитуда знакопостоянна и отлична от нуля в начале координат*, *то отличен от нуля числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла* (*т. е. коэффициент* $a_{K,\beta}$ *ряда* (2) *на с.* 437).

5) *Предположим*, *что выполнено хотя бы одно из условий* а)—в) *п.* 3) *теоремы. Предположим*, *что фаза имеет конечнократную критическую точку в начале координат и носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности начала координат. Тогда числовой коэффициент старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла* (*т. е. коэффициент* $a_{K,\beta}$ *ряда* (2) *на с.* 437) *равен значению амплитуды в начале координат*, *умноженному на отличную от нуля константу*, *зависящую только от фазы*.

6) *Предположим*, *что удаленность многогранника Ньютона равна* -1. *Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат равен* -1, *если выполнено хотя бы одно из следующих двух условий*.

а) *Открытая грань*, *которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона*, *имеет размерность меньше* $n-1$.

б) *Замыкание* γ *открытой грани*, *которой принадлежит центр границы многогранника Ньютона*, *компактно*, *и* γ*-часть ряда Тейлора имеет нули на* $(\mathbb{R}\setminus 0)^n$.

Более того, *в этом случае кратность показателя осцилляции фазы в начале координат равна кратности удаленности многогранника Ньютона или на* 1 *меньше кратности удаленности. Если условия* а), б) *выполнены одновременно*, *то кратность показателя осцилляции равна кратности удаленности*.

З а м е ч а н и я. 1. Теорема 28.4 и ее добавления а), б), е), ж) — следствия сформулированной теоремы.

2. В п. 1) теоремы указан способ построения арифметических прогрессий. Существует иной способ построения подобных прогрессий. Этот способ использует только многогранник Ньютона и не использует простого веера, подчиненного многограннику. Способом можно пользоваться, если

фаза имеет в начале координат конечнократную критическую точку и ряд Тейлора фазы имеет $\mathbb{C}$-невырожденную главную часть. Способ основан на следующей теореме Мальгранжа. С каждой конечнократной критической точкой функции связан линейный оператор монодромии в исчезающих в точке гомологиях (см. гл. IV). С каждым корнем λ характеристического многочлена оператора монодромии свяжем арифметическую прогрессию всех чисел α, для которых $\exp(2\pi i\alpha) = \lambda$. Теорема Мальгранжа (см. § 33) утверждает, что множество показателей критической точки содержится в объединении построенных прогрессий. В теореме 25.13 указана формула, выражающая характеристический многочлен оператора монодромии через многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки.

Доказательство теоремы. Будем предполагать, что $f(0) = 0$. С простым веером из теоремы ассоциировано многообразие, подчиненное многограннику Ньютона ряда Тейлора. Это многообразие и ассоциированная с ним проекция разрешают особенности фазы в начале координат (теорема 2). Применим теорему 29.5. Для доказательства п. 1) теоремы нужно указать набор кратностей разрешения особенностей, т. е. нужно указать кратности неприводимых компонент гиперповерхности нулевого уровня фазы, поднятой на многообразие, разрешающее особенности. В локальной карте многообразия поднятая фаза равна произведению одночлена и функции с неособой гиперповерхностью нулевого уровня (см. лемму 9); кроме того, якобиан отображения разрешения равен одночлену (лемма 8). Поэтому в локальной карте неприводимыми компонентами с кратностями, не равными $(1, 0)$ (см. п. 29.3), являются те координатные гиперплоскости, на которых кратность нуля поднятой фазы больше 1. Лемма 8 выражает на гиперплоскости кратности нулей поднятой фазы и якобиана разрешения через соответствующий примитивный ковектор одномерного конуса простого веера. Теперь п. 1) теоремы следует из теоремы 29.5 и леммы 8.

Обратим внимание на геометрический смысл первого числа арифметической прогрессии, отвечающей примитивному ковектору одномерного конуса (см. замечание после леммы 8). Это первое число равно взятой с минусом обратной величине параметра пересечения биссектрисы положительного октанта и гиперплоскости, заданной ковектором и опирающейся на многогранник. Поэтому среди первых чисел арифметических прогрессий, указанных в п. 1) теоремы, непременно есть число, равное удаленности многогранника. А именно, удаленность есть первое число арифметической прогрессии, отвечающей всякому ковектору, след которого содержит центр границы многогранника.

Докажем п. 2). Если удаленность многогранника Ньютона равна -1, п. 2) следует из п. 1) теоремы 29.5. Если удаленность меньше -1, то ряд Тей-

лора фазы не делится ни на одну из переменных. Согласно леммам 8, 9 это означает, что выполнены условия п. 5) теоремы 29.5. Теперь п. 2) теоремы следует из п. 5) теоремы 29.5. Случай, в котором удаленность многогранника Ньютона больше -1, разбирается при доказательстве п. 3).

Пункт 3), а) теоремы следует из п. 3) теоремы 29.5, поскольку в этом случае вес разрешения больше -1 и равен удаленности многогранника Ньютона. Пункт 3), б) следует из п. 4) теоремы 29.5.

Пункты 4, а) и 4, б) будут следовать из п. 3), 4) теоремы 29.5, если будет доказано, что кратность веса разрешения равна кратности удаленности многогранника Ньютона. Для доказательства отметим следующий очевидный факт. Рассмотрим все конусы простого веера, подчиненного многограннику Ньютона, которые обладают следующим свойством: следы всех ковекторов, составляющих конус, содержат центр границы многогранника Ньютона. Тогда максимум размерностей указанных конусов равен увеличенной на 1 кратности удаленности многогранника Ньютона. Теперь требуемое утверждение следует из леммы 8.

Пункты 5, а) и 5, б) следуют соответственно из п. 3), г) и 4), г) теоремы 29.5. Пункты 3), в), 4), в), 5), в) следуют из п. 6) теоремы 29.5. Утверждение п. 6) следует из п. 7) теоремы 29.5. Теорема доказана.

Согласно теореме 3, порядок осциллирующего интеграла равен удаленности многогранника Ньютона фазы, если амплитуда знакопостоянна и ее значение в критической точке фазы отлично от нуля. Сформулируем утверждение, описывающее порядок интеграла в случае, когда амплитуда обращается в нуль в критической точке фазы.

Пусть заданы два многогранника Ньютона. Назовем *коэффициентом вложения* первого многогранника во второй нижнюю грань следующего множества положительных чисел. Число принадлежит множеству, если гомотетия с центром в начале координат и коэффициентом растяжения, равным числу, переводит первый многогранник внутрь второго.

Поставим в соответствие амплитуде осциллирующего интеграла многогранник Ньютона ее ряда Тейлора, умноженного на произведение всех переменных. Таким образом, мы имеем два многогранника: этот многогранник и многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы. Назовем *удаленностью многогранников фазы и амплитуды* взятую с минусом величину, обратную к коэффициенту вложения первого многогранника во второй.

З а д а ч а. Докажите, что удаленность многогранников фазы и амплитуды равна удаленности многогранника Ньютона фазы, если ряд Тейлора амплитуды имеет ненулевой свободный член.

П р и м е р. Пусть ряды Тейлора фазы и амплитуды равны соответственно $x_1^6 + x_1^3x_2^2 + x_2^6$ и x_1x_2. Тогда удаленность их многогранников равна $-7/9$.

Теорема 4. *Предположим, что фаза осциллирующего интеграла является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что ряд Тейлора фазы в начале координат имеет $\mathbb{R}$-невырожденную главную часть. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Показатель степени параметра старшего члена асимптотического ряда осциллирующего интеграла не больше удаленности многогранников фазы и амплитуды.*

2) *Показатель степени параметра старшего члена равен удаленности многогранников фазы и амплитуды, если эта удаленность больше -1 и многогранник, поставленный в соответствие амплитуде, конгруэнтен положительному октанту.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, только вместо ссылок на теорему 29.5 нужно ссылаться непосредственно на теорему 29.3. Отметим, что п. 2) теоремы является аналогом п. 3), а) теоремы 3. Справедливы аналоги п. 3), б), 3), в), 4), 5).

В заключение разберем случай вырожденной главной части ряда Тейлора.

Теорема 5 (см. [49]). *Пусть фаза — аналитическая функция в окрестности начала координат. Предположим, что многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы в начале координат далекий. Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат не меньше удаленности этого многогранника.*

Следствие 1. *Вес разрешения особенностей фазы больше -1.*

См. теорему 29.5.

Следствие 2. *Для фазы выполнены утверждения п. 3) теоремы* 29.5.

Следствие 3. *Пусть фаза — функция двух переменных, имеющая вырожденную критическую точку в начале координат. Тогда показатель осцилляции этой критической точки равен весу ее разрешения особенностей.*

Действительно, в этом случае легко подобрать систему координат, в которой удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы больше -1.

Следствие 4. *Удаленность критической точки не больше показателя осцилляции, если удаленность больше -1 (см. определение в п. 28.2.Г).*

Отметим, что теорема 28.5 утверждает равенство удаленности и показателя осцилляции для всех критических точек фаз двух аргументов.

Доказательство теоремы. Рассмотрим многообразие X, подчиненное многограннику Ньютона, и ассоциированную с ним проекцию $\pi\colon X \to \mathbb{R}^n$. С помощью проекции поднимем фазу на многообразие и

разрешим все особенности поднятой фазы на прообразе начала координат. А именно, по теореме Хиронаки [220] существуют новое многообразие Y и отображение $\varphi\colon Y \to X$, обладающие следующим свойством: отображение $\pi \circ \varphi$ разрешает особенности фазы в начале координат. У фазы, поднятой на X, есть компонента гиперповерхности нулевого уровня с весом, равным удаленности многогранника Ньютона (см. доказательство теоремы 30.3). Прообраз этой компоненты на Y имеет тот же вес. Теперь теорема следует из п. 3) теоремы 29.5.

Б. Обобщение теоремы 3 на интегралы Лапласа.

Теорема 6. *Рассмотрим интеграл Лапласа*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Предположим, что фаза является аналитической функцией в окрестности начала координат и имеет в начале координат локальный минимум. Согласно теореме 29.6, *при* $\tau \to +\infty$ *интеграл Лапласа разлагается в асимптотический ряд*

$$e^{-\tau f(0)}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\alpha} a_{K,\alpha}\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k.$$

Предположим, что ряд Тейлора фазы в начале координат имеет $\mathbb{R}$*-невырожденную главную часть. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора фазы. Рассмотрим простой веер, подчиненный этому многограннику Ньютона. Тогда асимптотики интеграла Лапласа обладают свойствами асимптотик осциллирующего интеграла с той же фазой, указанными в теореме* 3 *в пп.* 1), 3), 4), 5).

Доказательство теоремы 6 получается из доказательства теоремы 3 заменой ссылок на теорему 29.5 ссылками на теорему 29.6.

Следствие теоремы (ср. со следствием теоремы 29.6). *Для каждого положительного значения* t *обозначим через* $V(t)$ *объем множества тех точек, в которых значение фазы меньше* t. *Согласно теореме* 29.6, *функция* V *при* $t \to +0$ *разлагается в асимптотический ряд* $\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{k} a_{k,\alpha}t^{\alpha}(\ln t)^k$. *Утверждается, что порядок* α *максимального члена этого ряда равен взятой с минусом удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в точке минимума* (*при условии* $\mathbb{R}$*-невырожденности главной части ряда Тейлора*).

Замечание. Утверждение о том, что показатель старшего члена асимптотического ряда интеграла Лапласа равен удаленности многогранника Ньютона фаз, доказано В. А. Васильевым в [75] для случая, когда главная

часть ряда Тейлора фазы $\mathbb{R}$-невырождена и многогранник Ньютона пересекается с каждой координатной осью. Доказательство В. А. Васильева не использует разрешения особенностей.

В. Площадь поверхности уровня функции. Предположим, что в пространстве задана риманова метрика. Риманова метрика пространства задает риманову метрику на гиперповерхностях уровня функции. Риманова метрика на гиперповерхностях определяет форму $(n-1)$-мерного объема. Вычислим объем компактных многообразий уровня функции и рассмотрим асимптотику объема при стремлении уровня к критическому.

Теорема 7. *Предположим, что аналитическая функция f имеет изолированную точку минимума и минимальное значение функции равно нулю. Пусть в пространстве задана аналитическая риманова метрика. Для малых положительных t обозначим через $V(t)$ $(n-1)$-мерный объем многообразия уровня t. Тогда при $t \to +0$ функция V разлагается в асимптотический ряд $\sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$, в котором параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, составленных из положительных рациональных чисел. Если дополнительно известно, что $\mathbb{R}$-невырождена главная часть ряда Тейлора функции f в точке минимума и $\mathbb{R}$-невырождена главная часть ряда Тейлора функции (df, df) в точке минимума функции f, то порядок α максимального члена асимптотического ряда зависит только от многогранников Ньютона предыдущих рядов Тейлора и вычисляется по следующему правилу.*

Правило. Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора функции (df, df) в точке минимума функции f и образ этого многогранника под действием гомотетии с коэффициентом $1/2$ и центром в начале координат. Полученный многогранник сдвинем на вектор $(1, \ldots, 1)$. Рассмотрим второй многогранник, являющийся многогранником Ньютона ряда Тейлора функции f в точке минимума. Обозначим через k коэффициент вложения первого многогранника во второй. Тогда порядок α максимального члена асимптотического ряда равен $1/k - 1$.

Доказательство теоремы основано на том, что число $-1/k$ является показателем максимального члена асимптотического ряда интеграла Лапласа

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tau f(x)} \sqrt{(df, df)}\, \varphi(x)\, dx_1 \ldots dx_n$$

при $\tau \to +\infty$, если амплитуда φ тождественно равна 1 в малой окрестности точки минимума, и носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки минимума.

Г. Осциллирующие интегралы по полупространству. Рассмотрим осциллирующий интеграл по полупространству

$$\int_{x_1 \geqslant 0} e^{i\tau f(x)} \varphi(x)\, dx_1 \dots dx_n,$$

где фаза и амплитуда — гладкие функции во всем пространстве. Предположим, что фаза — аналитическая функция в окрестности начала координат. Если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат и ограничение фазы на границу полупространства не имеет критической точки в начале координат, то при $\tau \to +\infty$ интеграл убывает быстрее любой степени параметра (теорема 28.1). Предположим, что ограничение фазы на границу имеет критическую точку в начале координат.

Теорема 8. *Осциллирующий интеграл по полупространству разлагается в асимптотический ряд*

$$e^{i\tau f(0)} \sum_{\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} a_{k,\alpha}(\varphi) \tau^{\alpha} (\ln t)^k \quad \textit{при} \quad \tau \to +\infty,$$

если носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности начала координат. Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. Числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$, являются обобщенными функциями амплитуды. Носитель каждой обобщенной функции лежит в объединении критических множеств фазы и ограничения фазы на границу.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 29.5. Нужно рассмотреть разрешение особенностей в начале координат функции $x_1 f$ (оно одновременно является разрешением особенностей функции f), а затем повторить рассуждения доказательства теоремы 29.5. В результате для осциллирующего интеграла по полупространству мы докажем утверждения п. 1)—5) теоремы 29.5 (единственного добавления требует п. 5): он справедлив, если фаза не делится на x_1).

Если начало координат является критической точкой ограничения фазы на границу, но не является критической точкой фазы, исследование асимптотик интеграла по полупространству сводится к исследованию осциллирующего интеграла по границе. Действительно, диффеоморфизмом, сохраняющим границу, фазу можно привести к виду $x_1 + h(x_2, \dots, x_n)$. Теперь нужно интегрировать по частям по переменной x_1.

Предположим, что фаза имеет критическую точку в начале координат. Предположим, что главная часть ряда Тейлора фазы в начале координат $\mathbb{R}$-невырождена.

Теорема 9. *В сделанных предположениях асимптотики осциллирующего интеграла по полупространству обладают свойствами, указанными в пп.* 1)—5) *теоремы* 3.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 3.

Рассмотрим еще один тип осциллирующих интегралов по полупространству, а именно интегралы вида

$$\int_{x_1>0} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)x_1^{-1/2}dx_1\dots dx_n.$$

Здесь, как и ранее, фаза и амплитуда φ — гладкие функции во всем пространстве. Исследование таких интегралов сводится к исследованию рассмотренных ранее интегралов по полупространству с помощью замены $x_1 = z^2$. Сформулируем одно из полученных таким образом утверждений.

Теорема 10. *Предположим, что фаза является аналитической функцией в окрестности начала координат. Предположим, что главная часть ряда Тейлора фазы в начале координат $\mathbb{R}$-невырождена. Тогда показатель осцилляции фазы в начале координат для интегралов указанного типа определяется многогранником Ньютона ряда Тейлора фазы и равен взятой с минусом величине, обратной значению параметра точки пересечений прямой $2x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n = t$, где $t \in \mathbb{R}$, и границы многогранника Ньютона, если значение больше* 1.

Все заключения об асимптотиках осциллирующих интегралов по полупространству, сформулированные в этом пункте, справедливы для асимптотик интегралов Лапласа по полупространству.

30.4. Случай двух переменных. Согласно теореме 3, показатель осцилляции критической точки фазы равен удаленности многогранника Ньютона ее ряда Тейлора в некоторой системе координат, если в этой системе координат главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$-невырождена и многогранник Ньютона далекий. Эта теорема применима к произвольной критической точке фазы, зависящей от одного аргумента. Если фаза зависит от двух и более аргументов, то указанная система координат существует не всегда (см. п. 28.2.Г). Все же случай фазы, зависящей от двух аргументов, удается разобрать до конца, доказав равенство показателя осцилляции и удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в правильно выбранной системе координат. Правильно выбранная система координат называется *приспособленной к фазе*; она определена в п. 28.2.Г.

Теорема 11 (см. [49]). *Рассмотрим двойной осциллирующий интеграл*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{i\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\,dx_2.$$

Предположим, что фаза — аналитическая функция в окрестности своей вырожденной критической точки. Тогда справедливы следующие утверждения.

1) *Показатель осцилляции критической точки равен ее удаленности.*

2) *Существует система локальных координат, приспособленная к критической точке.*

3) *Кратность показателя осцилляции критической точки равна* 1, *если найдется приспособленная к критической точке система координат, в которой центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора критической точки лежит на пересечении двух ребер многоугольника. В противном случае кратность показателя осцилляции равна* 0.

Замечания. 1. Утверждения п. 1), 2) справедливы и для невырожденной критической точки; утверждение п. 3) — нет (пример: $f = x_1x_2$).

2. Утверждения об асимптотиках, сформулированные в теореме, справедливы и для асимптотик интегралов Лапласа с фазами, зависящими от двух аргументов.

3. Теорема 11 влечет теорему 28.5 и ее дополнение а). Дополнение б) вытекает из следствия 3 теоремы 5 и п. 3) теоремы 29.5.

4. В [49] указан алгоритм поиска приспособленных систем координат, указаны признаки приспособленных координат. Согласно одному из них, система координат приспособлена к критической точке, если центр границы многоугольника Ньютона ряда Тейлора критической точки лежит на пересечении двух ребер многоугольника, ср. с п. 3) теоремы.

5. Показатель осцилляции вырожденной критической точки фазы двух аргументов не меньше удаленности критической точки согласно следствию 4 теоремы 5.

Доказательство (как и доказательство теоремы 3) основано на анализе разрешения особенностей критической точки фазы. Анализ разрешения особенностей фазы в случае двух аргументов облегчается двумя обстоятельствами. Во-первых, в этом случае имеется простой алгоритм разрешения особенностей последовательными σ-процессами в точках. Во-вторых, в двумерном случае вес разрешения особенностей произвольной вырожденной критической точки больше -1 (следствие 3 теоремы 5). Согласно второму замечанию, показатель осцилляции равен весу разре-

шения особенностей (п. 3) теоремы 29.5). Таким образом, остается доказать, что вес разрешения особенностей равен удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора фазы в приспособленной к фазе системе координат.

Теорема 11 является прямым следствием формулируемой ниже теоремы 12.

Теорема 12 (см. [49]). *Рассмотрим разрешение особенностей вырожденной критической точки аналитической функции двух аргументов. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Вес разрешения особенностей равен удаленности критической точки.*

2) *Существует система локальных аналитических координат, в которых удаленность многогранника Ньютона ряда Тейлора критической точки равна весу разрешения особенностей.*

3) *Кратность числа, равного весу, относительно разрешения особенностей* (*определение см. в п.* 29.3) *равна* 2, *если существует приспособленная к критической точке система координат, в которой центр границы многоугольника Ньютона лежит на пересечении двух ребер многоугольника. В противном случае кратность равна* 1.

§ 31. Показатели особости, примеры

В этом параграфе мы докажем аддитивность показателя осцилляции, объясним вычисления показателей особости в таблицах п. 28.1.K. Во второй части параграфа мы приведем пример деформации критической точки. Этот пример иллюстрирует несколько явлений. Во-первых, отсутствие полунепрерывности сверху показателя осцилляции. Во-вторых, существование критических точек, которые комплексно-эквивалентны, но имеют разные показатели особости. В-третьих, существование критической точки, у которой показатель особости не равен удаленности. Наконец, существование критической точки, у которой главная часть ряда Тейлора $\mathbb{R}$-невырождена, но удаленность многогранника Ньютона больше показателя осцилляции.

31.1. Показатель особости.

А. Аддитивность показателя осцилляции и его кратности. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и $g\colon \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, x, y — соответственно их критические точки. Критическая точка $x \times y$ функции $f+g\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}$ называется *прямой суммой* критических точек x, y.

Лемма 1. *Показатель осцилляции и кратность показателя осцилляции аддитивны.*

Доказательство. Обозначим через β, K соответственно показатель осцилляции и кратность показателя осцилляции.

Очевидно, что $\beta(x\times y)\geqslant\beta(x)+\beta(y)$, и если $\beta(x\times y)=\beta(x)+\beta(y)$, то $K(x\times y)\geqslant K(x)+K(y)$. Действительно, если амплитуда осциллирующего интеграла с фазой $f+g$ разлагается в произведение двух функций, одна из которых есть функция на $\mathbb{R}^n$, а другая есть функция на $\mathbb{R}^l$, то сам интеграл разлагается в произведение осциллирующих интегралов с фазами соответственно f и g.

Докажем обратные неравенства. Рассмотрим осциллирующий интеграл с фазой $f+g$. Предположим, что носитель амплитуды сосредоточен в малой окрестности точки $x\times y$. В этом случае интеграл разлагается в асимптотический ряд $\sum\limits_{\alpha}\sum\limits_{k=0}^{n+l-1}a_{k,\alpha}\tau^{\alpha}(\ln\tau)^k$, где числовые коэффициенты $a_{k,\alpha}$ являются обобщенными функциями амплитуды. Обобщенная функция $a_{k,\alpha}$ при $\alpha>\beta(x)+\beta(y)$ тождественно равна нулю, поскольку в пространстве амплитуд всюду плотное множество образуют линейные комбинации амплитуд, разлагающихся в произведение функции на $\mathbb{R}^n$ и функции на $\mathbb{R}^l$. Таким образом, $\beta(x\times y)=\beta(x)+\beta(y)$. Аналогично доказывается равенство $K(x\times y)=K(x)+K(y)$.

Следствие. *У стабильно эквивалентных критических точек показатель особости и его кратность равны.*

Б. Вычисления показателей особости в таблицах п. 28.1.К. Показатели особости и их кратности для критических точек таблиц вычисляются с помощью теорем 30.3 и 30.11. Теоремы 30.3 и 30.11 применимы к критическим точкам, классифицированным в гл. II ч. I, поскольку каждая из указанных там критических точек либо имеет $\mathbb{R}$-невырожденную главную часть ряда Тейлора, либо, если это функция двух переменных, записана в приспособленной системе координат. Сформулированное утверждение несложно проверяется в каждом отдельном случае. После этого вычисление сводится к вычислению удаленности многогранника Ньютона ряда Тейлора.

31.2. Примеры.

Пример 1. Положим $F(x_1,x_2,x_3,y)=(yx_1^2+x_1^4+x_2^2+x_3^2)^2+x_1^p+x_2^p+x_3^p$, где y — вещественный параметр, $p\geqslant 9$. Обозначим через β_y показатель осцилляции критической точки в начале координат в $\mathbb{R}^3$ функции $F(\cdot,y)$.

Теорема 1 (см. [49]). *Семейство F функций на $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра y, обладает следующими свойствами.*

1) *Функция $f(\cdot,y)$ при всех значениях параметра y имеет конечнократную критическую точку в начале координат.*

2) $\beta_0=-5/8$.

3) *Если* $y > 0$, *то* $\beta_y = -3/4$.

4) *Если* $y < 0$, *то* $\beta_y > -(1/2 + \gamma(p))$, *где функция* $\gamma(p)$ *стремится к нулю при* $p \to +\infty$.

5) *Удаленность критической точки в начале координат функции* $F(\cdot, y)$ *при* $y \neq 0$ *равна* $-3/4$.

6) *Существуют такая окрестность* U *начала координат в* $\mathbb{R}^3$ *и такая окрестность* V *начала координат в* $\mathbb{R}$, *что показатель осцилляции функции* $F(\cdot, y)$, $y \in V$, *в любой ее критической точке* $x \in U \setminus 0$ *меньше* -1.

Следствие 1. *Для критической точки в начале координат функции* $F(\cdot, 0)$ *при достаточно большом* p *равномерный показатель осцилляции больше индивидуального показателя осцилляции.*

Из доказательства теоремы 1 следует, что такое явление наблюдается уже при $p = 9$.

Следствие 2. *Критические точки в началах координат функций* $F(\cdot, y)$ *и* $F(\cdot, -y)$ *при* $p = 4l$ *комплексно-эквивалентны* (*т. е. переводятся одна в другую голоморфным диффеоморфизмом пространства* $\mathbb{C}^3$), *однако имеют разные показатели осцилляции.*

Следствие 3. *Удаленность критической точки в начале координат функции* $F(\cdot, y)$ *при* $y < 0$ *меньше показателя осцилляции.*

Доказательство теоремы. Утверждение 1) проверяется прямым вычислением. Утверждения 2), 3) следуют из теоремы 30.3 в силу $\mathbb{R}$-невырожденности главной части многочлена $F(\cdot, y)$ при указанных y. Утверждение 5) следует из того, что удаленность критической точки в начале координат функции $\pm x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ равна $-3/2$.

Для доказательства утверждения 6) достаточно заметить, что при малых y у близких к нулю критических точек x координаты x_2, x_3 равны нулю. Из этого, как легко видеть, следует, что $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_3}(x, y) = 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x, y) \neq 0$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}(x, y) \neq 0$, т. е. ранг второго дифференциала не меньше двух. Согласно обобщенной лемме Морса, в окрестности такой критической точки функция приводится к виду $\varphi(u_1) \pm u_2^2 \pm u_3^2$. Для этой функции утверждение 6 следует из теоремы 30.3.

Доказательство п. 4) основано на теореме 29.5. Строится разрешение особенностей критической точки в начале координат, и показывается, что вес этого разрешения больше, чем $-(1/2 + \gamma(p))$, где $\gamma(p)$ стремится к нулю при $p \to +\infty$. При построении разрешения сначала делается σ-процесс в начале координат, а затем $p/2$ раз делается σ-процесс с центром в кривой, являющейся пересечением прообраза начала координат и собственного

прообраза поверхности нулевого уровня функции F. Возникшая последней компонента имеет достаточно высокий вес, что и доказывает п. 4); подробнее см. в [49].

Пример 2. Пусть $f_+ = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)) \cdot x_5$, $f_- = x_4^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (-x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))x_5$.

Теорема 2. *При достаточно большом p многочлены $f_\pm$ обладают следующими свойствами.*

1) *Их главные части $\mathbb{R}$-невырождены.*

2) *Их многогранники Ньютона совпадают.*

3) *Показатель осцилляции в начале координат многочлена f_+ равен $-7/4$.*

4) *Показатель осцилляции в начале координат многочлена f_- не меньше чем $-(1/2 + 1 + \gamma(p))$, где $\gamma(p)$ стремится к нулю при $p \to +\infty$.*

5) *Удаленность многогранника Ньютона многочленов меньше -1.*

Следствие 1. *Существует разрешение особенностей критической точки в начале координат многочлена f_+, вес которого больше показателя осцилляции.*

Действительно, таким разрешением особенностей является разрешение, указанное в теореме 30.2 (см. также теорему 30.3).

Следствие 2. *Удаленность многогранника Ньютона критической точки в начале координат многочлена f_+ больше показателя осцилляции.*

Доказательство теоремы. Пункт 2) очевиден. Пункты 1), 5) проверяются непосредственным вычислением. Докажем п. 3) (п. 4) доказывается аналогично). Сделаем замену $v = x_5 + x_4 + x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2$, тогда $f_+ = (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)^2 + x_1^p + x_2^p + x_3^p + (x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2))v$. Сделаем замену $u = x_4 - (x_1^2 + x_1^4 + x_2^2 + x_3^2)$, а затем $v = s + t$, $u = s - t$, тогда $f = F(x_1, x_2, x_3, 1) + s^2 - t^2$, где F — функция из примера 1. Теперь п. 3) следует из теоремы 1 и леммы 1.

ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛЫ ГОЛОМОРФНЫХ ФОРМ ПО ИСЧЕЗАЮЩИМ ЦИКЛАМ

Четвертая глава книги посвящена топологии критической точки голоморфной функции, шестая глава посвящена ее анализу. Основной объект исследования — интеграл голоморфной формы, определенной в окрестности критической точки, по циклу, лежащему в многообразии уровня функции и исчезающему в критической точке. Мы изучаем изменение интеграла при непрерывной деформации цикла из одного многообразия уровня в другое. Мы показываем, что асимптотическое поведение таких интегралов при деформации циклов в критическую точку содержит информацию о самых разнообразных объектах, связанных с критической точкой.

В § 32 изложены простейшие свойства интегралов (голоморфная зависимость от параметров, разложения в ряды, связь с группой монодромии). В § 33 описано взаимодействие асимптотик интегралов по циклам с асимптотиками интегралов метода перевала, для которых голоморфная функция служит фазой (в частности, с асимптотиками осциллирующих интегралов). В § 34 обсуждаются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции, заданные интегралами голоморфной формы по циклам, непрерывно зависящим от параметров. Параграф 35 посвящен обсуждению свойств коэффициентов асимптотических разложений интегралов голоморфных форм по циклам, непрерывно зависящим от параметров. В нем также определена смешанная структура Ходжа конечнократной критической точки голоморфной функции. В § 36 обсуждаются взаимодействия смешанной структуры Ходжа критической точки с другими характеристиками критической точки. В § 37 с помощью интегралов построены отображения базы версальной деформации критической точки в исчезающие в точке когомологии. Эти отображения переносят структуры, имеющиеся в когомологиях, на базу версальной деформации.

§ 32. Простейшие свойства интегралов

В этом параграфе доказывается голоморфная зависимость интеграла от параметров; объясняется связь ветвления интеграла с группой монодромии гомологий; доказывается разложимость интеграла в ряд в окрестности выделенного значения параметра.

Отметим важность определенных в п. 32.3.А, 32.3.Г понятий специализации развертки деформации ростка голоморфной функции и расслоения Милнора деформации ростка голоморфной функции.

32.1. Пример. Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ линии уровня многочлена. Если значение уровня не критическое, то линия уровня является неособой римановой поверхностью. Можно представлять себе линии уровня многочлена $f(x, y) = y^2 + x^3$, все они, за исключением линии нулевого уровня, являются поверхностями рода 1, из которых выколота одна бесконечно удаленная точка. Предположим, что на $\mathbb{C}^2$ задана полиномиальная дифференциальная 1-форма, например, форма $\omega = y\,dx$. Наконец, предположим, что на одной из неособых линий уровня выделена замкнутая кривая. Рассмотрим интеграл формы по кривой. Будем изучать изменение интеграла при непрерывной деформации кривой из одной неособой линии уровня в другую. В выбранном нами случае интеграл называется эллиптическим, и таким образом мы собираемся изучать зависимость от параметра периода эллиптического интеграла.

Мы докажем, что вне конечного множества исключительных значений параметра интеграл является многозначной голоморфной функцией параметра. Мы объясним связь ветвления значений интеграла с топологией расслоения, которое задает многочлен, ограниченный на дополнение к объединению линий исключительных уровней. Мы докажем, что в окрестности произвольного значения параметра интеграл разлагается в ряд по дробным степеням параметра и целым степеням логарифма параметра, при этом степени параметра и степени логарифмов параметра определяются жордановой структурой оператора монодромии в одномерных гомологиях линии уровня, отвечающего обходу вокруг исключительного значения параметра.

А. Голоморфная зависимость от параметра. Начнем с важного замечания: форма, ограниченная на линию уровня, замкнута. Действительно, на комплексной кривой нет отличных от нуля голоморфных 2-форм. Это замечание имеет два следствия. Во-первых, интеграл не меняется при замене кривой интегрирования на гомологичную кривую (теорема Стокса). Во-вторых, интеграл формы по кривой, продеформированной в соседнюю неособую линию уровня, определен корректно. Действительно, две разные непрерывные деформации в соседнюю линию уровня приводят к гомологичным кривым. Таким образом, интеграл формы по кривой, продеформированной в линии уровня, близкие к выделенной, определяет функцию, относящую интеграл значению многочлена на линии.

Теорема 1. *Интеграл — аналитическая функция значения многочлена.*

У нас есть функция в окрестности выделенной точки комплексной прямой; докажем ее голоморфность. Сначала докажем, что эта функция гладкая.

В окрестности исходной кривой интегрирования многочлен не имеет критических точек, поэтому в окрестности исходной кривой интегрирования отображение $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^1$ является гладким локально тривиальным расслоением. Выберем его гладкую тривиализацию и с помощью тривиализации разнесем исходную кривую интегрирования в соседние линии уровня многочлена. Рассмотрим интеграл формы по одной кривой построенного семейства. Он равен интегралу по исходной кривой интегрирования формы, перенесенной с помощью диффеоморфизма тривиализации на исходную линию уровня. Таким образом, на исходной линии уровня есть кривая и дифференциальная 1-форма, гладко зависящая от комплексного параметра. По стандартной теореме анализа интеграл формы по кривой гладко зависит от параметра.

Кривую на линии уровня s, построенную с помощью тривиализации, обозначим через $\sigma(s)$.

Для завершения доказательства представим наш интеграл в виде интеграла мероморфной 2-формы по вещественной поверхности. В качестве 2-формы возьмем форму $df \wedge \omega/(f-t)$, где t — значение многочлена на исходной линии уровня. Опишем поверхность. На комплексной прямой рассмотрим малый путь γ, обходящий против часовой стрелки число t. Обозначим через Γ поверхность в $\mathbb{C}^2$, образованную объединением кривых, параметры которых принадлежат пути: $\Gamma = \bigcup\limits_{s\in\gamma} \sigma(s)$.

Л е м м а 1. *Интеграл* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\Gamma \frac{df\wedge\omega}{f-t}$ *не зависит от выбора пути* γ *и равен* $\displaystyle\int_{\sigma(t)}\omega$.

Теорема следует из леммы, поскольку интегральное представление леммы голоморфно зависит от t.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Независимость от пути следует из теоремы Стокса в силу замкнутости 2-формы. Докажем равенство интегралов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{df\wedge\omega}{f-t} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_{\sigma(s)}\omega\right)\frac{ds}{s-t} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_{\sigma(t)}\omega\right)\frac{ds}{s-t} + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\int_{\sigma(s)}\omega - \int_{\sigma(t)}\omega\right)\frac{ds}{s-t}.$$

Первый интеграл правой части равен нашему интегралу. Подынтегральное выражение второго интеграла гладко зависит от s. Поэтому второй интеграл стремится к нулю, если в качестве пути брать окружность стремящегося к нулю радиуса. Таким образом, второй интеграл равен нулю. Лемма доказана.

Б. Ветвление интеграла. Выясним глобальные свойства функции, заданной интегралом полиномиальной дифференциальной 1-формы по замкнутой кривой, лежащей на линии уровня многочлена.

Согласно стандартным теоремам (см. [46], [484]) из $\mathbb{C}^2$ можно удалить конечное множество линий уровня многочлена так, что ограничение многочлена на их дополнение является локально тривиальным расслоением. Обозначим эти значения уровня через $t_1, \ldots, t_N$. В выбранном нами примере достаточно выбросить линию нулевого уровня.

Вернемся к интегралу $\int_{\sigma(s)} \omega$. Интеграл корректно продолжается вдоль любого пути на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$, начинающегося в точке t. Для этого нужно непрерывно деформировать кривую $\sigma(t)$ в линии уровня над точками пути; класс одномерных гомологий кривой, лежащей на линии уровня, соответствующей последней точки пути, определяется путем и не зависит от способа деформации. Если два пути с одинаковыми концами гомотопны в $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$, то значения продолжений интеграла в конечной точке совпадают. Таким образом, интеграл — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$.

Ветвление интеграла определяется преобразованием монодромии в одномерных гомологиях линии уровня t. Каждому классу гомотопных замкнутых путей в $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$ с началом в точке t соответствует линейный автоморфизм монодромии одномерных гомологий линии уровня t; он определяется непрерывной деформацией циклов в линии уровня над точками пути (см. гл. IV). Если M_γ — автоморфизм монодромии, отвечающий пути γ, то продолжение интеграла вдоль пути γ по определению равно $\int_{M_\gamma \sigma(t)} \omega$, где $\sigma(t)$ — класс гомологий, определяемый кривой $\sigma(t)$.

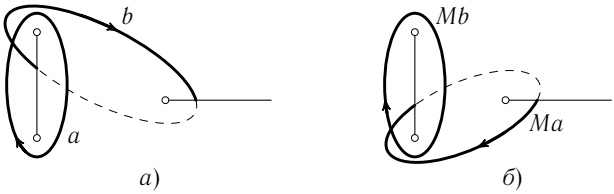
Для выбранного нами примера ограничение многочлена на дополнение к линии нулевого уровня — гладкое локально тривиальное расслоение. Таким образом, рассматриваемый эллиптический интеграл $\int y\,dx$ — многозначная голоморфная функция на $\mathbb{C}^1 \setminus 0$. Все замкнутые пути в $\mathbb{C}^1 \setminus 0$ кратны одному, обходящему начало координат один раз против часовой стрелки. Поэтому для выяснения ветвления рассматриваемого интеграла нужно выяснить, как устроено линейное преобразование монодромии, отвечающее указанному пути. В нашем примере неособая линия уровня — это тор без точки. Его группа одномерных гомологий — двумерное векторное пространство.

Представим себе линию уровня t, т. е. кривую $\{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : y^2 + x^3 = t\}$, как двулистное накрытие над осью Ox с ветвлением в кубических корнях из t. Проекции на ось Ox циклов, задающих базис (a, b) одномерных гомологий, изображены на рис. 137, *а*. Диффеоморфизм монодромии, отвечаю-

щий обходу числа t вокруг нуля, можно задать формулами

$$(x, y) \mapsto (\exp(2\pi i/3)x, \exp(2\pi i/2)y).$$

Образ циклов изображен на рис. 137, *б*. Поэтому монодромия задается формулами $M\colon (a, b) \mapsto (a - b, a)$. Теперь для описания ветвления интеграла го-



а) *б*)

Рис. 137

ломорфной формы по циклам семейства, порожденного циклом $\sigma(t)$, достаточно знать разложение класса гомологий, заданного циклом $\sigma(t)$, по базису и знать интегралы формы по базисным классам.

З а м е ч а н и е. Для такой простой формы, как $y\,dx$, ветвление можно описать, не зная преобразования монодромии в гомологиях. Отображение $(x, y) \mapsto (t^{1/3}x, t^{1/2}y)$ задает диффеоморфизм линии уровня 1 на линию уровня t. Ограничение формы $y\,dx$ на линию уровня t, перенесенное с помощью этого диффеоморфизма на линию уровня 1, после умножения на $t^{-5/6}$ равно ограничению формы $y\,dx$ на линию уровня 1. Поэтому функция, заданная интегралом формы $y\,dx$ по циклам семейства, равна $\mathrm{const} \cdot t^{5/6}$, где const — это интеграл формы по циклу семейства, лежащему на линии уровня 1.

В. Р а з л о ж е н и е и н т е г р а л а в р я д. Мы выяснили, что интеграл полиномиальной формы по циклу, зависящему от параметра, является многозначной голоморфной функцией на $\mathbb{C}^1 \setminus \{t_1, \ldots, t_N\}$. Поэтому каждая ветвь этой функции в окрестности произвольного значения параметра, не являющегося исключительным, разлагается в ряд Тейлора. Мы докажем, что и в окрестности исключительного значения параметра интеграл разлагается в ряд. Однако теперь это — ряд по дробным степеням параметра, коэффициентами которого являются многочлены от логарифма параметра. Такой ряд сходится в каждом секторе малой окрестности исключительного значения параметра (сходимость ряда рассматривается в секторах, а не в полной окрестности, из-за присутствия логарифмов). В описании ряда важную роль играет преобразование монодромии, отвечающее обходу вокруг исключительного значения параметра. Так, показатели степеней параметра являются деленными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел преобразования

монодромии, а степень любого многочлена от логарифма, являющегося коэффициентом ряда, всегда меньше, чем максимум размеров жордановых блоков с соответствующим собственным числом.

Сформулируем теорему. Для простоты обозначений предположим, что исключительное значение параметра равно нулю. Выделим в малой окрестности нуля сектор $a \leqslant \arg t \leqslant b$ и для каждого отличного от нуля числа t из сектора выделим базис $\sigma_1(t), \ldots, \sigma_\mu(t)$ целочисленных одномерных гомологий линии уровня t, непрерывно зависящий от t. Обозначим через M преобразование монодромии, отвечающее обходу параметра вокруг нуля против часовой стрелки.

Теорема 2 (см. [41], [297], [334], [335], [336], [358], [389], [406]). *В указанном секторе вектор-функция* $I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \ldots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega\right)$ *разлагается в ряд* $\sum_{\alpha,k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. *Ряд сходится, если модуль параметра достаточно мал. Коэффициенты ряда — векторы пространства* $\mathbb{C}^\mu$. *Вещественные части всех чисел* α *больше некоторой константы. Каждое число* α *обладает следующим свойством*: $\exp(2\pi i\alpha)$ *— собственное число оператора* M. *Коэффициент* $a_{k,\alpha}$ *этого ряда равен нулю, если у жордановой формы оператора* M *нет блоков размеров* $k+1$ *и более с собственным числом* $\exp(2\pi i\alpha)$.

Замечание. Согласно теоремам 25.11, 25.12, собственные числа оператора монодромии M являются корнями из 1 и размеры его жордановых клеток не превосходят двух. Поэтому в предыдущем ряде все числа α рациональны и степени логарифмов не больше 1.

Пример. Пусть $y^2 + x^3$ — многочлен, на линиях уровня которого лежат циклы, $\omega = y\,dx$. Тогда в окрестности нуля $\int_{\sigma(t)} \omega = \text{const} \cdot t^{5/6}$ (см. замечание в п. Б). В п. Б мы описали преобразование монодромии, отвечающее обходу вокруг нуля, для этого случая. Его собственные числа различны и равны $\exp(\pm\pi i/3)$. Поэтому, согласно теореме 2, для любой полиномиальной формы ω ее интеграл в окрестности нуля разлагается в ряд $\int_{\sigma(t)} \omega = \sum_l a_l t^{5/6+l} + \sum_l b_l t^{7/6+l}$, где l — целые числа, среди которых только конечное множество отрицательных. На самом деле, как мы увидим в п. Г, все показатели членов ряда положительны.

Доказательство теоремы о разложении в ряд основано на следующей теореме о том, что интеграл полиномиальной формы в каждом секторе окрестности исключительного значения параметра растет не быстрее подходящей степени параметра.

Теорема 3 (см. [389], [406], [407]). *Существует натуральное число* N, *для которого в указанном выше секторе имеют место*

неравенства

$$\left|\int_{\sigma_j(t)}\omega\right| \leqslant \text{const}\cdot|t|^{-N}, \quad j=1,\dots,\mu.$$

Мы не будем доказывать эту теорему, укажем лишь один из способов ее доказательства. Разрешим особенности линии исключительного уровня. Тогда в подходящих координатах в окрестности произвольной точки разрешенной линии уровня многочлен становится одночленом, полиномиальная форма превращается в голоморфную, и интеграл по части цикла, лежащей в окрестности, удается оценить требуемым образом. Отметим, что нужно разрешать особенности и в бесконечно удаленных точках линии исключительного уровня, чтобы оценить интеграл по части цикла, удаляющейся в бесконечность. В окрестности разрешения таких точек форма превращается в мероморфную, но и для мероморфной формы требуемую оценку нетрудно получить (см. [77], [57]). Элементарное доказательство, не использующее разрешения особенностей, см. в [406], [407].

Для вывода теоремы 2 из теоремы 3 нам нужно уметь логарифмировать невырожденное линейное преобразование.

Л е м м а 2. *Пусть A — невырожденная $\mu\times\mu$-матрица. Тогда существует $\mu\times\mu$-матрица B, для которой* $\exp B = A$ ($\exp B = \sum B^n/n!$).

Прежде чем доказывать лемму, напомним определения. Линейный оператор называется *полупростым*, если пространство, в котором он действует, имеет базис, состоящий из собственных векторов оператора. Линейный оператор называется *унипотентным*, если все его собственные числа равны 1. Хорошо известно, что для любого невырожденного линейного оператора M существуют и единственны коммутирующие между собой полупростой оператор M_s и унипотентный оператор M_u, для которых $M = M_uM_s$ (оператор M_s — это оператор, который на корневом подпространстве оператора M действует как умножение на соответствующее собственное число; см. [201]). Операторы M_u, M_s называются соответственно *унипотентной* и *полупростой частями* оператора M.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Лемму достаточно доказать для матрицы в жордановой форме и, более того, для матрицы, состоящей из одного блока. Пусть λ — собственное число блока. Тогда блочная матрица разлагается в произведение матрицы $\lambda\cdot\mathrm{Id}$ и матрицы, у которой все собственные числа равны 1. Первая матрица — это полупростая часть, а вторая — унипотентная часть. Матрицы полупростой и унипотентной части коммутируют. Поэтому достаточно прологарифмировать каждую из них. Логарифм первой равен $\ln\lambda\cdot\mathrm{Id}$. Логарифм второй задается формулой

$$\ln C = \ln(\mathrm{Id}+(C-\mathrm{Id})) = \sum(-1)^{s+1}(C-\mathrm{Id})^s/s.$$

З а м е ч а н и е. Матрица $\ln C$ нильпотентна, т. е. все ее собственные числа равны нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. В малой окрестности нуля распространим по непрерывности базис целочисленных одномерных гомологий на параметры с произвольными аргументами. Интегрирование формы по базису распространяет вектор-функцию I до многозначной вектор-функции в малой проколотой окрестности нуля. При обходе параметра вокруг нуля «против часовой стрелки» вектор $I(t)$ переходит в вектор $I(t) \cdot A$, где A — матрица преобразования монодромии M, записанного в базисе $\sigma_1(t), \ldots, \sigma_\mu(t)$.

Рассмотрим в проколотой окрестности нуля многозначную голоморфную матричную функцию

$$J(t) = \exp(-\ln(t) \cdot \ln(A)/2\pi i),$$

где $\ln(A)$ — одно из возможных значений логарифма матрицы A. При обходе параметра вокруг нуля против часовой стрелки матрица $J(t)$ переходит в матрицу $A^{-1}J(t)$. Таким образом, вектор-функция $t \mapsto I(t)J(t)$ является однозначной функцией в проколотой окрестности нуля.

Докажем, что функция $I \cdot J$ мероморфна в нуле, т. е. докажем, что ее координаты растут не быстрее подходящей степени параметра при подходе параметра к нулю. Согласно теореме 3, достаточно доказать аналогичное утверждение о координатах матрицы J.

Выясним, как выглядят элементы матрицы J. Для этого достаточно выяснить, как выглядят элементы матрицы J для случаев, в которых матрица A диагональная или унипотентная (см. лемму 2). В первом случае матрица J тоже диагональная, на диагоналях стоят степени переменной t. Во втором случае элементами матрицы являются многочлены от $\ln t$, степени многочленов меньше размеров жордановых блоков (см. замечание после леммы 2). Таким образом, для произвольной матрицы A каждый элемент матрицы $J(t)$ имеет вид конечной суммы $\sum_\alpha t^\alpha P_\alpha(\ln t)$. В этой сумме каждое число α обладает следующим свойством: $\exp(-2\pi i\alpha)$ — собственное число матрицы A. Для каждого α коэффициент P_α — многочлен от $\ln t$, его степень меньше максимума размеров жордановых блоков матрицы A с собственным числом $\exp(-2\pi i\alpha)$.

Это утверждение означает, что коэффициенты матрицы J растут достаточно медленно. Поэтому вектор-функция $I \cdot J$ мероморфна в нуле. Следовательно, она разлагается в ряд Лорана, в котором конечное множество отрицательных степеней. Теперь, умножая этот ряд на J^{-1}, получаем теорему 2.

Г. У т о ч н е н и е т е о р е м 2, 3. Если при деформации цикла в линию исключительного уровня цикл остается в ограниченной части простран-

ства, то интеграл по циклу полиномиальной формы остается в процессе деформации ограниченным. Более того, если цикл, продеформированный в линию исключительного уровня, гомологичен в ней нулю, то интеграл полиномиальной формы по циклу стремится в процессе деформации к нулю. Эти утверждения доказаны Б. Мальгранжем [389]. Приведем их точную формулировку. Будем, как и ранее, предполагать, что исключительное значение равно нулю.

Обозначим через X_t линию уровня t. Обозначим через $X_{t,R}$ множество точек линии уровня t, удаленных от начала координат на расстояние, не большее чем R. Для малых вещественных положительных значений t рассмотрим семейство одномерных целочисленных классов гомологий $\sigma(t) \in \in H_1(X_t, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящих от t. Скажем, что при $t \to 0$ это семейство является семейством гомологий, *ограниченных* шаром радиуса R, если для всех достаточно малых t класс $\sigma(t)$ лежит в образе естественного гомоморфизма $\gamma_R\colon H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z}) \to H_1(X_t, \mathbb{Z})$. Ясно, что если семейство ограничено шаром радиуса R, то оно ограничено и всяким шаром большего радиуса.

Скажем, что при $t \to 0$ семейство ограниченных гомологий является семейством *исчезающих* гомологий, если существуют $R > 0$, $\delta > 0$, обладающие следующими свойствами:

а) семейство ограничено шаром радиуса R;

б) для каждого $t \in (0, \delta)$ существует класс $\sigma_R(t) \in H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z})$, который при гомоморфизме γ_R переходит в $\sigma(t)$ и который принадлежит ядру естественного гомоморфизма $H_1(X_{t,R}, \mathbb{Z}) \to H_1(X, \mathbb{Z})$, где $X = \bigcup\limits_{t\in[0,\delta)} X_{t,R}$.

Теорема 3′ (см. [389]). *Если σ — семейство ограниченных гомологий, то при $t \to +0$ существует конечный предел интеграла $\int_{\sigma(t)} \omega$. Этот предел равен нулю, если семейство является семейством исчезающих гомологий.*

Следствие теорем 2, 3′. Пусть σ — семейство ограниченных гомологий. В малой окрестности нуля распространим его по непрерывности на параметры с произвольными аргументами. Получим многозначное семейство целочисленных классов гомологий, непрерывно зависящих от параметра. Согласно теореме 2, функция, задаваемая интегралом полиномиальной формы по классам семейства, в окрестности нуля разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Согласно теореме 3′, в этом ряде все значения α неотрицательны и все коэффициенты $a_{k,0}$ при $k > 0$ равны нулю. Более того, если σ — семейство исчезающих гомологий, то все значения α положительны.

Пример. Пусть $y^2 + x^3$ — многочлен, на линиях уровня которого лежат циклы. В окрестности нуля всякое семейство одномерных целочислен-

ных гомологий, непрерывно зависящих от параметра, является семейством исчезающих гомологий (см. замечание в п. Б). Поэтому в ряде из примера на с. 508 все показатели положительны.

В следующих пунктах этого параграфа мы обобщим полученные результаты в трех направлениях. Во-первых, увеличим размерность пространства. Во-вторых, разрешим многочлену голоморфно зависеть от дополнительных параметров. В-третьих, заменим многочлен голоморфной функцией.

32.2. Голоморфная зависимость от параметров. Рассмотрим голоморфную функцию, переменные которой разделены на две группы: $F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$. Эта функция задает семейство голоморфных функций на $\mathbb{C}^n$, голоморфно зависящих от параметров $y = (y_1, \dots, y_k)$. Обозначим через $X_{(t,y)}$ гиперповерхность уровня t функции $F(\cdot, y)$:

$$X_{(t,y)} = \{x \in \mathbb{C}^n \colon F(x, y) = t\}.$$

Предположим, что на гиперповерхности некритического уровня t_0 функции $F(\cdot, y_0)$ выделен $(n-1)$-мерный цикл. Непрерывно деформируя этот цикл из одной гиперповерхности уровня в другую, мы получим непрерывное семейство циклов на гиперповерхностях уровней, близких к выделенному уровню, функций, параметры которых близки к выделенным. Цикл, лежащий на гиперповерхности $X_{(t,y)}$, обозначим через $\sigma(t, y)$.

А. Интегралы голоморфной $(n-1)$-формы. Предположим, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задана голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма, голоморфно зависящая от параметров y:

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} h_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)\, dx_1 \wedge \dots \widehat{dx_i} \dots \wedge dx_n,$$

где $\{h_i\}$ — голоморфные функции. Рассмотрим интеграл $I(t, y) = \int_{\sigma(t,y)} \omega(y)$. Интеграл как функция параметров t, y определен в окрестности точки (t_0, y_0) пространства $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Ограничение формы на гиперповерхность уровня замкнуто (поскольку на $(n-1)$-мерном голоморфном многообразии нет отличных от нуля голоморфных n-форм). Следовательно, интеграл определяется классом цикла в группе $(n-1)$-мерных гомологий гиперповерхности и не зависит от цикла, представляющего класс. Кроме того, интеграл формы по циклу, продеформированному в соседнюю гиперповерхность уровня, не зависит от деформации, поскольку разные деформации приводят к гомологическим циклам.

Теорема 4 (см. [41], [389]). *Интеграл голоморфно зависит от* (t, y).

Доказательство теоремы фактически такое же, как доказательство теоремы 1. Для проведения доказательства нам понадобится понятие когра-

ничного оператора Лере, которое мы уже неявно использовали при формулировке леммы 1.

Пусть M — голоморфное многообразие, N — его голоморфное подмногообразие коразмерности 1. Тогда для любого l имеется естественный гомоморфизм $H_l(N) \to H_{l+1}(M \setminus N)$, называемый *кограничным оператором Лере*. Он определяется следующим образом. Выберем трубчатую окрестность подмногообразия в многообразии. Рассмотрим проекцию на подмногообразие границы трубчатой окрестности. Проекция — локально тривиальное расслоение со слоем, являющимся окружностью. Рассмотрим класс гомологий на подмногообразии и представляющий его цикл. Прообраз цикла на границе трубчатой окрестности — это цикл, размерность которого на 1 больше, чем размерность исходного цикла. По определению, последний цикл, рассматриваемый как цикл в дополнении к подмногообразию, представляет образ исходного класса гомологий при кограничном операторе Лере. Легко видеть, что класс гомологий этого цикла в дополнении не зависит от выбора цикла, представляющего на подмногообразии исходный класс гомологий, и от выбора трубчатой окрестности.

Доказательство теоремы 4. Стандартная теорема анализа гласит, что если заданы цепь и форма, зависящая голоморфно от параметров, то интеграл формы по цепи зависит от параметров голоморфно. Для применения этой теоремы нужно интегралы заданной формы по циклам семейства, лежащим в разных гиперповерхностях, представить как интеграл новой формы (зависящей от параметров t и y) по одной и той же цепи. Роль новой формы играет исходная форма, умноженная на $dF(\cdot, y)/(F(\cdot, y) - t)$. Роль общей цепи играет цикл, представляющий одновременно образы всех классов гомологий циклов семейства относительно кограничных операторов Лере пар, состоящих из гиперповерхности уровня и $\mathbb{C}^n$ (ср. лемму 1).

Рассмотрим границу трубчатой окрестности гиперповерхности $X_{(t_0,y_0)}$ в $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим на границе n-мерный цикл $\partial\boldsymbol{\sigma}$, представляющий образ класса гомологий цикла $\boldsymbol{\sigma}(t_0, y_0)$ на гиперповерхности при кограничном операторе Лере. Этот же цикл представляет образ класса гомологий цикла $\boldsymbol{\sigma}(t, y)$ на гиперповерхности $X_{(t,y)}$ при кограничном операторе Лере, если точка (t, y) достаточно близка к (t_0, y_0).

Имеет место интегральное представление

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y)/(f(\cdot, y) - t), \tag{1}$$

где через $\partial\boldsymbol{\sigma}(t, y)$ обозначен образ класса гомологий цикла $\boldsymbol{\sigma}(t, y)$ на $X_{(t,y)}$, при кограничном операторе Лере. (Отметим, что подынтегральное выражение в правой части замкнуто в $\mathbb{C}^n \setminus X_{(t,y)}$, поэтому правый интеграл не зависит

от цикла, представляющего класс $\partial\boldsymbol{\sigma}(t, y)$.) Доказательство приведенной формулы совпадает с доказательством леммы 1.

Таким образом, для всех (t, y), близких к (t_0, y_0), имеет место интегральное представление

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\boldsymbol{\sigma}} dF(\cdot, y) \wedge \omega(y)/(F(\cdot, y) - t).$$

Теперь, применяя стандартную теорему анализа, получаем теорему 4.

Далее мы докажем голоморфную зависимость от параметров интегралов формы Гельфанда—Лере по непрерывному семейству циклов.

Б. Форма Гельфанда — Лере в комплексном случае определяется так же, как и в вещественном; см. п. 29.1.

Пусть f — функция, голоморфная в области пространства $\mathbb{C}^n$. Пусть η — голоморфная дифференциальная n-форма в той же области. Рассмотрим точку области, не являющуюся критической точкой функции.

Лемма 3. *Существует голоморфная дифференциальная* $(n-1)$*-форма* ψ, *заданная в окрестности точки*, *для которой* $\eta = df \wedge \psi$. *Ограничение этой формы на гиперповерхность некритического уровня функции не зависит от выбора формы* ψ, *удовлетворяющей предыдущему равенству*.

Ограничение формы ψ на гиперповерхность некритического уровня функции называется *формой Гельфанда—Лере* формы η и обозначается через η/df.

Доказательство леммы см. в п. 29.1.

В. Интегралы формы Гельфанда — Лере. Вернемся к ситуации, описанной в начале пункта. Предположим, что на пространстве $\mathbb{C}^n$ задана голоморфная дифференциальная n-форма η, голоморфно зависящая от параметров y:

$$\eta = h(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Таким образом, для фиксированных значений параметров на пространстве заданы голоморфная функция и голоморфная форма старшей размерности. Следовательно, на каждой гиперповерхности некритического уровня задана форма Гельфанда—Лере. Рассмотрим ее интегралы по циклам, выделенным на гиперповерхностях уровня:

$$I(t, y) = \int_{\boldsymbol{\sigma}(t,y)} \eta(y)/d_x F(\cdot, y),$$

где d_x — дифференциал по переменным x.

Теорема 5 (см. [41], [389]). *Этот интеграл голоморфно зависит от* (t, y).

Теорема 5 вытекает из интегрального представления

$$I(t, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} \eta(y)/(F(\cdot, y) - t) \tag{2}$$

(ср. с (1)), его доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Г. Производные функции, заданной интегралом, полезно представлять в виде интегралов по тем же циклам. Такие формулы доставляют интегральные представления (1), (2).

Для сокращения записей будем в следующих формулах предполагать, что значения параметров форм такие же, как значения параметров циклов. Нижний индекс j у формы будет означать, что коэффициенты формы продифференцированы по y_j.

