А. А. Гусак, Е. А. Бричикова

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие для студентов вузов

Минск
«ТетраСистемс»

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
Г96

А в т о р ы:
кандидат физико-математических наук, профессор кафедры общей математики и информатики Белорусского государственного университета *А. А. Гусак*; доцент кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета *Е. А. Бричикова*

Р е ц е н з е н т ы:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры экономической информатики и математической экономики Белорусского государственного университета *С. В. Рогозин*; кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета *О. Н. Вярьвильская*

Гусак, А. А.

Г96 Основы высшей математики : пособие для студентов вузов / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2012. – 208 с.

ISBN 978-985-536-274-7.

Пособие включает следующие разделы: линейная алгебра, аналитическая геометрия, введение в анализ, дифференциальное исчисление функций одной переменной, интегральное исчисление функций одной переменной, ряды, дифференциальные уравнения, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, теория вероятностей, математическая статистика. Содержит краткие теоретические сведения, примеры с подробными решениями и задачи для самостоятельной работы.

Предназначается студентам и преподавателям вузов, а также для самообразования.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-536-274-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие содержит 14 разделов по программному материалу курса высшей математики. Каждый раздел состоит из соответствующих тем. Каждая тема включает теоретический материал: основные понятия, формулы, уравнения, формулировки теорем, признаков. За теоретическим материалом следуют примеры решения типовых задач различной степени трудности, задачи для самостоятельной работы, ответы к ним, а к некоторым – указания. Изложение учебного материала сопровождается иллюстрациями. В учебном пособии 250 примеров с подробными решениями, 390 задач для самостоятельной работы, 55 рисунков.

Учебное пособие будет полезным при повторении изучаемого материала, при выполнении контрольных работ, при подготовке к зачетам и экзаменам.

Приложен биографический словарь, в котором сообщаются краткие сведения о жизни и деятельности математиков, имена которых названы в учебном пособии.

I

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Глава 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Основные определения

Матрицей называют множество $m \times n$ чисел, расположенных в прямоугольной таблице из m строк и n столбцов. Числа этой таблицы называют *элементами матрицы*. Обозначения матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ образуют i-ю строку $(i = 1, 2, \dots, m)$, элементы $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk}$ – k-ый столбец $(k = 1, 2, \dots, n)$; a_{ik} – элемент, который принадлежит i-й строке и k-му столбцу, числа i, k называют *индексами элемента*. Матрицу, которая имеет m строк и n столбцов называют матрицей размеров $m \times n$ (читают *эм* на *эн*). Используют и более краткие обозначения матрицы размеров $m \times n$:

$$[a_{ik}]_{mn}, \ \|a_{ik}\|_{mn}, \ (a_{ik})_{mn}.$$

Матрицу обозначают также одной заглавной буквой, например

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Если необходимо отметить, что матрица A имеет m строк и n столбцов, то пишут $A_{m \times n}$, или A_{mn}.

Две матрицы $A_{mn} = (a_{ik})_{mn}$, $B_{pq} = (b_{ik})_{pq}$ называют *равными*, если $p = m$, $q = n$ и $a_{ik} = b_{ik}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n)$; другими словами, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *строчной матрицей*, или *матрицей-строкой*. Строчная матрица имеет вид

$$[a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]$$

Матрица

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{bmatrix},$$

имеющая один столбец, называется *столбцевой матрицей,* или *матрицей-столбцом*.

Матрицу, все элементы которой равны нулю, называют *нулевой матрицей* и обозначают буквой O:

$$O=\begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратной матрицей называют матрицу, у которой число строк равно числу столбцов ($m = n$):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называют число ее строк. Говорят, что элементы $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы образуют ее *главную диагональ* (индексы одинаковы), а элементы $a_{1n}, a_{2\ n-1}, ..., a_{n1}$ *вторую диагональ* (сумма индексов равна $n + 1$).

Квадратная матрица называется *симметрической*, если $a_{ik} = a_{ki}$, т.е. равны ее элементы, симметричные относительно главной диагонали.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали, равны нулю, т.е. матрица

$$diag(a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn})=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Скалярной матрицей называется диагональная матрица, у которой $a_{ii} = c(c = const)$ при $i = 1, 2, ..., n$.

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичную матрицу обозначают буквой Е:

$$\text{E}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Матрица A^T, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* относительно A.

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1.2. Действия над матрицами

Линейные действия над матрицами. Линейными действиями над матрицами называют сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется матрица $C = (c_{ik})_{mn}$, для которой

$$c_{ik} = a_{ik} + b_{ik} \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{1.1}$$

т.е. матрица, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых. Сумма двух матриц A и B обозначается $A + B$.

Разностью $A - B$ двух матриц $A = (a_{ik})_{mn}$, $B = (b_{ik})_{mn}$ называется матрица $D = (d_{ik})_{mn}$, для которой

$$d_{ik} = a_{ik} - b_{ik} \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n) \tag{1.2}$$

Произведением матрицы $A = (a_{ik})_{mn}$ на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $B = (b_{ik})_{mn}$, для которой

$$b_{ik} = \alpha a_{ik} \ (i = 1,\ 2,\ \dots,\ m;\ k = 1,\ 2,\dots,\ n), \tag{1.3}$$

т.е. матрица, полученная из данной умножением всех ее элементов на число α. Произведение матрицы A на число α обозначается $A\alpha$ (или αA).

Матрицу $(-1)A$ называют матрицей, противоположной матрице A, и обозначают $-A$.

З а м е ч а н и е. Разность $A - B$ двух матриц можно определить так:

$$A - B = A + (-B) \tag{1.4}$$

Линейные действия над матрицами обладают следующими свойствами:

1) $A+B=B+A$; 2) $(A+B)+C=A+(B+C)$; 3) $A+O=A$; 4) $A+(-A)=O$; 5) $1\cdot A=A$; 6) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$; 7) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; 8) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$,

где A, B, C – матрицы одних и тех же размеров; O – нулевая матрица; $(-A)$ – матрица, противоположная матрице A; α,β – любые действительные числа.

Умножение матриц.

Умножение определяется для квадратных матриц одного и того же порядка, а также для прямоугольных матриц, у которых число столбцов матрицы множимого равно числу строк матрицы множителя.

Произведением матрицы $A_{mn}=(a_{ik})_{mn}$ на матрицу $B_{nl}=(b_{ik})_{nl}$ называется матрица $C_{ml}=(c_{ik})_{ml}$, для которой

$$c_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\,, \qquad (1.5)$$

т.е. элемент c_{ik} матрицы C_{ml} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B_{nl}. Матрица C_{ml} имеет m строк (как и матрица A) и l столбцов (как матрица B). Произведение матрицы A на матрицу B обозначается AB.

З а м е ч а н и е. Из того, что матрицу A можно умножить на матрицу B, не следует, что матрицу B можно умножать на A.

Если оба произведения AB и BA определены, то в общем случае $AB\neq BA$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими*.

При умножении матриц единичная матрица E играет роль единицы, а нулевая матрица O – роль нуля, так как $AE = EA = A$, $AO = OA = O$.

Примеры

1. Даны две матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & -5\\ 6 & 8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -6 & -7\end{bmatrix}.$$

Найти сумму $A + B$ и разность $A - B$.

В соответствии с определениями суммы и разности матриц, получаем

$$A+B=\begin{bmatrix}2+(-1) & -5+5\\ 6+(-6) & 8+(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$A-B=\begin{bmatrix}2-(-1) & -5-5\\ 6-(-6) & 8-(-7)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -10\\ 12 & 15\end{bmatrix}.$$

2. Даны три матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & -6\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}5 & 4\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

Найти $3A+4B-2C$.

Принимая во внимание определения произведения матрицы на число, суммы и разности матриц, находим:

$$3A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -9 & 12\end{bmatrix},\ 4B=\begin{bmatrix}12 & -4\\ 16 & -24\end{bmatrix},\ -2C=\begin{bmatrix}-10 & -8\\ 4 & -2\end{bmatrix},$$

$$3A+4B-2C=3A+4B+(-2C)=$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -9 & 12\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & -4\\ 16 & -24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-10 & -8\\ 4 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+12-10 & 6-4-8\\ -9+16+4 & 12-24-2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -6\\ 11 & -14\end{bmatrix}.$$

3. Дана матрица $A=\begin{bmatrix}3 & -6\\ 6 & -9\end{bmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $2A + X = O$, где O – нулевая матрица.

Из последнего равенства получаем, что $X = O - 2A$, $X = -2A$, $X=\begin{bmatrix}-6 & 12\\ -12 & 18\end{bmatrix}$.

4. Дана матрица $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}$. Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $A + X = E$, где E – единичная матрица.

Из последнего равенства следует, что $X = E - A$. Подставляя выражения для E и A, находим:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2 & 0-(-1)\\ 0-4 & 1-(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -4 & 4\end{bmatrix}.$$

5. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & -8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ -7 & 9\end{bmatrix}.$$

Найти матрицу X, удовлетворяющую условию $A + X = B$.

Из последнего равенства следует, что $X = B - A$. Подставляя выражения для B и A, находим:

$$X=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ -7 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2 & -4\\ 6 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3-2 & 5-(-4)\\ -7-6 & 9-(-8)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 9\\ -13 & 17\end{bmatrix}.$$

6. Найти произведение AB и BA матриц:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 7 & 8\end{bmatrix}.$$

Обе матрицы являются квадратными одного и того же порядка, поэтому существуют AB и BA.

Умножая «строку на столбец», находим:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & -4\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 3+2\cdot 7 & 1\cdot(-4)+2\cdot 8\\ 5\cdot 3+(-6)\cdot 7 & 5\cdot(-4)+(-6)\cdot 8\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3+14 & -4+16\\ 15-42 & -20-48\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}17 & 12\\ -27 & -68\end{bmatrix}.$$

$$BA=\begin{bmatrix}3 & -4\\ 7 & 8\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot 1+(-4)\cdot 5 & 3\cdot 2+(-4)\cdot(-6)\\ 7\cdot 1+8\cdot 5 & 7\cdot 2+8\cdot(-6)\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3-20 & 6+24\\ 7+40 & 14-48\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17 & 30\\ 47 & -34\end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Результат умножения матриц в общем случае зависит от порядка множителей. В данном случае $AB\neq BA$.

7. Найти произведения AB и BA матриц:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Умножая «строку на столбец», находим:

$$AB=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\cdot 2+3\cdot 0 & 0\cdot 0+3\cdot 0\\ 0\cdot 2+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ AB=O;$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0 & 3\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 0+0\cdot 0 & 2\cdot 3+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 3+0\cdot 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Этот пример показывает, что произведение ненулевых матриц может быть нулевой матрицей и то, что $AB\neq BA$.

8. Найти произведения матриц

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

$$AE=\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{bmatrix},$$

$$EA=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 3 & -5\\ 4 & -8 & 7\\ 6 & 1 & -9\end{bmatrix}.$$

Как и следовало ожидать, $AE = EA = A$.

9. Найти произведения матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}.$$

Умножая «строку на столбец», находим:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{bmatrix},$$

$$BA=\begin{bmatrix}2 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 5\\ 1 & 3 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ 3 & -4 & 1\\ 2 & -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}29 & -56 & 27\\ 17 & -36 & 19\\ 14 & -25 & 11\end{bmatrix}.$$

10. Найти произведения AB и BA матриц:

$$A=[6\quad 5\quad 4],\ B=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Матрица A имеет 3 столбца, матрица B – 3 строки, поэтому существует произведение AB:

$$AB=[6\quad 5\quad 4]\cdot\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=[6\cdot 1+5\cdot 2+4\cdot 3]=[28].$$

Матрица AB состоит из одного элемента.

Матрица B имеет один столбец, матрица A – одну строку, поэтому существует произведение BA. Умножая «строку на столбец», находим:

$$BA=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\cdot[6\quad 5\quad 4]=\begin{bmatrix}1\cdot 6 & 1\cdot 5 & 1\cdot 4\\ 2\cdot 6 & 2\cdot 5 & 2\cdot 4\\ 3\cdot 6 & 3\cdot 5 & 3\cdot 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 5 & 4\\ 12 & 10 & 8\\ 18 & 15 & 12\end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Матрица BA имеет 3 строки (как и матрица B) и 3 столбца (как и матрица A).

11. Даны две матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 8\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 7 & 3\\ 6 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}.$$

Найти произведение AB. Существует ли произведение BA?

Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B («ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B), поэтому произведение AB определено. Умножая строку матрицы A на столбец матрицы B по формуле (1.5), находим:

$$AB=\begin{bmatrix}1\cdot 0+0\cdot 7-4\cdot 6+8\cdot 1 & 1\cdot 2+0\cdot 3-4\cdot 4+8\cdot 5\\ 2\cdot 0+5\cdot 7-3\cdot 6+0\cdot 1 & 2\cdot 2+5\cdot 3-3\cdot 4+0\cdot 5\\ 3\cdot 0+0\cdot 7-2\cdot 6+6\cdot 1 & 3\cdot 2+0\cdot 3-2\cdot 4+6\cdot 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & 26\\ 17 & 7\\ -6 & 28\end{bmatrix}.$$

Произведение BA не определено, поскольку число столбцов матрицы B отличается от числа строк матрицы A.

Задачи

1. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & -3\\ 5 & -7\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}.$$

Найдите матрицу X, удовлетворяющую условию $A+X=B$.

2. Дана матрица $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$. Найдите матрицу X, удовлетворяющую условию $3A-2X=E$, где E – единичная матрица.

3. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & -4 & 5\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & -5 & 6\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\\ 1 & -3 & 2\\ 8 & 6 & -7\end{bmatrix}.$$

Найдите $3A+4B-2C$.

4. $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}.$

5. $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 2 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$

6. $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 7 & -6 & 8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 6 & 0\\ 0 & 9\end{bmatrix},$

7. $A=\begin{bmatrix}4\\ 6\\ 8\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1\end{bmatrix}.$

8. $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 3\\ 5 & -4 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 4 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

9. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

10. $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -4 & 8\\ 2 & 5 & -3 & 0\\ 3 & 0 & -2 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 7 & 3\\ 6 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}.$

Выясните, какие произведения (AB или BA) существуют для матриц A и B. Найдите эти произведения.

Ответы

1. $\begin{bmatrix}-3 & 7\\ -11 & 15\end{bmatrix}$. **2.** $\begin{bmatrix}1 & -3\\ 4{,}5 & -6{,}5\end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix}1 & -12 & -4\\ 15 & 6 & 27\\ -6 & -29 & 29\end{bmatrix}$. **4.** $AB=\begin{bmatrix}-9 & -10\\ -13 & -14\end{bmatrix}$.

5. $AB=\begin{bmatrix}-4 & 4\\ -4 & 4\end{bmatrix}$. **6.** $AB=\begin{bmatrix}-12 & 27\\ -36 & 72\end{bmatrix}$. **7.** $BA=[8]$, $AB=\begin{bmatrix}-12 & 8 & 4\\ -18 & 12 & 6\\ -24 & 16 & 8\end{bmatrix}$.

8. $AB=\begin{bmatrix}-4 & -1 & 3\\ -8 & -2 & 9\\ -16 & -7 & 6\end{bmatrix}$. **9.** $AB=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 4 & 8\\ 15 & 20\end{bmatrix}$, BA не существует.

10. $AB=\begin{bmatrix}-16 & 25\\ 17 & 5\\ -6 & 25\end{bmatrix}$, BA не существует.

1.3. Определители второго порядка и их свойства

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

называют число, определяемое формулой

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix}3 & 5\\ 4 & 9\end{vmatrix}=3\cdot 9-5\cdot 4=27-20=7,\quad \begin{vmatrix}4 & 6\\ 6 & 9\end{vmatrix}=4\cdot 9-6\cdot 6=0,$$

$$\begin{vmatrix}7 & 8\\ 4 & 3\end{vmatrix}=7\cdot 3-8\cdot 4=21-32=-11.$$

Обозначения определителя второго порядка: $\det A$, Δ (это заглавная буква греческого алфавита, называется «дельта»).

Определитель второго порядка $\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ имеет следующие свойства:

1. Определитель не изменится при замене строк столбцами с теми же номерами:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}=\Delta,\ \Delta_1=\Delta.$$

2. При перестановке строк определитель изменит лишь только знак:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{11} & a_{12}\end{vmatrix}=a_{21}a_{12}-a_{11}a_{22}=-(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=-\Delta,$$

$$\Delta_2=-\Delta.$$

3. Определитель с нулевой строкой равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot 0 - a_{12} \cdot 0 = 0$$

4. Определитель с равными строками равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{12} = 0 .$$

5. Множитель, общий для элементов строки, можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = ca_{11}a_{22} - ca_{12}a_{21} = c\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right) = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

6. Определитель с пропорциональными строками равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ca_{11} & ca_{12} \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = 0 .$$

7. Определитель не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ca_{11} & a_{22} + ca_{12} \end{vmatrix} = a_{11}\left(a_{22} + ca_{12}\right) - a_{12}\left(a_{21} + ca_{11}\right) =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + ca_{11}a_{12} - ca_{11}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

1.4. Определители третьего порядка

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

называют число, определяемое формулой:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11} \quad (1.6)$$

Чтобы различать, какие произведения следует брать со знаком плюс, а какие со знаком минус, полезно правило, схематически изображенное на рис. 1.1.

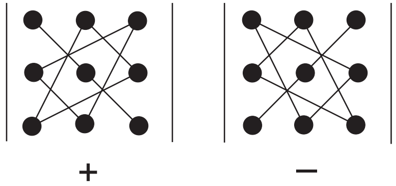

Рис. 1.1

Для него используют те же обозначения что и для определителя второго порядка.

Минором элемента определителя третьего порядка называют определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием той строки и того столбца, которым принадлежит рассматриваемый элемент. Минор элемента a_{ik} обозначают M_{ik}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя называют его минор, умноженный на $(-1)^{i+k}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ik} обозначают A_{ik}. В соответствии с определением, $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$.

Отметим, что алгебраическое дополнение равно минору, если сумма индексов $(i+k)$ – четное число, оно отличается от минора только знаком, если сумма индексов – нечетное число.

Выпишем миноры и алгебраические дополнения элементов первой сроки определителя третьего порядка.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\ A_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Сгруппировав по-другому члены в правой части формулы (1.6) и приняв во внимание выписанные формулы, получим:

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})+a_{12}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Следовательно, получена формула

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}, \qquad (1.7)$$

которую называют формулой разложения определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Аналогично можно получить разложение определителя по элементам любой другой строки и любого столбца.

З а м е ч а н и е. Определители четвертого и более высоких порядков можно ввести по формуле:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} A_{1k} \,, \tag{1.8}$$

аналогичной формуле (1.7).

В формуле (1.8) A_{1k} – алгебраические дополнения элементов a_{1k}, это определители $(n-1)$ –го порядка. По формуле (1.8) при $n = 2$ получаем определитель второго порядка, при $n = 3$ – определитель третьего порядка.

Определитель порядка n называется также детерминантом.

Примеры

1. Вычислить определители матриц

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}.$$

Пользуясь определением, получаем:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 6 - 9 \cdot 4 = -6 \,, \; \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - (-6) \cdot 8 = 42 \,.$$

2. Вычислить определители матриц

$$A = \begin{bmatrix} 562 & 462 \\ 563 & 463 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3497 & 2497 \\ 3498 & 2498 \end{bmatrix}.$$

Чтобы избежать вычисления произведений трехзначных и четырехзначных чисел, преобразуем определители к другим видам с помощью их свойств. Умножая первую строку на (–1) и прибавляя ко второй, находим:

$$\begin{vmatrix} 562 & 462 \\ 563 & 463 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 562 & 462 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 562 - 462 = 100 \,,$$

$$\begin{vmatrix} 3497 & 2497 \\ 3498 & 2498 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3497 & 2497 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3497 - 2497 = 1000 \,.$$

3. Вычислить определители третьего порядка

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Пользуясь определением, по формуле (1.6), получаем:

$$\Delta_1 = 1 + 8 + 27 - 6 - 6 - 6 = 36 - 18 = 18$$

$$\Delta_2 = 18 + 1 + 12 - 6 - 9 - 4 = 31 - 19 = 12 \,.$$

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ с помощью разложения его по элементам первой строки.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - 2\cdot 1 + 3\cdot 8 =$$

$$= -12 + 24 = 12\,.$$

З а м е ч а н и е. Тот же результат можно получить, например, разлагая определитель по элементам второй строки или по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot(-7) + 1\cdot(-1) - 2\cdot 4 = 12.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-5) - 3\cdot(-7) + 1\cdot 1 = 12\,.$$

5. Используя свойства определителей, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножим третью строку на (–2) и прибавим к первой строке, умножим третью строку на (–3) и прибавим ко второй, полученный определитель разложим по элементам первого столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 3 - (-3) = 6\,.$$

6. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix}$$

Умножим второй столбец на (-1) и прибавим к первому, умножим третий столбец на (–1) и прибавим ко второму, получим определитель с двумя одинаковыми столбцами, который равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 13 & 12 & 11 \\ 24 & 23 & 22 \\ 35 & 34 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 11 \\ 1 & 23 & 22 \\ 1 & 34 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 22 \\ 1 & 1 & 33 \end{vmatrix} = 0 .$$

Задачи

Вычислите определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 7 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 63 & 62 \\ 75 & 74 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 725 & 625 \\ 726 & 626 \end{vmatrix}$.

Вычислите определители третьего порядка.

4. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 8 & 9 & 7 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 58 & 63 & 59 \\ 69 & 73 & 71 \\ 77 & 81 & 79 \end{vmatrix}$. 6. $\begin{vmatrix} 251 & 125 & 126 \\ 363 & 181 & 182 \\ 574 & 288 & 289 \end{vmatrix}$

Вычислите определители четвертого порядка

7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

Решите уравнение

9. $\begin{vmatrix} x^2 & 4x \\ x & x \end{vmatrix} = 0$. 10. $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 1 & x & 2 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

Ответы

1. 10. **2.** 12. **3.** 100. **4.** 6. **5.** 48. **6.** 168. **7.** 78. **8.** –16. **9.** $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 4$. **10.** $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

1.5. Обратная матрица. Ранг матрицы

Квадратная матрица A^{-1} называется обратной квадратной матрице A, если выполняется условие

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E ,$$

где E – единичная матрица.

Квадратная матрица называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля. Если определитель матрицы равен нулю, она называется вырожденной или особенной.

Всякая невырожденная квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

имеет единственную обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{1.9}$$

где A_{ik} – алгебраическое дополнение элемента a_{ik} матрицы A. (Алгебраическое дополнение элементов каждой строки матрицы записаны в столбец с тем же номером).

Чтобы найти матрицу, обратную данной, необходимо: 1) вычислить определитель данной матрицы; 2) найти алгебраические дополнения A_{ik} ее элементов a_{ik}; 3) составить матрицу A' из алгебраических дополнений A_{ik}, взятых в том же порядке, что и элементы a_{ik} в матрице A; 4) в матрице A' поменять ролями строки и столбцы, записать матрицу $A^* = (A')^T$; 5) каждый элемент матрицы A^* разделить на определитель матрицы A.

Рангом матрицы называется наивысший из порядков ее миноров, отличных от нуля. Ранг матрицы обозначается так: r или $rangA$.

Примеры

1. Найти матрицу, обратную матрице

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Вычисляем определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 .$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то матрица имеет обратную.

В данном случае

$$a_{11} = 2 ,\ a_{12} = 3 ,\ a_{21} = 4 ,\ a_{22} = 5 ,$$
$$A_{11} = 5 ,\ A_{12} = -4 ,\ A_{21} = -3 ,\ A_{22} = 2 .$$

Составляем матрицы:

$$A' = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},\ A^* = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу A^{-1}, обратную матрице A:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*, \ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2,5 & 1,5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Формула (1.9) при $n = 2$ принимает вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}, \ A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

так как $A_{11} = a_{22}$, $A_{12} = -a_{21}$, $A_{21} = -a_{12}$, $A_{22} = a_{11}$.

Последняя формула для A^{-1} означается следующее: чтобы найти матрицу, обратную квадратной матрице второго порядка, необходимо в исходной матрице поменять местами элементы главной диагонали, изменить знаки элементов второй диагонали, полученную матрицу умножить на число, обратное определителю исходной матрицы.

2. Выяснить, существуют ли обратные матрицы для матриц

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители матриц.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1, \ \det B = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 36 - 36 = 0.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то матрица A имеет обратную. Так как $\det B = 0$, то не существует матрицы, обратной матрице B.

3. Выяснить, при каких значениях α существуют матрицы, обратные для матриц

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} \alpha & 4 \\ 9 & \alpha \end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители матриц.

$$\det A = \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 8\alpha - 8 = 8(\alpha - 1), \ \det B = \begin{vmatrix} \alpha & 4 \\ 9 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - 36.$$

Так как $\det A \neq 0$ при $\alpha \neq 1$, то матрица A имеет обратную при всех значениях α, кроме $\alpha = 1$. Поскольку $\det B \neq 0$ при $\alpha^2 - 36 \neq 0$, т.е. при $\alpha_1 \neq -6$, $\alpha_2 \neq 6$, то матрица B имеет обратную при всех значениях α, кроме значений $\alpha_1 = -6$, $\alpha_2 = 6$.

4. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{bmatrix}.$$

Вычисляем определитель матрицы A

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & 2\end{vmatrix}=4-5=-1\,.$$

Так как $\det A\neq 0$, то существует матрица A^{-1}, обратная матрице A. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 10 & 8\end{vmatrix}=0\,,\ A_{12}=-\begin{vmatrix}6 & 4\\ 13 & 8\end{vmatrix}=4\,,\ A_{13}=\begin{vmatrix}6 & 5\\ 13 & 10\end{vmatrix}=-5\,,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 10 & 8\end{vmatrix}=2\,,\ A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 13 & 8\end{vmatrix}=-5\,,\ A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 13 & 10\end{vmatrix}=3\,,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-1\,,\ A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 4\end{vmatrix}=2\,,\ A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 6 & 5\end{vmatrix}=-1\,.$$

Составляем матрицы A' и A*:

$$A'=\begin{bmatrix}0 & 4 & -5\\ 2 & -5 & 3\\ -1 & 2 & -1\end{bmatrix},\ A^*=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 4 & -5 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулой (1.9), которая при n = 3 принимает вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{bmatrix},$$

получаем обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 4 & -5 & 2\\ -5 & 3 & -1\end{bmatrix},\ A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -2\\ 5 & -3 & 1\end{bmatrix}.$$

5. Выяснить, существуют ли обратные матрицы для матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 7\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5\\ 2 & -3 & 1\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители матриц

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&7\\2&4&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-3&-5\\0&0&0\end{vmatrix}=0,$$

$$\det B=\begin{vmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-7&11&5\\0&0&1\\5&-8&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-7&11\\5&-8\end{vmatrix}=-(56-55)=-1.$$

Поскольку $\det A=0$, то матрица A не имеет обратной. Так как $\det B\neq 0$, то существует матрица, обратная матрице B.

6. Выяснить, при каких значениях α существуют матрицы, обратные матрицам

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2\\\alpha&1&2\\0&3&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}\alpha&0&1\\0&\alpha&0\\1&0&\alpha\end{bmatrix}.$$

Вычисляем определители матриц

$$\det A=\begin{vmatrix}1&1&2\\\alpha&1&2\\0&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&0\\\alpha&1&0\\0&3&-5\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1&1\\\alpha&1\end{vmatrix}=-5(1-\alpha),$$

$$\det B=\begin{vmatrix}\alpha&0&1\\0&\alpha&0\\1&0&\alpha\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\alpha&1\\1&\alpha\end{vmatrix}=\alpha\left(\alpha^2-1\right).$$

Так как $\det A=-5(1-\alpha)\neq 0$ при $\alpha\neq 1$, то матрица, обратная для матрицы A, существует при всех значениях α, кроме $\alpha=1$. Поскольку $\det B=\alpha\left(\alpha^2-1\right)\neq 0$ при $\alpha_1\neq -1$, $\alpha_2\neq 0$, $\alpha_3\neq 1$, то матрица, обратная матрице B, существует при всех значениях α, кроме значений $\alpha_1=-1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=1$.

7. Найти ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1\\6&4&2\\9&6&3\end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен нулю, так как содержит пропорциональные строки. Все определители второго порядка также равны нулю, в чем можно убедиться непосредственно. Матрица содержит элементы, отличные от нуля. Наивысший порядок миноров, отличных от нуля, равен единице, следовательно, ранг матрицы равен единице: $r=1$.

З а м е ч а н и е. Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях. Умножим первую строку на (-2) и прибавим ко второй; умножим первую строку на (-3) и прибавим к третьей:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Из последней матрицы видно, что ее ранг равен единице, значит, ранг исходной матрицы также равен единице.

Задачи

Выясните, имеет ли данная матрица обратную.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$. **2.** $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$. **3.** $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$. **4.** $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$. **5.** $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.
6. $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **7.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Выясните, при каких значениях α существует матрица, обратная данной матрице.

8. $\begin{bmatrix} 10 & \alpha \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. **9.** $\begin{bmatrix} \alpha & 8 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$. **10.** $\begin{bmatrix} \alpha & 7 \\ 7 & \alpha \end{bmatrix}$. **11.** $\begin{bmatrix} 9 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{bmatrix}$. **12.** $\begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
13. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \alpha & 2 \\ 3 & 3 & \alpha \end{bmatrix}$. **14.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & \alpha & 3 \\ 1 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$.

Найдите матрицу, обратную данной матрице.

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$. **16.** $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$. **18.** $\begin{bmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$.
19. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **20.** $\begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}$. **21.** $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$.

Ответы

1. Да. **2.** Нет. **3.** Да. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** $\alpha \neq 5$. **9.** $\alpha \neq 4$. **10.** $\alpha \neq -7$, $\alpha \neq 7$. **11.** $\alpha \neq -6$, $\alpha \neq 6$. **12.** $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$. **13.** $\alpha \neq 2$, $\alpha \neq 3$. **14.** $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq \frac{3}{2}$. **15.** $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$. **16.** $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. **17.** $\begin{bmatrix} -9 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$.
18. $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$. **19.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. **20.** $\begin{bmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.
21. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{bmatrix}$.

Глава 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Решение линейных систем уравнений с помощью определителей. Формулы Крамера

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

Если хотя бы один из свободных членов $b_i \neq 0$, то система уравнений (2.1) называется *неоднородной*. Если все свободные члены $b_i = 0 \ (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$, то данная система уравнений называется *однородной*.

Решением системы (2.1) называется множество значений неизвестных

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ ...,\ x_n = c_n, \quad (2.2)$$

при которых каждое из уравнений системы обращается в числовое равенство.

Система уравнений, имеющая решения, называется *совместной*, а система уравнений, не имеющая решений – *несовместной*.

Определителем системы уравнений (2.1) называется определитель, составленный из коэффициентов a_{ik} при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Если определитель неоднородной системы уравнений отличен от нуля, т.е. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (2.4)$$

где $\Delta_i (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ – определитель, полученный из определителя (2.3) заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Однородная система уравнений всегда совместна, так как имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Ненулевые решения она имеет тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю: $\Delta = 0$.

З а м е ч а н и е. При рассмотрении систем в случаях $n = 2$, $n = 3$, будем записывать x, y, z вместо x_1, x_2, x_3 соответственно.

Формулы (2.4) называют формулами Крамера.

Примеры

1. Определить, при каких значениях параметра α имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 x + 3\alpha y = 4, \\ 3x + \alpha y = 6 \end{cases}$$

Запишем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha^2 & 3\alpha \\ 3 & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 9\alpha .$$

Определитель будет отличным от нуля, когда $\alpha^3 - 9\alpha \neq 0$, или $\alpha\left(\alpha^2 - 9\right) \neq 0$. Система имеет единственное решение при всех значениях α, кроме $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 3$.

2. Определить, при каких значениях параметра α имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} \alpha x + y + 2z = 17, \\ x + \alpha y + 2z = 9, \\ x + 2y + \alpha z = 13. \end{cases}$$

Запишем определитель этой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 2 \\ 1 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & \alpha \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \alpha^3 + 2 + 4 - 2\alpha - 4\alpha - \alpha ,\ \Delta = \alpha^3 - 7\alpha + 6 .$$

Определитель равен нулю, когда $\alpha^3 - 7\alpha + 6 = 0$. Решим это уравнение. Так как $\alpha^3 - 7\alpha + 6 = \alpha^3 - \alpha - 6\alpha + 6 = \alpha\left(\alpha^2 - 1\right) - 6(\alpha - 1) =$
$= (\alpha - 1)[\alpha(\alpha + 1) - 6] = (\alpha - 1)\left(\alpha^2 + \alpha - 6\right) = (\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 3)$, то
$(\alpha - 1)(\alpha - 2)(\alpha + 3) = 0$, $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.

Определитель будет отличным от нуля, когда $\alpha_1 \neq -3$, $\alpha_2 \neq 1$, $\alpha_3 \neq 2$. Система имеет единственное решение при всех значениях α, кроме значений $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 2$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5, \\ 5x + 2y = 8. \end{cases}$$

Вычислим определители $\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2$:

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=-7\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}5 & 3\\ 8 & 2\end{vmatrix}=-14\,,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}4 & 5\\ 5 & 8\end{vmatrix}=7\,.$$

По формулам (2.4) в случае $n = 2$ находим решения:

$$x=\frac{-14}{-7}=2\,,\ y=\frac{7}{-7}=-1\,.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2x+y+3z=3,\\ 4x+2y+5z=5,\\ 3x+4y+7z=2.\end{cases}$$

Вычисляем определители $\Delta,\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 7\end{vmatrix}=5\,,\ \Delta_1=\begin{vmatrix}3 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 5\\ 2 & 4 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 5\end{vmatrix}=5\,,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 4 & 5 & 5\\ 3 & 2 & 7\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 3 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 3 & 2 & 5\end{vmatrix}=-10\,,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 5\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & -1\\ 3 & 4 & 2\end{vmatrix}=5\,.$$

Так как $\Delta\neq 0$, то система имеет единственное решение. По формулам (2.4) в случае $n = 3$ находим:

$$x=\frac{5}{5}=1\,,\ y=\frac{-10}{5}=-2\,,\ z=\frac{5}{5}=1\,.$$

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+y+z=0,\\ 2x-3y+4z=0,\\ 5x-7y+8z=0.\end{cases}$$

Это однородная система (все свободные члены равны нулю).

Вычисляем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -3 & 4\\ 5 & -7 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1 & 0\\ 5 & -5 & 7\\ 12 & -7 & 15\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5 & 7\\ 12 & 15\end{vmatrix}=9\,.$$

Поскольку определитель однородной системы отличен от нуля, то система имеет единственное нулевое решение:

$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

З а м е ч а н и е. В данном случае $\Delta_1=0$, $\Delta_2=0$, $\Delta_3=0$, так как каждый из них содержит нулевой столбец.

Задачи

С помощью определителей решите системы уравнений

1. $\begin{cases} 3x+2y=7, \\ 4x+3y=8. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 5x+9y=2, \\ 6x+7y=10. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 4x+3y=1, \\ 8x+9y=1. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 3x+4y+2z=8, \\ x+5y+2z=5, \\ 2x+3y+4z=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+3y+2z=4, \\ 2x+6y+z=2, \\ 4x+8y-z=2. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x-3y+8z=5, \\ 2x-7y+9z=1, \\ 3x-6y+7z=4. \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} x+2y-3z=3, \\ 2x+5y-z=2, \\ 4x+3y-6z=1. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-7y+4z=4, \\ 2x-6y+3z=6, \\ 4x-9y+2z=7. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x+y+2z=1, \\ 4x+6y+3z=2, \\ 8x+4y+8z=3. \end{cases}$ **10.** $\begin{cases} x+2y+3z=5, \\ 3x+y+2z=6, \\ 2x+3y+z=1. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x-2y+4z=3, \\ 2x+y-6z=2, \\ 3x-6y+z=-2. \end{cases}$ **12.** $\begin{cases} x+y-4z=1, \\ x+2y-3z=5, \\ 3x-2y+4z=4. \end{cases}$

Ответы

З а м е ч а н и е. Ответы $x = a$, $y = b$ будем записывать в виде (a, b), а ответы $x = a$, $y = b$, $z = c$ в виде (a, b, c).

1. (5, –4). **2.** (4, –2). **3.** (1/2, –1/3). **4.** (2,1,–1). **5.** (3, –1, 2). **6.** (3, 2, 1). **7.** (–2, 1, –1). **8.** (3, 1, 2). **9.** (–0,25; 0,25; 0,5). **10.** (1, –1, 2). **11.** (3, 2, 1). **12.** (2, 3, 1).

2.2. Метод последовательного исключения неизвестных

Метод последовательного исключения неизвестных, или метод Гаусса, применим к любой системе линейных уравнений. С помощью этого метода система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

может быть приведена к одной из следующих систем:

$$\left.\begin{array}{r} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+...+c_{1n}x_n=d_1, \\ c_{22}x_2+c_{23}x_3+...+c_{2n}x_n=d_2, \\ c_{33}x_3+...+c_{3n}x_n=d_3, \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{nn}x_n=d_n. \end{array}\right\} \qquad (2.6)$$

где $c_{ii}\,(i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ – некоторые коэффициенты, причем $c_{ii}\neq 0$;
d_i – свободные члены;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1,\\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2k}x_k + \ldots + c_{2n}x_n = d_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ c_{kk}x_k + \ldots + c_{kn}x_n = d_k. \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

где $k < n$;

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1,\\ c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ 0 \cdot x_n = d_k. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

где $k \le n$, $d_k \ne 0$.

Система (2.6) имеет единственное решение; значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} – из предпоследнего, значение x_1 – из первого.

Система (2.7) имеет бесконечное множество решений. Из последнего уравнения этой системы можно выразить одно из неизвестных (например, x_k) через остальные $n - k$ неизвестные (x_{k+1}, x_{k+2}, ..., x_n), входящих в это уравнение; из предпоследнего уравнения можно выразить x_{n-1} через эти неизвестные и т.д. В полученных формулах, выражающих $x_1, x_2, \ldots, x_k$ через $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, неизвестные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$ могут принимать любые значения.

Система (2.8) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворить ее последнему уравнению.

Метод последовательного исключения неизвестных называют также методом Гаусса.

Решая систему линейных уравнений методом Гаусса, преобразования совершают не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Примеры

6. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3,\\ 2x + y - 6z = 2,\\ 3x - 6y + z = -2. \end{cases}$$

Составляем матрицу из коэффициентов уравнений и свободных членов.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 3\\ 2 & 1 & -6 & 2\\ 3 & -6 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

(вертикальной чертой отделен столбец, составленный из свободных членов). Преобразуем эту матрицу. Умножая первую строку на (–2) и прибавляя ко второй, умножая первую строку на (–3) и прибавляя к третьей, получаем

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 3 \\ 2 & 1 & -6 & | & 2 \\ 3 & -6 & 1 & | & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & | & 3 \\ 0 & 5 & -14 & | & -4 \\ 0 & 0 & -11 & | & -11 \end{bmatrix}$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 3, \\ 5y - 14z = -4, \\ -11z = -11. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $z = 1$, $5y - 14z = -4$, $5y = 10$, $y = 2$, $x = 2y - 4z + 3 = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 3 = 3$.

Исходная система имеет то же решение: $x = 3,\ y = 2,\ z = 1$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ x + 2y - 3z = 5, \\ 3x - 2y + 4z = 4. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 1 \\ 1 & 2 & -3 & | & 5 \\ 3 & -2 & 4 & | & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & -5 & 16 & | & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 4 \\ 0 & 0 & 21 & | & 21 \end{bmatrix}$$

Третьей матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x + y - 4z = 1, \\ y + z = 4, \\ 21z = 21. \end{cases}$$

Из которой находим: $z = 1,\ y = 3,\ x = 2$.

Исходная система имеет единственное решение: $x = 2,\ y = 3,\ z = 1$.

8. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4, \\ 2x + y - 4z = 3, \\ 3x - y - z = 7. \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу и преобразуем ее:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 2 & 1 & -4 & | & 3 \\ 3 & -1 & -1 & | & 7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & | & 4 \\ 0 & 5 & -10 & | & -5 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Последней матрице соответствует система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4, \\ 5y - 10z &= -5 \end{aligned}\right\}, \text{ или } \left.\begin{aligned} x - 2y + 3z &= 4, \\ y - 2z &= -1 \end{aligned}\right\}$$

Переменные x и y выражаем через переменную z:

$$y = 2z - 1,\ x = 4 + 2y - 3z = 4 + 2(2z-1) - 3z = 4z - 3z + 4 - 2 = z + 2.$$

Решения системы определяются формулами $x = z + 2$, $y = 2z - 1$, где z может принимать любые действительные значения.