Согласно (1), (2) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\boldsymbol{\sigma}(t,y)} \omega = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} dF \wedge \omega/(F - t)^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} d\omega/(F - t) = \int_{\boldsymbol{\sigma}(t,y)} d_x\omega/d_xF, \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_j} \int_{\boldsymbol{\sigma}(t,y)} \omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} (dF \wedge \omega_j/(F - t) + dF_j \wedge \omega/(F - t) - F_j dF \wedge \omega/(F - t)^2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\boldsymbol{\sigma}(t,y)} (dF \wedge \omega_j/(F - t) - F_j d_x\omega/(F - t)) =$$

$$= \int_{\boldsymbol{\sigma}(t,y)} (\omega_j - F_j d_x\omega/d_xF). \tag{4}$$

Второе равенство в этих формулах доказывается заменой формы на когомологичную.

32.3. Ветвление интеграла и разложение интеграла в ряд. Чтобы исследовать аналитические продолжения голоморфной функции, заданной интегралом, нужно уметь непрерывно деформировать циклы, по которым интегрируется форма, в гиперповерхности далеких некритических уровней функции. Для этого достаточно, чтобы совокупность гиперповерхностей некритических уровней образовала локально тривиальное расслоение. Мы не будем разбирать максимально общую ситуацию, в которой это свойство имеет место (см. п. 23.1). Ограничимся локальным случаем, который будет рассматриваться в дальнейшем.

А. Расслоение Милнора деформации критической точки голоморфной функции. Пусть задан росток деформации изолированной критической точки голоморфной функции. (Обычно нас будут интересовать два крайних случая, в которых деформация миниверсальна или тривиальна.) *Расслоением Милнора* называется расслоение, слоями которого являются локальные неособые гиперповерхности уровня функций, составляющих деформацию. Приведем точное определение.

Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий конечнократную критическую точку. Пусть $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — его деформация, т. е. росток голоморфной функции со свойством $\boldsymbol{F}(\cdot, 0) = f$. Рассмотрим *развертку* деформации, т. е. росток отображения $\boldsymbol{G}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0)$, заданный формулой $(x, y) \mapsto (\boldsymbol{F}(x, y), y)$.

Пусть F, G — представители ростков $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{G}$.

Для малых $\rho > 0$, $\eta > 0$, $\sigma > 0$ рассмотрим в пространствах $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^k$ шары соответствующих радиусов: $B^n_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n\colon \|x\| < \rho\}$, $B^1_\eta = \{u \in \mathbb{C}\colon |u| < \eta\}$, $B^k_\delta = \{y \in \mathbb{C}^k\colon \|y\| < \delta\}$. Положим $S = B^1_\eta \times B^k_\delta$, $X = (B^n_\rho \times B^k_\delta) \cap G^{-1}(S)$, $X_s = X \cap G^{-1}(s)$ для $s \in S$; см. рис. 138.

Выберем число ρ настолько малым, что при всех r, $0 < r \leqslant \rho$, граница ∂B^n_r шара радиуса r трансверсально пересекает гиперповерхность нулевого уровня функции $F(\cdot, 0)$. Выберем числа η, δ настолько малыми по сравнению с числом ρ, что для любой точки $(u, y) \in S$ граница ∂B^n_ρ шара радиуса ρ трансверсально подходит к гиперповерхности уровня и функции $F(\cdot, y)$. Тройку чисел ρ, η, δ с указанными свойствами назовем *допустимой*.

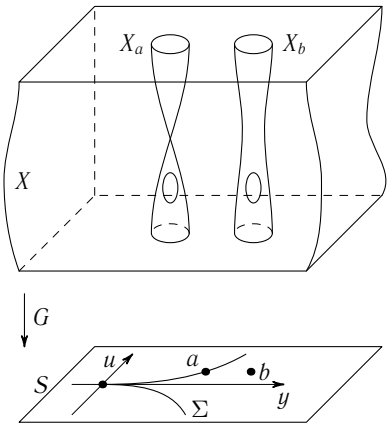


Рис. 138

Если тройка чисел допустима, то отображение $X \to S$, являющееся ограничением отображения G, назовем *специализацией развертки деформации*. Далее ограничения отображений будем обозначать теми же буквами, что и сами отображения.

Обозначим через Σ множество критических значений (*дискриминант*) отображения $G\colon X \to S$, т. е. множество $\{s \in S\colon X_s$ особо$\}$. Если тройка чисел ρ, η, δ допустима, то ограничение отображения $G\colon X \to S$ на дополнение к прообразу множества критических значений — гладкое

локально тривиальное расслоение (см. п. 23.1), т. е. гладким локально тривиальным расслоением является отображение $G\colon X' \to S'$, где $S' = S \setminus \Sigma$, $X' = X \setminus G^{-1}(\Sigma)$. Это расслоение называется *расслоением Милнора* деформации (более точно, расслоением Милнора специализации развертки деформации).

Слой расслоения Милнора является $(n-1)$-мерным комплексно-аналитическим многообразием с краем (и соответственно $(2n-2)$-мерным вещественным многообразием). Согласно теореме Милнора [174] (см. также п. 24.1), слой гомотопически эквивалентен букету сфер средней размерности, а число μ этих сфер равно кратности исходной критической точки. Таким образом,

$$X_s \sim \underbrace{S^{n-1} \vee \ldots \vee S^{n-1}}_{\mu} \quad \text{при} \quad s \in S'.$$

Дифференцируемый тип слоя расслоения Милнора не зависит от выбора допустимой тройки. Для разных допустимых троек ростки множеств Σ, S' в начале координат пространства S одинаковы. Если первое число первой тройки меньше первого числа второй тройки, то для всех точек базы, близких к началу координат, слой первого расслоения вложен в слой второго расслоения. Более того, первый слой является деформационным ретрактом второго слоя. Поэтому вложение первого слоя во второй индуцирует изоморфизм групп гомологий и когомологий слоев расслоений Милнора, отвечающих разным допустимым тройкам. В этом смысле гомологии и когомологии слоя расслоения Милнора определены инвариантно.

Нас будут интересовать группы $(n-1)$-мерных гомологий и когомологий слоя расслоения Милнора. Они такие же, как у букета сфер, и являются свободными модулями над кольцом коэффициентов. Их размерности равны кратности исходной критической точки, если $n - 1 > 0$, и на 1 больше кратности в случае $n - 1 = 0$ (букет μ нульмерных сфер — это $\mu + 1$ точка). Мы всегда (без дальнейших напоминаний) будем рассматривать группы приведенных *) гомологий и когомологий. Ранг группы приведенных (ко)гомологий вне зависимости от n равен кратности критической точки. При $n > 1$ приведенные $(n-1)$-мерные (ко)гомологии совпадают с обычными.

Когомологии и гомологии слоя расслоения Милнора будут называться *исчезающими* в исходной критической точке.

Б. Ветвление интеграла. Пусть задан росток $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий изолированную критическую

*) Напомним, что группой *приведенных* k-мерных гомологий топологического пространства называется ядро отображения группы k-мерных гомологий пространства в группу k-мерных гомологий точки, индуцированного отображением пространства в точку. Аналогично группой *приведенных* k-мерных когомологий называется коядро отображения группы k-мерных когомологий точки в группу k-мерных когомологий пространства.

точку. Пусть задана деформация $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ростка $\boldsymbol{f}$. Выделим допустимую тройку чисел ρ, η, δ и рассмотрим отвечающие ей специализацию развертки и расслоение Милнора.

Предположим, что в одном из слоев расслоения Милнора выделен $(n-1)$-мерный целочисленный класс гомологий. Непрерывные деформации представляющего его цикла определяют семейство $(n-1)$-мерных целочисленных классов в слоях расслоения Милнора, которые непрерывно зависят от точки базы расслоения. Эта зависимость многозначна. Многозначность классов семейства описывается группой монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя расслоения: если в базе выделен замкнутый путь и выделен один из классов гомологий семейства над начальной точкой пути, то при распространении этого класса в слои над точками пути класс гомологий, отвечающий конечной точке пути, получается из класса гомологий, отвечающего начальной точке пути, действием преобразования монодромии, отвечающего этому пути.

Предположим, что в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ задана голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма. Предположим, что эта окрестность настолько велика, что содержит пространство расслоения Милнора. Рассмотрим интегралы формы по циклам семейства. Согласно теореме 4, эти интегралы задают многозначную голоморфную функцию на базе расслоения Милнора.

Ветвление этой функции описывается группой монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя расслоения Милнора. Если ω — форма, $\sigma(u, y)$ — класс гомологий семейства, лежащий в слое над точкой $(u, y) \in S'$, γ — замкнутый путь в базе расслоения с началом и концом в точке (u, y), M_γ — отвечающее ему преобразование монодромии, то значение аналитического продолжения вдоль пути γ ветви функции, отвечающей интегралу $\int_{\sigma(u,y)} \omega$, равно $\int_{M_\gamma \sigma(u,y)} \omega$. Таким образом, ветвление голоморфных функций, заданных интегралами по исчезающим в критической точке классам гомологий, определяется топологией расслоения Милнора рассматриваемой деформации и, в конечном итоге, топологией расслоения Милнора версальной деформации исходной критической точки.

Замечания. 1. Группа монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя расслоения Милнора версальной деформации критической точки называется *группой монодромии критической точки*. Группам монодромии критических точек посвящена гл. IV. Всякий результат о группе монодромии можно рассматривать как результат о ветвлении соответствующих интегралов.

2. Предположим, что в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ задана голоморфная дифференциальная n-форма η (вместо $(n-1)$-формы,

как ранее). Форма η определяет на каждом слое расслоения Милнора голоморфную $(n-1)$-форму η/d_xF (форму η и функцию F нужно ограничить на подпространства в X' вида $y = \text{const}$, которые являются областями в $\mathbb{C}^n$, затем поделить форму на d_xF). Рассмотрим интегралы формы η/d_xF по классам указанного выше семейства. Эти интегралы задают многозначную голоморфную функцию на базе расслоения Милнора (теорема 5). Ветвление этой функции, как и ветвление функции, заданной интегралами $(n-1)$-формы, определяется группой монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях слоя расслоения Милнора. Можно начинать не с n-формы, а с $(n+k)$-формы, и делить ее не на d_xF, а на $d_xF \wedge dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$. В результате на каждом слое корректно определена голоморфная $(n-1)$-форма. Ее интегралы по классам семейства определяют голоморфную многозначную функцию на базе расслоения Милнора (теорема 5). Ветвление этой функции, как и предыдущих, определяется группой монодромии.

3. Если $(n-1)$-форма ω определена в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, не включающей в себя пространство расслоения Милнора для заданных допустимых чисел ρ, η, δ, то, вообще говоря, ее нельзя проинтегрировать по произвольному классу гомологий семейства. Однако ее можно проинтегрировать по классам семейства, лежащим в слоях над точками, расположенными достаточно близко к началу координат в $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k$. Это объясняется тем, что такие классы имеют представляющие циклы, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$. Точнее, область определения формы (сколь бы мала она ни была) содержит пространство расслоения Милнора, определенного с помощью достаточно малых допустимых чисел, и теперь вложение слоя меньшего расслоения Милнора в слой большого расслоения Милнора индуцирует изоморфизм групп гомологий и когомологий (см. п. 33.3.А).

В. Разложение интеграла в ряд. Предположим, что в пространстве S (базе специализации) выделена комплексная прямая. Предположим, что прямая не содержится в множестве критических значений Σ. В этом случае пересечение прямой с множеством критических значений дискретно. Рассмотрим одну из точек пересечения. Мы докажем, что ограничение на прямую многозначной голоморфной функции, заданной интегралом голоморфной формы по циклам непрерывного семейства (см. п. Б), в окрестности выделенной точки пересечения прямой с Σ разлагается в ряд по дробным степеням параметра на прямой, коэффициентами которого служат многочлены от логарифмов параметра на прямой. Это утверждение — прямой аналог теоремы 2.

Обозначим через t локальную голоморфную координату на прямой с началом в выделенной точке пересечения. В малой окрестности точки пересечения выделим сектор $a \leqslant \arg t \leqslant b$. Для каждого отличного

от нуля значения параметра t, принадлежащего сектору, выделим базис $\sigma_1(t), \dots, \sigma(t)$ целочисленных $(n-1)$-мерных гомологий слоя расслоения Милнора, лежащего над соответствующей точкой прямой, причем так, чтобы этот базис непрерывно зависел от точки прямой. Обозначим через M преобразование монодромии в гомологиях, отвечающее обходу параметра прямой по малому пути вокруг нуля «против часовой стрелки». (Напомним, что согласно теоремам 25.11, 25.12 собственные числа этого оператора являются корнями из 1 и размеры его жордановых клеток не превосходят n.) Пусть ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма, заданная на окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$, содержащей пространство прообраза специализации деформации (см. определение в п. А). Тогда в указанном выше секторе определена вектор-функция

$$I(t) = \left(\int_{\sigma_1(t)} \omega, \dots, \int_{\sigma_\mu(t)} \omega \right).$$

Теорема 6 (см. [41], [297], [334], [335], [336], [358], [389], [406]). *Эта вектор-функция разлагается в ряд* $\sum_{\alpha,k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. *Ряд сходится, если модуль параметра достаточно мал. Коэффициенты ряда — векторы пространства* $\mathbb{C}^\mu$. *Числа* α *— неотрицательные рациональные числа. Все коэффициенты* $a_{k,0}$ *при* $k > 0$ *равны нулю. Каждое число* α *обладает следующим свойством*: $\exp(2\pi i\alpha)$ *— собственное число оператора* M. *Коэффициент* $a_{k,\alpha}$ *равен нулю всякий раз, когда у жордановой формы оператора* M *нет блоков размеров* $k+1$ *и более с собственным числом* $\exp(2\pi i\alpha)$.

Замечание. Предположим, что прямая в базе S (о которой идет речь в теореме 6) является прямой значений функции F при фиксированном y и трансверсально пересекает дискриминант в точке, отвечающей невырожденной критической точке функции F при этом фиксированном y. В этом случае разложение, указанное в теореме 6, можно уточнить; см. лемму 34.2 на с. 541.

Теорема 6 опирается на формулируемую ниже теорему 7 и выводится из нее так же, как теорема 2 из теоремы 3.

Теорема 7 (см. [389], [406], [407]). *Существует натуральное число* N, *для которого в указанном выше секторе имеют место неравенства*

$$\left| \int_{\sigma_j(t)} \omega \right| \leqslant \text{const} \cdot |t|^{-N}, \quad j = 1, \dots, \mu.$$

Более того, если в секторе выделен луч $\arg t = \text{const}$, *то существует конечный предел вектор-функции при стремлении параметра к нулю по лучу.*

Мы не будем доказывать теорему 7 (см. [389] и замечания по поводу теоремы 3). У теоремы 7 есть уточнение (ср. с теоремой 3′), которое мы сейчас сформулируем.

Сначала определим понятие семейства гомологий, исчезающих в выделенной точке пересечения прямой и дискриминанта Σ (ср. с определением в п. 32.1.Г). Обозначим через X_t слой расслоения Милнора, лежащий над точкой прямой, в которой параметр равен t. Предположим, что на прямой выделен луч $\arg t = \text{const}$ и для каждого достаточно малого t, принадлежащего лучу, выделен класс гомологий $\sigma(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящий от t. Скажем, что это семейство гомологий является семейством *исчезающих* гомологий при стремлении параметра к нулю по лучу, если для каждого достаточно малого t класс $\sigma(t)$ принадлежит ядру естественного гомоморфизма

$$H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z}) \to H_{n-1}\left(\bigcup_{s\in[0,t]} X_s, \mathbb{Z}\right).$$

Если непрерывное семейство гомологий определено для параметров, принадлежащих сектору, то легко показать, что свойство быть семейством исчезающих гомологий не зависит от луча сектора.

Т е о р е м а 7′ (см. [389]). *Пусть непрерывное семейство гомологий определено для параметров, принадлежащих сектору. Предположим, что семейство является семейством исчезающих гомологий при стремлении параметра к нулю по одному из лучей сектора. Тогда предел интеграла* $\int_{\sigma(t)} \omega$ *равен нулю при стремлении параметра к нулю по лучу.*

Напомним, что существование конечного предела следует из теоремы 7.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 7′. *Интеграл голоморфной формы по семейству исчезающих гомологий в каждом секторе разлагается в ряд* $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$, *в котором все показатели* α *положительны.*

Г. Р а с с л о е н и е М и л н о р а к р и т и ч е с к о й т о ч к и. Рассмотрим росток $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий изолированную критическую точку. Росток является собственной тривиальной деформацией. Рассмотрим для такой деформации объекты, введенные в предыдущих пунктах. А именно, рассмотрим специализацию $f\colon X \to S$ ростка и соответствующее расслоение Милнора $f\colon X' \to S'$.

Для любой голоморфной дифференциальной $(n-1)$-формы на X ее интегралы по классам непрерывного семейства целочисленных исчезающих гомологий определяют голоморфную многозначную функцию на проколотом диске S'. Ветвление этой функции при обходе параметра вокруг нуля определяется преобразованием монодромии в гомологиях, которое в данном случае называется *классической монодромией* (см. п. 24.1). В каждом

секторе $a \leqslant \arg t \leqslant b$ эта функция разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. В этом ряде все показатели степеней параметров положительны. Кроме того, все показатели степеней параметров являются деленными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел оператора классической монодромии. Произвольная степень логарифма параметра в этом ряде меньше, чем максимум размеров жордановых блоков оператора классической монодромии с соответствующим собственным числом (см. теоремы 7, 7′).

Рассмотрим на пространстве X голоморфную дифференциальную n-форму η и непрерывное многозначное семейство целочисленных исчезающих гомологий $\sigma(t)$, где $t \in S'$. Рассмотрим на базе расслоения Милнора многозначную голоморфную функцию $\int_{\sigma(t)} \eta/df$.

Теорема 8 (см. [389]). *В каждом секторе $a \leqslant \arg t \leqslant b$ эта функция разлагается в ряд $\sum\limits_{a,k} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Ряд сходится, если модуль параметра достаточно мал. Все числа α рациональны. Каждое число α больше -1. Каждое число α обладает следующим свойством*: $\exp(2\pi i\alpha)$ — *собственное число оператора классической монодромии в гомологиях. Коэффициент $a_{k,\alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом* $\exp(2\pi i\alpha)$.

Доказательство. В силу леммы Пуанкаре $\eta = d\omega$, где ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма. Согласно формуле (3) на с. 515 имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{\sigma(t)} = \int_{\sigma(t)} \eta/dt. \tag{5}$$

Теперь теорема следует из теоремы 6.

Замечание (о применении леммы Пуанкаре). Легко показать, что X — многообразие Штейна (см. определение в [93], [211]), следовательно, когомологии многообразия X можно вычислять с помощью голоморфных форм (см. [453], [211, теорема 12.13]). Многообразие X стягиваемо, форма η замкнута, поэтому на X существует голоморфная $(n-1)$-форма ω, для которой $\eta = d\omega$. Можно доказывать теорему 8, не используя штейновости многообразия X. В силу стандартной леммы Пуанкаре для данной формы η существует голоморфная $(n-1)$-форма ω, заданная в достаточно малой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, для которой $\eta = d\omega$. Теперь формула (5) справедлива для всех достаточно малых значений t. Этого утверждения достаточно для доказательства теоремы 8.

Пример. Пусть $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Пространство исчезающих гомологий порождается исчезающим циклом. Пусть $\sigma(t)$ — исчезающий цикл над t, непрерывно зависящий от параметра. При обходе параметра вокруг

нуля цикл $\sigma(t)$ переходит в $(-1)^n\sigma(t)$. Пусть ω — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма. Рассмотрим голоморфную функцию $I(t)=\int_{\sigma(t)}\omega$. По теореме 6 имеет место разложение $I(T)=\sum a_\alpha t^\alpha$, где значения α целые при четном и полуцелые при нечетном n. Разлагая ω на однородные составляющие $\omega_{n-1}+\omega_n+\ldots$ и пользуясь однородностью ростка, получаем, что интеграл $\int_{\sigma(t)}\omega_p$ равен 0, если $p-n$ нечетно, и равен $a_{p/2}t^{p/2}$, если $p-n$ четно. Вычислим первый коэффициент $a_{n/2}$. Считая число t вещественным, получаем

$$\int_{\sigma(t)}\sum_j(-1)^jA_jx_j\,dx_1\wedge\ldots\widehat{dx_j}\ldots\wedge dx_n=$$
$$=\sum_j A_j\int_0^t\left(\int_{\sigma(t)}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n/df\right)dt=\sum_j A_j\,\mathrm{Vol}(D^n)t^{n/2},$$

где $\mathrm{Vol}(D^n)$ — объем n-мерного шара радиуса 1.

§ 33. Комплексные осциллирующие интегралы

При изучении асимптотического поведения функций часто приходится исследовать асимптотическое поведение интегралов вида

$$\int_\Gamma e^{\tau f(x)}\varphi(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$$

при больших значениях параметра τ. Здесь f, φ — голоморфные функции на $\mathbb{C}^n$; Γ — вещественная n-мерная цепь, расположенная в $\mathbb{C}^n$; τ — большой вещественный параметр. Функция f называется *фазой*, функция φ — *амплитудой*. Такие интегралы называются *интегралами метода перевала*. Примеры задач, в которых возникает необходимость их исследования, см., например, в книге [209].

Метод перевала, которым исследуются такие интегралы, состоит в следующем. Из формулы Стокса следует, что интеграл не изменится, если цепь деформировать, не меняя ее границы. Поэтому цепь, не изменяя ее границы, деформируют так, чтобы уменьшить на ней величину вещественной части фазы (именно она при больших положительных значениях параметра определяет величину интеграла). Уменьшать вещественную часть фазы можно сдвигом внутренности цепи вдоль траектории градиента фазы. Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока цепь не наткнется на критические точки фазы, в которых градиент равен нулю. Дальнейшие деформации приведут к уменьшению вещественной части фазы на части цепи, не наткнувшейся на критические точки, но не изменят максимума вещественной части фазы на цепи. Теперь задача исследования асимптотики интеграла сводится к ло-

кальным задачам оценки интеграла в окрестностях критических точек фазы, на которые наткнулась цепь, и к оценке интеграла в окрестности границы цепи, если максимум вещественной части фазы достигается на границе цепи.

Таким образом, метод перевала состоит из двух частей: топологической, заключающейся в указании нужным образом продеформированной цепи (называемой *перевальным контуром*), и аналитической, состоящей из оценки интеграла по перевальному контуру в окрестностях критических точек фазы, а также из оценки интеграла по окрестности границы перевального контура (если максимум вещественной части фазы достигается на границе цепи). В приложениях, как правило, максимум вещественной части фазы достигается не на границе.

Этот параграф посвящен аналитической части метода перевала: мы изучим асимптотическое поведение интеграла метода перевала по цепи, расположенной в малой окрестности изолированной критической точки фазы, причем расположенной так, что на границе цепи вещественная часть фазы меньше вещественной части критического значения фазы. Мы покажем, что в этом случае интеграл разлагается в асимптотический ряд вида $e^{\tau f(x_0)} \sum a_{k,\alpha} \tau^\alpha (\ln \tau)^k$. Степени параметра и степени логарифма параметра в этом ряде связаны с оператором (классической) монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях расслоения Милнора критической точки фазы. А именно, показатели степеней параметра являются поделенными на $2\pi i$ логарифмами собственных чисел оператора монодромии, и показатели степеней логарифмов параметра меньше максимума размеров жордановых блоков оператора монодромии с соответствующим собственным числом.

Это явление имеет следующее объяснение. Граница цепи интеграла метода перевала естественным образом определяет непрерывное семейство целочисленных исчезающих гомологий в слоях расслоения Милнора (см. п. 33.1.Б). Рассмотрим функцию на базе расслоения Милнора, заданную интегралами по классам семейства формы $\varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df$, где f, φ — фаза и амплитуда интеграла метода перевала. Оказывается, что интеграл метода перевала является (правильно понимаемым) преобразованием Лапласа этой функции. Сама функция в окрестности критического значения фазы разлагается в ряд по дробным степеням аргумента и целым степеням логарифма аргумента (теорема 32.8). Связь этих степеней с оператором монодромии указана в теореме 32.8. Мы доказываем, что почленное преобразование Лапласа этого ряда приводит к асимптотическому ряду для интеграла метода перевала.

Это — первая тема параграфа.

Во второй части параграфа мы рассматриваем осциллирующие интегралы по $\mathbb{R}^n$ с аналитической фазой, предполагая при этом, что носитель амплитуды сосредоточен в достаточно малой окрестности конечнократной

критической точки фазы. Фазу интеграла можно комплексифицировать и считать голоморфной функцией на $\mathbb{C}^n$, вещественной на вещественной части комплексного пространства. Теперь можно сравнивать асимптотическое поведение осциллирующего интеграла по $\mathbb{R}^n$ с асимптотическим поведением интегралов метода перевала с указанной комплексифицированной фазой. Мы доказываем, что в окрестности критической точки фазы существует такой перевальный контур (называемый *вещественным*), интеграл по которому имеет то же асимптотическое разложение, что и осциллирующий интеграл по $\mathbb{R}^n$. Это утверждение имеет два следствия. В качестве первого следствия мы получаем новое доказательство теоремы 28.3 об асимптотическом разложении осциллирующего интеграла. В качестве второго следствия мы получаем геометрический смысл показателей степеней параметра и показателей степеней логарифма параметра в асимптотическом разложении осциллирующего интеграла: показатели выражаются через жорданову структуру оператора классической монодромии комплексификации критической точки фазы.

Это — вторая тема параграфа.

В третьей части параграфа мы рассматриваем интегралы с фазой $f(x) + g(y)$ и выражаем их асимптотики через интегралы с фазами f, g.

Основные результаты параграфа (теоремы 1, 3, 4) принадлежат Б. Мальгранжу [389].

33.1. Интегралы метода перевала. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — функция, голоморфная в окрестности начала координат и имеющая в начале координат критическую точку, Γ — n-мерная цепь, расположенная в малой окрестности критической точки. Предположим, что на границе цепи Γ вещественная часть значений функции отрицательна. Цепь с таким свойством назовем *допустимой*. Рассмотрим голоморфную дифференциальную n-форму ω, заданную в окрестности критической точки. Мы будем изучать асимптотическое поведение интеграла $\int_\Gamma e^{\tau f(x)}\omega$ при больших положительных значениях параметра τ. Интеграл называется *комплексным осциллирующим интегралом* или *интегралом метода перевала*.

Скажем, что две цепи Γ и Γ' *эквивалентны*, если существует расположенная в малой окрестности критической точки $(n+1)$-мерная цепь V со следующим свойством: на n-мерной цепи $\Gamma - \Gamma' + \partial V$ (после сокращений) вещественная часть значений функции отрицательна.

Л е м м а 1. *Пусть Γ, Γ' — две эквивалентных допустимых цепи. Тогда при $\tau \to +\infty$ выполняется равенство*

$$\int_\Gamma e^{\tau f}\omega - \int_{\Gamma'} e^{\tau f}\omega = o(\tau^{-N})$$

для любого натурального числа N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем $\Gamma = \Gamma' + \partial V + \Gamma''$, где $\operatorname{Re} f|_{\Gamma''} < 0$. Следовательно, $\int_\Gamma - \int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''}$, но последний интеграл экспоненциально мал.

Мы будем изучать асимптотическое поведение комплексных осциллирующих интегралов с точностью до слагаемых, малых по сравнению с τ^{-N} при любом натуральном N.

П р и м е р. Пусть $f(x) = x^3$, $\omega = dx$. Произвольный допустимый контур эквивалентен линейной комбинации двух контуров Γ_1, Γ_2, изображенных на рис. 139. Интегралы по Γ_1 и Γ_2 сопряжены. Имеем

$$\int_{\Gamma_1} e^{\tau x^3} dx = (1 - e^{+2\pi i/3}) \int_0^1 e^{-\tau x^3} dx = (\ldots)\tau^{-1/3} \int_0^\infty e^{-x^3} dx + o(\tau^{-N}).$$

Уточним понятия допустимых и эквивалентных контуров.

А. У т о ч н е н и е о п р е д е л е н и й. Предположим, что функция $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в начале координат и имеет в начале координат конечнократную критическую точку. Рассмотрим пару положительных

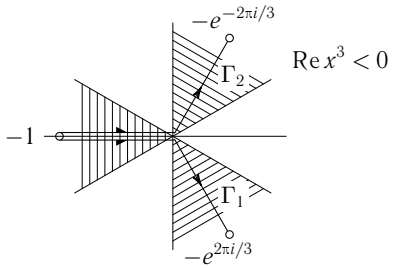


Рис. 139

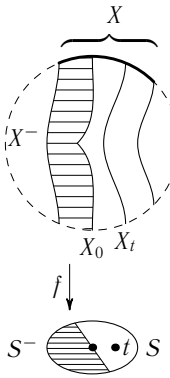


Рис. 140

чисел ρ, η. Обозначим через S диск $\{t \in \mathbb{C}^1\colon |t| < \eta\}$, через S^- — его левую половину: $\{t \in S\colon \operatorname{Re} t < 0\}$. Обозначим через X множество $\{x \in \mathbb{C}^n\colon f(x) \in S, \|x\| < \rho\}$, через X^- — множество $X \cap f^{-1}(S^-)$, через X_t — множество $X \cap f^{-1}(t)$, (см. рис. 140). Будем предполагать, что пара чисел ρ, η допустима для критической точки (см. п. 32.3.А).

Назовем n-мерную цепь $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ *допустимой*, если $\Gamma \subset X$, $\partial\Gamma \subset X^-$. Допустимые цепи Γ, Γ' назовем *эквивалентными*, если существует $(n+1)$-мерная цепь $V \subset X$ со следующих свойством: $(\Gamma - \Gamma' + \partial V) \subset X^-$. Классы эквивалентности допустимых цепей относительно операций сложения и умножения на числа образуют векторное пространство, по определению совпадающее с $H_n(X, X^-)$.

Б. Разложение в ряд. С каждым элементом $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ свяжем семейство $(n-1)$-мерных классов приведенных гомологий в слоях расслоения Милнора, лежащих над S^-. Для этого рассмотрим точную последовательность $\dots \to H_n(X) \to H_n(X, X^-) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X^-) \to H_{n-1}(X) \to \dots$ Числа ρ, η допустимы. Поэтому пространство X стягиваемо и ∂ — изоморфизм группы $H_n(X, X^-)$ и группы приведенных $(n-1)$-мерных гомологий пространства X^-.

Ограничение отображения f на $X' = X \setminus X_0$ — гладкое локально тривиальное расслоение (расслоение Милнора критической точки). В частности, $f\colon X^- \to S^-$ — тривиальное расслоение. Поэтому гомологии множества X^- изоморфны гомологиям произвольного слоя над S^-. Таким образом, определен изоморфизм $\partial_t\colon H_n(X, X^-) \to H_{n-1}(X_t)$ для любого $t \in S^-$, где $H_{n-1}(X_t)$ — это группа приведенных гомологий. Если Γ — допустимая цепь, представляющая элемент $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, то, взяв границу цепи Γ и стянув ее в множестве X^- в слой X_t, получим цикл, представляющий элемент $\partial_t[\Gamma] \in H_{n-1}(X_t)$. Семейство классов $\partial_t[\Gamma]$ непрерывно зависит от $t \in S^-$.

В примере на с. 526 слой X_t расслоения Милнора состоит из корней уравнения $x^3 = t$. Элементу $[\Gamma_1] \in H_1(X, X^-)$ отвечает семейство нульмерных гомологий $\partial_t[\Gamma_1]$. Класс $\partial_t[\Gamma_1]$ представляет цикл $x^0 - x^1$, где x^0 — нижняя точка слоя, x^1 — левая (см. рис. 139).

Лемма 2. *Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Тогда*

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega \approx \int_0^{t_0} e^{-\tau t}\left(\int_{\partial_{-t}[\Gamma]} \omega/df\right) dt. \tag{1}$$

Здесь t_0 — малое положительное число, принадлежащее диску S; в правой части стоит интеграл по отрезку вещественной оси; знак $\approx$ означает, что правая часть отличается от левой на слагаемое $o(\tau^{-N})$ при $\tau \to +\infty$, где N — любое число.

Эта лемма связывает интегралы метода перевала с интегралами голоморфных форм по семействам исчезающих классов гомологий. Интеграл голоморфной формы разлагается в ряд по степеням параметра и степеням логарифма параметра (см. § 32). Формула (1) позволяет интеграл метода перевала разложить в аналогичный ряд.

Доказательство. Выберем цепь Γ, представляющую $[\Gamma]$, так, чтобы выполнялось включение $\partial\Gamma \subset X_{-t_0}$. Тогда для любой голоморфной $(n-1)$-формы φ на X справедливо равенство

$$\int_\Gamma d\varphi = \int_0^{-t_0}\left(\int_{\partial_t[\Gamma]} d\varphi/df\right) dt. \tag{2}$$

Действительно, по формуле Стокса интеграл в левой части равен интегралу по $\partial\Gamma$ формы φ. Цикл $\partial\Gamma$ представляет $\partial_{-t_0}[\Gamma]$. Рассмотрим функцию $J(t) = \int_{\partial_t[\Gamma]} \varphi$. Она голоморфна на S^- и стремится к нулю при стремлении параметра к нулю по радиусу (см. теоремы 32.4, 32.7). Следовательно, ее значение в точке t_0 равно интегралу ее производной от 0 до $-t_0$. По формуле (3) на с. 528 производная функции J задается интегралом формы $d\varphi/df$. Формула (2) доказана.

При фиксированном τ на множестве X найдется голоморфная $(n-1)$-форма φ со следующим свойством: $d\varphi = e^{\tau f}\omega$ (по лемме Пуанкаре). Теперь формула (2), примененная к φ, дает утверждение леммы.

З а м е ч а н и е. Здесь, как и в теореме 32.8, нужна аккуратность при применении леммы Пуанкаре; см. замечание на с. 522.

Т е о р е м а 1 (см. [389]). *Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$. Тогда при $\tau \to +\infty$ интеграл*

$$\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega \tag{3}$$

разлагается в асимптотический ряд

$$\sum_{\alpha,k} a_{k,\alpha}\tau^\alpha (\ln\tau)^k. \tag{4}$$

Здесь параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. А именно, каждое число α обладает следующим свойством: $\exp(-2\pi i\alpha)$ *— собственное число оператора классической монодромии критической точки фазы. Коэффициент $a_{k,\alpha}$ равен нулю всякий раз, когда у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ и более с собственным числом* $\exp(-2\pi i\alpha)$.

Доказательство следует из (1). Внутренний интеграл в правой части формулы (1) разлагается на вещественной положительной полуоси в ряд

$$\sum b_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k, \tag{5}$$

указанный в теореме 32.8 на с. 522. Легко видеть, что асимптотическое разложение интеграла (3) можно получить, вычисляя асимптотики интегралов от отдельных членов ряда (5). Воспользовавшись стандартной формулой

$$\int_0^\infty e^{-\tau t} t^\alpha (\ln t)^k dt = \left(\frac{d}{d\alpha}\right)^k \left(\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\tau^{\alpha+1}}\right), \tag{6}$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция, и заменяя $\int_0^1$ на $\int_0^\infty$, получим ряд (4).

З а м е ч а н и е. Ряд (4) определяет ряд (5). Поэтому эквивалентны задачи исследования асимптотик интегралов метода перевала и интегралов голоморфных форм по классам гомологий непрерывных семейств исчезающих гомологий.

В. П р и м е р. Пусть $f = x^{\mu+1}$; $x = 0$ — критическая точка кратности μ. Зафиксируем цепи $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\mu$, порождающие базис в $H_1(X, X^-)$. Для этого обозначим через $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$ корни уравнения $x^{\mu+1} = -1$, где $\arg \varepsilon_j = \pi(2j-1)/(\mu+1)$, и положим Γ_j равной отрезку $\overrightarrow{\varepsilon_{j+1}\varepsilon_j}$; см. рис. 141. Обозначим через ω_l форму $x^{l-1}dx$.

Л е м м а 3. *При $1 \leqslant l, j \leqslant \mu$ выполняется равенство*

$$\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_{lk} = a\tau^{\alpha},$$

где $a = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l)\,\Gamma(l/(\mu+1))/(\mu+1)$, $\alpha = -l/(\mu+1)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

З а м е ч а н и е. Интеграл с фазой $x^{\mu+1}$ и произвольной формой ω интегрированием по частям сводится к линейной комбинации интегралов с той же фазой и формами ω_l, $l = 1, \ldots, \mu$. Коэффициентами линейной комбинации служат формальные ряды от $1/\tau$.

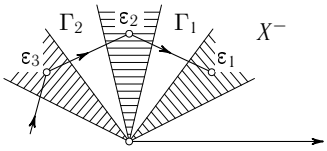


Рис. 141

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Для отрицательных значений t обозначим через $\varepsilon_1(t), \ldots, \varepsilon_{\mu+1}(t)$ корни уравнения $x^{\mu+1} = t$, где $\arg \varepsilon_j(t) = \pi(2j-1)/(\mu+1)$. Для таких t граница $\partial_t[\Gamma_j]$ представляется 0-циклом $\varepsilon_j(t) - \varepsilon_{j+1}(t)$. 0-форма ω_l/df равна функции $x^{l-\mu-1}/(\mu+1)$. Следовательно,

$$\int_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df = (\varepsilon_{j+1}^l - \varepsilon_j^l)|t|^{l/(\mu+1)-1}/(\mu+1). \tag{7}$$

Теперь лемма 3 следует из леммы 2 и формулы (6).

В заключение отметим важное свойство форм $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ из примера.

Л е м м а 4. *Формы $\omega_1/df, \ldots, \omega_\mu/df$ порождают базис в исчезающих когомологиях в каждом слое расслоения Милнора. Более того,*

$$\det{}^2\left(\int_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df\right) = C_\mu t^{-\mu},$$

где $1 \leqslant j, l \leqslant \mu$, C_μ — отличная от нуля константа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу формулы (7) достаточно доказать, что не существует отличного от нуля многочлена $P = \alpha_1 x + \ldots + \alpha_\mu x^\mu$, прини-

мающего равные значения в точках $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$. Очевидно, что $P(\varepsilon_1) = \ldots = P(\varepsilon_{\mu+1}) = (P(\varepsilon_1) + \ldots + P(\varepsilon_{\mu+1}))/(\mu+1) = 0$. Следовательно, $P \equiv 0$.

Следствие. *Имеет место равенство*

$$\det\left(\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_l\right) = B_\mu \tau^{-\mu/2},$$

где B_μ — отличная от нуля константа.

Замечание. Ниже мы докажем при помощи леммы 4 и ее следствия, что для любой критической точки кратности μ существуют формы $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$, которые после деления на дифференциал фазы порождают базис в исчезающих когомологиях в каждом слое расслоения Милнора (см. теорему 34.1).

33.2. Осциллирующий интеграл — частный случай интеграла метода перевала. Рассмотрим функцию $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, голоморфную в начале координат и имеющую в начале координат критическую точку. Предположим, что значения функции на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ вещественны. Такая функция может служить как фазой осциллирующего интеграла по $\mathbb{R}^n$, так и фазой интеграла метода перевала. Докажем, что существует расположенная в окрестности начала координат допустимая n-цепь Γ, для которой

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\, dx \approx \int_\Gamma e^{i\tau f}\varphi\, dx \tag{8}$$

при всех φ с носителем в достаточно малой окрестности начала координат. Таким образом, осциллирующий интеграл является частным случаем интеграла метода перевала.

Сделаем три уточнения. Во-первых, равенство выполняется с точностью до слагаемого, убывающего быстрее любой степени параметра τ при $\tau \to +\infty$. Во-вторых, допустимая цепь для интеграла с фазой $i\tau f$ (вместо τf, как в предыдущем пункте) — это цепь, на границе которой положительна мнимая часть функции f. В-третьих, амплитуда φ должна быть определена не только на $\mathbb{R}^n$, но и на Γ; поэтому равенство (8) будет доказано для амплитуд вида $\psi\theta$, где ψ — голоморфная функция, а θ — гладкая финитная функция с носителем, сосредоточенным в достаточно малой окрестности начала координат, и тождественно равная 1 в еще меньшей окрестности начала координат.

Согласно теореме 1 асимптотики интеграла в правой части выражаются через жорданову структуру оператора классической монодромии критической точки. Следовательно, таким же образом связаны с оператором монодромии асимптотики интеграла в левой части. При этом не важно, что

равенство (8) доказано только для аналитических амплитуд φ (см. ниже лемму 5).

А. Изменение определений. В связи с наличием в фазе интеграла (8) числа i изменим (только в этом пункте) определение допустимой цепи. Предположим, что f имеет конечнократную критическую точку в начале координат. Воспользуемся обозначениями из п. 33.1.А и обозначим через S^{+i} полукруг $\{t \in S\colon \operatorname{Im} t > 0\}$. Обозначим через X^{+i} множество $X \cap f^{-1}(S^{+i})$. Назовем n-мерную цепь $\Gamma \subset X$ *допустимой*, если $\partial\Gamma \subset X^{+i}$. Две допустимых цепи назовем *эквивалентными*, если они определяют один класс в $H_n(X, X^{+i})$. Интеграл $\int_\Gamma e^{i\tau f}\omega$ голоморфной n-формы ω по допустимой цепи Γ назовем *интегралом метода перевала*. Интегралы по эквивалентным цепям имеют равные асимптотические разложения при $\tau \to +\infty$ (лемма 1). Переформулируем теорему 1.

Теорема 2. *Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на множестве X, $[\Gamma] \in H_n(X, X^{+i})$. Тогда при $\tau \to +\infty$ интеграл $\int_{[\Gamma]} e^{i\tau f}\omega$ разлагается в асимптотический ряд $\sum a_{k,\alpha}\tau^\alpha(\ln\tau)^k$, обладающий свойствами, указанными в теореме* 1.

Б. Теорема 3 (см. [389]). *Предположим, что значения функции f вещественны на вещественном подпространстве. Тогда существует класс $[\Gamma_{\mathbb{R}}] \in H_n(X, X^{+i})$ (называемый вещественным), который обладает следующим свойством. Пусть $\theta\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в X и тождественно равная* 1 *в окрестности начала координат. Тогда для любой голоморфной функции $\varphi\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\theta\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \approx \int_{[\Gamma_{\mathbb{R}}]} e^{i\tau f}\varphi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

с точностью до слагаемого, являющегося для любого N величиной $o(\tau^{-N})$ при $\tau \to +\infty$.

Следствие теорем 2, 3 (ср. с теоремой 28.3 об асимптотическом разложении). *Осциллирующий интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\psi\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ разлагается в асимптотический ряд $\sum a_{k,\alpha}\tau^\alpha(\ln\tau)^k$ при $\tau \to +\infty$, если амплитуда имеет вид, указанный в теореме* 3. *В этом ряде параметр α пробегает конечное множество арифметических прогрессий, зависящих только от фазы и составленных из отрицательных рациональных чисел. А именно, каждое число α обладает следующим свойством*: $\exp(-2\pi i\alpha)$ — *собственное число оператора классической монодромии критической точки фазы, рассматриваемой как голоморфная функция. Коэффициент $a_{k,\alpha}$ равен нулю всякий раз, когда*

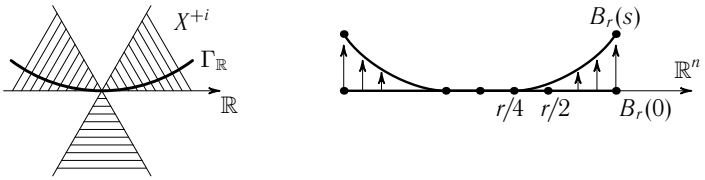
у классической монодромии нет жордановых блоков размеров $k+1$ *и более с собственным числом* $\exp(-2\pi i\alpha)$.

Замечания. 1. С помощью леммы 5 (см. ниже) указанное условие на амплитуду заменяется следующим условием: носитель амплитуды должен лежать в достаточно малой окрестности начала координат.

2. Интересно было бы описать все вещественные классы $[\Gamma_{\mathbb{R}}]$ для разных вещественных форм одной и той же голоморфной функции f.

В п. 31.2 приведен пример двух комплексно-эквивалентных ростков аналитических функций, у которых разные показатели особости. Следовательно, отвечающие этим вещественным формам вещественные классы по-разному расположены относительно линейных функций, задаваемых интегралами метода перевала на $H_n(X, X^{+i})$.

Доказательство теоремы 3. Мы построим цепь $\Gamma_{\mathbb{R}}$, представляющую класс $[\Gamma_{\mathbb{R}}]$, а затем докажем для нее теорему. Цепь $\Gamma_{\mathbb{R}}$ — это



а) *б*)

Рис. 142

часть вещественного пространства $\mathbb{R}^n$, лежащая в X, с краями, загнутыми в X^{+i}. Края загнуты вдоль траекторий векторного поля $i\cdot\operatorname{grad} f$.

Прежде чем уточнить построение, приведем пример. Пусть $f=x^3$. Тогда цепь $\Gamma_{\mathbb{R}}$ изображена на рис. 142, *а*.

Выберем достаточно малое $r>0$ и рассмотрим гладкое векторное поле ξ на X, равное нулю при $|x|<r/4$ и обладающее следующими свойствами: $\xi(\operatorname{Im} f)\geqslant 0$, $\xi(\operatorname{Im} f)>0$ при $x\geqslant r/2$; см. рис. 142, *б*.

Пусть B_r — пересечение шара $|x|\leqslant r$ и $\mathbb{R}^n$. Для достаточно малых $s>0$ диффеоморфизм $\exp(s\xi)$ определяет в множестве X диск $B_r(s)=\exp(s\xi)(B_r)$, граница которого лежит в X^{+i}. Следовательно, $B_r(s)$ определяет класс в $H_n(X, X^{+i})$, который, очевидно, не зависит от s. Покажем, что для этого класса справедлива теорема 3.

Мы можем предполагать, что носитель функции θ лежит в шаре $|x|<3r/4$ и $\theta\equiv 1$ на шаре $|x|\leqslant r/2$ (изменение функции θ вне начала координат не меняет асимптотического разложения осциллирующего интеграла).

Теперь, с одной стороны, подынтегральные выражения интегралов $\int_{B_r(s)} e^{i\tau f}\varphi\theta\,dx$ и $\int_{B_r(s)} e^{i\tau f}\varphi\,dx$ отличаются только на компакте X^{+i}, и, значит, разность этих интегралов экспоненциально мала. С другой стороны,

$$\int_{B_r(s)} e^{i\tau f}\theta\varphi\,dx = \int_{B_r} (\exp(s\xi))^*[e^{i\tau f}\theta\varphi\,dx].$$

Подынтегральное выражение правого интеграла запишем в виде $e^{i\tau f_s}(\theta\varphi)_s dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Тогда при достаточно малых $s>0$

а) $\operatorname{Im} f_s \geqslant 0$ на B_r,

б) f_s не имеет критических точек на $B_r\setminus 0$,

в) $f_s = f$, $(\theta\varphi)_s = \theta\varphi$ на $B_{r/4}$.

Из а)—в) следует, что интегралы $\int_{B_r} e^{i\tau f}\theta\varphi\,dx$ и $\int_{B_r} e^{i\tau f_s}(\theta\varphi)_s dx$ отличаются при $\tau\to+\infty$ на $o(\tau^{-N})$ для любого N. Теорема доказана.

Докажем лемму, выражающую асимптотики осциллирующего интеграла с гладкой амплитудой через асимптотики интегралов с амплитудой вида, указанного в теореме 3.

Л е м м а 5. *Пусть $\varphi_1,\ldots,\varphi_\mu$ — одночлены, порождающие базис над $\mathbb{R}$ в локальной алгебре $\mathbb{R}\{x\}/(\partial f/\partial x)$, и пусть функция θ такая же, как в теореме 3. Тогда для любой гладкой амплитуды φ с носителем, лежащим в достаточно малой окрестности начала координат, при $\tau\to+\infty$ имеет место равенство асимптотических рядов*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\varphi\,dx \approx \sum_{k=1}^{\mu} c_k(\tau^{-1})\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau f}\varphi_k\theta\,dx,$$

где c_k — подходящие формальные ряды от $1/\tau$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим амплитуду φ в виде

$$\varphi = \sum a^k\varphi_k\theta + \sum h^k\partial f/\partial x_k,$$

где a^k — числа, h^k — гладкие финитные функции. Тогда

$$\int e^{i\tau f}\varphi\,dx = \sum a^k\int e^{i\tau f}\varphi_k\theta\,dx + \frac{1}{i\tau}\int e^{i\tau f}\sum(-1)^{k+1}\partial h^k/\partial x_k\,dx.$$

Числа $a^1,\ldots,a^\mu$ — свободные члены рядов $c_1(\tau^{-1}),\ldots,c_\mu(\tau^{-1})$. Преобразуя правый интеграл аналогично тому, как был преобразован исходный интеграл, получим коэффициенты формальных рядов, стоящие при τ^{-1}, и т. д.

З а м е ч а н и е. В [419] доказано, что ряды $\{c_k(\tau^{-1})=\sum c_k^j\tau^{-j}\}$ после деления j-го коэффициента на $j!$ сходятся для достаточно больших τ, если амплитуда φ имеет вид, указанный в теореме 3.

В. Показатели особости простых критических точек и числа Кокстера. В. И. Арнольдом отмечено следующее явление (см. [8], [10]): показатели осцилляции простых критических точек гладких функций трех переменных даются формулой $\beta = -1 - 1/N$, где N — число Кокстера соответствующей группы, порожденной отражениями. Теорема 3 объясняет присутствие в этой формуле числа N.

Предложение. *Осциллирующий интеграл с фазой, зависящей от трех переменных и имеющей простую критическую точку, разлагается в асимптотический ряд $\sum a_\alpha t^\alpha$, где α — рациональные числа со знаменателем, равным числу Кокстера соответствующей группы, порожденной отражениями.*

Действительно, в этом случае оператор монодромии — преобразование Кокстера соответствующей группы (см. теорему 25.14). Поэтому $M^N = \mathrm{Id}$. По теореме 3 показатели α после умножения на N становятся целыми числами.

33.3. Комплексные осциллирующие интегралы с фазой $f(x)+g(x)$. Асимптотики интегралов с фазой $f + g$ выражаются через асимптотики интегралов с фазами f, g, поскольку экспонента суммы равна произведению экспонент слагаемых. В частности, асимптотики интегралов с фазой $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ выражаются через асимптотики интегралов с фазой $x_1^{\mu+1}$ (которые вычислены в п. 33.1.В). Из этих выражений извлекается нетривиальная информация об асимптотиках интегралов с произвольной фазой, поскольку произвольная изолированная критическая точка встречается в версальной деформации критической точки $x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$ (при достаточно большом μ). В частности, на этом пути можно доказать следующую важную теорему: если задана критическая точка функции f кратности μ, $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — достаточно общий набор голоморфных n-форм, а $\delta_1(t), \ldots, \delta_\mu(t)$ — непрерывно зависящий от t базис целочисленных гомологий, исчезающих в критической точке, то функция $\det^2\left(\int_{\delta_j(t)} \omega_l/df\right)$ не равна тождественно нулю в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ и, более того, порядок ее нуля в точке 0 равен $\mu(n-2)$ (см. теорему 34.1; ср. с леммой 4).

А. Теорема Фубини для осциллирующих интегралов. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $g\colon (\mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — функции, голоморфные в началах координат и имеющие в началах координат конечнократные критические точки. Рассмотрим функцию $f + g\colon (\mathbb{C}^{n+l}, 0) \to \to (\mathbb{C}, 0)$.

Функция $f + g$ имеет в начале координат конечнократную критическую точку кратности, равной произведению кратностей критических точек функций f, g. Пусть ω — голоморфная n-форма, заданная в окрестности начала

координат в $\mathbb{C}^n$, η — голоморфная l-форма, заданная в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^l$. Мы сравним асимптотики трех интегралов $\int e^{\tau f}\omega$, $\int e^{\tau g}\eta$, $\int e^{\tau(f+g)}\omega\wedge\eta$, выбирая согласованным образом допустимые цепи интегрирования.

Пусть $\Gamma_1\subset\mathbb{C}^n$, $\Gamma_2\subset\mathbb{C}^l$ — допустимые цепи соответственно для критических точек функций f, g. Предположим, что $\operatorname{Re} f|_{\partial\Gamma_1}=\operatorname{Re} g|_{\partial\Gamma_2}=-a$, $a/2>\operatorname{Re} f|_{\Gamma_1}$, $\operatorname{Re} g|_{\Gamma_2}\geqslant -a$ для достаточно малого числа $a>0$ (выполнения этого условия можно добиться, заменяя цепи на эквивалентные). Тогда цепь $\Gamma_1\times\Gamma_2\subset\mathbb{C}^{n+l}$ допустима для критической точки функции $f+g$. Легко видеть, что эта конструкция задает линейное отображение тензорного произведения групп классов эквивалентности цепей, допустимых для критических точек функций f, g, в группу классов эквивалентности цепей, допустимых для критической точки функции $f+g$. Можно показать (см. [451], а также теорему 24.9), что это отображение есть изоморфизм.

З а м е ч а н и е. В [451] приведено топологическое доказательство этого утверждения. Другое доказательство можно получить, используя теорему о детерминанте, сформулированную в начале п. 33.3 (см. п. 35.3.Д, а также следствие 1 леммы 6).

Т е о р е м а 4 (см. [389]). *Имеет место равенство*

$$\int_{\Gamma_1\times\Gamma_2} e^{\tau(f+g)}\omega\wedge\eta=\int_{\Gamma_1} e^{\tau f}\omega\int_{\Gamma_2} e^{\tau g}\eta.$$

Теорема 4 — прямое следствие теоремы Фубини.

С л е д с т в и е. *Асимптотический ряд интеграла в левой части равен произведению асимптотических рядов интегралов, стоящих в правой части.*

Б. И н т е г р а л ы с ф а з о й $f=x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$ (п р и м е р п р и м е н е н и я т е о р е м ы 4). Кратность критической точки функции $x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$ равна μ^n. Построим μ^n n-мерных цепей $\Gamma_{j_1,\ldots,j_n}$ ($1\leqslant j_1,\ldots,j_n\leqslant\mu$), допустимых для этой критической точки.

Каждую из цепей $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_\mu\subset\mathbb{C}$, указанных в п. 33.1.В и допустимых для критической точки функции $x^{\mu+1}$, заменим на эквивалентную так, чтобы выполнялись условия $x^{\mu+1}|_{\partial\Gamma_j}=-1$, $1/n>\operatorname{Re} x^{\mu+1}|_{\Gamma_i}\geqslant -1$. Положим цепь $\Gamma_{j_1,\ldots,j_n}\subset\mathbb{C}^n$ равной $\Gamma_{j_1}\times\Gamma_{j_2}\times\ldots\times\Gamma_{j_\mu}$. Легко видеть, что цепь $\Gamma_{j_1,\ldots,j_\mu}$ допустима для критической точки $x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$.

Обозначим через ω_j, где $j=(j_1,\ldots,j_n)$, форму $x_1^{j_1-1}\ldots x_n^{j_n-1}dx_1\wedge\ldots\wedge dx_n$. Обозначим через J множество индексов $j=(j_1,\ldots,j_n)$, для которых $1\leqslant j_1,\ldots,j_n\leqslant\mu$.

Л е м м а 6. 1) *Для любых* $j, l \in J$ *выполняется равенство*

$$\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_l = \tau^{r_l}(\mu+1)^{-n}\prod_{k=1}^{\mu}(\varepsilon_{j_k}^{l_k+1}-\varepsilon_{j_k}^{l_k})\,\Gamma\Big(\frac{l_k}{\mu+1}\Big),$$

где $r_l = -(l_1+\ldots+l_n)/(\mu+1)$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\mu+1}$ — *корни уравнения* $x^{\mu+1}=-1$, *указанные в п.* 33.1.В, $\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция*.

2) *Имеет место равенство*

$$\det\left(\int_{[\Gamma_j]} e^{\tau f}\omega_l\right) = (B_\mu)^{n\mu^{n-1}}\tau^{-n\mu^n/2},$$

где $j, l \in J$, B_μ — *отличная от нуля константа, определенная в следствии леммы* 4.

Лемма 6 — очевидное следствие теоремы 4 и лемм 3, 4.

З а м е ч а н и е. Интеграл с фазой $x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$ и произвольной формой ω интегрированием по частям сводится к линейной комбинации интегралов с той же фазой и формами ω_l, $l \in J$ (ср. с леммой 5).

С л е д с т в и е 1. *Цепи* Γ_j, $j \in J$, *порождают базис в группе классов эквивалентности цепей, допустимых для критической точки функции* $x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$.

Действительно, эти цепи линейно независимы (п. 2) леммы 6), и их число равно кратности критической точки.

С л е д с т в и е 2. *Имеет место равенство*

$$\det{}^2\left(\int_{\partial_t[\Gamma_j]} \omega_l/df\right) = C_\mu t^{\mu^n(n-2)},$$

где C_μ — *отличная от нуля константа*.

Следствие 2 с очевидностью вытекает из леммы 6 и формулы (6) на с. 528.

З а м е ч а н и е 1. Легко видеть, что следствие 2 для критической точки функции $x_1^{\mu+1}+\ldots+x_n^{\mu+1}$ эквивалентно утверждению теоремы о детерминанте, сформулированной в начале п. 33.3.

З а м е ч а н и е 2. Лемма 6 и ее следствия легко обобщаются на случай критической точки функции $x_1^{a_1}+\ldots+x_n^{a_n}$.

§ 34. Интегралы и дифференциальные уравнения

В этом параграфе доказывается, что многозначные функции, заданные интегралами голоморфной дифференциальной формы по классам непрерывных семейств гомологий, исчезающих в критической точке голоморфной функции, составляют все решения обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения, порядок которого не больше кратно-

сти критической точки. Анализ этого явления приводит к понятию связности Гаусса—Манина в расслоении исчезающих (ко)гомологий, ассоциированном с расслоением Милнора критической точки.

В первом пункте параграфа доказывается теорема о детерминанте, из которой, в частности, следует существование голоморфных дифференциальных n-форм в $\mathbb{C}^n$, которые после деления на дифференциал нашей функции порождают базис когомологий каждого слоя расслоения Милнора критической точки этой функции. Во втором пункте доказывается сформулированное выше утверждение о дифференциальном уравнении. В третьем пункте обсуждается понятие связности Гаусса—Манина.

Отметим введенное в п. 34.2 понятие особенности Пикара—Фукса конечнократной критической точки голоморфной функции, а также введенные в 34.3 понятия (ко)гомологического расслоения Милнора, ковариантного постоянного сечения (ко)гомологического расслоения, геометрического сечения когомологического расслоения.

34.1. Теорема о детерминанте. В этом пункте доказана формулируемая ниже теорема 1; она является одним из основных утверждений об интегралах.

Рассмотрим росток $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции, имеющий критическую точку μ, его специализацию $f\colon X \to S$ и соответствующее специализации расслоение Милнора (см. с. 517). Выделим в слоях расслоения Милнора базисы целочисленных $(n-1)$-мерных гомологий, непрерывно зависящие от точки базы. Базис в слое над точкой t обозначим $\delta_1(t), \dots, \delta_\mu(t)$. (Отметим, что базис — многозначная функция точки базы.) Рассмотрим произвольный набор из μ голоморфных дифференциальных n-форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, заданных в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Предположим, что пространство X содержится в окрестности, в которой определены формы. Мы будем изучать свойства функции

$$\det^2\colon t \mapsto \det^2\left(\int_{\delta_j(t)} \omega_l/df\right), \quad j, l = 1, \dots, \mu.$$

Теорема 1 (см. [57]). 1) *Функция* $\det^2$ *однозначна в окрестности точки* $t = 0$.

2) *Функция* $\det^2$ *имеет при* $t = 0$ *нуль, порядок которого не меньше чем* $\mu(n-2)$ (*в частности, при* $n > 1$ *функция* $\det^2$ *голоморфна в окрестности точки* $t = 0$).

3) *Если набор форм достаточно общий* (*конечные струи форм в точке* $0 \in \mathbb{C}^n$ *не удовлетворяют некоторому комплексно-аналитическому соотношению*), *то порядок нуля при* $t = 0$ *функции* $\det^2$ *равен* $\mu(n-2)$.

О п р е д е л е н и е. Набор форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ назовем *тривиализацией*, если для какого-нибудь семейства базисов $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ (а значит, и для любого) функция $\det^2$ не равна тождественно нулю.

О п р е д е л е н и е. Набор форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ назовем *базисной тривиализацией*, если для какого-нибудь семейства базисов $\delta_1, \dots, \delta_\mu$ (а значит, и для любого) функция $\det^2$ имеет при $t = 0$ нуль порядка $\mu(n-2)$.

С л е д с т в и е т е о р е м ы 1. *Для любой конечнократной критической точки голоморфной функции существует тривиализация, более того, существует базисная тривиализация.*

З а м е ч а н и я. 1. Первое доказательство существования тривиализации изложено в [41], оно опирается на теоремы (А), (В) А. Картана.

2. В п. 34.3 мы определим когомологическое расслоение Милнора критической точки. Это — векторное расслоение, база которого совпадает с базой обычного расслоения Милнора. Его слоями являются векторные пространства когомологий слоев обычного расслоения Милнора. Набор форм, названный в определении тривиализацией, задает тривиализацию когомологического расслоения Милнора над окрестностью точки $t = 0$.

3. Понятие тривиализации не зависит от выбора специализации ростка (см. п. 32.3.А, замечание 3 в п. 32.3.Б).

4. В следствии 2 леммы 33.6 предъявлен набор форм, являющийся базисной тривиализацией для критической точки функции $x_1^N + \dots + x_n^N$. Теорема 1 выводится из существования базисной тривиализации для указанной критической точки. Доказательство теоремы см. в п. 34.1.В, 34.1.Д. В п. 34.1.А, 34.1.Б доказаны вспомогательные утверждения о функции $\det^2$.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, сформулируем свойства тривиализации.

I. Если $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — тривиализация, то формы Гельфанда—Лере $\omega_1/df, \dots, \omega_\mu/df$ порождают базисы $(n-1)$-мерных когомологий с комплексными коэффициентами во всех слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f, расположенных над достаточно малой окрестностью точки $t = 0$.

II. Пусть ω, $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы, заданные в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$. Если $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — тривиализация, то на достаточно малой проколотой окрестности точки $t = 0$ существуют и единственны голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, обладающие следующим свойством:

$$\int_{\delta(t)} \omega/df \equiv \sum_j p_j(t) \int_{\delta(t)} \omega_j/df$$

для любого непрерывного семейства δ целочисленных $(n-1)$-мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки 0 функции f. Если,

более того, $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — базисная тривиализация, то функции $p_1, \ldots, p_\mu$ голоморфно продолжаются в точку $t = 0$.

Свойство I очевидно; докажем свойство II. Взяв в качества семейства δ семейства $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$, порождающие базисы гомологий слоев расслоения Милнора, получим систему линейных уравнений на $p_1, \ldots, p_\mu$. Ее определитель отличен от нуля по определению тривиализации. Решая систему уравнений по правилу Крамера, получим искомые функции в виде частных пар определителей. Каждое частное голоморфно при $t = 0$, если $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — базисная тривиализация.

А. Элементарные свойства функции $\det^2$. Удобно рассматривать функцию $\det^2$ не на базе расслоения Милнора критической точки, а на базе расслоения Милнора версальной деформации критической точки.

Пусть $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — версальная деформация ростка $\boldsymbol{f}$. Рассмотрим специализацию $G\colon X \to S$ развертки деформации и соответствующее расслоение Милнора $G\colon X' \to S'$ (обозначения и определения см. в п. 32.3.А на с. 517; см. также рис. 138 на с. 516). Выделим в слоях расслоения Милнора базисы целочисленных $(n-1)$-мерных гомологий, непрерывно зависящие от точек базы. Базис в слое над $s \in S'$ обозначим через $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы на X. Пусть $F\colon X \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, представляющая росток $\boldsymbol{F}$. Формы $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ на каждом слое расслоения Милнора определяют голоморфные дифференциальные $(n-1)$-формы $\omega_1/d_xF, \ldots, \omega_\mu/d_xF$ (формы $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ нужно ограничить на подпространства вида $\mathbb{C}^n \times y$ и разделить на d_xF). Рассмотрим на базе S' функцию

$$\det{}^2\colon s \mapsto \det{}^2\left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l/d_xF\right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

Лемма 1. *Функция* $\det^2$ *однозначна и голоморфна.*

Доказательство. Элементы матрицы — многозначные голоморфные функции на базе (теорема 32.5). При аналитическом продолжении вдоль замкнутого пути значение функции $\det^2$ умножается на квадрат определителя оператора монодромии в гомологиях. Оператор монодромии невырожден и целочислен вместе с обратным. Поэтому квадрат его определителя равен 1. Следовательно, функция $\det^2$ однозначна.

Замечание. Если n четно, то уже функция det однозначна и голоморфна. Достаточно проверить однозначность при аналитическом продолжении вдоль малого пути вокруг неособой точки дискриминанта в базе версальной деформации. Определитель соответствующего преобразования монодромии равен определителю преобразования Пикара—Лефшеца, который при четном n равен 1.

Согласно определениям в п. 32.3.А база S' расслоения Милнора является дополнением к гиперповерхности в произведении шаров $S = B^1_\eta \times B^k_\rho$. Разность $\Sigma = S \setminus S'$ называется *дискриминантом*.

Т е о р е м а 2 (см. [57]). *Функция* $\det^2$ *мероморфна в начале координат базы* S *и, более того, может быть представлена в виде* gh^{n-2}, *где* g, h *— функции на* S, *голоморфные в начале координат, причем* h *— это функция, нули которой определяют дискриминант* (*без кратностей*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. На S заданы координаты: $y \in B^k_\rho$ — параметры деформации, $u \in B^1_\eta$ — значение функции F. При фиксированном y прямая значений пересекает дискриминант в μ точках (с учетом кратностей). Для общего значения координаты y прямая значений пересекает дискриминант в μ различных неособых точках. Достаточно доказать, что около таких неособых точек дискриминанта функция $\det^2 / h^{n-2}$ голоморфна. Действительно, тогда по теореме о стирании особенностей функция $\det^2 / h^{n-2}$ голоморфна на S всюду. Голоморфность в окрестности неособой точки дискриминанта следует из явных вычислений интегралов по циклу, исчезающему в невырожденной критической точке (см. пример в п. 32.3 на с. 522).

Итак, пусть $s_0 = (u_0, y_0)$ — неособая точка дискриминанта, в окрестности которой дискриминант является графиком функции $u = u(y)$. Функция $F(\cdot, y)$ имеет одну критическую точку в множестве $X \cap (\mathbb{C}^n \times y)$ с критическим значением $u(y)$, и эта критическая точка невырождена. Рассмотрим оператор монодромии M, отвечающий обходу вокруг точки $(u(y), y)$ по малой окружности, расположенной на прямой значений. M — оператор Пикара—Лефшеца «отражения» в классе гомологий цикла, исчезающего при $s \to s_0$. Используя оператор монодромии, линейно над $\mathbb{R}$ заменим все базисы $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ одновременно для всех точек s из малой окрестности точки s_0 (от этого $\det^2$ умножится на число, равное квадрату определителя замены). Если n нечетно, то M имеет $(\mu - 1)$-мерное подпространство инвариантных векторов и одномерное подпространство антиинвариантных векторов, порожденное классом цикла, исчезающего при $s \to s_0$. В качестве нового базиса возьмем $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$, где $\delta_1(s)$ — это класс цикла, исчезающего при $s \to s_0$, $\delta_2(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ — любые классы, составляющие базис инвариантных классов. Если n четно, то все собственные числа оператора M равны 1 и подпространство инвариантных векторов $(\mu - 1)$-мерно. В качестве нового базиса возьмем $\delta_1(s), \ldots, \delta_\mu(s)$, где $\delta_1(s)$ — класс цикла, исчезающего при $s \to s_0$, $\delta_2(s)$ — любой класс гомологий, индекс пересечения которого с δ_1 равен 1, $\delta_3(s), \ldots, \delta_\mu(s)$ — любые классы, составляющие вместе с $\delta_1(s)$ базис инвариантных классов.

Теперь теорема 2 следует из леммы 2.

Л е м м а 2. *Пусть* ω *— голоморфная дифференциальная* n*-форма, заданная в окрестности начала координат в* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$*, содержащей пространство* X*. Если* n *нечетно, то в окрестности точки* $s_0 \in \Sigma$ *справедливы разложения*

$$\int_{\delta_1(u,y)} \omega/d_x F = (u - u(y))^{n/2-1} P_1(u, y), \tag{1}$$

$$\int_{\delta_j(u,y)} \omega/d_x F = P_j(u, y), \quad j = 2, \ldots, \mu, \tag{2}$$

где $P_1, \ldots, P_\mu$ *— функции, голоморфные в точке* s_0*. Если* n *четно, то в окрестности точки* $s_0 \in \Sigma$ *справедливы разложение* (1)*, разложение* (2) *при* $j = 3, \ldots, \mu$*, а также разложение*

$$\int_{\delta_2(u,y)} \omega/d_x F = \pm(u - u(y))^{n/2-1} \frac{\ln(u - u(y))}{2\pi i} P_1(u, y) + P_2(u, y), \tag{3}$$

где $P_1, \ldots, P_\mu$ *— функции, голоморфные в точке* s_0*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Ограничение формы ω на подпространство вида $\mathbb{C}^n \times y$ замкнуто. По лемме Пуанкаре в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k$ существует голоморфная $(n-1)$-форма ψ, ограничение дифференциала которой на любое подпространство вида $\mathbb{C}^n \times y$ совпадает с ограничением формы ω. Согласно формуле (3) на с. 528

$$\int_{\delta_j(u,y)} \omega/d_x F = \frac{\partial}{\partial u} \int_{\delta_j(u,y)} \psi. \tag{4}$$

Если цикл δ_j инвариантен относительно M, то в окрестности точки s_0 интеграл формы ψ по $\delta_j(u, y)$ однозначен и голоморфно зависит от $(u, y) \in S \setminus \Sigma$. Согласно теореме 32.7, этот интеграл имеет конечный предел при $u \to u(y)$ по прямой $y = \text{const}$. Следовательно, в окрестности точки s_0 он голоморфно продолжается на Σ. Поэтому голоморфно продолжается на Σ и его производная (4). Лемма доказана для $j = 3, 4, \ldots, \mu$ и $j = 2$ при нечетном n.

В окрестности невырожденной критической точки с критическим значением $u(y)$ функция $F(\cdot, y)$ голоморфной заменой переменных $x = x(z, y)$ приводится к виду $z_1^2 + \ldots + z_n^2 + u(y)$. В этих координатах, воспользовавшись вычислениями примера в п. 32.3.Г на с. 522, получим

$$\int_{\delta_1(u,y)} \psi = (u - u(y))^{n/2} Q(u, y), \tag{5}$$

где Q — голоморфная функция. Это, согласно (4), доказывает лемму при $j = 1$.

Из формул Пикара—Лефшеца при четном n следует, что

$$\int_{\delta_2(u,y)} \psi = \pm \frac{\ln(u-u(y))}{2\pi i} \int_{\delta_1(u,y)} \psi + P(u,y), \tag{6}$$

где P — однозначная функция в окрестности точки s_0 (знаки $\pm$ выбираются в зависимости от четности числа $n/2$). Аналогично предыдущему, функция P голоморфно продолжается на дискриминант Σ. Следовательно, лемма справедлива при $j=2$ и четном n. Лемма 2 и теорема 2 доказаны.

Следствие 1 теоремы 2. *Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы на X. Предположим, что ограничение функции*

$$\det{}^2 \colon s \mapsto \det{}^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l / d_x F \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu,$$

на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$. Тогда функция $\det^2$ может быть представлена в виде $\det^2 = gh^{n-2}$, где g — голоморфная функция на S, отличная от нуля в точке $s=0$, h — голоморфная функция на S, нули которой задают дискриминант (без кратностей). Более того, в этом случае формы $\omega_1/d_xF, \dots, \omega_\mu/d_xF$ порождают базисы $(n-1)$-мерных когомологий во всех слоях расслоения Милнора версальной деформации, лежащих над точками базы, достаточно близкими к началу координат $s=0$.

Действительно, кратность пересечения прямой $y=0$ и дискриминанта в точке $s=0$ равна μ. Поэтому ограничение произвольной функции, задающей дискриминант без кратностей, на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка μ. Согласно теореме 2, частное функции $\det^2$ и $(n-2)$-й степени функции, задающей дискриминант, обратимо в начале координат на S. Второе утверждение следствия очевидно.

Замечание. Существование набора форм $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, для которого ограничение функции $\det^2$ на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$, доказано в п. 34.1.Д.

Следствие 2 теоремы 2. *Пусть $\omega_1, \dots, \omega_\mu, \omega$ — голоморфные дифференциальные n-формы на X. Предположим, что ограничение функции*

$$\det{}^2 \colon s \mapsto \det{}^2 \left(\int_{\delta_j(s)} \omega_l / d_x F \right), \quad j, l = 1, \dots, \mu,$$

на прямую $y=0$ имеет в начале координат нуль порядка $\mu(n-2)$.

Тогда в окрестности начала координат на S существуют и единственны голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, обладающие

следующим свойством:

$$\int_{\delta(s)} \omega/d_x F = \sum_j p_j(s) \int_{\delta(s)} \omega_j/d_x F$$

для любого непрерывного семейства δ *целочисленных* $(n-1)$*-мерных гомологий в слоях расслоения Милнора версальной деформации.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 2 теоремы 1.

Б. Каждый коэффициент разложения в ряд интеграла формы по классам семейства исчезающих гомологий зависит только от конечной струи формы и зависит от этой струи голоморфно. Точнее, справедлива следующая лемма.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — функция, голоморфная в начале координат и имеющая в начале координат конечнократную критическую точку, $\omega = g\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ — дифференциальная n-форма, голоморфная в начале координат, $\delta(t) \in H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$ — непрерывно зависящий от параметра класс гомологий слоя X_t расслоения Милнора критической точки 0 функции f. Согласно теореме 32.8, в каждом секторе малой окрестности точки $t = 0$ имеется разложение в ряд

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k,\alpha} a_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k, \tag{7}$$

где числа α зависят только от f и не зависят от ω, δ.

Лемма 3. *Для любых* k, α *коэффициент* $a_{k,\alpha}$ *зависит только от конечной струи функции* g *в точке* $0 \in \mathbb{C}^n$ *и зависит от этой струи голоморфно.*

Следствие. *Каждый коэффициент ряда Лорана в точке* $t = 0$ *функции* $\det^2$, *определенной в теореме* 1, *зависит только от конечных струй форм* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ *в точке* $0 \in \mathbb{C}^n$ *и зависит от этих струй голоморфно.*

Доказательство леммы. Обозначим через J_j идеал в $\mathbb{C}\langle\langle x_1, \ldots, x_n\rangle\rangle$, порожденный функциями $\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n$. Пусть N — натуральное число. Для доказательства первого утверждения леммы достаточно доказать, что при $g \in (J_f)^{2N}$ в ряде (7) все показатели α больше $N-1$. Здесь $(J_f)^{2N}$ — идеал, порожденный $2N$-кратными произведениями элементов из J_f. Действительно, идеал J_f содержит некоторую степень максимального идеала (в силу конечнократности критической точки). Поэтому идеал $(J_f)^{2N}$ тоже содержит некоторую степень максимального идеала. Для любой функции g из этой степени максимального идеала все значения α в ряде (7) больше $N-1$.

Докажем, что для $g \in (J_f)^{2N}$ в ряде (7) все значения α больше $N-1$. Доказательство проведем по индукции. При $N=0$ утверждение справедливо (теорема 32.8). Пусть $g = \sum h_j \partial f/\partial x_j$, где $h_j \in (J_f)^{2N-1}$. Тогда, согласно формуле (3) на с. 528 имеем

$$\frac{d}{dt}\int_{\delta(t)} \omega/df = \int_{\delta(t)} \sum (-1)^{j+1} \partial h_j/\partial x_j \, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n/df,$$

где $\partial h_j/\partial x_j \in (J_f)^{2N-2}$. По индуктивному предположению разложение в ряд интеграла в правой части начинается со степеней больших чем $N-2$. Следовательно, ряд интеграла формы ω/df начинается со степеней больших чем $N-1$.

Вторая часть леммы легко следует из очевидного утверждения: если задана мероморфная функция, голоморфно зависящая от параметров, то коэффициенты ее ряда Лорана голоморфно зависят от параметров (ср. с доказательством теоремы 32.2).

В. Начало доказательства теоремы 1. Первое и второе утверждения теоремы — следствия леммы 1 и теоремы 2. Согласно следствию леммы 3, для доказательства третьего утверждения теоремы 1 достаточно доказать существование хотя бы одного набора форм, для которого функция $\det^2$ имеет в начале координат нуль, порядок которого не больше чем $\mu(n-2)$. Доказательство существования выводится из следствия 2 леммы 33.6, см. п. 34.1.Д. Сначала докажем вспомогательное утверждение.

Г. Критическая точка кратности μ встречается в версальной деформации критической точки функции $x_1^N + \ldots + x_n^N$ при $N \geqslant \mu + 2$. Точнее, справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть функция* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *голоморфна в начале координат и имеет в начале координат критическую точку кратности* μ. *Тогда для любого* $N \geqslant \mu + 2$ *существует многочлен*

$$P(x_1, \ldots, x_n, \delta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = Q(x_1, \ldots, x_n, \delta) + \sum_{j=1}^{n} (1+\varepsilon_j) x_j^N,$$

обладающий следующими свойствами.

1) *При фиксированных* $\delta \neq 0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ *функция* $P\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *и функция* f *эквивалентны в окрестности точки* 0.

2) $Q(x_1, \ldots, x_n, 0) \equiv 0$.

3) *Существуют сколь угодно малые по модулю числа* $\delta, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, *при которых гиперповерхность* $\{x \in \mathbb{C}^n\colon P(x, \delta, \varepsilon) = 0\}$ *неособа вне начала координат.*

Следствие. *Рассмотрим версальную деформацию* $\boldsymbol{F}$ *ростка функции* $x_1^N + \ldots + x_n^N$ *в начале координат. Обозначим через* Λ *ро-*

сток множества всех значений параметров деформации, при которых $\boldsymbol{F}$ *имеет единственную критическую точку с нулевым критическим значением, причем эквивалентную критической точке* 0 *функции* f. *Тогда при* $N \geqslant \mu + 2$ *множество* Λ *не пусто.*

Следствие справедливо, поскольку деформация, указанная в лемме 4, может быть индуцирована из версальной деформации.

Доказательство леммы. В качестве Q возьмем многочлен $f_{N+1}(\delta x_1, \ldots, \delta x_n)$, где $f_{N+1}(x_1, \ldots, x_n)$ — многочлен Тейлора степени $N+1$ функции f в начале координат. По теореме о конечной определенности (см. ч. I, § 6) функция в окрестности критической точки кратности μ эквивалентна своему многочлену Тейлора степени $\mu + 1$. Поэтому справедлив п. 1) леммы. Пункт 2) доказывается аналогично лемме 28.1.

Д. Существует хотя бы один набор форм, для которого функция $\det^2$, определенная в теореме 1, имеет в начале координат нуль, порядок которого не больше чем $\mu(n-2)$. Такой набор предъявлен для критической точки вида $x_1^N + \ldots + x_n^N$ в п. 33.3.В (см. следствие 2 леммы 33.6). Произвольная конечнократная критическая точка встречается в версальной деформации критической точки вида $x_1^N + \ldots + x_n^N$. Поэтому слои расслоения Милнора произвольной критической точки вложены в слои расслоения Милнора версальной деформации суммы степеней. Это вложение индуцирует мономорфное вложение исчезающих гомологий. Формы набора, предъявленного для суммы степеней, можно интегрировать по классам гомологий, исчезающих в исследуемой конечнократной критической точке. Мы докажем, что искомым набором форм для исследуемой критической точки может служить часть набора, предъявленного для суммы степеней.

Более подробно, пусть $N \geqslant \mu + 2$. Рассмотрим версальную деформацию $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ ростка в начале координат функции $x_1^N + \ldots + x_n^N$. Рассмотрим специализацию $G\colon X \to S$ развертки версальной деформации и соответствующее расслоение Милнора $G\colon X' \to S'$.

Обозначим через J множество мультииндексов $j = (j_1, \ldots, j_n)$, где $1 \leqslant j_1, \ldots, j_n \leqslant N$. Число этих мультииндексов равно числу Милнора μ' критической точки функции $x_1^N + \ldots + x_n^N\colon \mu' = (N-1)^n$. Рассмотрим на X голоморфные дифференциальные n-формы ω_j, $j \in J$, где $\omega_j = x_1^{j_1 - 1} \ldots x_n^{j_n - 1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Предположим, что в слоях расслоения Милнора $G\colon X' \to S'$ задан непрерывно зависящий от точки базы базис $\delta_1(s), \ldots, \delta_{\mu'}(s)$ $(n-1)$-мерных целочисленных гомологий, где $s \in S'$. Рассмотрим на S' функцию

$$\det{}^2\colon s \mapsto \det{}^2 \left(\int_{\delta_l(s)} \omega_j / d_x F \right).$$

Согласно теореме 2, эта функция однозначна, голоморфна и является мероморфной функцией на $S = S' \cup \Sigma$. Согласно следствию 2 леммы 33.6 и следствию 1 теоремы 2, функция $\det^2$ может быть представлена в виде $\det^2 = gh^{n-2}$, где g — голоморфная функция на S, отличная от нуля в точке $s = 0$, h — голоморфная функция на S, нули которой задают дискриминант (без кратностей).

Пространство S (база специализации) — это произведение шаров $B_\eta{}^1 \times \times B_\sigma^k$ (координаты на B_η^1, B_σ^k обозначаются, соответственно, через u, y). Обозначим через Λ множество тех $y \in B_\sigma^k$, для которых функция $F(\cdot, y)$ имеет на множестве $X \cap (\mathbb{C}^n \times y)$ единственную критическую точку с нулевым критическим значением, причем эквивалентную критической точке функции f (F — это представитель на X ростка $\boldsymbol{F}$). Согласно лемме 4 множество Λ не пусто.

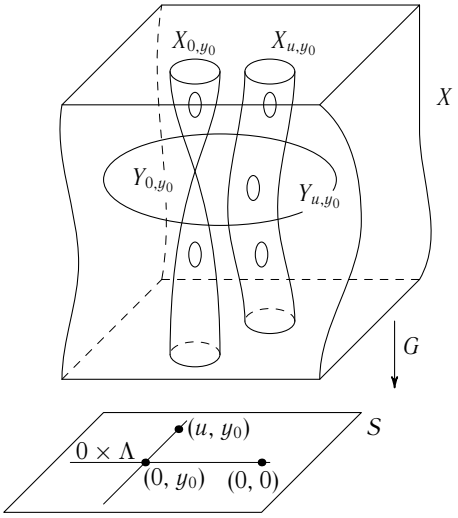


Рис. 143

Пусть $y_0 \in \Lambda$. Обозначим через (x^0, y_0) критическую точку функции $F(\cdot, y_0)$ с нулевым критическим значением. Для фиксированного $\rho' > 0$ обозначим через $Y_{(u,y_0)}$ подмножество всех точек слоя $X_{(u,y_0)}$ специализации, удаленных от (x^0, y_0) на расстояние, меньшее чем ρ', см. рис. 143; ср. с рис. 138 на с. 516. Если число ρ' достаточно мало и число $\eta' > 0$ достаточно мало по сравнению с ρ', то совокупность $\bigcup\limits_u Y_{(u,y_0)}$, где $u \neq 0$, $|u| < \eta'$, вместе с естественной проекцией $Y_{(u,y_0)} \mapsto (u, y_0)$ образует расслоение Милнора критической точки (x^0, y_0) функции $G(\cdot, y_0)$: $\mathbb{C}^n \times y_0 \to \mathbb{C} \times y_0$. Слой $Y_{(u,y_0)}$ этого расслоения гомотопически эквивалентен букету μ сфер размерности $n-1$. Вложение $Y_{(u,y_0)} \hookrightarrow X_{(u,y_0)}$ индуцирует мономорфизм $(n-1)$-мерных гомологий согласно теореме 24.1.

Над прямой $y = y_0$ в окрестности $(0, y_0)$ линейно над $\mathbb{R}$ изменим одновременно все базисы $\delta_1(s), \ldots, \delta_{\mu'}(s)$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) первые μ элементов базисов нового семейства исчезали при $(u, y_0) \mapsto \mapsto (0, y_0)$ (т. е. являлись базисами $(n-1)$-мерных гомологий слоев $Y_{(u,y_0)}$ расслоения Милнора критической точки (x_0, y_0) функции $G(\cdot, y_0)$);

2) последние $\mu' - \mu$ элементов базисов нового семейства принадлежали корневому подпространству с собственным числом 1 оператора монодромии, порожденного обходом вокруг точки $(0, y_0)$ по прямой $y = y_0$.

Такой базис существует, поскольку подпространство $H_{n-1}(Y_{(u,y_0)}) \subset \subset H_{n-1}(X_{(u,y_0)})$ инвариантно относительно указанного оператора монодромии и действие этого оператора монодромии на факторпространстве тривиально (действительно,

$$H_{n-1}(X_{(u,y_0)})/H_{n-1}(Y_{(u,y_0)}) \cong H_{n-1}(X_{(0,y_0)})).$$

Рассмотрим ограничение функций $\det^2$ на прямую $y = y_0$. После изменения базиса функция $\det^2$ умножится на число, равное определителю замены базиса. Ограничение функции $\det^2$ имеет при $u = 0$ нуль порядка $\mu(n-2)$. Действительно, критическая точка (x_0, y_0) функции $F(\cdot, y_0)$ при малой деформации распадается на μ невырожденных критических точек и в каждой неособой точке дискриминанта функция $\det^2$ имеет нуль порядка $n-2$.

Наша задача состоит в доказательстве существования у матрицы $\left(\int_{\delta_l(u,y_0)} \omega_j/d_xF\right)$, $l, j \in J$, минора размера μ, расположенного в первых μ строках и имеющего при $u = 0$ нуль, порядок которого не больше чем $\mu(n-2)/2$ (в первых μ строках расположены интегралы по первым μ элементам базиса гомологий).

Существование такого минора вытекает из следующих двух замечаний:

1) $\det = \sum_I \Delta^I \bar{\Delta}^I$, где $I \subset J$ — подмножество из μ элементов, Δ^I — минор размера μ, расположенный в первых μ строках и в столбцах с номерами из I, $\bar{\Delta}^I$ — алгебраическое дополнение минора Δ^I;

2) для любого I минор $\bar{\Delta}^I$ разлагается в ряд по степеням параметра u и степеням логарифма параметра u, причем в этом ряде все степени параметра неотрицательны.

Первое замечание — это теорема о разложении определителя по минорам из первых μ строк. Второе замечание следует из теоремы 32.6 и формулы (3) на с. 528 в силу выбора последних $\mu' - \mu$ элементов базиса гомологий.

Теорема 1 доказана.

34.2. Интеграл — решение обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения с регулярной особой точкой.

А. Интегралы одной формы.

Теорема 3. *Пусть функция* $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *голоморфна в начале координат и имеет в начале координат конечнократную критическую точку. Пусть дифференциальная* n*-форма* ω *задана в окрестности начала координат в* $\mathbb{C}^n$ *и голоморфна. Тогда в*

достаточно малой проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ *существуют и единственны голоморфные функции* $p_1, \ldots, p_l$, *для которых обыкновенное дифференциальное уравнение*

$$I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots + p_l I = 0 \tag{8}$$

обладает следующим свойством: *все его решения составляют линейные комбинации многозначных голоморфных функций вида*

$$I(t) = \int_{\delta(t)} \omega/df, \tag{9}$$

где δ — *произвольное непрерывное семейство целочисленных* $(n-1)$*-мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки* 0 *функции* f.

Определение. Уравнение (8) называется *уравнением Пикара—Фукса* формы ω.

Пример. Пусть f — квазиоднородный многочлен типа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ веса 1. Пусть ω — квазиоднородная полиномиальная дифференциальная n-форма типа $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ веса r. Это означает, что относительно растяжений $g_\lambda\colon (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (\lambda^{\alpha_1} x_1, \ldots, \lambda^{\alpha_n} x_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, многочлен и форма обладают следующими свойствами: $f \circ g_\lambda = \lambda f$, $g_\lambda^* \omega = \lambda^r \omega$. Предположим, что функция f имеет изолированную критическую точку в начале координат и что найдется хотя бы один класс гомологий, исчезающих в критической точке многочлена f, по которому интеграл формы ω отличен от нуля. Тогда $dI/dt = (r-1)I/t$ — уравнение Пикара—Фукса формы ω. В частности, если $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$, то $dI/dt = (n/2-1)I/t$ — уравнение Пикара—Фукса формы $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Действительно, $g_\lambda^*(\omega/df) = \lambda^{r-1}\omega/df$. Растяжения g_λ индуцируют изоморфизм гомологий слоев расслоения Милнора. Поэтому все интегралы формы ω/df имеют вид $\mathrm{const} \cdot t^{r-1}$.

Замечание. Можно показать (используя следствие 1 теоремы о детерминанте), что порядок уравнения Пикара—Фукса достаточно общей формы равен кратности критической точки.

Доказательство теоремы. Пусть $\delta_1(t), \ldots, \delta_\mu(t)$ — непрерывно зависящий от t базис целочисленных $(n-1)$-мерных гомологий в слое расслоения Милнора критической точки функции f. Рассмотрим многозначную вектор-функцию $I(t) = \left(\int_{\delta_1(t)} \omega/df, \ldots, \int_{\delta_\mu(t)} \omega/df\right)$. Для любого натурального числа k обозначим через $L_k(t) \subset \mathbb{C}^\mu$ подпространство, порожденное векторами $I(t), I^{(1)}(t), \ldots, I^{(k)}(t)$. Подпространство $L_k(t)$ зависит от выбора аргумента числа t. Однако его размерность не зависит от выбора аргумента числа t (при изменении аргумента все векторы умножаются на оператор монодромии). Для всех чисел t с достаточно малым модулем размер-

ности подпространств $L_k(t)$ равны. Действительно, размерность подпространства — это размер максимального отличного от нуля минора матрицы, составленной из координат векторов, порождающих подпространство. Согласно теореме 32.8, миноры матрицы, составленной из координат векторов $I, \ldots, I^{(k)}$, разлагаются в ряды в окрестности точки $t = 0$. Поэтому если минор не равен нулю тождественно, то он не обращается в нуль в достаточно малой проколотой окрестности точки $t = 0$. Пусть теперь l — наименьшее целое число, для которого вектор $I^{(l)}(t)$ является линейной комбинацией векторов $I(t)$, $I^{(1)}(t)$, $\ldots$, $I^{(l-1)}(t)$ (для всех t с достаточно малым модулем). Имеем

$$I^{(l)}(t) + p_1(t)I^{(l-1)}(t) + \ldots + p_l(t)I(t) = 0, \tag{10}$$

где $p_1, \ldots, p_l$ — голоморфные функции в проколотой окрестности нуля. Эти функции однозначны, поскольку при изменении аргумента числа t функция I и все ее производные умножаются на оператор монодромии. По построению, каждая координата вектор-функции I является решением уравнения (10), и линейные комбинации координат порождают l-мерное пространство решений. Теорема доказана.

Следствие. *Порядок дифференциального уравнения* (8) *не больше кратности критической точки* 0 *функции* f.

Определение. Пусть $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots + p_l I = 0$ — дифференциальное уравнение, коэффициенты которого определены в проколотой окрестности точки $t = 0$ и голоморфны. Точка $t = 0$ называется *особой точкой* уравнения, если хотя бы один из коэффициентов не продолжается голоморфно в точку $t = 0$. Точка $t = 0$ называется *регулярной особой точкой*, если точка $t = 0$ особая и коэффициенты уравнения представимы в виде $p_j = P_j/t^j$, $j = 1, \ldots, l$, где функции $P_1, \ldots, P_l$ голоморфны в точке $t = 0$.

Пример. Пусть функция f и форма ω те же, что и в предыдущем примере. Уравнение Пикара—Фукса формы ω имеет при $t = 0$ неособую точку, если $r = 1$, и регулярную особую точку, если $r \neq 1$.

Теорема 4 (см. [142]). *Для того чтобы особая точка* $t = 0$ *была регулярной особой точкой дифференциального уравнения* $I^{(l)} + p_1 I^{(l-1)} + \ldots + p_l I = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы произвольное решение уравнения в произвольном секторе* $a < \arg t < b$ *при* $t \to 0$ *росло не быстрее, чем степенным образом*: $I(t) = o(t^{-N})$ *для некоторого* N.

Следствие. *Для уравнения Пикара—Фукса голоморфной дифференциальной формы* (см. (8)) *точка* $t = 0$ *либо неособая, либо регулярная особая.*

Действительно, см. теорему 32.7.

Идея доказательства достаточности. Индукция по l. При $l = 1$ теорема справедлива, поскольку $I = \text{const} \cdot e^{-\int p_1\,dt}$. Пусть достаточность доказана для $l = m$, докажем достаточность для $l = m + 1$. Во-первых, исходное уравнение имеет решение вида $I_0(t) = t^\alpha \varphi(t)$, где $\alpha \in \mathbb{C}$, φ — функция, голоморфная при $t = 0$. Действительно, если $I_1, \ldots, I_{m+1}$ — фундаментальная система решений, то в качестве I_0 можно взять собственный вектор $\sum c_j I_j$ преобразования монодромии решений (α и собственное число λ связаны соотношением $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$). Во-вторых, для любого j функция $t^j I_0^{(j)}/I_0$ голоморфна. В-третьих, замена $I = I_0 \int J\,dt$ сводит уравнение к линейному однородному уравнению порядка m. Коэффициенты нового уравнения явно вычисляются через коэффициенты исходного уравнения и выражения вида $I_0^{(j)}/I_0$. По предположению индукции новое уравнение имеет регулярную особую точку. Возвращаясь к исходному уравнению и используя явные формулы для коэффициентов, получаем регулярность его особой точки.

Идея доказательства необходимости. Уравнение заменой $y_1 = I$, $y_2 = tI^{(1)}, \ldots, y_l = t^{l-1}I^{(l-1)}$ сводится к системе линейных однородных уравнений первого порядка $dy/dt = Ay$, в которой матрица A имеет при $t = 0$ полюс первого порядка. Теперь необходимость следует из обсуждаемой ниже теоремы 6.

Уравнение Пикара—Фукса описывает интегралы одной формы. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений, описывающую интегралы форм, порождающих базис в исчезающих когомологиях. Такая система содержит информацию не только о формах, но и о критической точке функции.

Б. Интегралы форм, порождающих базис в исчезающих когомологиях. Пусть функция $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфна в точке $0 \in \mathbb{C}^n$ и имеет в ней критическую точку кратности μ. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы, заданные в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$ и составляющие тривиализацию для критической точки 0 функции f (см. с. 538).

Теорема 5. *В достаточно малой проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ существует и единственна $\mu \times \mu$-матрица A голоморфных функций, для которой система обыкновенных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A_k^j I^k, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{11}$$

обладает следующим свойством: все решения системы составляют линейные комбинации вектор-функций вида

$$I(t) = \left(\int_{\delta(t)} \omega_1/df, \ldots, \int_{\delta(t)} \omega_\mu/df \right), \tag{12}$$

где δ *— произвольное непрерывное семейство целочисленных* $(n-1)$*-мерных гомологий в слоях расслоения Милнора критической точки* 0 *функции* f.

Определение. Система (11) называется *уравнением Пикара—Фукса тривиализации* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание. Коэффициенты матрицы A мероморфны в точке $t = 0$ в силу теоремы 32.8.

Пример уравнения Пикара — Фукса тривиализации. Пусть $f = x_1^{\mu+1} + \ldots + x_n^{\mu+1}$. Пусть ω_j, $j \in J$, — набор форм, определенных перед леммой 33.6 (на с. 535). Эти формы составляют тривиализацию для критической точки функции f (следствие 2 леммы 33.6). Уравнением Пикара—Фукса этой тривиализации является система

$$\frac{dI^j}{dt} = \frac{j_1 + \ldots + j_n}{(\mu+1)-1} \cdot \frac{I^j}{t}, \quad j \in J.$$

В. Решетка в пространстве решений. В линейном пространстве решений уравнения Пикара—Фукса тривиализации выделена μ-мерная целочисленная решетка: решение принадлежит этой решетке, если оно имеет вид (12), т. е. если его координаты — это интегралы по классам непрерывного семейства целочисленных гомологий. Эта решетка обладает следующими двумя свойствами.

1. Базис над $\mathbb{Z}$ решетки является базисом над $\mathbb{C}$ μ-мерного комплексного пространства всех решений системы.

2. Рассмотрим оператор монодромии решений, т. е. линейный оператор в пространстве решений, порожденный аналитическим продолжением решений вдоль пути, обходящего точку $t = 0$ один раз «против часовой стрелки». Тогда как сам оператор монодромии, так и обратный к нему сохраняют решетку.

Обозначим через V пространство решений, через $V_\mathbb{Z}$ — решетку, через M — оператор монодромии. Тогда свойства 1, 2 записываются в виде

$$V = V_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{C}, \quad M(V_\mathbb{Z}) = M^{-1}(V_\mathbb{Z}) = V_\mathbb{Z}.$$

Свойство 1 соответствует утверждению о том, что естественный образ группы $H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$ в $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ образует μ-мерную целочисленную решетку, базис которой над $\mathbb{Z}$ является базисом над $\mathbb{C}$ в $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ (здесь X_t — слой расслоения Милнора критической точки 0 функции f). Свойство 2 соответствует утверждению о том, что оператор монодромии, действующий на $H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, сохраняет образ группы $H_{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$.

Определим вещественное подпространство в пространстве решений как вещественное векторное пространство, порожденное решеткой: $V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Пространство V всех решений системы является комплексификацией вещественного подпространства: $V = V_{\mathbb{R}} \oplus iV_{\mathbb{R}}$, $i^2 = -1$. Это разложение определяет в V операцию комплексного сопряжения.

З а м е ч а н и е. Сопоставление асимптотик решений и операции комплексного сопряжения приводит к понятию смешанной структуры Ходжа критической точки голоморфной функции (см. ниже § 35, 36).

Структура, аналогичная решетке, имеется в пространстве решений уравнения Пикара—Фукса голоморфной дифференциальной n-формы (см. (8)). А именно, в линейном пространстве его решений выделен модуль над $\mathbb{Z}$ с μ образующими: решение принадлежит модулю, если оно имеет вид (9). И в этом случае оператор монодромии и обратный к нему сохраняют модуль.

Г. И з м е н е н и е с и с т е м ы у р а в н е н и й п р и и з м е н е н и и т р и в и а л и з а ц и и. Выясним, что происходит с системой уравнений (11) при изменении тривиализации. Пусть $\omega'_1, \ldots, \omega'_\mu$ — новая тривиализация. Положим

$$I'^j_l(t) = \int_{\delta_l(t)} \omega'_j/dt, \quad j, l = 1, \ldots, \mu.$$

По определению тривиализации для любого t из достаточно малой проколотой окрестности точки $t = 0$ существует и единственна обратимая $\mu \times \mu$-матрица $Q(t)$, для которой

$$I^j(t) = \sum_r Q^j_r(t) I'^r(t), \quad j = 1, \ldots, \mu.$$

Коэффициенты матрицы Q (как ранее коэффициенты матрицы A) — однозначные голоморфные функции, определенные в проколотой окрестности точки $t = 0$. Коэффициенты матрицы Q мероморфны при $t = 0$ в силу теоремы 32.8. Новая система уравнений имеет вид

$$\frac{dI'}{dt} = \left(-Q^{-1}\frac{dQ}{dt} + Q^{-1}AQ\right)I'.$$

Решения старой системы связаны с решениями новой системы мероморфным преобразованием

$$I = QI'. \tag{13}$$

Это преобразование переводит решетку в пространстве решений новой системы в решетку в пространстве решений старой системы. Операторы монодромии в пространствах решений перестановочны с этим преобразованием.

Лемма 5. *Если формы* $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ *составляют базисную тривиализацию* (см. с. 538), *то коэффициенты матрицы* Q *голоморфны при* $t = 0$.

Доказательство. См. свойство II тривиализации на с. 538.

Следствие. *Если и формы* $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, *и формы* $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ *составляют базисные тривиализации*, *то коэффициенты матрицы* Q *голоморфны при* $t = 0$ *и матрица* $Q(0)$ *обратима*.

Таким образом, уравнения Пикара—Фукса двух базисных тривиализаций переводятся друг в друга голоморфным обратимым преобразованием (13) искомых функций. Это преобразование сохраняет решетки в пространствах решений этих уравнений.

Докажем, что, обратно, всякая голоморфная обратимая при $t = 0$ замена неизвестных функций в уравнении Пикара—Фукса базисной тривиализации может быть индуцирована переходом к новой базисной тривиализации.

Лемма 6. *Пусть формы* $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ *составляют базисную тривиализацию* (см. с. 538). *Пусть* Q *— обратимая* $\mu \times \mu$*-матрица голоморфных функций*, *заданных на окрестности точки* $0 \in \mathbb{C}$. *Тогда существуют формы* $\omega_1, \dots, \omega_\mu$, *которые составляют базисную тривиализацию и для которых переход* (13) *от уравнения Пикара—Фукса тривиализации* $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ *к уравнению Пикара—Фукса тривиализации* $\omega'_1, \dots, \omega'_\mu$ *задается матрицей* Q.

Доказательство. В качестве искомых форм можно взять формы $\omega_j = \sum\limits_r Q(f)^j_r \omega'_r$, $j = 1, \dots, \mu$, где $Q(f)$ — матричная функция в окрестности начала координат в $\mathbb{C}^n$, индуцированная из матричной функции Q отображением $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.

Д. Определение особенности Пикара — Фукса конечнократной критической точки. Пусть A — $\mu \times \mu$-матрица голоморфных функций, заданных в проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum_{k=1}^{\mu} A^j_k I^k, \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{14}$$

Предположим, что в μ-мерном пространстве решений этой системы выделена μ-мерная целочисленная решетка, базис которой является базисом на $\mathbb{C}$ всего пространства решений (т. е. если V — пространство решений, $V_\mathbb{Z} \subset V$ — решетка, то $V = V_\mathbb{Z} \times_\mathbb{Z} \mathbb{C}$). Рассмотрим оператор M монодромии решений (т. е. линейный оператор в пространстве решений, порожденный аналитическим продолжением решений вдоль пути, обходящего точку $t = 0$ один раз «против часовой стрелки»). Предположим, что

оператор монодромии и обратный к нему сохраняют решетку (т. е. $M(V_{\mathbb{Z}}) = M^{-1}(V_{\mathbb{Z}}) = V_{\mathbb{Z}}$). В этом случае систему (14) назовем *оснащенной*, а решетку в пространстве решений назовем *оснащением* системы.

Примеры оснащенных систем доставляют уравнения Пикара—Фукса тривиализаций (см. (11)), оснащения этих систем задают решения вида (12).

З а м е ч а н и е. Система дифференциальных уравнений может быть оснащена тогда и только тогда, когда в пространстве ее решений существует базис, в котором оператор монодромии и обратный к нему целочисленны.

Рассмотрим две оснащенные системы из μ уравнений. Их матрицы, пространства решений, оснащения обозначим, соответственно, через A, V, $V_{\mathbb{Z}}$, A', V', $V'_{\mathbb{Z}}$. Эти системы назовем *эквивалентными*, если в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$ существует обратимая $\mu \times \mu$-матрица Q голоморфных функций, для которой замена неизвестных функций $I^j(t) = \sum\limits_r Q^j_r(t) I'^r(t)$, $j = 1, \ldots, \mu$, переводит первую систему во вторую, при этом сохраняя оснащения, т. е. $A' = -Q^{-1}\dfrac{dQ}{dt} + Q^{-1}AQ$, $V_{\mathbb{Z}} = QV'_{\mathbb{Z}}$. Класс эквивалентности системы назовем *особенностью* оснащенной системы дифференциальных уравнений.

Согласно леммам 5, 6 уравнения Пикара—Фукса базисных тривиализаций составляют в точности один класс эквивалентности. Этот класс эквивалентности назовем *особенностью Пикара—Фукса критической точки* 0 голоморфной функции f.

П р о б л е м а. *Описать особенность Пикара—Фукса критической точки.*

Например, указать нормальную форму особенности. Указать, какие особенности оснащенных систем могут быть особенностями Пикара—Фукса критических точек.

Разумные вопросы об особенностях Пикара—Фукса критических точек, вероятно, имеют разумные ответы. Например, особенность Пикара—Фукса имеет диагонального представителя (т. е. представителя вида $dI^j/dt = a_j(t)I^j$, $j = 1, \ldots, \mu$) тогда и только тогда, когда критическая точка голоморфно эквивалентна критической точке квазиоднородной функции. (Доказательство: особенность Пикара—Фукса критической точки квазиоднородной функции имеет диагонального представителя согласно [461] или [389, пример (6.7)], обратное утверждение несложно выводится из [434] (ср. с [56]).)

Г и п о т е з а. *Особенности Пикара—Фукса конечнократных критических точек разные у голоморфно неэквивалентных критических точек, по крайней мере у близких.*

Эта гипотеза является аналогом теоремы Торелли в алгебраической геометрии (см. [341], [248]).

В качестве обстоятельства, стимулирующего изучение проблемы и подкрепляющего гипотезу, отметим, что особенность Пикара—Фукса критической точки определяет структуру Ходжа критической точки, см. далее п. 35.2.

Е. Уравнение Пикара— Фукса тривиализации имеет регулярную особую точку. Напомним классическую теорему из теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

Теорема 6 (см. [142]). *Пусть A — $\mu \times \mu$-матрица голоморфных функций в проколотой окрестности точки $0 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим систему из μ линейных однородных дифференциальных уравнений*

$$\frac{dI}{dt} = AI, \quad I(t) \in \mathbb{C}^{\mu}. \tag{15}$$

Тогда следующие свойства системы уравнений эквивалентны.

1) *Пусть $I = (I^1, \dots, I^{\mu})$ — произвольное решение системы уравнений. Тогда в произвольном секторе $a < \arg t < b$ при $t \to 0$ каждая координата решения растет не быстрее чем степенным образом: $I^j(t) = o(t^{-N})$ для некоторого числа N.*

2) *Существует обратимая $\mu \times \mu$-матрица Q голоморфных функций в проколотой окрестности точки $t = 0$, мероморфных в точке $t = 0$, для которой подстановка $I = QI'$ преобразует исходную систему уравнений в систему уравнений с простым полюсом в точке $t = 0$, т. е. матричная функция $Q^{-1}AQ - Q^{-1}dQ/dt$ имеет в точке $t = 0$ полюс порядка не выше первого.*

Определение. Точка $t = 0$ называется *особой точкой* системы уравнений (15), если хотя бы одна из координат матрицы A не продолжается голоморфно в точку $t = 0$. Особая точка системы уравнений (15) называется *регулярной*, если система обладает свойствами 1, 2, указанными в теореме 6.

Уравнение Пикара—Фукса тривиализаций имеет в точке $t = 0$ регулярную особую точку или неособую точку согласно теореме 32.7.

Замечание. Точка $t = 0$ является неособой точкой уравнения Пикара—Фукса тривиализаций тогда и только тогда, когда критическая точка 0 функции f невырождена, число переменных функции равно двум, тривиализация является базисной. (Доказательство легко выводится из теоремы 32.8 и теоремы 26.6.)

Идея доказательства теоремы 6. $1 \Rightarrow 2$. Пусть M — преобразование монодромии решений, порожденное обходом вокруг точки $t = 0$ «против часовой стрелки». Пусть $\ln M$ — одно из возможных значений логарифма матрицы M. Пусть B — матрица фундаментальной системы решений уравнения (15). Тогда $P = B \exp(-\ln t \cdot \ln M/(2\pi i))$ — матрица

мероморфных функций. Замена $I = PI'$ приводит уравнение к виду

$$\frac{dI'}{dt} = -\frac{\ln M}{2\pi i t} I'. \tag{16}$$

З а м е ч а н и я. 1. Отметим, что $\exp(-\ln t \ln M(2\pi i))$ — матрица фундаментальной системы решений уравнения (16). Поэтому решения уравнения (15) разлагаются в ряды вида $\sum a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k$ (при наличии свойства, указанного в п. 1) теоремы); ср. с доказательством теоремы 32.2.

2. Произвольная система уравнений (15) заменой переменных $I = PI'$ приводится к виду (16). Однако P не всегда будет мероморфной матрицей.

$2 \Rightarrow 1$. Поскольку матрица A имеет полюс первого порядка, $\frac{d\|B\|}{dr} \leqslant \leqslant \frac{\text{const}}{r}\|B\|$, где $r = |t|$. Поэтому $\|B\| < B_0 r^{-\text{const}}$. Подробнее см. в [210].

34.3. Связность Гаусса—Манина. В этом пункте обсуждается геометрическая интерпретация систем дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют интегралы голоморфных форм по классам непрерывных семейств целочисленных исчезающих гомологий.

С произвольным локально тривиальным расслоением π ассоциировано комплексное векторное расслоение k-мерных (ко)гомологий его слоев. В этом векторном расслоении определена естественная операция переноса слоев над кривыми в базе (поскольку (ко)гомологии близких слоев исходного расслоения канонически изоморфны). Операция переноса называется *связностью Гаусса—Манина* в расслоении (ко)гомологий.

Многозначным *ковариантно постоянным* сечением расслоения (ко)гомологий называется многозначное сечение (т. е. сечение расслоения (ко)гомологий, поднятого на универсальную накрывающую базы), значения которого инвариантны относительно операции переноса. Ковариантно постоянные сечения составляют первый важный класс сечений расслоения (ко)гомологий.

Предположим теперь, что расслоение π комплексно-аналитическое. Рассмотрим на пространстве расслоения голоморфную дифференциальную k-форму, ограничения которой на слои замкнуты. Форма определяет (однозначное) сечение расслоения k-мерных когомологий: точке базы соотносится класс когомологий ограничения формы на слой, лежащий над точкой. Полученные таким геометрическим образом сечения образуют второй важный класс сечений расслоения когомологий (класс *геометрических сечений*, точное определение см. в п. 34.3.Б). Расслоения k-мерных гомологий и k-мерных когомологий естественным образом сопряжены. Имея ковариантно постоянное сечение расслоения k-мерных гомологий и геометрическое сечение расслоения k-мерных когомологий и вычисляя поточечно значения одного сечения на значениях другого, получим многозначную функ-

цию на базе. Значения этой функции — не что иное, как интегралы формы, задающей геометрическое сечение, по циклам, представляющим в слоях гомологии, являющиеся значениями ковариантно постоянного сечения. Такие функции на базе расслоения Милнора рассматривались в § 32.

Пусть задан базис геометрических сечений и известно, как переносить когомологии в координатах, задаваемых этим базисом. Предположим, что мы хотим найти координаты ковариантно постоянных сечений. Для их нахождения необходимо решить систему дифференциальных уравнений первого порядка. Эта система дифференциальных уравнений для случая расслоения Милнора критической точки сопряжена с уравнением Пикара—Фукса тривиализации, задаваемой набором форм, определяющих базис геометрических сечений (см. п. 34.2). Теперь обсудим эти факты подробнее.

А. Расслоение (ко)гомологий, ассоциированное с локально тривиальным расслоением. Пусть $\pi\colon X \to B$ — локально тривиальное расслоение (не обязательно векторное). Для любого $k \geqslant 0$ определим комплексные векторные расслоения k-мерных гомологий и k-мерных когомологий слоев расслоения π. Положим $H_k = \bigcup\limits_{b\in B} H_k(X_b, \mathbb{C})$. Обозначим через π_* естественную проекцию $H_k \to B$.

Пусть $U \subset B$ — стягиваемое открытое подмножество. Тогда множество $\pi^{-1}(U)$ гомеоморфно прямому произведению слоя и множества U. Естественное вложение произвольного слоя над U в $\pi^{-1}(U)$ индуцирует изоморфизм (ко)гомологий. Таким образом, определены тривиализации проекции π_* над открытыми стягиваемыми подмножествами базы B. Построенные тривиализации определяют на $\pi_*\colon H_k \to B$ структуру комплексного векторного расслоения. Это расслоение называется *расслоением k-мерных гомологий*, ассоциированным с π.

Аналогично определяется *расслоение k-мерных когомологий*, ассоциированное с расслоением π. Расслоения k-мерных гомологий и k-мерных когомологий естественным образом сопряжены (поскольку сопряжены k-мерные гомологии и k-мерные когомологии).

Замечание. Функции перехода построенных тривиализации локально постоянны.

В расслоении (ко)гомологий определена естественная операция параллельного переноса слоев над кривыми в базе. (Если задана кривая в базе, то индуцированное ею из π расслоение над отрезком тривиально, поэтому канонически изоморфны (ко)гомологии слоев над начальной и конечной точками кривой.) Операция параллельного переноса обладает следующими свойствами.

1. Отображение слоя над начальной точкой пути в слой над конечной точкой пути — линейный изоморфизм.

2. Отображение не зависит от выбора кривой в классе гомотопных кривых с закрепленными концами.

Операция переноса (ко)гомологий называется *связностью Гаусса—Манина* в расслоении (ко)гомологий.

Операции переноса в расслоении гомологий и расслоении когомологий согласованы — перенос перестановочен с сопряжением.

Сечение расслоения (ко)гомологий над открытым подмножеством базы называется *ковариантно постоянным*, если его значения инвариантны относительно параллельных переносов вдоль любых кривых, лежащих в этом открытом множестве.

Если база B локально односвязна (например, многообразие), то любой вектор произвольного слоя расслоения (ко)гомологий можно, и притом единственным образом, распространить до ковариантно постоянного сечения над достаточно малой окрестностью его проекции в базу (для этого вектор надо параллельно перенести в близкие слои). Дальнейшее распространение этого ковариантно постоянного сечения приводит к многозначному ковариантно постоянному сечению над всей базой, т. е. к ковариантно постоянному сечению расслоения (ко)гомологий, поднятого на универсальную накрывающую базы.

В каждом слое расслоения (ко)гомологий имеются дополнительные структуры: вещественное подпространство и в нем целочисленная решетка. Вещественное подпространство — это естественный образ в (ко)гомологиях слоя расслоения π с комплексными коэффициентами (ко)гомологий с вещественными коэффициентами; целочисленная решетка в вещественном подпространстве — это естественный образ группы (ко)гомологий слоя с целыми коэффициентами. Слой расслоения (ко)гомологий является комплексификацией своего вещественного подпространства, решетка порождает вещественное подпространство (с помощью сложения и умножения на вещественные числа). Вещественное подпространство и целочисленная решетка инвариантны относительно параллельных переносов.

Предположим, что база расслоения π — голоморфное многообразие. Тогда расслоение (ко)гомологий, ассоциированное с π, обладает канонической структурой голоморфного векторного расслоения. Действительно, определим голоморфные сечения расслоения (ко)гомологий как сечения, имеющие голоморфные координаты в произвольном репере расслоения (ко)гомологий, составленном из ковариантно постоянных сечений. Это определение корректно, поскольку функции перехода между реперами, составленными из ковариантно постоянных сечений, локально постоянны.

Замечание. О связности Гаусса—Манина см. в [163], [164], [420].

Б. (Ко)гомологическое расслоение Милнора деформации. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функ-

ции, имеющий критическую точку конечной кратности μ. Пусть $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — деформация ростка. Пусть $G\colon X \to S$ — специализация деформации и $G\colon X' \to S'$ — соответствующее расслоение Милнора (см. с. 517). Расслоение $(n-1)$-мерных (ко)гомологий, ассоциированное с расслоением Милнора, называется *(ко)гомологическим расслоением Милнора* деформации (точнее, специализации деформации). (Ко)гомологическое расслоение Милнора обладает канонической структурой голоморфного векторного расслоения. В (ко)гомологическом расслоении Милнора задана связность Гаусса—Манина.

З а м е ч а н и е. Слой расслоения Милнора имеет гомотопический тип букета $(n-1)$-мерных сфер. Поэтому ассоциированное расслоение n-мерных (ко)гомологий содержательно только при $k = n-1$.

Определим класс геометрических сечений когомологического расслоения Милнора. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X. Для любой точки $b \in S'$ ограничение формы Гельфанда—Лере на слой X_b расслоения Милнора определяет класс когомологий $[\omega/d_xF|_{X_b}] \in \in H^{n-1}(X_b, \mathbb{C})$. Сечение $b \mapsto [\omega/d_xF|_{X_b}]$ когомологического расслоения Милнора называется *геометрическим сечением* формы ω и обозначается через $s[\omega]$.

Пусть δ — многозначное ковариантно постоянное сечение гомологического расслоения Милнора. Рассмотрим на S' многозначную функцию $\langle S[\omega], \delta\rangle$. Согласно нашим определениям, $\langle s[\omega], \delta\rangle = \int_\delta \omega/d_xF$. Такие функции рассматривались в § 32.

Функция $\langle s[\omega], \delta\rangle$ голоморфна согласно теореме 32.5. Поэтому геометрическое сечение голоморфной дифференциальной n-формы является голоморфным сечением когомологического расслоения Милнора.

Совокупность геометрических сечений — модуль над кольцом голоморфных функций на базе S специализации деформации: если $s[\omega]$ — геометрическое сечение, g — голоморфная функция на S, то сечение $gs[\omega]$ является геометрическим сечением формы $s[(g \circ G)\cdot\omega]$.

Согласно теоремам 1, 2, существует набор из μ геометрических сечений, значения которых порождают базисы во всех слоях когомологического расслоения Милнора, лежащих над точками базы, достаточно близкими к началу координат $0 \in S$.

З а м е ч а н и е. Модуль ростков геометрических сечений в начале координат базы S версальной деформации критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ является свободным модулем ранга μ над кольцом ростков голоморфных функций в начале координат базы S. Это нетрудно показать, пользуясь следствиями теоремы 2 и утверждением п. 34.1.Д (см. далее случай тривиальной деформации ростка). Базис модуля задают геометрические сечения форм,

для которых ограничение функции $\det^2$ на ось значений, проходящую через начало координат, имеет в начале координат нуль минимальной кратности; см. следствия теоремы 2.

В. Связность Гаусса — Манина и уравнение Пикара — Фукса тривиализации. Ограничимся далее случаем тривиальной деформации ростка $\boldsymbol{f}$. Рассмотрим специализацию $f\colon X \to S$ ростка и соответствующее расслоение Милнора $f\colon X' \to S'$. Пусть $s_1, \ldots, s_\mu$ — базис над S' голоморфных сечений (ко)гомологического расслоения Милнора.

Лемма 7. *На множестве S' существует и единственна $\mu \times \mu$-матрица B голоморфных функций, для которой система дифференциальных уравнений*

$$\frac{dI^j}{dt} = \sum B^j_k I^k, \quad j = 1, \ldots, \mu, \tag{17}$$

обладает следующим свойством: сечение $\sum I^j s_j$ ковариантно постоянно в связности Гаусса—Манина тогда и только тогда, когда $(I^1, \ldots, I^\mu)$ — решение системы.

Система дифференциальных уравнений (17) называется *уравнением ковариантно постоянных сечений* в репере $s_1, \ldots, s_\mu$.

Доказательство. Множество многозначных ковариантно постоянных сечений (ко)гомологического расслоения Милнора образует μ-мерное комплексное векторное пространство. Разлагая ковариантно постоянные сечения по базису $s_1, \ldots, s_\mu$, получим μ-мерное комплексное векторное пространство голоморфных вектор-функций $(I^1, \ldots, I^\mu)$, инвариантное относительно аналитического продолжения вектор-функций вокруг точки 0. Существование и единственность системы дифференциальных уравнений, решениями которой служат вектор-функции такого пространства, доказываются аналогично теоремам 3, 5.

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы на X, геометрические сечения которых $s_j = s[\omega_j]$, $j = 1, \ldots, \mu$, образуют базис сечений когомологического расслоения Милнора. Набор таких форм в п. 34.1 назван тривиализацией (их геометрические сечения задают тривиализацию когомологического расслоения Милнора).

С таким набором форм связаны две системы дифференциальных уравнений. С одной стороны, это уравнение (17) ковариантно постоянных сечений в репере $s_1, \ldots, s_\mu$, с другой стороны, это уравнение (11) Пикара—Фукса тривиализации.