Задачи

Методом Гаусса решите системы уравнений

1. $\begin{cases} x+y-4z=1, \\ x+2y-3z=5, \\ 3x-2y+4z=4. \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x-3y+8z=5, \\ 2x-7y+9z=1, \\ 3x-6y+7z=4. \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 2x+3y+4z=1, \\ x-6y-2z=-1, \\ 4x-3y+8z=-1. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x+2y+2z=8, \\ 2x-3y+3z=8, \\ 4x+y-6z=21. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x+4y-z=2, \\ 3x+2y+2z=1, \\ 6x+4y-2z=5. \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} x+2y-3z=4, \\ 2x+5y-7z=1, \\ 3x+7y-10z=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+2z=3, \\ 4x-2y-5z=5, \\ 6x-y+3z=1. \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} x-4y+3z=5, \\ 2x-7y+2z=3, \\ 3x-8y+4z=9. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} x+4y-z=3, \\ 3x+5y-2z=4, \\ 4x+9y-3z=6. \end{cases}$

Ответы

1. $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$. **2.** $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. **3.** $x = 1/2$, $y = 1/3$, $z = -1/4$. **4.** $x = 4$, $y = -1$, $z = -1$. **5.** $x = 0{,}5$; $y = 0{,}25$; $z = -0{,}5$; **6.** $x = z + 18$, $y = z - 7$, z может принимать любые действительные значения. **7.** $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$. **8.** $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$. **9.** Система несовместна.

II

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Глава 3. ЛИНИИ НА ПЛОСКОСТИ

Алгебраической линией n-го порядка называют линию, определяемую алгебраическим уравнением n-ой степени относительно прямоугольных координат. Линиями первого порядка являются прямые линии. Линии второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

3.1. Различные виды уравнений прямой на плоскости

Прямая, параллельная оси Oy и проходящая через точку A $(a, 0)$ имеет уравнение $x = a$ (рис. 3.1).

Угловым коэффициентом к прямой называют тангенс угла α, образованного прямой с осью Ox (рис. 3.2).

$$k = \mathrm{tg}\alpha.$$

Если $M_1\ (x_1, y_1)$, $M_2\ (x_2, y_2)$ – две различные точки прямой, то

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

С помощью этой формулы получают уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b,$$

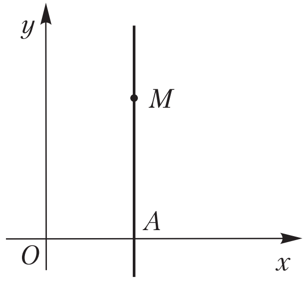

Рис. 3.1

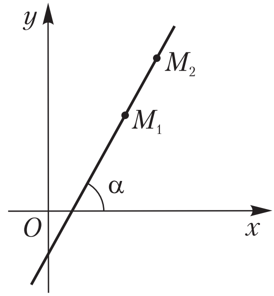

Рис. 3.2

уравнение прямой, проходящей через точку $M_0 \ (x_0, y_0)$ и имеющей угловой коэффициент k:

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

а также уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1 \ (x_1, y_1)$, $M_2 \ (x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

параметрические уравнения прямой

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \ \ y = y_1 + (y_2 - y_1)t.$$

Уравнение прямой в отрезках, отсекаемых на осях координат

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1;$$

здесь a и b – величины отрезков, т.е. их длины, взятые с соответствующими знаками.

Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0 \ \ \left(A^2 + B^2 \neq 0\right),$$

где A и B – координаты вектора $\bar{n} = (A, B)$, перпендикулярного данной прямой.

Условие параллельности двух прямых $y = k_1 x + b_1$, $y = k_2 x + b_2$ выражается равенством $k_1 = k_2$, а условие их перпендикулярности – равенством $k_2 = -\frac{1}{k_1}$. Угол φ между этими прямыми определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Расстояние d от точки $M_0 \ (x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Две прямые, заданные уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ параллельны, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; совпадают, если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; перпендикулярны, когда

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Последнее равенство означает, что коэффициенты при переменных меняются местами и изменяется знак одного из коэффициентов. Например, прямые $4x+3y-7=0$ и $3x-4y+5=0$ перпендикулярны.

Приводя общее уравнение прямой к уравнению с угловым коэффициентом, можно вычислить угловой коэффициент прямой $Ax+By+C=0$ $(B\neq 0)$:

$$k=-\frac{A}{B}.$$

3.2. Линии второго порядка

Окружность. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C(a,b)$ имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

Когда центр совпадает с началом координат, то

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

Если уравнение

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (3)$$

определяет некоторую линию на плоскости, то этой линией является окружность.

З а м е ч а н и е. При некоторых значениях коэффициентов уравнение может определить точку или пустое множество.

Эллипс. Эллипсом называют множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (4)$$

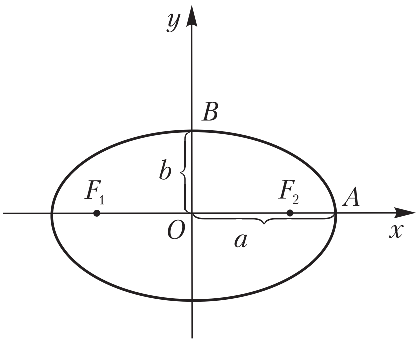

Рис. 3.3

где $a=OA$ – большая полуось, $b=OB$ – малая полуось (рис. 3.3). $a^2-b^2=c^2$; $2c=F_1F_2$ – фокусное расстояние, $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$.

Эксцентриситетом эллипса называют число

$$\varepsilon=\frac{c}{a} \quad (0<\varepsilon<1). \qquad (5)$$

Директрисами эллипса называют прямые, определяемые уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}. \qquad (6)$$

Гипербола. Гиперболой называют множество точек плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух данных точек (фокусов) той же плоскости есть величина постоянная.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (7)$$

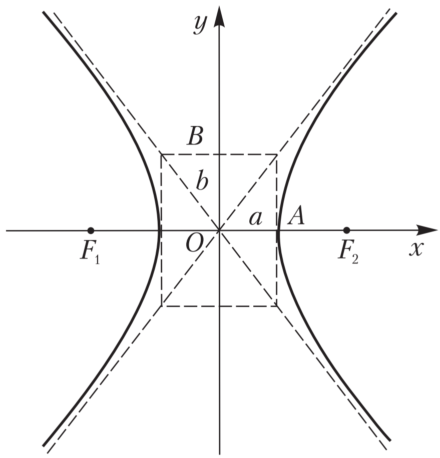

Рис. 3.4

где $a = OA$ – действительная полуось, $b = OB$ – мнимая полуось (рис. 3.4), $b^2 = c^2 - a^2$, $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы.

При $b = a$ уравнение

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad (8)$$

определяет равностороннюю гиперболу.

Асимптотами гиперболы (7) называют прямые, определяемые уравнениями

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x. \qquad (9)$$

Эксцентриситетом гиперболы называют число

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (\varepsilon > 1). \qquad (10)$$

Директрисами гиперболы (7) называют прямые, определяемые уравнениями

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \quad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Уравнение равносторонней гиперболы (8) относительно ее асимптот принимает вид

$$xy = c \quad (c \neq 0). \qquad (11)$$

З а м е ч а н и е. Уравнение (11) рассматривалось в школе при изучении обратной пропорциональной зависимости.

Парабола. Параболой называют множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

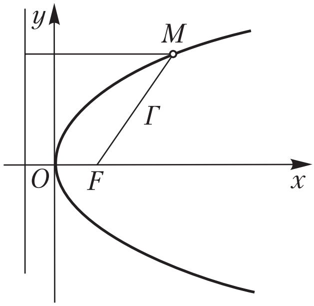

Рис. 3.5

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px. \tag{12}$$

Парабола (12) имеет вид, изображенный на рис. 3.5.

Директриса параболы (12) определяется уравнением $x = -\frac{p}{2}$, фокус $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

З а м е ч а н и е. Каждое из уравнений

$$y^2 = 2px,\ y^2 = -2px,\ x^2 = 2qy,\ x^2 = -2qy,\ p > 0,\ q > 0.$$

определяет параболу.

Примеры

1. Записать уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 45° и проходящей через точку $M_0\ (3, 5)$.

Так как $k = \operatorname{tg}45^\circ = 1,\ x_0 = 3,\ y_0 = 5,$ то уравнение $y - y_0 = k(x - x_0)$ в данном случае принимает вид

$$y - 5 = 1(x - 3),\ \ y = 5 + x - 3,\ \ y = x + 2.$$

2. Записать уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\ (3, 5)$, $M_2\ (7, 6)$.

На основании уравнения $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ получаем (с учетом того, что $x_1 = 3,\ y_1 = 5,\ x_2 = 7,\ y_2 = 6$):

$$\frac{y-5}{6-5} = \frac{x-3}{7-3},\ \ \frac{y-5}{1} = \frac{x-3}{4},\ \ 4(y-5) = x - 3,\ \ x - 4y + 17 = 0.$$

3. Найти величины отрезков, отсекаемых на осях координат прямой $4x - 5y = 20$. (Величина отрезка, его длина, взятая с соответствующим знаком).

Приводя уравнение к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ и сравнивая с ним, заключаем, что $a = 5,\ b = -4$:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-4} = 1.$$

4. Вычислить расстояние между параллельными прямыми $3x - 4y + 12 = 0,\ 3x - 4y - 18 = 0.$

Зафиксируем произвольно одну точку на первой прямой и вычислим ее расстояние до второй прямой. Положив, например, $x_0 = 4$ из уравнения $3x - 4y + 12 = 0$ найдем $y_0 = 6.$ Вычислим расстояние точки $M_0\ (4, 6)$ до второй прямой:

$$d = \frac{|3\cdot 4 - 4\cdot 6 - 18|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-30|}{5} = 6.$$

5. Записать уравнение прямой, параллельной прямой $6x - 8y + 5 = 0$ и проходящей через точку $M_0\ (-1, 2).$

В соответствии с условием параллельности уравнение прямой ищем в виде $6x - 8y + c = 0.$ Значение c определим из условия того, что точка M_0 принадлежит прямой: $6(-1) - 8\cdot 2 + c = 0,\ c = 22.$

Уравнение прямой имеет вид $6x - 8y + 22 = 0,$ или $3x - 4y + 11 = 0.$

6. Записать уравнение прямой, перпендикулярной прямой $6x + 5y - 9 = 0$ и проходящей через точку $M_0\ (-2, -3).$

В соответствии с условием перпендикулярности $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ уравнение прямой ищем в виде $5x - 6y + c = 0.$ Значение c определим из условия: точка $M_0\ (2, -3)$ принадлежит прямой; $5(-2) - 6(-3) + c = 0,$ $-10 + 18 + c = 0,\ c = -8.$ Уравнение имеет вид $5x - 6y - 8 = 0.$

7. Найти центр и радиус окружности

$$4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 19 = 0.$$

Разделим уравнение на 4 и преобразуем его, выделив полные квадраты:

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y + \frac{19}{4} = 0,\ \left(x^2 + 2x + 1\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) - 1 - 4 + \frac{19}{4},$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{1}{4}.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2,$ заключаем, что центр находится в точке $C\ (-1, 2),$ а радиус $R = \dfrac{1}{2}.$

8. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12.$

Разделив уравнение на 12 и сравнив полученное уравнение с каноническим уравнением эллипса, найдем: $a^2 = 4,\ b^2 = 3,\ a = 2,\ b = \sqrt{3},$ $c^2 = a^2 - b^2 = 4 - 3 = 1;\ F_1\ (-1, 0),\ F_2\ (1, 0).$ Эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}.$

9. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет гиперболы $5x^2 - 4y^2 = 20.$ Разделив уравнение на 20 и сравнив с каноническим уравнением гиперболы, найдем: $a^2 = 4,\ b^2 = 5;\ a = 2,\ b = \sqrt{5};\ c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 5 = 9,$

$c=3$, $F_1\ (-3,0)$, $F_2\ (3,0)$ – фокусы. Эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{3}{2}$. Запишем уравнения асимптот гиперболы: $y=-\frac{\sqrt{5}}{2}x$, $y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$.

10. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2=16x$.

Сравнивая это уравнение с уравнением (12), заключаем, что $2p=16$, $p=8$, $\frac{p}{2}=4$. Фокус находится в точке $F\ (4,0)$, $x=-4$ – уравнение директрисы.

Задачи

1. Запишите уравнение прямой, параллельной биссектрисе второго и четвертого координатного угла и проходящей через точку $(5,-7)$.

2. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\ (4,9)$, $M_2\ (7,6)$. Какой вид имеют параметрические уравнения этой прямой?

3. Найдите величины отрезков, отсекаемых на осях координат, прямой $3x-4y=12$.

4. Запишите уравнение прямой, параллельной прямой $5x-7y+3=0$ и проходящей через точку $M\ (2,-1)$.

5. Запишите уравнение прямой, перпендикулярной прямой $3x+4y-5=0$ и проходящей через точку $(1,2)$.

6. Вычислите длину высоты трапеции, стороны которой лежат на прямых $4x-3y+2=0$, $4x-3y-18=0$.

7. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением $x^2+y^2+6x-8y-11=0$.

8. Найдите полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$.

9. Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

10. Найдите координаты фокусов и уравнение директрисы параболы $y^2=8x$.

Ответы

1. $y=-x-2$. **2.** $x+y-13=0$; $x=4+3t$, $y=9-3t$. **3.** $a=4$, $b=-3$. **4.** $5x-7y-17=0$. **5.** $4x-3y+2=0$. **6.** 4. **7.** $c\ (-3,4)$, $R=6$. **8.** $a=6$, $b=2\sqrt{5}$, $F_1\ (-4,0)$, $F_2\ (4,0)$, $\varepsilon=\frac{2}{3}$. **9.** $a=8$, $b=6$, $F_1\ (-10,0)$, $F_2\ (10,0)$, $\varepsilon=\frac{5}{4}$, $y=-\frac{3}{4}x$, $y=\frac{3}{4}x$. **10.** $F\ (2,0)$, $x=-2$.

Глава 4. ВЕКТОРЫ

Некоторые физические величины (например, сила, перемещение, скорость, ускорение) характеризуются числом и направлением. Такие величины называют векторными. Для изображения этих величин служат векторы.

4.1. Основные определения

Вектором называют направленный отрезок. *Нулевым вектором* (или нуль-вектором) называют вектор, начало и конец которого совпадают; обозначается символом $\bar{0}$. *Единичным вектором* называют вектор, длина которого равна единице. Модулем вектора называют его длину и обозначают $|\bar{a}|$ $(|\bar{a}|\geq 0)$. *Произведением вектора* $\bar{a}$ *на число* α называют вектор $\bar{b}=\alpha\bar{a}$, длина которого равна $|\alpha|\cdot|\bar{a}|$, а направление совпадает с направлением $\bar{a}$ при $\alpha>0$ и противоположно ему, когда $\alpha<0$. *Коллинеарными векторами* называют векторы, лежащие на одной прямой (или на параллельных прямых). Условие параллельности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выражается равенством $\bar{b}=\alpha\bar{a}.$ Коллинеарные векторы, имеющие равные длины и одинаковые направления, называют *равными*. Векторы, имеющие противоположные направления и равные длины, называют *противоположными*. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначают $-\bar{a}$; очевидно, $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

Линейными действиями над векторами называют сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число.

Координатами вектора называют его проекции на координатные оси. *Радиус-вектором* точки $M(x_1,\ y_1,\ z_1)$ называют вектор $\bar{r}=\overline{OM},$ где O – начало координат. Координаты X, Y, Z вектора $\bar{r}=\overline{OM}$ совпадают с координатами точки M: $X=x_1,\ Y=y_1,\ Z=z_1.$

Радиус-вектор точки $M(x,\ y,\ z),$ делящей отрезок $M_1M_2,$ где $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),$ $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ в данном отношении $\lambda=\dfrac{m_2}{m_1},$ определяется формулой $\bar{r}=\dfrac{m_1\bar{r}_1+m_2\bar{r}_2}{m_1+m_2}$ или $\bar{r}=\dfrac{\bar{r}_1+\lambda\bar{r}_2}{1+\lambda},$ где $\bar{r}_1=\overline{OM_1},$ $\bar{r}_2=\overline{OM_2}.$

Координаты точки M выражаются формулами $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$, $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$, $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

Если M – середина отрезка $M_1M_2,$ то $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$, $z=\dfrac{z_1+z_2}{2}$.

Компланарными векторами называют векторы, лежащие в одной плоскости (или в параллельных плоскостях).

При сложении векторов складываются их одноименные координаты, при вычитании – вычитаются. При умножении вектора на число умножаются все его координаты на это число. Равные векторы имеют равные координаты. Если начало вектора находится в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а конец вектора в точке $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$; координаты начала вычитаются из одноименных координат конца.

Примеры

1. Даны векторы $\bar{a} = (6, -4, 2)$, $\bar{b} = (3, 5, -7)$. Найти их сумму, разность $\bar{a} - \bar{b}$, а также векторы $\bar{c} = 2\bar{a}$ и $\bar{d} = -3\bar{b}$.

Складывая одноименные координаты, находим:

$$\left(\bar{a} + \bar{b}\right) = (6 + 3, -4 + 5, 2 + (-7)) = (9, 1, -5).$$

Вычитая одноименные координаты, получаем:

$$\left(\bar{a} - \bar{b}\right) = (6 - 3, -4 - 5, 2 - (-7)) = (3, -9, 9).$$

Умножая координаты данных векторов на указанные числа, находим:

$$\bar{c} = 2\bar{a} = (12, -8, 4), \ \bar{d} = -3\bar{b} = (-9, -15, 21).$$

2. Найти вектор $\overline{M_1M_2}$, если начало его находится в точке $M_1(2, 4, -3)$, а конец – в точке $M_2(5, -8, 3)$.

Вычитая координаты начала из одноименных координат конца, находим:

$$\overline{M_1M_2} = (5 - 2, -8 - 4, 3 - (-3)), \ \overline{M_1M_2} = (3, -12, 6).$$

3. Вершины треугольника находятся в точках $A(6, 4, 2)$, $B(4, 6, 1)$, $C(2, 4, 7)$. Найти точку, в которой пересекаются его медианы.

Найдем сначала координаты точки D – основания медианы, проведенной из вершины A. Точка D – середина отрезка BC. Поскольку координаты середины отрезка равны полусуммам координат концов, то

$$x = \frac{4 + 2}{2}, \ y = \frac{6 + 4}{2}, \ z = \frac{1 + 7}{2}; \ D(3, 5, 4).$$

Точка E, в которой пересекаются медианы, делит отрезок AD в отношении $\frac{AE}{ED} = 2$. Считая точку A первой (т.е. $x_1 = 6, y_1 = 4, z_1 = 2$), точку D – второй (т.е. $x_2 = 3, y_2 = 5, z_2 = 4$), $\lambda = 2$, по соответствующим формулам находим:

$$x=\frac{6+2\cdot 3}{1+2}=4,\ y=\frac{4+2\cdot 5}{1+2}=\frac{14}{3},\ z=\frac{2+2\cdot 4}{1+2}=\frac{10}{3},\ E\left(4,\ \frac{14}{3},\ \frac{10}{3}\right).$$

Замечание. Тот же результат можно получить, если считать точку D первой, точку A – второй и $\frac{DE}{EA}=\lambda=\frac{1}{2}$.

4. Даны точки $A(1,\ p,\ 4)$, $B(-2,\ 0,\ 3)$, $C(q,\ 2,\ 2)$. При каких значениях p и q $\overline{AB}=\overline{BC}$?

Найдем сначала векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

$$\overline{AB}=(-2-1,\ 0-p,\ 3-4)=(-3,\ -p,\ -1);\ \overline{BC}=(q+2,\ 2,\ -1).$$

Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты: $-3=q+2$, $-p=2$, $-1=-1$, откуда $q=-5$, $p=-2$.

5. Даны векторы $\overline{a}=(3-p,\ 5)$, $\overline{b}=(7,\ q)$, $\overline{c}=(p-2,\ 4)$. Если $\overline{a}=\overline{b}-3\overline{c}$, то чему равно произведение pq?

Равенство $\overline{a}=\overline{b}-3\overline{c}$ в координатах принимает вид $(3-p,\ 5)=$ $=(7,\ q)-(3p-6,\ 12)$, откуда

$$3-p=7-3p+6,\ 5=q-12,\ 2p=10,\ p=5,\ q=17.$$

Искомое произведение равно 85: $pq=5\cdot 17=85$.

6. При каких значениях p и q векторы $\overline{a}=(6,\ p,\ 8)$ и $\overline{b}=(3,\ 1,\ q)$ коллинеарны?

Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда пропорциональны их одноименные координаты:

$$\frac{6}{3}=\frac{p}{1}=\frac{8}{q},\ 2=\frac{p}{1}=\frac{8}{q}, \text{ откуда } p=2,\ q=4.$$

Это искомые значения. При этих значениях коллинеарны векторы $\overline{a}=(6,\ 2,\ 8)$ и $\overline{b}=(3,\ 1,\ 4)$.

7. Векторы $\overline{a}=(9,\ p,\ 6)$, $\overline{b}=(q-1,\ 4,\ 2)$ коллинеарны. Найти значение суммы $p+q$.

Из условия коллинеарности следуют равенства

$$\frac{9}{q-1}=\frac{p}{4}=\frac{6}{2},\ \frac{9}{q-1}=3,\ \frac{p}{4}=3, \text{ откуда } p=12,\ q=4;\ p+q=16.$$

8. Найти длину вектора $\overline{a}=(2,\ 1,\ -2)$.

Длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов координат: $\overline{a}=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$.

9. Даны перпендикулярные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, причем $|\overline{a}|=4$, $|\overline{b}|=3$. Найти $|\overline{a}+\overline{b}|$ и $|\overline{a}-\overline{b}|$.

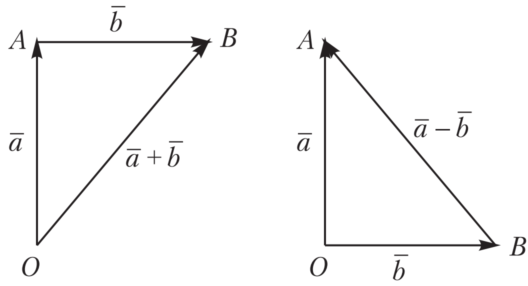

Рис. 4.1

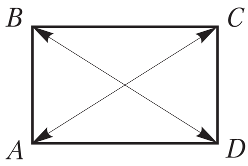

Рис. 4.2

В соответствии с определениями строим векторы $\overline{a}+\overline{b}$, $\overline{a}-\overline{b}$ (рис. 4.1): $\overline{a}+\overline{b}=\overline{OB}$, $\overline{a}-\overline{b}=\overline{BA}$. *OB* является гипотенузой прямоугольного треугольника *OAB* с катетами $OA=4$, $AB=3$. По теореме Пифагора получаем $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|=\sqrt{4^2+3^2}=5$. Аналогично находим $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|=5$.

10. Дан прямоугольник *ABCD* (рис. 4.2). Среди векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{DB}$ указать коллинеарные, равные и противоположные. Выразить векторы-диагонали через векторы-стороны.

Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ так же коллинеарны, причем $\overline{BC}=\overline{AD}$, векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ противоположны. В соответствии с определениями $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{DB}=\overline{AB}-\overline{AD}$. Это выражения для векторов-диагоналей.

11. В параллелограмме *ABCD* заданы точка $A(3,\ 8,\ -5)$ и векторы $\overline{AB}=(-4,\ -4,\ -2)$ и $\overline{CB}=(-3,\ -6,\ 1)$. Найти сумму координат точки пересечения его диагоналей.

Так как диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам, то достаточно найти координаты точки *C* и середину отрезка *AC*. Предварительно необходимо найти и координаты точки *B*. Пусть $B(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $C(x_2,\ y_2,\ z_2)$, тогда $\overline{AB}=(x_1-3,\ y_1-8,\ z_1+5)=$ $=(-4,\ -4,\ -2)$, откуда $x_1-3=-4,\ y_1-8=-4,\ z_1+5=-2.$ $x_1=-1,\ y_1=4,$ $z_1=-7;$ $B(-1,\ 4,\ -7)$. Далее, $\overline{CB}=(-1-x_2,\ 4-y_2,\ -7-z_2)=(-3,\ -6,\ 1)$, откуда $-1-x_2=-3$, $4-y_2=-6$, $-7-z_2=1$, $x_2=2$, $y_2=10$, $z_2=-8$; $C(2,\ 10,\ -8)$.

Находим точку *E* – середину отрезка *AC*: $x=\dfrac{3+2}{2}=\dfrac{5}{2}$, $y=\dfrac{8+10}{2}=9$, $z=\dfrac{-5+(-8)}{2}=-\dfrac{13}{2}$; $E\left(\dfrac{5}{2},\ 9,\ -\dfrac{13}{2}\right)$. Сумма координат точки *E*: $\dfrac{5}{2}+9+\left(-\dfrac{13}{2}\right)=-4+9=5$.

Задачи

1. Даны векторы $\overline{a}=(2,\ 1,\ -3)$, $\overline{b}=(4,\ -5,\ 2)$. Найти их сумму и разность $\overline{a}-\overline{b}$, а также векторы $3\overline{a}$, $-2\overline{b}$.

2. Даны три вектора $\overline{a}=(1,\ -2,\ 3)$, $\overline{b}=(2,\ 1,\ 4)$, $\overline{c}=(-3,\ 4,\ 5)$. Найдите вектор $\overline{d}=2\overline{a}-3\overline{b}+4\overline{c}$.

3. Найдите вектор $\overline{M_1M_2}$, если начало его находится в точке $M_1(3,\ 5,\ -2)$, а конец в точке $M_2(6,\ -7,\ 4)$.

4. При каких значениях p и q векторы $\overline{a}=(8,\ p,\ 10)$, $\overline{b}=(4,\ 2,\ q)$ коллинеарны?

5. Даны точки $A(2,\ p,\ 5)$, $B(-1,\ 1,\ 4)$, $C(-q,\ 3,\ 3)$. При каких значениях p и q $\overline{AB}=\overline{BC}$?

6. Векторы $\overline{a}=(10,\ p,\ 4)$, $\overline{b}=(q-2,\ 6,\ 2)$ коллинеарны. Найдите сумму $p+q$.

7. Точки $A(9,\ -11,\ 5)$, $B(7,\ 4,\ -2)$, $C(-7,\ 13,\ -3)$ являются последовательными вершинами ромба. Найдите четвертую вершину D.

8. Даны радиус-векторы $\overline{r}_1,\ \overline{r}_2,\ \overline{r}_3$ вершин треугольника. Найдите радиус-вектор $\overline{r}$ точки пересечения его медиан.

9. Вершины треугольника находятся в точках $A(1,\ 5,\ 3)$, $B(2,\ 6,\ -1)$, $C(3,\ 4,\ 7)$. Найдите точку пересечения его медиан.

Ответы

1. $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=(6,\ -4,\ -1)$, $\left(\overline{a}-\overline{b}\right)=(-2,\ 6,\ -5)$. $3\overline{a}=(6,\ 3,\ -9)$, $-2\overline{b}=$ $=(-8,\ 10,\ -4)$. **2.** $\overline{d}=(-16,\ 9,\ 14)$. **3.** $\overline{M_1M_2}=(3,\ -12,\ 6)$. **4.** $p=4,\ q=5$. **5.** $p=-1,\ q=-4$. **6.** $p+q=15$. **7.** $D(-5,\ -2,\ 4)$. У к а з а н и е. Найдите соответствующие векторы и воспользуйтесь условием равенства векторов. **8.** $\overline{r}=\dfrac{1}{3}(\overline{r}_1+\overline{r}_2+\overline{r}_3)$. **9.** $M(2,\ 5,\ 3)$.

4.2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называют число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}||\overline{b}|\cos\varphi .$$

Скалярное произведение обозначают и так: $\overline{a}\cdot\overline{b}$, $\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$.

Поскольку $|\overline{b}|\cos\varphi=np_{\overline{a}}\overline{b}$, $|\overline{a}|\cos\varphi=np_{\overline{b}}\overline{a}$ (рис. 4.3), то скалярное произведение можно представить в двух других видах: $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|np_{\overline{a}}\overline{b}$, $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{b}|np_{\overline{b}}\overline{a}$.

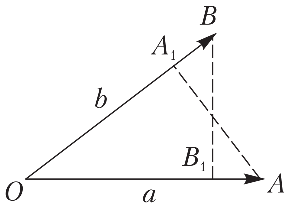

Рис. 4.3

Свойства скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a},\ \bar{a}\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c},\ (\alpha\bar{a})\cdot\bar{b}=\alpha\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\right).$$

Если $\bar{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$, $\bar{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов выражается равенством $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$, или $X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$.

Скалярным квадратом вектора называют скалярное произведение вектора на себя:

$$\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}||\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2.$$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины. Так как $\bar{a}^2=\bar{a}\cdot\bar{a}=X_1X_1+Y_1Y_1+Z_1Z_1=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$, то $|\bar{a}|^2=X_1^2+Y_1^2+Z_1^2$, $|\bar{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$, т.е. длина вектора равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.

Косинус угла между указанными векторами определяется формулой

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$$

Механический смысл скалярного произведения: работа W, производимая силой F, точка приложения которой прямолинейно перемещается из точки M_1 в точку M_2, вычисляется по формуле $W=\left(\bar{F},\overline{M_1M_2}\right)$.

Примеры

1. В четырехугольнике $ABCD$ заданы $\overline{AB}=(3,\ -1,\ -2)$, $\overline{BC}=(-2,\ 5,\ 1)$, $\overline{AD}=(-3,\ 4,\ 8)$. Найти скалярное произведение его диагоналей $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.

Отметим, что $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$ (так выражаются диагонали через стороны в векторном виде). Находим $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$:

$$\overline{AC}=(3+(-2),\ -1+5,\ -2+1)=(1,\ 4,\ -1),$$
$$\overline{BD}=(-3-3,\ 4-(-1),\ 8-(-2))=(-6,\ 5,\ 10).$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений одноименных координат:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=1\cdot(-6)+4\cdot 5+(-1)\cdot 10=-6+20-10=4.$$

2. Найти угол между векторами $\bar{a}=(7,2,-8)$, $\bar{b}=(11,\ -8,\ -7)$.

Из определения скалярного произведения следует, что $\cos\varphi=\dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$.
В данном случае находим:

$$\cos\varphi=\frac{7\cdot 11+2\cdot(-8)+(-8)\cdot(-7)}{\sqrt{7^2+2^2+(-8)^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{117}{\sqrt{2}\cdot 117}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=45^\circ .$$

3. Найти работу силы $\bar{F}=(1,2,-1)$, если точка ее приложения перемещается прямолинейно из точки $M_1(0,\ 1,\ 5)$ в точку $M_2(-1,\ 2,\ 1)$.

Находим вектор $\overline{M_1M_2}=(-1,\ 1,\ -4)$ и вычисляем работу $W=1\cdot(-1)+2\cdot 1+(-1)\cdot(-4)=-1+2+4=5$.

4. Какой угол образуют единичные векторы $\bar{m}$ и $\bar{n}$, если векторы $\bar{a}=3\bar{m}+6\bar{n}$ и $\bar{b}=10\bar{m}-8\bar{n}$ перпендикулярны?

Поскольку $\bar{a}\perp\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$. Находим их скалярное произведение $\bar{a}\cdot\bar{b}=(3\bar{m}+6\bar{n})(10\bar{m}-8\bar{n})=30\bar{m}^2-24\bar{m}\bar{n}+60\bar{m}\bar{n}-48\bar{n}^2$.

По условию $|\bar{m}|=1$, $|\bar{n}|=1$, $\bar{m}^2=1$, $\bar{n}^2=1$. По определению $\bar{m}\cdot\bar{n}=|\bar{m}|\cdot|\bar{n}|\cos\varphi$. Следовательно, $\bar{a}\bar{b}=30-24\cos\varphi+60\cos\varphi-48=0$, $36\cos\varphi=18$, $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$, $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$.

5. На кривой $y=2x^2-3x+5$ задана точка $A(1,\ y_1)$ и точка B пересечения этой кривой с кривой $y=2x^2-2x+3$. Найти скалярное произведение $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$.

Из уравнения первой линии получаем точку $A(1,\ 4)$. Решая систему уравнений $y=2x^2-3x+5,\ y=2x^2-2x+3,$ находим точку $B(2,\ 7)$.

Вычисляем $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=1\cdot 2+4\cdot 7=30$. $\overline{OA}=(1,\ 4)$, $\overline{OB}=(2,\ 7)$.

6. Вычислить скалярное произведение векторов $\bar{a}=(6,\ -2,\ 1)$, $\bar{b}=(1,\ 8,\ -3)$.

Поскольку скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат, то $\bar{a}\cdot\bar{b}=6\cdot 1+(-2)\cdot 8+1\cdot(-3)=-13.$

7. При каком значении α векторы $\bar{a}=(1,\ 2,\ \alpha)$, $\bar{b}=(\alpha,\ -3,\ 2)$ перпендикулярны?

Условие перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выражается равенством $\bar{a}\bar{b}=0$, которое в данном случае принимает вид $\alpha-6+2\alpha=0$, или $3\alpha-6=0$, откуда $\alpha=2$.

8. Вычислить работу, произведенную силой $\bar{F}=(4,\ 7,\ -1)$ при прямолинейном перемещении точки ее приложения из $A(3,\ 5,\ 9)$ в $B(4,\ 8,\ 11)$.

Найдем сначала вектор $\overline{AB}=(4-3,\ 8-5,\ 11-9)$, $\overline{AB}=(1,\ 3,\ 2)$. Так как работа W равна скалярному произведению $\overline{F}\cdot\overline{AB}$, то $W=4\cdot 1+$ $+7\cdot 3+(-1)\cdot 2=4+21-2=23$.

9. Вычислить работу, производимую равнодействующей $\overline{F}$ трех сил $\overline{F_1}=(1,\ -3,\ 4)$, $\overline{F_2}=(2,\ 6,\ -5)$, $\overline{F_3}=(7,\ -8,\ 9)$, когда ее точка приложения перемещается прямолинейно из $A(3,\ -2,\ 4)$ в $B(6,\ 8,\ 7)$.

Сначала найдем равнодействующую силу $\overline{F}=\overline{F_1}+\overline{F_2}+\overline{F_3}$: $\overline{F}=(1+2+7,\ -3+6-8,\ 4-5+9)$, $\overline{F}=(10,\ -5,\ 8)$ и вектор $\overline{AB}=$ $=(6-3,\ 8-(-12),\ 7-4)$, $\overline{AB}=(3,\ 10,\ 3)$.

Работу вычислим по формуле $W=\overline{F}\cdot\overline{AB}$:

$$W=10\cdot 3+(-5)\cdot 10+8\cdot 3=30-50+24=4\ .$$

10. Вычислить скалярное произведение $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}$ векторов $\overline{a}=2\overline{i}-3\overline{j}+5\overline{k}$, $\overline{b}=4\overline{i}+6\overline{j}+7\overline{k}$, $\overline{c}=8\overline{i}+2\overline{j}-9\overline{k}$.

Эти векторы заданы своими разложениями по базису $\overline{i},\ \overline{j},\ \overline{k}$. Векторы имеют координаты: $\overline{a}=(2,\ -3,\ 5)$, $\overline{b}=(4,\ 6,\ 7)$, $\overline{c}=(8,\ 2,\ -9)$. Используя свойство скалярного произведения $\left(a+\overline{b}\right)\overline{c}=\overline{ac}+\overline{bc}$, получаем:

$$\left(\overline{a}+\overline{b}\right)\cdot\overline{c}=(2\cdot 8-3\cdot 2+5\cdot(-9))+(4\cdot 8+6\cdot 2+7\cdot(-9))=-35-19=-54.$$

11. Найти угол между векторами $\overline{a}=(4,\ -10,\ 1)$, $\overline{b}=(11,\ -8,\ -7)$.

Поскольку $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$, то

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 11+(-10)(-8)+1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

угол $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

12. Даны три вектора $\overline{a}=(1,\ 2,\ 2)$, $\overline{b}=(4,\ -2,\ -5)$, $\overline{c}=(6,\ -1,\ 3)$. Найти вектор $\overline{d}$, удовлетворяющий условиям: $\overline{a}\cdot\overline{d}=3$, $\overline{b}\cdot\overline{d}=5$, $\overline{c}\cdot\overline{d}=1$.

Пусть $\overline{d}=(x,\ y,\ z)$ – искомый вектор, тогда $\overline{a}\cdot\overline{d}=x+2y+2z$, $\overline{b}\cdot\overline{d}=4x-2y-5z$, $\overline{c}\cdot\overline{d}=6x-y+3z$. В соответствии с условием получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases}x+2y+2z=3,\\4x-2y-5z=5,\\6x-y+3z=1\end{cases}$$

Решая эту систему, находим: $x=1$, $y=2$, $z=-1$, т.е. $\overline{d}=(1,\ 2,\ -1)$.

13. Найти расстояние между точками $M_1(2,\ -1,\ -2)$, $M_2(4,\ 3,\ -5)$ и расстояние от точки M_1 до начала координат.

Эти расстояния равны соответствующим длинам векторов $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{OM_1}$. Так как $\overline{M_1M_2}=(4-2,\ 3-(-1),\ -5+2)$, $\overline{OM_1}=(2,-1,-2)$, то $\left|\overline{M_1M_2}\right|=\sqrt{(4-2)^2+(3-(-1))^2+(-5+2)^2}=\sqrt{2^2+4^2+(-3)^2}=\sqrt{29}$, $\left|\overline{OM_1}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3$.

14. Найти угол при вершине B в треугольнике с вершинами $A(9,\ -18)$, $B(11,\ -19)$, $C(12,\ -22)$.

Искомый угол является углом между векторами $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$. Так как $\overline{BA}=(-2,\ 1)$, $\overline{BC}=(1,\ -3)$, то

$$\cos\varphi=\frac{(-2)\cdot 1+1\cdot(-3)}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{-5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \varphi=135^\circ.$$

Задачи

1. Вычислите скалярное произведение векторов $\overline{a}=(1,\ -3,\ 4)$, $\overline{b}=(5,\ 1,\ 2)$.

2. Найдите внутренние углы треугольника с вершинами $A(1,\ 7,\ 2)$, $B(5,\ -3,\ 3)$, $C(12,\ -1,\ -5)$ и внешний угол при вершине C.

3. Единичные векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$. Вычислите $\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{b}\cdot\overline{c}+\overline{c}\cdot\overline{a}$.

4. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$, если известно, что векторы $\overline{a}=3\overline{m}+6\overline{n}$ и $\overline{b}=10\overline{m}-8\overline{n}$ перпендикулярны.

5. Даны три вектора $\overline{a}=7\overline{i}-5\overline{j}+3\overline{k}$, $\overline{b}=-2\overline{i}+4\overline{j}-7\overline{k}$, $\overline{c}=4\overline{i}+4\overline{j}-2\overline{k}$. Вычислите $\left(\overline{b}+\overline{c}\right)\cdot\overline{a}$.

6. На кривой $y=2x^2-3x+5$ задана точка $A(x_1,\ y_1)$ с абсциссой $x_1=2$ и точка B пересечения этой кривой с кривой $y=2x^2-2x+3$. Найдите скалярное произведение $\overline{OA}\cdot\overline{OB}$.

7. Найдите угол между диагоналями четырехугольника с вершинами $A(7,\ -8,\ 4)$, $B(7,\ 4,\ -2)$, $C(-5,\ 10,\ -2)$, $D(-5,\ -2,\ 4)$.

8. Докажите, что четырехугольник с вершинами $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(4,\ 4,\ 1)$, $C(7,\ 1,\ 1)$, $D(4,\ -2,\ 1)$ является квадратом.

9. Вычислите работу, производимую силой $\overline{F}=(8,\ 4,\ -6)$ при перемещении ее точки приложения из начала в конец вектора $\overline{S}=(5,\ -3,\ 2)$.

Ответы

1. 10. **2.** $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Указание. Угол A – угол между $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Аналогично определяются углы B и C; $\alpha = 135^\circ$. **3.** –1,5. Указание. Условие $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$ означает, что эти векторы образуют равносторонний треугольник. **4.** $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. **5.** –53. **6.** 53. **7.** 90°. Указание. Убедитесь в том, что диагонали перпендикулярны. **8.** Указание. Найдите векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, скалярные произведения $\overline{AB} \cdot \overline{BC}$, $\overline{CD} \cdot \overline{DA}$. **9.** 16.

4.3. Векторное произведение векторов

Упорядоченную тройку векторов называют *правой*, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму совершается против часовой стрелки (рис. 4.4 *а*); в противном случае тройку называют *левой* (рис. 4.4 *б*). Прямоугольную систему координат в пространстве называют правой, если тройка базисных векторов $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$ является правой; если эта тройка левая, то система координат левая.

Будем пользоваться правыми системами координат.

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называют вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

2) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

3) упорядоченная тройка $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ – правая.