Лемма 8. *Матрица B уравнения ковариантно постоянных сечений и матрица A уравнения Пикара—Фукса тривиализации связаны соотношением $A + B^* = 0$.*

Следствие. *Пусть* $s^1, \dots, s^\mu$ *— репер гомологического расслоения Милнора, сопряженный к реперу* $s_1, \dots, s_\mu$. *Тогда отображение* $(I^1, \dots, I^\mu) \mapsto \sum I^j s^j$ *задает изоморфизм пространства решений уравнения* (11) *Пикара—Фукса и пространства ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора. При этом изоморфизме решетка в пространстве решений уравнения Пикара—Фукса, выделенная в п.* 34.2.В, *переходит в решетку ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора, образованную сечениями, значения которых принадлежат естественному образу гомологий с целыми коэффициентами.*

Доказательство леммы легко следует из определений.

Лемма 8 и ее следствие дают геометрическую интерпретацию уравнению Пикара—Фукса тривиализации.

Рассмотрим базисную тривиализацию $\omega_1, \dots, \omega_\mu$ (см. с. 538). Согласно свойству II тривиализации (с. 538) для любого геометрического сечения $s[\omega]$ существуют голоморфные функции $p_1, \dots, p_\mu$, заданные в окрестности точки $0 \in S$, для которых $s[\omega] = \sum\limits_j p_j s[\omega_j]$. Следовательно, геометрические сечения базисной тривиализации порождают базис модуля ростков геометрических сечений в точке $0 \in S$ над кольцом ростков голоморфных функций в точке $0 \in S$. Это свойство выделяет базисные тривиализации среди всех тривиализаций (леммы 5, 6).

Таким образом, особенность Пикара—Фукса критической точки (см. п. 34.2.Д) — это класс уравнений ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора в реперах, двойственных к реперам геометрических сечений, порождающих базис модуля ростков геометрических сечений в точке $0 \in S$.

§ 35. Коэффициенты разложений в ряд интегралов, весовая и ходжева фильтрации, спектр критической точки

Рассмотрим интеграл голоморфной дифференциальной формы по классам гомологий непрерывного семейства целочисленных гомологий слоев расслоения Милнора критической точки. Функция, заданная интегралом, разлагается в ряд по степеням параметра и степеням логарифма параметра семейства (§ 32). Каждый коэффициент ряда линейно зависит как от формы, так и от непрерывного семейства целочисленных гомологий. Если форму фиксировать, а непрерывные семейства менять, то каждый коэффициент ряда есть линейная функция на непрерывных семействах. Линейные над $\mathbb{C}$ комбинации непрерывных семейств целочисленных классов гомологий образуют пространство ковариантно постоянных (в связности

Гаусса—Манина) сечений гомологического расслоения Милнора. Таким образом (если форма фиксирована), каждый коэффициент ряда есть линейная функция на пространстве ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора, т. е. ковариантно постоянное сечение когомологического расслоения Милнора.

Другим способом это можно представить себе так. Голоморфной форме соответствует (однозначное) геометрическое сечение когомологического расслоения Милнора. Выберем в когомологическом расслоении ковариантно постоянный репер и разложим геометрическое сечение по этому реперу. Коэффициенты разложения суть многозначные функции. Нетрудно убедиться, что коэффициенты разложения имеют вид $\sum b_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k$. Перегруппировав слагаемые, получим разложение геометрического сечения в ряд по степеням и логарифмам параметра с коэффициентами, являющимися ковариантно постоянными сечениями. Чтобы определить интегралы формы по классам гомологий ковариантно постоянного семейства гомологий, достаточно определить числа, равные значениям коэффициентов ряда на данном ковариантно постоянном сечении гомологического расслоения Милнора.

Итак, геометрическое сечение разлагается в ряд

$$s[\omega] = \sum_{k,\alpha} t^\alpha (\ln t)^k A^\omega_{k,\alpha}/k!, \tag{1}$$

где ω — форма, $A^\omega_{k,\alpha}$ — ковариантно постоянные сечения. Коэффициенты $A^\omega_{k,\alpha}$ полностью определяют когомологические свойства форм ω/df, заданных на слоях расслоения Милнора. Более того, совокупность коэффициентов всех форм содержит информацию о критической точке.

В п. 35.1 доказываются следующие основные свойства коэффициентов.

1. Справедливо равенство $A^\omega_{k,\alpha}(t) = (-\ln M_u/2\pi i)^k A^\omega_{0,\alpha}$, где M_u — унипотентная часть оператора классической монодромии M в когомологиях.

2. Сечение $A^\omega_{k,\alpha}$ принадлежит корневому подпространству оператора M, отвечающему собственному числу $\exp(-2\pi i\alpha)$.

3. Каждое сечение $A^\omega_{k,\alpha}$ голоморфно зависит от формы ω (точнее, от ее конечной струи в исходной критической точке).

Далее определяется *главная часть* формы (геометрического сечения) как сумма слагаемых ряда (1) с фиксированным α, наименьшим из встречающихся в ряде. Это наименьшее α называется *порядком* формы. Формулируются утверждения о вычислении порядка формы.

Пункт 35.2 — основной. В этом пункте из главных частей всех форм строится убывающая фильтрация *) в слоях когомологического расслое-

*) Фильтрация линейного пространства — это упорядоченная последовательность его линейных подпространств.

ния Милнора. Эта фильтрация называется *ходжевой*. Далее по жордановой структуре оператора монодромии строится возрастающая фильтрация в слоях когомологического расслоения Милнора. Она называется *весовой*. Подпространства фильтраций в разных слоях согласованы: они образуют голоморфные подрасслоения когомологического расслоения Милнора. В п. 35.2 сформулирована теорема о смешанной структуре Ходжа: весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа в слоях когомологического расслоения Милнора изолированной критической точки. Обсуждению этой теоремы посвящен § 36.

В п. 35.3 определены численные характеристики весовой и ходжевой фильтраций — *спектральные пары* критической точки. Спектральные пары — это неупорядоченный набор из μ пар чисел, где μ — кратность критической точки. Первое из чисел пары — рациональное число, второе — целое число. Неупорядоченный набор первых чисел пар называется *спектром критической точки*. Числа спектра — это деленные на $2\pi i$ логарифмы собственных чисел оператора монодромии. Выбор ветви логарифма определяется с помощью главных частей голоморфных форм. Вторые числа в спектральных парах — это правильным образом перенормированные жордановы уровни элементов жорданова базиса. Спектр критической точки обладает замечательными свойствами.

1. Сумма всех спектральных чисел равна $\mu(n/2-1)$, где μ — кратность критической точки, n — число переменных.

2. Спектр симметричен относительно точки $n/2-1$.

3. Спектр невырожденной критической точки состоит из одного числа $n/2-1$. Если спектр сосредоточен в точке $n/2-1$, т. е. состоит из нескольких чисел $n/2-1$, то критическая точка невырождена.

4. Спектр не меняется при деформациях критической точки, не меняющих ее кратности.

5. Если $\{\alpha_i\}$, $i=1,\dots,\mu$, — спектр критической точки ростка $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, $\{\beta_j\}$, $j=1,\dots,\eta$, — спектр критической точки ростка $\boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^l,0)\to(\mathbb{C},0)$, то $\{\alpha_i+\beta_j+1\}$, $i=1,\dots,\mu$, $j=1,\dots,\eta$, — спектр критической точки ростка $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^l,0\times 0)\to(\mathbb{C},0)$.

Эти, а также другие свойства спектра обсуждаются в п. 35.3 и в § 36.

35.1. Коэффициенты разложений в ряд.

А. Коэффициенты и оператор монодромии. Рассмотрим росток $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$ голоморфной функции, имеющий критическую точку конечной кратности. Рассмотрим его специализацию $f\colon X\to S$ и соответствующее расслоение Милнора $f\colon X'\to S'$ (см. с. 517). Если ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X и δ — ковариантно

постоянное сечение гомологического расслоения Милнора, то

$$\int_{\delta(t)} \omega/df = \sum_{k,\alpha} a_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k / k!, \tag{2}$$

согласно теореме 32.8. В этой формуле коэффициенты $1/k!$ введены для упрощения дальнейших формул. В ряде (2) числа k, α не зависят от формы и сечения и определяются только оператором монодромии расслоения Милнора. Для фиксированной формы и фиксированных k, α коэффициент $a_{k,\alpha}$ определяет ковариантно постоянное многозначное сечение $A^{\omega}_{k,\alpha}$ когомологического расслоения Милнора формулой $\langle A^{\omega}_{k,\alpha}(t), \delta(t)\rangle = a_{k,\alpha}(\omega, \delta)$. По определению,

$$s[\omega](t) = \sum_{k,\alpha} t^{\alpha} (\ln t)^k A^{\omega}_{k,\alpha}(t)/k!, \tag{3}$$

где $s[\omega]$ — геометрическое сечение, отвечающее форме ω. Ряд (3) сходится в каждом секторе $a < \arg t < b$, если модуль параметра t достаточно мал.

Л е м м а 1. 1) *Имеет место равенство*

$$A^{\omega}_{k,\alpha} = (-\ln(M_u)/2\pi i)^k A^{\omega}_{0,\alpha}, \tag{4}$$

где M_u — унипотентная часть оператора монодромии в $(n-1)$-мерных когомологиях.

2) *Сечение $A^{\omega}_{k,\alpha}$ принадлежит корневому подпространству собственного числа* $\exp(-2\pi i\alpha)$ *оператора монодромии в $(n-1)$-мерных когомологиях.*

З а м е ч а н и е. Оператор монодромии M в когомологиях (или в ковариантно постоянных сечениях когомологического расслоения Милнора) — это оператор монодромии в связности Гаусса—Манина, порожденный обходом вокруг точки $t = 0$ «против часовой стрелки». Если M_{Hom} — оператор монодромии в $(n-1)$-мерных гомологиях, определенный аналогичным образом, то $M^* = M^{-1}_{\mathrm{Hom}}$, где * означает сопряжение.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы вытекает из следующего замечания. Аналитическое продолжение вокруг точки $t = 0$ левой части формулы (2) приводит к интегралу формы ω/df по $M_{\mathrm{Hom}}\delta(t)$. Аналитическое продолжение правой части вокруг точки $t = 0$ состоит в подстановке вместо t выражения $te^{2\pi i}$. Сравнивая два способа продолжения, получаем лемму. Подробнее см. в [57].

С л е д с т в и е л е м м ы. 1) *Геометрическое сечение $s[\omega]$ определяется сечениями $A^{\omega}_{k,\alpha}$ с $k = 0$.*

2) *Если для некоторого α выполняется равенство $A^{\omega}_{0,\alpha} = 0$, то $A^{\omega}_{k,\alpha} = 0$ для всех k.*

3) *Для любого* α *имеет место равенство*

$$t^\alpha(A^\omega_{0,\alpha}(t) + \ldots + (\ln t)^{n-1}A^\omega_{n-1,\alpha}(t)/(n-1)!) = \\ = \exp(\ln t(\alpha\,\mathrm{Id} - \ln(M_u)/2\pi i))A^\omega_{0,\alpha}(t).$$

(Напомним, что размеры жордановых клеток оператора монодромии не больше n, поэтому коэффициенты $A^\omega_{k,\alpha}$ с $k \geqslant n$ равны нулю.)

4) *Сечение, заданное предыдущей формулой, является голоморфным однозначным сечением когомологического расслоения Милнора.*

Л е м м а 2. *Каждое сечение* $A^\omega_{k,\alpha}$ *зависит только от конечной струи формы* ω *в точке* $0 \in \mathbb{C}^n$ *и, более того, зависит от этой струи голоморфно.*

Лемма 2 — следствие леммы 34.3.

Б. Э л е м е н т а р н ы е с е ч е н и я. Пусть A — многозначное ковариантно постоянное сечение когомологического расслоения Милнора, принадлежащее корневому подпространству собственного числа λ оператора монодромии в когомологиях. Пусть α — рациональное число со следующим свойством: $\exp(-2\pi i\alpha) = \lambda$. Определим сечение $s[A, \alpha]$ когомологического расслоения формулой

$$s[A, \alpha] = \exp[\ln t(\alpha\,\mathrm{Id} - \ln(M_u)/2\pi i)]A.$$

Сечение $s[A, \alpha]$ называется *элементарным сечением* порядка α, порожденным сечением A.

Согласно лемме 2, геометрическое сечение является суммой элементарных сечений: $s[\omega] = \sum\limits_\alpha s[A^\omega_{0,\alpha}, \alpha]$.

Л е м м а 3. 1) $s[A, \alpha]$ — *однозначное голоморфное сечение когомологического расслоения.*

2) *Если ковариантно постоянные сечения* $A_1, \ldots, A_l$ *принадлежат корневому подпространству собственного числа* λ *оператора* M *и линейно независимы над* $\mathbb{C}$, *то значения сечений* $s[A_1, \alpha], \ldots, s[A_l, \alpha]$ *линейно независимы в каждой точке базы когомологического расслоения.*

3) $t\nabla_{\partial/\partial t}s[A, \alpha] = \alpha s[A, \alpha] + s[-\ln(M_u)A/2\pi i, \alpha]$, *где* $\nabla_{\partial/\partial t}$ — *дифференцирование в связности Гаусса—Манина, т. е. дифференцирование координат сечения в ковариантно постоянном репере.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункты 1, 3 очевидны. Пункт 2 следует из линейной независимости ковариантно постоянных сечений и невырожденности линейного преобразования $\exp[\ldots]$.

В. П о р я д о к и г л а в н а я ч а с т ь ф о р м ы. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X (пространстве прообраза

специализации ростка $\boldsymbol{f}$). Порядком формы (геометрического сечения, определенного формой) называется наименьшее число α, для которого отличен от нуля коэффициент $A^{\omega}_{0,\alpha}$. Порядок обозначается через $\alpha(\omega)$.

Напомним, что согласно лемме 1, если $A^{\omega}_{0,\alpha}=0$, то $A^{\omega}_{k,\alpha}=0$ для всех k.

Главной частью формы (геометрического сечения, определенного формой) называется однозначное голоморфное сечение $s_{\max}[\omega]$ когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$, заданное формулой

$$s_{\max}[\omega]=t^{\alpha(\omega)}(A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)}+\ldots+(\ln t)^{n-1}A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-1)!).$$

Замечания. 1. Пусть η — голоморфная дифференциальная $(n-1)$-форма на X. Ее ограничения на слои расслоения Милнора определяют геометрическое сечение $s[\eta]$. По построению $s[\eta]=s[df\wedge\eta]$. Это равенство определяет порядок и главную часть формы η и ее геометрического сечения.

2. Если форма определяет нулевое геометрическое сечение, то полагаем ее порядок равным $+\infty$, а ее главную часть равной нулевому сечению когомологического расслоения.

Пример. Пусть f — квазиоднородный многочлен и ω — квазиоднородная форма старшей степени. Тогда интеграл ее формы Гельфанда—Лере по классам гомологий ковариантно постоянного семейства имеет вид $\mathrm{const}\cdot t^{\alpha-1}$, где α — отношение степеней квазиоднородности формы и многочлена. Поэтому главная часть формы равна ее геометрическому сечению, т. е.

$$s[\omega](t)=s_{\max}[\omega](t)=t^{\alpha-1}A^{\omega}_{0,\alpha-1}(t).$$

Сформулируем полезное свойство порядков и главных частей.

Лемма 4 (см. [57]). *Пусть $\omega_1,\ldots,\omega_\mu$ — голоморфные дифференциальные n-формы на X. Пусть $\delta_1,\ldots,\delta_\mu$ — базис ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. Обозначим через* ord *порядок нуля при $t=0$ функции*

$$\det{}^2\colon t\mapsto\det{}^2\left(\int_{\delta_l(t)}\omega_j/df\right),\quad j,l=1,\ldots,\mu.$$

Тогда $\mathrm{ord}/2\geqslant\alpha(\omega_1)+\ldots+\alpha(\omega_\mu)$; *равенство имеет место тогда и только тогда, когда главные части форм $\omega_1,\ldots,\omega_\mu$ — линейно независимые сечения когомологического расслоения Милнора.*

Доказательство очевидно.

Г. Порядок формы и показатель главного члена асимптотики осциллирующего интеграла. Рассмотрим комплексный осциллирующий интеграл с фазой $\boldsymbol{f}$ по допустимой цепи,

сосредоточенной в окрестности критической точки ростка $\boldsymbol{f}$, т. е. интеграл $\int_{[\Gamma]} e^{\tau f}\omega$, где $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X (см. п. 33.1). Согласно теореме 33.1 при $\tau \to +\infty$ интеграл разлагается в ряд $\sum a_{k,\alpha}\tau^\alpha(\ln\tau)^k$. Обозначим через $\beta(\omega, [\Gamma])$ наибольшее значение α, присутствующее в этом ряде, т. е. $\beta(\omega, [\Gamma])$ — показатель главного члена асимптотического ряда.

Лемма 5. *Для любой цепи* $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$ *имеет место неравенство* $\beta(\omega, [\Gamma]) \leqslant -\alpha(\omega) - 1$, *где* $\alpha(\omega)$ — *порядок формы* ω. *Более того, существует цепь* $[\Gamma]$, *для которой* $\beta(\omega, [\Gamma]) = -\alpha(\omega) - 1$.

Доказательство. См. формулы (4)—(6) на с. 528.

Д. Комплексный показатель осцилляции. Обозначим через $\alpha_{\min}$ наименьшее число среди порядков голоморфных n-форм на X. Число $-(1 + \alpha_{\min})$ называется *комплексным показателем осцилляции* критической точки ростка $\boldsymbol{f}$.

Согласно лемме 5, комплексный показатель осцилляции — это наибольшее возможное значение показателя главного члена асимптотики комплексного осциллирующего интеграла с фазой $\boldsymbol{f}$ по допустимой цепи, сосредоточенной в окрестности критической точки ростка $\boldsymbol{f}$.

Пример. Для критических точек функций $x^{\mu+1}$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ комплексный показатель осцилляции равен соответственно $-1/(\mu + 1)$, $-n/2$.

Лемма 6. *Предположим, что росток* $\boldsymbol{f}$, *ограниченный на вещественное подпространство* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, *принимает только вещественные значения. Тогда показатель осцилляции ростка* $\boldsymbol{f}|_{\mathbb{R}^n}$, *определенный в* §28, *не больше комплексного показателя осцилляции ростка* $\boldsymbol{f}$.

Доказательство. Комплексный показатель осцилляции равен наибольшему возможному значению порядка комплексного осциллирующего интеграла с фазой $\boldsymbol{f}$ при всевозможных $[\Gamma]$, ω. Вещественный показатель осцилляции равен наибольшему возможному значению порядка комплексного осциллирующего интеграла с фазой $\boldsymbol{f}$ по вещественному контуру $[\Gamma_{\mathbb{R}}]$ при всевозможных ω (см. теорему 33.3).

Как показывает пример 1 п. 31.1, комплексный показатель осцилляции может быть строго больше вещественного показателя осцилляции.

Определение. *Комплексным показателем особости* критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ называется число $n/2 - (1 + \alpha_{\min})$, равное увеличенному на $n/2$ комплексному показателю осцилляции.

Пример. Для критических точек функций $x^{\mu+1}$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2$ комплексный показатель особости равен соответственно $1/2 - 1(\mu + 1)$, 0.

У стабильно эквивалентных точек комплексные показатели особости равны, см. п. 35.3.Д. Комплексный показатель особости неотрицателен, см. п. 35.3.В.

Е. Порядок формы и разрешение особенностей критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. Согласно теореме 29.3 показатель осцилляции критической точки вещественно-аналитической функции равен весу разрешения особенностей. Сформулируем комплексно-аналитический аналог этого утверждения.

Пусть $\pi\colon Y \to X$ — разрешение особенностей критической точки 0 функции $f\colon X \to S$ (где $f\colon X \to S$ — специализация ростка $\boldsymbol{f}$). Это означает, что

1) Y — неособое комплексно-аналитическое n-мерное многообразие, π — собственное голоморфное отображение, индуцирующее биголоморфизм между $Y \setminus \pi^{-1}(0)$ и $X \setminus 0$;

2) $(f \circ \pi)^{-1}(0)$ — объединение гладких дивизоров на Y, пересекающихся нормально (см. п. 1—4, определения разрешения в п. 28.3).

Разрешение особенностей существует согласно теореме Хиронаки [220].

Разложим прообраз критической точки функции f в объединение неособых неприводимых $(n-1)$-мерных комплексно-аналитических множеств $E_1, \ldots, E_N$. С каждой из этих неприводимых компонент корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции $f \cdot \pi$ и якобиана отображения π. Эти числа обозначим соответственно через k, m. Число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты* (ср. с п. 29.3.А). Максимум весов компонент $E_1, \ldots, E_N$ называется *весом разрешения особенностей*.

Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X. С формой $\pi^*\omega$ на Y и произвольной компонентой E_i, $i = 1, \ldots, N$, корректно связаны два неотрицательных целых числа: кратности нулей на этой компоненте соответственно функции f и формы $\pi^*\omega$. Эти числа обозначим соответственно через k, m. Число $-(m+1)/k$ называется *весом компоненты относительно* ω. Максимум весов компонент $E_1, \ldots, E_N$ называется *весом разрешения особенностей относительно* ω.

Легко видеть, что вес разрешения особенностей равен весу разрешения особенностей относительно формы $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Теорема 1 (см. [57]). 1) *Комплексный показатель осцилляции критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$ *не больше веса разрешения особенностей критической точки. Комплексный показатель осцилляции равен весу разрешения, если вес разрешения не меньше* -1.

2) *Пусть* ω *— голоморфная дифференциальная* n*-форма на* X. *Пусть* $\alpha(\omega)$ *— ее порядок. Тогда число* $-(\alpha(\omega)+1)$ *не больше веса разрешения особенностей критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$ *относительно* ω. *Более того, число* $-(\alpha(\omega)+1)$ *равно весу относительно* ω, *если вес относительно* ω *не меньше* -1.

З а м е ч а н и е. Эта теорема аналогична теореме 29.5 и является уточнением теоремы 32.7′. Утверждения теоремы, касающиеся неравенств, доказаны также в [77].

Для доказательства неравенств в утверждениях теоремы нужно произвольную форму ω поднять на Y и оценить через числа k, m интегралы ее формы Гельфанда—Лере в окрестности произвольной точки прообраза критической точки ростка $\boldsymbol{f}$.

Для доказательства равенств в утверждениях нужно для произвольной формы ω, относительно которой вес разрешения не меньше -1, предъявить непрерывное семейство исчезающих гомологий, интегралы по которым формы ω/df имеют требуемый порядок. Для этого правильным образом определяется предел формы $\pi^*(\omega/df)$ на каждом некомпактном дивизоре $E_i \setminus \left(\bigcup_{j\neq i} E_j\right) \cap E_i$, $i = 1, \ldots, N$, точнее, на подходящем $k(E_i)$-листном накрытии этого некомпактного дивизора. Предельные формы являются голоморфными $(n-1)$-формами на накрытиях, мероморфными около попарных пересечений дивизоров. Если вес относительно формы ω не меньше -1, то на одном из накрытий полюсы предельной формы имеют не выше чем первый порядок. По теореме П. Делиня (см. [299], [342]) такая форма порождает ненулевой класс когомологий. На указанном накрытии выделяется $(n-1)$-мерный цикл, интеграл по которому предельной формы отличен от нуля. Сдвиги этого цикла с накрытия дивизора в гиперповерхности уровня функции $f \circ \pi$ определяют искомое семейство исчезающих гомологий. См. [57, § 4].

Ж. П о р я д о к ф о р м ы и м н о г о г р а н н и к и Н ь ю т о н а. Переформулируем утверждения теоремы 1 в терминах многогранников Ньютона критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ и формы ω.

Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X. Определим рациональное число, называемое удаленностью многогранников ростка $\boldsymbol{f}$ и формы ω. Запишем ω в виде $g\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, рассмотрим многогранник Ньютона $\Gamma(x_1 \ldots x_n g)$ ряда Тейлора функции g, вычисленного в критической точке ростка $\boldsymbol{f}$ и умноженного на произведение всех компонент. Рассмотрим второй многогранник — многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. *Удаленностью многогранников ростка* $\boldsymbol{f}$ *и формы* ω назовем взятую с минусом величину, обратную к коэффициенту вложения первого многогранника во второй (см. п. 30.3.А, с. 492).

Т е о р е м а 2 (см. [57], а также [77]). *Предположим, что ряд Тейлора критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$ *имеет* $\mathbb{C}$*-невырожденную главную часть.*

1) *Комплексный показатель осцилляции критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$ *не больше удаленности многогранника Ньютона критической*

точки. Комплексный показатель осцилляции равен удаленности, если многогранник Ньютона является далеким (*см. определения в* § 28).

2) *Пусть* ω — *голоморфная дифференциальная* n*-форма на* X, $\alpha(\omega)$ — *ее порядок. Тогда число* $-(\alpha(\omega)+1)$ *не больше удаленности многогранников ростка* $\boldsymbol{f}$ *и формы* ω. *Более того, число* $-(\alpha(\omega)+1)$ *равно удаленности многогранников ростка и формы, если удаленность не меньше* -1.

Теорема 2 выводится из теоремы 1 так же, как теоремы 30.3, 30.4 выводятся из теоремы 29.5.

Пример. Пусть $\boldsymbol{f} = x_1^6 + x_1^3x_2^2 + x_2^6$, $\omega = x_1x_2 \cdot dx_1 \wedge dx_2$. Тогда комплексный показатель осцилляции ростка $\boldsymbol{f}$ равен $-7/18$, порядок формы ω равен $-7/9$.

Имеются комплексно-аналитические аналоги теорем 28.5, 30.5, см. [57].

35.2. Ходжева и весовая фильтрации в слоях когомологического расслоения Милнора критической точки.

А. Ходжева фильтрация. Среди голоморфных сечений когомологического расслоения Милнора выделен класс геометрических сечений. Это — сечения, порожденные формами Гельфанда—Лере голоморфных форм старшей степени. Геометрических сечений много (из них можно составить базис голоморфных сечений когомологического расслоения). Однако геометрические сечения ведут себя очень специальным образом по отношению к ковариантно постоянным сечениям при стремлении точки базы к точке $t = 0$. Характеристикой асимптотических свойств геометрических сечений является определяемое ниже понятие ходжевой фильтрации когомологического расслоения Милнора. Ходжева фильтрация — это убывающая последовательность аналитических подрасслоений когомологического расслоения Милнора. Класс когомологий слоя расслоения Милнора (или, что то же самое, вектор слоя когомологического расслоения Милнора) принадлежит подрасслоению с номером k, если он является значением главной части геометрического сечения порядка не выше чем $n-k-1$.

Теперь уточним определение. Определим последовательность аналитических подрасслоений $F^k(f^*)\colon F^k \to S^l$, $k \in \mathbb{Z}$ когомологического расслоения критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. Эту последовательность назовем *ходжевой фильтрацией* когомологического расслоения Милнора $f^*\colon H^{n-1} \to S'$ критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. Подрасслоения определим, задавая их сечения. Пусть слои F_t^k ($t \in S'$) — это линейные подпространства, порожденные значениями главных частей геометрических сечений, порядок которых не больше чем $n-k-1$. Если таких сечений нет, то полагаем $F_t^k = \{0\}$. Другими словами, F_t^k — это подпространства, натянутые на векторы вида $s_{\max}[\omega](t)$, где ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X, порядок которой не больше чем $n-k-1$. Перечислим очевидные следствия определения.

Л е м м а 7. 1) *Для любых* $k \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ *подпространство* $F_t^k \subset \subset H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ *является прямой суммой своих пересечений с корневыми подпространствами оператора монодромии, т. е. ходжева фильтрация инвариантна относительно полупростой части оператора монодромии.*

2) *Для любого* $k \in \mathbb{Z}$ $F^k(f^*)\colon F^k \to S'$ *— аналитическое подрасслоение когомологического расслоения Милнора.*

3) *Подрасслоения ходжевой фильтрации образуют убывающую фильтрацию, т. е. для любого* k *имеет место включение* $F^{k+1} \subset F^k$.

4) *Если* $k \geqslant n$, *то* $F^k(f^*)$ *— подрасслоение ранга* 0.

5) *Существует значение* k, *для которого* F^k *совпадает с* H^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пункт 1) — следствие п. 2) леммы 1.

Докажем п. 2). Если форму умножить на f, то геометрическое сечение формы умножается на t. Поэтому подпространства F_t^k порождаются главными частями геометрических сечений, веса которых заключены в пределах $n - k - 2 < \alpha(\omega) \leqslant n - k - 1$. Теперь п. 2) — следствие п. 2) леммы 3.

Пункт 3 очевиден. Пункт 4 — следствие теоремы 32.8.

Для доказательства п. 5) нужно предъявить набор форм, у которых главные части образуют базис сечений когомологического расслоения Милнора. Согласно теореме о детерминанте на X существуют голоморфные n-формы $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$, у которых геометрические сечения образуют базис сечений когомологического расслоения. Если главные части этих форм образуют базис сечений, то п. 5) доказан, если не образуют, то формы нужно подправить. Для этого нужно взять подходящую невырожденную $\mu \times \mu$-матрицу Q голоморфных функций на S, отображением f индуцировать матрицу $Q(f)$ голоморфных функций на X и рассмотреть новые формы $\omega_l' = \sum\limits_j Q(f)_l^j \omega_j$, $j = 1, \ldots, \mu$. Существование матрицы, для которой главные части новых форм образуют базис сечений, легко следует из выбора форм $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$; см. [57].

З а м е ч а н и е. Из формулируемой ниже теоремы о смешанной структуре Ходжа (см. также [57]) следует, что F^0 совпадает с H^{n-1}.

П р и м е р 1. Пусть $\boldsymbol{f} = x^{\mu+1}$. Когомологическое расслоение Милнора — это расслоение ранга μ приведенных нульмерных когомологий слоев расслоения Милнора (каждый из которых состоит из $\mu + 1$ точки). Согласно лемме 33.3 $\{0\} = F^1 \subset F^0 = H^0$.

П р и м е р 2. Пусть $\boldsymbol{f} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Когомологическое расслоение Милнора одномерно. Согласно примеру в п. 32.3.Г получаем, что $\{0\} = = F^{[n/2]+1} \subset F^{[n/2]} = H^{n-1}$ и подрасслоение $F^{[n/2]}(f^*)$ порождается главной частью формы $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Б. Весовая фильтрация линейного оператора (см. [338], [342], [449]). С линейным нильпотентным оператором (т. е. с линейным оператором, собственные числа которого равны нулю) связана возрастающая фильтрация в пространстве действия оператора. Ниже приведены три ее эквивалентных определения. Первое из них — наиболее неинвариантное и наиболее понятное. Последнее определение — наиболее распространенное и, вероятно, наименее понятное.

Пусть H — конечномерное векторное пространство, $N\colon H \to H$ — нильпотентный линейный оператор, k — целое число. Определяемая ниже последовательность подпространств

$$\{0\} \subset \ldots \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \ldots \subset H \tag{5}$$

называется *весовой фильтрацией оператора N с центральным индексом k*.

Определение 1. Рассмотрим произвольный жорданов базис оператора N. Каждое подпространство весовой фильтрации порождается определяемым ниже множеством векторов жорданова базиса. Элементы базиса разделим на группы, относя в одну группу векторы одной жордановой клетки. Изобразим одну группу:

$$\square \to \square \to \ldots \to \square;$$

клетки — это векторы группы, стрелки — действие оператора, последний вектор переходит в нуль. Теперь изобразим все группы друг над другом, располагая их симметрично относительно вертикальной оси и оставляя для стрелок пропуски в одну клетку (см. рис. 144). Каждому вектору базиса припишем целое число — расстояние со знаком до оси симметрии (на рис. 144 числа записаны в клетках). Пусть $W_{k+l} \subset H$ — это подпространство, порожденное векторами базиса, номера которых не больше чем l (см. рис. 144).

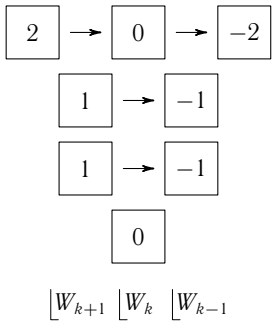


Рис. 144

Определение 2. Пусть $h \in H$. Положим

$$l_+(h) = \min\{l\colon h \in \operatorname{Ker} N^l\}, \quad l_-(h) = \max\{l\colon h \in \operatorname{Im} N^l\}.$$

Определим подпространство W_{k+l} условием

$$h \in W_{k+l} \Leftrightarrow l_+(h) - l_-((h)) \leqslant l + 1.$$

О п р е д е л е н и е - л е м м а 3 (см. [449]). *Существует и единственна фильтрация* (5), *обладающая следующими свойствами.*

а) *Имеет место включение* $N(W_l) \subset W_{l-2}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Положим

$$\operatorname{gr}_l W = W_l / W_{l-1}.$$

Согласно свойству а) *отображение* N *индуцирует отображение* $\operatorname{gr}_l W \to \operatorname{gr}_{l-2} W$.

б) *Отображение* $N^l\colon \operatorname{gr}_{k+l} W \to \operatorname{gr}_{k-l} W$ *— изоморфизм*, $l \in \mathbb{Z}$.

Л е м м а 8 (см. [449]). *Определения* 1—3 *эквивалентны.*

В. В е с о в а я ф и л ь т р а ц и я к о г о м о л о г и ч е с к о г о р а с с л о е н и я М и л н о р а. Определим последовательность аналитических подрасслоений

$$W_l(f^*)\colon W \to S', \quad l \in \mathbb{Z},$$

когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. Эту последовательность назовем *весовой фильтрацией* когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$.

Сначала определим пересечения слоев подрасслоений $\{W_l(f^*)\}$ с корневыми подпространствами оператора монодромии, затем положим слои подрасслоений $\{W_l(f^*)\}$ равными прямой сумме их пересечений с корневыми подпространствами.

Обозначим через $H^{n-1}_\lambda(X_t, \mathbb{C})$ корневое подпространство собственного числа λ оператора монодромии в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. Обозначим через N логарифм унипотентной части оператора монодромии. Оператор N — нильпотентный, коммутирующий с оператором монодромии и, значит, сохраняющий его корневые подпространства.

Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда в качестве весовой фильтрации на $H^{n-1}_\lambda(X_t, \mathbb{C})$ возьмем весовую фильтрацию оператора N с центральным индексом $n-1$. Пусть $\lambda = 1$. Тогда в качестве весовой фильтрации на $H^{n-1}_1(X_t, \mathbb{C})$ возьмем весовую фильтрацию оператора N с центральным индексом n. Положим слой над t расслоения $W_l(f^*)$ равным

$$W_{l,t} = \bigoplus_\lambda W_l(H^{n-1}_\lambda(X_t, \mathbb{C})).$$

Перечислим очевидные следствия определения.

Л е м м а 9. 1) *Весовая фильтрация — возрастающая последовательность аналитических подрасслоений когомологического расслоения Милнора.*

2) *Весовая фильтрация инвариантна относительно связности Гаусса—Манина* (*т. е. ковариантные производные сечений каждого подрасслоения принадлежат тому же подрасслоению*).

3) *Весовая фильтрация инвариантна относительно действия полупростой части оператора монодромии.*

4) *Для любого* $l \in \mathbb{Z}$ *и любой точки* $t \in S'$ *имеет место включение*

$$N(W_{l,t}) \subset W_{l-2,t}.$$

Более того, если $\lambda \neq 1$, *то*

$$N^l\colon \operatorname{gr}_{n-1+l} W(H^{n-1}_\lambda)_t \to \operatorname{gr}_{n-1-l} W(H^{n-1}_\lambda)_t$$

— изоморфизм, а если $\lambda = 1$, *то*

$$N^l\colon \operatorname{gr}_{n+l} W(H^{n-1}_1)_t \to \operatorname{gr}_{n-l} W(H^{n-1}_1)_t$$

— изоморфизм.

Доказательство очевидно.

Сформулируем еще одно свойство весовой фильтрации. Напомним, что в слоях когомологического расслоения Милнора имеется инвариантная относительно связности Гаусса—Манина операция комплексного сопряжения: пространство $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ есть комплексификация естественного образа в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ пространства $H^{n-1}(X_t, \mathbb{R})$. Более того, в слоях имеется инвариантная относительно связности Гаусса—Манина целочисленная структура-решетка в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, являющаяся естественным образом в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ группы $H^{n-1}(X_t, \mathbb{Z})$.

Лемма 10. *Для любого* $l \in \mathbb{Z}$ *слои подрасслоения* $W_l(f^*)$ *инвариантны относительно сопряжения. Более того, в координатах, связанных с базисом целочисленной решетки, слой подрасслоения* $W_l(f^*)$ *может быть задан уравнениями с целыми коэффициентами.*

Доказательство легко следует из определения весовой фильтрации.

Пример 1. Пусть $f = x^{\mu+1}$. Собственные числа оператора монодромии — это $\exp(2\pi ik/(\mu+1))$, $k = 1, \ldots, \mu$. Поэтому

$$\{0\} = W_{-1} \subset W_0 = H^0.$$

Пример 2. Пусть $f = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Тогда $(-1)^n$ — единственное собственное число оператора монодромии. Поэтому

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1} \subset W_{2[n/2]} = H^{n-1}.$$

Пример 3. Предположим, что оператор монодромии в когомологиях, исчезающих в критической точке голоморфной функции n переменных, имеет конечный порядок (например, это так для критической точки (полу)квазиоднородной функции). Тогда

$$\{0\} = W_{n-2} \subset W_{n-1} \subset W_n = H^{n-1},$$

где $W_{n-1} = \bigoplus\limits_{\lambda \neq 1} H^{n-1}_\lambda$.

З а м е ч а н и е 1. Указанная в определении весовой фильтрации зависимость центрального индекса фильтрации от собственного числа оператора монодромии мотивируется формулируемой ниже теоремой о смешанной структуре Ходжа. Центральный индекс выбирается так, чтобы весовая фильтрация вместе с ходжевой фильтрацией составляли смешанную структуру Ходжа.

З а м е ч а н и е 2. Согласно теореме 25.12 размер жордановых клеток оператора монодромии критической точки функции n переменных не больше n. Поэтому a priori

$$\{0\} = W_{-1}(H^{n-1}_{\lambda\neq 1}) \subset W_0(H^{n-1}_{\lambda\neq 1}) \subset \ldots \subset W_{2n-2}(H^{n-1}_{\lambda\neq 1}) = H^{n-1}_{\lambda\neq 1},$$
$$\{0\} = W_0(H^{n-1}_1) \subset W_1(H^{n-1}_1) \subset \ldots \subset W_{2n-1}(H^{n-1}_1) = H^{n-1}_1.$$

Однако, согласно формулируемой ниже теореме о смешанной структуре Ходжа, размер жордановых клеток с собственным числом 1 не больше $n-1$. Поэтому $W_1(H^{n-1}_1) = \{0\}$, $W_{2n-2}(H^{n-1}_1) = H^{n-1}_1$, $W_{2n-2} = H^{n-1}$.

Г. В з а и м н о е р а с п о л о ж е н и е в е с о в о й и х о д ж е в о й ф и л ь т р а ц и й (э л е м е н т а р н ы е с в о й с т в а).

Л е м м а 11. *Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ пересечение пространств F^k, W_l вместе с проекцией на базу образует голоморфное подрасслоение*

$$F^k \cap W_l(f^*) \colon F^k \cap W_l \to S'$$

когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что все слои проекции $F^k \cap W_l \to S'$ имеют равные размерности. Поскольку подрасслоение $F^k(f^*)$ порождается главными частями форм с заданными порядками, достаточно доказать, что значения главной части произвольной формы принадлежат или не принадлежат пространству W_l одновременно для всех точек базы (см. п. 2) леммы 3). Докажем это. Согласно формуле (4) на с. 564 значение главной части $s_{\max}[\omega](t)$ в точке $t \in S'$ принадлежит пространству W_l тогда и только тогда, когда вектор $A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)}(t)$ принадлежит пространству W_l. Этот вектор принадлежит пространству W_l тогда и только тогда, когда сечение $A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)}$ является сечением подрасслоения $W_l(f^*)$, что и требовалось доказать.

Для любого l обозначим через

$$\operatorname{gr}_l W(f^*) \colon \operatorname{gr}_l W \to S'$$

факторрасслоение подрасслоений $W_l(f^*)$, $W_{l-1}(f^*)$; его слои — факторпространства $\operatorname{gr}_l W_t = W_{l,t}/W_{l-1,t}$, где $t \in S'$. Расслоение $\operatorname{gr}_l W(f^*)$ обладает индуцированной связностью Гаусса—Манина в силу п. 2) леммы 9. В слоях расслоения $\operatorname{gr}_l W(f^*)$ заданы вещественная и целочисленная структура

(в силу леммы 10) и действие полупростой части оператора монодромии (в силу п. 3) леммы 9).

Замечание. Действие оператора монодромии в слоях расслоения $\mathrm{gr}_l W(f^*)$ совпадает с действием его полупростой части, см. п. 3), 4) леммы 9.

Следствие леммы 11. *Проекция в* $\mathrm{gr}_l W(f^*)$ *расслоения* $F^k \cap \cap W_l(f^*)$ *определяет подрасслоение*

$$F^k \mathrm{gr}_l W(f^*)\colon F^k \mathrm{gr}_l W \to S',$$

его слои — факторпространства $F^k \mathrm{gr}_l W_t = (F^k_t \cap W_{l,t} + W_{l-1,t})/W_{l-1,t}$, *где* $t \in S'$.

Подрасслоение $F^k \mathrm{gr}_l W(f^*) \subset \mathrm{gr}_l W(f^*)$ инвариантно относительно действия полупростой части оператора монодромии (леммы 7, 9) и инвариантно относительно связности Гаусса—Манина (п. 3) леммы 3).

Рассмотрим оператор N — логарифм унипотентной части оператора монодромии. Оператор N определяет морфизм расслоений $N\colon \mathrm{gr}_l W \to \mathrm{gr}_{l-2} W$ (т. е. линейное по слоям отображение, перестановочное с проекцией на базу и сохраняющее класс голоморфных сечений).

Лемма 12. *Для любых* $k, l \in \mathbb{Z}$ *имеет место включение*

$$N(F^k \mathrm{gr}_l W) \subset F^{k-1} \mathrm{gr}_{l-2} W.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что если голоморфная дифференциальная n-форма ω обладает следующими свойствами:

а) имеет порядок, не больший чем $n - k - 1$;

б) ее главная часть является сечением подрасслоения $W_l(f^*)$, то проекция сечения $Ns_{\max}[\omega]$ в факторрасслоение $\mathrm{gr}_{l-2} W(f^*)$ является сечением подрасслоения $F^{k-1} \mathrm{gr}_{l-2} W(f^*)$.

Отметим, что согласно лемме 1 имеет место равенство

$$Ns_{\max}[\omega] = -2\pi i t^{\alpha}(A^{\omega}_{1,\alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-2} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-2)!). \qquad (6)$$

Таким образом, достаточно предъявить две формы и их линейную комбинацию, у которой главная часть обладает следующими свойствами:

в) она является сечением подрасслоения $W_{l-2}(f^*)$;

г) ее проекция в $\mathrm{gr}_{l-2} W(f^*)$ пропорциональна проекции сечения $Ns_{\max}[\omega]$;

д) ее проекция в $\mathrm{gr}_{l-2} W(f^*)$ является сечением подрасслоения $F^{k-1} \mathrm{gr}_{l-2} W(f^*)$.

Первая форма — $f\omega$,

$$s_{\max}[f\omega] = t^{\alpha(\omega)+1}(A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)} + \ldots + (\ln t)^{n-1} A^{\omega}_{n-1,\alpha(\omega)}/(n-1)!).$$

Вторая форма — это произвольная форма $\psi = df \wedge \eta$, где $d\eta = \omega$. Согласно формуле (3) на с. 541 имеем

$$s_{\max}[\psi] = \int_0^t s_{\max}[\omega](u)\, du = \\ = t^{\alpha(\omega)+1}(A^{\omega}_{0,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega)+1) - A^{\omega}_{1,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega)+1)^2 + \ldots), \quad (7)$$

где пропущены слагаемые, в которые входят либо $A^{\omega}_{k,\alpha(\omega)}$ с $k \geqslant 2$, либо $(\ln t)^k$ с $k \geqslant 1$. Линейной комбинацией со свойствами в)—д) является форма $f\omega - (\alpha(\omega)+1)\psi$. Действительно,

$$s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega)+1)\psi] = t^{\alpha(\omega)+1}(A^{\omega}_{1,\alpha(\omega)}/(\alpha(\omega)+1) + \ldots), \quad (8)$$

где пропущены слагаемые того же сорта. Согласно лемме 1, справедливы свойства в), г). Поскольку порядок линейной комбинации равен $\alpha(\omega)+1$, справедливо свойство д). Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Как показывают формулы (6), (8), операция перехода от $s_{\max}[\omega]$ к $s_{\max}[f\omega - (\alpha(\omega)+1)\psi]$ очень похожа на применение к $s_{\max}[\omega]$ логарифма унипотентной части оператора монодромии. Кроме того, формы $f\omega$, $f\omega - (\alpha(\omega)+1)\psi$ порождают один и тот же элемент в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, где $\Omega^p(X)$ — голоморфные p-формы на X. Таким образом, формулы (6), (8) показывают аналогию действия в когомологиях логарифма унипотентной части монодромии и действия в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ оператора умножения на f. Подробнее см. в п. 36.3.Д, [56].

Сформулируем теперь теорему о смешанной структуре Ходжа. Обсуждению утверждения теоремы, а также ее следствий, посвящен § 36. Подробное определение смешанной структуры Ходжа см. в п. 36.1.

Т е о р е м а 3 (о смешанной структуре Ходжа; см. [52], [53], [57]). *Весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа в слоях когомологического расслоения Милнора критической точки, т. е. для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ имеет место равенство*

$$\operatorname{gr}_l W_t = F^k \operatorname{gr}_l W_t \oplus \overline{F^{l-k+1} \operatorname{gr}_l W_t}, \quad (9)$$

где $\oplus$ — прямая сумма, черта означает сопряжение.

З а м е ч а н и е. Смешанная структура Ходжа в исчезающих когомологиях определена Стинбринком в [462]. Весовая фильтрация, определенная в п. В, совпадает с весовой фильтрацией Стинбринка. Ходжева фильтрация, определенная в п. А, вообще говоря, отличается от ходжевой фильтрации Стинбринка. Ходжева фильтрация из п. А и ходжева фильтрация Стинбринка совпадают на факторрасслоениях весовой фильтрации. Ходжева фильтрация из п. А и ходжева фильтрация Стинбринка просто выражаются друг через друга: ходжево подрасслоение $F^k(f^*)$ из п. А

порождается главными частями форм порядков, принадлежащих полуинтервалу $(n-k-2, n-k-1]$; если $s_{\max}[\omega]$ — одна такая главная часть, то $(\nabla_{\partial/\partial t})^{n-k-1} s_{\max}[\omega]$ — сечение ходжева подрасслоения $F^k_{St}(f^*)$ Стинбринка. Определение ходжевой фильтрации Стинбринка использует разрешение особенностей критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ и не использует асимптотик интегралов голоморфных форм; подробнее см. в [462], [53], [57], [60].

Доказательство теоремы см. в [53], [57] (схема доказательства изложена в [53], недостающие детали и отдельное доказательство для случая $n=2$ см. в [57]). Доказательство выводится из глубокой и нетривиальной теории деформаций структур Ходжа когомологий компактных неособых кэлеровых многообразий. Эта теория развита Гриффитсом, Шмидом, Делинем (см. [338], [342], [449], [299]). В когомологиях компактного неособого кэлерового многообразия имеется естественная фильтрация — структура Ходжа (см. [206], [231]). Каждому многообразию ставится в соответствие точка в классифицирующем пространстве всех структур Ходжа. Если многообразие голоморфно зависит от параметров, то имеется голоморфное отображение пространства параметров в классифицирующее пространство структур Ходжа (см. [338], [342], [449]). Это отображение называется *отображением периодов*. Отображения периодов обладают очень специальными свойствами, связанными с отрицательной искривленностью классифицирующего пространства структур Ходжа. Если пространство параметров семейства многообразий есть проколотый диск, то, изучая асимптотику отображения периодов при стремлении параметра семейства к отмеченной точке диска, можно получить информацию о том, как вырождаются при этом неособые многообразия семейства (см. [342], [449]). К локальной ситуации, указанной в теореме 3, эта теория применяется следующим образом. В качестве представителя ростка $\boldsymbol{f}$ берется многочлен P, для которого точка 0 — единственная критическая точка с нулевым критическим значением. Рассматриваются компактификации Y_t в $\mathbb{C}P^n$ гиперповерхностей уровня многочлена (t — значение уровня). Можно выбрать многочлен так, чтобы при малых $t \neq 0$ гиперповерхности Y_t были неособы, а гиперповерхность Y_0 имела единственную особую точку в 0. Слой X_t расслоения Милнора критической точки 0 многочлена P является частью гиперповерхности Y_t. Можно выбрать многочлен так, чтобы вложение $X_t \hookrightarrow Y_t$ индуцировало эпиморфизм $H^{n-1}(Y_t) \to H^{n-1}(X_t)$ (для этого надо, чтобы степень многочлена была достаточно велика; см. [446]). Имеется естественное (определенное с точностью до гомотопии) отображение $p\colon Y_t \to Y_0$, при котором слой X_t расслоения Милнора отображается в особую точку, см. рис. 145. Согласно точной последовательности пары $X_t \subset Y_t$

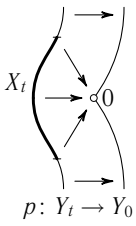


Рис. 145

имеется изоморфизм

$$\pi\colon H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0) \to H^{n-1}(X_t).$$

Из теории деформаций структур Ходжа следует, что на $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ имеются две естественные фильтрации, называемые весовой и ходжевой, которые обладают свойствами, указанными в формуле (9) (см. [449], [288], [446]). Доказывается, что изоморфизм π переводит эти фильтрации в наши весовую и ходжеву фильтрации (точнее, ходжева фильтрация переходит в ходжеву фильтрацию Стинбринка, см. [53]). Это доказывает теорему 3.

З а м е ч а н и е. Объясним, почему в определении весовой фильтрации центральный индекс зависит от собственного числа оператора монодромии.

На пространстве $H^{n-1}(Y_t)$ действует оператор монодромии, индуцированный обходом параметра t вокруг точки $t=0$. По очевидным причинам подпространство $p^*H^{n-1}(Y_0)$ содержится в подпространстве собственных векторов с собственным числом 1. Можно доказать, что $p^*H^{n-1}(Y_0)$ совпадает с этим подпространством. Доказательство выводится из теоремы об инвариантных циклах (см. [288], [460]). Нетрудно также вывести это утверждение непосредственно из основной теоремы Шмида в [449] с помощью теоремы 34.1 о детерминанте (ср. с доказательством леммы 2 в [53]).

Упоминавшаяся ранее весовая фильтрация на $H^{n-1}(Y_t)/p^*H^{n-1}(Y_0)$ индуцируется подходящей фильтрацией на $H^{n-1}(Y_t)$ (см. [446]). Эта фильтрация на $H^{n-1}(Y_t)$ есть весовая фильтрация логарифма унипотентной части оператора монодромии с центральным индексом $n-1$ (она определяется на всех корневых подпространствах одинаково). Поскольку ядро эпиморфизма $H^{n-1}(Y_t) \to H^{n-1}(X_t)$ есть подпространство инвариантных векторов, проекция в $H^{n-1}(Y_t)$ указанной весовой фильтрации на $H^{n-1}(Y_t)$ совпадает с весовой фильтрацией из п. 35.2.

Д. П е р в ы е с л е д с т в и я. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ ходжево подпространство $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ разлагается в прямую сумму своих пересечений с корневыми подпространствами действия оператора монодромии на $\operatorname{gr}_l W_t$: $F^k \operatorname{gr}_l W_t = \bigoplus\limits_{\lambda} F^k \operatorname{gr} W_{t,\lambda}$, где λ — собственные числа оператора монодромии. Оператор монодромии сохраняет целочисленную структуру пространства $\operatorname{gr}_l W_t$, поэтому сопряжение переставляет корневые пространства, отвечающие числам λ, $\bar\lambda$. Таким образом, из (9) получаем следствие 1.

С л е д с т в и е 1. *Для любого собственного числа* λ *имеет место равенство*

$$\operatorname{gr}_l W_{t,\lambda} = F^k \operatorname{gr}_l W_{t,\lambda} \oplus \overline{F^{l-k+1} \operatorname{gr}_l W_{t,\bar\lambda}} \tag{10}$$

С л е д с т в и е 2 (см. [462]). *Размер произвольной жордановой клетки оператора монодромии в когомологиях не больше* n. *Кроме того, размер не больше* $n-1$, *если собственное число клетки равно* 1.

Пример. Если $n = 1$, то все собственные числа оператора монодромии не равны 1 и в пространстве исчезающих когомологий существует базис из собственных векторов оператора монодромии (см. пример 1 на с. 574).

Доказательство следствия 2. Согласно лемме 7 при $k \geqslant n$ пространство $F^k \operatorname{gr}_l W_t$ нульмерно. Согласно формуле (10) нульмерно пространство $\operatorname{gr}_l W_{t,\lambda}$ при $l \geqslant 2n-1$, что и требовалось доказать (см. п. В).

Следствие 3. *Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$, $t \in S'$ оператор N индуцирует изоморфизмы*

$$N^l\colon F^k \operatorname{gr}_{n-1+l} W_{t,\lambda} \xrightarrow{\sim} F_{k-l} \operatorname{gr}_{n-1-l} W_{t,\lambda}, \tag{11}$$

если $\lambda \neq 1$,

$$N^l\colon f^k \operatorname{gr}_{n+l} W_{t,\lambda=1} \xrightarrow{\sim} F^{k-l} \operatorname{gr}_{n-l} W_{t,\lambda=1}, \tag{12}$$

если $\lambda = 1$.

Доказательство следствия 3. Согласно лемме 12 образы левых частей включены в правые. Согласно п. 4) леммы 9 и формуле (10) образы левых частей не могут быть меньше правых.

35.3. Спектр критической точки.

А. Спектральные пары критической точки. Определим неупорядоченный набор из μ пар чисел, который характеризует взаимное расположение весовой и ходжевой фильтраций.

Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ рассмотрим факторрасслоение

$$\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*) = F^k \operatorname{gr}_l W(f^*)/F^{k+1} \operatorname{gr}_l W(f*).$$

Согласно лемме 7 на этом расслоении индуцируется действие полупростой части оператора монодромии. Зафиксируем слой этого расслоения и каждому собственному числу λ действия в слое полупростой части поставим в соответствие пару

$$\begin{aligned} &(n-1-l_k(\lambda), l), \quad \text{если} \quad \lambda \neq 1, \\ &(n-1-l_k(\lambda), l-1), \quad \text{если} \quad \lambda = 1; \end{aligned} \tag{13}$$

здесь число $l_k(\lambda)$ определяется следующими условиями: $\exp(2\pi i l_k(\lambda)) = \lambda$, $k \leqslant \operatorname{Re} l_k(\lambda) < k+1$. Построенный таким образом (для всех k, l, λ) неупорядоченный набор из μ пар чисел называется *набором спектральных пар критической точки* ростка $\boldsymbol{f}$. Неупорядоченный набор из μ первых чисел пар называется *набором спектральных чисел* (или *спектром*) *критической точки*. Ясно, что эти наборы не зависят от выбора слоя расслоений $\{\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)\}$.

Объясним, почему собственному числу λ ставится в соответствие число $n-1-l_k(\lambda)$, являющееся одним из значений деленного на $2\pi i$ лога-

рифма числа $1/\lambda$. Согласно определению ходжевой фильтрации, фактор-расслоение $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ порождается значениями главных частей форм, порядок которых не больше чем $n-1-k$. Пусть ω — форма, порядок которой принадлежит $(n-2-k, n-1-k]$ и главная часть которой порождает ненулевое сечение в $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$. Согласно лемме 1, это ненулевое сечение принадлежит корневому подпространству собственного числа $\lambda = \exp(-2\pi i\alpha(\omega))$ действия полупростой части оператора монодромии. Выражая порядок формы ω через λ, получим $n-1-l_k(\lambda) = n-1-k-l_0(\lambda) = \alpha(\omega)$. Таким образом, $n-1-l_k(\lambda)$ — это наименьшее число α, для которого существуют формы порядка α, главные части которых порождают в $F^k(f^*)/F^{k+1}(f^*)$ корневое подпространство собственного числа λ действия полупростой части оператора монодромии. При этом число α входит в спектр ровно столько раз, какова разность размерностей пространств главных частей форм порядка α и форм порядка $\alpha-1$. Вторые числа спектральных пар указывают, на каких уровнях весовой фильтрации возникают новые главные части. Например, при $k = n-1$ имеет место равенство

$$F^{n-1}(f^*)/F^n(f^*) = F^{n-1}(f^*)$$

и числа $n-1-l_{n-1}(\lambda)$ принадлежат полуинтервалу $(-1, 0]$. Если $\omega_1, \ldots, \omega_s$ — голоморфные дифференциальные n-формы неположительных порядков, главные части которых образуют базис сечений расслоения $F^{n-1}(f^*)$, то порядки этих форм составляют часть спектра, принадлежащую полуинтервалу $(-1, 0]$.

Обратим внимание на зависимость от собственного числа λ второго числа в характеристической паре; см. (13). В определении весовой фильтрации на корневом подпространстве с собственным числом 1 индексы были увеличены на 1, чтобы выполнялось утверждение теоремы 3. Теперь в (13) индекс уменьшен на 1. Это уменьшение мотивируется простотой формулировок утверждений именно о таких числах. Например, см. указанные ниже симметрии б), в) спектральных пар.

В заключение приведем еще одно определение спектра.

Л е м м а 13 (см. [60], [57]). *Пусть* $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — *голоморфные дифференциальные* n*-формы на* X. *Предположим, что*

1) *сумма порядков этих форм равна* $\mu(n/2-1)$,

2) *функция*

$$\det{}^2 \colon t \mapsto \det{}^2\left(\int_{\delta_l(t)} \omega_j/df\right), \quad j, l = 1, \ldots, \mu,$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ — *базис ковариантно постоянных сечений гомологического расслоения Милнора, имеет при* $t=0$ *нуль порядка* $\mu(n-1)$.

Тогда порядки $\alpha(\omega_1), \ldots, \alpha(\omega_\mu)$ *этих форм являются спектром критической точки* 0 *ростка* $\boldsymbol{f}$.

Доказательство легко вытекает из сравнения леммы 4, теоремы 34.1 о детерминанте и определений ходжевой фильтрации и спектра.

Следствие. *Сумма спектральных чисел критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$ *равна* $\mu(n/2-1)$.

Отметим, что доказательство этого утверждения не использует теорему о смешанной структуре Ходжа.

Замечание. Из определения спектральных пар легко следует, что сумма всех вторых чисел спектральных пар равна $\mu(n-1)$.

Б. Числа Ходжа. Аналогично спектральным парам определяются числа Ходжа $h^{k,m}$, $h^{k,m}_\lambda$. Через $h^{k,m}_\lambda$ обозначается размерность корневого подпространства собственного числа λ действия в слое расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_{k+m} W(f^*)$ полупростой части оператора монодромии. Через $h^{k,m}$ обозначается ранг расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_{k+m} W(f^*)$. По определению $h^{k,m} = \sum_\lambda h^{k,m}_\lambda$. Спектральные пары и числа Ходжа $h^{k,m}_\lambda$ взаимно определяют друг друга.

Пример 1. Пусть $\boldsymbol{f} = x^{\mu+1}$. Тогда $h^{0,0} = \mu$; $h^{0,0}_\lambda = 1$ для $\lambda = \exp(2\pi ik/(\mu+1))$, $k = 1, \ldots, \mu$; спектральные пары — $(-k/(\mu+1), 0)$, где $k = 1, \ldots, \mu$.

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{f} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Тогда $h^{[n/2],[n/2]} = h^{[n/2],[n/2]}_{(-1)^n} = 1$; спектральная пара — $(n/2-1, n-1)$.

В. Симметрии.