Обозначения векторного произведения $\overline{c} = \left[\overline{a}, \overline{b}\right]$, $\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\left[\overline{a}, \overline{b}\right] = -\left[\overline{b}, \overline{a}\right]$;

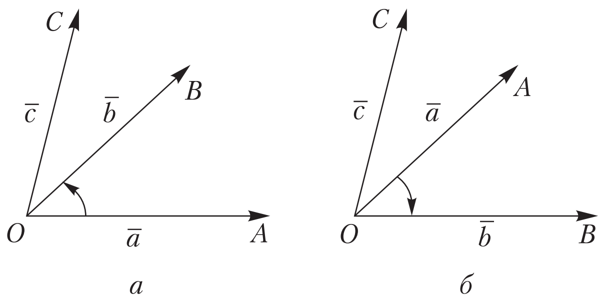

Рис. 4.4

2) $\left[\alpha\bar{a},\ \bar{b}\right]=\alpha\left[\bar{a},\ \bar{b}\right],\ \alpha\in\mathbb{R}$;

3) $\left[\bar{a}+\bar{b},\ \bar{c}\right]=\left[\bar{a},\ \bar{c}\right]+\left[\bar{b},\ \bar{c}\right]$;

4) условие коллинеарности векторов: $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=\bar{0}$, в частности, $\left[\bar{a},\ \bar{a}\right]=\bar{0}$.

Векторное произведение векторов $\bar{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$, $\bar{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2)$ можно записать в виде символического определителя

$$\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, получают координаты векторного произведения

$$\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}\right).$$

З а м е ч а н и е. Эти координаты можно получить так:

Записать матрицу из координат векторов

$$\begin{pmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{pmatrix},$$

Закрыв первый столбец, получим первую координату-определитель второго порядка; закрыв второй столбец, возьмем определитель со знаком минус; закрыв третий столбец, получим третью координату.

Из условия 1) следует, что модуль векторного произведения $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (рис. 4.5): $\left\|\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\right\|=S$, поэтому $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=S\bar{e}$, где $\bar{e}$ – единичный вектор направления $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]$. Площадь S параллелограмма, построенного на указанных векторах, вычисляется по формуле:

$$S=\sqrt{\begin{vmatrix}Y_1 & Z_1\\ Y_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Z_1\\ X_2 & Z_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}X_1 & Y_1\\ X_2 & Y_2\end{vmatrix}^2}.$$

Площадь треугольника ABC определяется формулой

$$S_1=\frac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right\|.$$

Механический смысл векторного произведения. Точка A твердого тела закреплена, а в его точке B приложена сила $\overline{F}$, тогда

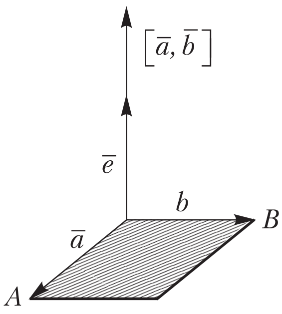

Рис. 4.5

возникает вращательный момент $\overline{M}$ (момент силы). По определению момент силы $\overline{F}$ относительно точки A находится по формуле $\overline{M}=\left[\overline{AB},\ \overline{F}\right]$.

Примеры

1. Найти векторное произведение векторов

$$\overline{a}=2\overline{i}+11\overline{j}-10\overline{k},\ \overline{b}=3\overline{i}+6\overline{j}-2\overline{k}.$$

Запишем векторное произведение в виде символического определителя, разложим определитель по элементам первой строки, вычислим определители второго порядка и найдем:

$$\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 11 & -10\\ 3 & 6 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}11 & -10\\ 6 & -2\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}2 & -10\\ 3 & -2\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}2 & 11\\ 3 & 6\end{vmatrix}\overline{k}=38\overline{i}-26\overline{j}-21\overline{k}.$$

Значит, $\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=38\overline{i}-26\overline{j}-21\overline{k}.$

2. Найти координаты векторного произведения векторов

$$\overline{a}=(7,\ -5,\ -6),\ \overline{b}=(1,\ -2,\ -3).$$

Выполняя соответствующие действия, получаем:

$$\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 7 & -5 & -6\\ 1 & -2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5 & -6\\ -2 & -3\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}7 & -6\\ 1 & -3\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}7 & -5\\ 1 & -2\end{vmatrix}\overline{k}=3\overline{i}+15\overline{j}-9\overline{k}.$$

Следовательно, $\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=(3,\ 15,\ -9).$

3. Найти угол между векторами $\overline{a}=(2,\ 1,\ 2)$, $\overline{b}=(-2,\ 2,\ 1)$.

Из равенства $\left|\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]\right|=|\overline{a}|\cdot\left|\overline{b}\right|\sin\varphi$ следует, что $\sin\varphi=\dfrac{\left|\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]\right|}{|\overline{a}|\cdot\left|\overline{b}\right|}$.

Находим модули векторов и модуль их векторного произведения:

$$|\overline{a}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3,\ \left|\overline{b}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3,$$

$$\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 2 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\overline{i}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\overline{j}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}\overline{k}=-3\overline{i}-6\overline{j}+6\overline{k}$$

$$\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]=(-3,\ -6,\ 6),$$

$$\left|\left[\overline{a},\ \overline{b}\right]\right|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9.$$

Следовательно, $\sin\varphi = \dfrac{\left\|\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\right\|}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{9}{3\cdot 3} = 1,\ \varphi = 90^\circ.$

4. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (2,\ 1,\ 2),\ \bar{b} = (3,\ -4,\ 2).$

Поскольку площадь $S = \left\|\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\right\|$ и

$$\left[\bar{a},\ \bar{b}\right] = \left(\begin{vmatrix}1 & 2\\ -4 & 2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\right) = (10,\ 2,\ -11),$$

$$\left\|\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\right\| = \sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2} = \sqrt{100 + 4 + 121} = \sqrt{225} = 15,$$

то площадь параллелограмма $S = 15$.

5. Вычислить площадь параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках $A(7,\ -5,\ 6),\ B(9,\ -4,\ 8),$ $C(6,\ 0,\ 6).$

Считаем, что параллелограмм построен на векторах $\overline{BA}$ и $\overline{BC}$, его площадь $S = \left\|\left[\overline{BA},\ \overline{BC}\right]\right\|$. Так как $\overline{BA} = (-2,\ -1,\ -2)$, $\overline{BC} = (-3,\ 4,\ -2)$, то $\left[\overline{BA},\ \overline{BC}\right] = \left(\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 4 & -2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-2 & -2\\ -3 & -2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -3 & 4\end{vmatrix}\right) = (10,\ 2,\ -11),\quad \left\|\left[\overline{BA},\ \overline{BC}\right]\right\| =$ $= \sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2} = 15$. Следовательно, $S = 15$.

6. Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(1,\ 1,\ 3),$ $B(3,\ -1,\ 6),\ C(5,\ 1,\ -3).$

Площадь вычисляется по формуле $S = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right\|$. Так как $\overline{AB} = (3-1,\ -1-1,\ 6-3) = (2,\ -2,\ 3),\ \overline{AC} = (5-1,\ 1-1,\ -3-3) = (4,\ 0,\ -6),$ то $\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right] = \left(\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & -6\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & -6\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}\right) = (12,\ 24,\ 8).$

$$\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right\| = \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \sqrt{4^2\left(3^2 + 6^2 + 2^2\right)} = 4\cdot 7 = 28.$$

Следовательно, $S = \dfrac{1}{2}\cdot 28 = 14.$

7. Дан треугольник с вершинами $A(-1,\ 1,\ 5),\quad B(3,\ -4,\ 5),$ $C(-1,\ 5,\ 2).$ Найти длину высоты, опущенной из вершины B на сторону AC.

Чтобы решить задачу, достаточно вычислить площадь S треугольника ABC и длину стороны AC.

Поскольку $\overline{AB} = (4,\ -5,\ 0)$, $\overline{AC} = (0,\ 4,\ -3)$, $\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right] = (15,\ 12,\ 16),$ $AC = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-3)^2} = 5,$ то $S = \dfrac{1}{2}\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right\| = \dfrac{1}{2}\sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} =$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{225+144+256} = \dfrac{1}{2}\sqrt{625} = \dfrac{25}{2}.$

С другой стороны, $S = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AC}\right| \cdot h$, поэтому $\dfrac{25}{2} = \dfrac{1}{2}\left|\overline{AC}\right| \cdot h = \dfrac{1}{2}5h$ откуда $h = 5$.

8. Найти момент силы $\overline{F}(2, -2, -3)$, приложенной в точке $A(4, 5, 6)$, относительно точки $B(2, 3, -3)$.

Момент силы $\overline{F}$ относительно точки B определяется формулой $\overline{M} = \left[\overline{a}, \overline{F}\right]$, где $a = \overline{BA}$. Поскольку $\overline{BA} = (4-2, 5-3, 6-(-3)) = (2, 2, 9)$, то

$$\left[\overline{a}, \overline{F}\right] = \left(\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right) = (12, 24, -8),$$

$$\overline{M} = (12, 24, -8).$$

Отметим, что $\left|\left[\overline{a}, \overline{F}\right]\right| = \sqrt{12^2+24^2+(-8)^2} = \sqrt{4^2\left(3^2+6^2+2^2\right)} = \sqrt{4^2 \cdot 49} = 4 \cdot 7 = 28.$

Задачи

1. Найдите векторное произведение векторов

$$\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j} - 2\overline{k}, \ \overline{b} = 8\overline{i} + 6\overline{j} + 4\overline{k}.$$

2. Даны два вектора $\overline{a} = (2, 1, 2)$, $\overline{b} = (3, -4, 2)$. Найдите координаты векторного произведения $\left[\overline{a}, \overline{b}\right]$.

3. Найдите площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = (1, -2, 2)$, $\overline{b} = (3, 0, -4)$.

4. Вычислите площадь треугольника с вершинами $A(-1, 0, 2)$, $B(1, -2, 5)$, $C(3, 0, -4)$.

5. Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$. Найдите длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

6. Силы $\overline{F_1} = (4, 1, 3)$, $\overline{F_2} = (-2, 2, 1)$ приложены в точке $A(6, -6, -3)$. Найдите модуль момента равнодействующей этих сил относительно точки $B(5, -8, -5)$.

7. Три силы $\overline{F_1} = (2, 4, 6)$, $\overline{F_2} = (1, -2, 3)$, $\overline{F_3} = (1, 1, -7)$ приложены в точке $A(3, -4, 8)$. Найдите момент равнодействующей этих сил относительно точки $B(4, -2, 6)$, его модуль и направляющие косинусы.

Ответы

1. $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=20\bar{i}-20\bar{j}-10\bar{k}$. **2.** $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]=(10,\ 2,\ -11)$. **3.** $S=10\sqrt{2}$.
4. S = 14. **5.** h = 10. **6.** $\left\|\left[\bar{a},\ \bar{F}\right]\right\|=\sqrt{5}$, где $\bar{a}=\overline{BA}=(1,\ 2,\ 3)$, $\bar{F}=(2,\ 3,\ 4)$.
7. $\left[\bar{a},\ \bar{F}\right]=(-10,\ 10,\ 5)$, где $\bar{a}=\overline{BA}=(-1,\ -2,\ 2)$, $\bar{F}=(4,\ 3,\ 2)$, $\left\|\left[\bar{a},\ \bar{F}\right]\right\|=15$, $\cos\alpha=\frac{-10}{15}=-\frac{2}{3}$, $\cos\beta=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\cos\gamma=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

4.4. Смешанное произведение трех векторов

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ называют число, равное векторному произведению $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]$, умноженному скалярно на вектор $\bar{c}$. Обозначение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\bar{c}$ или $\left(\bar{a},\bar{b},\bar{c}\right)$. Верны следующие равенства $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\bar{c}=\bar{a}\left[\bar{b},\ \bar{c}\right]$.

Если поменять местами два вектора, то смешанное произведение изменит лишь знак. Для трех векторов $\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\bar{b}\bar{c}\bar{a}=\bar{c}\bar{a}\bar{b}=-\bar{b}\bar{a}\bar{c}=-\bar{c}\bar{b}\bar{a}=-\bar{a}\bar{c}\bar{b}.$$

Смешанное произведение $\left[\bar{a},\ \bar{b}\right]\bar{c}$ трех некомпланарных векторов равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$ (рис. 4.6), взятому со знаком плюс, когда тройка $\left(\bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}\right)$ – правая, со знаком минус, если эта тройка левая.

Смешанное произведение векторов

$$\bar{a}=(X_1,\ Y_1,\ Z_1),\ \bar{b}=(X_2,\ Y_2,\ Z_2),$$
$$\bar{c}=(X_3,\ Y_3,\ Z_3)$$

вычисляется по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, определяется формулой

$$V=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

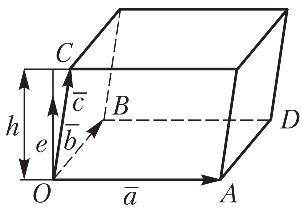

Рис. 4.6

Равенство $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$ является необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

Для указанных векторов равенство принимает вид

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Примеры

1. Найти смешанное произведение трех векторов

$$\bar{a}=(1,\ 1,\ 2),\ \bar{b}=(2,\ 1,\ 1),\ \bar{c}=(1,\ -2,\ 3).$$

В соответствии с формулой для вычисления смешанного произведения по координатам вектора получаем

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=-10.$$

2. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\bar{a}=(3,\ 1,\ 2),\ \bar{b}=(2,\ 2,\ 3),\ \bar{c}=(1,\ 3,\ 1).$$

В соответствии с геометрическим смыслом смешанного произведения находим

$$V=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} 0 & -8 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\operatorname{mod}\begin{vmatrix} -8 & -1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=|-12|=12.$$

3. Доказать, что компланарны векторы

$$\bar{a}=(1,\ 2,\ -2),\ \bar{b}=(1,\ -2,\ 1),\ \bar{c}=(5,\ -2,\ -1).$$

Вычисляем смешанное произведение векторов

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix}=0.$$

Так как $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=0$, то векторы компланарны.

4. Доказать, что точки $A(3,\ -4,\ 1)$, $B(2,\ -3,\ 7)$, $C(1,\ -4,\ 3)$, $D(4,\ -3,\ 5)$ лежат в одной плоскости.

Найдем векторы $\overline{AB}=(2-3,\ -3-(-4),\ 7-1)=(-1,\ 1,\ 6)$, $\overline{BC}=$

$=(1-2,\ -4-(-3),\ 3-7)=(-1,\ -1,\ -4),\quad \overline{CD}=(4-1,\ -3-(-4),\ 5-3)=$
$=(3,\ 1,\ 2),\ \overline{AD}=(4-3,\ -3-(-4),\ 5-1)=(1,\ 1,\ 4)$.

Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ – противоположные, они лежат в одной плоскости.

Рассмотрим векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{AD}$, их смешанное произведение:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 6\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1 & 6\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & -2\end{vmatrix}=(-8+8)=0.$$

Следовательно, эти векторы компланарны; точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

5. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(0,\ -2,\ 5)$, $B(6,\ 6,\ 0)$, $C(3,\ -3,\ 6)$, $D(2,\ -1,\ 3)$.

Объем треугольной пирамиды вычисляется по формуле

$$V_1=\frac{1}{6}V,$$

где V – объем параллелепипеда.

Вычислим объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{DA}=(0-2,\ -2-(-1),\ 5-3)=(-2,\ -1,\ 2)$, $\overline{DB}=(6-2,\ 6-(-1),\ 0-3)=$ $=(4,\ 7,\ -3)$, $\overline{DC}=(1,\ -2,\ 3)$:

$$V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-2 & -1 & 2\\ 4 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ -10 & 7 & 11\\ 5 & -2 & -1\end{vmatrix}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}-10 & 11\\ 5 & -1\end{vmatrix}=|10-55|=45.$$

Следовательно, $V_1=\frac{1}{6}V=\frac{1}{6}45=\frac{15}{2}$.

6. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(2,\ 1,\ 1)$, $B(6,\ -2,\ 2)$, $C(4,\ 3,\ 2)$, $D(-6,\ 8,\ 7)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D.

Искомая высота h равна объему V параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, деленному на площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Поскольку $\overline{AB}=(4,\ -3,\ 1)$, $\overline{AC}=(2,\ 2,\ 1)$, $\overline{AD}=(-8,\ 7,\ 6)$, то

$$V=\mathrm{mod}\begin{vmatrix}4 & -3 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ -8 & 7 & 6\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ -8 & 7\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}4 & -3\\ -8 & 7\end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot30-1\cdot4+6\cdot14=110,$$

$$\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]=\left(\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\right)=(-5,\ -2,\ 14),$$

$$S=\left\|\left[\overline{AB},\ \overline{AC}\right]\right\|=\sqrt{(-5)^2+(-2)^2+14^2}=\sqrt{25+4+196}=\sqrt{225}=15.$$

Следовательно, $h=\dfrac{V}{S}=\dfrac{110}{15}=\dfrac{22}{3}$.

Задачи

1. Вычислите смешанное произведение векторов

$$\overline{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \overline{b}=(3,\ 1,\ 2),\ \overline{c}=(2,\ 3,\ 1).$$

2. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах

$$\overline{a}=2\overline{i}+2\overline{j}+3\overline{k},\ \overline{b}=3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k},\ \overline{c}=\overline{i}+3\overline{j}+\overline{k}.$$

3. Выясните, компланарны ли векторы в каждом из следующих случаев:

1) $\overline{a}=(1,\ 2,\ 3),\ \overline{b}=(4,\ 5,\ 6),\ \overline{c}=(7,\ 8,\ 9)$;

2) $\overline{a}=(1,\ 3,\ 5),\ \overline{b}=(2,\ 4,\ 6),\ \overline{c}=(8,\ 9,\ 7)$.

4. Докажите, что точки $A(-1,\ 2,\ 1)$, $B(-3,\ 1,\ 2)$, $C(3,\ -2,\ 2)$ и $D(3,\ -4,\ 3)$ лежат в одной плоскости.

5. Вычислите объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(6,\ 1,\ 4)$, $B(2,\ -2,\ 5)$, $C(7,\ 1,\ 3)$, $D(1,\ -3,\ 7)$.

6. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0,\ -2,\ 5)$, $B(6,\ 6,\ 0)$, $C(3,\ -3,\ 6)$, $D(2,\ -1,\ 3)$. Найдите длину ее высоты, опущенной из вершины C.

7. Треугольная пирамида $ABCD$ имеет объем $V=2$, три ее вершины находятся в точках $A(2,\ 1,\ 3)$, $B(3,\ 3,\ 2)$, $C(1,\ 2,\ 4)$. Найдите координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси OZ.

Ответы

1. 18. **2.** 12. **3.** 1) да; 2) нет. **4.** Указание. Рассмотрите векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и их смешанное произведение. **5.** $\dfrac{23}{3}$. **6.** $h=3$. **7.** $D(0,\ 0,\ 1)$, $D(0,\ 0,\ 9)$.

Глава 5. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

5.1. Различные виды уравнения прямой в пространстве

Направляющим вектором прямой называют любой ненулевой вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей.

Векторно-параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\overline{r}=\overline{r}_0+\overline{a}t,$$

где $\overline{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ – направляющий вектор прямой, $\overline{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, через которую проходит прямая, $\overline{r}$ – радиус-вектор любой точки $M(x,\ y,\ z)$ этой прямой (рис. 5.1).

Параметрические уравнения прямой:

$$x=x_0+a_1t,\ y=y_0+a_2t,\ z=z_0+a_3t.$$

Канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}.$$

Уравнения прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

5.2. Различные виды уравнения плоскости в пространстве

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ (рис. 5.2) и имеющей нормальный вектор $\overline{n}=(A,B,C)$:

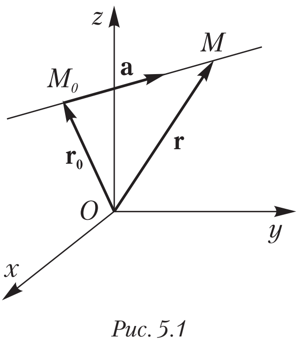

Рис. 5.1

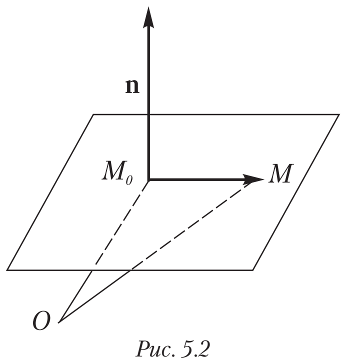

Рис. 5.2

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Общее уравнение плоскости :

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Уравнение плоскости в отрезках, отсекаемых на осях координат:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Условия параллельности двух плоскостей

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0:\ \frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1},$$

а условие их совпадения: $\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}$.

Косинус угла между указанными плоскостями:

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ до плоскости $Ax+By+$ $+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Синус угла между прямой $x=x_0+a_1t$, $y=y_0+a_2t$, $z=z_0+a_3t$ и плоскостью $Ax+By+Cz+D=0$ вычисляется по формуле

$$\sin\varphi=\frac{|Aa_1+Ba_2+Ca_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.$$

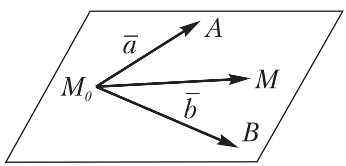

Рис. 5.3

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\bar{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\bar{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1,\, y_1,\, z_1)$, $M_2(x_2,\, y_2,\, z_2)$, $M_3(x_3,\, y_3,\, z_3)$ (рис. 5.4), не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

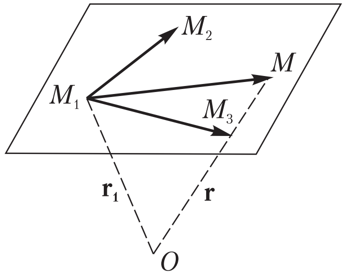

Рис. 5.4

5.3. Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называют множество точек пространства, определяемое уравнением второй степени относительно прямоугольных координат.

С помощью преобразований координат уравнение приводится к следующим каноническим видам:

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (эллипсоид, рис. 5.5)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ (однополостный гиперболоид, рис. 5.6)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ (двуполостный гиперболоид, рис. 5.7)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$ (конус, рис. 5.8)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (эллиптический параболоид, рис. 5.9)

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$ (гиперболический параболоид, рис. 5.10)

$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (эллиптический цилиндр, рис. 5.11)

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (гиперболический цилиндр, рис. 5.12)

$x^2=2py$ (параболический цилиндр, рис. 5.13)

$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ (пара пересекающихся плоскостей)

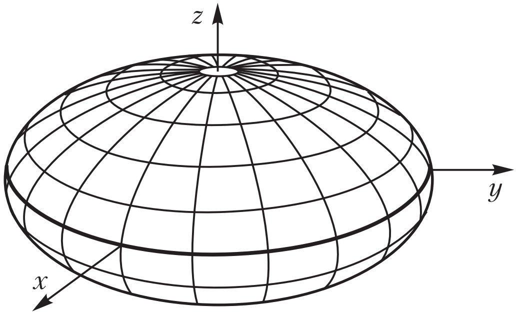

Рис. 5.5

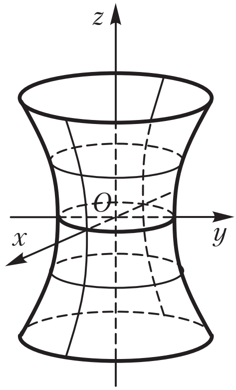

Рис. 5.6

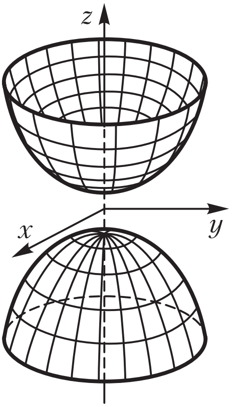

Рис. 5.7

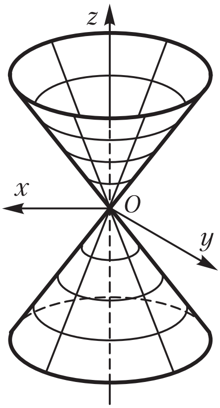

Рис. 5.8

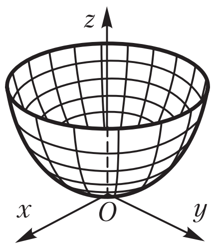

Рис. 5.9

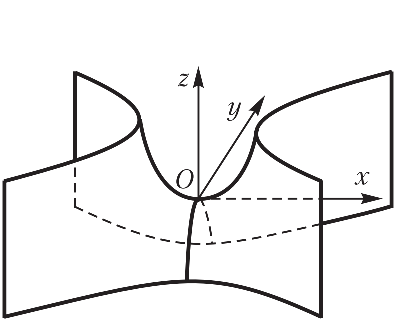

Рис. 5.10

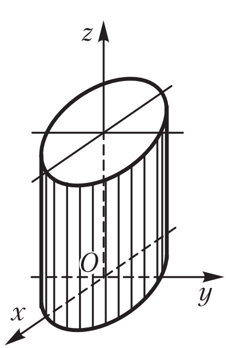

Рис. 5.11

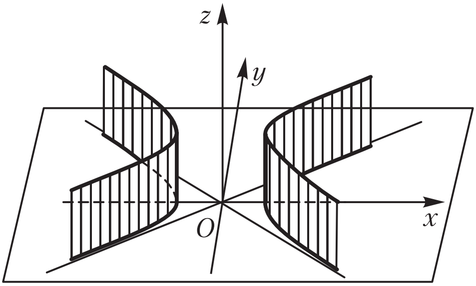

Рис. 5.12

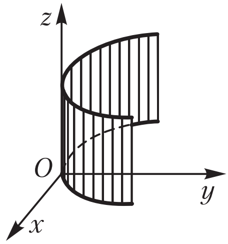

Рис. 5.13

$\frac{x^2}{a^2} = 1$ (пара параллельных плоскостей)

$x^2 = 0$ (пара совпавших плоскостей)

Примеры

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-3,\ 6,\ 9)$, $B(3,\ 5,\ 1)$.

Считая точку A первой (т.е. $x_1 = -3,\ y_1 = 6,\ z_1 = 9$), точку B – второй, получаем уравнения прямой для данного условия:

$$\frac{x-(-3)}{3-(-3)} = \frac{y-6}{5-6} = \frac{z-9}{1-9} \text{ или } \frac{x+3}{6} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z-9}{-8}.$$

Это канонические уравнения прямой.

Замечание 1. Если равные отношения обозначить буквой t, то параметрические уравнения данной прямой:

$$x = -3 + 6t,\ y = 6 - t,\ z = 9 - 8t.$$

Замечание 2. Если в этих уравнениях $0 \le t \le 1$, то точка описывает отрезок AB. При $t = 0$ получаем $x = -3$, $y = 6$, $z = 9$, т.е. координаты точки A, при $t = 1$ – координаты точки B.

2. Найти угол между двумя прямыми:

$$\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{7} = \frac{z+5}{8},\ \frac{x+1}{8} = \frac{y-5}{-11} = \frac{z+9}{-7}.$$

Первая прямая имеет направляющий вектор $\bar{a} = (2,\ 7,\ 8)$, вторая – направляющий вектор $\bar{b} = (8,\ -11,\ -7)$. Угол между двумя прямыми по определению равен углу между их направляющими векторами:

$$\cos\varphi=\frac{2\cdot 8+7\cdot(-11)+8\cdot(-7)}{\sqrt{2^2+7^2+8^2}\cdot\sqrt{8^2+(-11)^2+(-7)^2}}=\frac{-117}{\sqrt{117}\cdot\sqrt{234}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\varphi=135^\circ$.

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(4,\ 3,\ -2)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n}=(1,\ -7,\ 5)$.

Отложим из точки M_0 вектор $\overline{M_0N}=\bar{n}$ и вектор $\overline{M_0M}$, где M – произвольная точка плоскости. Поскольку $\overline{M_0N}\perp\overline{M_0M}$, то их скалярное произведение равно нулю: $\bar{n}\cdot\overline{M_0M}=0$, где $\bar{n}=(A,\ B, C)=(1,\ -7,\ 5)$, $\overline{M_0M}=(x-4,\ y-3,\ z+2)$, т.е. $1(x-4)-7(y-3)+5(z+2)=0$.

Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$x-7y+5z+27=0.$$

4. Даны вершина параллелепипеда $M(1,\ 2,\ 3)$ и уравнения плоскостей, в которых лежат три его непараллельные грани: $2x-y+2z-3=0$, $x+2y-2z-1=0$, $3x-y-z-1=0$. Составить уравнение одной из плоскостей, в которых лежат три другие грани.

В соответствии с условием параллельности двух плоскостей, уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x-y+2z-3=0$, можно искать в виде $2x-y+2z+D=0$. Поскольку точка $M(1,\ 2,\ 3)$ принадлежит искомой плоскости, то $2\cdot 1-2+2\cdot 3+D=0$, откуда $D=-6$.

Следовательно, уравнение имеет вид $2x-y+2z-6=0$.

5. Найти угол между плоскостями

$$11x-8y-7z+6=0,\ 4x-10y+z-5=0.$$

Первая плоскость имеет нормальный вектор $\bar{n}_1=(11,\ -8,\ -7)$, вторая – нормальный вектор $\bar{n}_2=(4,\ -10,\ 1)$.

Угол между двумя плоскостями по определению равен углу между их нормальными векторами. Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что $\cos\varphi=\dfrac{\overline{n_1}\cdot\overline{n_2}}{|\overline{n_1}|\cdot|\overline{n_2}|}$.

При данном условии получаем:

$$\cos\varphi=\frac{11\cdot 4+(-8)\cdot(-10)+(-7)\cdot 1}{\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}}=$$

$$=\frac{44+80-7}{\sqrt{121+64+49}\cdot\sqrt{16+100+1}}=\frac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi=45^\circ$.

6. Найти угол между прямой $x = 7 + 2t$, $y = -8 - t$, $z = 5 - t$ и плоскостью $2x + 2y - 4z - 3 = 0$.

По формуле для синуса угла в данном условии получаем

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-4)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{6}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2},\ \varphi = 30^\circ.$$

7. Исследовать взаимное положение прямой $x = 4 + 3t$, $y = 6 + 4t$, $z = 5 + 2t$ и плоскости $2x - 3y + 5z - 10 = 0$.

Поскольку $Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 2\cdot 3 + (-3)\cdot 4 + 5\cdot 2 = 4 \neq 0$, то прямая и плоскость пересекаются. Решив совместно их уравнения, найдем точку пересечения: $2(4 + 3t) - 3(6 + 4t) + 5(5 + 2t) - 10 = 0$, $4t + 5 = 0$, $t = -\frac{5}{4}$. При этом значении t $x = \frac{1}{4}$, $y = 1$, $z = \frac{5}{2}$. Значит, $M\left(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{2}\right)$ – точка пересечения.

8. Две грани куба лежат соответственно на плоскостях $x + 2y - 2z - 1 = 0$, $x + 2y - 2z + 5 = 0$. Вычислить объем куба.

Чтобы решить задачу, достаточно найти длину ребра куба, равную расстоянию между данными параллельными плоскостями. Это расстояние равно расстоянию от любой точки одной плоскости до другой плоскости. Выберем на первой плоскости произвольную точку. Приняв, например, что $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ из уравнения $x + 2y - 2z - 1 = 0$ найдем $x_0 = 1$. По формуле расстояния от точки $M_0(1, 1, 1)$ до плоскости $x + 2y - 2z + 5 = 0$ получаем

$$d - \frac{|1 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1 + 5|}{\sqrt{1 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{6}{3} = 2.$$

Поскольку $V = a^3$ и $a = d = 2$, то $V = 8$ (куб.ед.)

9. Исследовать взаимное расположение двух прямых

$$x = 8 + 3t,\ y = -7 - 5t,\ z = 11 + 6t \text{ и } x = 9 + 7t,\ y = 1 - 2t,\ z = 3 + 4t.$$

Первая прямая проходит через точку $M_1(8, -7, 11)$, имеет направляющий вектор $\bar{a} = (3, -5, 6)$; вторая прямая проходит через точку $M_2(9, 1, 3)$, $\bar{b} = (7, -2, 4)$ – ее направляющий вектор.

Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M_2} = (9 - 8,\ 1 - (-7),\ 3 - 11) = (1, 8, -8)$ и их смешанное произведение $\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Если $\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$, то данные векторы некомпланарны; прямые являются скрещивающимися. Если $\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$, то векторы компланарны, прямые расположены в одной плоскости. Смешанное произведение в данном случае выражается так:

$$\overline{M_1M_2}\cdot\bar{a}\cdot\bar{b}=\begin{vmatrix}1 & 8 & -8\\ 3 & -5 & 6\\ 7 & -2 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0;$$

прямые лежат в одной плоскости.

Поскольку векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, то прямые пересекаются (вторая и третья строки не пропорциональны; если эти строки пропорциональны, то прямые параллельны; если все строки пропорциональны, то прямые совпадают).

Чтобы найти точку пересечения прямых, приравняем выражения для координат предварительно обозначив параметры разными буквами: $8+3t=9+7s$, $-7-5t=1-2s$, $11+6t=3+4s$.

Умножая первое уравнение на 2 и вычитая из него почленно третье, имеем: $5=15+10s$, $10s=-10$, $s=-1$.

При $s=-1$ получаем $t=-2$. Подставляя значение $t=-2$ в уравнение первой прямой (или $s=-1$ в уравнение второй прямой), находим: $x=2$, $y=3$, $z=-1$.

Следовательно, $M_0(2,\ 3,\ -1)$ – точка пересечения данных прямых.

10. Выяснить, какую поверхность в пространстве определяет уравнение

$$4x^2+9y^2+36z^2+8x+36y-72z+40=0.$$

С помощью преобразования координат приведем это уравнение к каноническому виду:

$$4(x+1)^2+9(y+2)^2+36(z-1)^2=36,$$

$$4X^2+9Y^2+36Z^2=36,$$

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}+\frac{Z^2}{1}=1.$$

Следовательно, уравнение определяет эллипсоид с полуосями $a=3$, $b=2$, $c=1$. Центр эллипсоида находится в точке $C(-1,\ -2,\ 1)$.

Задачи

1. Запишите уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1,\ -2,\ 3)$, $M_2(5,\ -4,\ 6)$.

2. Найдите угол между двумя прямыми $x=1+3t$, $y=9-2t$, $z=8+4t$ и $x=-7+6t$, $y=2-4t$, $z=1+8t$.

3. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(5,\ -3,\ 2)$ и имеющей нормальный вектор $\bar{n}=(4,\ 7,\ -6)$.

4. Запишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1,\ 2,\ 3)$ и параллельной плоскости $3x-4y+5z-1=0$.

5. Найдите угол между плоскостями $11x-8y-7z+6=0$, $4x-10y+z-5=0$.

6. Найдите угол между прямой $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+4}{2}$ и плоскостью $2x-4y+2z-9=0$.

7. Исследуйте взаимное положение прямой $x=6-2t$, $y=3+5t$, $z=-1-4t$ и плоскости $2x-5y+4z+52=0$.

8. Найдите проекцию точки $M(1,\ -2,\ 4)$ на плоскость $5x-3y+6z+35=0$.

9. Исследуйте взаимное расположение прямых $x=7+5t$, $y=-5-7t$, $z=-2-3t$ и $x=t$, $y=t$, $z=-3+2t$.

10. Выясните, какую поверхность определяет уравнение

$$2x^2+3y^2-6z^2-8x-6y-12z-1=0.$$

Ответы

1. $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-3}{3}$. **2.** 0°. **3.** $4x+7y-6z+13=0$. **4.** $3x-4y+$ $+5z-10=0$. **5.** $\varphi=45^\circ$. **6.** $\varphi=30^\circ$. **7.** $M(4,\ 8,\ -5)$ – точка пересечения. **8.** $N(-4,\ 1,\ -2)$. **9.** $M(2,\ 2,\ 1)$ – точка пересечения. **10.** Однополостный гиперболоид $\frac{X^2}{3}+\frac{Y^2}{2}-\frac{Z^2}{1}=1$.

III

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Глава 6. ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

Функции и пределы – важнейшие математические понятия. Понятие функции прошло длинный путь развития, на каждом этапе которого определялось по-разному. На понятии предела основаны другие важные понятия современной математики.

6.1. Понятия функции, оператора, функционала

Основные определения

Рассмотрим два непустых множества X и Y. Если каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества X в множество Y и пишут $f : X \to Y$.

Функцией называют отображение числового множества X в числовое множество Y и обозначают $y = f(x)$, элементы $x \in X$ называют значениями аргумента, элементы $y \in Y$ – значениями функции; $f(a)$ – значение функции $y = f(x)$ при $x = a$.

Множество X называют *областью определения* функции $y = f(x)$ и обозначают $D(f)$, множество всех значений функции называют *областью ее значений* и обозначают $E(f)$.

Оператором называют отображение нечислового множества в нечисловое множество. Например, X – множество дифференцируемых функций, Y – множество их производных.

Функционалом называют отображение нечислового множества в числовое. Например, X – множество дуг линий, Y – множество их длин.

Употребляются и другие (кроме $f(x)$) обозначения функций: $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$, $y = \Phi(x)$, $y = y(x)$ и т.п. Функцию и аргумент можно обозначать и другими символами: $s = f(t)$, $u = \varphi(t)$, $r = r(t)$, $x = x(t)$ и т.д.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве X. Каждому элементу $x \in X$ по определенному правилу f ставится в соответствие единственный элемент $y \in Y$. В случае, когда каждому элементу $y \in Y$ ставится в соответствие только один элемент $x \in X$, для которого $f(x)=y$, получаем функцию $x=\varphi(y)$, заданную на множестве Y со значениями в множестве X. Функцию $x=\varphi(y)$ называют обратной по отношению к функции $y=f(x)$. Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Если $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ – функции своих аргументов, причем область определения функции $f(u)$ содержит область значений функции $\varphi(x)$, то каждому значению $x\in D(\varphi)$ соответствует единственное значение y такое, что $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$. Эта функция, определяемая соответствием $y=f(\varphi(x))$ называется *сложной функцией* или *функцией от функции*. Например, если $y=\cos u$, $u=2x$, то $y=\cos 2x$ – сложная функция; если $y=u^2$, $u=\sin x$, то $y=\sin^2 x$ – сложная функция.

Основными элементарными функциями называют функции $y=x^n$, $y=a^x$ $(x>0,\ a\neq 1)$, $y=\log_a x$, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции.

Элементарными функциями называют функции, полученные из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций. Например, $y=x+\sin x$, $y=\lg \mathrm{tg} x$ – элементарные функции.

6.2. Предел последовательности. Предел функции

Числовой последовательностью (или последовательностью) называют функцию $x_n=\varphi(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$, заданную на множестве натуральных чисел. Этой формулой определяется общий член последовательности. Значения функции $x_1=\varphi(1)$, $x_2=\varphi(2)$, ..., называют соответственно первым, вторым, ... членами последовательности, а сами значения аргумента – номерами членов последовательности. Последовательность, заданную указанной формулой, обозначают $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$, или (x_n).

Число a называют пределом последовательности (x_n), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$. Обозначение предела: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. Отметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} c=c$ $(c=\mathrm{const})$.

Последовательность (α_n) называют бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. Примеры бесконечно малых последовательностей:

$$\alpha_n=\frac{1}{n},\ \beta_n=\frac{c}{n}(c=\mathrm{const}),\ \gamma_n=\frac{c}{n^k}(c=\mathrm{const}),\ \delta_n=q^n\,(0<q<1);$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{c}{n^k}=0,\ \lim_{n\to\infty}q^n=0(0<q<1).$$

Число a называют пределом функции при x, стремящемся к b (или в точке b), если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-b|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to b}f(x)=a$.

Число a называют пределом функции $f(x)$ при x стремящимся к бесконечности, если для любого числа $\varepsilon>0$ существует число N такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>N$ выполняется неравенство $|f(x)-a|<\varepsilon$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$.

Рассматривают и односторонние пределы: предел слева $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x<x_0}}f(x)=f(x_0-0)$, предел справа $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\x>x_0}}f(x)=f(x_0+0)$. В случае $x_0=0$ вместо 0 – 0 пишут –0, вместо 0 + 0 пишут 0.

Функция $\alpha=\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to b$ или ($x\to\infty$), если $\lim\limits_{x\to b}\alpha(x)=0$ ($\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$). Например, функция $\alpha(x)=(x-5)^2$ бесконечно малая при $x\to5$; $\alpha(x)=\dfrac{1}{x}$ – бесконечно малая при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Свойства пределов функций

Если функции $u=u(x)$, $v=v(x)$ имеют пределы при $x\to b$, то имеют пределы их сумма, разность, произведение и частное, причем

$$\lim_{x\to b}(u(x)+v(x))=\lim_{x\to b}u(x)+\lim_{x\to b}v(x),$$

$$\lim_{x\to b}(u(x)-v(x))=\lim_{x\to b}u(x)-\lim_{x\to b}v(x),$$

$$\lim_{x\to b}(u(x)\cdot v(x))=\lim_{x\to b}u(x)\cdot\lim_{x\to b}v(x),$$

$$\lim_{x\to b}\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to b}u(x)}{\lim\limits_{x\to b}v(x)}\ \left(\lim_{x\to b}v(x)\neq0\right).$$

$$\lim_{x\to b}(cu(x))=c\lim_{x\to b}u(x).$$

Если $\lim\limits_{x\to b}y(x)=a$ и m – натуральное число, то

$$\lim_{x\to b}\left[y(x)^m\right]=\left[\lim_{x\to b}y(x)\right]^m,\ \lim_{x\to b}x^m=b^m.$$

Некоторые важные пределы

Первый замечательный предел $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

Второй замечательный предел

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x},\ e=\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\ e=2{,}718\ldots$$

Число e является основанием натуральных логарифмов: $\ln x=\log_e x$.