Лемма 14 (см. [462], [57]). *Для любых* k, m *имеют место симметрии*

а) $h^{k,m}_\lambda = h^{m,k}_{\bar\lambda}$,

б) $h^{k,m}_\lambda = h^{n-1-m,n-1-k}_\lambda$, *если* $\lambda \neq 1$,

в) $h^{k,m}_1 = h^{n-m,n-k}_1$.

Вывод леммы 14 из теоремы 3 см. в п. 36.2.

Переформулируем эти симметрии в терминах спектральных пар:

а) число пар, равных (α, l), равно числу пар, равных $(2n-3-l-\alpha, l)$ (ср. с примерами);

б), в) число пар, равных (α, l), равно числу пар, равных $(\alpha + l - n + 1, 2n-2-l)$.

Соотношения а)—в) описывают симметрии размерностей пространств главных частей форм фиксированного порядка, являющихся сечениями фиксированного расслоения весовой фильтрации (точнее, описывают симметрии приращений размерностей).

Комбинируя а) с б), в), получаем следующий результат.

С л е д с т в и е. 1) *Спектр критической точки расположен симметрично относительно точки* $n/2-1$.

2) *Комплексный показатель особости* (см. п. 35.1.Д) *неотрицателен*.

Действительно, комплексный показатель особости равен $n/2-(1+\alpha_{\min})$, где $\alpha_{\min}$ — наименьшее спектральное число.

Отметим следующее свойство спектра. *Если спектр критической точки сосредоточен в точке* $n/2-1$, *т. е. состоит из нескольких чисел* $n/2-1$, *то критическая точка невырождена и спектр состоит из одного числа* $n/2-1$. Это свойство — прямое следствие теоремы 25.7 о следе оператора монодромии.

Г. С п е к т р и м н о г о г р а н н и к Н ь ю т о н а. Спектр можно выразить через геометрию многогранника Ньютона ряда Тейлора критической точки, если главная часть ряда Тейлора $\mathbb{C}$-невырождена. В работах [462], [21], [126] приведены формулы, выражающие спектр через распределения точек с целыми координатами в конусах, связанных с гранями многогранника Ньютона. Эти формулы доказаны для $n=2$ в [462] и для случая «простого» многогранника Ньютона в [126]. В общем случае имеется метод вычисления спектра через многогранник Ньютона, не доведенный до формул ([126]).

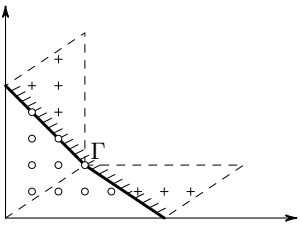


Рис. 146

Выразим спектр через многогранник Ньютона для $n=2$. Для $n=2$ спектр симметричен относительно точки 0 и лежит в интервале $(-1, 1)$, поэтому достаточно описать часть спектра, принадлежащую полуинтервалу $(-1, 0]$. Согласно п. А для описания этой части спектра достаточно указать формы неотрицательных порядков, главные части которых порождают базис сечений расслоения $F^1(f^*)$, и вычислить порядки указанных форм.

Рассмотрим многогранник Ньютона ряда Тейлора критической точки ростка $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Назовем одночлен x^m *поддиаграммным*, если вектор $m+(1, \ldots, 1)$ не принадлежит внутренности многогранника Ньютона.

П р и м е р. Пусть $f = x_1^6 + x_1^3x_2^2 + x_2^5$. На рис. 146 изображены векторы $m+(1, 1)$ для поддиаграммных одночленов x^m.

Каждому поддиаграммному одночлену поставим в соответствие форму $x^m\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, которую назовем *поддиаграммной*. Предположим, что главная часть ряда Тейлора критической точки ростка f $\mathbb{C}$-невырождена. Тогда порядок каждой поддиаграммной формы неположителен и вычисля-

ется по степени одночлена с помощью теоремы 2 (порядок равен удаленности многогранников ростка $\boldsymbol{f}$ и формы).

В примере порядки поддиаграммных форм равны $-3/5$, $-5/12$, $-3/12$, $-1/12$, $-2/5$, $-1/5$, $-1/5$, 0, 0, 0.

Теорема 4 (см. [57]). *Если главная часть ряда Тейлора критической точки ростка* $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *$\mathbb{C}$-невырождена, то главные части поддиаграммных форм образуют базис сечений расслоения* $F^{n-1}(f^*)$.

Следствие. *Порядки поддиаграммных форм составляют часть спектра критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$, *принадлежащую полуинтервалу* $(-1, 0]$. *В частности, для* $n = 2$ *порядки поддиаграммных форм полностью определяют спектр.*

Замечания. 1. При $n = 2$ для описания спектра удобно отмечать не только показатели поддиаграммных одночленов, но и показатели симметричных наддиаграммных одночленов. Удаленности пар многогранников ростка $\boldsymbol{f}$ (с $\mathbb{C}$-невырожденной главной частью) и выделенных одночленов составляют спектр критической точки ростка $\boldsymbol{f}$. См. рис. 147, где изображены сдвинутые на $(1, 1)$ показатели поддиаграммных и выделенных наддиаграммных одночленов для $\boldsymbol{f} = x_2^9 + x_1^4x_2^4 + x_1^6x_2^2 + x_1^{12}$.

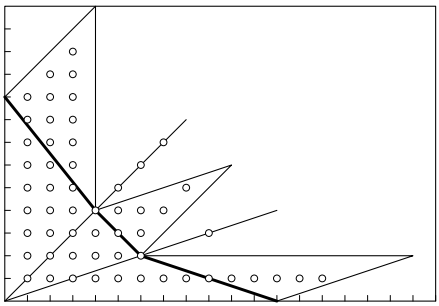


Рис. 147

2. Следствие теоремы 4 достаточно для описания спектра и при $n = 3$. Часть спектра, принадлежащая полуинтервалу $(-1, 0]$, дается следствием. Часть спектра, принадлежащая полуинтервалу $[1, 2)$, определяется симметрией спектра относительно числа $1/2$. Оставшаяся часть спектра принадлежит интервалу $(0, 1)$. Каждое спектральное число — это деленный на $2\pi i$ логарифм собственного числа оператора монодромии. Чтобы описать часть спектра из интервала $(0, 1)$, нужно вычислить по многограннику Ньютона все собственные числа оператора монодромии (см. теорему 3.13 из § 3, [481]), отметить те собственные числа, для которых соответствующие спектральные числа принадлежат объединению $(-1, 0] \cup [1, 2)$, и взять такие ветви логарифмов оставшихся собственных чисел, которые после деления на $2\pi i$ попадают в $(0, 1)$. Эти деленные на $2\pi i$ логарифмы образуют оставшуюся часть спектра.

Доказательство теоремы. Главные части поддиаграммных форм линейно независимы, поскольку по теореме 2 порядок линейной

комбинации поддиаграммных форм равен минимуму порядков слагаемых. Главные части поддиаграммных форм образуют базис сечений расслоения $F^{n-1}(f^*)$, поскольку по теореме 2 порядок наддиаграммной формы положителен.

Опишем спектр конечнократной критической точки ростка $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ квазиоднородной функции. Пусть росток $\boldsymbol{f}$ имеет тип $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и вес 1. Пусть $\{x^m\colon m \in I\}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Для показателя $m \in I$ положим

$$l(m) = (m_1 + 1)\alpha_1 + \ldots + (m_n + 1)\alpha_n - 1.$$

Теорема 5 ([461], см. также [57]). *Числа $l(m)$, $m \in I$, составляют спектр критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ квазиоднородной функции.*

Согласно [57], спектр критической точки ростка полуквазиоднородной функции совпадает со спектром критической точки ростка соответствующей квазиоднородной функции.

Для полуквазиоднородного ростка легко указать спектральные пары: все вторые числа спектральных пар равны $n - 1$ (см. пример 3 на с. 574).

Для любого ходжева подрасслоения $F^k(f^*)$ можно указать формы, главные части которых порождают базис сечений этого подрасслоения. А именно, одночлену x^m поставим в соответствие форму

$$\omega_m = x^m dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Теорема 6 (см. [461], [57]). *Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток полуквазиоднородной функции. Тогда имеют место следующие утверждения.*

1) *Для любого $m \in I$ порядок формы ω_m равен $l(m)$.*

2) *Для любого $k \in \mathbb{Z}$ главные части форм $\{\omega_m\colon m \in I, l(m) \leqslant n - 1 - k\}$ составляют базис сечений ходжева расслоения $F^k(f^*)$.*

Приведем таблицу спектров простых, уни- и бимодальных критических точек при $n = 3$, составленную В. В. Горюновым [110]. В этой таблице (см. с. 586) для каждой точки указаны числа N, L_r; спектр $\{\alpha_r\}$ задается формулой $\alpha_r = (L_r/N) - 1$. В силу симметрии относительно числа $1/2$ все спектры, кроме спектров точек A_μ, D_μ, $T_{p,q,t}$, выписаны до половины, т. е. при $r \leqslant \mu/2$. Обозначения критических точек см. в ч. I.

Д. Спектр прямой суммы критических точек равен сумме спектров, сдвинутой на 1. Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, $\boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^l, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — ростки голоморфных функций в конечнократных критических точках кратностей μ, η соответственно. Рассмотрим прямую сумму этих ростков $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. Росток $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ имеет в 0×0 критическую точку кратности $\mu \cdot \eta$.

Класс	N	$\{L_r\}$
A_μ	$\mu+1$	$\mu+1+k \quad 1\leqslant k\leqslant\mu$
D_μ	$2\mu-2$	$3\mu-3 \quad 2\mu-1+2k$ $\quad 0\leqslant k\leqslant\mu-2$
P_8	3	3 4 4 4
X_9	4	4 5 5 6
J_{10}	6	6 7 8 8 9
Q_{10}	24	23 29 31 32 35
Q_{11}	18	17 21 23 24 25
Q_{12}	15	14 17 19 20 20 22
S_{11}	16	15 19 20 21 23
S_{12}	13	12 15 16 17 18 19
U_{12}	12	11 14 15 15 17 18
Z_{11}	30	29 35 37 41 45
E_6	12	13 16 17
E_7	18	19 23 25
E_8	30	31 37 41 43
Z_{12}	22	21 25 27 29 31 33
Z_{13}	18	17 20 22 23 25 26
W_{12}	20	19 23 24 27 28 29
W_{13}	16	15 18 19 21 22 23
E_{12}	42	41 47 53 55 59 61
E_{13}	30	29 33 37 39 41 43
E_{14}	24	23 26 29 31 32 34 35
$T_{p,q,t}$	pqt	$pqt \quad 2pqt \quad (p+k_1) \quad qt$ $\quad (q+k_2) \quad pt \quad (t+k_3) \quad pq$ $\quad 0<k_1<p \quad 0<k_2<q \quad 0<k_3<t$

Класс	N	$\{L_r\}$
$J_{3,p}$	$18(p+9)$	$17(p+9) \quad 23(p+9) \quad 25(p+9) \quad 9(2p+17+2k)$ $\quad 1\leqslant k\leqslant(p+10)/2$
$Z_{1,p}$	$14(p+7)$	$13(p+7) \quad 17(p+7) \quad 19(p+7) \quad 21(p+7) \quad 7(2p+13+2k)$ $\quad 1\leqslant k\leqslant(p+7)/2$
$W_{1,p}$	$12(p+6)$	$11(p+6) \quad 14(p+6) \quad 16(p+6) \quad 17(p+6) \quad 6(2p+11+2k)$ $\quad 1\leqslant k\leqslant(p+7)/2$
$W^{\#}_{1,p}$	$12(p+12)$	$11(p+12) \quad 17(p+12) \quad 12(p+12+k) \quad 1\leqslant k\leqslant(p+11)/2$
$Q_{2,p}$	$12(p+6)$	$11(p+6) \quad 15(p+6) \quad 16(p+6) \quad 17(p+6) \quad 6(2p+11+2k)$ $\quad 1\leqslant k\leqslant(p+6)/2$
$S_{1,p}$	$10(p+5)$	$9(p+5) \quad 12(p+5) \quad 13(p+5) \quad 14(p+5) \quad 5(2p+9+2k)$ $\quad 1\leqslant k\leqslant(p+6)/2$
$S^{\#}_{1,p}$	$10(p+10)$	$9(p+10) \quad 13(p+10) \quad 10(p+10+k) \quad 1\leqslant k\leqslant(p+10)/2$
$U_{1,p}$	$9(p+9)$	$8(p+9) \quad 11(p+9) \quad 13(p+9) \quad 9(p+9+k) \quad 1\leqslant k\leqslant(p+8)/2$
Q_{16}	21	19 22 25 26 28 28 29 31
Q_{17}	30	27 31 35 37 39 40 41 43
Q_{18}	48	43 49 55 59 61 64 65 67 71
S_{16}	17	15 18 20 21 22 23 24 25
S_{17}	24	21 25 28 29 31 32 33 35
U_{16}	15	13 16 18 18 19 21 21 22
W_{17}	20	18 21 23 24 26 27 28 29
W_{18}	28	25 29 32 33 36 37 39 40 41
Z_{17}	24	22 25 28 29 31 32 34 35
Z_{18}	34	31 35 39 41 43 45 47 49 51
Z_{19}	54	49 55 61 65 67 71 73 77 79
E_{18}	30	28 31 34 37 38 40 41 43 44
E_{19}	42	39 43 47 51 53 55 57 59 61
E_{20}	66	61 67 73 79 83 85 89 91 95 97

Т е о р е м а 7 (см. [57]). *Если* $\{\alpha_i\}$ *— спектр критической точки ростка* $\boldsymbol{f}$, $\{\beta_j\}$ *— спектр критической точки ростка* $\boldsymbol{g}$, *то* $\{\alpha_i + \beta_j + 1\}$ *— спектр критической точки ростка* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ (*здесь* $i = 1, \ldots, \mu$, $j = 1, \ldots, \eta$).

С л е д с т в и е 1. *Если* $\{\alpha_i\}$ *— спектр критической точки ростка* $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, *то* $\{\alpha_i + 1/2\}$ *— спектр критической точки ростка* $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{z}^2\colon (\mathbb{C}^{n+1}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$.

С л е д с т в и е 2. *Комплексные показатели особости у стабильно эквивалентных критических точек равны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы использует комплексные осциллирующие интегралы с фазами $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$ и теорему Фубини для таких интегралов. Используем обозначения п. 33.3.

В п. 33.3 указано отображение тензорного произведения групп допустимых цепей для критических точек ростков $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ в группу допустимых цепей для критической точки ростка $\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g}$:

$$H_n(X^f, X^{-,f}; \mathbb{C}) \otimes H_l(X^g, X^{-,g}; \mathbb{C}) \to H_{n+l}(X^{f+g}, X^{-,f+g}; \mathbb{C}).$$

Л е м м а 15. *Это отображение — изоморфизм.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим отображение через h. Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_\mu \in H_n(X^f, X^{-,f})$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_\eta \in H_l(X^g, X^{-,g})$ — базисы. Достаточно предъявить на X^{f+g} голоморфные дифференциальные $(n+l)$-формы $\psi_1, \ldots, \psi_{\mu\eta}$ в количестве $\mu \cdot \eta$ штук, для которых $\det\left(\int_{h(\delta_i \otimes \gamma_j)} e^{\tau(f+g)}\psi_s\right) \not\equiv 0$. По теореме о детерминанте существуют n-формы $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ на X^f, для которых $\det\left(\int_{\delta_i} e^{\tau f}\omega_s\right) \not\equiv 0$ (см. лемму 33.2). Аналогично существуют l-формы $\varphi_1, \ldots, \varphi_\eta$ на X^g, для которых $\det\left(\int_{\gamma_j} e^{\tau g}\varphi_s\right) \not\equiv 0$. В качестве форм $\{\psi_s\}$ можно взять формы $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$, см. теорему Фубини 33.4. Лемма доказана.

В п. 33.1 построен изоморфизм $H_{n-1}(X^f_t) \cong (X^f, X^{-,f})$ для любого $t \in S^-$. Согласно лемме 15 этот изоморфизм индуцирует изоморфизм $H_{n-1}(X^f_t) \otimes \otimes H_{l-1}(X^g_t) \cong H_{n+l-1}(X^{f+g}_t)$ для любого $t \in S^-$. Легко видеть, что этот изоморфизм распространяется до изоморфизма гомологических расслоений

$$\boldsymbol{f}_* \otimes \boldsymbol{g}_* \cong (\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})_* \tag{14}$$

(здесь $_*$ означает гомологическое расслоение Милнора). Для этого надо рассматривать не пару X^f, $X^{-,f}$, а пары X^f, $X \cap f^{-1}(\{t \in S\colon \operatorname{Re}(e^{i\varphi}t) < 0\})$; аналогичные изменения нужно внести в пары $(X^g, X^{-,g})$, $(X^{f+g}, X^{-,f+g})$. При указанном изоморфизме расслоений тензорные произведения ковариантно постоянных сечений ковариантно постоянны, т. е. связность Гаусса—Манина в расслоении $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})_*$ изоморфна связности $\nabla^f \otimes \mathrm{id}^g + \mathrm{id}^f \otimes \nabla^g$ — тензорному произведению связностей Гаусса—Манина расслоений $\boldsymbol{f}_*$, $\boldsymbol{g}_*$.

Если ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X^f, φ — голоморфная дифференциальная l-форма на X^g, то $\omega \wedge \varphi$ — голоморфная дифференциальная $(n+l)$-форма в окрестности точки $0 \times 0 \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l$. Лемма 15 позволяет выразить геометрическое сечение формы $\omega \wedge \varphi$ через геометрические сечения форм ω, φ.

Л е м м а 16 (см. [57]). *Если*

$$s[\omega] = \sum t^\alpha (\ln t)^k A^\omega_{k,\alpha}/k!,$$
$$s[\varphi] = \sum t^\beta (\ln t)^s A^\varphi_{s,\beta}/s!,$$

то

$$s[\omega \wedge \varphi] = \sum\sum \frac{\partial^{k+s}}{\partial\alpha^k \partial\beta^s}[t^{\alpha+\beta+1}\mathrm{B}(\alpha+1, \beta+1)]A^\omega_{k,\alpha} \otimes A^\varphi_{s,\beta}/(k!s!),$$

где B — *бета-функция*.

З а м е ч а н и е. Сечения $A^\omega_{k,\alpha} \otimes A^\varphi_{s,\beta}$ рассматриваются как сечения расслоения $(f+g)_*$ в силу изоморфизма (14).

Лемма 16 следует из леммы 33.2 и теоремы Фубини.

С л е д с т в и е. *Порядок формы* $\omega \wedge \varphi$ *равен увеличенной на* 1 *сумме порядков форм* ω *и* φ.

Теперь для доказательства теоремы 7 достаточно воспользоваться леммой 13. А именно, пусть $\omega_1, \ldots, \omega_\mu$ — голоморфные n-формы на X^f, которые вместе с функцией f удовлетворяют условиям леммы 13. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — голоморфные l-формы на X^g, которые вместе с функцией g удовлетворяют условиям леммы 13. Нетрудно убедиться, что формы $\{\omega_i \wedge \varphi_j\}$ вместе с ростком $\boldsymbol{f+g}$ тоже удовлетворяют условиям леммы 13. Следовательно, порядки этих форм (числа $\alpha(\omega_i) + \alpha(\varphi_j) + 1$) составляют спектр критической точки ростка $\boldsymbol{f+g}$.

Аккуратное проведение этих рассуждений позволяет доказать следующее усиление теоремы 7: *если* $\{(\alpha_i, v_i)\}$ — *спектральные пары ростка* $\boldsymbol{f}$, $\{(\beta_j, u_j)\}$ — *спектральные пары ростка* $\boldsymbol{g}$, *то* $\{(\alpha_i+\beta_j+1, v_i+u_j+1)\}$ — *спектральные пары ростка* $\boldsymbol{f+g}$.

В [57] указаны явные формулы, связывающие с помощью операций тензорных произведений и сумм весовые и ходжевы фильтрации когомологических расслоений Милнора критических точек ростков $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f+g}$.

§ 36. Смешанная структура Ходжа изолированной критической точки голоморфной функции

Смешанная структура Ходжа в векторном пространстве — это две фильтрации пространства, удовлетворяющие указанным ниже аксиомам. В пространстве когомологий, исчезающих в критической точке голоморф-

ной функции, имеется естественная смешанная структура Ходжа. Роль упомянутых фильтраций играют весовая и ходжева фильтрации, введенные в § 35. Весовая фильтрация строится по жордановой структуре оператора монодромии и отражает поведение интегралов по исчезающим циклам при аналитическом продолжении интегралов вокруг критического значения параметра. Ходжева фильтрация строится исходя из сравнений скоростей стремления к нулю интегралов по исчезающим циклам при стремлении параметра интегралов к критическому значению. Как известно, в геометрии есть две теории, изучающие функцию в окрестности критической точки: теория Морса и теория Пикара—Лефшеца. Теория Морса исследует перестройку гиперповерхности уровня функции при стремлении уровня к критическому значению. Теория Пикара—Лефшеца исследует преобразование гиперповерхности уровня функции при обходе уровня на комплексной прямой вокруг критического значения. В этом смысле теория смешанных структур Ходжа критических точек является синтезом теории Морса и теории Пикара—Лефшеца. Смешанная структура Ходжа в исчезающих когомологиях играет заметную роль в локальной теории особенностей.

В этом параграфе обсуждается взаимодействие смешанной структуры Ходжа с другими характеристиками критической точки.

36.1. Определение смешанной структуры Ходжа. Смешанная структура Ходжа — это дополнительная структура, имеющаяся в когомологиях комплексного многообразия и индуцированная комплексной структурой многообразия.

Пример. Рассмотрим комплексную неособую проективную кривую $X \subset \mathbb{C}P^2$ рода 1, в аффинной карте заданную уравнением $y^2 = P_3(x)$, где P_3 — многочлен третьей степени без кратных корней.

Рассмотрим ее когомологии с комплексными коэффициентами. Размерности пространств $H^0(X, \mathbb{C})$, $H^1(X, \mathbb{C})$, $H^2(X, \mathbb{C})$ равны соответственно 1, 2, 1. В каждом из этих пространств задано вещественное подпространство — образ естественного вложения когомологий с вещественными коэффициентами. Более того, в вещественном подпространстве выделена целочисленная решетка — образ естественного вложения когомологий с целыми коэффициентами. Вещественное подпространство с решеткой есть всегда в когомологиях с комплексными коэффициентами. Следующий объект — проявление комплексной структуры на X. Рассмотрим на X дифференциальную 1-форму $\omega = dx/y$. Легко убедиться, что ω — регулярная голоморфная 1-форма всюду на X. Форма ω замкнута и, следовательно, определяет класс когомологий $[\omega] \in H^1(X, \mathbb{C})$. Всякая иная голоморфная 1-форма ω' пропорциональна ω (действительно, ω'/ω — ограниченная голоморфная функция и, следовательно, постоянная). Комплексная структура задает ориентацию кривой. Для этой ориентации $i\int_X \omega \wedge \bar{\omega} > 0$. В частности, это означает, что

класс $[\omega]$ отличен от нуля. Таким образом, голоморфные дифференциальные 1-формы на X порождают в $H^1(X, \mathbb{C})$ одномерное подпространство F, и это подпространство обладает свойством $H^1(X, \mathbb{C}) = F \oplus \bar{F}$, где черта означает сопряжение относительно вещественного подпространства.

Стандартная теорема теории эллиптических кривых утверждает (см. [162], [235]): векторное пространство H^1 вместе с указанными структурами (вещественным подпространством с целочисленной решеткой и подпространством F) определяют кривую X.

Предположим, что имеются две кривые X, X' рода 1 и голоморфное отображение $f\colon X \to X'$. Рассмотрим индуцированное отображение $f^*\colon H^1(X', \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathbb{C})$. Очевидно, что при этом отображении вещественное подпространство и целочисленная решетка переходят соответственно в вещественное подпространство и целочисленную решетку. Более того, поскольку прообраз голоморфной формы голоморфен, $f^*F \subset F$. Это замечание показывает функториальность описанной выше структуры в когомологиях и несет нетривиальную информацию о голоморфных отображениях. Например, если нет ненулевого линейного отображения $(H^1(X', \mathbb{C}), F) \to (H^1(X, \mathbb{C}), F)$, сохраняющего вещественное подпространство и целочисленную решетку, то всякое голоморфное отображение $X \to X'$ есть отображение в точку.

Конструкция подпространства F в одномерных когомологиях кривой рода 1 обобщается на комплексное неособое проективное многообразие X произвольной размерности [206], [231]. Для любого неотрицательного целого числа l в пространстве когомологий $H^l(X, \mathbb{C})$, помимо вещественного подпространства с целочисленной решеткой, выделим подпространства $H^{l,0}, H^{l-1,1}, \dots, H^{0,l}$, где $H^{k,l-k}$ — подпространство всех l-мерных классов когомологий, представимых замкнутыми дифференциальными формами, которые в каждой локальной записи

$$\sum a_{i_1,\dots,i_r,j_1,\dots,j_{l-r}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{l-r}}$$

в каждом слагаемом имеют ровно k голоморфных дифференциалов и ровно $l-k$ антиголоморфных дифференциалов, т. е. в каждом слагаемом $r = k$. Теорема Ходжа (см. [206], [231]) утверждает, что

$$H^l(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_k H^{k,l-k}, \quad \overline{H^{k,l-k}} = H^{l-k,k}. \tag{1}$$

Как и в случае кривых, подпространства $H^{k,l-k}$ несут значительную информацию о разнообразных характеристиках многообразия (см. [206], [231], [338], [299], [214]). Очевидно, что подпространства $H^{k,l-k}$ сохраняются голоморфными отображениями многообразий: если $f\colon X \to X'$ — голоморфное отображение, то для любого k имеет место включение $f^*(H^{k,l-k}) \subset H^{k,l-k}$.

При исследовании зависимости разложения (1) от комплексной структуры на X, а также при обобщении конструкции на многообразия с особенностями выяснилось, что правильным объектом является не последовательность подпространств $H^{l,0}, \ldots, H^{0,l}$, а последовательность подпространств

$$\{0\} \subset F^l \subset F^{l-1} \subset \ldots \subset F^0 = H^l(X, \mathbb{C}),$$

где $F^k = H^{l,0} \oplus H^{l-1,1} \oplus \ldots \oplus H^{k,l-k}$.

П. Делинь [299] выделил в когомологиях квазипроективного алгебраического многообразия (с любыми особенностями) две естественных фильтрации: ходжеву $\{F^k\}$ и весовую $\{W_l\}$, и доказал, что эти фильтрации обладают свойством, обобщающим свойство (1), и функториальны относительно алгебраических отображений многообразий. Эти фильтрации названы Делинем смешанной структурой Ходжа в когомологиях. Свойства этих фильтраций взяты за основу приведенных ниже формальных определений.

З а м е ч а н и е. В приведенных выше примерах многообразия были неособыми и компактными. Для неособого компактного многообразия весовая фильтрация тривиальна: $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H^l(X, \mathbb{C})$.

В исчезающих когомологиях смешанная структура Ходжа определена Дж. Стинбринком в [462].

А. С т р у к т у р ы Х о д ж а (см. [342]). Пусть $H_{\mathbb{R}}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, содержащее решетку $H_{\mathbb{Z}}$, и пусть $H = H_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ — его комплексификация.

О п р е д е л е н и е. *Структура Ходжа веса l* на H состоит из разложения в прямую сумму $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$, причем $H^{k,m} = \overline{H^{m,k}}$ (черта означает сопряжение). Числа $h^{k,m} = \dim_{\mathbb{C}} H^{k,m}$ называются *числами Ходжа*.

Для любых двух структур Ходжа H, H' веса l прямая сумма $H \oplus H'$ несет очевидную структуру Ходжа веса l. Аналогично, если H и H' имеют (возможно разные) веса l и l', то $H \otimes H'$, $\operatorname{Hom}(H, H')$, $\Lambda^p H$, H^* наследуют структуры Ходжа соответственно весов $l + l'$, $l' - l$, pl, $-l$. А именно, $\lambda \in \operatorname{Hom}(H, H')$ имеет тип (k, m), если для всех r, s имеет место включение $\lambda(H^{r,s}) \subset (H')^{k+r,m+s}$. В частности, это определение применяется к $H^* = \operatorname{Hom}(H, \mathbb{C})$, где $\mathbb{C}$ несет тривиальную структуру веса 0; сумму $H \oplus H'$ можно рассматривать как $\operatorname{Hom}(H^*, H')$, и $\otimes^p H$ индуцирует структуру Ходжа на своем подпространстве $\Lambda^p H$.

О п р е д е л е н и е. Линейное отображение $\varphi\colon H \to H'$ векторных пространств со структурами Ходжа называется *морфизмом типа* (r, r), если оно определено над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}$, $H'_{\mathbb{Z}}$ и если $\varphi(H^{k,m}) \subset (H')^{k+r,m+r}$ для всех k, m.

З а м е ч а н и е. Отображение φ определено над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}$, $H'_{\mathbb{Z}}$, если рациональны элементы его матрицы в базисах, состоящих из векторов решеток.

С каждой структурой Ходжа $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ веса l связана *фильтрация Ходжа*

$$\{0\} \subset \ldots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \ldots \subset H,$$

где $F^k = \bigoplus_{i \geqslant k} H^{i,l-i}$ (см. рис. 148). Фильтрация Ходжа определяет структуру Ходжа:

$$H^{k,m} = F^k \cap \overline{F^m}. \tag{2}$$

Обратно, убывающая фильтрация $\{F^k\}$ на H возникает из некоторой структуры Ходжа веса l тогда и только тогда, когда $F^k \oplus \overline{F^{l-k+1}} = H$ для всех k.

В терминах нового описания линейное отображение $\varphi\colon H \to H'$, определенное над $\mathbb{Q}$, является морфизмом типа (r, r), если и только если оно сохраняет ходжеву фильтрацию со сдвигом индексов на r: $\varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$ для всех k.

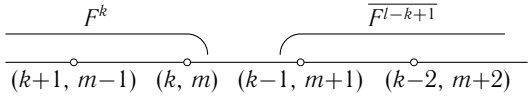


Рис. 148

Рассмотрим структуру Ходжа $H = \bigoplus_{k+m=l} H^{k,m}$ и билинейную форму S на H. Предположим, что значения формы на парах векторов решетки $H_{\mathbb{Z}}$ рациональны. Предположим также, что форма симметрична, если l четно, и кососимметрична, если l нечетно.

О п р е д е л е н и е. Структура Ходжа *поляризована формой* S, если

$$S(H^{k,m}, H^{k',m'}) = 0 \quad \text{при} \quad (k, m) \neq (m, k),$$
$$(\sqrt{-1})^{k-m} S(v, \bar{v}) > 0 \quad \text{для} \quad v \in H^{k,m},\ v \neq 0.$$

Примером поляризации структуры Ходжа служит билинейная форма Ходжа на примитивных когомологиях гладкого проективного многообразия (см. [206, гл. V]).

Б. С м е ш а н н ы е с т р у к т у р ы Х о д ж а (см. [342]). Пусть пространства H, $H_{\mathbb{R}}$, $H_{\mathbb{Z}}$ те же, что и в п. А.

О п р е д е л е н и е. *Смешанная структура Ходжа* на H состоит из двух фильтраций:

$$\{0\} \subset \ldots \subset W_{l-1} \subset W_l \subset W_{l+1} \subset \ldots \subset H$$

— *весовой* фильтрации, определенной над $\mathbb{Q}$ по отношению к решетке $H_{\mathbb{Z}}$, и

$$\{0\} \subset \ldots \subset F^{k+1} \subset F^k \subset F^{k-1} \subset \ldots \subset H$$

— *ходжевой* фильтрации. Требуется, чтобы при любом l фильтрация на

$$\operatorname{gr}_l W = W_l/W_{l-1},$$

индуцированная ходжевой фильтрацией, составляла на $\operatorname{gr}_l W$ чистую структуру Ходжа веса l (индуцированная фильтрация — это фильтрация

$$F^k \operatorname{gr}_l W = (F^k \cap W_l + W_{l-1})/W_{l-1}.$$

Другими словами, требуется, чтобы при любых k, $l \in \mathbb{Z}$ выполнялось равенство

$$\operatorname{gr}_l W = F^k \operatorname{gr}_l W \oplus \overline{F^{l-k+1} \operatorname{gr}_l W}.$$

Ср. это определение с утверждением теоремы 35.3.

Понятие смешанной структуры Ходжа содержит понятие структуры Ходжа в качестве частного случая: если $(H, \{F^k\})$ — структура Ходжа веса l, возьмем в качестве весовой фильтрации $\{0\} = W_{l-1} \subset W_l = H$, тогда $(H, \{F^k\}, \{W_m\})$ — смешанная структура Ходжа.

О п р е д е л е н и е. *Морфизмом типа* (r, r) смешанных структур Ходжа $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$, $(H', \{F'^k\}, \{W'_l\})$ называется линейное отображение $\varphi\colon H \to H'$, определенное над $\mathbb{Q}$ по отношению к решеткам $H_{\mathbb{Z}}$, $H'_{\mathbb{Z}}$ и обладающее следующими свойствами:

$$\varphi(W_l) \subset W'_{l+2r}, \quad \varphi(F^k) \subset F'^{k+r}$$

для любых l, k.

Морфизм типа (r, r) индуцирует отображение

$$\varphi\colon \operatorname{gr}_l W \to \operatorname{gr}_{l+2r} W',$$

являющееся морфизмом типа (r, r) чистых структур Ходжа весов l, $l + 2r$ соответственно

На смешанные структуры Ходжа естественным образом распространяются операции прямой суммы, тензорного произведения, сопряжения.

П р и м е р. Если $(H, \{F^k\}, \{W_l\})$ — смешанная структура Ходжа, определим смешанную структуру Ходжа на сопряженном пространстве H^*. Положим $H^*_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Hom}(H_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$, $(F^*)^k = \operatorname{ann} F^{1-k}$, $W_l^* = \operatorname{ann} W_{-l-1}$, где ann — аннулятор.

36.2. Обсуждение утверждения теоремы 35.3 о смешанной структуре Ходжа.

А. П р и м е р ы.

К р и т и ч е с к а я т о ч к а р о с т к а $f\colon (\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ г о л о м о р ф н о й ф у н к ц и и о д н о й п е р е м е н н о й. После подходящей замены переменной имеем $f = x^{\mu+1}$, где μ — кратность критической точки. Пусть $f\colon X \to S$ — специализация ростка, $f^*\colon H^0 \to S'$ — соответствующее когомологическое расслоение Милнора (с. 559). Согласно примерам

на с. 571, 574 для любого $t \in S'$ имеем

$$\{0\} = W_{-1,t} \subset W_{0,t} = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}),$$
$$\{0\} = F_t^1 \subset F_t^0 = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}).$$

Пространство $\operatorname{gr}_0 W_t = \tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C})$ — единственное нетривиальное факторпространство весовой фильтрации. На $\tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C})$ ходжева фильтрация индуцирует чистую структуру Ходжа веса 0: $\tilde{H}^0(X_t, \mathbb{C}) = H_t^{0,0}$, где $H_t^{0,0} = F_t^0 \cap \overline{F_t^0}$ (см. формулу (1)). Теорема 35.3 для $\boldsymbol{f}$ доказана.

Невырожденная критическая точка ростка $\boldsymbol{f} = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. Согласно примерам на с. 571, 574 для любого $t \in S'$ имеем

$$\{0\} = W_{2[n/2]-1,t} \subset W_{2[n/2],t} = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}),$$
$$\{0\} = F_t^{[n/2]+1} \subset F_t^{[n/2]} = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

Пространство $\operatorname{gr}_{2[n/2]} W_t = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ — единственное нетривиальное факторпространство весовой фильтрации. На $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ ходжева фильтрация индуцирует чистую структуру Ходжа веса $2[n/2]$: $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}) = H_t^{[n/2],[n/2]}$, где $H_t^{[n/2],[n/2]} = F_t^{[n/2]} \cap \overline{F_t^{[n/2]}}$ (см. формулу (2)). Теорема 35.3 для $\boldsymbol{f}$ доказана.

Конечнократная критическая точка ростка $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ голоморфной функции двух переменных. Это — первый нетривиальный случай. Переформулируем для этого случая утверждения теоремы о смешанной структуре Ходжа. Пусть $f\colon X \to S$ — специализация ростка $\boldsymbol{f}$, $t \in S'$. Согласно лемме 35.7 ходжева фильтрация имеет вид

$$\{0\} \subset F_t^1 \subset F_t^0 \subset \ldots \subset H^1(X_t, \mathbb{C}).$$

Согласно следствию 2 в п. 35.2 размеры жордановых клеток оператора монодромии не больше 2, корневое подпространство собственного числа 1 оператора монодромии состоит из собственных векторов. Поэтому весовая фильтрация имеет вид

$$\{0\} \subset W_{0,t} \subset W_{1,t} \subset W_{2,t} = H^1(X_t, \mathbb{C}),$$

где пространство $W_{1,t}$ порождено всеми собственными векторами оператора монодромии с собственными числами, не равными 1, а пространство $W_{0,t}$ порождено собственными векторами жордановых клеток размера 2.

Теорема о смешанной структуре Ходжа утверждает, что ходжева фильтрация индуцирует на факторпространствах весовой фильтрации чистые структуры Ходжа, т. е. в данном случае

$$\operatorname{gr}_2 W_t = H_t^{1,1}, \tag{3}$$
$$\operatorname{gr}_1 W_t = H_t^{1,0} \oplus H_t^{0,1}, \quad \operatorname{gr}_0 W_t = H_t^{1,-1} \oplus H_t^{0,0} \oplus H_t^{-1,1}, \tag{4}$$

где $H^{k,m} = F^k \operatorname{gr}_{k+m} W \cap \overline{F^m \operatorname{gr}_{k+m} W}$. Согласно следствию 3 в п. 35.2.Д пространства $H_t^{1,-1}$, $H_t^{-1,1}$ тривиальны и

$$\operatorname{gr}_0 W_t = H_t^{0,0}. \tag{5}$$

С л е д с т в и е. *Имеет место равенство* $F_t^0 = H^1(X_t, \mathbb{C})$. *Другими словами, произвольный класс исчезающих когомологий, принадлежащий одному из корневых пространств оператора монодромии, является значением главной части голоморфной* 2*-формы на* X*, порядок которой меньше чем* 1.

З а м е ч а н и е. Для ростка функции n переменных $F_t^0 = H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. Доказательство аналогично.

Утверждения (3)—(5) можно переформулировать на языке главных частей голоморфных 2-форм на X.

а) Каждый собственный вектор из $W_{0,t}$ есть значение главной части некоторой формы порядка, принадлежащего интервалу (0, 1).

б) Если порядок формы не больше 0, то значение в точке t главной части формы не принадлежит пространству $W_{0,t}$.

в) Каждый собственный вектор с собственным числом 1 есть значение главной части некоторой формы порядка 0.

г) Каждый собственный вектор из $W_{0,t}$ есть значение коэффициента $A^{\omega}_{1\alpha(\omega)}$, где ω — некоторая голоморфная 2-форма на X, порядок которой $\alpha(\omega)$ принадлежит интервалу $(-1, 0)$.

д) Обозначим через $\mathcal{F}_t^1$ проекцию в $\operatorname{gr}_1 W_t$ подпространства в $W_{1,t}$, порожденного значениями в t главных частей форм, порядок которых меньше чем 0. Тогда $\operatorname{gr}_1 W_t = \mathcal{F}_t^1 \oplus \bar{\mathcal{F}}_t^1$.

Из утверждений а)—д), в частности, легко выводится, что всякое элементарное сечение неотрицательного порядка есть геометрическое сечение некоторой 2-формы. Например, если $A\colon t \mapsto A(t)$ — ковариантно постоянное однозначное сечение когомологического расслоения Милнора, то существует 2-форма ω, для которой $[\omega/df|_{X_t}] = A(t)$ для любого t.

Б. С и м м е т р и я ч и с е л Х о д ж а. Выведем лемму 35.14 из теоремы 35.3. Согласно теореме 35.3 для любого l имеют место равенства

$$\operatorname{gr}_l W_t = \bigoplus_{k+m=l} H_t^{k,m}, \quad H^{k,m} = \overline{H_t^{m,k}}. \tag{6}$$

Оператор монодромии на $\operatorname{gr}_l W_t$ сохраняет вещественную структуру и индуцированную ходжеву фильтрацию. Поэтому оператор монодромии сохраняет разложение (6). Обозначим через $H_\lambda^{k,m}$ корневое подпространство собственного числа λ действия монодромии на $H^{k,m}$.

По построению $F^k \operatorname{gr}_l W_t = H^{k,l-k} \oplus H^{k+1,l-k-1} \oplus \dots$. Поэтому $H^{k,l-k} \cong$ $\cong F^k \operatorname{gr}_l W_t / F^{k+1} \operatorname{gr}_l W_t$, $\dim H^{k,l-k} = h^{k,l-k}$, $\dim H_\lambda^{k,l-k} = h_\lambda^{k,l-k}$. Теперь утверждение а) леммы 35.14 следует из (6).

Согласно следствию 2 в п. 35.2.Д, для любых k, l

$$N^l(H_\lambda^{k,n-1+l-k}) = H_\lambda^{k-l,n-1-k}, \quad \text{если} \quad \lambda \neq 1,$$
$$N^l(H_1^{k,n+l-k}) = H_1^{k-l,n-k}.$$

Это влечет утверждения б), в) леммы 35.14.

В. Функториальность смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях. Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции, имеющий конечнократную критическую точку. Пусть $\boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ — росток конечнократного голоморфного отображения. Предположим, что росток $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ тоже имеет конечнократную критическую точку. Росток $\boldsymbol{g}$ индуцирует отображение гиперповерхности уровня ростка $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ в гиперповерхность того же уровня ростка $\boldsymbol{f}$. Нетрудно убедиться, что это отображение задает линейное отображение g^* когомологий, исчезающих в критической точке ростка $\boldsymbol{f}$, в когомологии, исчезающие в критической точке ростка $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$, точнее, задает морфизм когомологического расслоения Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f}$ в когомологическое расслоение Милнора критической точки ростка $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$. Согласно теореме 35.3, в слоях этих когомологических расслоений весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа.

Теорема 1 (см. [57]). *Отображение g^* — мономорфизм типа $(0, 0)$ смешанных структур Ходжа. А именно, g^* не имеет ядра и для любых k, l имеют место включения*

$$g^*(F^k(f^*)) \subset F^k((f \circ g)^*), \quad g^*(W_l(f^*)) \subset W_l((f \circ g)^*).$$

Доказательство. Пусть X_t^f, X_t^{fg} — слои расслоений Милнора ростков $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ соответственно. Предположим, что специализации ростков и представитель g ростка $\boldsymbol{g}$ выбраны так, что $g(X_t^{fg}) \subset X_t^f$.

Отображение $g_*\colon H_{n-1}(X_t^{fg}, \mathbb{C}) \to H_{n-1}(X_t^f, \mathbb{C})$ эпиморфно. Действительно, если $[\sigma] \in H_{n-1}(X_t^f, \mathbb{C})$, σ — представитель класса $[\sigma]$, $\{g^{-1}(\sigma)\}$ — полный прообраз цикла σ в X_t^{fg}, то $g_*[\{g^{-1}(\sigma)\}] = k[\sigma]$, где k — кратность ростка $\boldsymbol{g}$.

Докажем функториальность весовой фильтрации. Очевидно, что отображение g^* переводит ковариантно постоянные сечения в ковариантно постоянные сечения. Кроме того, отображение g^* перестановочно с оператором монодромии. Согласно второму определению весовой фильтрации в п. 35.2.Б, это означает справедливость второго включения теоремы.

Докажем функториальность ходжевой фильтрации. Пусть ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X^f. Очевидно, что порядок формы $g^*(\omega)$ равен порядку формы ω. Более того, главная часть формы $g^*(\omega)$ равна образу главной части формы относительно мономорфизма g^*. Это доказывает первое включение теоремы.

З а м е ч а н и е. Другим проявлением функториальности смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях являются формулы, связывающие спектры критических точек ростков $\boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{g}(y)$, $\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{g}(y)$; см. п. 35.3.Д, а также [57].

Г. П е р е ф о р м у л и р о в к а т е о р е м ы о с м е ш а н н о й с т р у к т у р е Х о д ж а н а я з ы к к о м п л е к с н ы х о с ц и л л и р у ю щ и х и н т е г р а л о в. Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в конечнократной критической точке. Рассмотрим комплексные осциллирующие интегралы с фазой $\boldsymbol{f}$ по допустимым цепям, сосредоточенным в окрестности критической точки ростка $\boldsymbol{f}$, т. е. интегралы вида $\int_{[\Gamma]} e^{\tau \boldsymbol{f}}\omega$, где $[\Gamma] \in H_n(X, X^-)$, ω — голоморфная дифференциальная n-форма на X (см. п. 33.1).

Для фиксированной амплитуды ω интегрирование выражения $e^{\tau \boldsymbol{f}}\omega$ по допустимым цепям определяет линейную функцию на допустимых цепях, зависящую от параметра τ. При $\tau \to +\infty$ такая линейная функция разлагается в асимптотический ряд (теорема 33.1). Старшая часть этого асимптотического ряда называется старшей частью амплитуды ω. Ниже с помощью старших частей всех амплитуд строится фильтрация на пространстве, сопряженном с $H_n(X, X^-; \mathbb{C})$. Эта фильтрация называется ходжевой. Далее на том же пространстве с помощью оператора монодромии строится другая фильтрация, называемая весовой.

Т е о р е м а 2. *Построенные ниже весовая и ходжева фильтрации образуют смешанную структуру Ходжа на пространстве, сопряженном с* $H_n(X, X^-; \mathbb{C})$.

Далее будет легко убедиться, что теорема 2 является переформулировкой теоремы 35.3 в силу леммы 33.2.

З а м е ч а н и е. Построенная ниже ходжева фильтрация зависит от параметра τ. Теорема 2 справедлива при любом положительном значении параметра ходжевой фильтрации.

Обозначим через H^* пространство, сопряженное с $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{C})$. В H^* имеются естественные вещественное подпространство $H^*_{\mathbb{R}}$ и целочисленная решетка $H^*_{\mathbb{Z}}$ (например, $H^*_{\mathbb{Z}}$ — это линейные функции, принимающие целые значения на естественном образе в $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{C})$ группы $H_{n-1}(X, X^-; \mathbb{Z})$). Определим ходжеву фильтрацию в H^*.

Пусть ω — голоморфная n-форма на X. Согласно теореме 33.1, имеем

$$\int_{[\ ]} e^{\tau f}\omega \approx \sum \tau^{\alpha}(\ln\tau)^k B^{\omega}_{\alpha,k}[\ ],$$

где $B^{\omega}_{k,\alpha} \in H^*$. Назовем *весом* формы ω наибольшее число α, для которого отличен от нуля коэффициент $B^{\omega}_{0,\alpha}$ (ср. с определением порядка формы в п. 35.1.В). Вес обозначим через $\beta(\omega)$.

З а м е ч а н и е. Согласно формуле (6) на с. 528 сумма порядка формы и ее веса равна -1.

Старшей частью формы ω назовем выражение

$$\tau^{\beta(\omega)}(B^{\omega}_{0,\beta(\omega)} + \ldots + (\ln\tau)^{n-1}B^{\omega}_{n-1,\beta(\omega)}).$$

Старшая часть — это зависящий от параметра τ вектор пространства H^*.

Зафиксируем положительное число τ. Определим пространство $F^k_\tau \subset H^*$ следующим условием: F^k_τ — линейная оболочка старших частей всех форм, вес которых не меньше $k-n$ (в старших частях параметр τ фиксирован). Если старших частей такого веса не существует, то полагаем $F^k_\tau\{0\}$. Фильтрацию $\{F^k_\tau\}$, $k \in \mathbb{Z}$, назовем *ходжевой*.

Определим весовую фильтрацию в H^*. Как показано в п. 33.1, $H_n(X, X^-; \mathbb{C}) \cong H_{n-1}(X_t, \mathbb{C})$, где $t \in S^-$. Поэтому $H^* \cong H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$. В пространстве $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$ весовая фильтрация определена в п. 35.2. В качестве *весовой* фильтрации в H^* возьмем фильтрацию, индуцированную из весовой фильтрации в $H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})$.

36.3. Обзор результатов о смешанной структуре Ходжа.

А. С м е ш а н н а я с т р у к т у р а Х о д ж а и ф о р м а п е р е с е ч е н и й. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в μ-кратной критической точке. Рассмотрим форму пересечений S в $(n-1)$-мерных гомологиях $H_{n-1}(X_t, \mathbb{R})$, исчезающих в критической точке. Обозначим через μ_0 размерность ядра формы S. Если n четно, то форма S — кососимметрическая и μ_0 — единственный вещественный инвариант формы S. Если n нечетно, то форма S — симметрическая и вещественным линейным преобразованием форму S можно диагонализировать. Пусть μ_+ и μ_- — числа положительных и отрицательных коэффициентов диагонализации. Числа μ_0, μ_+, μ_- образуют полный набор вещественных инвариантов формы S.

Обозначим через $h^{k,m}_\lambda$ числа Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке ростка f.

Т е о р е м а 3 (см. [462]). *Имеет место равенство*

$$\mu_0 = \sum_{k+m\leqslant n} h^{k,m}_1 - \sum_{k+m\geqslant n+2} h^{k,m}_1.$$

Если n нечетно, то

$$\mu_+ = \sum_{\substack{k+m=n+1\\ m \text{ четно}}} h_1^{k,m} + 2 \sum_{\substack{k+m\geqslant n+2\\ m \text{ четно}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda\neq 1} \sum_{m \text{ четно}} h_\lambda^{k,m},$$

$$\mu_- = \sum_{\substack{k+m=n+1\\ m \text{ нечетно}}} h_1^{k,m} + 2 \sum_{\substack{k+m\geqslant n+2\\ m \text{ нечетно}}} h_1^{k,m} + \sum_{\lambda\neq 1} \sum_{m \text{ нечетно}} h_\lambda^{k,m}.$$

Следствие 1. *Форма S невырождена тогда и только тогда, когда число 1 не является собственным числом оператора монодромии.*

Следствие 2 (см. [462]). *Если n четно, то $\mu - \mu_0$ четно. Если $n \equiv 3 \bmod 4$, то $\mu - \mu_-$ четно. Если $n \equiv 1 \bmod 4$, то $\mu - \mu_+$ четно.*

Если f — росток квазиоднородной функции, то числа Ходжа можно выразить в терминах квазиоднородной структуры локальной алгебры критической точки (см. теоремы 35.4, 35.5). Сформулируем теорему 3 в этом случае.

Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток квазиоднородной функции типа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и веса 1. Предположим, что 0 — конечнократная критическая точка ростка f. Пусть $\{x^m\colon m \in I\}$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Для $m \in I$ положим $l(m) = (m_1 + 1)\alpha + \ldots + (m_n + 1)\alpha_n - 1$.

Теорема 4 (см. [461]). *Имеет место равенство*

$$\mu_0 = \#\{m \in I\colon l(m) \in \mathbb{Z}\}.$$

Если n нечетно, то

$$\mu_+ = \#\{m \in I\colon l(m) \notin \mathbb{Z}, [l(m)] \textit{ нечетно}\},$$

$$\mu_- = \#\{m \in I\colon l(m) \notin \mathbb{Z}, [l(m)] \textit{ четно}\}.$$

Пример 1. Пусть $A_\mu\colon f = x_1^{\mu+1} + x_2^2 + x_3^2$, $\alpha = (1/(\mu + 1), 1/2, 1/2)$, $I = \{(m_1, 0, 0)\colon m_1 = 0, \ldots, \mu - 1\}$, $l(m) = (m_1 + 1)/(\mu + 1)$. Для любого $m \in I$ имеем $l(m) \in (0, 1)$. Форма пересечений отрицательно определена.

Пример 2. Пусть $f = x_1^{a_1} + \ldots + x_n^{a_n}$. Форма пересечений невырождена, если числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты.

Пусть f — росток квазиоднородной функции. Сформулируем теорему, связывающую в этом случае форму пересечений с операцией умножения в локальной алгебре критической точки ростка.

Пусть X_t — слой расслоения Милнора критической точки ростка f квазиоднородной функции. Рассмотрим гомоморфизм Пуанкаре

$$\pi\colon H_{n-1}(X_t, \mathbb{C}) \to H^{n-1}(X_t, \mathbb{C}).$$

Нетрудно убедиться, что образ гомоморфизма совпадает с пространством $\bigoplus_{\lambda\neq 1} H^{n-1}(X_t, \mathbb{C})_\lambda$, где индекс λ обозначает корневое подпространство собственного числа λ оператора монодромии. Определим на образе гомоморфизма форму S^* формулой

$$S^*(\cdot, \cdot) = S(\pi^{-1}(\cdot), \pi^{-1}(\cdot)).$$

Для любого $m \in I$ положим $\omega_m = x^m dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Согласно теореме 35.6, геометрические сечения форм ω_m, $m \in I$, составляют базис сечений когомологического расслоения Милнора. Если $l(m) \notin \mathbb{Z}$, то значения геометрического сечения формы ω_m принадлежат образу гомоморфизма Пуанкаре. Форму ω_m назовем примитивной, если $l(m) \notin \mathbb{Z}$.

Обозначим через J класс гессиана $\det(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)$ в локальной алгебре $Q = \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Линейный функционал $\alpha\colon Q \to \mathbb{C}$ назовем *допустимым*, если $\alpha(J) \neq 0$ и функционал α квазиоднороден (т. е. равен нулю на элементах алгебры Q, степень квазиоднородности которых отлична от степени элемента J).

Для $m \in I$ положим $R(m) = l(m)(l(m) - 1) \ldots (l(m) - [(n-2)/2])$, если $n \geqslant 2$, и $R(m) = 1$, если $n = 1$.

Т е о р е м а 5 (см. [101], [70]). *Значения геометрических сечений двух примитивных форм ω_m, $\omega_{m'}$ ортогональны относительно формы S^*, если сумма порядков форм* (*т. е. число* $l(m) + l(m')$) *не является целым числом или эта сумма меньше* $(n-2)$. *Существует допустимый линейный функционал α на локальной алгебре Q, обладающий следующим свойством: для любых двух примитивных форм ω_m, ω'_m, сумма порядков которых равна $n-2$, выполняется равенство*

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega'_m]) = \mathrm{const} \cdot \alpha(x^m \cdot x^{m'}) t^{n-2}/(R(m) \cdot R(m')),$$

где $\mathrm{const} = 1$, *если n нечетно*, $\mathrm{const} = l(m) - l(m')$, *если n четно*; $s[\omega]$ — *геометрическое сечение формы ω*; t — *координата в базе расслоения Милнора*.

Явный вид функционала α см. в [70].

П р и м е р. Пусть росток $\boldsymbol{f}$ и множество I такие же, как в примере 1. Все формы ω_m, $m \in I$, примитивны. Существует константа $c \neq 0$, обладающая следующим свойством:

$$S^*(s[\omega_m], s[\omega_{m'}]) = ct/(l(m) \cdot l(m'))$$

для любых $m, m' \in I$, для которых $l(m) + l(m') = 1$. На остальных парах форм ω_m, $\omega_{m'}$ форма s^* равна нулю. Можно проверить, что $c = -\dfrac{4\pi^2}{9(\mu+1)}$.

Б. С м е ш а н н а я с т р у к т у р а Х о д ж а и д е ф о р м а ц и и. Предположим, что критическая точка голоморфной функции при деформации функции распадается на несколько более простых критических точек.

Проблема. Как связаны смешанные структуры Ходжа исходной критической точки и критических точек, полученных при распадении?

Вероятно, имеются формулируемые в терминах смешанных структур Ходжа «законы сохранения» для распадении критических точек. Многочисленные примеры подсказывают следующую гипотезу.

Упорядочим спектр критической точки: $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_\mu$.

Гипотеза (В. И. Арнольд [251]). *Спектр полунепрерывен в следующем смысле*: *если критическая точка P примыкает к* (*более простой*) *критической точке P'* (*для которой $\mu' < \mu$*), *то* $\alpha_k \leqslant \alpha'_k$.

Замечания. 1. Даже в простых и явно вычислимых случаях, таких как квазиоднородный случай или случай критической точки функции двух переменных с невырожденной главной частью ряда Тейлора, эта гипотеза является нетривиальным арифметическим утверждением о целых точках внутри выпуклых полиэдров.

2. В. В. Горюнов [110] проверил гипотезу для примыканий простых критических точек к простым, для примыканий унимодальных критических точек к унимодальным, для примыканий бимодальных критических точек коранга 2 друг к другу; см. [110] и таблицу спектров на с. 586.

3. Симметрия спектра относительно точки $n/2 - 1$ доказывает гипотезу для случая, в котором критическая точка P' невырождена.

4. Из симметрии спектра относительно точки $n/2 - 1$ и гипотезы следуют двусторонние неравенства $\alpha_k \leqslant \alpha'_k \leqslant \alpha_{k+(\mu-\mu')}$. Например, если от сложной критической точки отщепляется одна морсовская точка ($\mu = \mu' + 1$), то спектр точки P' разделяет спектр точки P.

Отношение между спектрами точек P, P' такое же, как между полуосями эллипсоида в $\mathbb{R}^\mu$ и полуосями его сечения подпространством $\mathbb{R}^{\mu'}$.

5. Гипотеза влечет полунепрерывность размерностей пространств ходжевой фильтрации, а именно полунепрерывность чисел

$$h^r = \sum_{r \leqslant k} \sum_m h^{k,m}, \quad h_r = \sum_{r > k} \sum_m h^{k,m}.$$

6. В частности, для критической точки функции двух переменных эти полунепрерывности сводятся к полунепрерывности рода g слоя расслоения Милнора и полунепрерывности «корода» $\mu - g$ (в этом случае слой — риманова поверхность эйлеровой характеристики $1 - \mu$ с $\mu + 1 - 2g$ «дырами»). Полунепрерывность обоих чисел очевидна (полунепрерывность «корода» следует из мономорфности вложения гомологий, исчезающих в более простой точке, в гомологии, исчезающие в более сложной критической точке).

7. Сформулированная гипотеза является исправлением и обобщением гипотезы о полунепрерывности показателя осцилляции критической точки

вещественной аналитической функции (см. п. 28.5, 31.2, 35.1.Г, 35.3.В, [10], [16], [249]).

Рассмотрим деформацию исходной критической точки P. Предположим, что в процессе деформации критическая точка не распадается, т. е. при каждом значении параметра деформации имеется ровно одна критическая точка кратности μ.

Теорема 6 (см. [52], [60]). *При таких деформациях спектр постоянен.*

Замечания. 1. Утверждение теоремы является вариантом утверждения гипотезы Арнольда для случая $\mu = \mu'$.

2. В [60] доказано, что подпространства весовой и ходжевой фильтраций голоморфно изменяются при изменении параметра деформации.

3. Из теоремы 6 следует, что наименьший возможный порядок интеграла голоморфной формы по классам ковариантно постоянного семейства гомологий, исчезающих в критической точке (т. е. первое спектральное число), не изменяется при указанных деформациях. Это означает, что если при некоторой деформации критической точки наименьший возможный порядок изменяется, то при деформации не сохраняется кратность критической точки (т. е. критическая точка распадается). Из этого рассуждения извлекается формулируемая ниже теорема 7.

Рассмотрим росток голоморфной функции $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ в критической точке кратности μ и его деформацию $\boldsymbol{F}\colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^k, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$. *Стратом* $\mu = \mathrm{const}$ деформации называется росток множества $(\Lambda, 0) \subset (\mathbb{C}^k, 0)$, состоящего из всех значений параметров λ, при которых функция $\boldsymbol{F}(\cdot, \lambda)$ имеет критическую точку кратности μ с нулевым критическим значением.

Теорема 7 (см. [62]). *Коразмерность страта* $\mu = \mathrm{const}$ *в базе версальной деформации ростка голоморфной функции в конечнократной критической точке не меньше чем число тех спектральных чисел смешанной структуры Ходжа критической точки ростка, которые меньше* $\alpha_1 + 1$ (α_1 *— первое спектральное число*).

Замечание. В случае критической точки полуквазиоднородной функции коразмерность страта $\mu = \mathrm{const}$ в базе версальной деформации равна числу спектральных чисел, указанных в теореме 7. Оценка сверху следует из [365], оценка снизу дается теоремой 7, и числа, оценивающие коразмерность сверху и снизу, равны. Более того, в случае критической точки квазиоднородной функции упомянутое перед теоремой 7 рассуждение позволяет явно указать страт $\mu = \mathrm{const}$.