Другие пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$. 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$. 3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$.

Примеры

Найти пределы последовательностей

1. $x_n=\frac{12n-5}{4n+7}$. 2. $x_n=\frac{5n+6}{3n^2+2n-7}$. 3. $x_n=\frac{15n^2+4n-3}{3n^2-8n+7}$.

4. $y_n=\frac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}$. 5. $u_n=\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$. 6. $v_n=\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+1}$.

1. Разделив числитель и знаменатель дроби на n и использовав соответствующие свойства пределов последовательностей, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12n-5}{4n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{5}{n}}{4+\frac{7}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(12-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(4+\frac{7}{n}\right)}=\frac{12-0}{4+0}=3.$$

2. Разделив числитель и знаменатель дроби на n^2 и использовав соответствующие свойства пределов, найдем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+6}{3n^2+2n-7}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{0+0}{3+0+0}=0.$$

3. Разделив числитель и знаменатель дроби на n^2 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{15n^2+4n-3}{3n^2-8n+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{15+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}}{3-\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(15+\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{15+0-0}{3-0+0}=5.$$

4. Разделив числитель и знаменатель на n и перейдя к пределу, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{12n+5}{\sqrt[3]{27n^3+6n^2+8}}=\lim_{n\to\infty}\frac{12+\frac{5}{n}}{\sqrt[3]{27+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^3}}}=\frac{12}{\sqrt[3]{27}}=\frac{12}{3}=4\,.$$

5. Найдя сумму в числителе, разложив на множители знаменатель и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)}{2}n}{(n+1)(n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n-1)}=\frac{1}{2}\,.$$

6. Разделив числитель и знаменатель на n, и перейдя к пределу, найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-1}}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\sqrt{4}}{2}=1\,.$$

Найти предел функции при $x\to a$.

1. $\lim\limits_{x\to 3}\left(3x^2-9x+7\right)=3\cdot 3^2-9\cdot 3+7=7$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{9x^2-3x+6}{3x^2+2x-4}=\dfrac{9\cdot 2^2-3\cdot 2+6}{3\cdot 2^2+2\cdot 2-4}=\dfrac{36}{12}=3$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x^2-7x+6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-6)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{x-6}=\dfrac{1-5}{1-6}=\dfrac{4}{5}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{-\frac{b}{\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{-b}=e^{-b}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{b}{x}\right)^x=e^{-b}$. В частности, при $b=2$ получаем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x=e^{-2}$, при $b=-3$ имеем $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=e^{3}$ и т.д.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^x=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}(2x+1)^x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{\frac{1}{2}}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\frac{1}{2}}{x}\right)^x}=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}=e^{-1}$.

(Числитель и знаменатель разделен на $2x$, использован результат примера 4).

6. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+4x}=\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{4}{\alpha}}=\lim\limits_{\alpha\to 0}\left[(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^4=e^4$.

(Введена новая неизвестная $\alpha = 4x$, тогда $\frac{1}{x} = \frac{4}{\alpha}$; $\alpha \to 0$ при $x \to 0$, использовано определение числа e).

7. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{y} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x} = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.

8. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}3\frac{\ln(1+3y)}{3y} = 3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 3\cdot 1 = 3$.

9. $\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{2\frac{y}{2}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}3\frac{\sin 3x}{3x} = 3\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 3\cdot 1 = 3$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^2 x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x(1-\cos x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

12. Найти предел дробной рациональной функции

$$R(x) = \frac{b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n}{a_0+a_1x+\ldots+a_mx^m},\ b_n\neq 0,\ a_m\neq 0.$$

Вынося за скобки x^n в числителе и x^m в знаменателе, преобразуем функцию $R(x) = \dfrac{x^n\left(\dfrac{b_0}{x^n}+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\ldots+b_n\right)}{x^m\left(\dfrac{a_0}{x^m}+\dfrac{a_1}{x^{m-1}}+\ldots+a_m\right)} = x^{n-m}\cdot Q(x)$. Находим

предел $\lim\limits_{x\to\infty}R(x) = \begin{cases}\infty,\ n>m\\ \dfrac{b_n}{a_m},\ n=m\\ 0,\ n<m\end{cases}$

13. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+9}-x\right)$

При $x\to\infty$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Чтобы раскрыть эту неопределенность (найти предел), преобразуем функцию

$$\left(\sqrt{x^2+8x+9}-x\right) = \frac{\left(\sqrt{x^2+8x+9}-x\right)\left(\sqrt{x^2+8x+9}+x\right)}{\sqrt{x^2+8x+9}+x} =$$

$$= \frac{\left(x^2+8x+9\right)-x^2}{\sqrt{x^2+8x+9}+x} = \frac{8x+9}{\sqrt{x^2+8x+9}+x}.$$

Переходя к пределу, получаем $\frac{8}{1+1}=4$.

Задачи

Найдите пределы последовательностей

1. $x_n=\frac{10n-3}{2n+7}$. 2. $y_n=\frac{7n+5}{3n^2+4n-2}$. 3. $z_n=\frac{8n^2+4n-3}{4n^2-5n+9}$.
4. $u_n=\frac{12n-7}{\sqrt{16n^2+5n-3}}$.

Найдите пределы функций

5. $\lim\limits_{x\to3}\left(3x^2-9x+17\right)$. 6. $\lim\limits_{x\to2}\frac{9x^2-3x+18}{3x^2+2x-14}$. 7. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+5}$.
8. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3-3x+2}$. 9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$. 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-5}{2x^3+8x-9}$.
11. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{x+5}$. 12. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x-3}{4x-5}\right)^{x}$. 13. $\lim\limits_{t\to0}\frac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$. 14. $\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+7y)}{y}$.
15. $\lim\limits_{y\to0}\frac{e^{-2y}-1}{3y}$. 16. $\lim\limits_{x\to4}\frac{16-x^2}{\sqrt{5+x}-3}$. 17. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-1}{\sqrt{x+3}-2}$. 18. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 9x}{x}$.
19. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}ax}{\operatorname{tg}bx}$. 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+10x-9}-x\right)$. 21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+6x+3}\right)$

Ответы

1. 5. **2.** 0. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 17. **6.** 24. **7.** $\frac{3}{4}$. **8.** ∞. **9.** 2. **10.** 0. **11.** e^6. **12.** $e^{\frac{1}{2}}$.
13. $\frac{4}{3}$. **14.** 7. **15.** $-\frac{2}{3}$. **16.** –48. **17.** 12. **18.** 9. **19.** $\frac{a}{b}$. **20.** 5. **21.** –3.

6.3. Непрерывность функции. Точки разрыва функции

Функцию $y=f(x)$, определенную на интервале (a, b), называют *непрерывной в точке* $x_0\in(a,\ b)$, если

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}\left(f(x_0-\Delta x)-f(x)\right)=0.$$

Функция называется *непрерывной на промежутке*, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Основные элементарные функции непрерывны в их областях определения.

Сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна, если непрерывны функции $\varphi(x)$ и $f(u)$.

Точкой разрыва функции называют значение ее аргумента, при котором функция не является непрерывной или при котором функция не определена.

Если x_0 – точка разрыва $f(x)$ и существуют конечные пределы $\left(f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)\right)$, $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, то она называется *точкой разрыва первого рода*. Величину $f(x_0+0)-$ $-f(x_0-0)$ называют скачком функции $f(x)$ в точке x_0. Если x_0 – точка разрыва $f(x)$ и $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то x_0 называют точкой устранимого разрыва. Если хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$ не существует или является бесконечным, то x_0 называют *точкой разрыва второго рода*.

Примеры

1. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{x-2}{|x-2|}$.

При $x=2$ функция не определена. По определению модуля $|x-2|$ имеем $f(x)=\dfrac{x-2}{-(x-2)}=-1$, когда $(x-2)<0$ или $x<2$; $f(x)=$ $=\dfrac{x-2}{x-2}=1$, если $x>2$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=1$, то $x=2$ – точка разрыва первого рода (рис. 6.1).

2. Найти точки разрыва функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

При $x=0$ функция не определена, но определена при всех $x\neq 0$. Односторонние пределы в точке x_0 равны:

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

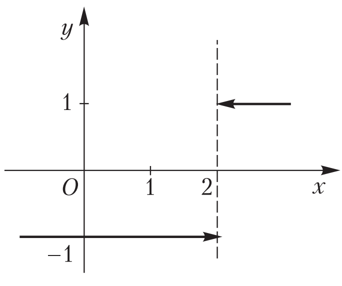

Рис. 6.1

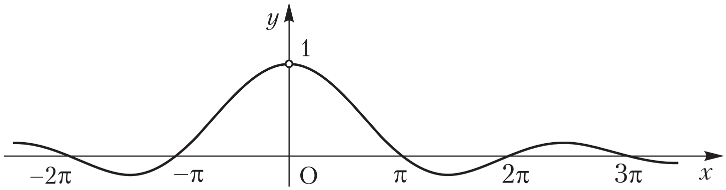

Рис. 6.2

Следовательно, $x_0 = 0$ – точка устранимого разрыва (рис. 6.2).

3. Найти точки разрыва функции $f(x) = \dfrac{6}{(x-2)^2}$.

Функция определена при всех x, кроме $x_0 = 2$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = +\infty$, то $x = 2$ – точка разрыва второго рода (рис. 6.3).

4. Найти точки разрыва функции $y = \mathrm{E}(x)$.

Эта функция определена следующим образом: если $x = n + q$, где n – целое число, а $0 \le q < 1$, то $\mathrm{E}(x) = n$, т.е. функция равна целой части аргумента (рис. 6.4). Приращение функции $\Delta y = \mathrm{E}(x + \Delta x) - \mathrm{E}(x) = \begin{cases} -1, & \Delta x < 0; \\ 0, & \Delta x > 0. \end{cases}$

Когда $\Delta x \to 0$, то Δy не стремится к нулю, т.е. функция терпит разрыв при каждом целочисленном значении аргумента. Каждое из этих значений является точкой разрыва первого рода, так как существуют конечные односторонние пределы.

Задачи

Найдите точки разрыва функций и скачки функций в этих точках

1. $f(x) = x + \dfrac{x-1}{|x-1|}$. **2.** $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2-x}$. **3.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

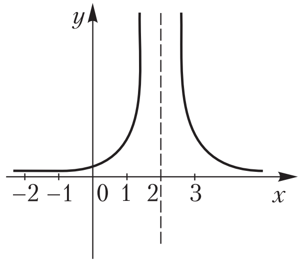

Рис. 6.3

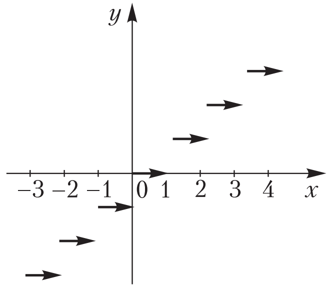

Рис. 6.4

4. $f(x)=\begin{cases}x, \ x\le 2;\\ x+1, \ x>2.\end{cases}$ **5.** $f(x)=\begin{cases}-2x+3, \ x<1;\\ 3x+2, \ x\ge 1.\end{cases}$ **6.** $f(x)=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

7. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{(1-x)}}}$.

Установить, как нужно доопределить функцию $f(x)$ в точке x, чтобы она была непрерывной

8. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, $x=1$. **9.** $f(x)=\dfrac{1-x^4}{1-x^5}$, $x=1$. **10.** $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $x=0$. **11.** $f(x)=\dfrac{a^x-1}{x}$, $(a>0)$, $x=0$. **12.** $f(x)=\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$, $x=0$.
13. $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $x=0$. **14.** $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

Ответы

1. $x=1$, скачок $\Delta=2$. **2.** $x=2$, $\Delta=\pi$. **3.** $x=0$, $\Delta=2\sqrt{2}$. **4.** $x=2$, $\Delta=1$. **5.** $x=1$, $\Delta=4$. **6.** $x=0$, $\Delta=1$. **7.** $x=1$, $\Delta=1$. **8.** 1,5. **9.** 0,8. **10.** 1. **11.** $\ln a$. **12.** α. **13.** 0,25. **14.** –2.

6.4. Натуральные логарифмы. Экспоненциальная функция. Гиперболическая функция

Натуральными логарифмами называют логарифмы с основанием $e\approx 2{,}71828$ и обозначают $\ln x=\log_e x$.

Функция $y=\ln x$ определена при положительных x. На рис. 6.5 изображен ее график.

Рассматривают функцию $y=\ln|x|$, определенную для всех действительных x, кроме $x=0$, ее график изображен на рис. 6.6.

Экспоненциальной функцией называют функцию $y=e^x$; употребляется обозначение $e^x=\exp x$.

Гиперболическими функциями называют функции, определяемые формулами:

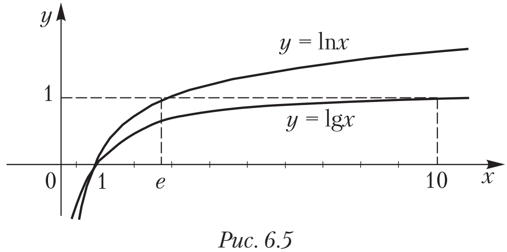

Рис. 6.5

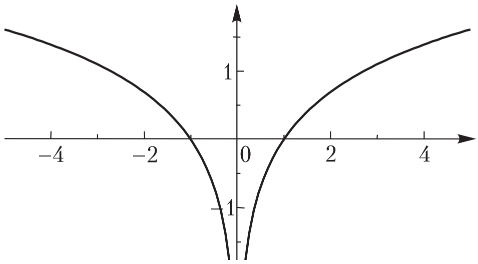

Рис. 6.6

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (гиперболический синус)},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (гиперболический косинус)},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ (гиперболический тангенс)},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \text{ (гиперболический котангенс)}.$$

Графики гиперболических функций изображены на рис. 6.7.

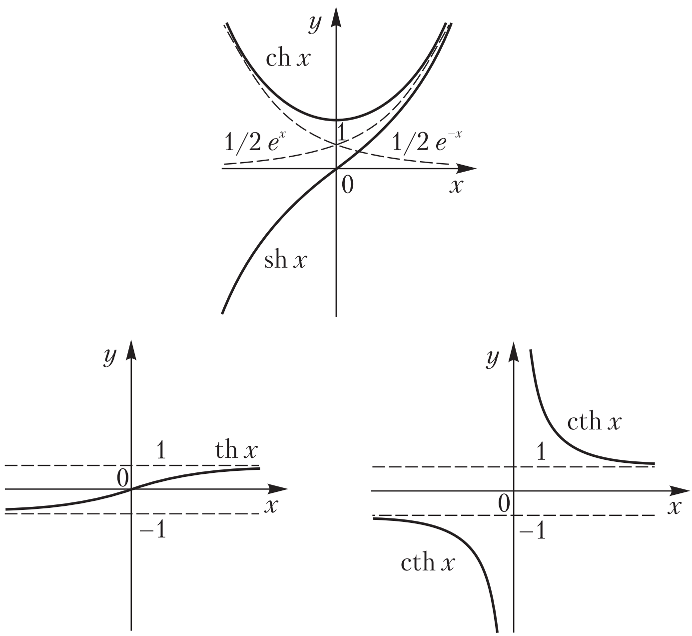

Рис. 6.7

IV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 7. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

7.1. Дифференцирование функций

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функция, имеющая производную, называется *дифференцируемой*. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной. Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику данной функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$: $f'(x_0) = \text{tg}\alpha$, где α – угол наклона касательной к оси Ox.

Физический смысл производной. Для функции $S = f(t)$, меняющейся со временем t, производная S_t' при $t = t_0$ есть скорость $v = v(t)$ изменения функции в момент времени t_0: $f'(t_0) = v(t_0)$.

Отметим, что скорость изменения физических, химических и других процессов выражается с помощью производной.

Основные правила дифференцирования

Если u, v, w – дифференцируемые функции, c – постоянная, то $c' = 0$ $(c = \text{const})$, $(u - v + w)' = u' - v' + w'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $(cu)' = cu'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции, то *производная сложной функции* $y = f(\varphi(x))$ равна производной по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по переменной x:

$$y_x' = y_u' \cdot u_x'.$$

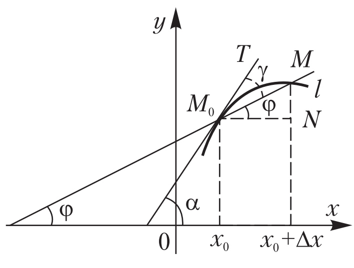

Рис. 7.1

Основные формулы для производных

Если u – дифференцируемая сложная функция, то

1. $\left(u^{\alpha}\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ $(\alpha \neq 0)$. **2.** $\left(a^{u}\right)' = a^{u}\cdot u'\cdot \ln a$. **3.** $\left(e^{u}\right)' = e^{u}\cdot u'$.

4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$. **5.** $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$. **6.** $(\sin u)' = \cos u\cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$. **8.** $(\mathrm{tg}u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$. **9.** $(\mathrm{ctg}u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $(\arcsin u)' = -(\arccos u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$. **11.** $(\mathrm{arctg}u)' = -(\mathrm{arcctg}u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

12. $(\mathrm{sh}u)' = \mathrm{ch}u\cdot u'$. **13.** $(\mathrm{ch}u)' = \mathrm{sh}u\cdot u'$. **14.** $(\mathrm{th}u)' = \dfrac{u'}{\mathrm{ch}^2 u}$.

15. $(\mathrm{cth}u)' = -\dfrac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}$.

Примеры

I. 1. Найти производную функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2$ и ее значения при $x=-1,\ x=0,\ x=1$.

С помощью формулы 1 при $u = x$ находим:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - \left(3x^2\right)' - 2' = 3x^2 - 6x - 0 = 3x^2 - 6x.$$

$$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 6\cdot(-1) = 9,\ f'(0) = 0,\ f'(1) = -3.$$

II. Найти производные сложных функций

2. $f(x) = \sin 7x$, $f'(x) = \cos 7x\cdot(7x)' = 7\cos 7x$.

3. $f(x) = (2-3x)^5$, $f'(x) = 5(2-3x)^4\cdot(2-3x)' = 5(2-3x)^4\cdot(-3) = -15(2-3x)^4$.

4. $f(x) = 3\mathrm{th}x - \mathrm{th}^3 x$, $f'(x) = 3\cdot\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x} - 3\mathrm{th}^2 x\cdot(\mathrm{th}x)' = \dfrac{3\left(1-\mathrm{th}^2 x\right)}{\mathrm{ch}^2 x} =$

$= \dfrac{3\left(1-\dfrac{\mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{ch}^2 x}\right)}{\mathrm{ch}^2 x} = \dfrac{3\left(\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x\right)}{\mathrm{ch}^4 x} = \dfrac{3\cdot 1}{\mathrm{ch}^4 x} = \dfrac{3}{\mathrm{ch}^4 x}$. (Здесь использована формула $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$).

5. $f(x) = e^{\cos 2x}$, $f'(x) = e^{\cos 2x}(\cos 2x)' = e^{\cos 2x}(-\sin 2x)(2x)' = -2e^{\cos 2x}\sin 2x.$

6. $f(x) = \ln\sqrt{x^2+4x+5}$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\cdot\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)' =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4x+5}}\left(x^2+4x+5\right)' = \dfrac{2x+4}{2\left(x^2+4x+5\right)} = \dfrac{x+2}{x^2+4x+5}.$

З а м е ч а н и е. Данную функцию можно записать в виде

$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+4x+5\right)$ и найти $f'(x)=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}=\frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+5}=$
$=\frac{x+2}{x^2+4x+5}$.

7. $f(x)=\arcsin\frac{x-1}{2}$, $f'(x)=\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2-2x+1}{4}}}=$
$=\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.

Производные высших порядков. Производные функций, заданных параметрически.

Производной второго порядка, или второй производной, функции $y=f(x)$ называют производную от ее производной. Обозначения второй производной: $y''=(y')'$, $f''(x)=(f'(x))'$.

Аналогично определяются и обозначаются производные третьего, четвертого и более высокого порядка: $y'''=(y'')'$, $y^{IV}=(y''')'$ и т.д.

Если функция $y=y(x)$ задана параметрически $x=x(t)$, $y=y(t)$, то $y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}$ $(x'_t\neq 0)$, $y''_{xx}=\frac{x'_t\cdot y''_{tt}-y'_t\cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$.

8. $f(x)=\sin^2 x$, $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$, $f''(x)=\cos 2x(2x)'=$
$=2\cos 2x$.

9. Функция $y=y(x)$ задана параметрически: $x=4t$, $y=t^2$. Найти y'_x.

Так как $x'_t=4$, $y'_t=2t$, то $y'_x=\frac{2t}{4}=\frac{t}{2}$.

10. Найти вторую производную функции $y=y(x)$, заданной параметрически: $x=t^2$, $y=t^3$.

Поскольку $x'_t=2t$, $y'_t=3t^2$, $x''_{tt}=2$, $y''_{tt}=6t$, то

$$y''_{xx}=\frac{2t\cdot 6t-3t^2\cdot 2}{(2t)^3}=\frac{12t^2-6t^2}{8t^3}=\frac{6t^2}{8t^3}=\frac{3}{4t}.$$

Производные неявных функций. Производная функции u^v.

Если дифференцируемая функция $y=y(x)$ задана уравнением $F(x,\,y)=0$, то $y'(x)$ определяется из уравнения $F'_x=0$, где $F=F(x,\,y)$ – сложная функция переменной x.

Производная степенной показательной функции u^v, где u, v – дифференцируемые функции от x, находится с помощью предварительного логарифмирования.

11. Найти производную y'_x функции, заданной уравнением $x^2+xy+y^2-3=0$.

Дифференцируя по x, получаем $2x+x'y+xy'+2y\cdot y'=0$, $2x+y+xy'+2yy'=0$, $(2x+y)+y'(x+2y)=0$, $y'=-\dfrac{2x+y}{x+2y}$.

12. Найти производную функции $y=x^x$.

Логарифмируя по основанию e, получаем, $\ln y=x\ln x$, откуда $\dfrac{y'}{y}=1\cdot\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}$, $y'=x^x(\ln x+1)$.

Задачи

Найдите производные функций

1. $y=\dfrac{1}{4}x^4-x^3+\dfrac{3}{2}x^2-x$. **2.** $y=\sin^2 2x$. **3.** $y=\dfrac{1}{\left(3+2x^2\right)^3}$.

4. $y=\operatorname{sh}^4 x-\operatorname{ch}^4 x$. **5.** $y=\ln\left(x+8+\sqrt{x^2+16x+5}\right)$. **6.** $y=e^{\cos 3x}$.

7. $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$. **8.** $y=a^{\sin 5x}$. **9.** $y=\arcsin\dfrac{x-2}{4}$. **10.** $y=\arccos\dfrac{x-2}{2}$.

11. $y=\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{8}$. **12.** $y=\dfrac{1}{4}\operatorname{arcctg}\dfrac{x-5}{4}$. **13.** $y=\ln\sqrt{x^2+2x+5}+\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}$.

Найдите производные неявных функций.

14. $x^2+3xy+y^2+11=0$. **15.** $x^2+5xy+y^2-7=0$.

16. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$. **17.** $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. **18.** $x^3+3x^2y+3xy+y^3-8=0$.

Найдите вторые производные функций, заданных параметрически.

19. $x=2t^3$, $y=t^2$. **20.** $x=a\cos t$, $y=a\sin t$. **21.** $x=a\ln t$, $y=\dfrac{a}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$.

22. $x=t\cos t$, $y=t\sin t$.

Найдите производные функций u^v, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции.

23. $y=(\sin x)^{\cos x}$. **24.** $y=x^{\cos x}$. 25. $y=u^v$.

Ответы

1. $(x-1)^3$. **2.** $2\sin 4x$. **3.** $\dfrac{-12x}{\left(3+2x^2\right)^4}$. **4.** $-2\operatorname{sh}2x$. **5.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+16x+5}}$.

6. $-3\sin 3xe^{\cos 3x}$. **7.** $\dfrac{2}{\left(1-x^2\right)}$. **8.** $5a^{\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot\ln a$. **9.** $\dfrac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}$.

10. $\dfrac{-1}{\sqrt{4x-x^2}}$. **11.** $\dfrac{1}{\left(x^2+64\right)}$. **12.** $-\dfrac{1}{\left(x^2-10x+41\right)}$. **13.** $\dfrac{(x+3)}{\left(x^2+2x+5\right)}$.

14. $-\frac{(2x+3y)}{(3x+2y)}$. **15.** $-\frac{(2x+5y)}{(5x+2y)}$. **16.** $-\sqrt{\frac{x}{y}}$. **17.** $-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. **18.** $-\frac{\left(x^2+2xy+y\right)}{\left(x^2+x+y^2\right)}$.

19. $-\frac{1}{18t^4}$. **20.** $-\frac{1}{a\sin^3 t}$. **21.** $\frac{\left(t^2+1\right)}{at}$. **22.** $\frac{2+t^2}{(\cos t-t\sin t)^3}$.

23. $(\sin x)^{\cos x}(-\sin x\cdot\ln\sin x+\cos x\operatorname{ctg}x)$.

24. $x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$. 25. $u^v\left(v'\ln u+\frac{vu'}{u}\right)$.

6.2. Дифференциал функции

Дифференциалом функции $y=f(x)$ называют произведение ее производной на приращение независимой переменной: $dy=f'(x)\Delta x$ или $dy=f'(x)dx$, так как $\Delta x=dx$. Из второй формулы следует, что $f'(x)=\frac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции равен приращению ординаты касательной к графику функции в соответствующей точке, когда аргумент получает приращение Δx (рис. 7.2).

При достаточно малых Δx справедлива формула:

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x,\ f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x \text{ (рис. 7.2).}$$

Примеры

1. Найти дифференциал функции $y=e^{2x}$.

В соответствии с определением получаем

$$dy=\left(e^{2x}\right)'dx=2e^{2x}dx.$$

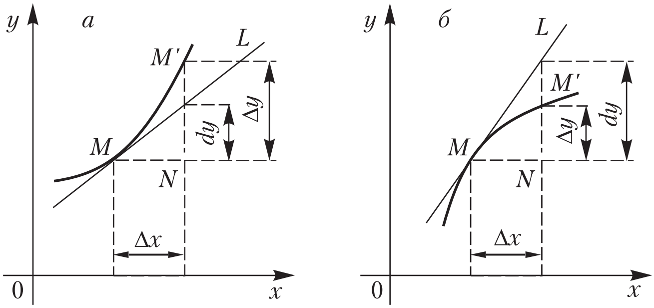

Рис. 7.2

2. Вычислить значение дифференциала функции $y = x^4 - 4x^2 + 3$, когда x изменяется от 2 до 2,1.

Найдем сначала выражение для дифференциала данной функции: $dy = \left(x^4 - 4x^2 + 3\right)' dx = \left(4x^3 - 8x\right)dx = 4x\left(x^2 - 2\right)dx$.

Вычислим значение дифференциала при указанном значении $x = 2$ и $dx = \Delta x = 2{,}1 - 2 = 0{,}1$: $dy = 4 \cdot 2 \cdot \left(2^2 - 2\right) \cdot 0{,}1 = 1{,}6$.

3. Вычислить значение функции $f(x) = \sqrt[3]{1 + 7x^2}$ при $x = 1{,}1$.

Значения функции и ее производной $f'(x) = \dfrac{14x}{3\sqrt[3]{\left(1 + 7x^2\right)^2}}$ при $x = 1$ находятся легко. Используем формулу для приближенного вычисления функции, которая в данном случае принимает вид: $\sqrt[3]{1 + 7(1{,}1)^2} \approx \sqrt[3]{1 + 7 \cdot 1^2} + \dfrac{1}{3} \dfrac{14 \cdot 1}{\sqrt[3]{\left(1 + 7 \cdot 1^2\right)^2}} \cdot 0{,}1$ $\quad (x = 1,\ \Delta x = 0{,}1)$, т.е. $\sqrt[3]{1 + 7 \cdot (1{,}1)^2} \approx \sqrt[3]{8} + \dfrac{1{,}4}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2 + \dfrac{1{,}4}{12} \approx 2{,}117$.

Задачи

Найдите дифференциалы функций

1. $y = x^2 + 5x - 7$. **2.** $y = \dfrac{x + 2}{x + 3}$. **3.** $y = \ln\left|\dfrac{x - 5}{x + 5}\right|$. **4.** $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right)$. **5.** $y = \cos 5x$. **6.** $y = \mathrm{tg} 2x$. **7.** $y = \arcsin \dfrac{x - 2}{3}$. **8.** $y = \mathrm{arcctg} 4x$.

Вычислите значения дифференциалов функций при указанных значениях x и Δx.

9. $y = x^3 + 3x^2 - 5x + 4$, $x = 1, \Delta x = 0{,}1$. **10.** $y = x^4 + 4x^2 + 5x - 7$, $x = -1$, $\Delta x = 0{,}01$. **11.** $y = \sqrt{x^2 + 4x - 3}$, $x = 2, \Delta x = -0{,}1$.

Вычислите приближенно значение функций при указанных значениях аргумента

12. $\sqrt{x^3 + x^2 + 4}$, $x = 2{,}1$. **13.** $y = \sqrt{(3 - x)(3 + x)}$, $x = 0{,}18$. **14.** $y = e^{x^2 - 9}$, $x = 3{,}15$.

Ответы

1. $(2x + 5)dx$. **2.** $\dfrac{dx}{(x + 3)^2}$. **3.** $\dfrac{10dx}{\left(x^2 - 25\right)}$. **4.** $\dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$. **5.** $-5\sin 5x dx$. **6.** $\dfrac{2dx}{\cos^2 2x}$. **7.** $\dfrac{dx}{\sqrt{5 + 4x - x^2}}$. **8.** $\dfrac{-4dx}{\left(1 + 16x^2\right)}$. **9.** 0,4. **10.** –0,02. **11.** $-\dfrac{2}{15}$. **12.** 4,2. **13.** 0,96. **14.** 1,9.

6.3. Приложения производной

Понятие производной имеет многочисленные применения: при нахождении пределов функций, при приближенном решении уравнений, при исследовании функций и построении их графиков, при отыскании экстремальных значений величин и др.

Правило Бернулли-Лопиталя[1]

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки $x=a$, обращаются в нуль в этой точке и существует предел отношения $f'(x):\varphi'(x)$ при $x\to a$, то существует предел отношения самих функций, равный пределу отношения производных:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило верно и в случае $a=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi(x)=0$.

Правило применяется и при раскрытии неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема в интервале (a, b), то существует такая точка $c\in(a, b)$, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \quad (a<c<b).$$

Теорема Ролля. Между двумя различными корнями дифференцируемой функции находится по меньшей мере один корень ее производной. Это следует из теоремы Лагранжа ($f(b)=f(a)=0,\ b\neq a$).

Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы в интервале (a, b), причем $\varphi'(x)\neq 0$ для любого $x\in(a, b)$, то существует точка $c\in(a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a<c<b).$$

Уравнение касательной к линии $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$ (это получено на основании уравнения прямой $(y-y_0)=k(x-x_0)$).

Нормалью к линии в данной точке называют перпендикулярную прямую к касательной в этой точке.

---

[1] Правило сформулировано в 1692 г. швейцарским математиком Н. Бернулли (1667—1748). Опубликовано в 1696 г. в первом учебнике по анализу бесконечно малых французским математиком Г. Лопиталем (1661—1704).

Уравнение нормали: $y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$. (Здесь использовано условие $k_1=-\frac{1}{k_2}$ перпендикулярности двух прямых).

Формула Тейлора для функции $y=f(x)$ имеет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x),$$

где $R_n(x)$ – остаточный член. В частности, остаточный член в форме Лагранжа определяется формулой

$$R_n(x)=\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)\text{, где } \xi=a+\theta(x-a),\ 0<\theta<1.$$

Исследование функций и построение их графиков можно проводить по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучить изменение функции при стремлении аргумента к концам промежутков области определения.
3. Найти точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычислить значения экстремумов, построить соответствующие точки.
5. Определить промежутки выпуклости и вогнутости графика функции, найти точки перегиба.
6. Найти точки пересечения графика с координатными осями.
7. Найти асимптоты графика функции.

Порядок исследования иногда целесообразно выбирать, исходя из конкретных особенностей данной функции (четная, нечетная функция).

Примеры

1. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^2-4x+5$ в точке $M_0(3,\ 2)$.

Эта точка лежит на линии, так как ее координаты удовлетворяют данному уравнению. Находим производную функции и ее значение при $x_0=3$:

$$f'(x)=2x-4,\ f'(3)=2\cdot3-4=2.$$

В соответствии с формулами, определяющими касательную и нормаль, получаем:

$y-2=2(x-3)$, $2x-y-4=0$ (уравнение касательной);

$y-2=-\frac{1}{2}(x-3)$, $x+2y-7=0$ (уравнение нормали).

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\cos x-1}{x^2+5x}$.

При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби стремятся к нулю; имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$. Чтобы раскрыть эту неопределенность (т.е. найти предел), применяем правило Бернулли-Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1}{x^2+5x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x}{2x+5}=\frac{1}{5}.$$

3. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}$

Это также неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Для ее раскрытия правило Бернулли-Лопиталя необходимо применить дважды:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x-2x}{3x^2-x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x-2}{6x-3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4e^x\cos 2x-3e^x\sin 2x}{6-6x}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

Это неопределенность вида 0^0. Полагая $x^x=y$ и логарифмируя равенство по основанию e, получаем $x\ln x=\ln y$. Найдем $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$. В правой части последнего равенства нужно раскрыть неопределенность вида $0\cdot\infty$. Преобразуем полученную функцию $x\ln x$ так: $x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, получаем неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, раскрываем ее: $\lim\limits_{x\to 0}\ln y=\lim\limits_{x\to 0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0.$

Следовательно, $\ln\left(\lim\limits_{x\to 0}y\right)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}y=1$, $\lim\limits_{x\to 0}x^x=1$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

При $x\to 0$ получаем неопределенность вида $\infty-\infty$. Раскроем эту неопределенность, приводя ее к неопределенности $\dfrac{0}{0}$ и применяя правило Бернулли-Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{-\sin x\cdot x+\cos x+\cos x}=0.$$

6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

При $x \to 0$ имеем неопределенность вида ∞^0. Преобразуя данную функцию и применяя правило Бернулли-Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^o = 1.$$

7. Записать формулу Тейлора для функции $f(x) = e^x$.

Поскольку $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, ..., $f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n+1)}(x) = e^x$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 1$, ..., $f^{(n)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$, то искомая формула Тейлора принимает вид

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

Отметим, что при любом x $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} = 0$.

8. Найти наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a.

Обозначим искомые числа через x и y. По условию, $a > 0$, поэтому $y = \frac{a}{x}$. Сумма этих чисел $S = x + y$, $S(x) = x + \frac{a}{x}$. Находим производные этой функции: $S'(x) = 1 - \frac{a}{x^2}$, $S''(x) = \frac{2a}{x^3}$. Из уравнения $1 - \frac{a}{x^2} = 0$ находим стационарные точки $x_1 = -\sqrt{a}$, $x_2 = \sqrt{a}$; первое значение не принадлежит области изменения аргумента функции. Так как $S''(\sqrt{a}) > 0$, то $x = \sqrt{a}$ – точка минимума, причем $\min S(x) = S(\sqrt{a}) = 2\sqrt{a}$.

9. Исследовать функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ и построить ее график.

1. Областью определения данной функции является бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$.

2. Функция неограниченно убывает в интервале $(-\infty, -2)$ и неограниченно возрастает в интервале $(0, +\infty)$:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Производная функции $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$ равна нулю при $x = 0$ и $x = -2$. Так как $f'(x) > 0$ при $x < -2$, то функция возрастает в промежутке $(-\infty, -2)$. Поскольку $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 0$, то функция убывает в интервале $(-2, 0)$. Отсюда уже можно заключить, что $x_1 = -2$ точка максимума, $x_2 = 0$ – точка минимума. (Этот результат можно получить и с помощью второй производной $f''(x) = 6x + 6$: $f''(-2) = -12 + 6 < 0$ и $f''(0) = 6 > 0$.

4. Вычисляем экстремальные значения функции

$$\max f(x) = f(-2) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 - 2 = 2, \ \min f(x) = f(0) = -2.$$

Получены две точки графика $M_1(-2, 2)$, $M_2(0, -2)$.

5. Вторая производная $f''(x) = 6x + 6$ равна нулю при $x = -1$. Так как $f''(x) < 0$ при $x < -1$, то график функции является выпуклым вверх в промежутке $(-\infty, -1)$. Поскольку $f''(x) > 0$ при $x > -1$, то график функции является выпуклым вниз в промежутке $(-1, +\infty)$; $N(-1, 0)$ – точка перегиба графика функции.

6. Решая уравнение $f(x) = 0$, т.е. $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$, находим корни функции $x_1 = -1 - \sqrt{3}$, $x_2 = -1 + \sqrt{3}$, поэтому $K_1\left(-1 - \sqrt{3}, 0\right)$, $K_2\left(-1 + \sqrt{3}, 0\right)$ – точки пересечения графика функции с осью *Ox*. Так как при $x = 2$ $f(x) = x^3 + 3x - 2$ равна нулю, то $z(0, -2)$ – точка пересечения с осью *Oy*, она совпадает с точкой M_2.

7. Поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2}{x} = \infty$, т.е. не существует конечных пределов $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = b$, то график функции не имеет асимптот.

По результатам исследований строим график (рис. 7.3).

10. Построить график функции $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right|$.

1. Функция определена при всех *x*, кроме $x = -2$, $x = 2$; областью ее определения является множество трех интервалов: $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$.

2. Исследуем изменение функции при *x*, стремящемся к концам промежутков области определения:

$$\lim_{x\to-\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0, \ \lim_{x\to-2-0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\infty, \ \lim_{x\to-2+0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = -\infty,$$

$$\lim_{x\to2-0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = +\infty, \ \lim_{x\to2+0} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = +\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left|\frac{x+2}{x-2}\right| = 0.$$

3. Поскольку $f'(x) = \dfrac{-4}{x^2 - 4} < 0$ при $x < -2$ и $x > 2$, то функция убывает в промежутках $(-\infty, -2)$ и $(2, +\infty)$; так как $f'(x) > 0$ при $-2 < x < 2$, то функция возрастает в интервале $(-2, 2)$.

4. Функция экстремумов не имеет, потому что нет критических точек: про-

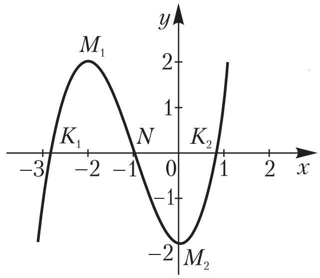

Рис. 7.3

изводная отлична от нуля при всех x, она обращается в бесконечность в точках $x = \pm 2$, где функция не определена.

5. Вторая производная $f''(x) = 8x\left(x^2 - 4\right)^{-2}$ равна нулю при $x = 0$ и меняет знак при переходе через эту точку. $f''(x) < 0$ при $-2 < x < 0$; $f''(x) > 0$ при $0 < x < 2$. Следовательно, $x = 0$ – абсцисса точки перегиба. Эта точка совпадает с началом координат, так как ее ордината $y = f(0) = \ln\left|\dfrac{0+2}{0-2}\right| = 0$.

Поскольку $f''(x) < 0$ при $x < -2$, то график функции вогнут вниз в промежутке $(-\infty, -2)$; так как $f''(x) < 0$ при $x > 2$, то график функции вогнут вверх в промежутке $(2, +\infty)$.

6. График функции пересекает координатные оси в начале координат.

7. Поскольку $\lim\limits_{x \to -2} \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 2} \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = +\infty$, то прямые $x = -2$, $x = 2$ являются вертикальными асимптотами графика. Ось Ox является горизонтальной асимптотой графика функции (рис. 7.4), так как $\lim\limits_{x \to \infty} \ln\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| = 0$.

Задачи

1. Запишите уравнения касательной и нормали к линии $f(x) = x^2 + 4x - 26$ в точке $(4, 6)$.

2. В какой точке касательная к линии $f(x) = x^3 - 11x - 15$ перпендикулярна прямой $2y + 2x - 7 = 0$?

Найдите предел функции в данной точке

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x - \sin 2x}{x^3}$. **4.** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. **5.** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

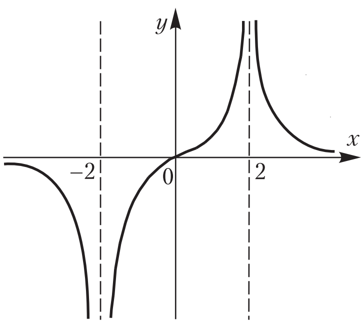

Рис. 7.4

6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. **7.** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\cos\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

8. $\lim\limits_{x \to 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. **9.** $\lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$.

10. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 14x}{\sin 2x}$. **11.** $\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg}\dfrac{x}{4}$.

Запишите формулу Тейлора для функций

12. $f(x) = \sin x$. **13.** $f(x) = \cos x$.

14. $f(x) = (x + a)^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n \in N$.

Исследуйте функции и постройте их графики

15. $f(x)=2x^3+x^2-2x-x^4$. **16.** $f(x)=\ln\left|\dfrac{x-4}{x+4}\right|$.

17. $f(x)=x^4-4x^3+3$. **18.** Найдите наименьшее значение суммы двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно b.

Ответы

1. $12x-y-42=0$ (касательная), $x+12y-76=0$ (нормаль).

2. $M(-2,\ -1)$, $N(2,\ -29)$. **3.** $\dfrac{4}{3}$. **4.** $\dfrac{1}{3}$. **5.** $\dfrac{1}{3}$. **6.** 2. **7.** $e^{-\frac{1}{8}}$. **8.** 1. **9.** $\dfrac{1}{2}$. **10.** 7. **11.** 4.

12. $\sin x=x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\sin\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x+\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

13. $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\cos\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x+\dfrac{(n+1)\pi}{2}\right)$.

14. $(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\dfrac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2+\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+$ $+\ldots+\dfrac{n(n-1)\ldots2}{(n-1)!}ax^{n-1}+x^n$. Это равенство называют формулой бинома Ньютона. **15.** График пересекает ось Ox в точках с абсциссами $x=-2$, $x=-1$, $x=0$, $x=1$. $\max f(x)=f\left(\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)=1$, $\min f(x)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{9}{16}$.

16. Область определения: $(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ 4)$, $(4,\ +\infty)$; экстремумов нет, асимптоты: $x=-4$, $x=4$, $y=0$. **17.** $\max f(x)=f(0)=3$, $\min f(x)=$ $=f\left(-\sqrt{2}\right)=f\left(\sqrt{2}\right)=1$.

V

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функцию $F(x)$, определенную в промежутке (a, b), называют *первообразной функции* $f(x)$ в этом промежутке, если для любого $x \in (a, b)$, выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Множество всех первообразных функции $f(x)$ определяется формулой $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называют множество всех ее первообразных и обозначают $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F'(x) = f(x)$.

Операцию нахождения первообразной данной функции называют *интегрированием*.

Неопределенный интеграл имеет следующие свойства:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);\ d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольное слагаемое:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx \quad (c = \text{const}).$$

4. Неопределенный интеграл от суммы двух функций равен сумме неопределенных интегралов от слагаемых:

$$\int (f(x) + \varphi(x))dx = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx.$$

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int 1 \cdot du = \int du = u + C$. **2.** $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$.

3. $\int \frac{1}{u}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$. **4.** $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C\,(a > 0)$. **5.** $\int e^u du = e^u + C$.

6. $\int \cos u du = \sin u + C$. **7.** $\int \sin u du = -\cos u + C$.

8. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$. **9.** $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = \int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.

10. $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C_1$.

11. $\int \frac{du}{1+u^2} = \mathrm{arctg} u + C_1 = -\mathrm{arcctg} u + C_2$. **12.** $\int \frac{du}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$.

13. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$. **14.** $\int \frac{udu}{u^2+\alpha} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\alpha\right| + C$.

15. $\int \mathrm{sh} u du = \mathrm{ch} u + C$. **16.** $\int \mathrm{ch} u du = \mathrm{sh} u + C$. **17.** $\int \frac{du}{\mathrm{ch}^2 u} = \mathrm{th} u + C$.

18. $\int \frac{du}{\mathrm{sh}^2 u} = -\mathrm{cth} u + C$.

В этой таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывную дифференцируемую функцию $u = u(x)$.

8.1. Основные методы интегрирования

Метод непосредственного интегрирования основан на свойстве 4 неопределенного интеграла. Если $f(x) = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$, то $\int (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))dx = \int f_1(x)dx - \int f_2(x)dx + \int f_3(x)dx$.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл

$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2} dx$.

Разделив числитель дроби на знаменатель, использовав свойства 3 и 4 неопределенного интеграла, формулы 1 и 2 основной таблицы, найдем:

$$\int \frac{3x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8}{x^2} dx = \int \left(3x^2 - 2x + 5 - \frac{7}{x} + \frac{8}{x^2}\right) dx =$$

$$= 3\int x^2 dx - 2\int x dx + 5\int dx - 7\int \frac{dx}{x} + 8\int \frac{dx}{x^2} =$$

$$= 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x - 7\ln|x| + 8\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = x^3 - x^2 + 5x - 7\ln|x| - \frac{8}{x} + C.$$

Замечание. После каждого интеграла не пишут произвольную постоянную $C_1, C_2, \ldots, C_5$, так как сумма произвольных постоянных есть произвольная постоянная $(C = C_1 + C_2 + \ldots + C_5)$.

Пример 2. Найти $\int\left(1-\sqrt{x}\right)^3 dx$.

Раскрыв скобки и применив соответствующую формулу, получим

$$\int\left(1-\sqrt{x}\right)^3 dx=\int\left(1-3\sqrt{x}+3x-\sqrt{x^3}\right)dx=$$

$$=\int dx-3\int\sqrt{x}dx+3\int xdx-\int\sqrt{x^3}dx=$$

$$=x-3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+3\frac{x^2}{2}-\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}+C=x-2x\sqrt{x}+\frac{3}{2}x^2-\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C\ .$$

Пример 3. Найти $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$

Поскольку $\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}$, то $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=$ $=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos xdx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C$.

Метод подстановки

Этот метод (или *метод интегрирования введением новой переменной*) основан на формуле

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(u))\varphi'(u)du,$$

где $x=\varphi(u)$ – дифференцируемая функция от u.

Пример 4. Найти $\int\sin(3-8x)dx$

Введем новую переменную по формуле $u=3-8x$, откуда $-8dx = du$, или $dx=-\frac{du}{8}$.

Подставляя полученные выражения в подынтегральное выражение, находим:

$$\int\sin(3-8x)dx=\int\sin u\left(-\frac{du}{8}\right)=-\frac{1}{8}\int\sin udu=\frac{1}{8}\cos u+C\ .$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int\sin(3-8x)dx=\frac{1}{8}\cos u+C=\frac{1}{8}\cos(3-8x)+C.$$

Пример 5. Найти $\int\frac{dx}{x\sqrt{3x+1}}$.

Чтобы избавиться от иррациональности, положим $\sqrt{3x+1}=u$, откуда $3x+1=u^2$, $x=\frac{u^2-1}{3}$, $dx=\frac{2}{3}udu$. Используя соответствующую формулу, находим:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \int \frac{\frac{2}{3}udu}{\frac{u^2-1}{3}u} = 2\int \frac{du}{u^2-1} = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C.$$

Переходя к переменной x, получаем $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x+1}} = \ln\left|\frac{\sqrt{3x+1}-1}{\sqrt{3x+1}+1}\right| + C.$

Пример 6. Найти $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx$.

В случае, когда подынтегральное выражение содержит $\sqrt{a^2-x^2}$, целесообразно использовать тригонометрическую подстановку $x = a\sin u$ или $x = a\cos u$. Применяем подстановку $x = a\sin u$, откуда $dx = a\cos u du$, поэтому

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 u}}{a^2\sin^2 u} a\cos u du = \int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du.$$

Последний интеграл сводится к табличным интегралам

$$\int \frac{\cos^2 u}{\sin^2 u}du = \int \frac{1-\sin^2 u}{\sin^2 u}du = \int \frac{du}{\sin^2 u} - \int du = -\text{ctg}u - u + C.$$

Заметив, что $\sin u = \frac{x}{a}$, $u = \arcsin\frac{x}{a}$, $ctgu = \frac{\cos u}{\sin u} = \frac{\sqrt{1-\sin^2 u}}{\sin u} =$ $= \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\frac{x}{a}} = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, окончательно получим

$$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

Пример 7. Найти $\int \frac{x^2}{(1+x)^8}dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем

$$\int \frac{x^2}{(1+x)^8}dx = \int \frac{\left(x^2+2x+1\right)-2x-1}{(1+x)^8}dx = \int \frac{(1+x)^2-2x-2+1}{(1+x)^8}dx =$$

$$= \int \frac{(1+x)^2-2(1+x)+1}{(1+x)^8}dx = \int \frac{dx}{(1+x)^6} - \int \frac{2dx}{(1+x)^7}dx + \int \frac{dx}{(1+x)^8} =$$

$$= \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^6} - 2\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^7} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^8} =$$

$$= \int (x+1)^{-6} d(x+1) - 2\int (x+1)^{-7} d(x+1) + \int (x+1)^{-8} d(x+1) =$$

$$=\frac{(x+1)^{-5}}{-5}-2\frac{(x+1)^{-6}}{-6}+\frac{(x+1)^{-7}}{-7}+C=-\frac{1}{5(x+1)^5}+\frac{1}{3(x+1)^6}-\frac{1}{7(x+1)^7}+C.$$

Интегрирование по частям

Интегрирование по частям выполняется по формуле

$$\int udv=uv-\int vdu \text{ или } \int u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int v(x)u'(x)dx,$$

где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – дифференцируемые функции переменной x.

Эта формула получена из равенства $d(uv)=udv+vdu$.

Пример 8. Найти $\int x\cos 3xdx$.

Положим $x=u$, $\cos 3xdx=dv$. Из первого равенства путем дифференцирования получаем $du=dx$, а из второго с помощью интегрирования определяем функцию $v=\frac{1}{3}\sin 3x$.

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x\cos 3xdx=x\cdot\frac{1}{3}\sin 3x-\int\frac{1}{3}\sin 3xdx=\frac{x}{3}\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C.$$

Пример 9. Найти интеграл $\int x^2\sin 2xdx$.

Полагая $x^2=u$, $\sin 2xdx=dv$, находим $du=2xdx$, $v=-\frac{1}{2}\cos 2x$.

По формуле интегрирования по частям получаем

$$\int x^2\sin 2xdx=x^2\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)2xdx=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\int x\cos 2xdx.$$

Применяя еще раз формулу интегрирования по частям, не выписывая явно u и dv, находим

$$\int x\cos 2xdx=\int x\frac{1}{2}d(\sin 2x)=\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=$$

$$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Следовательно,

$$\int x^2\sin 2xdx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Пример 10. Найти интеграл $\int e^x\sin xdx$.

Положим $u=e^x$, $dv=\sin xdx$, отсюда $du=e^xdx$, $v=-\cos x$.

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int e^x\sin xdx=e^x(-\cos x)-\int(-\cos x)e^xdx=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx$$

К интегралу в правой части снова применяем формулу интегрирования по частям, не вводя явно u и v:

$$\int e^x \cos x dx = \int e^x d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx,$$
$$\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx;$$
$$\int e^x \sin x dx + \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x,$$
$$2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x.$$

Следовательно, $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$.

8.2. Интегрирование рациональных функций

Неопределенный интеграл от целой рациональной функции (многочлена) находится непосредственно:

$$\int \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\right) dx =$$
$$= a_0 \int dx + a_1 \int x dx + a_2 \int x^2 dx + \ldots + a_n \int x^n dx =$$
$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + \ldots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

При нахождении неопределенного интеграла от дробной рациональной функции $R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m}$ $(n > m)$ предварительно выделяют целую часть, а остаток – правильную рациональную дробь $S(x) = \frac{N_k(x)}{Q_m(x)}$ $(k < m)$ – разлагают на элементарные дроби вида $\frac{A}{(x-a)^\alpha}$, $\frac{Bx + C}{\left(x^2 + px + q\right)^\beta}$, где *a, p, q, A, B, C* – действительные числа, α, β – натуральные числа.

Пример 11. Найти интеграл $\int \frac{x^5 - x + 1}{x^3 + x} dx$.

Подынтегральная функция является рациональной, т.е. отношением двух многочленов. Поскольку степень числителя дроби выше степени знаменателя, можно выделить целую часть. В результате деления числителя на знаменатель получаем;

$$\frac{x^5 - x + 1}{x^3 + x} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^3 + x}.$$

Остаток предствляем в виде суммы элементарных дробей $\frac{1}{x^3 + x} = \frac{1}{x\left(x^2 + 1\right)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$, где коэффициенты *A, B, C* пока не определены. Определим эти коэффициенты:

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)x}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\left(x^2+1\right)},$$

$$1=(A+B)x^2+Cx+A.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем уравнения: $A+B=0$, $C=0$, $A=1$, откуда $A=1$, $B=-1$, $C=0$.

Разложение на элементарные дроби принимает вид

$$\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}.$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{x^3+x}=\int\frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C_1=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C_1.$$

Принимая во внимание полученный результат, находим искомый интеграл

$$\int\frac{x^5-x+1}{x^3+x}dx=\int\left(x^2-1+\frac{1}{x^3+x}\right)dx=\frac{x^3}{3}-x+\ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|+C.$$

Пример 12. Найти интеграл $\int\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-2}dx$.

Так как $x^3-x^2-x-2=(x-2)\left(x^2+x+1\right)$, то

$$\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x-2)}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}.$$

Приводя подобные члены, находим

$$\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-2}=\frac{(A+B)x^2+(A+C-2B)x+(A-2C)}{x^3-x^2-x-2}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений: $A+B=1$, $A+C-2B=1$, $A-2C=2$, из которой находим, что $A=\frac{8}{7}$, $B=-\frac{1}{7}$, $C=-\frac{3}{7}$.

Следовательно,

$$\int\frac{x^2+x+2}{x^3-x^2-x-2}dx=\frac{8}{7}\int\frac{dx}{x-2}-\frac{1}{7}\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{8}{7}\int\frac{d(x-2)}{x-2}-\frac{1}{7}\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}d\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{7}\int\frac{\frac{5}{2}}{x^2+x+1}dx=$$

$$=\frac{8}{7}\ln|x-2|-\frac{1}{14}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{5\sqrt{3}}{21}\operatorname{arctg}\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}+C\,.$$

З а м е ч а н и е. Интеграл $\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx$ сводится к двум табличным интегралам: $\int\frac{du}{u}=\ln|u|$, $\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}$. Действительно,

$$\int\frac{x+3}{x^2+x+1}dx=\int\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}}{x^2+x+1}dx=\int\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\int\frac{\left(x^2+x+1\right)'dx}{x^2+x+1}+$$

$$+\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+x+1\right)}{x^2+x+1}+\int\frac{\frac{5}{2}dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{(2x+1)}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|+\frac{5\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\right)+C.$$

Пример 13. Найти интеграл $\int\frac{x^3+5x^2-13x-9}{x^4-10x^2+9}dx$.

Поскольку $x^4-10x^2+9=\left(x^2-1\right)\left(x^2-9\right)=(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$, то

$$\frac{x^3+5x^2-13x-9}{x^4-10x^2+9}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{x-3}=$$

$$=\frac{A(x+1)\left(x^2-9\right)+B(x-1)\left(x^2-9\right)+C(x-3)\left(x^2-1\right)+D(x+3)\left(x^2-1\right)}{(x-1)(x+1)(x+3)(x-3)}=$$

$$=\frac{x^3(A+B+C+D)+x^2(A-B-3C+3D)-x(9A+9B+C+D)}{x^4-10x^2+9}+$$

$$+\frac{9B-9A+3C-3D}{x^4-10x^2+9}\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем систему уравнений: $A+B+C+D=1$, $A-B-3C+3D=5$, $9A+9B+C+D=13$, $9B-9A+3C-3D=-9$, решение которой $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-1$, $D=\frac{1}{2}$.

Разложение данной дроби на элементарные имеет вид

$\frac{x^3+5x^2-13x-9}{x^4-10x^2+9}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}-\frac{1}{2}\frac{1}{x-3}$, поэтому

$$\int\frac{x^3+5x^2-13x-9}{x^4-10x^2+9}dx=\int\frac{d(x-1)}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{d(x+1)}{x+1}-\int\frac{d(x+3)}{x+3}+\int\frac{d(x-3)}{x-3}=$$

$$=\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|-\ln|x+3|+\frac{1}{2}\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{(x-1)\sqrt{(x+1)(x-3)}}{(x+3)}\right|+C.$$

8.3. Интегрирование рационально–тригонометрических функций

Интегралы вида $\int\sin ax\sin bxdx$, $\int\cos ax\cos bxdx$, $\int\sin ax\cos bxdx$ находят с помощью тригонометрических формул:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Интегралы вида $I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^n xdx$, где m и n – четные числа, находятся с помощью тригонометрических формул

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x),\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x),\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x.$$

Если хотя бы одно из чисел m или n нечетное, то предварительно от нечетной степени отделяется один множитель и вводится новая переменная, в частности, если $n=2k+1$, то

$$I_{m,n}=\int\sin^m x\cos^{2k+1}xdx=\int\sin^m x\cos^{2k}x\cos xdx=$$
$$=\int\sin^m x\left(1-\sin^2 x\right)^k d(\sin x)=\int t^m\left(1-t^2\right)^k dt.$$

Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональной функции новой переменной t с помощью подстановки

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t,$$

при этом $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$.

Пример 14. Найти интеграл $\int\sin 7x\sin 5x dx$.

Так как $\sin 7x\sin 5x=\frac{(\cos 2x-\cos 12x)}{2}$, то

$$\int\sin 7x\sin 5x dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C.$$

Пример 15. Найти интеграл $\int\sin^4 x\cos^3 x dx$.

Поскольку одна из степеней является нечетной (n = 3), то интеграл можно найти так:

$$\int\sin^4 x\cos^3 x dx=\int\sin^4 x\cos^2 x\cos x dx=$$

$$=\int\sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x)=\int\left(\sin^4 x-\sin^6 x\right)d(\sin x)=$$

$$=\int\sin^4 x d(\sin x)-\int\sin^6 x d(\sin x)=\frac{\sin^5 x}{5}-\frac{\sin^7 x}{7}+C.$$

Пример 16. Найти интеграл $\int\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}$.

Применяя подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2}=t$ и соответствующие формулы, получаем $\frac{dx}{2+3\sin x+2\cos x}=\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2+\frac{3\cdot 2t}{\left(1+t^2\right)}+\frac{2\left(1-t^2\right)}{\left(1+t^2\right)}}=\frac{2dt}{4+6t}=\frac{dt}{2+3t}$.

Следовательно, $\frac{dt}{2+3\sin x+2\cos x}=\int\frac{dt}{2+3t}=\frac{1}{3}\int\frac{d(3t)}{2+3t}=$
$=\frac{1}{3}\ln|2+3t|+C=\frac{1}{3}\ln\left|2+3\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

Интегрирование гиперболических функций

Интегралы $I_{n,m}=\int\mathrm{sh}^n x\,\mathrm{ch}^m x dx$ находят с помощью табличных интегралов, причем при четных n и m используют формулы $\mathrm{ch}^2 x=$ $=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x+1)$, $\mathrm{sh}^2 x=\frac{1}{2}(\mathrm{ch}2x-1)$, $\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x=\frac{\mathrm{sh}2x}{2}$.

Интегралы от нечетных степеней $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{ch}x$ находят путем отделения множителей первой степени и введения новой переменной.

Пример 17. Найдите интеграл $\int \mathrm{ch}^3 x \mathrm{sh}^3 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, находим:

$$\int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^3 x\, dx = \int \mathrm{ch}^2 x\, \mathrm{sh}^2 x\, \mathrm{sh} x\, dx = \int \mathrm{ch}^2 x \left(\mathrm{ch}^2 x - 1\right) d(\mathrm{ch} x) =$$

$$= \int \mathrm{ch}^4 x d(\mathrm{ch} x) - \int \mathrm{ch}^2 x d(\mathrm{ch} x) = \frac{\mathrm{ch}^5 x}{5} - \frac{\mathrm{ch}^3 x}{3} + C.$$

З а м е ч а н и е. Здесь использована формула $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

Пример 18. Найти интеграл $\int \mathrm{ch}^2 x \mathrm{sh}^2 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, получаем:

$$\int \mathrm{sh}^2 x \mathrm{ch}^2 x dx = \int (\mathrm{sh} x \mathrm{ch} x)^2 dx = \int \frac{1}{4} (\mathrm{sh} 2x)^2 dx = \frac{1}{4} \int \mathrm{sh}^2 2x dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\mathrm{ch} 4x - 1}{2} dx = \frac{1}{8} \int \mathrm{ch} 4x dx - \frac{1}{8} \int dx = \frac{1}{32} \mathrm{sh} 4x - \frac{1}{8} x + C.$$

Пример 19. Найти интеграл $\int \mathrm{th} x dx$.

Так как $\mathrm{th} x = \dfrac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x}$, то

$$\int \mathrm{th} x dx = \int \frac{\mathrm{sh} x}{\mathrm{ch} x} dx = \int \frac{d(\mathrm{ch} x)}{\mathrm{ch} x} = \ln(\mathrm{ch} x) + C.$$

Пример 20. Найти интеграл $\int \mathrm{cth}^2 x dx$.

Преобразуя подынтегральную функцию, находим:

$$\int \mathrm{cth}^2 x dx = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \mathrm{sh}^2 x}{\mathrm{sh}^2 x} dx = \int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} + \int dx =$$

$$= -\mathrm{cth} x + x + C = x - \mathrm{cth} x + C.$$

Задачи

Найдите неопределенные интегралы

1. $\int \dfrac{6x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 3x - 5}{x^2} dx$. **2.** $\int \left(2 + \sqrt{x}\right)^3 dx$. **3.** $\int \dfrac{x^2}{x^2 - 1} dx$.

4. $\int \dfrac{x^2}{x^2 + 1} dx$.

Методом подстановки найдите интегралы

5. $\int x^2 \sin x^3 dx$. **6.** $\int \dfrac{dx}{7 - 8x}$. **7.** $\int x^2 \sqrt{x^3 - 7} dx$. **8.** $\int x \sqrt{125 - 5x^2} dx$.

Методом интегрирования по частям найдите интегралы

9. $\int (x + 7) e^x dx$. **10.** $\int x \ln 6x dx$. **11.** $\int x \mathrm{arctg} 4x dx$. **12.** $\int x^3 e^{-x^2} dx$.

Найдите интегралы от рациональных функций

13. $\int\frac{dx}{x^3+1}$. **14.** $\int\frac{\left(x^2+3\right)dx}{x^3-2x^2-13x-10}$. **15.** $\int\frac{2x^2+5x+9}{x^3+5x^2+2x-8}dx$.

16. $\int\frac{\left(x^2+3\right)dx}{x^3+7x^2+16x+12}$.

Найдите интегралы от рационально-тригонометрических функций

17. $\int\sin^3 x\cos^3 xdx$. **18.** $\int\cos 7x\cos 9xdx$. **19.** $\int\frac{dx}{1+8\cos^2 x}$.

20. $\int\frac{dx}{5+\sin x+2\cos x}$.

Найдите интегралы от гиперболических функций

21. $\int\frac{dx}{\mathrm{ch}^2\frac{x}{4}}$. **22.** $\int\mathrm{sh}^2 4xdx$.

Ответы

1. $2x^3-4x^2-4x+3\ln x+\frac{5}{x}$. **2.** $8x+8x\sqrt{x}+3x^2+2x^2\frac{\sqrt{x}}{5}$.

3. $x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$. **4.** $x-\mathrm{arctg}x$. **5.** $-\frac{1}{3}\cos x^3$. **6.** $-\frac{1}{8}\ln|7-8x|$.

7. $\frac{2}{9}\left(x^2-7\right)^{\frac{3}{2}}$. **8.** $-\frac{\sqrt{5}}{3}\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}$. **9.** $(x+6)e^x$. **10.** $\frac{x^2}{4}(2\ln 6x-1)$.

11. $\frac{1}{8}\left[\left(4x^2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{arctg}4x-x\right]$. **12.** $-\frac{1}{3}e^{-x^3}\left(x^3+1\right)$.

13. $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right|+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}\,(2x-1)}{3}$. **14.** $\ln\frac{|x+2|(x-5)^2}{|x+1|}$.

15. $\ln\frac{(x+4)^2|x+2|}{|x-1|}$. **16.** $12\ln|x+3|-11\ln|x+2|-\frac{7}{(x+2)}$.

17. $\frac{\sin^4 x}{4}-\frac{\sin^6 x}{6}$. **18.** $\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 16x}{32}$. **19.** $\frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}x}{3}\right)$.

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arctg}\left(\frac{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{2\sqrt{5}}\right)$. **21.** $4\mathrm{th}\frac{x}{4}$. **22.** $\frac{\mathrm{sh}8x}{16}-\frac{x}{2}$.

З а м е ч а н и е. Во всех ответах присутствует ещё одно слагаемое C – произвольная постоянная.

Глава 9. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. В каждом из полученных элементарных отрезков длиной $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ произвольным образом выберем точку $x_i' \in [x_{i-1}, x_i]$. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i'\right)\Delta x_i = f\left(x_1'\right)\Delta x_1 + f\left(x_2'\right)\Delta x_2 + \ldots + f\left(x_n'\right)\Delta x_n,$$

которую называют *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Обозначим буквой λ длину наибольшего из элементарных отрезков, т.е. $\lambda = \max \Delta x_i$.

Определенным интегралом от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$ называют предел ее интегральной суммы при $\lambda \to 0$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i'\right)\Delta x_i.$$

Свойства определенного интеграла

1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \ldots = \int_a^b f(u)\,du.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3. При перестановке пределов интегрирования интеграл меняет только знак

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

5. $\int_a^b [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx - \int_a^b f_3(x)\,dx.$

6. $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

9.1. Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл от непрерывной функции в данном промежутке равен разности значений любой ее первообразной для верхнего и нижнего пределов интегрирования

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$. Эту формулу называют формулой Ньютона-Лейбница.

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

где $x = \varphi(t)$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, t – новая переменная; α и β – новые пределы интегрирования.

Интегрирование по частям в определенном интеграле выполняется по формуле

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,du(x).$$

9.2. Приложения определенного интеграла

Площадь плоской криволинейной фигуры

Площадь криволинейной трапеции *ABba* (рис. 9.1), ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b y\,dx \text{ или } S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Площадь криволинейной фигуры $A_1B_1B_2A_2$ (рис. 9.2), ограниченной сверху и снизу соответственно линиями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, определяется формулой

$$S = \int_a^b (y_1 - y_2)\,dx \text{ или } S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx.$$

Площадь фигуры $C_1D_1D_2C_2$, ограниченной слева и справа соответственно графиками функций $x_1 = \varphi_1(y)$, $x_2 = \varphi_2(y)$, снизу и сверху прямыми $y = c$, $y = d$ (рис. 9.3) определяется формулой

$$S = \int_c^d [\varphi_2(y) - \varphi_1(y)]\,dy.$$

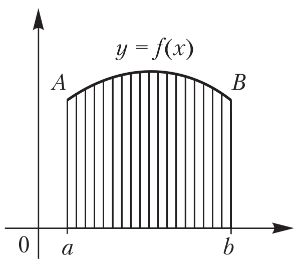

Рис. 9.1

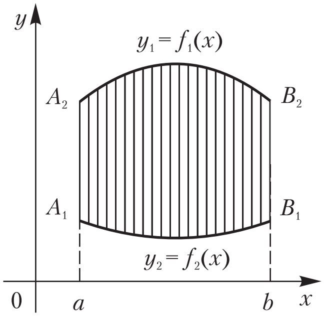

Рис. 9.2

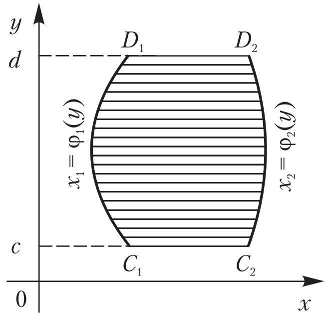

Рис. 9.3

Объем тела вращения

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 9.4), где AB – дуга кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$, вычисляется по формуле $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx$ или $V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рис. 9.5), где CD – дуга кривой $x = \varphi(y)$ $(c \le y \le d)$ определяется формулой $V_y = \pi\int_c^d x^2 dy$ или $V_y = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy$.

Длина дуги кривой $y = f(x)$, где $a \le x \le b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx \text{ или } l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Длина дуги кривой, заданной параметрическими уравнениями $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, определяется формулой

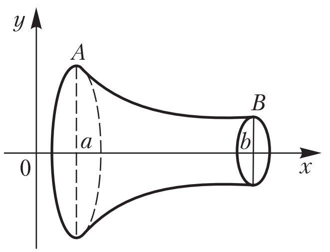

Рис. 9.4

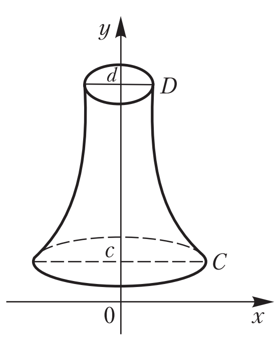

Рис. 9.5

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt \text{ или } l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi_1'(t))^2+(\varphi_2'(t))^2}dt.$$

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho=\rho(\varphi)$ $(\alpha\le\varphi\le\beta)$, то

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi.$$

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $y=f(x)$ $(a\le x\le b)$ вычисляется по формуле

$$S_x=2\pi\int_a^b ydl=2\pi\int_a^b y\sqrt{y'^2+1}dx,$$

где dl – дифференциал длины дуги.

Если линия задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$, то площадь соответствующей поверхности вычисляется по формуле

$$S=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}y\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}dt.$$

Примеры

1. Вычислить определенный интеграл $\int_2^4\left(32+4x-3x^2\right)dx$.

Принимая во внимание свойства 5 и 6 определенного интеграла, находим

$$\int_2^4\left(32+4x-3x^2\right)dx=32\int_2^4dx+4\int_2^4xdx-3\int_2^4x^2dx=$$

$$=32x\Big|_2^4+4\frac{x^2}{2}\Big|_2^4-3\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=32(4-2)+2\left(4^2-2^2\right)-\left(4^3-2^3\right)=32.$$

2. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi$.

Преобразуя подынтегральную функцию, используя свойства определенного интеграла, находим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2\varphi\right)^2d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\cos^22\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+2\cos2\varphi+\frac{1+\cos4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(3+4\cos2\varphi+\cos4\varphi)d\varphi=\frac{1}{8}\left(3\varphi+2\sin2\varphi+\frac{1}{4}\sin4\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{16}\pi.$$

3. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt$.

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t d(\sin t) = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = t\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

4. Вычислить $\int_{-b}^{b} \frac{4}{3b}\left(\sqrt{b^2 - x^2}\right)^3 dx$.

Введем новую переменную t по формуле $x = b\sin t$. Найдем новые пределы интегрирования: при $x = -b$ получаем $-b = b\sin t$, $\sin t = -1$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; при $x = b$ имеем $b = b\sin t$, $\sin t = 1$, $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Так как $dx = b\cos t dt$, то

$$\int_{-b}^{b} \frac{4}{3b}\left(\sqrt{b^2 - x^2}\right)^3 dx = \frac{4}{3b}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{b^2 - b^2\sin^2 t}\right)^3 b\cos t dt =$$

$$= \frac{4}{3b} b^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\cos t dt = \frac{4}{3} b^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{4}{3} b^3 \cdot \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi b^3}{2}.$$

З а м е ч а н и е. Здесь принят во внимание результат примера 2: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{3}{8}\pi$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y - x^2 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

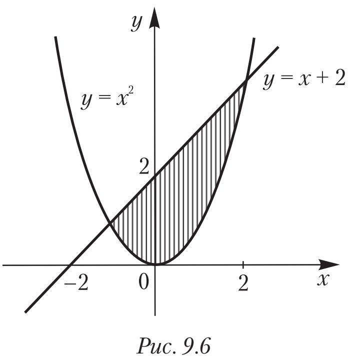

Рис. 9.6

Данная фигура сверху ограничена прямой $x - y + 2 = 0$, снизу – параболой $y - x^2 = 0$ (рис. 9.6). Находим пределы интегрирования и выражения для y_1 и y_2. Пределами интегрирования будут абсциссы точек пересечения параболы и прямой. Решая систему уравнений $y - x^2 = 0$, $x - y + 2 = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, т.е. $a = -1$, $b = 2$. Выражая y из каждого уравнения, получаем $y_1 = f_1(x) = x + 2$, $y_2 = f_2(x) = x^2$ (через $y_1 = f_1(x)$ обозначена функция, график ограничивает криволинейную фигуру сверху). Применяя формулу $S=\int\limits_a^b (y_1-y_2)\,dx$, находим

$$S=\int\limits_{-1}^{2}\left[(x+2)-x^2\right]dx=\int\limits_{-1}^{2}xdx+\int\limits_{-1}^{2}2dx-\int\limits_{-1}^{2}x^2dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}-\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}=2-\frac{1}{2}+4+2-\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=4{,}5.$$

6. Вычислить объем тела, полученного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox. (Это тело ограничено поверхностью, которую называют эллипсоидом вращения).

Искомый объем вычислим по формуле $V_x=\int\limits_a^b \pi y^2dx$, предварительно выразив y^2 из уравнения эллипса.

$$V_x=\pi\int\limits_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi b^2\int\limits_{-a}^{a}dx-\frac{\pi b^2}{a^2}\int\limits_{-a}^{a}x^2dx=$$

$$=\pi b^2x\Big|_{-a}^{a}-\frac{\pi b^2}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2[a-(-a)]-\frac{\pi b^2}{3a^2}\left[a^3-(-a)^3\right]=\frac{4}{3}\pi ab^2$$

З а м е ч а н и е. При $a=b=R$ получаем $V=\frac{4}{3}\pi R^3$ (объем шара).

7. Найти длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

Движущаяся точка описывает одну арку циклоиды (рис. 9.7), когда t меняется от 0 до 2π. Дифференцируя уравнения циклоиды, получаем $x'_t=a(1-\cos t)$, $y'_t=a\sin t$; $x'^2_t+y'^2_t=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)+a^2\sin^2 t=$
$=a^2(1-2\cos t+1)=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$; $\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}=\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}=$
$=2a\sin\frac{t}{2}$.

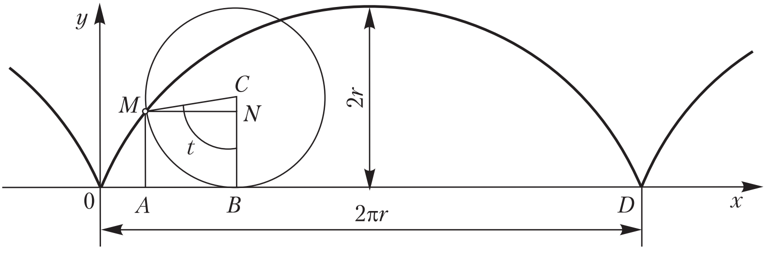

Рис. 9.7

Следовательно,

$$l=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\int\limits_0^{2\pi}2a\sin\frac{t}{2}dt=2a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}d\left(\frac{t}{2}\right)=$$

$$=-4a(\cos\pi-\cos 0)=-4a(-1-1)=8a.$$

Искомая длина $l=8a$.

8. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Ox дуги кривой $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le 2\pi)$.

Поскольку линия (циклоида) задана параметрическими уравнениями, для определения площади воспользуемся формулой $S_x=2\pi\int\limits_0^{2\pi}y\sqrt{y_t'^2+x_t'^2}\,dt$. Так как $x_t'=a(1-\cos t)$, $y_t'=a\sin t$, $x_t'^2+y_t'^2=$ $=a^2(1-\cos)^2+a^2\sin^2 t=a^2\left(1-2\cos t+\cos^2 t\right)+a^2\sin^2 t=a^2\cdot 2(1-\cos t)$, то

$$S_x=2\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt=8\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\sin^2\frac{t}{2}\cdot\sin\frac{t}{2}dt=$$

$$=-16\pi a^2\int\limits_0^{2\pi}\left(1-\cos^2\frac{t}{2}\right)d\left(\cos\frac{t}{2}\right)=-16\pi a^2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}+\frac{16}{3}\pi a^2\cos^3\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=32\pi a^2-\frac{32}{3}\pi a^2=\frac{64\pi a^2}{3}.$$

Следовательно, искомая площадь $S_x=\dfrac{64\pi a^2}{3}$.

Задачи

Вычислите определенные интегралы

1. $\int\limits_0^4\left(32+28x-9x^2\right)dx$. **2.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,d\varphi$. **3.** $\int\limits_0^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}dt$. **4.** $\int\limits_0^{2\pi}x\cos^2 x\,dx$.

5. $\int\limits_{-\sqrt2}^{\sqrt2}x^2\sqrt{8-2x^2}\,dx$. **6.** $\int\limits_1^4\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$. **7.** $\int\limits_2^5\frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **8.** $\int\limits_0^1\arccos x\,dx$.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной указанными линиями

9. $y=x^2$, $x^2=y$. **10.** $x=8y-y^2-7$, ось Oy. **11.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $(0\le t\le 2\pi)$. **12.** $y=-x^2+6x-8$, $y=0$. **13.** $y^3=x^2$, $y=1$. **14.** $y=x^2$, $y=x+2$.

Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной указанными линиями

15. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $y=\pm 2b$. **16.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\le t\le\pi)$.

Вычислите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной указанными линиями

17. $y = \sin x \ (0 \le x \le \pi)$, $y = 0$. **18.** $2y^2 = x^3$, $x = 4$.

Найдите длину дуги линии

19. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (астроида). **20.** $y^2 = x^3 \ (0 \le x \le 5)$.

Найдите площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной линиями

21. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t) \ (0 \le t \le 2\pi)$. **22.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Ответы

1. 160. **2.** $\frac{3\pi}{8}$. **3.** 4π. **4.** π^2. **5.** $\sqrt{2}\pi$. **6.** $\frac{20}{3}$. **7.** $\frac{\pi}{2}$. **8.** 1. **9.** $\frac{1}{3}$. **10.** 36. **11.** $3\pi a^2$. **12.** $\frac{4}{3}$. **13.** $\frac{4}{5}$. **14.** 4,5. **15.** $\frac{28}{3}\pi a^2 b$. **16.** $5\pi^2 a^3$. **17.** $\frac{\pi^2}{2}$. **18.** 32π. **19.** $6a$. **20.** $24\frac{22}{27}$. **21.** $16\pi^2 a^2$. **22.** $\frac{12a^2\pi}{5}$.

Несобственные интегралы

При введении понятия определенного интеграла предполагалось что пределы интегрирования конечны, а подынтегральная функция ограничена. Если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то интеграл называют *несобственным*.

Интегралы с бесконечными пределами

Если функция $y = f(x)$ непрерывна при $x > a$, то несобственный интеграл с бесконечным верхним пределом определяется формулой

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b \to \infty} (F(b) - F(a)),$$

где $F'(x) = f(x)$.

Когда существует конечный указанный предел, несобственный интеграл называют *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*. Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\,dx$ и интеграл с обоими бесконечными пределами интегрирования $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx =$

$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)\,dx$, где c – любая точка, $c \in (-\infty, +\infty)$.

П р и з н а к   с р а в н е н и я. Если $|f(x)| \le \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Примеры

1. Исследовать, сходится ли интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

Так как $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \frac{dx}{x^2+1} = \lim\limits_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}$, то интеграл сходится.

2. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ $(\alpha \ne 1)$.

По определению $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_1^b =$

$= \lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right)$.

Существование последнего предела зависит от величины α: если $\alpha > 1$, то $\lim\limits_{b\to+\infty} \left(\frac{b^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha-1}$; интеграл сходится, причем $\int\limits_{0}^{+\alpha} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$. При $\alpha \le 1$ интеграл расходится.

И н т е г р а л ы   о т   н е о г р а н и ч е н н ы х   ф у н к ц и й

Пусть функция $y = f(x)$ задана на $[a, b]$, в любом промежутке $[a, b-\eta]$ $(0 < \eta < b - a)$ функция ограничена и интегрируема и неограничена в каждом промежутке $[b-\eta, b]$ слева от точки b.

Предел интеграла $\int\limits_{a}^{b-\eta} f(x)dx$ при $\eta \to 0$ (конечный или бесконечный) называется несобственным интегралом функции $f(x)$ от a до b и обозначается

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{\eta\to0} \int\limits_{a}^{b-\eta} f(x)dx.$$

VI

РЯДЫ

Глава 10. РЯДЫ

Рядом называют выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_k = U_1 + U_2 + U_3 + \dots,$$

где (U_k) – последовательность чисел или функций. Каждое слагаемое называют членом ряда. Если все члены ряда – числа, то ряд называют *числовым*; если члены ряда – функции, то ряд – *функциональный*.

10.1. Числовые ряды

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Ряд задан, если указан его *общий член* $a_k = \varphi(k)$, т.е. указано правило, по которому каждому номеру k (k = 1, 2, 3, ...) ставится в соответствие вполне определенное значение функции $\varphi(k)$.