Теорема 8 (см. [62]). *Пусть* $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ *— квазиоднородный росток типа* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *и веса* 1. *Пусть* $\{x^m\colon m \in I\}$ *— набор одночленов, проектирующихся в базис над* $\mathbb{C}$ *локальной алгеб-*

ры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. *Рассмотрим представителя* $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{m \in I} \lambda_m x^m$ *версальной деформации ростка* $\boldsymbol{f}$. *Тогда страт* $\mu = \text{const}$ *задается уравнениями* $\{\lambda_m = 0 \colon m \in I, (\alpha, m) < 1\}$.

Для однородных ростков теорема 8 доказана в [92].

В самое последнее время достигнут прогресс в доказательстве гипотезы Арнольда.

Пусть $\boldsymbol{f} \colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в изолированной критической точке, $\boldsymbol{F} \colon (\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^l, 0 \times 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — его деформация.

О п р е д е л е н и е (см. [65]). Подмножество $U \subset \mathbb{R}$ называется *множеством полунепрерывности* для данной деформации $\boldsymbol{F}$, если оно обладает следующим свойством. Для любого достаточно малого $\lambda \in \mathbb{C}^l$ пусть $x^1, \ldots, x^s \in \mathbb{C}^n$ — критические точки функции $\boldsymbol{F}(\cdot, \lambda)$, имеющие единое критическое значение. Тогда количество чисел спектра исходной критической точки ростка $\boldsymbol{f}$, попавших в U, не меньше чем суммарное количество попавших в U чисел спектров критических точек $x^1, \ldots, x^s$.

Г и п о т е з а о п о л у н е п р е р ы в н о с т и п л о т н о с т и с п е к т р а (см. [66]). Для любой деформации всякий интервал $(\alpha, \alpha + 1)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, является множеством полунепрерывности.

З а м е ч а н и е. Может быть, в формулировке гипотезы нужно заменить интервал $(\alpha, \alpha + 1)$ на полуинтервал $(\alpha, \alpha + 1]$.

Ясно, что из этой гипотезы следует гипотеза Арнольда.

У т в е р ж д е н и я о п о л у н е п р е р ы в н о с т и.

(I) *Гипотеза о полунепрерывности плотности спектра справедлива для деформаций ростков функций одной или двух переменных* (см. [67], [68]).

(II) *Всякий интервал* $(\alpha, \alpha + 1)$ *при* $\alpha \in (-2, -1)$ *и полуинтервал* $(-1, 0]$ *являются множествами полунепрерывности для деформаций ростков функций любого числа переменных* (см. [67], [68]).

(III) *Для любого иррационального* $\alpha \in \mathbb{R}$ *множество* $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha + 2k, \alpha + 2k + 1)$ *является множеством полунепрерывности для деформаций ростков функций любого числа переменных* (см. [65]).

(IV) *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *— квазиоднородный многочлен типа* $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ *и веса* 1, *имеющий в начале координат изолированную критическую точку. Назовем его нижней деформацией произвольный многочлен вида*

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum \lambda_j \varphi_j,$$

где $\{\varphi_j\}$ *— одночлены квазиоднородного веса, меньшего* 1. *Тогда для нижних деформаций многочлена справедлива гипотеза о полунепрерывности плотности спектра* (см. [66]).

Следствия. 1) *Комплексный показатель осцилляции критической точки ростка функции одной, двух или трех переменных полунепрерывен сверху при деформациях* (см. [64]).

2) *Назовем критическую точку ростка функции любого числа переменных достаточно вырожденной, если ее комплексный показатель осцилляции принадлежит полуинтервалу* $(-1, 0]$. *Тогда комплексный показатель осцилляции достаточно вырожденной критической точки полунепрерывен сверху при деформациях ростка* (см. [64]).

Критерий достаточной вырожденности см. в [64] и в п. 35.1.Ж.

Утверждение (IV) дает новые результаты в следующем вопросе. Пусть $Y \subset \mathbb{C}P^n$ — алгебраическая гиперповерхность степени d, имеющая только невырожденные (простые, двойные) особые точки.

Каково максимальное число $N_n(d)$ невырожденных особых точек, которое может иметь гиперповерхность степени d?

Полный ответ на этот вопрос известен только при $n = 1, 2$: при $n = 1$ имеем $N_1(d) = [d/2]$, при $n = 2$ имеем $N_2(d) = d(d-1)/2$. Первый нетривиальный случай $n = 3$.

Оценки сверху. Первым результатом является результат А. Бассе (1906 г., [263]):

$$N_3(d) \leqslant (d(d-1)^2 - 5 - \sqrt{d(d-1)(3d-14)+25})/2$$

с асимптотикой оценивающего числа, равной $d^n/2$ при $d \to \infty$. В дальнейшем (см. [264], [277], [459], [102]) оценка улучшалась и обобщалась на случай $n > 3$, однако во всех этих работах оценивающее число имело асимптотику $d^n/2$ при $d \to \infty$. Оценку с новой асимптотикой дает утверждение (IV).

Назовем *числом Арнольда* $A_n(d)$ число целых точек $(k_1, \ldots, k_n)$ строго внутри куба $(0, d)^n$, для которых $(n-2)d^n/2 + 1 < \sum k_i \leqslant nd/2$. Например, при $n = 3$ имеем $A_3(d) = 23d^3/48 +$ (члены меньшей степени по d).

Утверждение об оценке сверху (см. [66]). *Пусть* $Y \subset \mathbb{C}P^n$ *— алгебраическая гиперповерхность степени* d, *имеющая только изолированные особые точки. Тогда число ее невырожденных особых точек не больше числа* $A_n(d)$. *Если* $n = 3$, *то число всех особых точек не больше* $A_3(d)$.

Для фиксированного n число $A_n(d)$ имеет вид $a_n d^n +$ (члены меньшей степени по d). Нетрудно показать, что $a_n \sim \sqrt{6/(\pi n)}$ при $n \to \infty$.

В случае поверхностей в $\mathbb{C}P^3$ Мияока получил наилучшую на данный момент оценку сверху числа невырожденных особых точек, имеющую асимптотику $4d^3/9$.

Предложение 1 (см. [402]). *Пусть* $Y \subset \mathbb{C}P^3$ *— поверхность степени* d, *имеющая в качестве особенностей только рациональные*

двойные точки (*т. е. точки типов* A_μ, D_μ, E_6, E_7, E_8). *Тогда их количество не превосходит* $4d(d-1)^2/9$.

Мы приводим здесь таблицу оценок сверху для малых d и $n=3$, взятую в основном из [402].

Станьяро получил свои оценки в предположении общности расположения особых точек на поверхности. Вследствие этого равенство $N_3(6)=64$ не доказано. Совсем недавно Станьяро опубликовал результат, согласно которому $N_3(6)=66$. Равенство $N_3(4)=16$ доказано Куммером (1864 г.), $N_3(5)=31$ — Бовилем (1980 г., [264]). Неравенство $N_3(6)\geqslant 64$ принадлежит Катанезе—Череза [281] и Станьяро [459], неравенство $N_3(7)\geqslant 90$ — Станьяро [459]; $N_3(8)\geqslant 160$ — Крайсу [366] и Галларати [323]; неравенства $N_3(9)\geqslant 160$, $N_3(10)\geqslant 325$, $N_3(11)\geqslant 300$, $N_3(12)\geqslant 576$ — Крайсу [366].

d	$N_3(d)$	$A_3(d)$	Мияока	Бассе	Станьяро	Брус
4	16	16	16	16	16	17
5	31	31	36	34	32	32
6	$\geqslant 64$	68	66	66	64	73
7	$\geqslant 90$	104	112	114	111	108
8	$\geqslant 160$	180	174	224	178	193
9	$\geqslant 160$	246	256	270	267	256
10	$\geqslant 325$	375	360	384	380	401
11	$\geqslant 300$	480	488	535	521	500
12	$\geqslant 576$	676	645	696	693	721

О ц е н к и с н и з у. С. В. Чмутов предложил метод, который дает, по-видимому, наилучшую оценку снизу числа $N_n(d)$ при больших d. Чмутов в качестве гиперповерхности с большим числом особых точек предложил рассматривать гиперповерхность с аффинным уравнением $\sum_{j=1}^{n} T_d(x_j)=0$, если n четно, и $\sum_{k=1}^{n} T_d(x_j)=1$, если n нечетно, где T_d — многочлен Чебышёва степени d, имеющий два критических значения ± 1. Число $C_n(d)$ особых точек гиперповерхности Чмутова имеет вид $c_n d^n$ + (члены меньшей степени по d). Например, $c_3=3/8$. При $n\to\infty$ имеем $c_n\sim\sqrt{2/(\pi n)}$.

С л у ч а й $d=3$. $A_n(3)\sim 2^n\sqrt{8\pi n}$ при $n\to\infty$ (А. Гивенталь).

Исходя из идеи Чмутова, Гивенталь смог построить примеры кубических гиперповерхностей с большим количеством особых точек. Пусть $G(x, y)$ — полином степени 3, имеющий два критических значения: ± 1, одно из которых соответствует трем критическим точкам, а другое — одной. Тогда количество g_n особых точек кубической гиперповерхности с уравнением

$\sum_{j=1}^{n/2}(-1)^j G(x_j, y_j) = 0$ относительно n переменных (для четного n) имеет асимптотику $g_n \sim 2^n\sqrt{16/(3\pi n)}$ при $n \to \infty$.

Оценки сверху в примерах Гивенталя для $d = 3$ и малых n даны в следующей таблице.

n	2	3	4	5	6	7	8	9
$A_n(3)$	3	4	10	15	35	56	126	196
Гивенталь	3	4	10	15	33	54	118	189

Равенство $N_5(3) = 15$ принадлежит Тольятти (1936 г., [476]).

Упомянем еще одно приложение утверждение об оценках сверху.

Предложение 2 ([68]). *Пусть $Y \subset \mathbb{C}P^3$ — алгебраическая кривая степени d, имеющая только изолированные особые точки. Пусть n_1 — количество невырожденных особых точек, n_2 — точек возврата, $B(d)$ — число целых точек (k_1, k_2) строго внутри квадрата $(0, d)^2$, для которых $[d/6] + 1 < k_1 + k_2 \leqslant 7d/6$. Тогда $n_1 + 2n_2 \leqslant B(d)$.*

Заметим, что $B(d) \sim 23d^2/36$ при $d \to \infty$. Наконец, упомянем работу Чмутова [234], посвященную оценкам сверху числа особых точек функции, расположенных на двух уровнях.

В. Вещественные особенности. Обсудим приложения смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях к оценкам вещественных характеристик вещественных функций. Такие приложения связаны с исследованиями в алгебраической геометрии топологии вещественных алгебраических многообразий.

Рассмотрим неособую вещественную алгебраическую кривую степени m, лежащую на вещественной проективной плоскости. Компоненты связности кривой (одномерные многообразия, диффеоморфные окружности) называются *овалами*. Вопрос о взаимном расположении овалов вещественной алгебраической кривой — один из классических вопросов геометрии (см. 16-ю проблему Гильберта).

Плоские кривые второй степени были изучены еще в Древней Греции, кривые третьей и четвертой степеней — Декартом и Ньютоном. Изучение топологии кривых более высокой степени оказалось значительно более трудной задачей: топология неособых кривых 6-й степени была полностью исследована лишь к 1969 г., а все возможные расположения овалов кривой 8-й степени не известны и сегодня (см. [24], [115], [85]).

Наряду с описаниями расположений овалов кривых малых степеней известны общие утверждения о том, в каких диапазонах могут изменяться различные числовые характеристики алгебраических кривых данной степени

(см. [24]). Утверждением такого рода является формулируемое ниже неравенство И. Г. Петровского. Мы обсудим его обобщения.

Каждый овал кривой четной степени делит проективную плоскость на две части, одна из которых диффеоморфна кругу и называется *внутренностью овала*, другая диффеоморфна листу Мёбиуса. Овал называется *положительным* (или *четным*), если он лежит внутри четного числа других, и *отрицательным* (или *нечетным*), если он лежит внутри нечетного числа овалов. Обозначения: p — число положительных, k — число отрицательных овалов.

В 1938 г. И. Г. Петровский доказал [416] для кривых четной степени $d = 2l$ неравенство

$$|2(p-k)-1| \leqslant 3l^2 - 3l + 1;$$

там же приведено обобщение этого неравенства для кривых нечетной степени. В 1949 г. И. Г. Петровский и О. А. Олейник доказали [183] аналогичные неравенства для гладких вещественных алгебраических гиперповерхностей в пространстве любого числа измерений.

А именно, рассмотрим вещественную неособую проективную гиперповерхность $A \subset \mathbb{R}P^{n-1}$ степени d, заданную однородным многочленом f от n переменных. Если d четно, обозначим через B_+ и B_- части пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, заданные условиями $f \geqslant 0$, $f \leqslant 0$ соответственно.

Числом Петровского назовем число целых точек строго внутри куба $(0, d)^n$, лежащих в проходящей через центр куба гиперплоскости, перпендикулярной главной диагонали куба. Обозначение:

$$\Pi_n(d) = \left\{ \#k = (k_1, \ldots, k_n) \colon 0 < k_s < d, \sum k_s = dn/2 \right\}.$$

Неравенства Петровского—Олейник состоят в следующем:

$$|\chi(A) - 1| \leqslant \Pi_n(d), \quad \text{если } n \text{ четно};$$
$$|\chi(B_+) - \chi(B_-)| \leqslant \Pi_n(d), \quad \text{если } n \text{ нечетно, а } d \text{ четно},$$

где χ — эйлерова характеристика. В частности, первое неравенство при $n=4$ оценивает эйлерову характеристику алгебраических поверхностей в трехмерном вещественном проективном пространстве, второе неравенство при $n = 3$ совпадает с неравенством Петровского.

В. И. Арнольдом предложена следующая единая форма неравенств Петровского—Олейник.

Т е о р е м а 9 (см. [21]). *Число, стоящее в левой части неравенства Петровского—Олейник, как в случае четного, так и в случае нечетного числа переменных n равно* $|\mathrm{ind}|$, *где* ind — *индекс особой точки* $0 \in \mathbb{R}^n$ *градиента в* $\mathbb{R}^n$ *многочлена* f, *задающего рассматриваемую гиперповерхность.*

Т е о р е м а 10 (см. [21]). *Число, стоящее в правой части неравенства Петровского—Олейник, для гиперповерхности, заданной однородным многочленом f, равно числу Ходжа $h^{n/2,n/2}_{\lambda=1}$ смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^n$ многочлена f (рассматриваемого как функция на $\mathbb{C}^n$), если число переменных n четно, и равно числу Ходжа $h^{(n+1)/2,(n+1)/2}_{\lambda=1}$ смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ многочлена $f(x) + y^2$, если число переменных n многочлена f нечетно, а степень d многочлена f четна.*

Таким образом, неравенства Петровского—Олейник приобретают единый вид: модуль индекса особой точки в $\mathbb{R}^n$ градиента многочлена с вещественными коэффициентами оценивается сверху через соответствующее число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке многочлена, рассматриваемого как функция на комплексном пространстве.

В этой форме неравенства Петровского—Олейник обобщены на случай конечнократной критической точки гладкой функции.

Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в конечнократной критической точке. Предположим, что росток $\boldsymbol{f}$, ограниченный на вещественное подпространство $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, принимает только вещественные значения. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ в окрестности начала координат векторное поле $\operatorname{grad} \boldsymbol{f}|_{\mathbb{R}^n}$. Обозначим через ind индекс его особой точки 0.

Т е о р е м а 11 (см. [21], [70]). *Если $n = 2k$ четно, то*

$$|\mathrm{ind}| \leqslant h^{k,k}_{\lambda=1},$$

где $h^{k,k}_{\lambda=1}$ — число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке ростка $\boldsymbol{f}$. Если $n = 2k - 1$ нечетно, то

$$|\mathrm{ind}| \leqslant h^{k,k}_{\lambda=1},$$

где $h^{k,k}_{\lambda=1}$ — число Ходжа смешанной структуры Ходжа в когомологиях, исчезающих в критической точке $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ ростка $\boldsymbol{f}(x) + \boldsymbol{z}^2$ функции $n + 1$ переменной.

З а м е ч а н и я. 1. При $n = 2$ из теоремы следует, что модуль индекса конечнократной особой точки 0 градиента вещественной функции двух переменных с фиксированным многоугольником Ньютона не превосходит числа внутренних целых точек на диаграмме Ньютона (см. [21], а также п. 35.3.Г).

2. Как и в случае неравенств Петровского—Олейник, индекс может быть выражен через эйлеровы характеристики локальных многообразий

уровня ростка $f|_{\mathbb{R}^n}$. А именно, пусть X_t — слой расслоения Милнора критической точки ростка f. Обозначим его вещественную часть $X_t \cap \mathbb{R}^n$ через $\mathbb{R}X_t$. Обозначим через $\bar{\chi}_+$ (соответственно $\bar{\chi}_-$) приведенную (уменьшенную на 1) эйлерову характеристику многообразия $\mathbb{R}X_t$ при положительных t (соответственно, при отрицательных t). Легко доказывается (см., например, [21]) следующий результат.

Л е м м а 1. *Индекс особой точки* 0 *векторного поля* $\operatorname{grad} f|_{\mathbb{R}^n}$ *связан с приведенными эйлеровыми характеристиками вещественных локальных многообразий уровня ростка* $f|_{\mathbb{R}^n}$ *соотношениями*

$$\operatorname{ind} = -\bar{\chi}_- = \begin{cases} -\bar{\chi}_+, & \text{если } n \text{ четно}, \\ \bar{\chi}_+, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases}$$

3. Для числа $h^{k,k}_{\lambda=1}$, участвующего в теореме, вне зависимости от четности числа n есть единое выражение через спектр критической точки ростка f: это число равно количеству спектральных пар, равных $(n/2-1,\, n-1)$. При $n = 2k$ это утверждение очевидно, при $n = 2k-1$ нужно воспользоваться следствием теоремы 35.7. Отметим, что $(n/2-1,\, n-1)$ — центр симметрии набора спектральных пар.

4. Прототипом неравенств теоремы является наряду с неравенствами Петровского—Олейник следующее неравенство В. М. Харламова [214]:

$$|\chi(A) - 1| \leqslant h^{k,k} - 1,$$

где A — произвольное неособое вещественное проективное многообразие размерности $2k$, $h^{k,k}$ — число Ходжа чистой структуры Ходжа в когомологиях комплексификации многообразия A.

Другие ограничения на расположение вещественного алгебраического многообразия см. в работах В. И. Арнольда, О. Я. Виро, Д. А. Гудкова, В. И. Звонилова, В. В. Никулина, О. А. Олейник, И. Г. Петровского, Г. М. Полотовского, В. А. Рохлина, Р. Тома, В. М. Харламова, цитированных в конце книги.

5. Оценка, указанная в теореме, служит примером следующей общей схемы рассуждений в вещественной геометрии (см. В. И. Арнольд [21]). Для оценки какого-либо инварианта вещественного топологического типа подыскивается подходящий инвариант комплексного объекта, мажорирующий первый. Инварианты комплексных объектов постоянны для почти всех членов комплексного неприводимого семейства (так как невырожденные случаи соответствуют комплексной гиперповерхности в пространстве параметров семейства, а дополнение к такой гиперповерхности связно). Поэтому инварианты комплексного объекта вычисляются в терминах дискретных данных задачи (степень, многогранник Ньютона и т. п.). Таким образом, оценка инвариантов вещественного топологического типа разбивается

на две задачи: отыскание мажорирующего инварианта комплексного объекта и его вычисление через дискретные данные.

6. Сформулируем нерешенную задачу [21]: дать неулучшаемые оценки (через числа Ходжа (?)) для индивидуальных чисел Бетти локального многообразия уровня вещественной гладкой функции в окрестности вырожденной критической точки, в частности для числа b_0. Быть может, легче оцениваются числа b_0, $b_0 - b_1$, $b_0 - b_1 + b_2$, ..., а также комбинации локальных типовых чисел Морса M_0, $M_0 - M_1$, $M_0 - M_1 + M_2$, ..., где M_i — число сливающихся в исходной критической точке невырожденных критических точек индекса i для какой-либо морсовизации исходной критической точки.

В заключение пункта укажем перестройки поверхностей уровня функции трех переменных в окрестности простой или унимодальной критической точки.

Хорошо известно, что в окрестности невырожденной критической точки функция в подходящих переменных — квадратичная форма. Поэтому, в зависимости от сигнатуры квадратичной формы, имеются две возможности. В первом случае поверхности уровня — сферы и пустые множества (в зависимости от значения уровня), а во втором случае — однополостные и двуполостные гиперболоиды. Оказывается, что в окрестности простой или унимодальной критической точки функции трех переменных поверхности уровня перестраиваются десятью указанными ниже способами.

Перестройка поверхностей уровня в окрестности критической точки с нулевым критическим значением — это пара поверхностей малого положительного и малого отрицательного уровня, лежащих в шаре малого радиуса с центром в критической точке. Такая пара задается разбиением сферы малого радиуса с центром в критической точке нулевой поверхностью уровня на две части: множество, на котором принимаются положительные значения (оно диффеоморфно поверхности малого положительного уровня) и множество, на котором принимаются отрицательные значения (оно диффеоморфно поверхности малого отрицательного уровня). Множество нулевых значений — гладкое одномерное многообразие (объединение «овалов»); см. [174].

Такое разбиение сферы удобно описывать графом, вершинам которого приписаны знаки $+$ или $-$. Если задано разбиение, то его связные области — это вершины графа (взятые со знаком функции в этой области), вершины соединены ребром, если области соседние. Из односвязности сферы следует, что этот граф — дерево. Например, для функции $x^2 + y^2 - z^2$ этот граф представляет собой три вершины, связанные двумя отрезками, крайние из которых имеют знак $-$.

Если функция зависит от двух переменных (от одной переменной), то ее перестройка в окрестности критической точки задается разбиением окруж-

ности (пары точек) малого радиуса на две области — положительных и отрицательных значений функции. Такое разбиение определяется количествами связных компонент этих областей — парой чисел (b_0^+, b_0^-), называемой далее *типом перестройки*.

В формулируемой ниже теореме используются буквенные обозначения критических точек функций, приведенные в § 17 ч. I. Буквы имеют индексы $+$, $-$, $\pm$. Их столько, сколько знаков $+$ в соответствующей формуле в § 17 ч. I, или на 1 больше. В этом случае лишний знак — это знак параметра a в соответствующей формуле. При этом порядок индексов в обозначении совпадает с порядком знаков в формуле. Предполагаются выполненными ограничения, указанные в § 17; кроме того, в $T_{p,q,r}$ выполняются неравенства $p, q, r > 2$.

Т е о р е м а (С. Ю. Оревков). 1) *Критические точки функций одной переменной имеют перестройки трех типов*: *тип* $(2, 0)$ — *минимум* — *имеют точки* A^+_{2k+1}, *тип* $(0, 2)$ — *максимум* — *имеют точки* A^-_{2k+1}, *тип* $(1, 1)$ *имеют точки* A_{2k}.

2) *Простые и унимодальные критические точки с нулевой* 2*-струей функций двух переменных имеют перестройки линий уровня следующих типов. Тип* $(1, 0)$ *имеют критические точки* X_9^{++} *при* $a > -2$, X^{+++}_{9+2k}, $Y^{+++}_{2r,2s}$, $\tilde{Y}^+_r$; *тип* $(0, 1)$ *имеют точки* X_9^{--} *при* $a < 2$, X^{---}_{9+2k}, $Y^{---}_{2r,2s}$, $\tilde{Y}^-_r$; *тип* $(1, 1)$ *имеют точки* D^+_{2k}, E_6, E_8, J^+_{10} *при* $a^2 < 4$, J^{++}_{10+2k}, J^{--}_{10+2k}, $X^{++\pm}_{9+2k+1}$, $X^{--\pm}_{9+2k+1}$, $Y^{++\pm}_{2r,2s+1}$, $Y^{--\pm}_{2r,2s+1}$; *тип* $(2, 2)$ *имеют точки* $D^\pm_{2k+1}$, E_7, X_9^{+-}, X_9^{-+}, $J^\pm_{10+2k+1}$, $X^{+\pm-}_{9+2k}$, $X^{-\pm+}_{9+2k}$, $Y^{\pm+-}_{2r,2s}$, $Y^{\pm-+}_{2r,2s}$, $Y^{\pm\pm\pm}_{2r+1,2s+1}$; *тип* $(3, 3)$ *имеют точки* D^-_{2k}, J^-_{10}, J^+_{10} *при* $a^2 > 4$, J^{+-}_{10+2k}, J^{-+}_{10+2k}, $X^{+-\pm}_{9+2k+1}$, $X^{-+\pm}_{9+2k+1}$, $Y^{+-\pm}_{2r,2s+1}$, $Y^{-+\pm}_{2r,2s+1}$; *тип* $(4, 4)$ *имеют точки* X_9^{++} *при* $a < -2$, X_9^{--} *при* $a > 2$, X^{-+-}_{9+2k}, X^{+-+}_{9+2k}, $Y^{+--}_{2r,2s}$, $Y^{-++}_{2r,2s}$.

3) *Унимодальные критические точки функций трех переменных имеют перестройки поверхностей уровня, типы и графы которых указаны на рис.* 149. *Тип* $(1, 1)$ *имеют точки* P_8^+ *при* $a^2 < 4$, P^{++}_{8+2k}, P^{--}_{8+2k}, $R^{+-}_{2l,2m}$, $R^{-+}_{2l,2m}$, $R^{++}_{2l+1,2m+1}$, $R^{--}_{2l+1,2m+1}$, $\tilde{R}^{++}_m$, $\tilde{R}^{++}_{2m+1}$, $T^{+-\pm}_{2p,2q,2r+1}$, $T^{\pm\pm\pm}_{2p+1,2q+1,2r+1}$ (*четное число плюсов*), $\tilde{T}^+_{2p+1,m}$, E_{12}, E_{14}, W_{12}, Q_{10}, Q_{12}, S_{12}, $U^{+\pm}_{12}$. *Тип* $(2, 1)$ *имеют точки* P^{++}_{8+2k+1}, P^{--}_{8+2k+1}, $R^{-\pm}_{2l,2m+1}$, $T^{+--}_{2p,2q,2r}$, $T^{-\pm\pm}_{2p,2q+1,2r+1}$, $\tilde{T}^+_{2p,m}$,

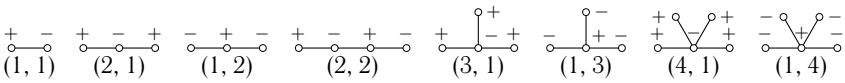


Рис. 149

E_{13}^-, $Z_{13}^{\pm-}$, $W_{13}^{\pm-}$, Q_{11}^+, S_{11}^-, Z_{11}^-. *Тип* (1, 2) *имеют точки* P_{8+2k+1}^{+-}, P_{8+2k+1}^{-+}, $R_{2l,2m+1}^{+\pm}$, $T_{2p,2q,2r}^{+++-}$, $T_{2p,2q+1,2r+1}^{+\pm\pm}$, $\tilde{T}_{2p,m}^-$, E_{13}^+, $Z_{13}^{\pm+}$, $W_{13}^{\pm+}$, Q_{11}^-, S_{11}^+, Z_{11}^+. *Тип* (2, 2) *имеют точки* P_8^+ *при* $a^2 > 4$, P_{8+2k}^{+-}, P_{8+2k}^{-+}, $R_{2l+1,2m+1}^{+-}$, $R_{2l+1,2m+1}^{-+}$, $\tilde{R}_{2m+1}^{-+}$, $\tilde{R}_m^{--}$, $T_{2p+1,2q+1,2r+1}^{\pm\pm\pm}$ (*нечетное число плюсов*), $\tilde{T}_{2p+1,m}^-$. *Тип* (3, 1) *имеют точки* $R_{2l,2m}^{--}$, $\tilde{R}_{2m}^{+--}$, $\tilde{R}_{2m}^{-+-}$, $T_{2p,2q,2r+1}^{--\pm}$, Z_{12}^-, U_{12}^{--}. *Тип* (1, 3) *имеют точки* $R_{2l,2m}^{++}$, $\tilde{R}_{2m}^{+-+}$, $\tilde{R}_{2m}^{-++}$, $T_{2p,2q,2r+1}^{++\pm}$, Z_{12}^+, U_{12}^{-+}. *Тип* (4, 1) *имеют точки* $T_{2p,2q,2r}^{---}$. *Тип* (1, 4) *имеют точки* $T_{2p,2q,2r}^{+++}$.

Следствие. *Для критических точек из п.* 3) *теоремы граф перестройки определяется типом перестройки.*

Замечания. 1. (С. Ю. Оревков). Теорема позволяет описать перестройки гиперповерхностей уровня в окрестностях критических точек, являющихся прямыми суммами критических точек, перечисленных в теореме. Действительно, если прямые слагаемые зависят одно от m, а другое от k переменных, то область положительных (отрицательных) значений суммы на сфере S^{m+k-1} будет соответствовать множеству $(M_\pm^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times M_\pm^{k-1})$ при гомеоморфизме $(S^{m-1} \times D^k) \cup (D^m \times S^{k-1}) \to S^{m+k-1}$, где $M_\pm$ — область положительных (отрицательных) значений прямого слагаемого на соответствующей сфере. В частности, при добавлении квадрата новой переменной (т. е. при переходе к стабильно эквивалентной критической точке) новая область отрицательных значений на сфере получается из старой умножением на интервал, а новая область положительных значений на сфере получается склеиванием двух экземпляров шара по старой области положительных значений на сфере, являющейся границей этого шара.

2. Имеется десять возможных перестроек поверхностей уровня функции трех переменных в окрестности простой или унимодальной критической точки: восемь из них указаны на рис. 149, оставшиеся две — это (1, 0) — минимум, (0, 1) — максимум. Это утверждение легко следует из теоремы и предыдущего замечания.

Г. Многочлен Бернштейна. Пусть $Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ — квадратичная форма. Имеет место тождество

$$\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}(\partial/\partial x_i)^2\right) Q(x)^\lambda = \lambda\left(\lambda + \frac{n}{2} - 1\right) Q(x)^{\lambda-1}.$$

Это тождество использовалось И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым в [94] для определения комплексной степени квадратичной формы как обобщенной функции. Оно также послужило мотивировкой формулируемой ниже теоремы И. Н. Бернштейна.

Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции. Пусть λ — независимая переменная. Рассмотрим множество конечных сумм вида

$\sum_{k,l\geqslant 0} \boldsymbol{a}_{k,l}(x)\lambda^l \boldsymbol{f}(x)^{\lambda-k}$, где $\boldsymbol{a}_{k,l}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$ — ростки голоморфных функций, $\boldsymbol{f}^{\lambda-k}$ — формальные символы. Снабдим это множество очевидным соотношением $\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{f}(x)^{\lambda-k-1} = \boldsymbol{f}(x)^{\lambda-k}$. Рассмотрим дифференциальные операторы $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$ с коэффициентами, голоморфными по x и полиномиальными по λ:

$$P(x, \lambda, \partial/\partial x) = \sum_{k,\alpha\geqslant 0} \boldsymbol{b}_{k,\alpha}(x)\lambda^k(\partial/\partial x)^\alpha.$$

Эти операторы будут действовать на предыдущем множестве, если положить $\partial/\partial x_i \boldsymbol{f}^{\lambda-k} = (\lambda-k)\partial\boldsymbol{f}/\partial x_i \boldsymbol{f}^{\lambda-k-1}$.

Т е о р е м а 12. *Существуют многочлен $B(\lambda)$ и дифференциальный оператор $P(x, \lambda, \partial/\partial x)$, для которых*

$$P(x, \lambda, \partial/\partial x)\boldsymbol{f}^\lambda = B(\lambda)\boldsymbol{f}^{\lambda-1}. \tag{7}$$

Эта теорема была доказана И. Н. Бернштейном [39] для случая, в котором $\boldsymbol{f}$ — многочлен, и распространена Бьёрком [271] на общий случай.

Легко видеть, что множество многочленов $B(\lambda)$, для которых выполнено тождество (7), образует идеал в $\mathbb{C}[\lambda]$. Унитарная образующая b этого идеала называется *многочленом Бернштейна* ростка $\boldsymbol{f}$. Очевидно, что $b(0) = 0$ (для этого достаточно положить $\lambda = 0$ в тождестве (7)). Запишем $b(\lambda) = \lambda\tilde{b}(\lambda)$. Многочлен $\tilde{b}(\lambda)$ называется *приведенным многочленом Бернштейна*.

Одним из мотивов доказательства теоремы 12 послужило следующее ее приложение.

Предположим, что росток $\boldsymbol{f}$ на вещественном подпространстве $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ принимает только вещественные значения. Зафиксируем представителя f ростка и определим две функции $f_\pm$ на окрестности начала координат в $\mathbb{R}^n$:

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } f(x) < 0, \end{cases} \qquad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — гладкая функция с носителем, сосредоточенным в достаточно малой окрестности начала координат. Положим

$$I_\pm(\lambda, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} (f_\pm(x))^\lambda \varphi(x)\, dx,$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — комплексный параметр, $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Интегралы $I_\pm$ можно рассматривать как обобщенные функции, зависящие от параметра λ, на пространстве основных функций $\{\varphi\}$. Интегралы $I_\pm$ корректно определены при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ и голоморфно зависят от λ.

Т е о р е м а 13. *Интегралы $I_\pm$ аналитически продолжаются на $\mathbb{C}$ как мероморфные функции параметра λ, их полюсы лежат на арифметических прогрессиях*

$$\lambda_i,\ \lambda_i - 1,\ \lambda_i - 2,\ \dots,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — корни многочлена Бернштейна ростка $\boldsymbol{f}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$b(\lambda)\int_{\mathbb{R}^n} f_\pm^{\lambda-1}\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}[Pf_\pm^\lambda]\cdot\varphi\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_\pm^\lambda[P^*\varphi]x;$$

здесь b — многочлен Бернштейна, P — дифференциальный оператор, удовлетворяющий вместе с b тождеству (7), $P^* = \sum(-1)^{|\alpha|}\lambda^k(\partial/\partial x)^\alpha b_{k,\alpha}(x)$ — сопряженный оператор. Эти равенства позволяют аналитически продолжить интегралы $I_\pm$ с полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -1$ и т. д.

В [161], [388] Б. Мальгранж связал корни многочлена Бернштейна с собственными числами оператора монодромии в когомологиях, исчезающих в критической точке ростка $\boldsymbol{f}$.

Предположим, что росток $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ имеет критическую точку конечной кратности μ. Каждому собственному числу λ оператора монодромии поставим в соответствие арифметическую прогрессию $L(\lambda)$ всех чисел α, для которых $\exp(2\pi i\alpha) = \lambda$.

Т е о р е м а 14 (см. [388]). *Корни многочлена Бернштейна ростка $\boldsymbol{f}$ принадлежат объединению всех построенных арифметических прогрессий. Каждый из корней меньше чем* 1.

С л е д с т в и е. *Корни — рациональные числа.*

Рациональность корней многочлена Бернштейна ростка с не обязательно конечнократной критической точкой доказана Кашивара в [357].

В [482] в слоях когомологического расслоения Милнора конечнократной критической точки определена фильтрация и в терминах действия оператора монодромии на пространствах этой фильтрации выражены корни многочлена Бернштейна. Очевидные взаимоотношения этой фильтрации и ходжевой фильтрации указывают новые неравенства, связывающие корни многочлена Бернштейна.

Определим упомянутую фильтрацию, которую будем называть *третьей* (после весовой и ходжевой фильтраций). Третью фильтрацию в когомологиях $H^{n-1}(X(t))$ слоя расслоения Милнора обозначим через $\{G_l^k\}$.

Для произвольной голоморфной дифференциальной n-формы ω на X разложим в ряд по ковариантно постоянным сечениям ее геометрическое сечение:

$$s[\omega] = \sum_{p,\alpha} t^\alpha(\ln t)^p A^\omega_{p,\alpha}/p!;$$

см. п. 35.1. Подпространство G_t^k положим равным линейной оболочке всех значений в точке t сечений $A^{\omega}_{p,\alpha}$ с $\alpha \leqslant n-1-k$, $p=0,1,\dots,n-1$, всех форм ω.

Из определения легко следует, что третья фильтрация убывающая: $\dots \subset G_t^{k+1} \subset G_t^k \subset \dots$, члены третьей фильтрации инвариантны относительно оператора монодромии, для любого k подпространство G_k^t содержит подпространство F_t^k ходжевой фильтрации.

Теорема 15 (см. [482]). *Для любого k обозначим через Q_k минимальный многочлен действия оператора монодромии на G_t^k/G_t^{k+1}. Каждому корню λ многочлена Q_k поставим в соответствие число $l_k(\lambda)+1-n$, где $l_k(\lambda)$ определяется условиями $\exp(2\pi i l_k(\lambda))=\lambda$, $k \leqslant l_k(\lambda) < k+1$. Рассмотрим объединение всех построенных чисел для всех k; обозначим их через $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ Тогда $[(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\dots] \in \mathbb{C}[s]$ — приведенный многочлен Бернштейна.*

Следствие. *Если f — росток квазиоднородного многочлена, то корни приведенного многочлена Бернштейна ростка получаются из спектра критической точки роста умножением на -1.* (Доказательство: в этом случае третья фильтрация совпадает с ходжевой.)

Из включений членов ходжевой фильтрации в члены третьей фильтрации вытекает следующая теорема.

Теорема 16 (см. [52], [57]). 1) *Всякий k-кратный корень приведенного многочлена Бернштейна больше $k-n$.*

2) *Если $\alpha \in [p, p+1)$ (где p — целое число) — k-кратный корень приведенного многочлена Бернштейна, то на интервале $(-n+k-p, 1)$ среди членов арифметической прогрессии $L(\exp(-2\pi i\alpha))$ имеется не менее k корней (подсчитанных с кратностями) приведенного многочлена Бернштейна.*

3) *Приведенный многочлен Бернштейна $\tilde{b}(s)$ делится на $(s-\alpha)^n$ тогда и только тогда, когда $\alpha > 0$ и оператор монодромии имеет жорданову клетку размера n с собственным числом $\exp(2\pi i\alpha)$. $\tilde{b}(s)$ делится на $(s-\alpha)^{n-1}$ при целом α тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и оператор монодромии имеет жорданову клетку размера $n-1$ с собственным числом 1.*

Теорема утверждает, что большая часть корней приведенного многочлена Бернштейна расположена справа от точки $s = 1-n/2$ (ср. с симметриями спектра в п. 35.3).

Корни многочлена Бернштейна могут изменяться при деформации критической точки ростка в страте $\mu = \text{const}$.

Пример (см. [445]). Пусть $f(x,y) = ax^5 + y^6 + x^4y$, $a \in \mathbb{C}$ — параметр. При $a=0$ корни приведенного многочлена Бернштейна равны $\{l/24\}$,

где $l = -15, -11, -10, -7, -6, -5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15$. При $a \neq 0$ корни приведенного многочлена Бернштейна равны $\{l/24\}$, где $l = -7, -6, -5, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15$.

В примере корни перескакивают вниз при $a \to 0$. В [482] доказана теорема, утверждающая, что это явление типично, и в терминах третьей фильтрации объясняющая, как могут изменяться корни многочлена Бернштейна при деформациях критической точки вдоль страта $\mu = \text{const}$.

Укажем работы, имеющие отношение к многочлену Бернштейна: [419], [420], [505]—[507].

Д. Смешанная структура Ходжа и локальная алгебра критической точки. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в μ-кратной критической точке, $f\colon X \to S$ — специализация ростка. В этом пункте рассматриваются голоморфные дифференциальные n-формы на X с точностью до форм, делящихся на df, т. е. классы эквивалентности $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, где $\Omega^p(X)$ — пространство голоморфных дифференциальных p-форм на X. Каждому классу эквивалентности ставится в соответствие сечение подходящего расслоения, построенного из весовой и ходжевой фильтраций когомологического расслоения Милнора критической точки ростка. Это сечение называется *оригинальным коэффициентом класса эквивалентности*. Соответствие, относящее классу эквивалентности оригинальный коэффициент, устанавливает связь пространства $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ с когомологиями, исчезающими в критической точке ростка. Приводится пример использования этой связи.

Замечание. Формы из $\Omega^n(X)$ имеют вид $h\,dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, формы из $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ имеют вид $\sum(-1)^k h_k \partial f/\partial x_k \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Поэтому, если область X достаточно мала (а это всегда предполагается), то $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ — μ-мерное векторное пространство над $\mathbb{C}$ (как и локальная алгебра $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$).

Укажем конструкцию оригинального коэффициента. Зафиксируем класс эквивалентности и рассмотрим верхнюю грань порядков форм, принадлежащих классу. Верхнюю грань назовем *ходжевым числом* класса эквивалентности.

Теорема 17 (см. [57, § 9]). *Ходжево число класса равно $+\infty$ тогда и только тогда, когда этот класс есть класс нулевой формы* (*т. е. совпадает с $df \wedge \Omega^{n-1}(X)$*).

Предположим, что выделенный класс не содержит нулевую форму. Среди форм класса, имеющих наибольший порядок, рассмотрим только те формы, у которых главная часть является сечением подрасслоения весовой фильтрации с наименьшим номером. Этот наименьший номер назовем *весовым числом* класса.

Пусть α, l — ходжево и весовое числа класса соответственно. Главная часть каждой дифференциальной формы класса, удовлетворяющей двум предъявленным выше условиям, проектируется в сечение расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$, где $k = n - 1 + [-\alpha]$ (определение расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$ см. на с. 580).

Т е о р е м а 18 (см. [57, § 9]). *Это сечение не зависит от формы класса, удовлетворяющей двум предъявленным выше условиям, и является ненулевым сечением.*

Указанное сечение расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$ называется *оригинальным коэффициентом* класса эквивалентности. Формы класса, имеющие порядок, равный ходжеву числу класса, и у которых главная часть является сечением подрасслоения весовой фильтрации с номером, равным весовому числу класса, называются *оригинальными формами* (ср. с [56], [57]).

Пусть $\omega \in \Omega^n(X)$ — форма порядка α. Предположим, что главная часть формы является сечением весового подрасслоения с номером l и не является сечением весового подрасслоения с номером $l - 1$. Тогда главная часть формы ω проектируется в сечение расслоения $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$, где $k = n - 1 + [-\alpha]$.

Т е о р е м а 19 (см. [57, § 9]). *Если сечение подрасслоения* $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$, *индуцированное главной частью формы* ω, *не является нулевым сечением, то форма* ω *является оригинальной формой в своем классе эквивалентности.*

Ходжевы и весовые числа классов эквивалентности определяют на $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$ дополнительные структуры.

О п р е д е л е н и е. *Спектральным вектором* класса $[\omega] \in \Omega^n/df \wedge \wedge \Omega^{n-1}(X)$ назовем упорядоченную пару $V[\omega] = (\alpha[\omega], l[\omega])$, где $\alpha[\omega]$, $l[\omega]$ — ходжево и весовое числа класса $[\omega]$. Если $[\omega]$ — класс нулевой формы, полагаем $V[\omega] = (\infty, -\infty)$.

Лексикографически упорядочим спектральные векторы. А именно, положим $V > V'$, если $\alpha > \alpha'$ или если $\alpha = \alpha'$ и $l < l'$. Например, $(1/3, 0) < (1/2, 1) < (1/2, 0)$.

Очевидно, что умножение класса эквивалентности на не равное нулю число не изменяет спектрального вектора; спектральный вектор суммы классов не меньше, чем минимум спектральных векторов слагаемых.

Для любого вектора $V \in \mathbb{R}^2$ обозначим через FW_V (соответственно через $FW_{>V}$) множество всех классов из $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$, спектральный вектор которых не меньше V (соответственно больше V). Очевидно, что $FW_V \supset FW_{>V}$ и каждое из этих подмножеств является комплексным векторным пространством.

Фильтрацию $\{FW_V\}_{V\in\mathbb{R}^2}$ назовем *ходжево-весовой фильтрацией* пространства $\Omega^n(X)/df\wedge\Omega^{n-1}(X)$. Положим

$$\operatorname{gr}_V FW = FW_V/FW_{>V}.$$

Градуированным пространством ходжево-весовой фильтрации назовем μ-мерное комплексное пространство

$$\operatorname{gr} FW = \bigoplus_{V\in\mathbb{R}^2} \operatorname{gr}_V FW.$$

Теоремы 16—18 устанавливают изоморфизм пространства $\operatorname{gr} FW$ и выделенного μ-мерного пространства сечений (пространства оригинальных коэффициентов) μ-мерного расслоения

$$\operatorname{gr} F \operatorname{gr} W(f^*) = \bigoplus_{k,l} \operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*).$$

Этот изоморфизм сопоставляет элементу из $\operatorname{gr}_V FW$ его оригинальный коэффициент.

Неформальный итог указанных выше построений таков: после факторизаций по ходжевой и весовой фильтрациям пространства когомологий, исчезающих в критической точке ростка $\boldsymbol{f}$, и пространства $\Omega^n(X)/df\wedge$ $\wedge\,\Omega^{n-1}(X)$ канонически изоморфны. Изоморфизм устанавливается переходом от класса эквивалентности форм к оригинальному коэффициенту класса.

З а м е ч а н и я. 1. Используя указанный изоморфизм, можно определить спектральные пары смешанной структуры Ходжа в исчезающих когомологиях в терминах ходжево-весовой фильтрации на $\Omega^n(X)/df\wedge\Omega^{n-1}(X)$. А именно, выделим пару $(\alpha, l)\in\mathbb{R}^2$ ровно столько раз, какова размерность пространства $\operatorname{gr}_{(\alpha,l)} FW$, если $\alpha\notin\mathbb{Z}$, и пространства $\operatorname{gr}_{(\alpha,l+1)} FW$, если $\alpha\in\mathbb{Z}$. Объединение всех выделенных пар совпадает с набором всех спектральных пар.

2. В каждом расслоении $\operatorname{gr}^k F \operatorname{gr}_l W(f^*)$ имеется связность Гаусса—Манина. Оператор монодромии связности не имеет жордановых клеток. Произвольный оригинальный коэффициент, вообще говоря, не является ковариантно постоянным сечением этой связности; однако направления, определяемые его значениями, инвариантны относительно связности.

3. На пространстве $\operatorname{gr} FW$ с помощью оригинальных коэффициентов можно ввести смешанную структуру Ходжа.

Теперь приведем пример утверждения, доказательство которого основано на указанном выше изоморфизме.

Т е о р е м а 20 (см. [56]). *Пусть* $N\colon H^{n-1}(X,\mathbb{C})\to H^{n-1}(X,\mathbb{C})$ *— логарифм унипотентной части оператора монодромии. Пусть*

$\{f\}\colon \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x) \to \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$ — *оператор умножения на* f. *Тогда для любого* $j \geqslant 0$ *имеет место неравенство*

$$\dim(\mathrm{Ker}(\{f\}^j)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(N^j)),$$

где $\dim(\mathrm{Ker}(\ ))$ — *размерность ядра оператора*.

Следствие ([446]). *Если оператор* $\{f\}$ *не имеет жордановых клеток размера* j *и более, то таких клеток нет и у оператора монодромии*.

Например, в квазиоднородном случае $\{f\}$ — нулевой оператор, поэтому оператор монодромии диагонализируется.

Набросок доказательства теоремы. Жорданова структура оператора $\{f\}$ совпадает с жордановой структурой оператора умножения на f в $\Omega^n(X)/df \wedge \Omega^{n-1}(X)$. Доказывается, что оператор умножения на f переводит $FW_{(\alpha,l)}$ в $FW_{(\alpha+1,l-2)}$ для любых (α, l) (см. доказательство леммы 35.12) Поэтому $\{f\}$ индуцирует оператор $\mathrm{gr}\{f\}\colon \mathrm{gr}\,FW \to \mathrm{gr}\,FW$, переводящий $\mathrm{gr}_{(\alpha,l)}FW$ в $\mathrm{gr}_{(\alpha+1,l-1)}FW$ для любых (α, l). Очевидно, что жордановы структуры оператора $\{f\}$ и оператора $\mathrm{gr}\{f\}$ связаны соотношением

$$\dim(\mathrm{Ker}\{f\}^j) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}((\mathrm{gr}\{f\})^j))$$

для любого $j \geqslant 0$.

Далее с использованием теоремы 35.3 о смешанной структуре Ходжа доказывается, что при изоморфизме пространства $\mathrm{gr}\,FW$ с пространством оригинальных коэффициентов оператор $\mathrm{gr}\{f\}$ переходит в оператор N, умноженный на каждом слагаемом пространства $\mathrm{gr}\,fW$ на соответствующее отличное от нуля число. Теорема доказана.

Замечание. В [57] доказано следующее утверждение. Назовем *длиной спектра* критической точки ростка f разность между наибольшим и наименьшим спектральными числами. Если j больше длины спектра, то $\{f\}^j = 0$, другими словами, $f^j \in \mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Поскольку спектр принадлежит интервалу $(-1, n-1)$, всегда имеем $f^n \in (\partial f/\partial x)$ (см. [273], [382]).

§ 37. Отображение периодов и форма пересечений

Пусть заданы гладкое расслоение и дифференциальная форма на пространстве расслоения, замкнутая на слоях. В такой ситуации возникает отображение периодов формы — многозначное отображение базы расслоения в когомологии слоя. Точке базы сопоставляется класс когомологий формы в слое над точкой, перенесенный в когомологии отмеченного слоя. Многозначность возникает в силу неоднозначности выбора пути перенесения.

Обозначим форму через ω. Выделим базис $\delta^0_1, \ldots, \delta^0_\mu$ гомологий отмеченного слоя в размерности, равной размерности формы. Распространим

базис по непрерывности в соседние слои и построим многозначное, непрерывно зависящее от точки базы семейство $\delta_1, \ldots, \delta_\mu$ базисов гомологий слоев расслоения. Базис $\delta_1^0, \ldots, \delta_\mu^0$ определяет координаты в когомологиях отмеченного слоя. В этих координатах отображение периодов имеет вид

$$\lambda \mapsto \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega \right),$$

где λ — точка базы расслоения.

Отображение периодов позволяет переносить на базу расслоения структуры, имеющиеся в пространстве когомологий. Например, индекс пересечения классов когомологий средней размерности в когомологиях слоя переходит в билинейную форму на расслоении базы (если сама дифференциальная форма имеет среднюю размерность).

В этом параграфе рассматриваются отображения периодов в расслоении Милнора, связанном с версальной деформацией критической точки функции. В этом случае размерность базы равна разности средних когомологий слоя. Оказывается, для дифференциальных форм отображение периодов невырождено и в естественном смысле не зависит от дифференциальной формы, его определяющей. Это означает, что конструкции, связанные с отображением периодов, определяются расслоением и в конечном счете критической точкой.

Далее рассматривается билинейная форма, возникающая на базе расслоения (т. е. на дополнении к дискриминанту) из индекса пересечения. Доказывается, что при некоторых условиях билинейная форма аналитически продолжается на всю базу версальной деформации.

В ряде случаев эта билинейная форма является симплектической структурой. Оказывается, страты базы версальной деформации имеют в этой симплектической структуре особые лагранжевы свойства отражающие типы распадений критической точки на более простые. Некоторые из стратов доставляют важные примеры лагранжевых многообразий с особенностями.

37.1. Конструкции.

А. Определения. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в критической точке кратности μ. Определим расслоение, в котором будем изучать отображения периодов. Это расслоение является расслоением гиперповерхностей нулевых уровней функций, составляющих минимальную версальную деформацию ростка.

А именно, зафиксируем представителя версальной деформации ростка f в виде

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2\varphi_2(x) + \ldots + \lambda_\mu\varphi_\mu(x),$$

где функции $\varphi_1 \equiv 1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu$ порождают базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$. Выберем достаточно малый шар $B = \{x \in \mathbb{C}^n\colon |x < \rho\}$. В за-

висимости от ρ выберем достаточно малый шар $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C}^\mu : |\lambda| < \delta\}$. Обозначим через Σ гиперповерхность всех тех точек $\lambda \in \Lambda$, для которых локальное множество нулевого уровня $X_\lambda = \{x \in B : F(x, \lambda) = 0\}$ особо. Гиперповерхность Σ называется *дискриминантом*.

Над дополнением $\Lambda \setminus \Sigma$ к дискриминанту многообразия $\{X_\lambda\}$ образуют локально тривиальное расслоение.

З а м е ч а н и е. Это расслоение отличается от расслоения Милнора деформации F (см. п. 32.3). Чтобы получить это расслоение из расслоения Милнора деформации F, нужно ограничить расслоение Милнора на множество нулевых значений деформации F.

Расслоение над $\Lambda \setminus \Sigma$ будем называть *центральным* расслоением Милнора.

Обозначим через Ω^p пространство голоморфных p-форм на $B \times \Lambda$. Рассмотрим произвольную $(n-1)$-форму $\omega \in \Omega^{n-1}$. Ее ограничение на произвольный слой центрального расслоения Милнора — замкнутая форма. *Отображением периодов* формы ω назовем сечение

$$P_\omega : \lambda \mapsto [\omega|_{X_\lambda}] \in H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$$

расслоения $(n-1)$-мерных когомологий, ассоциированного с центральным расслоением Милнора (более коротко: центрального когомологического расслоения Милнора). Для каждого целого $k \geqslant 0$ назовем k-м *присоединенным отображением периодов* формы ω сечение

$$P^k_\omega = (\nabla_{\partial/\partial\lambda_1})^k P_\omega$$

того же расслоения (здесь $\nabla_{\partial/\partial\Lambda}$ — дифференцирование в связности Гаусса—Манина вдоль векторного поля $\partial/\partial\lambda_1$; напомним, что λ_1 — свободный член версальной деформации).

З а м е ч а н и е. Пусть $\delta_1(\lambda), \ldots, \delta_\mu(\lambda)$ базис в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{Z})$, непрерывно зависящий от λ. В этом базисе

$$P^k_\omega(\lambda) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^k \left(\int_{\delta_1(\lambda)} \omega, \ldots, \int_{\delta_\mu(\lambda)} \omega\right).$$

Назовем отображение P^k_ω *невырожденным*, если векторы $v_i(\lambda) = (\nabla_{\partial/\partial\lambda_i} P^k_\omega)|_\lambda$, $i = 1, \ldots, \mu$, линейно независимы для всех точек $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, достаточно близких к началу координат в Λ (т. е. если отображение P^k_ω, записанное в координатах в ковариантно постоянном базисе, задает многозначное отображение в $\mathbb{C}^\mu$ с якобианом, отличным от нуля для всех точек $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, достаточно близких к началу координат);

инфинитезимально невырожденным (инф. невырожденным), если на оси λ_1, проходящей через начало координат в Λ, определитель матрицы,

составленной из координат векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе, имеет при $\lambda_1 \to 0$ нуль порядка $\mu(n-2k-2)/2$.

Замечание. Координаты векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе многозначны, однако квадрат определителя матрицы, составленной из координат, — однозначная голоморфная функция в $\Lambda \setminus \Sigma$, мероморфная в Λ (см. теорему 34.2).

Можно показать, что свойство отображения P^k_ω быть инф. невырожденным определяется конечной струей формы ω в точке $0 \times 0 \in B \times \Lambda$ (см. формулы (3), (4) на с. 515 и лемму 34.3).

Будем говорить, что свойство инф. невырожденности k-х присоединенных отображений периодов является *общим* при данном k, если струи, определяющие инф. невырожденные отображения, составляют в пространстве струй достаточно высокого порядка дополнение к собственному аналитическому подмножеству.

Б. Невырожденность и устойчивость.

Теорема 1 (см. [71], [57, § 10]). *Для любой формы $\omega \in \Omega^{n-1}$ и любого $k \geqslant 0$, если k-е присоединенное отображение периодов формы ω инф. невырождено, то оно невырождено.*

Доказательство. Как в теореме 34.2, докажем, что квадрат определителя матрицы, составленной из координат векторов $\{v_i\}$ в ковариантно постоянном базисе, в произвольной неособой точке дискриминанта имеет нуль порядка не ниже чем $(n-2k-2)$. Как в следствии 1 теоремы 34.2, заключим, что квадрат определителя не обращается в нуль на $\Lambda \setminus \Sigma$ в достаточно малой окрестности начала координат в шаре Λ. Это означает, что в окрестности начала координат в шаре Λ матрица Якоби отображения P^k_ω невырождена.

Теорема 2 (см. [71], [57, § 10]). *При $k = 0$ свойство инф. невырожденности общее. Если форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$, невырождена, то свойство инф. невырожденности общее при любом $k \geqslant 0$.*

Замечания. 1. В [71] доказано общее утверждение: если среди спектральных чисел критической точки ростка f нет целых чисел, меньших k, то свойство инф. невырожденности общее для этого k. Теорема 2 вытекает из этого утверждения и теоремы 36.3.

2. Отметим следующее следствие леммы 34.3: если для данного $k \geqslant 0$ существует инф. невырожденное отображение периодов P^k_ω, то свойство инф. невырожденности для этого k общее.

Определим понятие эквивалентных отображений периодов. Неформальное определение таково: два отображения периодов назовем эквивалентными, если существует диффеоморфизм пары Λ, Σ, обладающий следующим свойством: первое отображение равно суперпозиции диффеомор-

физма и второго отображения. Это определение требует уточнения ввиду неоднозначности отображения периодов. Кроме того, мы будем рассматривать диффеоморфизмы не всего шара Λ, а лишь окрестности начала координат.

О п р е д е л е н и е. Два отображения P^k_ω, P^k_η назовем *эквивалентными*, если существуют окрестность U начала координат в Λ и непрерывное отображение $H\colon U \times [0, 1]$, обладающие следующими свойствами:

а) $H(\cdot, 0)$ — тождественное отображение;

б) $H(\cdot, s)$ при любом $s \in [0, 1]$ — голоморфное отображение с ненулевым якобианом;

в) при любом $s \in [0, 1]$ точка $H(\lambda, s)$ принадлежит Σ тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Sigma$;

г) $U \cap H(U, 1)$ содержит начало координат;

д) для любого $\lambda \in U \setminus (U \cap \Sigma)$ вектор $P^k_\omega(\lambda)$, параллельно перенесенный в связности Гаусса—Манина вдоль кривой $H(\lambda, \cdot)$ в точку $H(\lambda, 1)$, равен значению в этой точке сечения P^k_η.

Т е о р е м а 3 (см. [71]). 1) *Любое инф. невырожденное k-е присоединенное отображение периодов P^k_ω устойчиво, т. е. k-е присоединенные отображения периодов P^k_η для всех форм η, близких к ω, эквивалентны отображению P^k_ω.*

2) *Если $\mathbf{f}$ — квазиоднородный росток, то все инф. невырожденные k-е присоединенные отображения периодов эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть форма ω зависит от параметра и при нулевом значении параметра соответствующее k-е присоединенное отображение периодов инф. невырождено. Докажем, что для всех малых значений параметра соответствующие k-е присоединенные отображения периодов эквивалентны. Для этого построим зависящее от параметра голоморфное векторное поле в окрестности начала координат в Λ, которое при каждом значении параметра касается гиперповерхности Σ и поток которого устанавливает одновременно требуемую эквивалентность всех отображений с малыми значениями параметра. Поле строится сначала на $\Lambda \setminus \Sigma$, затем проверяется, что поле голоморфно продолжено на Σ и это голоморфное продолжение касается гиперповерхности Σ.

Легко видеть, что требуемое поле на $\Lambda \setminus \Sigma$ существует и единственно. Действительно, рассмотрим k-е присоединенные отображения как многозначные отображения в когомологии отмеченного слоя. Каждая кривая потока требуемого поля должна соединять точки с равными образами относительно k-х присоединенных отображений периодов рассматриваемого однопараметрического семейства. Поскольку при малых значениях параметра эти отображения в окрестности каждой точки являются диффеоморфизмами в когомологии отмеченного слоя, через каждую точку из $\Lambda \setminus \Sigma$ можно

провести — и только единственным способом — параметризованную кривую точек, имеющих единый образ.