Сумму первых n членов ряда называют его n-ой *частичной суммой*

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Конечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называют *суммой ряда* $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Ряд, имеющий конечную сумму, называют *сходящимся*. Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называют *расходящимся*.

Ряд, полученный из данного ряда путем отбрасывания m первых его членов, т.е. ряд $\sum\limits_{k=m+1}^{\infty} a_k = a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \dots$, называют *остатком* исходного ряда после m-го члена.

Ряд и его остаток одновременно сходятся или расходятся.

Необходимый признак сходимости ряда. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ сходится, то его общий член стремится к нулю $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Следствие. Если общий член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Признаки сходимости рядов с положительными членами

Рассмотрим числовые ряды с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

Первый признак сравнения. Если для $k \ge k_0$ $a_k \le b_k$ второй ряд сходится, то сходится и первый ряд; если $a_k \ge b_k$ для всех $k \ge k_0$ и второй ряд расходится, то расходится и первый ряд.

Второй признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \ne 0$, то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера. Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится.

Признак Коши. Если для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$ существует $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ – расходится.

Интегральный признак Коши. Если $f(x)$ – неотрицательная невозрастающая функция при $x > 0$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Примеры

1. Исследовать, сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots$.

Члены этого ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Ряд называют геометрическим рядом. Поскольку $S_n = \frac{a\left(1-q^n\right)}{1-q}$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$. Следовательно, геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$; его сумма $S_n = \frac{a}{1-q}$.

2. Найти сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} + \dots .$$

Так как $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$, то

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n},\ \lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

Следовательно, ряд сходится, его сумма $S = 1$.

3. Найти сумму ряда $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{256}+\dots$.

Члены ряда образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{1}{4}$ и первым членом $a=1$. Поскольку $|q|<1$, то ряд сходится. В соответствии с формулой $S=\frac{a}{1-q}$, получаем $S=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$.

4. Исследовать, сходится ли ряд $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\dots$

Составим n-ю частичную сумму ряда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Общий член разложим на элементарные дроби:

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{A}{2k-1}+\frac{B}{2k+1}=\frac{A(2k+1)+B(2k-1)}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{2(A+B)k+A-B}{(2k-1)(2k+1)},$$

откуда $2(A+B)=0,\ A-B=1;\ A+B=0,\ A=-B,\ 2A=1;\ A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$.

Следовательно, $a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}.$$

Переходя к пределу, получаем $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}\right)=\frac{1}{2}$, $S=\frac{1}{2}$.

Итак, ряд сходится, его сумма равна $S=\frac{1}{2}$.

5. Исследовать, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{3k-1}$.

Общий член ряда определяется формулой $a_k=\frac{k+1}{3k-1}$. Поскольку $\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{3k-1}=\frac{1}{3}$, т.е. общий член к нулю не стремится, то ряд расходящийся (на основании следствия из необходимого признака сходимости ряда).

6. Исследовать, сходится ли *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots .$$

Для этого ряда $a_n=\frac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, т.е. выполнено условие необходимого признака, но ряд расходится. Обозначим его сумму буквой S, тогда $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$, $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=S-S=0$, что противоречит неравенству $S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$.

7. Исследовать, сходится ли ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{1+3^{2k}}$.

Сравним этот ряд с общим членом $a_k=\frac{3^k}{1+3^{2k}}$ с геометрическим рядом $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\dots$, для которого $b_k=\frac{1}{3^k}$.

Поскольку $\frac{3^k}{1+3^{2k}}<\frac{3^k}{3^{2k}}=\frac{1}{3^k}$ $(a_k<b_k;\ k=0,1,2,\dots)$ и ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^k}$ сходится (геометрический ряд со знаменателем $q=\frac{1}{3}<1$), то на основании первого признака сравнения заключаем, что данный ряд также сходится.

8. Исследовать, при каких α сходится ряд Дирихле

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\alpha}}=\frac{1}{1^{\alpha}}+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\dots .$$

Если $\alpha\le 0$, то общий член ряда не стремится к нулю: $a_k=\frac{1}{k^{\alpha}}=k^{-\alpha}\ge 1$; ряд расходится. Если $\alpha>0$, применяем интегральный признак Коши. Пусть $0<\alpha<1$, положим $\alpha=1-h$, где h – достаточно малое положительное число. Поскольку $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{1-h}}=\int\limits_1^{\infty}x^{h-1}dx=\frac{x^h}{h}\Big|_1^{\infty}=\infty$, то интеграл расходится и ряд.

В случае $\alpha>1$, полагая $\alpha=1+h$ $(h>0)$, находим $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^{h+1}}=-\frac{1}{x^h h}\Big|_1^{\infty}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{hx^h}-\left(-\frac{1}{h}\right)\right)=\frac{1}{h}$. Интеграл сходится, а вместе с ним и ряд.

Если $\alpha=1$, то $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\ln x=\infty$. Интеграл расходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ (гармонический).

Следовательно, ряд сходится при $\alpha>1$.

9. С помощью признака Даламбера исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{3^k k!}.$$

Поскольку $a_k = \frac{k^k}{3^k k!}$, $a_{k+1} = \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)!}$, $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{k+1}}{3^{k+1}(k+1)!} : \frac{k^k}{3^k k!} =$
$= \frac{(k+1)^{k+1} 3^k k!}{k^k 3^{k+1}(k+1)!} = \frac{1}{3}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{3}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \frac{1}{3}\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k =$
$= \frac{e}{3} < 1$, то ряд сходится.

10. С помощью признака Коши исследовать сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^k.$$

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{3k-1}{2k+1}\right)^k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{3k-1}{2k+1} = \frac{3}{2} > 1$, то ряд расходится.

Знакопеременные ряды

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называют *знакопеременным рядом*.

Знакопеременный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots$$

сходится, если сходится ряд из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = |c_1| + |c_2| + |c_3| + \ldots .$$

Первый ряд в этом случае называют *абсолютно сходящимся*. Сумма абсолютно сходящегося ряда не зависит от порядка членов.

Если первый ряд сходится, а второй расходится, то первый ряд называют *условно (неабсолютно) сходящимся*. Сумму условно сходящегося ряда путем перестановки его членов можно сделать равной любому данному числу.

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, т.е. ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots \quad (a_k > 0,\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

называют *знакочередующимся рядом*.

Признак Лейбница. Знакочередующийся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$ сходится, если выполнены условия:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,\ a_k \ge a_{k+1}\ \ (k = 1, 2, 3, ...).$$

При замене суммы сходящегося знакочередующегося ряда суммой n первых его членов погрешность не превышает модуля первого из отброшенных членов, т.е. $|R_n| \le |a_{n+1}|$.

11. Исследовать, сходится ли знакопеременный ряд

$$1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{5^4}-\frac{1}{5^5}-\frac{1}{5^6}+\ldots.$$

Составим ряд из абсолютных членов данного ряда

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\ldots.$$

Последний ряд сходится как геометрический ряд со знаменателем $q=\frac{1}{5}<1$. Следовательно, данный ряд также сходится; он является абсолютно сходящимся рядом.

12. Исследовать, сходится ли ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$

Условия признака Лейбница здесь выполняются:

$$1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{k}=0.$$

Ряд сходится, но не абсолютно, так как ряд из модулей его членов расходится; это гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.$

13. Сколько членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k^4}=1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,0001?

Этот ряд является знакочередующимся, удовлетворяющим условиям признака Лейбница: $1>\frac{1}{2^4}>\frac{1}{3^4}>\frac{1}{4^4}>\ldots$, $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k^4}=0$. Следовательно, данный ряд сходится, причем абсолютно, поскольку ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|(-1)^{k-1}\frac{1}{k^4}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}$ является сходящимся (ряд Дирихле, $\alpha>1$).

Определим число членов ряда, которые нужно взять, чтобы вычислить его сумму с заданной точностью. Если $\frac{1}{k^4}<0{,}0001$ или $\frac{1}{k^4}<\frac{1}{10000}$, то $k>10$.

Следовательно, нужно взять 10 членов ряда. Так как $a_{11} = \frac{1}{11^4} < \frac{1}{10^4} = 0{,}0001$, то получим оценку остатка $R_{10} < a_{11} < 0{,}0001$.

Задачи

Найдите сумму ряда

1. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$. **2.** $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots$. **3.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$. **5.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+2)}$. **6.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{5}+k\right)\left(\sqrt{5}+k+1\right)}$.

С помощью признаков сравнения исследовать, сходится ли ряд

7. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{7^k+k}$. **8.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+6}$. **9.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+2}$. **10.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k\left(2^k+1\right)}$.

С помощью признака Даламбера исследовать, сходится ли ряд

11. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k!)^2}$. **12.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^{\alpha}}{6^k}$. **13.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^k(2k-1)}$. **14.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^4}{3^k}$.

С помощью признака Коши исследовать, сходится ли ряд

15. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{4k+2}\right)^k$. **16.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k-3}{3k+1}\right)^k$. **17.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k^{2k}\sin^k\frac{1}{2k^2}$. **18.** $\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln k)^k}$.

Исследовать, сходится ли знакопеременный ряд

19. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k^3}$. **20.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}$. **21.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-5)^k}{1+(-5)^{2k}}$. **22.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{k}{2k-1}$.

С точностью до 0,01 вычислите сумму ряда

23. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4^k}$. **24.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$. **25.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k)!}$. **26.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^k}$.

Ответы

1. $\frac{3}{2}$. **2.** $\frac{4}{7}$. **3.** $\frac{1}{3}$. **4.** $\frac{1}{4}$. **5.** $\frac{3}{4}$. **6.** $\frac{1}{\left(\sqrt{5}+1\right)}$; **7–9.** Сходится. **10.** Расходится. **11.** Расходится. **12–15.** Сходится. **16.** Расходится. **17–21.** Сходится. **22.** Расходится. **23.** 0,21. **24.** 0,82. **25.** 0,46. **26.** 0,79.

10.2. Степенные ряды

Степенным рядом называют функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k = a_0 + a_1 (x-a) + a_2 (x-a)^2 + \ldots,$$

где $a_k \ (k=1,\ 2,\ \ldots)$ – постоянные, называемые *коэффициентами ряда*.

Если число $a = 0$, то ряд принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots .$$

Радиусом сходимости этого ряда называют число R такое, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ расходится.

Интервал $(-R,\ R)$ в этом случае называют *интервалом сходимости* данного ряда. На концах интервала сходимости ряд может сходиться или расходиться.

Аналогично определяют радиус и интервал сходимости первого ряда: если при $|x-a| < R$ ряд сходится, а при $|x-a| > R$ расходится, то R – радиус сходимости, $(a-R,\ a+R)$ – интервал сходимости. Степенной ряд в интервале его сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать.

Один из интервалов $(a - R, a + R)$, $[a - R, a + R)$, $(a - R, a + R]$, $[a - R, a + R]$ называется областью сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости ряда можно вычислить по одной из формул

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}, \quad R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

Рядом Тейлора называют степенной ряд

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

При $a = 0$ получают ряд, называемый *рядом Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots .$$

Функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора, если все ее производные ограничены одним и тем же числом, т.е.

$$f^{(n)}(x) \le C \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Примеры

1. Найти сумму ряда $1+x+x^2+x^3+\ldots$.

Это геометрический ряд со знаменателем $q = x$, он сходится при $|x|<1$. Применяя формулу $S=\dfrac{a}{(1-q)}$ (в данном случае $a = 1$, $q = x$), получаем $S=\dfrac{1}{(1-x)}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots.$$

З а м е ч а н и е. Записав в этом равенстве $-x$ вместо x, получаем разложение функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ в степенной ряд:

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots \quad (|x|<1).$$

Отметим, что равенство верно при $|x|<1$.

2. Найти радиус и интервал сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^{k^2}\dfrac{x^k}{2^k}$

Применяем формулу $\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}$. В соответствии с этой формулой находим

$$\frac{1}{R}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}\frac{1}{2^k}}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k\frac{1}{2}=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\frac{1}{2}=\frac{e}{2}.$$

Следовательно, $R=\dfrac{2}{e}$ – радиус сходимости, $\left(-\dfrac{2}{e},\ \dfrac{2}{e}\right)$ – интервал сходимости.

3. Найти радиус и интервал сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x+3)^k}{k^2\cdot 4^k}$.

Применяя формулу $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, получаем

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k^2\cdot 4^k}:\frac{1}{(k+1)^2\,4^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}4\frac{(k+1)^2}{k^2}=4.$$

Следовательно, радиус сходимости ряда $R=4$ и интервал сходимости $(-7, 1)$, так как здесь $a = -3$.

4. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{2k}}{k^3\cdot 3^k}$.

Чтобы найти область сходимости ряда, достаточно определить его интервал сходимости и выяснить, сходится ли ряд на концах этого интервала.

Ряд содержит только четные степени x, при нечетных степенях x коэффициенты равны нулю; пользоваться формулами для определения радиуса сходимости здесь не представляется возможным.

Считая x фиксированным, применяем признак Даламбера к ряду из модулей членов данного ряда:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(x-4)^{2k+2}k^3\cdot 3^k}{(x-4)^{2k}(k+1)^3\cdot 3^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{(x-4)^2 k^3}{3(k+1)^3} = \frac{(x-4)^2}{3}$$

Ряд расходится, если $\frac{(x-4)^2}{3} < 1$, или $|x-4| < \sqrt{3}$. Это значит, что $R = \sqrt{3}$ – радиус сходимости, $\left(4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}\right)$ – интервал сходимости.

Исследуем, сходится ли ряд на концах отрезка $\left[4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}\right]$. При $x = 4-\sqrt{3}$ получается ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^{2k}}{k^3\cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}$, который сходится (как ряд Дирихле, $\alpha = 3 > 1$). При $x = 4+\sqrt{3}$ получаем тот же сходящийся ряд.

Следовательно, областью сходимости данного ряда является отрезок $\left[4-\sqrt{3},\ 4+\sqrt{3}\right]$.

4. Разложите в ряд по степеням x функцию $f(x) = \frac{1}{1-3x}$.

Воспользуемся равенством $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots \quad (|x| < 1)$. Записав в этом равенстве $3x$ вместо x, получим ряд

$$\frac{1}{1-3x} = 1 + 3x + (3x)^2 + (3x)^3 + \ldots,\quad \frac{1}{1-3x} = \sum_{k=0}^{\infty}(3x)^k.$$

Этот ряд сходится, когда $|3x| < 1$, т.е. при $|x| < \frac{1}{3}$, $R = \frac{1}{3}$ – радиус сходимости.

5. Разложите в ряд по степеням $(x-1)$ функцию $f(x) = \frac{1}{(x+2)}$. Найти радиус. Преобразуем данную функцию:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}}.$$

Использовав результат примера 1 и способ решения примера 4, получим

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{(x-1)}{3}} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x-1}{3} + \frac{(x-1)^2}{3^2} - \frac{(x-1)^3}{3^3} + \ldots\right).$$

Этот ряд сходится, когда $\left|\frac{(x-1)}{3}\right|<1$, т.е. при $|x-1|<3$; $R=3$ – радиус сходимости; $(-2,\ 4)$ интервал сходимости.

6. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos x$.

Находим производные данной функции и их значения при $x = 0$: $f(x)=\cos x$, $f(0)=1$; $f'(x)=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(0)=0$; $f''(x)=$ $=-\cos(x)=\cos(x+\pi)$, $f''(0)=-1$; $f'''(x)=\sin x=\cos\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)$, $f'''(0)=0$; $f^{\mathrm{IV}}(x)=\cos x=\cos(x+2\pi)$, $f(0)=1$; ...; $f^{(k)}=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)$, $f^{(k)}(0)=\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$.

Поскольку $\left|f^{(k)}(x)\right|=\left|\cos x+\frac{k\pi}{2}\right|\leq 1$ при всех x, т.е. все производные ограничены одним и тем же числом $C=1$, то данная функция разлагается в ряд Маклорена, сходящийся в промежутке $(-\infty,\ +\infty)$.

Подставляя найденные значения функции и ее производных при $x = 0$ в общую формулу для ряда Маклорена, получаем искомое разложение

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6}+\dots .$$

Отметим, что разложение содержит только четные степени x ($\cos x$ – четная функция).

7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)=\frac{1}{x}$ по степеням $x+3$.

Искомое разложение можно найти с помощью общей формулы для ряда Тейлора, положив в ней $a = -3$ и вычислив значения производных этой функции при $x=-3$. Его можно получить и другим путем. В самом деле,

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{(x+3)-3}=-\frac{1}{3-(x+3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{\left[1-\frac{(x+3)}{3}\right]}=$$

$$=-\frac{1}{3}\left[1+\frac{x+3}{3}+\left(\frac{x+3}{3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{3}\right)^3+\dots\right]$$

Следовательно, $\frac{1}{x}=-\frac{1}{3}-\frac{(x+3)}{3^3}-\frac{(x+3)^2}{3^3}-\dots-\frac{(x+3)^k}{3^{k+1}}-\dots$. Этот ряд сходится, когда $\left|\frac{x+3}{3}\right|<1$, т.е. при $-3<x+3<3$, или $-6<x<0$.

З а м е ч а н и е. Здесь использовано разложение $\frac{1}{(1-t)}=1+t+t^2+\dots$ ($|t|<1$).

Задачи

Найдите радиус и интервал сходимости ряда

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{7^k}$. **2.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{2^{2k}}$. **3.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k 5^k x^k$. **4.** $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^k}{k!}(x-1)^k$. **5.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}k3^k x^k$.
6. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k k2^{2k}x^k$.

Разложите функцию в ряд по степеням x.

7. $f(x)=\frac{x}{1+x^3}$. **8.** $f(x)=\frac{x}{1-x^4}$. **9.** $f(x)=\frac{1}{1+4x}$.
10. $f(x)=\frac{4}{(1+x)(1+5x)}$. **11.** $f(x)=\frac{3-2x}{x^2-3x+2}$. **12.** $f(x)=\frac{1}{3x-4}$.

Разложите функцию в ряд Маклорена

13. $f(x)=e^x$. **14.** $f(x)=\sin x$. **15.** $f(x)=(1+x)^{\alpha}$.
16. $f(x)=\ln(1+x)$.

Разложите в ряд Тейлора функцию в окрестности данной точки

17. $f(x)=\frac{1}{x+2}$; $x=-3$. **18.** $f(x)=\frac{1}{x+5}$; $x=2$. **19.** $f(x)=e^x$; $x=-5$. **20.** x^3-3x^2+8x-2; $x=1$.

Ответы

1. $R=7$, $(-7,\ 7)$. **2.** $R=4$, $(-4,\ 4)$. **3.** $R=0{,}2$, $(-0{,}2;\ 0{,}2)$.
4. $R=\frac{1}{e}$, $\left(1-\frac{1}{e},\ 1+\frac{1}{e}\right)$. **5.** $R=\frac{1}{3}$, $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$. **6.** $R=\frac{1}{4}$, $\left(-\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$.
7. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{3k+1}$ $(|x|<1)$. **8.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^{4k+1}$ $(|x|<1)$. **9.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4x)^k$ $\left(|x|<\frac{1}{4}\right)$.
10. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(5^{k+1}-1\right)x^k$ $\left(|x|<\frac{1}{5}\right)$. **11.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{k+1}}\right)x^k$ $(|x|<1)$.
12. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{3^k}{4^{k+1}}x^k$ $\left(|x|<\frac{3}{4}\right)$. **13.** $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots$.
14. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{2k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots$.
15. $1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots[\alpha-(k-1)]}{k!}x^k=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots$.
16. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$ **17.** $-1-\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x+3)^k$ $(-4<x<-2)$.
18. $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(x-2)^k}{7^{k+1}}$ $(-5<x<9)$. **19.** $e^{-5}\left[1+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(x+5)^k}{k!}\right]$.
20. $4+(x-1)+(x-1)^2+(x-1)^3$.

10.3. Ряды Фурье

Рядом Фурье функции $f(x)$ называют *тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kxdx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kxdx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

Теорема. Если функция $f(x)$ с периодом 2π кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi,\ \pi]$, то ее ряд сходится в любой точке x_0 и имеет сумму $S(x_0)=\dfrac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$.

В частности, в точке непрерывности функции $f(x)$ значение суммы ее ряда Фурье совпадает со значением самой функции $f(x)$.

На концах промежутка $[-\pi,\ \pi]$ имеем: $S(-\pi)=f(-\pi)$, $S(\pi)=f(\pi)$, если функция $f(x)$ непрерывна в точках $\pm\pi$;

$S(\pm\pi)=\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$, если функция разрывна в точках $\pm\pi$.

Ряд Фурье четной функции содержит только члены с косинусами:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\text{, где } a_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos kxdx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ряд Фурье нечетной функции содержит только члены с синусами:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\text{, где } b_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin kxdx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Ряды Фурье периода 2l. Если функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ в промежутке $[-l,\ l]$ длины $2l$ либо непрерывны, либо имеют лишь конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности справедливо разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

где $a_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$

$$b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Примеры

1. Разложить в ряд Фурье периодическую периода 2π функцию, заданную на промежутке $[-\pi, \pi]$ формулами:

$$f(x)=\begin{cases}1, & -\pi \le x < 0,\\ -1, & 0 \le x < \pi.\end{cases}$$

Функция удовлетворяет условиям теоремы, при которых ряд Фурье функции сходится к ней во всех точках непрерывности. Функция эта непрерывна во всех точка промежутка $(-\pi, \pi)$, кроме точки $x = 0$, в которой она имеет разрыв первого рода. Находим коэффициенты ряда Фурье данной функции по соответствующим формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 0x dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\cdot dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(-1) dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx=\frac{1}{\pi}x\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}x\Big|_{0}^{\pi}=\frac{1}{\pi}[0-(-\pi)]-\frac{1}{\pi}(\pi-0)=\frac{\pi}{\pi}-\frac{\pi}{\pi}=0.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos kx dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos kx dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin kx dx-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin kx dx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\frac{\cos kx}{k}\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi}\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{1}{\pi k}(\cos 0-\cos k\pi)+\frac{1}{\pi k}(\cos k\pi-\cos 0)=$$

$$=\frac{2}{\pi k}(\cos k\pi-\cos 0)=\frac{2}{k\pi}\left[(-1)^k-1\right].$$

Таким образом, $b_k=0$ при k четном, т.е. при $k=2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, $b_k=-\dfrac{4}{k\pi}$ при k нечетном, т.е. при $k=2n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$.

Следовательно, $a_k=0$, $b_{2n}=0$, $b_{2n-1}=-\dfrac{4}{(2n-1)\pi}$,

$$f(x)=-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=-\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\ldots\right).$$

Полученный ряд сходится к функции $f(x)$ во всех точках ее непрерывности. В точке $x = 0$ равенство $f(x)=S(x)$ нарушается (сумма ряда равна нулю, а значение функции отлично от нуля).

При $x = 0$ получаем: $S(0)=0$, $\dfrac{f(-0)+f(+0)}{2}=\dfrac{1+(-1)}{2}=0$. При

$x=-\pi$ и $x=\pi$ имеем соответственно: $S(-\pi)=\dfrac{f(-\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=0$ $S(\pi)=\dfrac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=0$.

2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в промежутке $(0,\ 2\pi)$.

Функция непрерывна в указанном промежутке длины 2π. Найдем коэффициенты ее ряда Фурье, воспользовавшись общими формулами для коэффициентов, предварительно заменив в них пределы интегрирования на 0 и 2π соответственно:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0;\quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\cos kx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)d\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\sin kx}{k}\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi}\sin kx dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-2\pi)\frac{\sin 2k\pi}{k}-(\pi-0)\frac{\sin 0}{k}\right]-\frac{1}{2k\pi}\frac{\cos k\pi}{k}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2k^2\pi}(\cos 2k\pi-\cos 0)=0\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin kx dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)d\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2\pi}(\pi-x)\frac{\cos kx}{k}\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{2k\pi}\int_0^{2\pi}\cos kx dx=$$

$$=-\frac{1}{2\pi k}((\pi-2\pi)\cos 2k\pi-(\pi-0)\cos 0)-\frac{1}{2k^2\pi}\sin kx\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-\frac{1}{2\pi k}(-\pi-\pi)-\frac{1}{2k^2\pi}(\sin 2k\pi-\sin 0)=\frac{2\pi}{2\pi k}-\frac{1}{2k^2\pi}\cdot 0=\frac{1}{k}\ (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Следовательно, $\dfrac{\pi-x}{2}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}\quad (0<x<2\pi)$.

График суммы ряда $S(x)$ изображен на рис. 10.1 (он состоит из бесконечного множества отрезков с исключенными концами и ряда отдельных точек на оси Ox).

3. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=x^2$ в промежутке $[-\pi,\ \pi]$. С помощью полученного разложения доказать, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

По соответствующим формулам находим коэффициенты ряда Фурье данной функции:

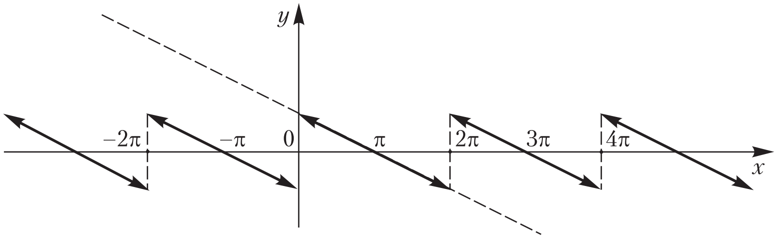

Рис. 10.1

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{3\pi}\left[\pi^3 - (-\pi)^3\right] = \frac{2\pi^3}{3\pi} = \frac{2\pi^2}{3};$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 d\left(\frac{\sin kx}{k}\right) = \frac{1}{\pi} x^2 \frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx =$$

$$= \frac{2}{k\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x d\left(\frac{\cos kx}{k}\right) = \frac{2x}{k\pi}\left(\frac{\cos kx}{k}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi k^2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}[\pi \cos k\pi - (-\pi)\cos k(-\pi)] - \frac{2}{\pi k^2}\frac{\sin kx}{k}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4\pi \cos k\pi}{\pi k^2} = (-1)^k \frac{4}{k^2}$$

$$(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Поскольку $f(x) = x^2$ – четная функция, то она разлагается в ряд Фурье только по косинусам, т.е. все ее коэффициенты $b_k = 0$.

Итак, $a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$, $a_k = (-1)^k \frac{4}{k^2}$, $b_k = 0$ $(k = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$, поэтому для $-\pi \le x \le \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, получаем:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2},\quad \frac{\pi^2}{3} = -4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2};\quad \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

При $x = \pi$ находим: $\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{\cos k\pi}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(-1)^k}{k^2}$,

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\quad \frac{2}{3}\pi^2 = 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2},\quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

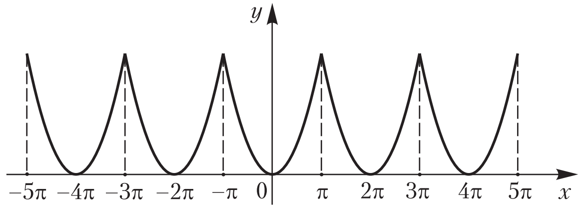

Рис. 10.2

Эти равенства для числовых рядов и требовалось доказать. На рис. 10.2 изображен график суммы ряда Фурье, состоящий из бесконечного множества параболических дуг.

4. Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ 0 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$$

С помощью полученного разложения доказать, что

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots$$

По соответствующим формулам находим коэффициенты ряда Фурье

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\,dx=-\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi^2}{2\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\,dx=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right)=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}x\sin kx\bigg|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi k}\int_{-\pi}^{0}\sin kx\,dx=-\frac{1}{k\pi}\frac{\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{0}=-\frac{1}{k^2\pi}(\cos 0-\cos k\pi)=$$

$$=\frac{1}{k^2\pi}(\cos k\pi-\cos 0)=\frac{1}{k^2\pi}\left[(-1)^k-1\right];$$

$$a_k=-\frac{2}{k^2\pi}\ \text{при } k \text{ нечетном},\ a_k=0\ \text{при } k \text{ четном};$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\sin kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}0\sin kx\,dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,d\left(\frac{\cos kx}{k}\right)=\frac{1}{\pi}x\frac{\cos kx}{k}\bigg|_{-\pi}^{0}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos kx}{k}\,dx=$$

$$=\frac{1}{k\pi}\left[0\cos 0-(-\pi)\cos k(-\pi)\right]-\frac{1}{k\pi}\frac{\sin k\pi}{k}\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{\pi\cos k\pi}{k\pi}=\frac{(-1)^k}{k}.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\sin kx}{k}\quad(-\pi\le x<\pi).$$

При $x=0$ получаем

$$0=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2},\ \text{откуда}\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

что и требовалось доказать.

Задачи

Разложите в ряд Фурье функцию в промежутке $(-\pi,\pi)$

1. $f(x)=e^{ax}$. **2.** $f(x)=e^{x}$. **3.** $f(x)=e^{-x}$. **4.** $f(x)=\cos ax$ $(a\ne k,\ k=1,2,3,\ldots)$

Разложите в ряд Фурье функцию заданную формулами.

5. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -\pi\le x\le 0,\\ \sin x, & \text{если } 0<x<\pi.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}x+1 & \text{при } -\pi<x\le 0,\\ -\frac{2}{\pi}x+1 & \text{при } 0<x<\pi.\end{cases}$ **7.** $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\pi\le x<0,\\ 1 & \text{при } 0\le x<\frac{\pi}{2},\\ -1 & \text{при } \frac{\pi}{2}\le x\le\pi.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } -\pi<x<0,\\ 2 & \text{при } 0<x<\pi,\\ \frac{1}{2} & \text{при } x=0,\ x=-\pi,\ x=\pi.\end{cases}$ **9.** $f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ \frac{1}{4}\pi x & \text{при } 0<x\le\pi.\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\pi}\right) & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{\pi}\right) & \text{при } 0<x\le\pi.\end{cases}$

Ответы

1. $\frac{2sha\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{a^2+k^2}(a\cos kx-k\sin kx)\right\}.$

2. $\frac{2sh\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx-k\sin kx)\right\}.$

3. $\frac{2sh\pi}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+k^2}(\cos kx+k\sin kx)\right\}.$

4. $\dfrac{\sin a\pi}{a\pi}+\dfrac{2a\sin a\pi}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k\dfrac{\cos kx}{a^2-k^2}$. **5.** $\dfrac{1}{\pi}+\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2kx}{4k^2-1}$.

6. $\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$. **7.** $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\dfrac{\cos(2k-1)x}{2k-1}$.

8. $\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$. **9.** $\dfrac{\pi^2}{16}-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left[\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}+\dfrac{(-1)^k\sin kx}{2k}\right]$.

10. $\dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k}$.

VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Глава 11. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называют уравнение относительно неизвестной функции и ее производных различных порядков. *Порядком дифференциального уравнения* называют порядок старшей производной, входящей в уравнение.

11.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка можно записать в одном из следующих видов:

$$F(x,\ y,\ y')=0,$$

где $F(x,\ y,\ y')$ – функция переменных $x,\ y,\ y'$;

$$y'=f(x,\ y),$$

где $f(x,\ y)$ – функция переменных x, y;

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0,$$

где $P(x,\ y)$, $Q(x,\ y)$ – функции переменных x, y.

Решением дифференциального уравнения в промежутке (a, b) называют дифференцируемую функцию $y=\varphi(x)$, обращающую это уравнение в тождество в данном промежутке. График решения называют *интегральной линией* (или *интегральной кривой*).

Задача Коши. Найти решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию: $y=y_0$ при $x=x_0$, где x_0, y_0 – заданные числа. Геометрически задача Коши означает следующее: найти интегральную линию, проходящую через точку $M_0(x_0,\ y_0)$. Если в уравнении $y'=f(x,\ y)$ функция $f(x,\ y)$ и ее частная производная $f'_y(x,\ y)$ непрерывны в некоторой области G плоскости Oxy, содержащей точку $M_0(x_0,\ y_0)$, то решение задачи Коши существует и является единственным. В этом случае через точку $M_0(x_0,\ y_0)$ проходит единственная интегральная линия.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называют функцию $y=\varphi(x,\ C)$, обладающую следующими свойствами: 1) при любых значениях произвольной постоянной C она обращает уравнение в тождество; 2) значение произвольной постоянной C можно определить так, чтобы она удовлетворяла условию задачи Коши.

Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x,\ y,\ C)=0$, называют *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Частным решением называют решение, полученное из общего при фиксированном значении C_0: $y=\varphi(x,\ C_0)$.

Частным интегралом называют решение, полученное из общего интеграла при фиксированном значении C_0: $\Phi(x,\ y,\ C_0)=0$.

Решение дифференциального уравнения, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши, называют *особым*.

Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называют уравнение, которое можно привести к виду

$$f(x)\varphi(y)dx+f_1(x)\varphi_1(y)dy=0,$$

где $f(x)$ и $f_1(x)$ – функции только от x, $\varphi(y)$ и $\varphi_1(y)$ – функции только от y.

Разделив уравнение на $f_1(x)\varphi(y)\neq 0$, получим уравнение

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}dx+\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy=0.$$

Это уравнение называют *уравнением с разделенными переменными*: при dx находится функция только от x, при dy – функция только от y. Взяв неопределенные интегралы от обеих частей уравнения, получим общий интеграл данного уравнения

$$\int\frac{f(x)}{f_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_1(y)}{\varphi(y)}dy=C.$$

Однородные дифференциальные уравнения

Функцию $F(x,\ y)$ называют *однородной измерения n*, если при любом t выполняется тождество $F(tx,\ ty)=t^nF(x,\ y)$.

Дифференциальное уравнение $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$ называют *однородным*, если $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ – однородные функции одного и того же измерения. Однородное уравнение с помощью новой переменной $u=\dfrac{y}{x}$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными x и u.

$$[P(1,\ u)+uQ(1,\ u)]dx+xQ(1,\ u)du=0.$$

Из этого уравнения определяется u, а из формулы $u=\dfrac{y}{x}$ – искомая функция $y=y(x)$.

Если $\Phi(x,\ u,\ c)=0$ – общий интеграл полученного уравнения, то $\Phi\left(x,\ \frac{y}{x},\ c\right)=0$ – общий интеграл исходного уравнения.

Линейные дифференциальные уравнения

Линейным дифференциальным уравнением называют уравнение

$$a(x)y'+b(x)y=c(x),$$

где $y=y(x)$ – искомая функция, $a(x),\ b(x),\ c(x)$ – заданные функции. Считают, что эти функции непрерывны на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ и $a(x)\neq 0$. Поскольку $a(x)\neq 0$ при любом $x\in[\alpha,\ \beta]$, то данное уравнение, после деления на $a\ (x)$, можно привести к виду

$$y'+p(x)y=f(x).$$

Решение этого уравнения ищут в виде $y=u(x)v(x)$. Так как $y'=u'v+uv'$, то уравнение принимает вид

$$u'v+u[v'+p(x)v]=f(x).$$

В качестве $v=v(x)$ выбирают ненулевую функцию, удовлетворяющую уравнению $v'+p(x)v=0$, тогда $u'v=f(x)$. Два последних уравнения являются уравнениями с разделяющимися переменными.

Определив $u=u(x)$ и $v=v(x)$, получают решение линейного уравнения $(y=u(x)v(x))$.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называют уравнение

$$y'+p(x)y=q(x)y^{\alpha},$$

где α – действительное число. Это уравнение является линейным в случае $\alpha=0, \alpha=1$. Во всех других случаях оно сводится к линейному подстановкой $u=y^{1-\alpha}$.

Уравнения в полных дифференциалах

Уравнением в полных дифференциалах называют уравнение

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0,$$

левая часть которого является полным дифференциалом некоторой функции:

$$P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=dU(x,\ y).$$

Общий интеграл этого уравнения определяется формулой $U(x,\ y)=C$.

Поскольку $dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,\ y),\ \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,\ y).$$

С помощью этих уравнений определяется функция $U(x,\ y)$.

Необходимое и достаточное условие того, что уравнение $P(x,\ y)dx + Q(x,\ y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, выражается равенством

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Примеры

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$\left(1+x^2\right)dy - 2xydx = 0.$$

Найти интегральную линию, проходящую через точку $M(0,\ 1)$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим уравнение на $y\left(1+x^2\right) \neq 0$, получим уравнение с разделенными переменными и проинтегрируем его:

$$\frac{dy}{y} - \frac{2xdx}{1+x^2} = 0 \quad \ln y - \ln\left(1+x^2\right) = \ln C.$$

(произвольная постоянная записана в логарифмическом виде).

Следовательно, получено общее решение $y = C\left(1+x^2\right)$. Найдем частное решение, удовлетворяющее условию: $y=1$ при $x=0$. Подставив эти значения в формулу $y = C\left(1+x^2\right)$, определим *C:* $1 = C(1+0)$, C = 1. Искомое частное решение определяется формулой $y = 1+x^2$. Интегральная линия проходит через точку $M(0,\ 1)$.

2. Найти общий интеграл уравнения $y' = -\frac{y}{x}$ $(x \neq 0)$.

Разделяем переменные и находим неопределенные интегралы:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0,\ \ln|y| + \ln|x| = \ln|C|,\ (C \neq 0),$$

откуда $xy = C$ – общий интеграл. Интегральные линии – гиперболы.

З а м е ч а н и е. Разделяя переменные, предполагаем, что $y \neq 0$, при этом можем потерять решение $y=0$. Действительно, $y=0$ – решение, в чем можно убедиться непосредственно. $0=-\frac{0}{x}$ $(x\neq 0)$. Это решение можно получить из общего интеграла при $C = 0$. Следовательно, $xy-C=0$ – общий интеграл, где C может принимать любые действительные значения.

3. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'=\frac{4-x}{3+y}$. Найти решение, удовлетворяющее условию: $y=1$ при $x=1$.

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4-x}{3+y}, \text{ или } -(4-x)dx+(3+y)dy=0,\ (x-4)dx+(y+3)dy=0.$$

Из последнего уравнения получаем общий интеграл

$$\frac{(x-4)^2}{2}+\frac{(y+3)^2}{2}=C_1, \text{ или } (x-4)^2+(y+3)^2=C^2\quad \left(C^2=2C_1\right).$$

Интегральные линии – концентрические окружности с центром в точке $S(4,\,-3)$.

Найдем решение, удовлетворяющее указанному условию. Подставим в равенство $(x-4)^2+(y+3)^2=C^2$ значения $x = 1$ и $y = 1$, определим C: $(1-4)^2+(3+1)^2=C^2$, $C^2=25$.

Итак, искомый частный интеграл имеет вид $(x-4)^2+(y+3)^2=25$; он определяет окружность, проходящую через точку $M(1,\,1)$.

4. Проинтегрировать уравнение $dr-rd\varphi=0$.

В этом уравнении искомая функция обозначена буквой r, а ее аргумент – буквой φ. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dr}{r}=d\varphi,\ \ln r=\varphi+C_1,$$

откуда $r=e^{\varphi+C_1}=Ce^{\varphi}$, где $C=e^{C_1}$.

Следовательно, общее решение данного уравнения определяется формулой $r=Ce^{\varphi}$.

5. Проинтегрировать однородное дифференциальное уравнение

$$xdy-\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx=0.$$

Коэффициенты при dx и dy соответственно равны: $Q(x,\,y)=x$, $P(x,\,y)=-\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)$. Функции $P(x,\,y)$ и $Q(x,\,y)$ – однородные первого измерения. Действительно, $P(tx,\,ty)=-\left(ty+\sqrt{(tx)^2+(ty)^2}\right)=$ $=tP(x,\,y)$.

Вводим новую переменную u по формуле $u=\dfrac{y}{x}$, тогда $y=ux$, $dy=udx+xdu$. С учетом этих формул данное уравнение принимает вид $x(udx+xdu)-\left(ux+\sqrt{x^2+(ux)^2}\right)dx=0$. Раскрывая скобки, приводя подобные члены и сокращая на x, получаем уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du}{\sqrt{1+u^2}},\ \ln|x|=\ln\left|u+\sqrt{1+u^2}\right|+\ln|C|.$$

Отсюда находим общий интеграл $x=C\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$ полученного уравнения. Подставим сюда $u=\dfrac{y}{x}$ и преобразуем полученную формулу:

$$x=C\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)^2+1}\right),\ \frac{x}{C}=\left(\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}}\right),\ \frac{x}{C}-\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2}},$$

$$\frac{x^2}{C^2}-2\frac{y}{C}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{x^2+y^2}{x^2},\ \frac{x^2}{C^2}-2\frac{y}{C}=1.$$

Итак, полученный общий интеграл $x^2-2Cy=C^2$ геометрически представляет семейство парабол с вершинами на оси Oy.

6. Найти общий интеграл однородного дифференциального уравнения $\left(x^2-y^2\right)dy-2xydx=0$.

Функции $P(x,\ y)=-2xy$, $Q(x,\ y)=x^2-y^2$ являются однородными второго измерения: $Q(tx,\ ty)=(tx)^2-(ty)^2=t^2\left(x^2-y^2\right)=t^2Q(x,\ y)$, $P(tx,\ ty)=-2(tx)(ty)=t^2(-2xy)=t^2P(x,\ y)$.