Утверждение о том, что построенное поле голоморфно продолжается на Σ и голоморфное продолжение касается Σ, достаточно проверить около неособых точек дискриминанта. Тогда в произвольной точке дискриминанта утверждение будет следовать из стандартной теоремы о стирании особенностей в коразмерности 2. Проверка утверждения около неособых точек дискриминанта проводится с помощью явных формул, аналогичных формулам из леммы 34.2 (при $k = 0$ — с помощью формул из леммы 34.2); см. [71].

Вторая часть теоремы следует из первой части и теоремы В. М. Закалюкина [131], утверждающей, что для квазиоднородного ростка $\boldsymbol{f}$ векторное поле на Λ, касающееся дискриминанта, обязательно равно нулю в начале координат.

В. Форма пересечений в кокасательном расслоении. Каждому невырожденному отображению периодов P^k_ω отвечает естественный изоморфизм расслоений

$$T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \to H^{n-1}$$

и двойственный ему изоморфизм

$$H_{n-1} \to T^*(\Lambda \setminus \Sigma).$$

Здесь T_* и T^* — соответственно касательное и кокасательное расслоения, H_{n-1} и H^{n-1} — соответственно гомологическое и когомологическое центральные расслоения Милнора.

Замечание. Здесь и далее подразумевается, что изоморфизмы определены лишь над окрестностью начала координат в Λ (см. определение невырожденности).

В слоях гомологического расслоения имеется билинейное спаривание — индекс пересечения циклов средней размерности в X_λ. Таким образом, невырожденное отображение периодов P^k_ω определяет *форму пересечений* Φ^k_ω на кокасательном расслоении $T^*(\Lambda \setminus \Sigma)$.

Теорема 4 (см. [71]). *Форма Φ^k_ω голоморфна в $\Lambda \setminus \Sigma$. Если отображение P^k_ω инф. невырождено и $k \geqslant [(n-1)/2]$, то форма Φ^k_ω голоморфно продолжается на $T^*\Lambda$.*

Первое утверждение теоремы очевидно, поскольку форма Φ^k_ω индуцируется из постоянной формы голоморфным отображением. Второе утверждение достаточно проверить около неособых точек дискриминанта. Около таких точек матрица Якоби k-го присоединенного отображения периодов явно выписывается с помощью формул леммы 34.2. Форма Φ^k_ω индуцируется из постоянной формы с помощью матрицы, обратной к сопряженной с матрицей Якоби. Поэтому теорема справедлива, если разложения в ряды

(аналогичные рядам, указанным в лемме 34.2) координат обратной матрицы содержат только неотрицательные степени параметров. Непосредственно проверяется, что при указанных k это так; см. [71].

Теорема 5 (см. [71]). *Форма пересечений Φ^k_ω, отвечающая инф. невырожденному отображению P^k_ω, устойчива, т. е. формы пересечений Φ^k_η для всех форм η, близких к ω, переходят в Φ^k_ω при подходящем голоморфном диффеоморфизме пары Λ, Σ в себя. Если $\mathbf{f}$ — квазиоднородный росток, то форма Φ^k_ω, отвечающая инф. невырожденному отображению P^k_ω, определена инвариантно с точностью до диффеоморфизма пары Λ, Σ в себя.*

Теорема 5 — прямое следствие теоремы 3.

Г. Ядерное отображение. Выясним, какой объект в касательном расслоении $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ индуцируется невырожденным присоединенным отображением периодов из формы пересечений в исчезающих гомологиях.

Пусть $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$. Форма пересечений S в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ определяет линейное отображение

$$\pi\colon H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C}) \to H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C}).$$

Ядро отображения π совпадает с ядром формы S. На образе Im этого отображения корректно определена невырожденная билинейная форма S^*:

$$S^*(\alpha, \beta) = S(\pi^{-1}(\alpha), \pi^{-1}(\beta)).$$

Пусть P^k_ω — невырожденное присоединенное отображение периодов. Изоморфизм $dP^k_\omega\colon T_*(\Lambda \setminus \Sigma) \to H^{n-1}$ индуцирует в касательном расслоении к $\Lambda \setminus \Sigma$ распределение $\operatorname{Im}^k_\omega\colon \lambda \mapsto \operatorname{Im}^k_\omega(\lambda)$, где $\operatorname{Im}^k_\omega(\lambda) \subset T_{*,\lambda}(\lambda \setminus \Sigma)$ — подпространство, изоморфное подпространству $\operatorname{Im}(\lambda) \subset H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Коразмерность этого распределения равна размерности ядра формы пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.

На плоскостях распределения $\operatorname{Im}^k_\omega$ корректно определена невырожденная билинейная *форма пересечений* Ψ^k_ω, индуцированная из формы S^*.

Оказывается, что распределение $\operatorname{Im}^k_\omega$ интегрируется, и, более того, его интегральные многообразия являются слоями голоморфного отображения $\Lambda \setminus \Sigma$ в комплексное векторное пространство. Это отображение дается следующей геометрической конструкцией.

Рассмотрим конечномерное комплексное векторное пространство Ker всех однозначных ковариантно постоянных сечений центрального гомологического расслоения Милнора. Нетрудно убедиться, что произвольное сечение из Ker может быть получено следующим образом. Нужно выделить в слое центрального гомологического расслоения Милнора подходящий класс гомологий, принадлежащий ядру формы пересечений, и распространить его до ковариантно постоянного сечения. В частности, размерность

пространства Ker равна размерности ядра формы пересечений в слоях гомологического расслоения.

С пространством Ker свяжем комплексное векторное пространство функций $\{h_\gamma\}_{\gamma\in\mathrm{Ker}}$ на $\Lambda\setminus\Sigma$, где функция h_γ определена формулой

$$h_\gamma(\lambda)=\langle P^k_\omega(\lambda),\,\gamma(\lambda)\rangle=\left(\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\right)^k\int_{\lambda(\gamma)}\omega.$$

Определим голоморфное отображение

$$K^k_\omega\colon\Lambda\setminus\Sigma\to\mathrm{Ker}^*,$$

где Ker^* — пространство, сопряженное с Ker. Для $\lambda\in\Lambda\setminus\Sigma$ положим значение $K^k_\omega(\lambda)$ равным линейной функции на Ker, которая на векторе $\gamma\in\mathrm{Ker}$ равна $h_\gamma(\lambda)$. Отображение K^k_ω назовем *ядерным отображением*, ассоциированным с формой ω.

Замечание. Предложим эквивалентную конструкцию ядерного отображения. В центральном когомологическом расслоении H^{n-1} имеется подрасслоение Im, слоями которого являются подпространства $\{\mathrm{Im}(\lambda)\}$. Это подрасслоение инвариантно относительно связности Гаусса—Манина. Поэтому связность Гаусса—Манина определена на факторрасслоении H^{n-1}/Im. Нетрудно убедиться, что монодромия связности на факторрасслоении тривиальна. Отображение периодов P^k_ω — это сечение расслоения H^{n-1}. Сечение P^k_ω индуцирует сечение факторрасслоения. Перенося значения сечения факторрасслоения в отмеченный слой факторрасслоения, получим отображение базы $\Lambda\setminus\Sigma$ в пространство ковариантно постоянных сечений расслоения H^{n-1}/Im. Это и есть ядерное отображение.

Теорема 6. 1) *Для любых $k\geqslant 0$, $\omega\in\Omega^{n-1}$ ядерное отображение K^k_ω голоморфно на $\Lambda\setminus\Sigma$ и мероморфно на Λ. Если $k=0$, то ядерное отображение голоморфно продолжается на Λ.*

2) *Если отображение периодов P^k_ω невырождено, то ядерное отображение имеет максимальный ранг на $\Lambda\setminus\Sigma$ в окрестности начала координат. Более того, касательные плоскости к слоям ядерного отображения совпадают с плоскостями распределения* Im^k_λ.

Доказательство. Утверждение п. 1) — прямое следствие теорем 32.4, 32.7. Первая часть п. 2) — прямое следствие невырожденности отображения периодов. Для доказательства второй части достаточно заметить, что вектор $\xi\in T_{*,\lambda}(\Lambda\setminus\Sigma)$ принадлежит $\mathrm{Im}^k_\omega(\lambda)$ тогда и только тогда, когда $\langle dP^k_\omega(\xi),\,\alpha\rangle=0$ для любого класса гомологий $\alpha\in H_{n-1}(X_\lambda,\mathbb{C})$, принадлежащего ядру формы пересечений, т. е. тогда и только тогда, когда $\langle dh_\gamma,\,\xi\rangle=0$ для любого $\gamma\in\mathrm{Ker}$. Теорема доказана.

Следствие теоремы 3. *Ядерное отображение K^k_ω и форма пересечений Ψ^k_ω на его слоях, отвечающие инф. невырожденному*

отображению P^k_ω, устойчивы, т. е. пары K^k_η, Ψ^k_η для всех форм η, близких к ω, переходят в пару K^k_ω, Ψ^k_ω при подходящем голоморфном диффеоморфизме пары Λ, Σ в себя. Если $\boldsymbol{f}$ — квазиоднородный росток, то пара K^k_ω, Ψ^k_ω, отвечающая инф. невырожденному отображению P^k_ω, определена инвариантно с точностью до диффеоморфизма пары Λ, Σ в себя.

Если число n аргументов ростка $\boldsymbol{f}$ равно двум, теорема 35.3 о смешанной структуре Ходжа позволяет доказать невырожденность продолжения на λ ядерного отображения $K^{k=0}_\omega$.

Т е о р е м а 7. *Если $n = 2, k = 0$ и P_ω — инф. невырожденное отображение периодов, то ядерное отображение K^0_ω голоморфно продолжается на Σ до отображения с максимальным рангом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимо проверить, что дифференциалы функций $\{h_\gamma\}_{\gamma\in \mathrm{Ker}}$ в начале координат в Λ образуют пространство размерности, равной размерности ядра формы пересечений в гомологиях. Для этого достаточно проверить то же самое на оси λ_1, проходящей через начало координат в Λ. Пусть $\gamma \in \mathrm{Ker}$, тогда

$$dh_\gamma = \sum \langle \nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega, \gamma\rangle \, d\lambda_j.$$

Над осью λ_1 сечение $\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega$ является геометрическим сечением подходящей 2-формы (см. формулы (3), (4) на с. 515). Теперь утверждение теоремы легко следует из утверждения в) в п. 36.2.А и инф. невырожденности отображения P_ω (см. также лемму 2.4 в [57]).

Рассмотрим вне дискриминанта произвольный слой ядерного отображения K^k_ω, отвечающего невырожденному отображению периодов P^k_ω. В касательном расслоении к слою определена невырожденная форма пересечений Ψ^k_ω. *Если число n аргументов ростка $\boldsymbol{f}$ четно, то форма пересечений Ψ^k_ω является на слое голоморфной симплектической структурой.* Действительно, эта форма невырождена, кососимметрична и индуцирована голоморфным отображением из постоянной формы, в частности, замкнута. *При нечетном n форма пересечений Ψ^k_ω — (комплексная) голоморфная метрика на слое с нулевой кривизной* (в связности, сохраняющей метрику и индуцированной из связности Гаусса—Манина).

Д. Н е в ы р о ж д е н н а я ф о р м а п е р е с е ч е н и й. Рассмотрим подробнее случай, когда форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ невырождена. В этом случае для невырожденного отображения P^k_ω форма пересечений определена на всем касательном расслоении $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$.

Т е о р е м а 8 (см. [71]). 1) *Если n четно, $k = n/2 - 1$ и форма пересечений Ψ^k_ω отвечает инф. невырожденному отображению периодов P^k_ω, то она продолжается до симплектической структуры на Λ.*

2) *Если n нечетно, $k = (n-1)/2$ и форма Ψ^k_ω отвечает инф. невырожденному отображению периодов P^k_ω, то задаваемый ею изоморфизм $T^*(\Lambda \setminus \Sigma) \to T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ определяет изоморфизм $\mathbb{C}\{\lambda\}$-модулей ростков в начале координат в Λ дифференциальных 1-форм и векторных полей, касающихся гиперповерхности Σ.*

Для доказательства теоремы достаточно проверить соответствующие утверждения около неособых точек дискриминанта, см. [71].

37.2. Примеры. А. Пусть $f\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — квазиоднородный росток; $\varphi_1 \equiv 1$, $\varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ — набор одночленов, проектирующихся в базис над $\mathbb{C}$ локальной алгебры $\mathbb{C}\{x\}/(\partial f/\partial x)$;

$$F(x, \lambda) = f(x) + \lambda_1 + \lambda_2\varphi_2(x) + \dots + \lambda_\mu\varphi_\mu(x);$$
$$\omega = x_1\, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_\mu.$$

Тогда P_ω — инф. невырожденное отображение периодов. Действительно, согласно формулам (3), (4) на с. 515 над осью λ_1, проходящей через начало координат, сечения $\{\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P_\omega\}$, $j = 1, \dots, \mu$, представляются формами $\{-\varphi_j dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n/df\}$. Теперь утверждение следует из теоремы 35.6.

Б. См. [250], [71]. Пусть $f = x^{\mu+1}$, $\mu \geqslant 1$,

$$F(x, \lambda) = x^{\mu+1} + \lambda_2 x^{\mu-1} + \dots + \lambda_{\mu+1}.$$

Мы намеренно изменили принятую выше нумерацию параметров деформации: здесь индекс i параметра λ_i пропорционален его; квазиоднородной степени. Выберем $\omega = x$. Ниже приведена формула для компонент $g_{k,l}$, $k, l = 2, \dots, \mu+1$, формы пересечений Φ^0_ω в кокасательном расслоении. Положим $\lambda_0 = 1$, $\lambda_i = 0$ при $i = 1$, $i < 0$ или $i > \mu + 1$. Тогда

$$g_{k,l} = \sum_{\substack{i \geqslant \max(k,l) \\ i+j=k+l-2}} (i-j)\lambda_i\lambda_j + \left[1 - \min(k, l) + \frac{(k-l)(l-1)}{\mu+1}\right]\lambda_{k-1}\lambda_{l-1}.$$

В. В случае простых ростков функций нечетного числа переменных, принадлежащих классам D_μ и E_6, формулы для метрики $\Phi^{(n-1)/2}_\omega$ на кокасательном расслоении, отвечающей квазиоднородной форме $\mathrm{const} \cdot x_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$, приведены в [99] на с. 14.

Г. Приведем примеры симплектических структур $\Psi^{n/2-1}_\omega$ на базах версальных деформаций. Такие примеры известны для ростков функций двух переменных, имеющих простые критические точки.

Среди простых критических точек функций четного числа переменных невырожденные формы пересечений в исчезающих гомологиях имеют кри-

тические точки типов A_{2k}, $k \geqslant 1$, E_6, E_8; формы пересечений критических точек типов D_{2k+1}, $k \geqslant 2$, E_7 имеют одномерное ядро; формы пересечений критических точек типов D_{2k}, $k \geqslant 2$, имеют двумерное ядро.

Объясним, как вычислить симплектическую структуру Ψ^0_ω для ростков функций двух переменных, имеющих критические точки типов A_{2k}, $k \geqslant 1$, E_6, E_8, а затем приведем результаты вычислений для критических точек малых кратностей. Пусть

$$F = f(x, y) + \lambda_1 + \varphi_2(x, y)\lambda_2 + \ldots + \varphi_\mu(x, y)\lambda_\mu$$

— квазиоднородная версальная деформация ростка $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^2, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$, имеющего критическую точку одного из типов A_{2k}, E_6, E_8. Пусть $\omega = y\,dx$. Согласно примеру А форма ω порождает инф. невырожденное отображение периодов P_ω. Согласно теореме 8 отвечающая отображению периодов форма пересечений Ψ_ω — симплектическая структура на Λ. Форма Ψ_ω имеет вид $\sum\limits_{k<l} g_{k,l}\,d\lambda_k \wedge d\lambda_l$, где $g_{k,l}(\lambda) = \langle \nabla_{\partial/\partial\lambda_k}\omega|_\lambda, \nabla_{\partial/\partial\lambda_l}\omega|_\lambda\rangle$, $\langle\,,\,\rangle$ — форма пересечений в $H^1(X_\lambda, \mathbb{C})$. Мы представим каждый коэффициент $g_{k,l}(\lambda)$ как вычет подходящего выражения на алгебраической кривой

$$Y_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2\colon F(x, y, \lambda) = 0\}.$$

Л е м м а 1. *Для любого $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ естественное вложение слоя X_λ расслоения Милнора в алгебраическую кривую Y_λ индуцирует изоморфизм (ко)гомологий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что для квазиоднородного простого ростка $\boldsymbol{f}$ квазиоднородные степени функций $\{\varphi_j\}$ меньше квазиоднородной степени ростка $\boldsymbol{f}$.

Согласно лемме 1 коэффициент $g_{k,l}(\lambda)$ можно вычислить как индекс пересечения классов когомологий на Y_λ, которые изоморфны классам $\nabla_{\partial/\partial\lambda_k}\omega|_\lambda$, $\nabla_{\partial/\partial\lambda_l}\omega|_\lambda$.

Согласно формулам (3), (4) на с. 515 указанные классы когомологий на Y_λ представляются формами $\omega_k = \varphi_k dx \wedge dy/d_{x,y}F$, $\omega_l = \varphi_l dx \wedge dy/d_{x,y}F$ соответственно. Чтобы вычислить индекс пересечения в $H^1(Y_\lambda, \mathbb{C})$ классов когомологий форм ω_k, ω_l, нужно одну из них изменить на дифференциал функции так, чтобы она стала формой с компактным носителем, затем формы нужно перемножить и проинтегрировать по y_λ:

$$g_{k,l}(\lambda) = \int_{Y_\lambda} (\omega_k - d\alpha) \wedge \omega_l = -\int_{Y_\lambda} d\alpha \wedge \omega_l$$

(второе равенство справедливо, поскольку формы ω_k, ω_l голоморфны).

Воспользовавшись формулой Стокса, получаем правило для вычисления коэффициента $g_{k,l}(\lambda)$: *на кривой Y_λ в окрестности ее единственной*

бесконечно удаленной точки представим форму ω_k *в виде дифференциала голоморфной функции*: $\omega_k = d\alpha$, *тогда*

$$g_{k,l}(\lambda) = 2\pi i \operatorname{Res}_\infty[\alpha\omega_l],$$

где $\operatorname{Res}_\infty$ — *вычет в бесконечно удаленной точке*

Теперь приведем ответы.

а) Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^3$ — росток типа A_2, $f + \lambda_1 x + \lambda_2$; тогда

$$\Psi_\omega = \text{const} \cdot d\lambda_1 \wedge d\lambda_2.$$

б) Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^5$ — росток типа A_4, $F = f + \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^2 + \lambda_3 x + \lambda_4$; тогда

$$\Psi_\omega = \text{const} \cdot [d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 3d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + \lambda_1 dx_1 \wedge d\lambda_2].$$

в) Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^7$ — росток типа A_6, $F = f + \lambda_1 x^5 + \lambda_2 x^4 + \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$; тогда

$$\Psi_\omega = \text{const} \cdot [3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 - 9\lambda_1 d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 6\lambda_2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 + (\lambda_3 + 3\lambda_1^2) d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 + 5d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + 5\lambda_1 d\lambda_2 \wedge d\lambda_3 + 15 d\lambda_3 \wedge d\lambda_4].$$

г) Пусть $\boldsymbol{f} = -y^3 + x^4$ — росток типа E_6, $F = -y^3 + x^4 + \lambda_1 x^2 y + \lambda_2 xy + \lambda_3 y + \lambda_4 x^2 + \lambda_5 x + \lambda_6$, тогда

$$\Psi_\omega = \text{const} \cdot [-3d\lambda_1 \wedge d\lambda_6 + [(5/9)\lambda_1^3 - 27\lambda_4] d\lambda_1 \wedge d\lambda_4 + 2\lambda_1^2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 d\lambda_1 \wedge d\lambda_2 - (15/2)\, d\lambda_2 \wedge d\lambda_5 + 15 d\lambda_3 \wedge d\lambda_4].$$

Д. Пусть $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — росток голоморфной функции в критической точке кратности μ, F — представитель версальной деформации, $\omega \in \Omega^{n-1}$ — форма, определяющая невырожденное отображение периодов P^k_ω для некоторого k. Пусть форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ невырождена и, следовательно, на $T_*(\Lambda \setminus \Sigma)$ определена невырожденная форма Ψ^k_ω. Предположим, что функции $\boldsymbol{f}$, F, ω вещественны на вещественных частях областей определения. Обсудим, в какой степени вещественна форма Ψ^k_ω на вещественной части своей области определения, т. е. на $T_*(\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$.

Т е о р е м а 9. *При сделанных предположениях форма пересечений* Ψ^k_ω *на* $T_*(\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma))$ *принимает только вещественные значения*, *если* n *нечетно*, *и принимает только чисто мнимые значения*, *если* n *четно*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функции $\boldsymbol{f}|_{\mathbb{R}^n}$, $F|_{(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^\mu) \cap (B \times \Lambda)}$, $\omega|_{T_*((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \cap (B \times \Lambda))}$ вещественны. Пусть λ принадлежит $\mathbb{R}^\mu \cap (\Lambda \setminus \Sigma)$. Отображение dP^k_ω переводит $T_\lambda(\mathbb{R}^\mu)$ в μ-мерное вещественное подпространство $(H_\mathbb{R})$ в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Нужно выяснить, какие значения принимает форма пересечений на парах векторов из $H_\mathbb{R}$. Опишем $H_\mathbb{R}$.

Рассмотрим $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R})$ как подпространство в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. На каждом из этих пространств действует инволюция, индуцированная комплексным сопряжением $(x, \lambda) \mapsto (\bar{x}, \bar{\lambda})$, где $(x, \lambda) \in X_\lambda$. Разложим пространство $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R})$ в прямую сумму подпространств, составленных соответственно из инвариантных и антиинвариантных классов когомологий:

$$H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{R}) = I \oplus A.$$

Л е м м а 2. *Имеет место равенство* $H_{\mathbb{R}} = I \oplus iA$, *где* $i^2 = -1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о легко следует из того, что классы когомологий $\{\nabla_{\partial/\partial\lambda_j} P^k_\omega\}$ представляются на X_λ голоморфными формами, вещественными на вещественной части многообразия X_λ.

Закончим доказательство теоремы. Инволюция σ комплексного сопряжения меняет ориентацию на X_λ, если n четно, и не меняет ориентации при нечетном n. Поэтому $\langle \cdot, \cdot \rangle = -\langle \sigma \cdot, \sigma \cdot \rangle$, если n четно, $\langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \sigma \cdot, \sigma \cdot \rangle$, если n нечетно. Из этих формул легко следует, что при четном n ограничение формы пересечений на каждое из подпространств I, A равно нулю, а при нечетном n классы когомологий из разных подпространств I, A не пересекаются. Теорема доказана

Е. Приведем примеры ядерных отображений K^k_ω.

Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^4$ — росток типа A_3,

$$F = -y^2 + x^4 + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 x + \lambda_3, \quad \omega = y\,dx.$$

В этом случае ядро формы пересечений в $H_1(X_\lambda, \mathbb{C})$ одномерно, $K^0_\omega = \mathrm{const} \cdot \lambda_2$.

Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^6$ — росток типа A_5,

$$F = -y^2 + x^6 + \lambda_1 x^4 + \lambda_2 x^3 + \lambda_3 x^2 + \lambda_4 x + \lambda_5, \quad \omega = y\,dx.$$

Ядро формы пересечений одномерно, $K^0_\omega = \mathrm{const} \cdot (\lambda_3 - \lambda_1^2/4)$.

Пусть $\boldsymbol{f} = -y^2 + x^8$ — росток типа A_7, а функция F и форма ω определяются аналогично предыдущему. Тогда $K^0_\omega = \mathrm{const} \cdot (\lambda_4 - \lambda_2\lambda_1/2)$.

Пусть $\boldsymbol{f} = -y^3 + x^3$ — росток типа D_4,

$$F = -y^3 + x^3 + \lambda_1 xy + \lambda_2 y + \lambda_3 x + \lambda_4, \quad \omega = y\,dx.$$

В этом случае ядро формы пересечений двумерно. С точностью до линейного преобразования образа ядерное отображение K^0_ω имеет вид $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \mapsto \mapsto (\lambda_2, \lambda_3)$.

37.3. Ограничение симплектической структуры в базе версальной деформации на страт дискриминанта содержит информацию о вырождениях над стратом. Предположим, что число n переменных ростка $\boldsymbol{f}$ четно и форма пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ невырождена (в частности, μ четно).

В этом случае форма пересечений $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (для инф. невырожденного отображения периодов $P_\omega^{n/2-1}$) задает симплектическую структуру на Λ. Разобьем дискриминант Σ на страты в соответствии с типами вырождений нулевого уровня X_λ.

Принцип. *Типы вырождений нулевого уровня отражены в лагранжевых свойствах стратов дискриминанта относительно симплектической структуры* $\Psi_\omega^{n/2-1}$ (см. [71]).

Проиллюстрируем принцип на примерах.

Пусть точке $\lambda \in \Sigma$ соответствует многообразие X_λ с ровно $\mu/2$ невырожденными особыми точками. Циклы, исчезающие в этих точках, не пересекаются, поэтому порожденное ими подпространство в пространстве гомологий неособого слоя лагранжево. Оказывается, такие точки λ образуют в Λ лагранжево подмногообразие относительно симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$. Более точно, положим

$$\Sigma_0 = \{\lambda \in \Sigma\colon X \text{ имеет } \mu/2 \text{ особых точек, причем все они невырождены}\}.$$

Теорема 10 (см. [71]). *Страт* Σ_0 *— лагранжево подмногообразие симплектического пространства* $(\Lambda, \Psi_\omega^{n/2-1})$.

Примеры. 1. Среди критических точек ростков функций двух переменных невырожденную форму пересечений имеют критические точки, у которых ростки кривой критического уровня неприводимы. В этом случае, деформируя кривую критического уровня, нетрудно убедиться, что многообразие Σ_0 не пусто.

2. Для ростков типа A_{2k} многообразие Σ_0 изоморфно подмногообразию в пространстве B^{2k+1} многочленов вида

$$x^{2k+1} + \lambda_1 x^{2k-1} + \ldots + \lambda_{2k-1},$$

состоящему из многочленов с k корнями кратности 2. Можно показать, что подмногообразие этого же пространства, состоящее из многочленов с корнем кратности $k+1$, является лагранжевым в некоторой другой симплектической структуре (в линейном пространстве бинарных форм нечетной степени имеется ровно одна (с точностью до множителя) ненулевая SL_2-инвариантная внешняя 2-форма, это и есть другая симплектическая структура; см. [98]).

Теорема 11 (см. [71]). *Два аффинных алгебраических многообразия в* B^{2k+1}

$$\Sigma_1 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1}\colon P_{2k+1} = (x-a)^{k+1} P_k,\ a \in \mathbb{C},\ P_k \in B^k\}$$

и

$$\Sigma_2 = \{P_{2k+1} \in B^{2k+1}\colon P_{2k+1} = (x-a) P_k^2,\ a \in \mathbb{C},\ P_k \in B^k\}$$

изоморфны.

Теорема 11 доказывается предъявлением явной формулы автоморфизма пространства B^{2k+1}, переводящего одно многообразие в другое.

Доказательство теоремы 10. Согласно теореме Тесье [467] Σ_0 есть трансверсальное пересечение $\mu/2$ неособых листов дискриминанта Σ и, следовательно, является неособым многообразием размерности $\mu/2$.

Обозначим через W окрестность точки $\lambda^0 \in \Sigma_0$ в многообразии Σ_0. Положим $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R}\colon t \geqslant 0\}$, $U = \mathbb{R}_+ \times W = \{\lambda = \lambda^1 + te_1\colon \lambda^1 \in W,\ t \in \mathbb{R}_+,$ e_1 — орт оси λ_1 в $\Lambda\}$ (мы фиксируем линейную структуру в Λ).

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2}$ — циклы, исчезающие при $t \to 0$. Тогда плоскость $\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2}\rangle$ в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, $\lambda \in U \setminus W$, лагранжева. Дополним $\{\gamma_i\}$ циклами $\{\delta_i\}$ до симплектического базиса в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Согласно лемме 34.2, имеем

$$\int_{\gamma_i} \omega = t^{n/2}\varphi_i, \qquad \int_{\delta_i} \omega = t^{n/2} \ln t\varphi_i' + \varphi_i'',$$

где φ_i, φ_i', φ_i'' — аналитические функции координат (t, λ^1) на U. Поэтому отображение периодов $P_\omega^{n/2-1}$ задает семейство p_t голоморфных отображений подмногообразия W в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, непрерывно зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}_+$, при этом $p_0(W)|_{\langle \gamma_1, \ldots, \gamma_{\mu/2}\rangle} \equiv 0$. Последнее означает, что ограничение формы пересечений $\langle\ ,\ \rangle$ в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ на $p_0(W)$ нулевое. Так как форма $\Psi_\omega^{n/2-1}$ аналитична в Λ, имеем

$$\Psi_\omega^{n/2-1}|_W = \lim_{t\to 0} \Psi_\omega^{n/2-1}|_{W+te_1} = \lim_{t\to 0} p_t^*\langle \cdot, \cdot\rangle = p_0^*\langle \cdot, \cdot\rangle = 0.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теорему, обобщающую теорему 10 и доказывающуюся аналогично.

Пусть $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_l\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ — ростки голоморфных функций с конечнократными критическими точками. В базе Λ версальной деформации ростка $\boldsymbol{f}\colon (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ выделим неособое подмногообразие $\Sigma_{f_1, \ldots, f_k}$, состоящее из всех точек $\lambda \in \Sigma$, для которых функция $F(\cdot, \lambda)$ имеет k критических точек $x_1(\lambda), \ldots, x_k(\lambda)$, эквивалентных критическим точкам ростков $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_k$ соответственно.

Пусть точка $\lambda \in \Lambda \setminus \Sigma$ расположена достаточно близко к $\lambda_0 \in \Sigma_{f_1, \ldots, f_k}$. Тогда циклы в пространстве $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$, исчезающие в точке $x_i(\lambda_0)$, порождают подпространство L_i в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$. Подпространства $\{L_i\}$ обладают следующими свойствами:

а) ограничение формы пересечений $\langle\ ,\ \rangle$ в $H_{n-1}(x_\lambda, \mathbb{C})$ на L_i изоморфно форме пересечений в гомологиях, исчезающих в критической точке ростка $\boldsymbol{f}_i$;

б) сумма L подпространств $\{L_i\}$, $i = 1, \ldots, k$, является прямой;

в) $\langle L_i, L_j\rangle = 0$ при $i \neq j$;

г) Подпространство L_i инвариантно относительно локальной монодромии точки λ_0. Предположим, что n четно и спектральные числа ростков $f_1, \dots, f_k$ лежат в интервале $(n/2-2, n/2)$. (Это так, например, для ростков, стабильно эквивалентных росткам функций двух переменных.)

Теорема 12. *Пусть n четно и форма $\Psi_\omega^{n/2-1}$ отвечает инф. невырожденному отображению периодов $P_\omega^{n/2-1}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) (См. [71].) *Ограничение симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$ на подпространство $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1,\dots,f_k})$ может быть индуцировано из формы пересечений в $H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ подходящим линейным отображением в аннулятор подпространства $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.*

2) *Если дополнительно известно, что критические точки всех ростков $f_1, \dots, f_k$ простые, то ограничение на $T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1,\dots,f_k})$ симплектической структуры $\Psi_\omega^{n/2-1}$ изоморфно ограничению формы пересечений в $H^{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$ на аннулятор подпространства $L \subset H_{n-1}(X_\lambda, \mathbb{C})$.*

Следствие утверждения 1 теоремы. *Имеет место неравенство*

$$\dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(\Psi_\omega^{n/2-1}|_{T_{\lambda_0}(\Sigma_{f_1,\dots,f_k})}) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Ker}(\langle\,,\,\rangle_{f_i}),$$

где $\langle\,,\,\rangle_{f_i}$ — форма пересечений в гомологиях, исчезающих в критической точке ростка f_i.

Дополнение. Во время печатания первого издания книги появилось много новых работ, которые не обсуждаются в тексте. Мы отметим здесь лишь доказательство гипотез полунепрерывности спектра ([65], [66], [68], [464]), теорию раскрытых ласточкиных хвостов, открытие связи лагранжевых и лежандровых многообразий с особенностями с симплектическими и контактными структурами многообразий бинарных форм и многочленов ([103], [252]), включение в теорию особенностей групп отражений H_3 и H_4 ([159], [242], [74]), классификацию проектирований двумерных поверхностей общего положения из трехмерного пространства на плоскость ([31], [187], [188]) и вычисление кольца лежандровых кобордизмов ([258]—[260]). С новыми достижениями можно познакомиться по обзорам [31], [253], [135], [29], [457].

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебраические поверхности: Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. LXXV. М.: Наука, 1965.
2. Александров А. Г. О деформациях букетов квазиоднородных одномерных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 1. С. 67—68.
3. Александров А. Г. Нормальные формы одномерных квазиоднородных полных пересечений // Матем. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 3—31.
4. Арнольд В. И. Замечание о подготовительной теореме Вейерштрасса // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 1—8.
5. Арнольд В. И. Особенности гладких отображений // Успехи матем. наук. 1968. Т. 23, вып. 1. С. 3—44.
6. Арнольд В. И. О матрицах, зависящих от параметров // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 2. С. 101—114.
7. Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 1—9.
8. Арнольд В. И. Интегралы быстро осциллирующих функций и особенности проекций лагранжевых многообразий // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 3. С. 61—62.
9. Арнольд В. И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 4. С. 3—25.
10. Арнольд В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Коксетера // Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, вып. 5. С. 17—44.
11. Арнольд В. И. Классификация унимодальных критических точек функций // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, вып. 3. С. 75—76.
12. Арнольд В. И. Нормальные формы функций в окрестности вырожденных критических точек // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 2. С. 11—49.
13. Арнольд В. И. Критические точки функций и классификация каустик // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 3. С. 243—244.
14. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
15. Арнольд В. И. Контактные многообразия, лежандровы отображения и особенности волновых фронтов // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 4. С. 153—454.
16. Арнольд В. И. Критические точки гладких функций и их нормальные формы // Успехи матем. наук. 1975. Т. 30, вып. 5. С. 3—65.

17. Арнольд В. И. Спектральные последовательности для приведения функций к нормальным формам // Задачи механики и математической физики. М.: Наука, 1976. С. 7—20.
18. Арнольд В. И. Некоторые нерешенные задачи теории особенностей // Труды семинара С. Л. Соболева. 1976. № 1. С. 5—15.
19. Арнольд В. И. О теории огибающих // Успехи матем. наук. 1976. Т. 31, вып. 3. С. 172—173.
20. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
21. Арнольд В. И. Индекс особой точки векторного поля, неравенства Петровского—Олейник и смешанные структуры Ходжа // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 1. С. 1—14.
22. Арнольд В. И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_4 и особенности эволют // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 5. С. 91—105.
23. Арнольд В. И. Индексы особых точек 1-форм на многообразии с краем, сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями, и особые проекции гладких поверхностей // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34, вып. 2. С. 3—38.
24. Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1979. № 6. С. 7—17.
25. Арнольд В. И. Лагранжевы и лежандровы кобордизмы // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 3. С. 1—13; Вып. 4. С. 8—17.
26. Арнольд В. И. Лагранжевы многообразия с особенностями, асимптотические лучи и раскрытый ласточкин хвост // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 4. С. 1—14.
27. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Знание, 1981. (Математика, кибернетика; 1981, № 9.)
28. Арнольд В. И. Перестройки особенностей потенциальных потоков в бесстолкновительной среде и метаморфозы каустик в трехмерном пространстве // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1982. Вып. 8. С. 21—57.
29. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Изд-во МГУ, 1983.
30. Арнольд В. И. Особенности в вариационном исчислении // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. 1983. Т. 22. С. 3—55.
31. Арнольд В. И. Особенности систем лучей // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 77—147.
32. Арнольд В. И. Исчезающие перегибы // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 51—52.
33. Арнольд В. И., Зельдович Я. Б., Шандарин С. Ф. Элементы крупномасштабной структуры Вселенной // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 3. С. 244—245.
34. Атья М. Ф., Ботт Р., Гординг Л. Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами // Успехи матем. наук. 1971. Т. 26, вып. 2. С. 25—100.

35. Белицкий Г. Р. Эквивалентность и нормальные формы ростков гладких отображений // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 1. С. 95—155.
36. Белицкий Г. Р. О стабильной эквивалентности ростков функций // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 5. С. 164.
37. Бернштейн Д. Н. Число корней системы уравнений // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 3. С. 1—4.
38. Бернштейн Д. Н., Кушниренко А. Г., Хованский А. Г. Многогранники Ньютона // Успехи матем. наук. 1976. Т. 31, вып. 3. С. 201—202.
39. Бернштейн И. Н. Аналитическое продолжение обобщенных функций по параметру // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 4. С. 26—40.
40. Бернштейн И. Н., Гельфанд С. И. Мероморфность функции P^{λ} // Функц. анализ и его прил. 1969. Т. 3, вып. 1. С. 84—85.
41. Брискорн Э. Монодромия изолированных особенностей гиперповерхностей // Математика. Сб. перев. 1971. Т. 15, вып. 4. С. 130—160.
42. Брискорн Э. О группах кос (по В. И. Арнольду) // Математика. Сб. перев. 1974. Т. 18, вып. 3. С. 46—59.
43. Брызгалова Л. Н. Особенности максимума функции, зависящей от параметров // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 59—60.
44. Брызгалова Л. Н. О функциях максимума семейства функций, зависящих от параметров // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 1. С. 66—67.
45. Бурбаки Н. Группы Ли и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.
46. Варченко А. Н. Теоремы топологической эквисингулярности семейств алгебраических многообразий и семейств полиномиальных отображений // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1972. Т. 36, вып. 5. С. 957—1019.
47. Варченко А. Н. Локальные топологические свойства дифференцируемых отображений // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1974. Т. 38, вып. 5. С. 1037—1090.
48. Варченко А. Н. Теорема о топологических версальных деформациях // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, вып. 2. С. 294—314.
49. Варченко А. Н. Многогранники Ньютона и оценки осциллирующих интегралов // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 3. С. 13—38.
50. Варченко А. Н. Целочисленность предела интеграла от кривизны по краю изолированной особенности поверхности в $\mathbb{C}^3$ // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 6. С. 199—200.
51. Варченко А. Н. Формула для рангов групп гомологий края изолированной особенности поверхности в $\mathbb{C}^3$ и диаграмма Ньютона // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 1. С. 65—66.
52. Варченко А. Н. Ходжевы свойства связности Гаусса—Манина // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 1. С. 46—47.
53. Варченко А. Н. Асимптотики голоморфных форм определяют смешанную структуру Ходжа // ДАН СССР. 1980. Т. 255, № 5. С. 1035—1038.
54. Варченко А. Н. Контактные структуры и изолированные особенности // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1980. № 2. С. 18—21.

55. Варченко А. Н. Связность Гаусса—Манина и полином Бернштейна // Успехи матем. наук. 1980. Т. 35, вып. 4. С. 153—154.

56. Варченко А. Н. Об операторе монодромии в исчезающих когомологиях и операторе умножения на f в локальном кольце // ДАН СССР. 1981, Т. 260, № 2. С. 272—276.

57. Варченко А. Н. Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1981. Т. 45, вып. 3. С. 540—591.

58. Варченко А. Н. Асимптотики интегралов метода перевала // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 4. С. 212—213.

59. Варченко А. Н. О препятствиях к локальной эквивалентности распределений // Матем. заметки. 1981. Т. 29, вып. 6. С. 939—947.

60. Варченко А. Н. Комплексный показатель особости не меняется вдоль страта $\mu = \text{const}$ // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 1—12.

61. Варченко А. Н. О числе целых точек в области // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, вып. 3. С. 177—178.

62. Варченко А. Н. Оценка коразмерности страта $\mu = \text{const}$ снизу через смешанную структуру Ходжа // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1982. № 6. С. 28—31.

63. Варченко А. Н. О числе целых точек в семействах гомотетичных областей в $\mathbb{R}^n$ // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 2. С. 1—6.

64. Варченко А. Н. О полунепрерывности комплексного показателя особости // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 4. С. 77—78.

65. Варченко А. Н. Спектр и распадения критической точки функции // ДАН СССР. 1983. Т. 270, № 2. С. 267—270.

66. Варченко А. Н. О полунепрерывности спектра и оценке сверху числа особых точек проективной гиперповерхности // ДАН СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1294—1297.

67. Варченко А. Н. Об изменении дискретных характеристик критических точек функций при деформациях // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, вып. 5. С. 126—127.

68. Варченко А. Н. Асимптотики интегралов и структуры Ходжа // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. 1983. Т. 22. С. 130—166.

69. Варченко А. Н. Оценка числа нулей абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 14—25.

70. Варченко А. Н. О локальном вычете и форме пересечений в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1985. Т. 49, вып. 1. С. 32—55.

71. Варченко А. Н., Гивенталь А. Б. Отображение периодов и форма пересечений // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 2. С. 7—20.

72. Варченко А. Н., Молчанов С. А. Применение метода стационарной фазы в предельных теоремах для цепей Маркова // ДАН СССР. 1977. Т. 233, № 1. С. 11—14.

73. Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Топология каустик, волновых фронтов и вырождения критических точек // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39, вып. 2. С. 141—142.
74. Варченко А. Н., Чмутов С. В. Конечные неприводимые группы, порожденные отражениями, суть группы монодромии подходящих особенностей // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 3. С. 1—14.
75. Васильев В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 1—11.
76. Васильев В. А. Об аффинности нормальных форм стратов $\mu = \mathrm{const}$ ростков гладких функций // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 3. С. 72—73.
77. Васильев В. А. Асимптотика экспоненциальных интегралов в комплексной области // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 4. С. 1—12.
78. Васильев В. А. Самопересечения волновых фронтов и лежандровы (лагранжевы) характеристические числа // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 2. С. 68—69.
79. Васильев В. А. Характеристические классы лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные к особенностям каустик и волновых фронтов // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 3. С. 10—22.
80. Васильев В. А. Лагранжевы и лежандровы характеристические классы. М: МЦНМО, 2000.
81. Виноградов И. М. Метод тригонометрических сумм в теории чисел. М.: Наука, 1971.
82. Виноградов И. М. Особые варианты метода тригонометрических сумм. М.: Мир: Наука, 1976.
83. Виро О. Я. Обобщения неравенств Петровского и Арнольда на кривые с особенностями // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 3. С. 145—146.
84. Виро О. Я. Построение M-многообразий // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34, вып. 4. С. 160.
85. Виро О. Я. Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл // ДАН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1306—1310.
86. Воронин С. М. Аналитическая классификация ростков конформных отображений $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ с тождественной линейной частью // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 1. С. 1—17.
87. Воронин С. М. Аналитическая классификация пар инволюций и ее приложения // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 2. С. 21—29.
88. Габриэлов А. М. О формальных соотношениях между аналитическими функциями // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 4. С. 64—65.
89. Габриэлов А. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, вып. 3. С. 18—32.
90. Габриэлов А. М. Бифуркации, диаграммы Дынкина и модальность изолированных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 2. С. 7—12.

91. Габриэлов А. М. Диаграммы Дынкина унимодальных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 3. С. 1—6.
92. Габриэлов А. М., Кушниренко А. Г. Описание деформаций с постоянным числом Милнора для однородных функций // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 4. С. 67—68.
93. Ганнинг Р., Росси Х. Аналитические функции многих комплексных переменных. М.: Мир, 1969.
94. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними: Вып. 1. М.: Физматгиз, 1959.
95. Гельфонд О. А. Корни систем почти периодических полиномов. Москва, 1978. (Препринт / Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР; № 200.)
96. Гельфонд О. А. Средний индекс почти периодического векторного поля. Москва, 1981. (Препринт / Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР; № 219.)
97. Гельфонд О. А., Хованский А. Г. О вещественных функциях Лиувилля // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 52—53.
98. Гивенталь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кократности, и обобщенное уравнение Ньютона // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 6, вып. 1. С. 13—18.
99. Гивенталь А. Б. Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанных с простыми особенностями функций // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 4—14.
100. Гивенталь А. Б. Многообразия многочленов, имеющих корень фиксированной кократности, и обобщенное уравнение Ньютона // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 13—17.
101. Гивенталь А. Б. Асимптотика формы пересечений для квазиоднородных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 4. С. 63—65.
102. Гивенталь А. Б. О максимуме числа особых точек на проективной гиперповерхности // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 3. С. 73—74.
103. Гивенталь А. Б. Лагранжевы многообразия с особенностями и неприводимые sl_2-модули // Успехи матем. наук. 1983. Т. 38, вып. 6. С. 123—124.
104. Гийемин В., Стернберг С. Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981.
105. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. М.: Мир, 1973.
106. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977.
107. Гомозов Е. П. Версальные деформации ростков диффеоморфизмов конечного класса гладкости // ДАН УССР. Сер. «А». 1975. № 8. С. 679—681.
108. Гомозов Е. П. Конечная определенность ростков диффеоморфизмов относительно сопряженности // ДАН УССР. Сер. «А». 1976. № 9. С. 773—775.
109. Горин Е. А. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций // Успехи матем. наук. 1961. Т. 16, вып. 1. С. 91—118.

110. Горюнов В. В. Примыкания спектров некоторых особенностей // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1981. № 4. С. 19—22.
111. Горюнов В. В. Геометрия бифуркационных диаграмм простых проектирований на прямую // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 2. С. 1—8.
112. Горюнов В. В. Полином Пуанкаре пространства форм-вычетов на квазиоднородном полном пересечении // Успехи матем. наук. 1981. Т. 35, вып. 2. С. 205—206.
113. Горюнов В. В. Проектирования 0-мерных полных пересечений на прямую и $K(\pi, 1)$-гипотеза // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, вып. 3. С. 179—180.
114. Горюнов В. В. Бифуркационные диаграммы некоторых простых и квазиоднородных особенностей // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 2. С. 23—37.
115. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 4. С. 3—79.
116. Гудков Д. А., Крахнов А. Д. О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических M—1-многообразий // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 7, вып. 2. С. 15—19.
117. Гусейн-Заде С. М. Матрицы пересечений для некоторых особенностей функций двух переменных // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 1. С. 11—15.
118. Гусейн-Заде С. М. Диаграммы Дынкина для особенностей функций двух переменных // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 4. С. 23—30.
119. Гусейн-Заде С. М. О характеристическом многочлене классической монодромии для серий особенностей // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 3. С. 78—79.
120. Гусейн-Заде С. М. Группы монодромии изолированных особенностей гиперповерхностей // Успехи матем. наук. 1977. Т. 32, вып. 2. С. 23—65.
121. Гусейн-Заде С. М. Об отмеченных базисах простых особенностей // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 4. С. 73—74.
122. Гусейн-Заде С. М. Индекс особой точки градиентного векторного поля // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 1. С. 7—12.
123. Гусейн-Заде С. М., Нехорошев Н. Н. О примыканиях особенностей A_k к точкам страта $\mu = \text{const}$ особенности // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 4. С. 82—83.
124. Давыдов А. А. Граница достижимости многомерной управляемой системы // Труды Тбилисского ун-та. 1982. Т. 232—233, вып. 13—14. С. 78—96.
125. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 2. С. 85—135.
126. Данилов В. И. Многогранники Ньютона и исчезающие когомологии // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 2. С. 32—47.
127. Долгачёв И. В. Факторконические особенности комплексных гиперповерхностей // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 2. С. 75—76.
128. Долгачёв И. В. Автоморфные формы и квазиоднородные особенности // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9. вып. 2. С. 67—68.

129. Долгачёв И. В., Никулин В. В. Исключительные особенности В. И. Арнольда и K-3 поверхности: Тез. докл. Всесоюзной топологической конференции, г. Минск, 1977 г.
130. Закалюкин В. М. О лагранжевых и лежандровых особенностях // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 1. С. 26—36.
131. Закалюкин В. М. Перестройки волновых фронтов, зависящих от одного параметра // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 2. С. 69—70.
132. Закалюкин В. М. Особенности выпуклых оболочек гладких многообразий // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 3. С. 76—77.
133. Звонилов В. И. Неравенства Харламова и неравенства Петровского—Олейник // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 2. С. 69—70.
134. Ильюта Г. Г. Монодромия и исчезающие циклы краевых особенностей // Функц. анализ и его прил. 1985. Т. 19, вып. 3. С. 11—21.
135. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 22. М.: ВИНИТИ, 1983.
136. Казарновский Б. Я. О нулях экспоненциальных сумм // ДАН СССР. 1981. Т. 257, № 4. С. 804—808.
137. Карацуба А. А. Иван Матвеевич Виноградов (к девяностолетию со дня рождения) // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 6. С. 3—15.
138. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов в $\mathbb{R}^2$ // ДАН СССР. 1980. Т. 254, № 1. С. 28—31.
139. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 4. С. 213.
140. Карпушкин В. Н. Равномерные оценки осциллирующих интегралов с параболической или гиперболической фазой // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 3—39.
141. Карпушкин В. Н. Теорема о равномерных оценках осциллирующих интегралов с фазой, зависящей от двух переменных // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1984. Вып. 10. С. 150—169.
142. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958.
143. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
144. Куликов В. С. О некоторых двумерных особенностях // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 1. С. 72—73.
145. Куликов В. С. Исчисление особенностей вложения общей алгебраической поверхности в проективное пространство P^3 // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 3. С. 15—27.
146. Кушниренко А. Г. Многогранник Ньютона и числа Милнора // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 1. С. 74—75.
147. Кушниренко А. Г. О кратности решения системы голоморфных уравнений // Оптимальное управление. М.: Изд-во МГУ, 1977. (Математические вопросы управления производством; Вып. 7.) С. 62—65.

148. Л а н д и с Е. Е. Оценки вариаций множеств меньших значений гладкой функции в окрестности точки минимума // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1980. № 3. С. 24—28.
149. Л а н д и с Е. Е. Тангенциальные особенности // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 2. С. 36—49.
150. Л а н д и с Е. Е. Тангенциальные особенности в контактной геометрии // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, вып. 4. С. 96.
151. Л е в а н т о в с к и й А. В. Об особенностях границы устойчивости // Вестн. МГУ. Сер. Матем. 1980. № 6. С. 20—22.
152. Л е в а н т о в с к и й А. В. Особенности границы области устойчивости // Функц. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 1. С. 44—48.
153. Л е в а н т о в с к и й А. В. О границе множества устойчивых матриц // Успехи матем. наук. 1982. Т. 35, вып. 2. С. 213—214.
154. Л и в ш и ц И. С. Автоморфизмы дополнения к бифуркационному множеству функций для простых особенностей // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 1. С. 38—42.
155. Л е р е Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. М.: ИЛ, 1961.
156. Л ы ч а г и н В. В. О достаточных орбитах группы контактных диффеоморфизмов // Матем. сб. 1977. Т. 104, № 2. С. 248—270.
157. Л я ш к о О. В. Распадения простых особенностей функций // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 2. С. 49—56.
158. Л я ш к о О. В. Геометрия дискриминантных многообразий // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34, вып. 4. С. 205—206.
159. Л я ш к о О. В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17. вып. 3. С. 28—36.
160. М а з е р Дж. Стратификации и отображения // Успехи матем. наук. 1972. Т. 27, вып. 5. С. 85—118.
161. М а л ь г р а н ж Б. О полиномах И. Н. Бернштейна // Успехи матем. наук. 1974. Т. 29, вып. 4. С. 81—88.
162. М а м ф о р д Л. Алгебраическая геометрия. I. Комплексные проективные многообразия. М.: Мир, 1979.
163. М а н и н Ю. И. Алгебраические кривые над полями с дифференцированием // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1958. Т. 22, вып. 6. С. 737—756.
164. М а н и н Ю. И. Рациональные точки алгебраических кривых над функциональными полями // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1963. Т. 27, вып. 6. С. 1395—1440.
165. М а р к у ш е в и ч А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций. М.: Наука, 1979.
166. М а с л о в В. П. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965.
167. М а с л о в В. П. Операторные методы. М.: Наука, 1973.
168. М а с л о в В. П., Ф е д о р ю к М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.

169. Матов В. И. Об унимодальных ростках функций на многообразии с краем // Функц. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 1. С. 69—70.
170. Матов В. И. Особенности функций максимума на многообразии с краем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. Вып. 6. С. 195—222.
171. Матов В. И. Унимодальные и бимодальные ростки функций на многообразии с краем // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. Вып. 7. С. 174—189.
172. Матов В. И. Топологическая классификация ростков функций максимума и минимума семейств функций общего положения // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, вып. 4. С. 167—168.
173. Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
174. Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
175. Никулин В. В. Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1979. Т. 43, вып. 1. С. 111—177.
176. Ньютон И. Математические работы. М.: ОНТИ, 1937.
177. Олейник О. А. Оценки чисел Бетти действительных алгебраических гиперповерхностей // Матем. сб. 1951. Т. 28. С. 635—640.
178. Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности // Матем. сб. 1951. Т. 29. С. 133—156.
179. Паламодов В. П. О кратности голоморфного отображения // Функц. анализ и его прил. 1967. Т. 1, вып. 3. С. 54—65.
180. Паламодов В. П. Асимптотики осциллирующих интегралов с изолированной стационарной точкой фазы // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 6. С. 1321—1324.
181. Петров Г. С. О числе нулей эллиптических интегралов // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 87—88.
182. Петровский И. Г. О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1944. Т. 8, вып. 3. С. 101—106.
183. Петровский И. Г., Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1949. Т. 13, вып. 5. С. 389—402.
184. Платонова О. А. Тень и терминатор гиперповерхности общего положения // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 1. С. 77—78.
185. Платонова О. А. Особенности взаимного расположения поверхности и прямой // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 1. С. 221—222.
186. Платонова О. А. Особенности в задаче о скорейшем обходе препятствия // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 2. С. 86—87.
187. Платонова О. А. Особенности проектирований гладких поверхностей // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39, вып. 2. С. 149—150.
188. Платонова О. А. Проектирование гладких поверхностей // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1984. Вып. 10. С. 135—149.

189. Полотовский Г. М. Каталог M-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 3. С. 548—551.
190. Пуанкаре А. Избранные труды. Т. II. М.: Наука, 1972.
191. Рохлин В. А. Доказательство гипотезы Гудкова // Функц. анализ. 1972. Т. 6, вып. 2. С. 62—64.
192. Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 4. С. 58—64.
193. Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в 16-й проблеме Гильберта. II // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, вып. 2. С. 91—92.
194. Рохлин В. А. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 4. С. 71—75.
195. Рохлин В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 5. С. 77—89.
196. Самойленко А. М. Об эквивалентности гладкой функции полиному Тейлора в окрестности критической точки конечного типа // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2, вып. 4. С. 63—69.
197. Седых В. Л. Особенности выпуклой оболочки кривой в $\mathbb{R}^3$ // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 1. С. 81—82.
198. Седых В. Д. Строение выпуклой оболочки пространственной кривой // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1981. Вып. 6. С. 239—256; Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 5. С. 191—192.
199. Седых В. Д. Функциональные модули особенностей выпуклых оболочек многообразий коразмерностей 1 и 2 // Матем. сб. 1982. Т. 119, № 2. С. 233—247.
200. Седых В. Д. Особенности выпуклых оболочек // Сиб. матем. ж. 1983. Т. 24, вып. 3. С. 158—175.
201. Серр Ж. - П. Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.
202. Спрингер Дж. Введение в теорию римановых поверхностей. М.: ИЛ, 1960.
203. Тюрина Г. Н. О топологических свойствах изолированных особенностей комплексных пространств коразмерности один // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1968. Т. 32, вып. 3. С. 605—620.
204. Тюрина Г. Н. Локально полууниверсальные плоские деформации изолированных особенностей комплексных пространств // Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1969. Т. 33, вып. 5. С. 1026—1058.
205. Тюрина Г. Н. Разрешение особенностей плоских деформаций двойных рациональных точек // Функц. анализ и его прил. 1970. Т. 4, вып. 1. С. 77—83.
206. Уэллс Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976.
207. Фам Ф. Обобщенные формулы Пикара—Лефшеца и ветвление интегралов // Математика. Сб. перев. 1969. Т. 13, вып. 4. С. 61—93.
208. Федорюк М. В. Метод стационарной фазы для многомерных интегралов // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1962. Т. 2, вып. 1. С. 145—150.

209. Федорюк М. В. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
210. Форстер О. Римановы поверхности. М.: Мир, 1980.
211. Фукс Б. Л. Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных. М.: Физматгиз, 1963.
212. Харламов В. М. Максимальное число компонент поверхности степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ // Функц. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 4. С. 101.
213. Харламов В. М. Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7, вып. 2. С. 74—78.
214. Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского // Функц. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 2. С. 50—56.
215. Харламов В. М. Обобщенное неравенство Петровского. II // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 3. С. 93—94.
216. Харламов В. М. Дополнительные сравнения для эйлеровой характеристики четномерных вещественных алгебраических многообразий // Функц. анализ и его прил. 1975. Т. 9, вып. 4. С. 51—60.
217. Харламов В. М. Топологические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ // Функц. анализ и его прил. 1976. Т. 10, вып. 4. С. 55—68.
218. Харламов В. М. Изотопические типы неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 1. С. 86—87.
219. Химшиашвили Г. Н. О локальной степени гладкого отображения // Сообщ. АН Груз. ССР. 1977. Т. 85, № 2. С. 309—311.
220. Хиронака Х. Разрешение особенностей алгебраических многообразий над полями характеристики нуль // Математика. Сб. перев. 1965. Т. 9, вып. 6. С. 2—70; 1966. Т. 10, вып. 1. С. 3—89; 1966. Т. 10, вып. 2. С. 3—58.
221. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функц. анализ и его прил. 1977. Т. 11, вып. 4. С. 56—67.
222. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и род полных пересечений // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12, вып. 1. С. 51—61.
223. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и формула Эйлера—Якоби // Успехи матем. наук. 1978. Т. 33, вып. 6. С. 245—246.
224. Хованский А. Г. Индекс полиномиального векторного поля // Функц. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 1. С. 49—58.
225. Хованский А. Г. Геометрия выпуклых многогранников и алгебраическая геометрия // Успехи матем. наук. 1979. Т. 34, вып. 4. С. 160—161.
226. Хованский А. Г. Спрямление параллельных прямых // ДАН СССР. 1980. Т. 250, № 5. С. 1074—1076.
227. Хованский А. Г. Об одном классе систем трансцендентных уравнений // ДАН СССР. 1980. Т. 255, № 4. С. 804—807.
228. Хованский А. Г. О спрямлении окружностей // Сиб. матем. ж. 1980. Т. 21, вып. 4. С. 221—226.
229. Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и индекс векторного поля // Успехи матем. наук. 1981. Т. 36, вып. 4. С. 234.

230. Хованский А. Г. Вещественные аналитические многообразия со свойствами конечности и комплексные абелевы интегралы // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 2. С. 45—58.
231. Чжэнь Шэн-шень. Комплексные многообразия. М.: ИЛ, 1961.
232. Чмутов С. В. Группы монодромии особенностей функций двух переменных // Функц. анализ и его прил. 1981. Т. 15, вып. 1. С. 61—66.
233. Чмутов С. В. О монодромии изолированных особенностей // Труды XVI Всесоюзной алгебраической конф. Ленинград, 1981. Т. 1. С. 172—173.
234. Чмутов С. В. Спектр и эквивариантные деформации критических точек // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39, вып. 4. С. 113—114.
235. Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.
236. Шошитайшвили А. Н. Об аналитических множествах, биголоморфно эквивалентных квазиоднородным // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 2. С. 92—93.
237. Щербак И. Г. Об изолированных особенностях полных пересечений // Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1983. Вып. 9. С. 230—239.
238. Щербак И. Г. Фокальное множество поверхности с краем и каустики групп, порожденных отражениями, B_k, C_k, F_4 // Функц. анализ и его прил. 1984. Т. 18, вып. 1. С. 90—91.
239. Щербак И. Г. Двойственность краевых особенностей // Успехи матем. наук. 1984. Т. 39, вып. 2. С. 207—208.
240. Щербак О. П. Особенности фронтальных отображений подмногообразий проективного пространства // Успехи матем. наук. 1982. Т. 37, вып. 4. С. 95—96.
241. Щербак О. П. Проективно двойственные пространственные кривые и лежандровы особенности // Труды Тбилисского ун-та. 1982. Т. 232—233, вып. 13—14. С. 280—336.
242. Щербак О. П. Особенности семейства эвольвент в окрестности точки перегиба кривой и группа H_3, порожденная отражениями // Функц. анализ и его прил. 1983. Т. 17, вып. 4. С. 70—72.
243. A'Campo N. Le nombre de Lefschetz d'une monodromie // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. 1973. V. 76, № 2. P. 113—118.
244. A'Campo N. La fonction zêta d'une monodromie // Comment. Math. Helv. 1975. V. 50, № 2. P. 233—248.
245. A'Campo N. Tresses, monodromie et le groupe symplectique // Comment. Math. Helv. 1979. V. 54, № 2. P. 318—327.
246. A'Campo N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I // Math. Ann. 1975. V. 213, № 1. P. 1—32.
247. A'Campo N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. II // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974). V. 1. Montreal, Que.: Canad. Math. Congress, 1975. P. 395—404.
248. Andreotti A. On a theorem of Torelli // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 801—828.