Используя формулы $y=ux$, $dy=udx+xdu$, преобразуем уравнение к виду $\left(1-u^2\right)(xdu+udx)-2udx=0$, или $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{\left(1-u^2\right)du}{u\left(1+u^2\right)}$ $(u\neq 0)$.

Поскольку $\dfrac{1-u^2}{u\left(1+u^2\right)}=\dfrac{1}{u}-\dfrac{2u}{1+u^2}$, то $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{u}-\dfrac{2u}{1+u^2}\right)du$.

Интегрируя это уравнение, получаем $\ln|x|=\ln|u|-\ln\left(1+u^2\right)+\ln|C|$.

Общий интеграл выражается формулой $x=\dfrac{Cu}{1+u^2}$, $x^2+y^2-Cy=0$, геометрически он означает множество окружностей с центрами на оси Oy.

З а м е ч а н и е. При $u=0$ получим решение $y=0$. Это решение частное: $C_1\left(x^2+y^2\right)=y$, где $C_1=\dfrac{1}{C}$. При $C_1=0$ получим $y=0$.

7. Проинтегрировать однородное уравнение

$$\left(y^4-2x^3y\right)dx+\left(x^4-2xy^3\right)dy=0 .$$

Функции $P(x,\ y)=y^4-2x^3y$ и $Q(x,\ y)=x^4-2xy^3$ являются однородными функциями четвертого измерения (убедитесь в этом самостоятельно).

С помощью формул $y=ux,\quad dy=xdu+udx$ преобразуем уравнение к виду $\left(u^4+u\right)dx-\left(1-2u^3\right)xdu=0$, или

$$\frac{dx}{x}=\frac{1-2u^3}{u+u^4}du\ ,\ \frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{u}-\frac{3u^2}{1+u^3}\right)du.$$

Интегрируя это уравнение, получаем: $\ln|x|=\ln|u|-\ln\left|1+u^3\right|+\ln|C|$, откуда находим общий интеграл $x^3+y^3-Cxy=0$, который можно записать так: $x^3+y^3-3axy=0$, где $3a=C$.

Интегральные линии – декартовы листы.

8. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $y'+y=x+2$.

Решение ищем в виде произведения $y=uv$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – пока неизвестные функции. Подставим выражения для y и $y'=u'v+uv'$ в данное уравнение: $u'v+uv'+uv=x+2$, запишем его в таком виде $u'v+u(v'+v)=x+2$. В качестве $v=v(x)$ выберем одну из ненулевых функций такую, что $v'+v=0$. Интегрируем полученное уравнение: $\dfrac{dv}{dx}+v=0$, $\dfrac{dv}{v}=-dx$, $\ln v=-x$, $v=e^{-x}$. Когда $v'+v=0$, то уравнение $u'v+u(v'+v)=x+2$ принимает вид $u'v=x+2$, $u'e^{-x}=x+2$, $du=e^x(x+2)dx$.

Интегрируя полученное уравнение, находим:

$$u=\int e^x(x+2)dx=\int xe^xdx+2\int e^xdx=\int xd\left(e^x\right)+2\int e^xdx=$$
$$=xe^x-\int e^xdx+2e^x+C=xe^x+e^x+C,\ u(x)=xe^x+e^x+C.$$

Следовательно, общее решение определяется формулой

$$y(x)=u(x)v(x),\ y=\left(xe^x+e^x+C\right)e^{-x},\ y=Ce^{-x}+x+1.$$

9. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения $xy'-y=x^3$.

Положим $y=uv$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – неизвестные пока функции. Так как $y=uv$, $y'=u'v+uv'$, то уравнение принимает вид $xu'v+u(xv'-v)=x^3$. В качестве $v=v(x)$ выберем одну из ненулевых функций, при которой выражение в скобках рано нулю: $xv'-v=0$. Интегрируем это уравнение:

$$x\frac{dv}{dx}-v=0,\ \frac{dv}{v}=\frac{dx}{x},\ \ln v=\ln x,\ v=x.$$

Уравнение $xu'v+u(xv'-v)=x^3$ при $v=x$ принимает вид

$$u'x^2=x^3,\ u'=x,\ \frac{du}{dx}=x,\ du=xdx,\ u=\frac{x^2}{2}+C.$$

Следовательно, общее решение определяется формулой $y=\left(\frac{x^2}{2}+C\right)x.$

10. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'+y\frac{1}{x}=x^2y^2.$$

Это уравнение Бернулли, для которого $\alpha=2$. Вводим новую переменную z по формуле $z=y^{1-\alpha}$, $z=y^{1-\alpha}=y^{-1}$, $z=\frac{1}{y}$. Так как $z'=-\frac{1}{y^2}\cdot y'$, $y'=-z'y^2$, то уравнение принимает вид $-z'y^2+\frac{y}{x}=x^2y^2$, или $-z'+\frac{1}{yx}=x^2$, $-z'+z\frac{1}{x}=x^2$, $z'-z\frac{1}{x}=-x^2$. Полученное уравнение является линейным. Его решение ищем в виде $z=uv$, где $u=u(x)$, $v=v(x)$ – пока неизвестные функции. Поскольку $z=uv$, $z'=u'v+uv'$, то получаем уравнение $u'v+uv'-uv\frac{1}{x}=-x^2$, $u'v+u\left(v'-v\frac{1}{x}\right)=-x^2$ (I). В качестве $v=v(x)$ выберем ненулевую функцию $v=v(x)$, при которой выражение в скобках рано нулю: $v'-v\frac{1}{x}=0$, откуда $\frac{dv}{dx}=v\frac{1}{x}$, $\frac{dv}{v}=\frac{dx}{x}$, $\ln v=\ln x$, $v=x$. Уравнение (I) при $v=x$ принимает вид $u'x=-x^2$, $u'=-x$, $du=-xdx$, $u=-\frac{x^2}{2}+C$.

Следовательно, $z=\left(C-\frac{x^2}{2}\right)x.$ Тогда общее решение –

$$y=\frac{1}{x\left(C-\frac{x^2}{2}\right)}.$$

11. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x+7y)dx+(7x-2y)dy=0.$$

В данном случае $P(x,y)=2x+7y$, $Q(x,y)=7x-2y$. Поскольку $P'_y=7$, $Q'_x=7$, то $P'_y=Q'_x$; значит, выполнено условие, при котором дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах: левая часть уравнения – полный дифференциал некоторой функции

$$(2x+7y)dx+(7x-2y)dy=du.$$

Так как по определению полного дифференциала

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$

то из двух последних равенств следует, что

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x+7y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=7x-2y \qquad \text{(I)}$$

Интегрируем первое из этих уравнений (при этом y считаем постоянным): $u(x,\ y)=\int(2x+7y)dx=x^2+7xy+\varphi(y)$,

$$u(x,\ y)=x^2+7xy+\varphi(y) \qquad \text{(II)}$$

где $\varphi(y)$ – функция, которую нужно определить. Находим частную производную функции $u(x,\ y)$ по y: $\frac{\partial u}{\partial y}=7x+\varphi'(y)$. Из этого равенства и второго из равенств (I) получаем $7x+\varphi'(y)=7x-2y$, откуда $\varphi'(y)=-2y$, $d\varphi=-2ydy$, $\varphi(y)=-y^2+C_1$. Подставим найденную функцию в равенство (II), получим $u(x,y)=x^2+7xy-y^2=C_1$.

Поскольку левая часть исходного уравнения является полным дифференциалом некоторой функции, то уравнение принимает вид $d(u(x,\ y))=0$, откуда $u(x,\ y)=C_2$.

Так как функция $u(x,\ y)$ уже определена, то $x^2+7xy-y^2+C_1=C_2$. Следовательно, общий интеграл исходного дифференциального уравнения выражается формулой

$$x^2+7xy-y^2=C \quad (C=C_2-C_1).$$

12. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(2x+3y+5)dx+(3x-2y-6)dy=0.$$

Сравнивая это уравнение с общим уравнением первого порядка $P(x,\ y)dx+Q(x,\ y)dy=0$, заключаем, что

$$P(x,\ y)=2x+3y+5,\ Q(x,\ y)=3x-2y-6.$$

Поскольку $P'_y = 3$, $Q'_x = 3$, то $P'_y = Q'_x$; значит, уравнение является уравнением в полных дифференциалах, его можно записать так: $du(x,\ y) = 0$, откуда $u(x,\ y) = C_2$; получен общий интеграл данного дифференциального уравнения. Осталось найти функцию $u(x,\ y)$.

Так как $(2x+3y+5)dx+(3x-2y-6)dy = du$, а по определению $\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy = du$, то из этих двух равенств следуют уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x+3y+5\,,\ \frac{\partial u}{\partial y} = 3x-2y-6\,. \qquad \text{(I)}$$

Интегрируем первое уравнение, считая y постоянным:

$$u(x,\ y) = \int(2x+3y+5)dx = x^2+3xy+5x+\varphi(y)\,,$$

где $\varphi(y)$ – функция, которую нужно определить;

$$u(x,\ y) = x^2+3xy+5x+\varphi(y) \qquad \text{(II)}$$

Находим частную производную по y от этой функции и сравниваем со вторым уравнением (I):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x+\varphi'(y),\ 3x+\varphi'(y) = 3x-2y-6, \text{ откуда}$$

$$\varphi'(y) = -2y-6,\ \varphi(y) = -y^2-6y+C_1.$$

Подставляя выражение для $\varphi(y)$ в формулу (II), находим общий интеграл

$$x^2+3xy+5x-y^2-6y = C \quad (C = C_2-C_1)$$

данного дифференциального уравнения.

Задачи

Найдите общее решение уравнения с разделяющимися переменными

1. $(x+3)dy-(y+3)dx = 0$. **2.** $y' = y^{\frac{2}{3}}$. **3.** $y\sin\dfrac{x}{2}dx-\cos\dfrac{x}{2}dy = 0$.

Найдите общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными

4. $y' = \dfrac{\left(xy^2+x\right)}{\left(x^2y-y\right)}$. **5.** $(y-2)dx+(x-2)dy = 0$.

6. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(y+x^2y\right)dy = 0$.

Проинтегрируйте дифференциальное уравнение, найдите частное решение и постройте его график

7. $y' = 4x^3$, $y = 0$ при $x = 0$. **8.** $\left(x^2+4\right)y'-2xy = 0$, $y = 5$ при $x = 1$.

9. $y' = y$, $y = 1$ при $x = 0$.

Проинтегрируйте однородное дифференциальное уравнение

10. $\left(x^2+y^2\right)dy - 2xydx = 0$. **11.** $xdy + (x+2y)dx = 0$.

12. $(y-2x)dx + (x+2y)dy = 0$.

Найдите частное решение однородного уравнения, удовлетворяющее указанному условию

13. $2xydy - \left(y^2-4x^2\right)dx = 0$, $y(2) = 1$. **14.** $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx - xdy = 0$, $y(1) = 0$. **15.** $(x+y-2)dx + (x-y+4)dy = 0$, $y(1) = 1$.

Проинтегрируйте линейное дифференциальное уравнение

16. $y' + y = kx$. **17.** $y' - 4y = e^{2x}$. **18.** $y' - \dfrac{2xy}{x^2+1} = x^2+1$.

Проинтегрируйте линейное уравнение, найти частное решение, удовлетворяющее указанному условию

19. $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = x\,\mathrm{tg}\,x + 1$, $y(0) = 1$. **20.** $y'\sin x - y\cos x = 1$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 5$.

Проинтегрируйте уравнение Бернулли

21. $y' - 2xy = 2x^3y^2$. **22.** $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$. **23.** $2y' + y = \dfrac{x}{y}$.

Проинтегрируйте уравнение в полных дифференциалах

24. $(2y+3x)dy + (3y-2x)dx = 0$.

25. $(2x+5y-6)dx + (5x-2y-8)dy = 0$.

Ответы

1. $y = C(x+3) - 3$. **2.** $y = \dfrac{(x+C)^3}{27}$. **3.** $y = \dfrac{C}{(1+\cos x)}$.

4. $1+y^2 = C\left(1-x^2\right)$. **5.** $(x-2)(y-2) = C$. **6.** $\left(1-x^2\right)\left(1+y^2\right) = C$.

7. $y = x^4 + C$; $y = x^4$. **8.** $y = C\left(x^2+4\right)$; $y = x^2+4$. **9.** $y = Ce^x$; $y = e^x$.

10. $y(x-y) = Cx^2(x+y)$. **11.** $y = Cx^{-2} - \dfrac{x}{3}$. **12.** $xy - x^2 + y^2 = C$.

13. $y^2 + 4x^2 - 8x = 0$. **14.** $y = \dfrac{Cx^2}{2} - \dfrac{1}{2C}$ $(C > 0)$; $y = \dfrac{x^2-1}{2}$.

15. $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y = C$; $x^2 - y^2 + 2xy - 4x + 8y - 6 = 0$.

16. $y = Ce^{-x} + k(x-1)$. **17.** $y = Ce^{4x} - \dfrac{e^{2x}}{2}$. **18.** $y = (x+C)\left(x^2+1\right)$.

19. $y = C\cos x + x$; $y = \cos x + x$. **20.** $y = C\sin x - \cos x$; $y = 5\sin x - \cos x$.

21. $y\left(Ce^{-x^2} + 1 - x^2\right) = 1$. **22.** $y\left(x^2 + Cx\right) = 1$. **23.** $y = \sqrt{x - 1 + Ce^{-x}}$.

24. $y^2 + 3xy - x^2 = C$. **25.** $x^2 + 5xy - y^2 - 6x - 8y = C$.

11.2. Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальным уравнением второго порядка называют уравнение относительно неизвестной функции, ее первой и второй производной.

Основные понятия

Дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x,\ y,\ y',\ y'')=0, \tag{1}$$

где $F(x,\ y,\ y',\ y'')$ – функция своих аргументов, x – независимая переменная, $y=y(x)$ – искомая функция, $y',\ y''$ – ее производные.

Если равенство (1) разрешимо относительно y'', то уравнение принимает вид

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \tag{2}$$

Решением дифференциального уравнения второго порядка называют любую функцию, обращающую данное уравнение в тождество.

Задача Коши. Найти решение $y=y(x)$ дифференциального уравнения, которое удовлетворяет условиям:

$$y=y_0,\ y'=y_0' \text{ при } x=x_0, \text{ или } y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',$$

где $x_0,\ y_0,\ y_0'$ – заданные числа.

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка называют функцию $y=\varphi(x,\ C_1,\ C_2)$, обладающую следующими свойствами: 1) при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 функция обращает уравнение в тождество; 2) постоянные C_1 и C_2 можно определить так, чтобы выполнялись условия: $y=y_0$, $y'=y_0'$ при $x=x_0$, где $x_0,\ y_0,\ y_0'$ – любые числа из области задания уравнения (т.е. можно решить задачу Коши).

Общим интегралом дифференциального уравнения второго порядка называют его общее решение, заданное в неявном виде

$$\Phi(x,\ y,\ C_1,\ C_2)=0.$$

Частным решением называют решение, полученное из общего путем фиксирования значений произвольных постоянных: $y=\varphi\left(x,\ C_1^0,\ C_2^0\right)$, где $C_1^0,\ C_2^0$ – некоторые числа.

Частным интегралом называют решение, полученное из общего интеграла фиксированием произвольных постоянных: $\Phi\left(x,\ y,\ C_1^0,\ C_2^0\right)=0$, где $C_1^0,\ C_2^0$ – числа.

Если известно общее решение $y=(x,\ C_1,\ C_2)$, то решение задачи Коши сводится к определению $C_1^0,\ C_2^0$ из системы уравнений $y_0=\varphi(x_0,\ C_1,\ C_2)$, $y_0'=\varphi_x'(x_0,\ C_1,\ C_2)$.

Простейшие дифференциальные уравнения второго порядка. Случай понижения порядка

Простейшими дифференциальными уравнениями второго порядка $y''=f(x,\ y,\ y')$ являются уравнения, в которых функция зависит только от одного из аргументов:

$$y''=(x),\ y''=f(y'),\ y''=f(y).$$

Общее решение первого уравнения находится с помощью двукратного интегрирования. При интегрировании второго и третьего уравнения пользуются подстановкой $y'=p$.

С помощью этой подстановки уравнения

$$y''=f(y,\ y'),\ y''=f(x,\ y')$$

приводятся к уравнениям первого порядка.

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнение имеет вид $y''+py'+qy=0$, где p, q – числа. Алгебраическое уравнение $k^2+pk+q=0$ называют *характеристическим* уравнением для данного дифференциального уравнения. Корни характеристического уравнения вычисляются по формуле $k_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$.

В зависимости от этих корней определяется общее решение дифференциального уравнения.

Если корни действительные и разные $(k_1\neq k_2)$, то общее решение дифференциального уравнения выражается формулой

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

В случае равных корней $(k_1=k_2)$ общее решение имеет вид

$$y=(C_1+C_2x)e^{-\frac{px}{2}}.$$

Когда корни комплексно-сопряженные: $k_1=\alpha-i\beta$, $k_2=\alpha+i\beta$, то общее решение дифференциального уравнения определяется формулой:

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

Если корни чисто мнимые $(k_1 = -i\beta, k_2 = i\beta)$, то

$$y = C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x.$$

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Это уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x)$, где p, q – числа, $f(x)$ – заданная функция. Общее решение такого уравнения определяется формулой

$$y = \bar{y} + Y, \text{ или } y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + Y(x),$$

где $\bar{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$, а $Y = Y(x)$ – частное решение данного неоднородного уравнения. Это частное решение в простейших случаях $f(x)$ – полином алгебраический или тригонометрический находится способом неопределенных коэффициентов.

Примеры

1. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' = 2x$.

Это уравнение вида $y'' = f(x)$. Так как $y'' = (y')'$, $\frac{dy'}{dx}$, то $dy' = 2xdx$, откуда $y' = \int 2xdx = x^2 + C_1$. Поскольку $y' = \frac{dy}{dx}$, то $dy = \left(x^2 + C_1\right)dx$, откуда $y = \int\left(x^2 + C_1\right)dx = \int x^2 dx + C_1\int dx = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$.

Следовательно, общее решение данного уравнения выражается формулой $y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$.

2. Найти общее решение уравнения $y'' = 2y'$.

Первая часть уравнения зависит только от y'. Это уравнение вида $y'' = f(y')$. Полагая $y' = p$, находим:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx},\ \frac{dp}{dx} = 2y' = 2p,\ \frac{dp}{p} = 2dx,\ \ln p = 2x + \ln C';$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \quad \left(\frac{C'}{2} = C_1\right).$$

Итак, общее решение имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2$.

3. Проинтегрировать уравнение $xy'' - y' = 0$.

Это уравнение вида $y'' = f(x, y')$. Полагая $y' = p$, $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx}$,

находим общее решение уравнения $x\dfrac{dp}{dx}-p=0$: $\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dp}{p}$, $\ln|p|=$
$=\ln|x|+\ln\left|C_1'\right|$, $p=C_1'x$, $\dfrac{dy}{dx}=C_1'x$, $dy=C_1'xdx$, $y=\dfrac{C_1'}{2}x^2+C_2$,
$y=C_1x^2+C_2$ $\left(C_1=\dfrac{C'}{2}\right)$.

Следовательно, общее решение выражается формулой
$y=C_1x^2+C_2$.

4. Проинтегрировать уравнение $yy''-y'^2=0$.

Это уравнение вида $y''=f(y,\ y')$ (функция не зависит от x).

Применяя подстановку $y'=p$, получаем уравнение $yp\dfrac{dp}{dy}-p^2=0$ (так как $y''=\dfrac{dy'}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dp}{dy}y'=p\dfrac{dp}{dy}$). Интегрируем уравнение: $\dfrac{dp}{p}-\dfrac{dy}{y}=0$, $\ln|p|=\ln|y|+\ln|C_1|$, $p=C_1y$, $\dfrac{dy}{dx}=C_1y$, $\dfrac{dy}{y}=C_1dx$, $\ln|y|=C_1x+\ln|C_2|$, $y=C_2e^{C_1x}$.

5. Проинтегрировать уравнение $y''+3y'-4y=0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условиям: $y=1$, $y'=1$ при $x=0$.

Характеристическое уравнение $k^2+3k-4=0$ для данного дифференциального уравнения имеет корни: $k_1=1$, $k_2=-4$, поэтому общее решение определяется формулой $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}$. Чтобы найти указанное частное решение, необходимо определить значения постоянных C_1 и C_2. Подставляя значения $x=0$, $y=1$, $y'=1$ в выражения для y и $y'=C_1e^x-4C_2e^{-4x}$, получаем систему уравнений:

$$1=C_1+C_2,\ 1=C_1-4C_2,$$

откуда $C_1=1$, $C_2=0$.

Следовательно, $y=e^x$ – искомое частное решение.

6. Найти общее решение уравнения $4y''-4y'+y=0$.

Характеристическое уравнение $4k^2-4k+1=0$ имеет равные корни $k_1=k_2=\dfrac{1}{2}$, поэтому общее решение дифференциального уравнения выражается формулой $y=(C_1+C_2x)e^{\frac{x}{2}}$.

7. Найти общее решение уравнения $y''-8y'+25y=0$.

Характеристическое уравнение $k^2-8k+25=0$ имеет комплексные корни $k_1=4-3i$, $k_2=4+3i$, поэтому общее решение дифференциального уравнения определяется формулой $y=e^{4x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$.

8. Проинтегрировать уравнение $y'' + 9y = 0$.

Характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$ имеет чисто мнимые корни $k_1 = -3i$, $k_2 = 3i$.

Общее решение дифференциального уравнения выражается формулой $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$.

9. Проинтегрируйте уравнение $y'' + y' - 2y = 4x^2 - 8x + 2$.

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 + k - 2 = 0$ имеет корни $k_1 = -2$, $k_2 = 1$, поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид $\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$. Частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $Y(x) = Ax^2 + Bx + C$, где A, B, C – пока неизвестные коэффициенты. Подставляя выражения для $Y(x)$, $Y'(x) = 2Ax + B$, $Y''(x) = 2A$ в исходное уравнение, получаем тождество

$$2A + (2Ax + B) - 2\left(Ax^2 + Bx + C\right) \equiv 4x^2 - 8x + 2 \text{ или}$$
$$-2Ax^2 + (2A - 2B)x + (2A + B - 2C) \equiv 4x^2 - 8x + 2.$$

Прировняв коэффициенты при одинаковых степенях x, запишем систему уравнений

$$-2A = 4,\ 2A - 2B = -8,\ 2A + B - 2C = 2,$$

из которой находим значения коэффициентов: $A = -2$, $B = 2$, $C = -2$; значит частное решение имеет вид $Y(x) = -2x^2 + 2x - 2$.

Так как общее решение неоднородного уравнения выражается формулой $y = \bar{y} + Y$, то общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - 2x^2 + 2x - 2.$$

10. Проинтегрировать уравнение $y'' - y' = 5x^2 - 12x + 8$.

В этом уравнении $k_1 = 0$, поэтому частное решение ищем в виде $Y(x) = x\left(Ax^2 + Bx + C\right)$, или $Y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$. Поскольку $Y' = 3Ax^2 + 2Bx + C$, $Y'' = 6Ax + 2B$, то $6Ax + 2B - \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) \equiv 5x^2 - 12x + 8$, $-3Ax^2 + (6A - 2B)x + 2B - C \equiv 5x^2 - 12x + 8$; $-3A = 5$, $6A - 2B = -12$, $2B - C = 8$, $A = -\frac{5}{3}$, $B = 1$, $C = -6$, $Y(x) = -\frac{5}{3}x^3 + x^2 - 6x$.

Так как $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$, то общее решение выражается формулой $y = C_1 + C_2 e^x - \frac{5}{3}x^3 + x^2 - 6x$.

11. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 6y = 2e^{3x}.$$

Сначала найдем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + y' - 6y = 0$. Так как характеристическое уравнение $k^2 + k - 6 = 0$ имеет корни $k_1 = -3$, $k_2 = 2$, то $\overline{y} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $Y = Ae^{3x}$ (число $\alpha = 3$ не является корнем характеристического уравнения). Находя производные функции Y и подставляя их выражения в исходное уравнение, получаем:

$$9Ae^{3x} + 3Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 2e^{3x}, \; 6Ae^{3x} = 2e^{3x}.$$

Поскольку Y – решение уравнения, то последнее равенство должно выполняться для всех x, а это возможно, когда $A = \frac{1}{3}$. Следовательно $Y = \frac{1}{3}e^{3x}$.

Общее решение данного уравнения выражается формулой

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{3}e^{3x}.$$

12. Проинтегрировать уравнение $y'' - y' - 2y = 22\cos 5x - 32\sin 5x$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - y' - 2y = 0$ имеет вид $\overline{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$, так как $k_1 = -1$, $k_2 = 2$ – корни характеристического уравнения $k^2 - k - 2 = 0$. Частное решение неоднородного уравнения будем искать в форме $Y = A\cos 5x + B\sin 5x$. Находим производные этой функции: $Y' = -5A\sin 5x + 5B\cos 5x$, $Y'' = -25A\cos 5x - 25B\sin 5x$.

Подставим функцию и ее производные в левую часть уравнения:

$$-25A\cos 5x - 25B\sin 5x - (-5A\sin 5x + 5B\cos 5x) - 2(A\cos 5x + B\sin 5x),$$
$$(-27A - 5B)\cos 5x + (5A - 27B)\sin 5x \equiv 22\cos 5x - 32\sin 5x,$$

откуда $-27A - 5B = 22$, $5A - 27B = -32$; $A = -1$, $B = 1$.

Следовательно, $y_1 = -\cos 5x + \sin 5x$.

Общее решение исходного уравнения выражается формулой $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - \cos 5x + \sin 5x$.

Задачи

Проинтегрируйте дифференциальные уравнения

1. $y'' = 3x^2 - 4x + 1$. **2.** $y'' = x^2 - \cos x$. **3.** $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$. **4.** $y'' - 3y' = 18x^2 - 2$. **5.** $y'' + 3y' = 9x^2 + 3x + 5$. **6.** $y'' = 3y'$. **7.** $yy'' = y'^2$.

8. $y''=\frac{1}{a}\left(\sqrt{1+y'^2}\right)^3$. **9.** $y''=\frac{6}{y^3}$. **10.** $y''=-\frac{1}{x^2}$. **11.** $xy''-y'=0$.
12. $yy''+y'^2+1=0$. **13.** $y''+y'-2y=0$. **14.** $y''-2y'+y=0$.
15. $y''-6y'+13y=0$. **16.** $y''+16y=0$. **17.** $y''+2y'+2y=6x^2+14x+6$.
18. $y''-6y'+5y=27e^{2x}$. **19.** $y''-6y'+8y=14e^{2x}$.
20. $y''-4y'+3y=20\cos 2x+35\sin 2x$. **21.** $y''+5y'+6y=-50\sin 4x$.
22. $y''-2y'+2y=-85\cos 3x$.

Ответы

1. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C_1x+C_2$. **2.** $y=\frac{x^4}{12}+\cos x+C_1x+C_2$.
3. $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+x^2-5x-2$. **4.** $y=C_1+C_2e^{3x}-2x^3-2x^2-\frac{2}{3}x$.
5. $y=C_1+C_2e^{-3x}+x^3-\frac{1}{2}x^2+2x$. **6.** $y=C_1e^{3x}+C_2$. **7.** $y=C_2e^{C_1x}$.
8. $(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2$. **9.** $C_1y^2-6=(C_1x+C_2)^2$.
10. $y=\ln x+C_1x+C_2$. **11.** $y=C_1x^2+C_2$. **12.** $(C_1-x)^2=y^2+C_2$.
13. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$. **14.** $y=(C_1x+C_2)e^x$.
15. $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **16.** $y=C_1\cos 4x+C_2\sin 4x$.
17. $y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+3x^2+x-1$. **18.** $y=C_1e^x+C_2e^{5x}-9e^{2x}$.
19. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{4x}-7xe^{2x}$. **20.** $y=C_1e^x+C_2e^{3x}+4\cos 2x-3\sin 2x$.
21. $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+\sin 4x+2\cos 4x$.
22. $y=(C_1\cos x+C_2\sin x)e^x+7\cos 3x+6\sin 3x$.

VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 12. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

12.1. Понятие функции нескольких переменных

Упорядоченную систему n действительных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ называют *точкой*. Множество всех точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ образует *n-мерное арифметическое пространство*. Если расстояние между точками $M'(x_1', x_2', ..., x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', ..., x_n'')$ определить формулой

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x_1'' - x_1')^2 + (x_2'' - x_2')^2 + ... + (x_n'' - x_n')^2} ,$$

то множество точек $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ называют *n-мерным евклидовым пространством* и обозначают R^n.

Функцию, заданную на некотором множестве $G \subset R^n$, называют *функцией n переменных* и обозначают $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, ..., x_n) \in G$. Множество G называют *областью определения функции* $u = f(M)$; множество всех значений функции – *областью значений функции*.

В частном случае при $n = 2$ имеем $u = f(x_1, x_2)$; обозначим $u = z$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, тогда $z = f(x, y)$ – функция двух переменных; областью ее определения является некоторое множество точек плоскости Oxy, а графиком – некоторая поверхность в пространстве.

При $n = 3$ получаем функцию трех переменных $u = f(x_1, x_2, x_3)$, или $u = f(x, y, z)$, если ввести соответствующие обозначения.

12.2. Частные производные. Полный дифференциал

Полным приращением функции нескольких переменных называют разность между двумя ее значениями, когда приращения получают все аргументы. *Частным приращением* называют разность между двумя значениями функции, когда приращение получает только один аргумент.

Для функции двух переменных $z = f(x, y)$ полное и частное приращения в точке $M_0(x_0, y_0)$ соответственно определяются формулами:

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0),$$
$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x,\ \Delta x) - f(x_0,\ y_0),$$
$$\Delta_y z = f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0).$$

Число A называют *пределом функции* $u = f(M)$ при $M \to M_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что при условии

$$0 < \rho(M,\ M_0) < \delta$$

выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Функцию $u = f(M)$ называют *непрерывной* в точке M_0, если выполняется равенство $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

Необходимое и достаточное условие непрерывности функции $u = f(M)$ в точке M_0 выражается равенством

$$\lim_{\Delta\rho \to 0} \Delta u = 0, \text{ или } \lim_{\Delta\rho \to 0} \left(f(M) - f(M_0)\right) = 0,$$

где $\Delta\rho = \rho(M_0,\ M)$, $\Delta u = f(M) - f(M_0)$.

Частной производной функции нескольких переменных по одной из них в фиксированной точке называют предел отношения соответствующего частного приращения этой функции к приращению данной переменной, когда последнее стремится к нулю.

Для функции $z = f(x, y)$ частные производные в точке $M_0(x_0, y_0)$ по x и по y соответственно определяются формулами

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x,\ y_0) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta x} \text{ (частная производная по } x\text{)},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{M_0} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0)}{\Delta y} \text{ (частная производная по } y\text{)}.$$

Употребляются и другие обозначения: $z'_x(x_0, y_0)$, $f'_x(x_0, y_0)$, $z'_y(x_0, y_0)$, $f'_y(x_0, y_0)$.

Частная производная функции $z = f(x, y)$ по переменной x выражает скорость изменения функции в данном направлении $(y = y_0)$ или скорость изменения функции $f(x, y)$ одной переменной.

Частные производные функции $z = f(x, y)$ имеют следующую геометрическую интерпретацию:

$$f'_x(x_0,\ y_0) = \operatorname{tg}\alpha,\ f'_y(x_0,\ y_0) = \operatorname{tg}\beta,$$

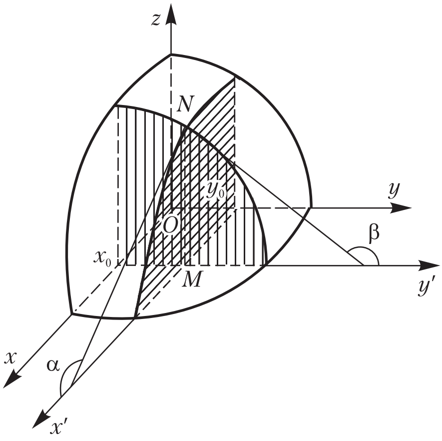

Рис. 12.1

где α – угол между осью Ox и касательной в точке $N(x_0,\ y_0,\ f(x_0,\ y_0))$ к линии пересечения поверхности $z = f(x,\ y)$ и плоскости $y = y_0$,

β – угол между осью Oy и касательной в той же точке к линии пересечения данной поверхности с плоскостью $x = x_0$ (рис. 12.1).

При нахождении частных производных пользуются обычными правилами дифференцирования (при нахождении частной производной по одному аргументу, другой считается постоянным).

Если полное приращение функции $z = f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$ представлено в виде $\Delta z = P\Delta x + Q\Delta y + \varepsilon\Delta\rho$, P и Q постоянные, $\Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ и $\varepsilon \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$, то $P\Delta x + Q\Delta y$ называют *полным дифференциалом* данной функции в этой точке и обозначают через dz: $dz = P\Delta x + Q\Delta y$.

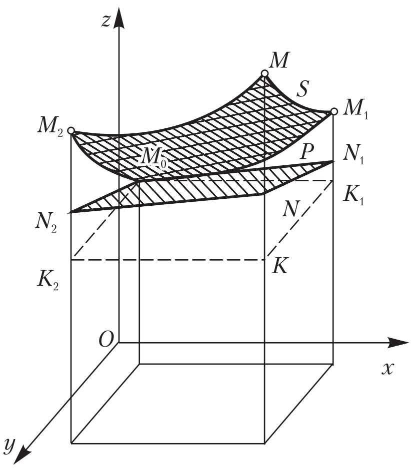

Рис. 12.2

Следовательно, $\Delta z = dz + \varepsilon\Delta\rho$, $\varepsilon \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$.

Полный дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты z касательной плоскости в точке $M_0\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ к поверхности, являющейся графиком этой функции, когда аргументы x и y получают приращения Δx и Δy (рис. 12.2, $\Delta z = KM$, $dz = KN$).

Функция, обладающая непрерывными частными производными, имеет полный дифференциал, причем

$$dz = f_x{}'(x_0,\ y_0)\Delta x + f_y{}'(x_0,\ y_0)\Delta y\ .$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями: $dx = \Delta x,\ dy = \Delta y$.

Полный дифференциал функции $z = f(x,\ y)$ является функцией x и y при фиксированных dx и dy:

$$dz = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \text{ или } dz = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy\,.$$

Функцию, имеющую полный дифференциал, называют дифференцируемой. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в ней.

Из формулы $\Delta z = dz + \varepsilon\Delta\rho,\ \varepsilon \to 0$ при $\Delta\rho \to 0$ следует, что $\Delta z \approx dz$ или

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - f(x_0,\ y_0) \approx f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y\,,$$

откуда

$$f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) \approx f(x_0,\ y_0) + f'_x(x_0,\ y_0)\Delta x + f'_y(x_0,\ y_0)\Delta y\,.$$

Если все частные производные функции $u = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ непрерывны, то полный дифференциал выражается формулой

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_n}dx_n\,.$$

Каждое слагаемое правой части называют частным дифференциалом.

Для функции $u = f(x,\ y,\ z)$ трех переменных

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\,.$$

12.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных называют также частными производными первого порядка, или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка, или вторыми частными производными называют частные производные от первых частных производных.

Для функции $z = f(x,\ y)$

По определению имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x(x,\ y)\right)'_x=f''_{xx}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(f'_y(x,\ y)\right)'_y=f''_{yy}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(f'_x(x,\ y)\right)'_y=f''_{xy}(x,\ y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(f'_y(x,\ y)\right)'_x=f''_{yx}(x,\ y).$$

Употребляются и другие обозначения:

$$z''_{xx},\ z''_{yy},\ z''_{xy},\ z''_{yx}.$$

Частные производные z''_{xy} и z''_{yx} называют *смешанными* частными производными.

Если функция $z=f(x,\ y)$ и ее смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,\ y_0)$ и непрерывны в ней, то $f''_{xy}(x_0,\ y_0)=f''_{yx}(x_0,\ y_0)$.

Полным дифференциалом второго порядка некоторой функции называют полный дифференциал от ее полного дифференциала.

Полным дифференциалом n-го порядка называют полный дифференциал от полного дифференциала $(n-1)$-го порядка.

Если $z=f(x,\ y)$, $dz=z'_x dx+z'_y dy$, то

$$d^2z=d(dz)=z''_{xx}dx^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}dy^2,$$

$$d^3z=d\left(d^2z\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3+3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2\partial y}dx^2dy+3\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y^2}dxdy^2+\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3$$

$$d^nz=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-k}\partial y^k}dx^{n-k}dy^k\quad\left(C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots[n-(k-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}\right)$$

12.4. Дифференцирование неявных и сложных функций

Неявной функцией n переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ называют функцию, заданную уравнением $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ u)=0$, не разрешенным относительно u. Частные производные функции, заданной этим уравнением, находят по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=-\frac{F'_{x_2}}{F'_u},\ \frac{\partial u}{\partial x_3}=-\frac{F'_{x_3}}{F'_u},\ \ldots,\ \frac{\partial u}{\partial x_n}=-\frac{F'_{x_n}}{F'_u}.$$

В частности, если y – функция одной переменной, заданная уравнением $F(x,\ y)=0$, то $y'=-\dfrac{F'_x}{F'_y}$. Если z – функция двух переменных x и y, заданная уравнением $F(x,\ y,\ z)=0$, то $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F'_x}{F'_z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F'_y}{F'_z}$.

Если $u=f(v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n)$, где $v_1=f_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, $v_2=f_2(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, ..., $v_n=f_n(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$, то функцию u называют *сложной функцией* независимых переменных $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$. Переменные $v_1,\ v_2,\ ...,\ v_n$ называют *промежуточными аргументами*.

Частные производные сложной функции вычисляют по формулам

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+...+\frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_1},$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+...+\frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial u}{\partial x_n}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{\partial v_1}{\partial x_n}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{\partial v_2}{\partial x_n}+...+\frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{\partial v_n}{\partial x_n}.$$

Если все промежуточные аргументы являются функциями одной переменной t, то

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial v_1}\cdot\frac{dv_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial v_2}\cdot\frac{dv_2}{dt}+...+\frac{\partial u}{\partial v_n}\cdot\frac{dv_n}{dt}.$$

Примеры

1. Найти область определения функции $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Что представляет собой график данной функции?

Эта функция двух переменных определена, когда подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $4-x^2-y^2\ge 0$, $x^2+y^2\le 4$. Последнему соотношению удовлетворяют координаты всех точек, находящихся внутри круга радиуса $R=2$ с центром в начале координат и на его границе. Область определения данной функции – указанный круг. Из равенства $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ следует, что $z^2=4-x^2-y^2$, $x^2+y^2+z^2=4$. Это уравнение сферы радиуса $R=2$ с центром в начале координат. Определяя z из равенства $z^2=4-x^2-y^2$, получаем $z=\pm\sqrt{4-x^2-y^2}$. По условию $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$. Следовательно, графиком дано функции является полусфера, расположенная над плоскостью Oxy.

2. Найти линии уровня функции $z=4x^2+9y^2$.

Линии уровня в данном случае определяются формулой $4x^2+9y^2=C$. При $C>0$ это уравнение определяет эллипсы.

3. Найти поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Поверхности уровня данной функции определяются формулой $x^2 + y^2 + z^2 = C$. При $C > 0$ это уравнение определяет сферы.

4. Вычислить значения частных производных функции $z = \dfrac{y}{x+y}$ в точке $M_0(-4,\ 3)$.

Найдем сначала выражения для частных производных. Считая y постоянным и дифференцируя по x частное, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{0 \cdot (x+y) - 1 \cdot y}{(x+y)^2} = -\frac{y}{(x+y)^2},\ f'_x(x,\ y) = -\frac{y}{(x+y)^2}.$$

Считая x постоянным и дифференцируя по y частное, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 \cdot (x+y) - 1 \cdot y}{(x+y)^2} = \frac{x}{(x+y)^2},\ f'_y(x,\ y) = \frac{x}{(x+y)^2}.$$

Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(-4,\ 3)$

$$f'_x(-4,\ 3) = -\frac{3}{(-4+3)^2} = -3,\ \ f'_y(-4,\ 3) = \frac{-4}{(-4+3)^2} = -4.$$

5. Найти полное приращение и полный дифференциал функции $u = x^2 + y^2 - z^2 + xy$ при переходе от точки $M(1,\ 1,\ 1)$ к точке $M_1(1{,}1;\ 0{,}9;\ 0{,}8)$.