249. Arnold V. I. Critical points of smooth functions // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974). V. 1. Montreal, Que.: Canad. Math. Congress, 1975. P. 19—39.
250. Arnold V. I. Wave front evolution and equivariant Morse lemma // Comm. Pure Appl. Math. 1976. V. 29, № 6. P. 557—582.
251. Arnold V. I. On some problems in singularity theory // Geometry and analysis: Papers dedicated to the memory of V. K. Patodi. Bangalore: Indian Acad. Sci., 1980. P. 1—9.
252. Arnold V. I. Singularities of Legendre varieties, of evolvents and of fronts at an obstacle // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1982. V. 2, № 3—4. P. 301—309.
253. Arnold V. I. Singularities of ray systems // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. V. 1, 2. Warsaw, 1983. PWN, 1984. P. 27—49.
254. Arnold V. I. Some open problems in the theory of singularities // Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 57—69.
255. Arnold V. I., Shandarin S. F., Zeldovich Y. B. The large scale structure of the universe. I // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 1982. V. 20. P. 111—130.
256. Artin M. On the solution of analytic equations // Invent. Math. 1968. V. 5. P. 277—291.
257. Atiyah M. F. Resolution of singularities and division of distributions // Comm. Pure Appl. Math. 1970. V. 23, № 2. P. 145—150.
258. Audin M. Quelques calculs en cobordisme lagrangien // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1985. V 35, № 3. P. 159—194.
259. Audin M. Classes caractéristiques d'immersions lagrangiennes définies par des variétés de caustiques // South Rhone seminar on geometry, I (Lyon, 1983). Travaux en Cours, Hermann, Paris, 1984. P. 1—16.
260. Audin M. Remarques sur les nombres caractéristiques entiers de certaines immersions lagrangiennes // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1983. V. 297, № 10. P. 561—563.
261. Baas N. Structural stability of composed mappings. Preprint, 1976.
262. Banchoff T. F., Gaffney T., McCrory C. Cusps of Gauss mappings. Boston: Pitman, 1982. (Research Notes in mathematics; V. 55.)
263. Basset A. B. The maximum number of double points on a surface // Nature. 1906. V. 73. P. 246.
264. Beauville A. Sur le nombre maximum de points doubles d'une surface dans P^3 ($\mu(5) = 31$) // Journées de Géometrie Algébrique d'Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979. Alphen aan den Rijn: Sijthoff & Noordhoff, 1980. P. 207—215.
265. Berry M. V. Waves and Thom's theorem // Adv. Phys. 1976. V. 25. P. 1—26.
266. Berry M. V. Singularities in waves and rays // Les Houches Summer School 1980. Amsterdam: North-Holland, 1981.

267. Berry M. V., Nye J. F. Fine structure in caustic functions // Nature, Lond. 1977. V. 267. P. 34—36.
268. Berry M. V., Upstill C. Catastrophe optics: morphologies of caustics and their diffraction patterns. Progress in optics XVIII. North-Holland, 1980.
269. Bierstone E. General position of equivariant maps // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V. 234, № 2. P. 447—466.
270. Björk J.-E. Bernstein functional equation, local case. Preprint. Catholic University, Nijmegen, November 1975.
271. Björk J.-E. Rings of differential operators. Amsterdam: North-Holland, 1979.
272. Boardman J. M. Singularities of differentiable maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1967. № 33. P. 21—57.
273. Briançon J., Skoda H. Sur la clôture intégrale d'un idéal de germes de fonctions holomorphes en un point de $\mathbb{C}^n$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A. 1974. V. 278. P. 949—951.
274. Brieskorn E. Special singularities — resolution, deformation and monodromy. Amer. Math. Soc., Lecture Notes prepared in connection with the summer institute on algebraic geometry held at Humboldt State University. Arcata, California, 1974.
275. Brieskorn E. Die Hierarchie der 1-modularen Singularitäten // Manuscripta Math. 1979. V. 27, № 2. P 183—219.
276. Brieskorn E. Die Milnorgitter der exzeptionellen unimodularen Singularitäten. Bonn: Universität Bonn Mathematisches Institut, 1983. (Bonner Mathematische Shriften; № 150.)
277. Bruce J. An upper bound for the number of singularities on a projective hypersurface // Bull. London Math. Soc. 1981. V. 13, № 1. P. 47—50.
278. Bruce J. Counting singularities // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1982/83. V. 93, № 1—2. P. 137—159.
279. Bruce J., Gaffney T. Simple singularities of mappings $(\mathbb{C}, 0) \to (\mathbb{C}^2, 0)$ // J. London Math. Soc. (2). 1982. V. 26, № 3. P. 465—474.
280. Büchner M. A. Stability of the cut locus in dimensions less than or equal to 6 // Invent. Math. 1977. V. 43, № 3. P. 199—231.
281. Catanese F., Ceresa G. Constructing sextic surfaces with a given number d of nodes // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23, № 1. P. 1—12.
282. Cattani E., Kaplan A. The monodromy weight filtration for a several variables degeneration of Hodge structures of weight two // Invent. Math. 1979. V. 52, № 2. P. 131—142.
283. Cattani E., Kaplan A. On the local monodromy of a variation of Hodge structure // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4, № 1. P. 116—118.
284. Cattani E., Kaplan A. Polarized mixed Hodge structures and the local monodromy of a variation of Hodge structure // Invent. Math. 1982. V. 67, № 1. P. 101—115.
285. Chmutov S. V. Monodromy groups of critical points of functions // Invent. Math. 1982. V. 67, № 1. P. 123—131.

286. Chmutov S. V. The monodromy groups of critical points of function. II // Invent. Math. 1983. V. 73, № 3. P. 491—510.

287. Clemens C. H. Picard—Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varieties acquiring ordinary singularities // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 136. P. 93—108.

288. Clemens C. H. Degeneration of Kähler manifolds // Duke Math. J. 1977. V. 44, № 2. P. 215—290.

289. Colin de Verdier Y. Nombre de points entiers dans une famille homothétique de domains de $\mathbb{R}^n$ // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1977. V. 10, № 4. P. 559—575.

290. Cornalba M., Griffiths P. Some transcendental aspects of algebraic geometry // Algebraic geometry (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 29, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1974). Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1975. P. 3—110.

291. Damon J. Topological properties of discrete algebra types. I. The Hilbert—Samuel Function // Adv. in Math. Suppl. Stud. V. 5. N. Y.: Academic Press 1979. P. 83—118; II. Real and Complex Algebras // Amer. J. Math. 1979. V. 101, № 6. P. 1219—1248.

292. Damon J. Topological stability in the nice dimensions // Topology. 1979. V. 18, № 2. P. 129—142.

293. Damon J. Topological triviality of versal unfoldings of complete intersections // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1984. V. 34, № 4. P. 225—251.

294. Damon J. Finite determinacy and topological Triviality. I // Invent. Math. 1980/81. V. 62, № 2. P. 299—324.

295. Damon J. Finite determinacy and topological triviality. II. Sufficient conditions and topological stability // Compositio Math. 1982. V. 47, № 2. P. 101—132.

296. Damon J., Gaffney T. Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations // Invent. Math. 1983. V. 72, № 3. P. 335—358.

297. Deligne P. Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer-Verlag, 1970. (Lecture Notes in Math.; V. 163.)

298. Deligne P. Les immeubles des groupes de tresses généralisées // Invent. Math. 1972. V. 17, № 4. P. 273—302.

299. Deligne P. Théorie de Hodge. I // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970). V. 1. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 425—430; II // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1971. № 40. P. 5—57; III // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1972. № 44. P. 5—77.

300. Demazure M. Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1970. V. 3, № 4. P. 507—588.

301. Demazure M. Classification des germes à point critique isolé et à nombres de modules 0 ou 1 (d'après V. I. Arnol'd) // Séminaire Bourbaki. Vol. 1973/1974, 26ème année, Exp. No. 443. Berlin: Springer, 1975. P. 124—142. (Lecture Notes in Math.; V. 431.)

302. Dimca A. Germes de fonctions définies sur les singularités isolées d'hypersurfaces // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1983. V. 297, № 2. P. 117—120.
303. Dimca A., Gibson C. Contact unimodular germs from the plane to the plane // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1983. V. 34, № 135. P. 281—295.
304. Drucker D., Frohardt D. Irreducible root systems and finite linear groups of degree two // Bull. London Math. Soc. 1982. V. 14, № 2. P. 142—148.
305. Dubois J. - G., Dufour J. - P. La théorie des catastrophes. V. Transformées de Legendre et thermodynamique // Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A. 1978. V. 29, № 1. P. 1—50.
306. Dufour J. - P. Une limite aux extentions de théorème de préparation // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1976. V. 282, № 4. P. 199—202.
307. Dufour J. - P. Bi-stabilité des fronces // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1977. V. 285, № 6. P. 445—448.
308. Dufour J. - P. Sur la stabilité des diagrammes d'applications différentiables // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1977. V. 10, № 2. P. 153—174.
309. Dufour J. - P. Families des courbes planes différentiables // Topology. 1983. V. 22, № 4. P. 449—474.
310. Duistermaat J. J. Fourier integral operators. N. Y.: Courant Institute of Mathematical Sciences New York University, 1973.
311. Duistermaat J. Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27, № 2. P. 207—281.
312. Durfee A. H. Fibered knots and algebraic singularities // Topology. 1974. V. 13, № 1. P. 47—59.
313. Durfee A. H. Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points // Enseign. Math. (2). 1979. V. 25, № 1—2. P. 131—163.
314. Ebeling W. Quadratische Formen und Monodromiegruppen von Singularitäten // Math. Ann. 1981. V. 255, № 4. P. 463—498.
315. Ehlers F., Kam Chan Lo. Minimal characteristic exponent of the Gauss—Manin connection of isolated singular point and Newton polyhedron // Math. Ann. 1982. V. 259, № 4. P. 431—441.
316. Eisenbud D., Levine H. I. An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ // Ann. Math. (2). 1977. V. 106, № 1. P. 19—38.
317. El Zein F. Dégénérescence diagonale. I // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1983. V. 296, № 1. P. 51—54; II // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1983. V. 296, № 4. P. 199—202.
318. Field M. J. Une version équivariante du théorème de la transversalité de Thom // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1976. V. 282, № 7. P. 379—380.
319. Fresnel A. Mémoire sur la diffraction de la lumière // Mem. de l'Acad. des sciences. 1818. V. 5. P. 339—353.
320. Fukuda T. Types topologiques des polynômes // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1976. № 46. P. 87—106.
321. Fukuda T. Local topological properties of differentiable mappings. I // Invent. Math. 1981/82. V. 65, № 2. P. 227—250.

322. Gabrielov A. M. Polar curves and intersection matrices of singularities // Invent. Math. 1979 V. 54, № 1. P. 15—22.
323. Gallarati D. Una superficie dell'ottavo ordine con 160 nodi // Atti Accad. Ligure. 1958. V. 14. P. 44—50.
324. Gårding L. Sharp fronts of paired oscillatory integrals // Proceedings of the Oji Seminar on Algebraic Analysis and the RIMS Symposium on Algebraic Analysis (Kyoto Univ., Kyoto, 1976). 1976/77. V. 12. P. 53—68.
325. Gibson C. G., Wirthmüller K., du Plessis A. A., Looijenga E. I. N. Topological stability of smooth mappings. Berlin: Springer-Verlag, 1976. (Lecture Notes in Math.; V. 552.)
326. Giusti M. Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1977. V. 284, № 3. P. 167—170.
327. Giusti M. Classification des singularités isolées simples d'intersections complètes // Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 457—494.
328. Giusti M. Sur les singularités isolées d'intersections complètes quasihomogènes // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1977. V. 27, № 3. P. 163—192. z
329. Glaeser G. Fonctions composées différentiables // Ann. Math. (2). 1963. V. 77. P. 193—209.
330. Golubitsky M., Guillemin V. Contact equivalence for Lagrangian manifolds // Adv. Math. 1975. V. 15. P. 375—387.
331. Golubitsky M., Schaeffer D. A theory for imperfect bifurcation via singularity theory // Comm. Pure Appl. Math. 1979. V. 32, № 1. P. 21—98.
332. Grauert H. Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen // Math. Ann. 1958. V. 135. P. 263—273.
333. Greuel G.-M., Steenbrink J. On the topology of smoothable singularities // Singularities, Part 1 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 457—494.
334. Griffiths P. A. Periods of integrals on algebraic manifolds. I. Construction and properties of the modular varieties // Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 568—626.
335. Griffiths P. A. Periods of integrals on algebraic manifolds. II. Local study of the period mapping // Amer. J. Math. 1968. V. 90. P. 805—865.
336. Griffiths P. A. Periods of integrals on algebraic manifolds. III. Some global differential-geometric properties of the period mapping // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1970. № 38. P. 125—180.
337. Griffiths P. A. On the periods of certain rational integrals. I // Ann. Math., 1969. V. 90, № 3. P. 460—495; II // Ann. Math. (2). 1969. V. 90., № 3. P. 496—541.
338. Griffiths P. A. Periods of integrals on algebraic manifolds: Summary of main results and discussion of open problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1970. V. 76. P. 228—296.
339. Griffiths P. A. Variations on a theorem of Abel // Invent. Math. 1976. V. 35. P. 321—390.

340. Griffiths P. A., Harris J. Residues and zero-cycles on algebraic varieties // Ann. Math. (2). 1978. V. 108, № 3. P. 461—505.
341. Griffiths P. A., Harris J. Principles of algebraic geometry. N. Y.: John Wiley and Sons, 1978.
342. Griffiths P. A., Schmid W. Recent development in Hodge theory: a discussion of techniques and results // Discrete subgroups of Lie groups and applications to moduli (Internat. Colloq., Bombay, 1973). Bombay: Oxford Univ. Press, 1975. P. 31—127.
343. Guckenheimer J. Bifurcation and catastrophe // Dynamical systems: Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971. N. Y.: Academic Press, 1973. P. 95—109
344. Guckenheimer J. Catastrophes and partial differential equations // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1973. V. 23, № 2. P. 31—59.
345. Guckenheimer J. Caustics and nondegenerate hamiltonians // Topology. 1974. V. 13. P. 127—133.
346. Hamm H. Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume // Math. Ann. 1971. V. 191, № 3. P. 235—252.
347. Hamm H., Lê Dũng Tráng. Un théorème de Zariski du type de Lefschetz // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1973. V. 6. P. 317—356.
348. Hörmander L. Fourier integral operators. I // Acta Math. 1971. V. 127, № 1—2. P. 79—183.
349. Houzel C. Géométrie analytique locale. I. Séminaire H. Cartan. 1960/1961. № 18.
350. Hovansky A. Sur les racines complexes de systèmes d'équations algébriques comportant peu de termes // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1981. V. 292, № 21. P. 937—940.
351. Hovansky A. Théorème de Bezout pour les fonctions de Liouville. IHES, Preprint № 45, Sept. 1981.
352. Humphries S. P. On weakly distinguished bases and free generating sets of free groups // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1985. V. 36, № 142. P. 215—219.
353. Jänich K. Caustics and catastrophes // Math. Ann. 1974. V. 209. P. 161—180.
354. Janssen W. A. M. Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups // Math. Ann. 1983. V. 266, № 1. P. 115—133.
355. Janssen W. A. M. Skew-symmetric vanishing lattices and their monodromy groups. II // Math. Ann. 1985. V. 272, № 1. P. 17—22.
356. Jeanquartier P. Développement asymptotique de la distribution de Dirac attachée à une fonction analitique // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1970. V. 271. P. 1159—1161.
357. Kashiwara M. *B*-functions and holonomic systems. Rationality of roots of *B*-functions // Invent. Math. 1976/77. V. 38, № 1. P. 33—53.
358. Katz N. M. Nilpotent connections and the monodromy theorem: Application of a result of Turrittin // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1970. № 39. P. 175—232.

359. Katz N. M. The regularity theorem in algebraic geometry // Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 437—443.
360. Kempf G., Knudsen F. F., Mumford D., Saint-Donat B. Toroidal embeddings. I. Berlin: Springer-Verlag, 1973. (Lecture Notes in Math.; V. 339.)
361. Kergosien Y. L., Thom R. Sur les points paraboliques des surfaces // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1980. V. 290, № 15. P. 705—711.
362. Kmety F. Resolution des singularités des courbes // Fonctions de plusieurs variables complexes (Sém. François Norguet, 1970—1973; à la mémoire d'André Martineau). Berlin: Springer, 1974. (Lecture Notes in Math., Vol. 409.) P. 505—521.
363. Knorrer H. Zum $K(\pi, 1)$-Problem für isolierte Singularitäten von vollständigen Durchschnitten // Compositio Math. 1982. V. 45, № 3. P. 333—340.
364. Kochman F. Bernstein polynomials and Milnor algebras // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1976. V. 73, № 8. P. 25—46.
365. Kouchnirenko A. G. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor // Invent. Math. 1976. V. 32, № 1. P. 1—31.
366. Kreiss H. - O. Über syzygetische Flächen // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 1956. V. 41. P. 105—111.
367. Kucharz V. Jets suffisants et fonctions de détermination finie (cas $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$) // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1977. V. 284, № 15. P. 877—879.
368. Lamotke K. Die Homologie isolierter Singularitäten // Math. Z. 1975. V. 143. P. 27—44.
369. Landman A. On the Picard—Lefschetz transformation for algebraic manifolds acquiring general singularities // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 181. P. 89—126.
370. Laufer H. Ambient deformations for exceptional sets in two-manifolds // Invent. Math. 1979. V. 55, № 1. P. 1—36.
371. Lazzeri F. Some remarks on the Picard—Lefschetz monodromy // Quelques journées singulières. Paris: Centre de Math. Ecole Polytechnique, 1974.
372. Lê Dũng Tráng. Sur les nœuds algébriques // Compositio Math. 1972. V. 25, № 3. P. 281—321.
373. Lê Dũng Tráng. Le théorème de la monodromie singulier // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1979. V. 288, № 21. P. 985—988.
374. Lê Dũng Tráng. La monodromie n'a pas de points fixes // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. V. 22, № 3. P. 409—427.
375. Lê Dũng Tráng, Ramanujam C. P. The invariance of Milnor's number implies the invariance of the topological type // Amer. J. Math. 1976. V. 98, № 1. P. 67—78.
376. Lê Dũng Tráng, Saito K. The local π_1 of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian // Ark. Mat. 1984. V. 22, № 1. P. 1—24.

377. Lê Dũng Tráng, Teissier B. Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières // Ann. Math. (2). 1981. V. 114, № 3. P. 457—491.
378. Lê Dũng Tráng, Teissier B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney. II // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 65—103.
379. Lees J. A. On the classification of Lagrange immersions // Duke Math. J. 1976. V. 43, № 2. P. 217—224.
380. Lees J. A. Defining Lagrangian immersions by phase functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 250. P. 213—222.
381. Levine J. Polynomial invariants of knots of codimension two // Ann. Math. (2). 1966. V. 84. P. 537—554.
382. Lipman J., Teissier B. Pseudorational local rings and a theorem of Briançon—Skoda about integral closures of ideals // Michigan Math. J. 1981. V. 28, № 1. P. 97—116.
383. Looijenga E. The complement of the bifurcation variety of a simple singularity // Invent. Math. 1974. V. 23, № 2. P. 105—116.
384. Looijenga E. A period mapping of certain semi-universal deformations // Compositio Math. 1975. V. 30, № 3. P. 299—316.
385. Looijenga E. The discriminant of a real simple singularity // Compositio Math. 1978. V. 37, № 1. P. 51—62.
386. Malgrange B. Le théorème de préparation en géométrie différentiable. I. Position du problème. Séminaire Henri Cartan. 1962/63. Exp. 11. Paris: Secrétariat mathématique, 1962/1963; II. Rappels sur les fonctions différentiables. Séminaire Henri Cartan. 1962/63. Exp. 12. Paris: Secrétariat mathématique, 1962/1963; III. Propriétés différentiables des ensembles analytiques. Séminaire Henri Cartan. 1962/63. Exp. 13. Paris: Secrétariat mathématique, 1962/1963; IV. Fin de la démonstration. Séminaire Henri Cartan. 1962/63. Exp. 22. Paris: Secrétariat mathématique, 1962/1963.
387. Malgrange B. Ideals of differentiable functions. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1967. (Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, № 3.)
388. Malgrange B. Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée // Fourier integral operators and partial differential equations (Colloq. Internat., Univ. Nice, Nice, 1974). Berlin: Springer, 1974. (Lecture Notes in Math.; V. 459.) P. 98—119.
389. Malgrange B. Intégrales asymptotiques et monodromie // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1974. V. 7. P. 405—430.
390. Martinet J. Déploiments versels des applications différentiables et classification des applications stables // Singularités d'applications différentiables (Sém., Plans-sur-Bex, 1975). Berlin: Springer, 1976. (Lecture Notes in Math.; V. 535.) P. 1—44.
391. Mather J. N. Stability of C^∞ Mappings. I. The division theorem // Ann. Math. (2). 1968. V. 87. P. 89—104; II. Infinitesimal stability implies stability // Ann. Math. (2). 1969. V. 89. P. 254—291; III. Finitely determined map germs //

Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1968. № 35. P. 279—308; IV. Classification of stable germs by $\mathbb{R}$-algebras // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1969. № 37. P. 223—248; V. Transversality // Adv. Math. 1970. V. 4. P. 301—336; VI. The nice dimensions // Proceedings of Liverpool Singularities-Symposium, I (1969/70). Berlin: Springer, 1971. (Lecture Notes in Math.; V. 192.) P. 207—253. [Русский перевод: Особенности дифференцируемых отображений. М.: Мир, 1968. С. 198—267; Математика. Сб. перев. 1970. Т. 14, № 1. С. 145—175; Успехи матем. наук. 1973. Т. 28, вып. 6. С. 165—190; 1974. Т. 29, вып. 1. С. 127—158.]

392. Mather J. N. On Thom—Boardman singularities // Dynamical systems: Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971. N. Y.: Academic Press, 1973. P. 233—248.
393. Mather J. N. Stratifications and mappings // Dynamical systems: Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971. N. Y.: Academic Press, 1973. P. 195—232.
394. Mather J. N. How to stratify mappings and jet spaces // Singularités d'applications différentiables (Sém., Plans-sur-Bex, 1975). Berlin: Springer, 1976. (Lecture Notes in Math., V. 535.) P. 128—176.
395. Mather J. N. Infinite dimensional group actions // Colloque «Analyse et Topologie» en l'Honneur de Henri Cartan (Orsay, 1974). Paris: Soc. Math. France, 1976. (Astérisque; № 32—33.) P. 165—172.
396. Mather J. N., Yau S. S. - T. Classification of isolated hypersurface singularities by their moduli algebras // Invent. Math. 1982. V. 69, № 2. P. 243—251.
397. McCrory C. Generic curves and surfaces in 3-space: contact with lines and planes. Univ. Warwick, Preprint, 1980.
398. McCrory C. Profiles of surfaces. Univ. Warwick, Preprint, 1980.
399. McKay J. Cartan matrices, finite groups of quaternions, and Kleinian singularities // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, № 1. P. 153—154.
400. Milnor J. On the Betti numbers of real varieties // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. P. 275—280.
401. Milnor J., Orlik P. Isolated singularities defined by weighted homogeneous polynomials // Topology. 1970. V. 9, № 2. P. 385—393.
402. Miyaoka Y. The maximal number of quotient singularities on surfaces with given numerical invariants // Math. Ann. 1984. V. 268, № 2. P. 159—171
403. Morin B. Formes canoniques des singularités d'une application différentiable // C. R. Acad. Sci. Paris. 1965. V. 260. P. 5662—5665, 6503—6506.
404. Morin B. Calcul jacobien // Ann. Sci. École Norm. Super. (4). 1975. V. 8. P. 1—98.
405. Nguyễn Huu Đúc, Nguyễn Tiến Đai. Stabilité de l'intéraction géométrique entre deux composantes holonomes simples // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1980. V. 291. P. 113—116.
406. Nilsson N. Some growth and ramification properties of certain integrals // Ark. Mat. 1965. V. 5. P. 463—476.

407. Nilsson N. Monodromy and asymptotic properties of certain multiple integrals // Ark. Mat. 1980. V. 18, № 2. P. 181—198.
408. Nye J. F. Optical caustics in the near field from liquid drops // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1978. V. 361. P. 21—41.
409. Nye J. F. Optical caustics from liquid drops under gravity: observations of the parabolic and symbolic umbilics // Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. Ser. A. 1979. V. 292, № 1387. P. 25—44.
410. Nye J. F. The motion and structure of dislocations in wave fronts // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser A. 1981. V. 378, № 1773. P. 219—239.
411. Nye J. F., Cooley C. R., Thorndike A. S. The structure and evolution of flow fields and other vector fields // J. Phys. A. 1978. V. 11, № 8. P. 1455—1490.
412. Nye J. F., Potter J. R. The use of catastrophe theory to analyze the stability and toppling of icebergs // Annals of Glaciology. 1980. V. 1. P. 49—54.
413. Nye J. F., Thorndike A. S. Events in evolving three-dimensional vector fields // J. Phys. A. 1980. V. 13. P. 1—14.
414. Orlik P., Wagreich P. Isolated singularities of algebraic surfaces with $\mathbb{C}^*$ action // Ann. Math. (2). 1971. V. 93, № 2. P. 205—228.
415. Petrovsky I. G. Sur la topologie des courbes réelles et algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. Math. 1933. V. 197. P. 1270—1273.
416. Petrovsky I. G. On the topology of real plane algebraic curves // Ann. Math. 1938. V. 39. P. 189—209.
417. Pham F. Remarque sur l'équisingularité universelle. Faculté des Sciences, Nice, 1970.
418. Pham F. Caustics and microfunctions // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1976/77. V. 12, supplement. P. 357—366.
419. Pham F. Caustiques, phase stationnaire et microfonctions // Acta Math. Vietnam. 1977. V. 2, № 2. P. 35—101.
420. Pham F. Singularités des systèmes différentiels de Gauss—Manin. Boston: Birkhäuser, 1979. (Progress in Mathematics; V. 2.)
421. Pham F. Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 319—333.
422. Pham F. Structures de Hodge mixtes associées à un germe de fonction à point critique isolé // Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981). Paris: Soc. Math. France, 1983. P. 268—285. (Astérisque; V. 101.)
423. Pinkham H. Singularités exceptionnelles, la dualité étrange d'Arnold et les surfaces K-3 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A—B. 1977. V. 284, № 11. P. 615—618.
424. du Plessis A. On the determinacy of smooth map-germs // Invent. Math. 1980. V. 58, № 2. P. 107—160.
425. du Plessis A. On the genericity of topologically finitely-determined map-germs // Topology. 1982. V. 21, № 2. P. 131—156.

426. Poénaru V. Versal unfoldings of G-invariant functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82, № 1. P. 86—88.
427. Poénaru V. Singularités C^∞ en présence de symétrie. Berlin: Springer-Verlag, 1976. (Lecture Notes in Math.; V. 510.)
428. Poston T., Stewart I. Catastrophe theory and its applications // London: Pitman, 1978.
429. Randall J. D. Topological sufficiency of smooth map-germs // Invent. Math. 1982. V. 67, № 1. P. 117—121.
430. Randol B. A lattice point problem // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 121. P. 257—268.
431. Randol B. A lattice point problem II // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 125. P. 101—113.
432. Randol B. On the Fourier transform of the indicator function of a planar set // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 271—278.
433. Randol B. On the asymptotic behavior of the Fourier transform of the indicator function of a convex set // Trans. Amer. Math. Soc. 1969. V. 139. P. 279—285.
434. Saito K. Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen // Invent. Math. 1971. V. 14. P. 123—142.
435. Saito K. Einfach-elliptische Singularitäten // Invent. Math. 1974. V. 23. P. 289—325.
436. Saito K. On a linear structure of the quotient variety by a finite reflexion group // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1993. V. 29, № 4. P. 535—579.
437. Saito K. A characterization of the intersection form of a Milnor's fiber for a function with an isolated critical point // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1982. V. 58, № 2. P. 79—81.
438. Saito K. On the period of primitive integrals. I. RIMS, 1982. P. 1—235.
439. Saito K. The zeroes of characteristic function χ_f for the exponents of a hypersurface isolated singular point // Algebraic varieties and analytic varieties (Tokyo, 1981). Amsterdam: North-Holland, 1983. (Adv. Stud. Pure Math.; V. 1.) P. 195—217.
440. Saito K. Period mapping associated to a primitive form // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1983. V. 19, № 3. P. 1231—1264.
441. Saito M. Exponents of a reduced and irreducible plane curve singularity. Preprint, 1982.
442. On the exponents and the geometric genus of an isolated hypersurface singularity // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 465—472.
443. Saito M. Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities // Math. Ann. 1988. V. 281, № 3. P. 411—417.
444. Saito M. On the structure of Brieskorn lattice // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1989. V. 39, № 1. P. 27—72.
445. Scherk J. On the Gauss—Manin connection of an isolated hypersurface singularity // Math. Ann. 1978. V. 238, № 1. P. 23—32.

446. S c h e r k J. On the monodromy theorem for isolated hypersurface singularities // Invent. Math. 1980. V. 58, № 3. P. 289—301.

447. S c h e r k J. A note on two local Hodge filtrations // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 473—477.

448. S c h e r k J. À propos d'un théorème de Mather et Yau // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1983. V. 296, № 12. P. 513—515.

449. S c h m i d W. Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping // Invent. Math. 1973. V. 22. P. 211—319.

450. S e b a s t i a n i M. Monodromie et polynôme de Bernstein, d'après Malgrange // Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975—1977). Berlin: Springer, 1978. (Lecture Notes in Math.; V. 670.) P. 370—381.

451. S e b a s t i a n i M., T h o m R. Un résultat sur la monodromie // Invent. Math. 1971. V. 13, № 1—2. P. 90—96.

452. S e i d e n b e r g A. A new decision method for elementary algebra // Ann. Math. (2). 1959. V. 60. P. 356—374.

453. S e r r e J. P. Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein // Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, tenu à Bruxelles, 1953. Liège: Georges Thone, 1953. P. 57—68. [Русский перевод: С е р р Ж.-П. Собрание сочинений. Т. 1. М.: НМУ: МЦНМО, 2002. С. 344—354.]

454. S i e r s m a D. Periodicities in Arnold's lists of singularities // Real and complex singularities: Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1977. P. 497—524.

455. S i e r s m a D. Singularities of functions on boundaries, corners, etc. // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1981. V. 32, № 125. P. 119—127.

456. S i e r s m a D. Isolated line singularities // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 485—496.

457. Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983.

458. S l o d o w y P. Simple singularities and simple algebraic groups. Berlin: Springer, 1980. (Lecture Notes in Math., V. 815.)

459. S t a g n a r o E. Sul massimo numero di punti doppi isolati di una superficie algebrica di P^3 // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1978. V. 59. P. 179—198.

460. S t e e n b r i n k J. H. M. Limits of Hodge structures // Invent. Math. 1975/76. V. 31. P. 229—257.

461. S t e e n b r i n k J. H. M. Intersection form for quasihomogeneous singularities // Compositio Math. 1977. V. 34, № 2. P. 211—223.

462. S t e e n b r i n k J. H. M. Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology // Real and complex singularities: Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1977. P. 525—563.

463. Steenbrink J. H. M. Mixed Hodge structures associated with isolated singularities // Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981): Proc. Sympos. Pure Math. V. 40. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983. P. 513—536.
464. Steenbrink J. H. M. Semicontinuity of the singularity spectrum // Invent. Math. 1985. V. 79, № 3. P. 557—565.
465. Loibel G. F., Tadini W. M. Finitely determined germs and the Boardman symbol // An. Acad. Brasil. Ci. 1977. V. 49, № 4. P. 499—506.
466. Tarnopolska-Weiss M. On the number of lattice points in a compact n-dimensional polyhedron // Proc. Amer. Math. Soc. 1979. V. 74, № 1. P. 124—127.
467. Teissier B. Cycles évanescents, sections planes et conditions de Whitney // Singularités à Cargèse (Rencontre Singularités Géom. Anal., Inst. Études Sci., Cargèse, 1972). Paris: Soc. Math. France, 1973. (Astérisque; № 7, 8.) P. 285—362.
468. Déformations à type topologique constant // Quelques problèmes de modules: Sém. de Géométrie Analytique, École Norm. Sup., Paris, 1971—1972. Paris: Soc. Math. France, 1974. (Astérisque; № 16.) P. 215—249.
469. Teissier B. Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces // Invent. Math. 1977. V. 40, № 3. P. 267—292.
470. Terao H. Generalized exponents of a free arrangement of hyperplanes and Shepherd—Todd—Brieskorn formula // Invent. Math. 1981. V. 63, № 1. P. 159—170.
471. Thom R. Les singularités des applications différentiables // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1955/56. V. 6. P. 43—87.
472. Thom R. Sur l'homologie des variétés algébriques réelles // Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1965. P. 255—265.
473. Thom R. Topological models in biology // Topology. 1969. V. 8. P. 313—335.
474. Thom R., Levine H. Singularities of differentiable mappings. I. Bonn, 1959.
475. Timourian J. G. The invariance of Milnor's number implies topological triviality // Amer. J. Math. 1977. V. 99, № 2. P. 437—446.
476. Togliatti E. Sulle forme cubiche dello spazio a cinique dimensioni aventi il massimo numero finito di punti doppi // Scritti offerti a L. Berzolari. Pavia, 1936. P. 577—593.
477. Tougeron J.-C. Ideaux de fonctions différentiables // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1968. V. 18, № 1. P. 177—240.
478. Trotman D. J. A. A transversality property weaker than Whitney (A)-regularity // Bull. London Math. Soc. 1976. V. 8, № 3. P. 225—228.
479. Trotman D. J. A. Counterexamples in stratification theory: two discordant horns // Real and complex singularities: Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976. Alphen aan den Rijn: Sijthoff and Noordhoff, 1977. P. 679—686.

480. Varchenko A. N. Algebro-geometrical equisingularity and local topological classification of smooth mappings // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B.C., 1974). V. 1. Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975. P. 427—431.
481. Varchenko A. N. Zeta-function of monodromy and Newton's diagram // Invent. Math. 1976. V. 37, № 3. P. 253—262.
482. Varchenko A. N. Gauss—Manin connection of isolated singular point and Bernstein polynomial // Bull. Sci. Math. (2). 1980. V. 104, № 2. P. 205—223.
483. Vegter, G. Bifurcations of gradient vectorfields // Bifurcation, ergodic theory and applications (Dijon, 1981). Paris: Soc. Math. France, 1982. (Astérisque; № 98). P. 39—73.
484. Verdier J.-L. Stratification de Whitney et théorème de Bertini—Sard // Invent. Math. 1976. V. 36. P. 295—312.
485. Wajnryb B. On the monodromy group of plane curve singularities // Math. Ann. 1979/80. V. 246, № 2. P. 141—154.
486. Wall C. T. C. Regular stratifications // Dynamical systems — Warwick 1974: Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday. Berlin: Springer, 1975. (Lecture Notes in Math.; V. 468.) P. 332—344.
487. Wall C. T. C. Are maps finitely determined in general? // Bull. Lond. Math. Soc. 1979. V. 11, № 2. P. 151—154.
488. Wall C. T. C. A note on symmetry of singularities // Bull. London Math Soc. 1980. V. 12, № 3. P. 169—175.
489. Wall C. T. C. The first canonical stratum // J. London. Math. Soc. (2). 1980. V. 21, № 3. P. 419—433.
490. Wassermann G. Stability of unfoldings. Berlin: Springer-Verlag, 1986. (Lecture Notes in Math.; V. 393.)
491. Wassermann G. (r, s)-stability of unfoldings. Preprint. Regensburg, 1976.
492. Wassermann G. Stability of unfoldings in space and time // Acta Math. 1975. V. 135, № x. P. 57—128.
493. Wassermann G. Classification of singularities with compact abelian symmetry. Regensburg: Universität Regensburg Fachbereich Mathematik, 1977. (Regensburger Mathematische Schriften [Regensburg Mathematical Publications]; V. 1.)
494. Weinstein A. Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds // Adv. Math. 1971. V. 6. P. 329—346.
495. Weinstein A. Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems // Ann. Math. (2). 1973. V. 98. P. 377—410.
496. Weinstein A. Lectures on symplectic manifolds. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1979. (CBMS Regional Conference Series in Mathematics; V. 29.)
497. Weinstein A. Singularities of families of functions // Differentialgeometrie im Grossen: Ber. Tagung, Math. Forschungsinst., Oberwolfach, 1969. Mann-

heim: Bibliographisches Inst., 1971. (Ber. Math. Forschungsinst. Oberwolfach; Heft 4.) P. 323—330.
498. Wells G. S. Extension theorems for smooth functions on real analytic spaces and quotients by Lie groups and smooth stability // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1977. V. 24, № 4. P. 440—457.
499. Whitney H. The general type of singularity of a set of $2n-1$ smooth functions of n variables // Duke Math. J. 1943. V. 10, № 1. P. 161—172.
500. Whitney H. The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space // Ann. Math. (2). 1944. V. 45. № 2. P. 220—246.
501. Whitney H. The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space // Ann. Math. (2). 1944. V. 45. № 2. P. 247—293.
502. Whitney H. On singularities of mappings of euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane// Ann. Math. (2). 1955. V. 62. P. 374—410.
503. Whitney H. Singularities of mappings of Euclidean spaces // Symposium internacional de topología algebraica International symposium on algebraic topology, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City, 1958. P. 285—301.
504. Whitney H. Local properties of analytic varieties // Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse. Princeton, N. J.: Princeton Univ. Press, 1965. P. 205—244.
505. Yano T. On the holonomic system of f^s and b-function // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1976/77. V. 12, supplement. P. 469—480.
506. Yano T. On the structure of differential equations associated with some isolated singularities // Soc. Rep. Saitama Univ. Ser. A. 1977. V. 9, № 1. P. 9—20.
507. Yano T. On the theory of b-functions // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1978. V. 14, № 1. P. 111—202.
508. Yau S. S. - T. Solvable Lie algebras and generalized Cartan matrices arising from isolated singularities // Math. Z. 1986. V. 191, № 4. P. 489—506.
509. Yau S. S. - T. Milnor algebras and equivalence relations among holomorphic functions // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 9, № 2. P. 235—239.
510. Yoshinaga E., Suzuki M. Normal forms of nondegenerate quasihomogeneous functions with inner modality $\leqslant 4$ // Invent. Math. 1979. V. 55, № 2. P. 185—206.
511. Zariski O. Algebraic surfaces. N. Y.: Springer-Verlag, 1971.
512. Zariski O. On the Poincaré group of a projective hypersurface // Ann. Math. 1937. V. 38, № 1. P. 131—141.
513. Zeeman E. C. 1981 Bibliography on catastrophe theory. Math. Institut, Univ. of Warwick, 1981.

σ-процесс 396
ζ-функция монодромии 373
— преобразования 373

A-эквивалентность 75

k-струя 35

min-ростки 228

R-версальность 121
R-эквивалентность 253
R^+-эквивалентность 254
RL-версальность 123
RL-устойчивость 16, 17
RL-эквивалентность 17

V-версальность 122
V-простой росток 139
V-эквивалентность 105

Алгебра локальная 64, 66
— мультилокальная 83

База деформации 120, 352
Базис отмеченный 330
— правильный 174
— слабо отмеченный 330
Бертини—Сарда теорема 32
Бифуркация 119
— каустик 293
Боардмана многообразие 51
— символ 47
— формула 44
— число 47
Боардманизации оператор 51

Важнейшие примыкания 141
Вариация 107, 308
Веер 477
Веер, ассоциированный с многогранником Ньютона 484
—, подчиненный многограннику Ньютона 484
— простой 477
Вектор спектральный 617
Версальность инфинитезимальная 123
— топологическая 149
Виета отображение 291
Внутренняя производная 56

Гамильтона функция 241
Гамильтониан 241
Гамильтоново векторное поле 241
Гамильтоновы уравнения 241
Гаусса—Манина связность 556
Гельфанда—Лере форма 450, 463
— функция 450, 464
Генотип ростка 131
Гиперповерхность производящая 266
Гомотопический метод 99
Гомотопия допустимая 393
Группа кос 362
— — Брискорна (обобщенная) 365
— монодромии 309, 314, 330, 518
— скольжений 368

Дарбу теорема 240
Деформации V-эквивалентные 122
— эквивалентные 120
Деформация версальная 119—122
— индуцированная 121
— инфинитезимально версальная 123
— миниверсальная 121
— ростка 121

Деформация устойчивая 127
Деформация (особенности) 352
— версальная 352
— миниверсальная 352
— — ограниченная 356
Джойн 342
Диаграмма бифуркационная множеств (нулей) 353, 415
— — функций 356
— Дынкина 348
— Ньютона 48, 174, 442
— отображений 142
— Юнга 48
— — двойственная 49
Диффеоморфизм формальный 167
Дифференциал квадратичный 54
Длина спектра (критической точки) 619
Допустимая цепь 176
Дынкина диаграмма 348

Замена переменных левая 16
— — правая 16
Зона полутени 437
— света 436, 437
— тени 436, 437
Зонтик Уитни (Кэли) 27

Идеал Боардмана 48
Индекс ростка 75, 77
Индикатриса скоростей 300
Интеграл Лапласа 468, 474
— —, амплитуда 474
— —, фаза 474
— метода перевала 523, 525, 531
— осциллирующий 427
— —, амплитуда 427
— — комплексный 525
— —, фаза 427
— — элементарный 449, 464
— Френеля 429
— эллиптический 463
Инфинитезимальная V-устойчивость 107
— версальность 123
Инфинитезимальная устойчивость 97—99

Катастроф теория 22, 296
Каустика 247, 428, 430
— большая 293
— комплексная 356
— элементарная 431, 434
Квазиоднородная алгебра 183
— фильтрация 159
— функция 158
— эквивалентность 214
Квазиоднородное векторное поле 170
— отображение 163
Квазиоднородный диффеоморфизм 168, 214
Квазистепень многочлена 159
Квазиструи 168
Класс огораживающий 140
— особенностей 198
Кобордизм 301
Ковариантно постоянное сечение 556, 558
Конечнократное отображение 68
Конечнократный росток 102
Контактная плоскость 259
— структура 259
— форма 259
Конус рациональный 477
— —, кратность 477
— — симплициальный 477
Коразмерность класса особенностей 201
Коранг 29
— идеала 51
— функции в критической точке 155
Коса 363
— крашеная 363
Коэффициент зацепления (циклов) 332
Кратность компоненты 469
— критической точки функции 199
— особенности 325, 411
— отображения локальная 68, 73
— показателя особости 439

Кратность показателя осцилляции 439
— ростка 73
— симплициального конуса 477
Кривая полярная 381
Критическая точка 152
— — невырожденная 11
— — отображения 14
— — функции 11
Критическое значение отображения 14

Лагранжев кобордизм 301
— край 301
Лагранжева особенность 239—248, 282
— эквивалентность 245
Лагранжево отображение 247
— подмногообразие 242
— расслоение 244
Лагранжево кобордантные многообразия 301
— устойчивое отображение 272
— устойчивый росток 272
Лапласа интеграл 468
Ласточкин хвост 45, 353
Лежандров кобордизм 301
Лежандрова особенность 258—271, 285—289
— эквивалентность 263
Лежандрово отображение 263
— подмногообразие 261
— расслоение 262
Лемма Морса 100
— — эквивариантная 231
— о редукции 124
— Тома об изотопии 149

Максвелла страт 356
Матрица пересечений 336
— Якоби 14
Метод Ньютона поворачивания линейки 156
Милнора расслоение 516, 517
— — когомологическое 559
Милнора число 325, 421
Многогранник Ньютона 174, 442
— —, опорная функция 484
— —, удаленность 444
— стандартный 49
Многообразие, ассоциированное с простым веером 480
— Боардмана 51
— контактное 259
—, подчиненное многограннику Ньютона 485
— симплектическое 239
— уровня неособое 418
Многочлен Пуанкаре 164
— характеристический 372
Множество достижимости цели 300
— показателей 438
— полунепрерывности 603
Модальность внутренняя 179
— ростка 153
— точки 152
Модуль 28, 63
Монодромии группа 309, 314, 330, 518
— оператор 312
Монодромия 305, 312
— классическая 305, 325, 521

Набор отмеченный 314
— слабо отмеченный 318
— спектральных пар 580
— — чисел 580
Надстроенный росток отображения 131
Носитель идеала (диаграммы Ньютона) 48
— квазиоднородных функций 183
— степенного ряда 156
Ньютона диаграмма 48, 174, 442
— многогранник 174, 442
— фильтрация 173
Ньютонов порядок степенного ряда 173
Ньютонова степень монома 173

Овал 606
—, внутренность 607
— отрицательный (нечетный) 607
— положительный (четный) 607
Оператор боардманизации 51
— вариации 313, 326
— классической монодромии 325
— Лере кограничный 513
— монодромии 312
— Пикара—Лефшеца 318
— полупростой 509
— унипотентный 509
Определитель особенностей 214
Орбита регулярная 291
Орбита k-струи 115, 116
Особенности бимодальные 202
— краевые 233
— простые 202
— симметричные 231
— тангенциальные 236
— унимодальные 202
Особенность гиперболическая 61
— класса Σ^I 47
—, кратность 325
—, неособое множество уровня 325
— Пикара—Фукса 554
— простая 423
— Уитни 27
— эллиптическая 61
Отмеченный базис 330
— набор циклов 314
Отображение Виета 291
— конечного типа 93
— конечнократное 68
— лагранжево 247
— лежандрово 263
— мономиальное 478
— —, ассоциированное с парой 478
— периодов 578, 621
— — k-е присоединенное 621
— трансверсальное 31
— Фама 75
— «хорошее» 43

Пары Пюизо характеристические 399
Перестройка фронта 289
— — специальная 290
Петля простая 317
Пикара—Лефшеца исчезающий цикл 307, 314
— оператор 318
— формула 323
Пикара—Фукса уравнение 548
Подмногообразие изотропное 242
— интегральное 261
— лагранжево 242
— лежандрово 261
— стратифицированное 40
Поднятие 292
Показатель особости 439
— — комплексный 567
— осцилляции 438
— — комплексный 567
— — равномерный 452
Полуквазиоднородный многочлен (степенной ряд, росток) 160
Поляризация (структуры Ходжа) 592
Правило семи катастроф Тома 157
Примыкание 140, 200
— регулярное 148
— сильное 209
Пространство k-струй 36, 115
— градуированное фильтрации 618
— касательное к орбите 122
— квазиструй 214
— параметров (деформации) 352
— фазовое 250
Прямая сумма особенностей 341
Пуассона формула 457
Пюизо ряд 399

Развертка ростка 133
Разрешение, вес 469
— кривой 401
—, набор кратностей 469
— особенности 372, 448
Расслоение вертикальное 57
— гомологий 557
— когомологий 557
— лагранжево 244

Расслоение лежандрово 262
— Милнора 516, 517
— — когомологическое 559
— смешанное 250
Расширение k-струйное 37
— деформации 126
— тривиальное ростка 133
— якобиево 46
Ростки V-эквивалентные 105
— стабильно эквивалентные 226
— эквивалентные 198
Росток конечнократный 102
— отображения 17

Сборка (Уитни) 19
Связность Гаусса—Манина 556, 558
Семейство квадратичных форм 58
— производящее 248—258, 266—269
Серии особенностей 199
Сечение геометрическое 556, 559
— ковариантно постоянное 556
— элементарное 565
Симплектическая структура 239
Система координат приспособленная 446
— образующих алгебры 68
Скобка Пуассона 241
След 484
— формы 92
Спектр критической точки 563, 580
Спектральные пары 580
Стабилизация (особенности) 347
Стабильно эквивалентные функции 155
Степенной ряд, главная часть 443
— — — — $\mathbb{C}$-невырожденная 443
— — — — $\mathbb{R}$-невырожденная 443
— —, многогранник Ньютона 442
— —, носитель 442
Страт 31
— $\mu = \text{const}$ 602
— Максвелла 356
Стратификация 30—31
— Уитни 148
Структура Ходжа 591
Структура Ходжа смешанная 592
Струя 35
— достаточная 102

Теорема Абеля 93
— Бертини—Сарда 32
— Дарбу 240
— — о контактных структурах 260
— — о контактных формах 260
— деления 71
— Мазера об устойчивости 99, 118
— о конечной определенности (Тужрона) 102
— об обратном якобиане 89
— подготовительная Вейерштрасса 68
— Тома 157
— трансверсальности сильная 37
— — слабая 32
— Уитни 19
Теория катастроф 22, 296
Точка каустическая (фокальная) 428
Трансверсальность отображения 31, 40
— пространств 31
Тройка допустимая 516

Уитни (Кэли) зонтик 27
— особенность 27
— теорема 19
Уравнение ковариантно постоянных сечений 560
— Пикара—Фукса 548
— —, особая точка 549, 555
— — — — регулярная 549, 555
— — тривиализации 551
Устойчивость 16
— V-инфинитезимальная 107
— деформационная 127
— дифференцируемая 16, 17
— инфинитезимальная 97, 98
— лагранжева 272
— лежандрова 278
— почти V-инфинитезимальная 111
Устойчивость топологическая 17

Фильтрация весовая 563, 572, 573, 592
— Ньютона 173
— ходжева 563, 570, 592, 593, 598
— ходжево-весовая 618
Форма билинейная, ассоциированная с особенностью 336
— Гельфанда—Лере 450, 463
— Зейферта 333
— квадратичная (особенности) 348
— контактная 259
— нормальная 199
— пересечений 624
— — билинейная 625
—, соответствующая кривой, квадратичная 390
— — —, кососимметрическая 390
Формула Боардмана 44
— Пикара—Лефшеца 308, 323
— произведения корангов 29
— суммирования Пуассона 457
— Эйлера—Якоби 90
Френеля интеграл 429
Фронт 264, 280, 281
— большой 289
Функтор контактизации 271
— симплектизации 271
Функционал допустимый 600
Функция Гельфанда—Лере 450, 464
— Морса 12
— ньютоново-однородная 174
Функция производящая 243

Ходжа структура 591
— — смешанная 592
— числа 591
Ходжева фильтрация 563, 570, 592, 593, 598

Цепь допустимая 525, 526, 531
Цикл исчезающий (Пикара—Лефшеца) 307, 314, 330

Числа Ходжа 591, 616
Число Арнольда 604
— Боардмана 47
— Габриэлова 154
— Долгачёва 154
— Кокстера 154
— Милнора 199, 325, 421
— Петровского 607

Эквивалентность дифференцируемая 15
— лагранжева 245
— лежандрова 263
— расслоенная 269
— сильная 290
— стабильная 155
— стабильно расслоенная 271
— топологическая 14
Эквивариантная эйлерова характеристика 408

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию 3
Предисловие к первому тому первого издания 5
Предисловие ко второму тому первого издания 7

Часть I. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов 9

Глава I. **Основные понятия 11**
§ 1. Простейшие примеры 11
§ 2. Классы Σ^I 29
§ 3. Квадратичный дифференциал особенности 54
§ 4. Локальная алгебра особенности и подготовительная теорема Вейерштрасса 64
§ 5. Локальная кратность голоморфного отображения 73
§ 6. Устойчивость и инфинитезимальная устойчивость 96
§ 7. Доказательство теоремы устойчивости 110
§ 8. Версальные деформации 119
§ 9. Классификация устойчивых ростков по генотипам 129
§ 10. Обзор дальнейших результатов 142

Глава II. **Критические точки гладких функций 152**
§ 11. Начало классификации критических точек 155
§ 12. Квазиоднородные и полуквазиоднородные особенности . . . 158
§ 13. Классификация квазиоднородных функций 178
§ 14. Спектральные последовательности для приведения к нормальным формам 190
§ 15. Списки особенностей 198
§ 16. Определитель особенностей 214
§ 17. Вещественные, симметричные и краевые особенности 226

Глава III. **Особенности каустик и волновых фронтов 239**
§ 18. Лагранжевы особенности 239
§ 19. Производящие семейства 248
§ 20. Лежандровы особенности 258
§ 21. Классификация лагранжевых и лежандровых особенностей 272
§ 22. Бифуркации каустик и волновых фронтов 289

Часть II. Монодромия и асимптотики интегралов **303**

Глава IV. **Топологическое строение изолированных критических точек функций** **305**
Введение 305
§ 23. Элементы теории Пикара—Лефшеца 311
§ 24. Топология неособого множества уровня и оператор вариации особенности 324
§ 25. Бифуркационные диаграммы и группа монодромии особенности 351
§ 26. Матрицы пересечений особенностей функций двух переменных 389
§ 27. Формы пересечений краевых особенностей и топология полных пересечений 406

Глава V. **Осциллирующие интегралы** **427**
§ 28. Обсуждение результатов 427
§ 29. Элементарные интегралы и разрешение особенностей фазы 462
§ 30. Асимптотики и многогранники Ньютона 475
§ 31. Показатели особости, примеры 499

Глава VI. **Интегралы голоморфных форм по исчезающим циклам** **503**
§ 32. Простейшие свойства интегралов 503
§ 33. Комплексные осциллирующие интегралы 523
§ 34. Интегралы и дифференциальные уравнения 536
§ 35. Коэффициенты разложений в ряд интегралов, весовая и ходжева фильтрации, спектр критической точки 561
§ 36. Смешанная структура Ходжа изолированной критической точки голоморфной функции 588
§ 37. Отображение периодов и форма пересечений 619

Литература 635
Предметный указатель 663

НОВЫЕ ПОСТУПЛЕНИЯ

✓ Д. В. Аносов. Дифференциальные уравнения: то решаем, то рисуем. — 2008. — 2000 с.

В книге рассказывается о дифференциальных уравнениях. В одних случаях автор объясняет, как решаются дифференциальные уравнения, а в других — как геометрические соображения помогают понять свойства их решений. (С этим и связаны слова «то решаем, то рисуем» в названии книги.) Рассмотрено несколько физических примеров. На максимально упрощённом уровне рассказано о некоторых достижениях XX века, включая понимание механизма возникновения «хаоса» в поведении детерминированных объектов.

Книга рассчитана на интересующихся математикой школьников старших классов. От них требуется лишь понимание смысла производной как мгновенной скорости. Книга не заменяет вузовские учебники, но так как в ней затрагиваются и не освещаемые в них вопросы, а часть других вопросов освещается иначе, то она может заинтересовать и студентов вузов со значительной математической программой.

✓ Г. Бейкер. Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций / Пер. с англ. С. М. Львовского. — 2008. — 736 с.

Эта книга, оригинал которой впервые вышел в свет в 1897 году, — перевод классической монографии по теории римановых поверхностей и тэта-функций. Изложение ведется в непривычном современному читателю классическом стиле конца XIX века. Основной упор делается не на изложение общих теорий, а на получение явных формул.

Издание книги на русском языке вызвано тем, что в последние десятилетия XX века многочисленные задачи математической и теоретической физики (например, метод обратной задачи рассеяния и конечнозонного интегрирования, задачи теории автодуальных калибровочных полей и др.) оказались тесно связанными с кругом проблем, которым посвящена книга Бейкера.

Знакомство с этой книгой будет очень полезно всем математикам и физикам, занимающимся алгебраической геометрией или интегрируемыми системами.

✓ А. Г. Хованский. Топологическая теория Галуа. Разрешимость и неразрешимость уравнений в конечном виде. — 2008. — 296 с.

Книга посвящена вопросу о неразрешимости уравнений в явном виде. В ней дается полное изложение топологического варианта теории Галуа, полученного автором. В книге изложены также приложения теории Галуа к разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, элементы теории Пикара—Вессио, и результаты Лиувилля о классе функций, представимых в квадратурах.

Для студентов-математиков, аспирантов и научных сотрудников.

✓ Дж. Мак-Клири. Путеводитель по спектральным последовательностям / Пер. с англ. В. В. Прасолова под ред. Т. Е. Панова. — 2008. — 664 с.

Спектральные последовательности входят в число наиболее красивых, мощных и сложных методов вычислений, используемых в математике. В этой книге описываются некоторые важные примеры спектральных последовательностей и наиболее яркие их применения.

Книга начинается с неформальных объяснений и алгебраических основ; большую часть книги составляет изложение спектральных последовательностей Лере—Серра, Эйленберга—Мура, Адамса и Бокштейна, имеющих классические приложения в теории гомотопий. В последней части книги излагаются приложения в других разделах математики, таких как теория узлов и зацеплений, алгебраическая геометрия, дифференциальная геометрия и алгебра.

Эта книга послужит прекрасным руководством для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в геометрии, топологии и алгебре.

✓ В. Ю. Овсиенко, С. Л. Табачников. Проективная дифференциальная геометрия. Старое и новое: от производной Шварца до когомологий групп диффеоморфизмов / Пер. с англ. С. М. Львовского. — 2008. — 280 с.

Идеи проективной геометрии снова и снова появляются в различных, порой не связанных друг с другом, областях математики. Главной задачей авторов этой книги было связать классическую проективную дифференциальную геометрию с современной математикой. В книге много новых результатов, а также новых доказательств классических теорем; исторические и общематематические комментарии помещают основные понятия в более широкий контекст.

Для студентов старших курсов, аспирантов и научных работников.

✓ Лекции по симплектической геометрии и топологии / Под ред. Я. Элиашберга, Л. Трейнор. Пер. с англ. Ж. Т. Гавриловой, Ф. Ю. Попеленского. — 2008. — 424 с.

Книга представляет собой записи лекций, посвященных симплектической топологии и современным проблемам этой новой области математики. Авторы сборника — известные математики, внесшие большой вклад в развитие этой теории: Д. Мак-Дафф, Х. Хофер, К. Таубс, Д. Саламон, А. Гивенталь, Р. Макферсон, Дж. Марсден и другие. Материал лекций удачно подобран, так что книга является хорошим введением в рассматриваемый круг вопросов. Книга предназначена для студентов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

✓ Г. Фёльмер, А. Шид. Введение в стохастические финансы. Дискретное время / Пер. с англ. — 2008.— 496 с.

Эта книга является одним из лучших западных учебников по финансовой математике. В идейном отношении она охватывает практически все современные направления этой области. Основной акцент сделан на изложении теории неполных рынков.

Для студентов, аспирантов и преподавателей физико-математических и экономических факультетов, а также научных работников и специалистов по финансовому, банковскому и страховому делу.

✓ Д. П. Желобенко. Компактные группы Ли и их представления. — 2-е изд., доп. — 2007.— 552 с.

Книга содержит изложение теории представлений компактных групп Ли и родственных структур, в том числе полупростых комплексных групп и алгебр Ли. Центральное место в теории занимает известная теорема Петера—Вейля о рядах Фурье на компактных группах, ассоциированных с неприводимыми (конечномерными) представлениями этих групп. Значительное место в книге уделяется конкретному описанию неприводимых представлений простых компактных групп Ли. Изложение, выдержанное по правилу «от простого к сложному», позволяет читателю эффективно и быстро овладеть основами теории представлений.

Для студентов и аспирантов физико-математических специальностей.

Первое издание книги вышло в 1970 году.

Получить более подробную информацию об этих и других книгах издательства МЦНМО, а также заказать их можно через Интернет на сайте `http://www.mccme.ru/publications/`.

Книги можно купить в магазине «Математическая книга» в здании Московского центра непрерывного математического образования.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Телефон для справок: (499) 241-72-85. E-mail: `biblio@mccme.ru`.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с $11^{\underline{30}}$ до $20^{\underline{00}}$.