В соответствии с определением полное приращение

$$\Delta u = f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) - f(x,\ y,\ z) =$$
$$= \{(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (z+\Delta z)^2 + (x+\Delta x)(y+\Delta y)\} - \left(x^2 + y^2 - z^2 + xy\right) =$$
$$= 2x\Delta x + 2y\Delta y + \Delta x^2 + \Delta y^2 - 2z\Delta z - \Delta z^2 + x\Delta y + y\Delta x + \Delta x\Delta y;$$
$$\Delta u = (2x + y + \Delta x)\Delta x + (2y + x + \Delta y + \Delta x)\Delta y - (2z + \Delta z)\Delta z.$$

Подставив в эту формулу значения $x = 1,\ y = 1,\ z = 1;\ \Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1;\ \Delta y = 0{,}9 - 1 = -0{,}1;\ \Delta z = 0{,}8 - 1 = -0{,}2$, получим полное приращение данной функции в точке M.

$$\Delta u = (2 \cdot 1 + 1 + 0{,}1) \cdot 0{,}1 + (2 \cdot 1 + 1 + 0{,}1 - 0{,}1) \cdot (-0{,}1) - (2 \cdot 1 - 0{,}2) \cdot (-0{,}2) =$$
$$= 3{,}1 \cdot (0{,}1) + 3 \cdot (-0{,}1) + 1{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}31 - 0{,}3 + 0{,}36 = 0{,}37.$$

Поскольку $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y;\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y + x;\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = -2z$, то полный дифференциал данной функции выражается формулой $du = (2x + y)dx + (2y + x)dy - 2zdz$.

Подставив в эту формулу соответствующие значения $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, $dz = \Delta z$), получим значение полного дифференциала

$$du = (2\cdot 1+1)\cdot 0{,}1 + (2\cdot 1+1)\cdot(-0{,}1) - 2\cdot 1\cdot(-0{,}2) = 0{,}4.$$

6. Найти частные производные второго порядка функции $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ и их значения в точке $M_0(1,\,-2)$.

Находим сначала первые частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2}\,;\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}\,.$$

Используя определения и правила дифференцирования, получаем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2x\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{0\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2y\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{0\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2y\cdot x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot\left(x^2+y^2\right) - 2y\cdot y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}\,.$$

Вычисляем значения вторых частных производных в указанной точке

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{M_0} = \frac{(-2)^2-1^2}{\left(1^2+(-2)^2\right)^2} = \frac{3}{25}\,;\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_{M_0} = \frac{-2\cdot(-2)\cdot 1}{\left(1^2+(-2)^2\right)^2} = \frac{4}{25}\,;$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)_{M_0} = \frac{4}{25}\,;\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{M_0} = \frac{(1)^2-(-2)^2}{\left(1^2+(-2)^2\right)^2} = \frac{-3}{25}\,.$$

7. Найти второй дифференциал функции $z = x^2y^2$.

Так как $z''_{xx} = 2y^2$, $z''_{xy} = 4xy$, $z''_{yy} = 2x^2$, то

$$d^2z = 2y^2dx^2 + 8xydxdy + 2x^2dy^2\,.$$

8. Найти частные производные сложной функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{u}{v}$, где $u = x+y$, $v = x-y$.

Применяя соответствующие формулы, находим

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\frac{1}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1+\frac{\frac{-u}{v^2}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1=\frac{-u+v}{u^2+v^2}=\frac{-y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{1}{v}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot 1+\frac{\frac{-u}{v^2}}{1+\frac{u^2}{v^2}}\cdot(-1)=\frac{u+v}{u^2+v^2}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

9. Найти частные производные функции $z=z(x,\ y)$, заданной уравнением $xyz+x^2-y^2-z^2+3=0$.

В данном случае $F(x,\ y,\ z)=xyz+x^2-y^2-z^2+3$, $F(x,\ y,\ z)=0$.

Поскольку $F'_x=yz+2x$, $F'_y=xz-2y$, $F'_z=xy-2z$, то

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_y}=-\frac{yz+2x}{xy-2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{xz-2y}{xy-2z}.$$

Следовательно, частные производные данной неявной функции выражаются формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz+2x}{xy-2z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz-2y}{xy-2z}.$$

10. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислить приближенно $\sqrt{(2{,}02)^2+(1{,}03)^2+(1{,}97)^2}$.

Применяем приближенную формулу $\Delta u\approx du$, или

$$f(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-f(x_0,\ y_0,\ z_0)\approx$$
$$\approx f'_x(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta x+f'_y(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta y+f'_z(x_0,\ y_0,\ z_0)\Delta z$$

к функции $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. В данном случае $x_0=2$, $y_0=1$, $z_0=2$, $\Delta x=$ $=2{,}02-2=0{,}02$, $\Delta y=1{,}03-1=0{,}03$, $\Delta z=1{,}97-2=-0{,}03$, $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=3$,
$du=\frac{x\Delta x+y\Delta y+z\Delta z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $(du)_0=\frac{2\cdot 0{,}02+1\cdot 0{,}03+2\cdot(-0{,}03)}{3}=\frac{0{,}01}{3}\approx 0{,}003.$

Следовательно, $\sqrt{(2{,}02)^2+(1{,}03)^2+(1{,}97)^2}-3\approx 0{,}003$,
$\sqrt{(2{,}02)^2+(1{,}03)^2+(1{,}97)^2}\approx 3{,}003$.

Задачи

Найдите область определения функции

1. $z=\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$. **2.** $z=\sqrt{\left(x^2+y^2-9\right)\left(16-x^2-y^2\right)}$.

Постройте линии уровня функции

3. $z=9x^2+4y^2$. **4.** $z=16x^2-9y^2$.

Найдите поверхности уровня функции

5. $u=x^2-y^2+z^2$. **6.** $u=x^2+y^2-z$.

Вычислите значения частных производных в указанной точке

7. $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_0(1,\ -2,\ 2)$. **8.** $u=\dfrac{y-z}{z-x}$, $M_0(2,\ 1,\ 3)$.

9. Вычислите полное приращение и полный дифференциал функции $u=(x+y+z)^2$ при переходе от точки $M_0(1,\ -1,\ 2)$ к точке $M(1{,}2;\ -0{,}9;\ 2{,}1)$. **10.** Найдите частные производные второго порядка от функции $z=x^3+y^3-x^2y+xy^2$ и их значения в точке $M_0(2,\ 1)$. **11.** Найдите второй дифференциал функции $z=e^{xy}$. **12.** Найдите частные производные сложной функции $z=\operatorname{arcctg}\dfrac{u}{v}$, где $u=x+2y$, $v=2x-y$. **13.** Найдите частные производные функции $z=z(x,\ y)$, заданной уравнением $xyz+x^4+y^3-z^2+7=0$. **14.** Вычислите приближенно $(1{,}003)\cdot(1{,}998)^2\cdot(3{,}005)^3$.

Ответы

1. Множество точек, лежащих внутри круга радиуса R = 3 с центром в начале координат. **2.** Кольцо, определяемое неравенствами $9\le x^2+y^2\le 16$. **3.** Эллипсы. **4.** Гиперболы. **5.** $x^2-y^2+z^2=C$ (однополостные гиперболоиды при $C>0$; конусы при C = 0; двуполостные гиперболоиды при $C<0$). **6.** $x^2+y^2-z=C$ (параболоиды вращения).

7. $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0=\dfrac{1}{3}$; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_0=-\dfrac{2}{3}$; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\dfrac{2}{3}$. **8.** $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)_0=-2$; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)_0=1$; $\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)_0=1$.

9. $\Delta u=1{,}56$, $du=1{,}6$. **10.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-2y$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2(y-x)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2x+6y$; $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0=10$, $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)_0=\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)_0=-2$, $\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_0=10$.

11. $d^2z=e^{xy}\left(y^2dx^2+2xydxdy+x^2dy^2\right)$. **12.** $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$.

13. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{yz+4x^3}{xy-2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{xz+3y^2}{xy-2z}$. **14.** $108{,}648$.

12.5. Приложения частных производных

Частные производные применяются к решению геометрических задач, при отыскании экстремальных значений переменных величин.

Касательная прямая к пространственной линии. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Уравнения касательной прямой к линии

$$x=\varphi_1(t),\ y=\varphi_2(t),\ z=\varphi_3(t)$$

в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, где $x_0=\varphi_1(t_0)$, $y_0=\varphi_2(t_0)$, $z_0=\varphi_3(t_0)$ имеют вид

$$\frac{x-x_0}{\varphi_1'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi_2'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\varphi_3'(t_0)}\quad\left(\sum_{k=1}^{3}\varphi_k'^{\,2}(t_0)\neq 0\right).$$

Нормальной плоскостью кривой в данной ее точке называют плоскость, проходящую через эту точку перпендикулярно касательной прямой к линии в этой точке. Уравнения нормальной плоскости указанной кривой в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ y_0)$: $\varphi_1'(t_0)(x-x_0)+$ $+\varphi_2'(t_0)(y-y_0)+\varphi_3'(t_0)(z-z_0)=0$.

Касательной плоскостью к поверхности в точке M называют плоскость, в которой расположены касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через точку M.

Нормалью к поверхности называют перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Координаты направляющего вектора нормали $\bar{n}=(a,\ b,\ c)$ к поверхности $F(x,\ y,\ z)=0$ в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ пропорциональны значениям соответствующих частных производных функции $F(x,\ y,\ z)$ в этой точке:

$$a=\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0},\ b=\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0},\ c=\lambda\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0},$$

где $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=F_x'(x_0,y_0,z_0)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=F_y'(x_0,y_0,z_0)$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=F_z'(x_0,y_0,z_0)$.

Координаты вектора $\bar{n}$ входят в уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z-z_0)=0$$

и в уравнения нормали к данной поверхности в той же точке

$$\frac{x-x_0}{(F_x')_{M_0}}=\frac{y-y_0}{(F_y')_{M_0}}=\frac{z-z_0}{(F_z')_{M_0}}.$$

Для поверхности $z = f(x,\ y)$ уравнения нормали и касательной плоскости в точке $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ принимают соответственно вид

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,\ y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,\ y_0)} = \frac{z - z_0}{-1},$$

$$z - z_0 = f'_x(x_0,\ y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,\ y_0)(y - y_0).$$

Экстремум функции нескольких переменных

Максимумом функции $u = f(M)$ называют такое ее значение $u_1 = f(M_1)$, которое больше всех других значений $u = f(M)$, принимаемых в точках, достаточно близких к точке M_1 и отличных от нее.

Минимумом функции $u = f(M)$ называют такое ее значение $u_2 = f(M_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках, достаточно близких к точке M_2: $f(M_2) < f(M)$.

Максимум и минимум функции называют *экстремумом*.

Точку, в которой достигается экстремум, называют *точкой экстремума*.

Необходимое условие экстремума. В точке экстремума все первые частные производные равны нулю.

Стационарными точками называют точки, в которых все первые частные производные равны нулю, или полный дифференциал равен нулю: $df(M) = 0$.

Достаточное условие экстремума для функции двух переменных $z = f(x,\ y)$. Если $M_0(x_0,\ y_0)$ – стационарная точка, т.е. точка, для которой $df(x_0,\ y_0) = 0$, тогда:

1) при $d^2 f(x_0,\ y_0) < 0$ $\left(dx^2 + dy^2 > 0\right)$ $f(x_0,\ y_0)$ – точка максимума;

2) при $d^2 f(x_0,\ y_0) > 0$ $\left(dx^2 + dy^2 > 0\right)$ $f(x_0,\ y_0)$ – точка минимума.

Эти условия равносильны следующим. Пусть $f'_x(x_0,\ y_0) = 0$, $f'_y(x_0,\ y_0) = 0$, $A = f''_{xx}(x_0,\ y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0,\ y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0,\ y_0)$, $\Delta = AC - B^2$, тогда:

1) если $\Delta > 0$, то функция $f(x,\ y)$ имеет экстремум в точке M_0: максимум при $A < 0$ (или $C < 0$), минимум при $A > 0$ (или $C > 0$);

2) если $\Delta < 0$, то нет экстремума в точке M_0.

Замечание. В случае $\Delta = 0$ необходимо дополнительное исследование.

Условный экстремум. Если разыскивается экстремум функции нескольких переменных, которые связаны одним или несколькими уравнениями (число их меньше числа переменных), то говорят об условном экстремуме.

При решении задач используют *метод неопределенных множителей Лагранжа*. Чтобы найти условный экстремум функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\varphi(x, y) = 0$, составляют *функцию Лагранжа* $F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель, и ищут экстремум этой функции.

Необходимое условие экстремума этой функции выражается системой уравнений с тремя неизвестными x, y, λ:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\ \varphi(x, y) = 0.$$

Находится второй дифференциал функции Лагранжа

$$d^2F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy^2$$

и его значение при x, y, λ, полученных из указанной системы уравнений.

Функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $d^2F < 0$ и условный минимум, если $d^2F > 0$.

Примеры

1. Записать уравнение касательной прямой и нормальной плоскости к винтовой линии

$$x = \sqrt{2}\cos t,\ y = \sqrt{2}\sin t,\ z = 4t$$

в точке, для которой $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

Сначала вычислим прямоугольные декартовы координаты точки M_0:

$$x_0 = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1;\ y_0 = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = 1;\ z_0 = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi;\ M_0(1, 1, \pi).$$

Находим производные функций $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$ и их значения в точке M_0:

$$x'_t = \varphi'_1(t) = -\sqrt{2}\sin t,\ y'_t = \varphi'_2(t) = \sqrt{2}\cos t,\ z'_t = \varphi'_3(t) = 4;$$

$$\varphi'_1(t_0) = -\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = -1,\ \varphi'_2(t_0) = \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = 1,\ \varphi'_3(t_0) = 4.$$

Используя соответствующие формулы, получаем уравнения касательной прямой

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-\pi}{4}$$

и уравнение нормальной плоскости

$$-1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-1) + 4\cdot(z-\pi) = 0,$$

или $x - y - 4x + 4\pi = 0$.

2. Записать уравнения касательной плоскости и нормали к однополостному гиперболоиду $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$ в точке $M_0(5, -4, 3)$.

Представим уравнение поверхности в виде $F(x, y, z)=0$: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}-1=0$, т.е. $F(x, y, z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}-\frac{z^2}{9}-1$.

Частные производные этой функции

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2x}{25},\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y}{16},\ \frac{\partial F}{\partial z}=-\frac{2z}{9}$$

в точке $M_0(5, -4, 3)$ имеют следующие значения:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}=\frac{2\cdot 5}{25}=\frac{2}{5},\ \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}=\frac{-4}{8}=-\frac{1}{2},\ \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}=-\frac{2\cdot 3}{9}=-\frac{2}{3}.$$

Принимая во внимание соответствующие формулы, получаем уравнение касательной плоскости

$$\frac{2}{5}(x-5)-\frac{1}{2}(y+4)-\frac{2}{3}(z-3)=0, \text{ или } 12x-15y-20z-60=0$$

и уравнение нормали

$$\frac{x-5}{\frac{2}{5}}=\frac{y+4}{-\frac{1}{2}}=\frac{z-3}{-\frac{2}{3}}, \text{ или } \frac{x-5}{12}=\frac{y+4}{-15}=\frac{z-3}{-20}.$$

3. Найти точку, в которой касательная к линии $x=t^3$, $y=t^2-2t$, $z=2t+t^2$ параллельна плоскости $2x-3y-3z+5=0$.

Данная плоскость имеет нормальный вектор $\overline{n}=(2, -3, -3)$, он перпендикулярен вектору касательной $\overline{\tau}=\left(3t^2, 2t-2, 2t+2\right)$; их скалярное произведение равно нулю: $(\overline{\tau}, \overline{n})=0$, $6t^2-6t-6t=0$, откуда $t_1=0$, $t_2=2$.

На данной линии находим соответствующие точки: 1) $x=0$, $y=0$, $z=0$; 2) $x=8$, $y=0$, $z=8$; $O(0, 0, 0)$, $M(8, 0, 8)$.

Следовательно, имеются две точки: $O(0, 0, 0)$, $M(8, 0, 8)$.

4. Найти экстремум функции

$$z=f(x, y)=3x^2y+y^3-18x-30y.$$

Обращая в нуль первые частные производные, получаем систему уравнений:

$$6xy-18=0,\ 3x^2+3y^2-30=0, \text{ или } x\cdot y=3,\ x^2+y^2-10=0,$$

из которой определяются стационарные точки: $M_1(1, 3)$, $M_2(3, 1)$, $M_3(-1, -3)$, $M_4(-3, -1)$.

Записываем выражения для производных второго порядка $z''_{xx}=6y$, $z''_{xy}=6x$, $z''_{yy}=6y$ и вычисляем их значения в стационарных точках, т.е. числа *A, B, C* и дискриминант $\Delta = AC-B^2$.

В точке M_1 получаем следующие значения:

$$A=6\cdot 3=18,\ B=6\cdot 1=6,\ C=6\cdot 3=18,\ \Delta = AC-B^2=18\cdot 18-6^2>0.$$

Поскольку $\Delta>0$ и $A>0$, то в точке M_1 имеем минимум, равный значению функции при $x=1$, $y=3$:

$$\min f(x,\ y)=f(1,\ 3)=3\cdot 1^2\cdot 3+3^3-18\cdot 1-30\cdot 3=-72.$$

В точке M_2 имеем:

$$A=6,\ B=18,\ C=6,\ \Delta = AC-B^2=6^2-18^2<0.$$

Так как $\Delta<0$, то нет экстремума в этой точке.

Для точки M_3

$$A=-18,\ B=-6,\ C=-18,\ \Delta=(-18)^2-(-6)^2>0,\ A<0,$$

то в этой точке функция имеет максимум, причем

$$\max f(x,\ y)=f(-1,\ -3)=3\cdot(-1)^2\cdot(-3)+(-3)^3-18(-1)-30(-3)=72$$

Для точки M_4:

$$A=-6,\ B=-18,\ C=-6,\ \Delta=(-6)^2-(-18)^2<0,$$

в этой точке нет экстремума.

Следовательно, данная функция имеет два экстремума:

$$\min f(x,\ y)=f(1,\ 3)=-72,\ \max f(x,\ y)=f(-1,\ -3)=72.$$

5. Найти экстремум функции $z=9-8x-6y$ при условии, что ее аргументы удовлетворяют условию $x^2+y^2=25$.

Геометрически задача сводится к нахождению экстремальных значений аппликаты *z* к плоскости $z=9-8x-6y$ для точек ее пересечения с цилиндром $x^2+y^2=25$.

Составляем функцию Лагранжа

$$F(x,\ y)=9-8x-6y+\lambda\left(x^2+y^2-25\right),$$

находим ее частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}=-8+2\lambda x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=-6+2\lambda y.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases}-8+2\lambda x=0,\\ -6+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=25\end{cases}\ \text{или}\ \begin{array}{l}\lambda x-4=0,\\ \lambda y-3=0,\\ x^2+y^2=25,\end{array}$$

определяем

$$\lambda_1 = 1,\ x_1 = 4,\ y_1 = 3;\ \lambda_2 = -1,\ x_2 = -4,\ y_2 = -3.$$

Находим вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda,\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -2\lambda,$$

выражение для второго дифференциала $d^2F = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right)$.

Поскольку $d^2F > 0$ при $\lambda_1 = 1,\ x_1 = 4,\ y_1 = 3$, то функция $f(x,\ y)$ в точке $M_1(4,\ 3)$ имеет условный минимум. Если $\lambda_2 = -1,\ x_2 = -4,$ $y_2 = -3$, то $d^2F < 0$; функция имеет условный максимум в точке $M_2(-4,\ -3)$.

Следовательно, $\max f(x,\ y) = f(-4,\ -3) = 9 - 8(-4) - 6(-3) = 59$; $\min f(x,\ y) = f(4,\ 3) = 9 - 8 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = -41$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x,\ y) = x^2 + y^2 + xy - 5x - 4y + 10$ в области $x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le 4$.

Эта область представляет треугольник, ограниченный прямой $x + y = 4$ и координатными осями (рис. 12.3).

Чтобы решить задачу, достаточно найти стационарные точки в данной области и изучить изменение функции на границе области.

Находим стационарные точки: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 5,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x - 4,$ приравниваем равенство к 0 и решаем систему $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2y + x = 4, \end{cases}$ получаем $x = 2$, $y = 1$, т.е. $M_0(2,\ 1)$. Значение функции в этой точке $f(2,1) = 2^2 + 1^2 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 + 10 = 3$.

Прямая $x + y = 4$ пересекает ось Ox в точке $A(4,\ 0)$, ось Oy – в точке $B(0,\ 4)$. Значения функции в этих точках: $f(A) = f(4,\ 0) = 6$, $f(B) = f(0,\ 4) = 10$; отметим, что $f(0) = 10$.

На оси Ox $(y = 0)$ функция зависит от одной переменной x: $\varphi(x) = x^2 - 5x + 10$, которая имеет стационарную точку $M_1\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, принадлежащую отрезку OA; в этой точке $\varphi\left(\frac{5}{2}\right) = 3\frac{3}{4}$.

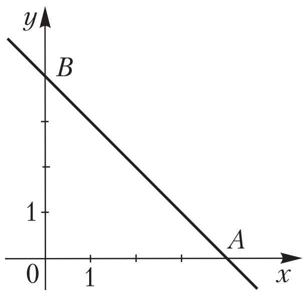

Рис. 12.3

Значения функции на концах отрезка OA: $\varphi(0) = 10$, $\varphi(4) = 6$; функция на этом отрезке принимает наибольшее значение, равное 10, в точке O, наименьшее, равное $3\frac{3}{4}$ – в точке M_1.

На оси Oy $(x=0)$ функция z зависит от одной переменной y: $z=\varphi(y)=y^2-4y+10$. Эта функция имеет стационарную точку $M_2(0,\ 2)$, в которой $\varphi(M_2)=\varphi(2)=6$. Следовательно, на отрезке OB функция достигает наибольшего значения, равного 10, в точках O и B, наименьшего, равного 6, – в точке M_2.

На прямой $x+y=4$, или $y=4-x$ функция z зависит от одной переменной x: $\varphi(x)=x^2-5x+10$, для которой $\varphi'(x)=2x-5$; стационарная точка $M_3\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$, значение функции $\varphi(M_3)=10$.

Сопоставляя значения функции в точках $O(0,\ 0)$, $B(0,\ 4)$, $A(4,\ 0)$, $M_0(2, 1)$, $M_1\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, $M_2(0, 2)$, $M_3\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, заключаем, что $z_{\min}=f(2, 1)=3$, $z_{\max}=f(0,\ 0)=f(0,\ 4)=f\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)=10$.

Задачи

Запишите уравнения касательной прямой и нормальной плоскости к линии в точке, которой соответствует данное значение t.

1. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3;\ t_0=-1$. **2.** $x=\sin 2t,\ y=1-\cos 2t,\ z=\sqrt{2}\cos t;$ $t_0=\frac{\pi}{4}$. **3.** На линии $x=2t^2$, $y=3t-t^3$, $z=3t+t^3$ найдите точку, в которой касательная параллельна плоскости $3x+y-z+7=0$.

Запишите уравнения нормали и касательной плоскости к поверхности в указанной точке

4. $x^2+y^2+z^2=9;\ M(1,\ -2,\ 2)$. **5.** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{1}=1;\ M(-3,\ 2,\ 1)$.

Найдите экстремум функции

6. $z=3x^2+4y^2+6x-8y+15$. **7.** $z=x^3+3xy^2-51x-24y$.

Найдите условный экстремум функции

8. $z=8-2x-4y$ при $x^2+2y^2=12$. **9.** $z=16-10x-24y$ при $x^2+y^2=169$.

Найдите экстремальные значения функции в указанной области

10. $z=xy^2+4xy+4x-8;\ -3\le x\le 3,\ -3\le y\le 0$.

11. $z=x^2+y^2-xy-3x+3y+7;\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ x-y\le 3$. **12.** Из всех прямоугольных параллелепипедов с данной поверхностью S найдите тот, который имеет наибольший объем.

Ответы

1. $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{3}$; $x-2y+3z+6=0$. **2.** $\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$, $x-1=0$; $2y-z-1=0$. **3.** $O(0,\ 0,\ 0)$, $M(8,\ -2,\ 14)$. **4.** $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-2}{2}$; $x-2y+2z-9=0$. **5.** $\frac{x+3}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{6}$; $2x-3y+6z+6=0$.
6. $\min f(x,\ y)=f(-1,\ 1)=8$. **7.** $\max f(x,\ y)=f(-4,\ -1)=152$; $\min f(x,\ y)=f(4,\ 1)=-152$; в точках $M(-1,\ -4)$, $N(1,\ 4)$ экстремума нет. **8.** $\min f(x,\ y)=f(2,\ 2)=-4$, $\max f(x,\ y)=f(-2,\ -2)=20$.
9. $\min f(x,\ y)=f(5,\ 12)=-322$; $\max f(x,\ y)=f(-5,\ -12)=354$.
10. $z_{\min}=f(-3,\ 0)=-20$; $z_{\max}f(3,\ 0)=4$. **11.** $z_{\min}=f(1,\ -1)=4$; $z_{\max}=f(0,\ 0)=f(0,\ -3)=f(3,\ 0)=7$. **12.** $v_{\max}=\frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{6}}$ при $x=y=z=\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{6}}$.

IX

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 13. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей – наука о закономерностях массовых случайных событий.

13.1. Классификация событий

Опытом, или *испытанием*, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. Возможный результат опыта называют *событием*. События обозначают заглавными буквами латинского алфавита A, B, C, ...

Событие называют *достоверным* в данном опыте, если оно обязательно произойдет в данном опыте. Событие называют *невозможным*, если оно в данном опыте произойти не может. *Случайным событием* называют событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти.

Два события называют *совместными* в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте. Два события называют *несовместными*, если они не могут произойти при одном и том же испытании.

Множество событий A_1, A_2, ..., A_n называют *полной группой событий*, если они попарно несовместны, появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Два события называют *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. События считают *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другое.

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта называют *элементарным исходом* (*элементарным событием,* или *шансом*). Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называют *благоприятствующими* этому событию, или *благоприятными шансами*.

Действия над событиями. Соотношения между событиями

Суммой, или *объединением* двух событий называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумму двух событий A и B обозначают так: $A+B$ или $A\bigcup B$.

Произведением, или *пересечением*, двух событий называют событие, состоящее в одновременном их появлении. Обозначение произведения событий A и B: AB или $A \bigcap B$.

Сумма и произведение событий распространяется на конечное и бесконечное множества событий.

Разностью событий A и B называют событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B; обозначения $A - B$ или $A \setminus B$.

Если событие A обязательно произойдет при появлении некоторого другого события B, то говорят, что событие B представляет собой *частный случай события* A и пишут $B \subset A$, или $A \supset B$ (говорят также, что B влечет A). Если $B \subset A$ и $A \subset B$, т.е. события A и B в данном опыте могут появиться или не появиться вместе, то их называют *равносильными*, или *эквивалентными*, и пишут $A = B$.

13.2. Различные определения вероятности события. Свойства вероятности

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называют число, определяемое формулой

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A, n – число всех равновозможных элементарных исходов опыта, в котором может появиться это событие.

Свойства вероятности события.

1. Вероятность достоверного события равно единице. Для достоверного события E $m = n$ (все исходы благоприятные), поэтому $\mathrm{P}(E) = \frac{n}{n} = 1$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю. Для невозможного события O $m = 0$ (нет благоприятных исходов), поэтому $\mathrm{P}(O) = \frac{0}{n} = 0$.

3. Вероятность случайного события выражается положительным числом, меньше единицы.

Для случайного события A $0 < m < n$, $0 < \frac{m}{n} < \frac{n}{n} = 1$, поэтому $0 < \mathrm{P}(A) < 1$.

4. Вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам $0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$.

Статистическое определение вероятности

Относительной частотой события A или *частотой*, называют число, определяемое формулой $W(A)=\dfrac{m}{n}$, где m – число опытов, в котором появилось событие A, n – число всех опытов.

Вероятностью события называют число, около которого группируются значения частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Геометрическое определение вероятности

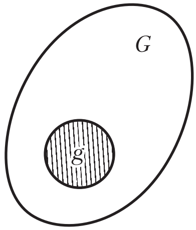

Рис. 13.1

Рассмотрим область G, в которой содержится область g (рис. 13.1). Обозначим меру области g (длину, площадь, объем) через $\operatorname{mes} g$, а меру области G – через $\operatorname{mes} G$; A – рассматриваемое событие (попадание точки в область g, брошенной в область G).

Вероятностью события A называют число, определяемое формулой

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\operatorname{mes} g}{\operatorname{mes} G}.$$

Понятие *геометрической вероятности* обобщает классическое определение вероятности на случай опытов с бесконечным числом исходов.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей. Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их произведения $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$.

Если события несовместные ($AB=\varnothing$, $\mathrm{P}(AB)=0$), то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей.

$$\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B).$$

Сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(\bar{A})=1.$$

Если обозначить $\mathrm{P}(A)=p$, $\mathrm{P}(\bar{A})=q$, то равенство примет вид $p+q=1$.

В случае несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$\mathrm{P}(A_1+A_2+\ldots+A_n)=\mathrm{P}(A_1)+\mathrm{P}(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность другого события при условии, что произошло первое событие.

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\cdot\mathrm{P}(A/B).$$

В случае произведения трех событий *A, B, C*

$$\mathrm{P}(ABC) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A)\mathrm{P}(C/AB).$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ являются независимыми, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий

$$\mathrm{P}(A_1\cdot A_2\cdot...\cdot A_n) = \mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot...\cdot\mathrm{P}(A_n).$$

Формула полной вероятности. Формулы Бейеса

Формула полной вероятности

Рассмотрим события $H_1, H_2, ..., H_n$, образующие полную группу событий (т.е. они попарно несовместны и их сумма $H_1 + H_2 + ... + H_n$ – достоверное событие).

Если событие *A* может наступить совместно с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, то его вероятность определяется формулой

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i).$$

Эту формулу называют *формулой полной вероятности*, а события $H_1, H_2, ..., H_n$ – *гипотезами.*

Формулы Бейеса

Пусть событие *A* может наступить при условии появления одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий. Если событие *A* произошло, то вероятности гипотез определяются по формулам Бейеса:

$$\mathrm{P}(H_i/A) = \frac{\mathrm{P}(H_i)\mathrm{P}(A/H_i)}{\mathrm{P}(A)},\ i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Аксиоматическое определение вероятности

Пространством элементарных событий называют произвольное множество Ω, а его элементы ω – *элементарными событиями. Событием* называют подмножество множества Ω и обозначают буквами *A, B, C* и т.д.

Не исключаются случаи, когда такое подмножество совпадает со всем множеством Ω, содержит лишь один элемент или является пустым.

Достоверным событием называют множество Ω, а *невозможным* – пустое множество $\varnothing$. *Случайным событием* называют любое собственное (т.е. отличное от $\varnothing$ и Ω) подмножество множества Ω. Событие $\overline{A} = \Omega - A$ называют *противоположным* событию A; событие $\overline{A}$ означает, что A не произошло. События A и B называют *несовместными*, если $AB = \varnothing$.

Вероятностью события A называют числовую функцию $\mathrm{P}(A)$, удовлетворяющую следующим аксиомам:

1. $\mathrm{P}(A)$ – неотрицательная функция: $\mathrm{P}(A) \geq 0$ для любого A.
2. Вероятность достоверного события равна единице: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.
3. Вероятность суммы двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей: $\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$.

Простейшие следствия из аксиом вероятности.

1. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице. (Поскольку $A + \overline{A} = \Omega$, то $\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A}) = 1$).
2. Вероятность невозможного события равна нулю: $\mathrm{P}(\varnothing) = 0$.
3. Если B влечет A $(B \subset A)$, то $\mathrm{P}(B) \leq \mathrm{P}(A)$.
4. Так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$, то $0 \leq \mathrm{P}(A) \leq 1$.

13.3. Случайные величины, их распределения и характеристики

Случайной величиной называют переменную величину, которая в зависимости от случая принимает те или иные значения с определенными вероятностями.

Различают *дискретные* и *непрерывные* случайные величины.

Случайную величину называют дискретной, если она может принимать конечное или счетное множество значений (множество называют счетным, если его элементы можно пронумеровать: $x_1, x_2, ..., x_n$).

Случайную величину называют непрерывной, если ее значения заполняют некоторый интервал.

Закон распределения случайной величины

Законом распределения случайной величины X называют соответствие между ее значениями и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины, принимающей конечное множество значений $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$, можно задать схемой

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Или формулами

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

Аналогично задается закон распределения дискретной величины X, принимающей счетное множество значений $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$, соответственно с вероятностями $p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots$:

$$\mathrm{P}(X = x_i) = p_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$$

Функция распределения

Функцией распределения случайной величины X называют функцию $F(x)$ действительной переменной, определяемую формулой $F(x) = \mathrm{P}(X < x)$, где $\mathrm{P}(X < x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x (рис. 13.2). Вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала $(\alpha,\ \beta)$ равна разности значений ее функции распределения в концах этого промежутка $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Функцию распределения называют также интегральной функцией или интегральным законом распределения случайной величины X.

Свойства функции распределения $F(x)$

1. Все значения функции распределения принадлежат отрезку $[0,\ 1]$, т.е. $0 \le F(x) \le 1$.

2. Функция $F(x)$ является неубывающей: $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$.

3. Функция $F(x)$ непрерывна слева при любом x.

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0,\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

График функции распределения целиком расположен в полосе между прямыми $y = 0$, $y = 1$ (рис. 13.3).

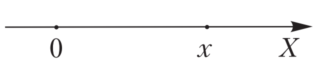

Рис. 13.2

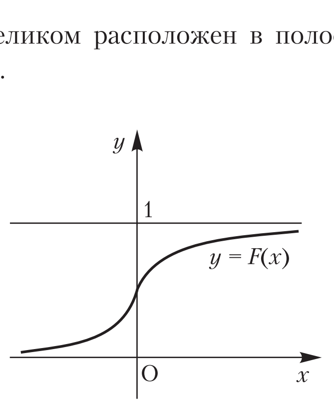

Рис. 13.3

Функция распределения для дискретной случайной величины имеет вид $F(x)=\sum\limits_{x_k<x} \mathrm{P}(X=x_k)$, где символы $x_k<x$ означают, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины является разрывной.

Плотность распределения

Рассмотрим непрерывную случайную величину X, функция распределения которой $F(x)$ определена в интервале (α, β) и имеет непрерывную производную. Зафиксируем в интервале (α, β) точки x и $x+\Delta x$ $(\Delta x>0)$. Равенство $\mathrm{P}(\alpha \le X \le \beta)=F(\beta)-F(\alpha)$ примет вид

$$\mathrm{P}(x \le X < x+\Delta x)=F(x+\Delta x)-F(x)$$

Разделим это равенств на длину Δx отрезка $[x,\ x+\Delta x]$:

$$\frac{\mathrm{P}(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x}=\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} \qquad (\mathrm{I})$$

Частное $\dfrac{\mathrm{P}(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x}$ называют *средней плотностью* вероятностей на данном отрезке. Плотностью распределения непрерывной случайно величины в точке x называют предел средней плотности при $\Delta x \to 0$. Плотность распределения в точке x обозначим $p(x)$, тогда

$$p(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{P}(x \le X < x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Каждому значению $x\in(\alpha, \beta)$ соответствует определенное значение этого предела; получена функция $p(x)$ – *плотность распределения вероятностей* непрерывной случайной величины X. График функции $p(x)$ называют *кривой распределения*. Плотность распределения называют также *дифференциальной функцией распределения*, или дифференциальным законом распределения.

Если в равенстве (I) перейти к пределам, то получим $p(x)=F'(x)$. Следовательно, производная функции распределения равна плотности распределения.

Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал $[a, b)$ равна определенному интегралу от плотности распределения $p(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$\mathrm{P}(a \le X < b)=\int_a^b p(x)\,dx.$$

Свойства функции $p(x)$ – плотности распределения

1. Функция $p(x)$ является неотрицательной: $p(x) \geq 0$.

2. В точках дифференцируемости $F(x)$ выполняется равенство $F'(x) = p(x)$.

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$ от плотности распределения $p(x)$ равен единице: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$.

Математическое ожидание случайной величины

Если случайная величина X принимает конечное множество значений $x_1, x_2, ..., x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, ..., p_n$, то ее *математическим ожиданием* называют сумму произведений значений на их вероятности и обозначают $M(X)$.

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n, \; M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_ip_i .$$

Употребляются и другие обозначения: EX, a, m_x, m.

В случае случайной величины, принимающей счетное множество значений x_1, x_2, x_3 ..., соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, ...$:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i ,$$

если этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, определяется формулой

$$M(X) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} xp(x)dx.$$

Если случайная величина X может принимать любые значения из промежутка $(-\infty, +\infty)$, то

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx,$$

где $p(x)$ – плотность распределения, при условии, что интеграл сходится.

Математическое ожидание называют *средним значением* случайной величины, а также центром распределения.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание заключено между наименьшим значением a величины и наибольшим значением b: $a \leq M(X) \leq b$.

2. Математическое ожидание постоянной равно этой постоянной: $M(C) = C$.

3. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX)=CM(X)$.

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

5. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)M(Y).$$

Свойства 4 и 5 распространяются на n случайных величин $X_1,\ X_2,\ ...,\ X_n$.

Отклонением случайной величины называют разность $X-M(X)$. Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M(X-M(X))=M(X)-M(M(X))=M(X)-M(X)=0.$$

Дисперсия случайной величины

Дисперсией (или *рассеянием*) случайной величины X называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right),\ D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю: $D(C)=0$.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX)=C^2D(X)$.

3. Дисперсия суммы двух независимых величин равна сумме их дисперсий: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

4. Дисперсия разности двух независимых величин равна сумме их дисперсий; $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Выражения для дисперсии при соответствующем законе распределения (X принимает конечное множество значений, счетное множество, является непрерывной: обозначения: $a=M(X)$, $p(x)$ – плотность распределения):

$$D(X)=\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2 p_k\ ;$$

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-a)^2 p_k$$

при условии, что ряд сходится;

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 p(x)dx,$$

если этот интеграл сходится.

Средним квадратическим отклонением $\sigma(X)$ случайной величины X называют корень квадратный из ее дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Некоторые другие числовые характеристики

Ковариацией двух случайных величин X и Y называют математическое ожидание произведения их отклонений

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M((X - M(X)) \cdot (Y - M(Y))).$$

Для ковариаций верны равенства:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X) \cdot M(Y), \ \operatorname{cov}(X, X) = D(X),$$
$$\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X), \ D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\operatorname{cov}(X, Y).$$

Если случайные величины независимы, то $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Если $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, то случайные величины зависимы.

Коэффициент корреляции $\rho(X, Y)$ случайных величин X, Y определяется формулой $\rho(X, Y) = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Свойства коэффициента корреляции: 1) $|\rho(X, Y)| \leq 1$; 2) если величины X и Y независимы, $\rho(X, Y) = 0$; 3) если $Y = AX + B$, то $|\rho(X, Y)| = 1$.

Начальным моментом k-го порядка случайной величины X называют число ν_k, определяемое формулой $\nu_k = M\left(X^k\right)$, а *центральным моментом* – число $M_k = M\left((X - a)^k\right)$. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X – частные случаи моментов: $\nu_1 = M(X)$, $M_2 = D(X)$.

Некоторые законы распределения случайных величин

Вероятность того, что в серии из n испытаний событие A появится ровно k раз (и не появится $n - k$ раз) выражается *формулой Бернулли*.

$$\mathrm{P}_{k,n} = C_n^k p^k q^{n-k}, \text{ где } C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}, \text{ или } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где p – вероятность события A, q – вероятность события $\overline{A}$ $(q = 1 - p)$.

Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называют *биномиальным*. Для этого закона $M(X) = np$, $D(X) = npq$, $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Геометрическим распределением называют распределение, определяемое формулой $P(X=m)=(1-p)^{m-1}p$ $(0<p<1)$, $m=1, 2, 3, \ldots$. Для такого распределения $M(X)=\frac{1}{p}$, $D(X)=$ $=\frac{(1-p)}{p^2}$.

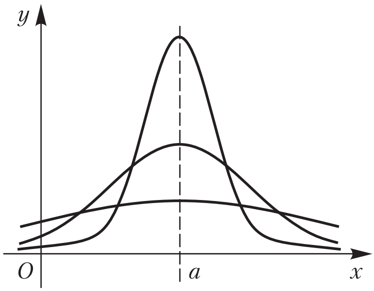

Рис. 13.4

Случайную величину называют *равномерно распределенной* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если

$$p(X)=\begin{cases}\frac{1}{(\beta-\alpha)}, & \alpha \le X \le \beta;\\ 0, & X<\alpha,\ X>\beta.\end{cases}$$

В этом случае $M(X)=\frac{(\alpha+\beta)}{2}$, $D(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$.

Нормальным распределением (или *распределением Гаусса*) называют распределение случайной величины *X*, определяемое формулой

$$P(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} \quad (\sigma>0),$$

где $a=M(X)$, $\sigma^2=D(x)$. График функции $P(X)$ называют *нормальной кривой* или *кривой Гаусса*. На рис. 13.4 изображены три кривых при одном и том же *a* и различных σ.

Для нормального распределения

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-\alpha}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(X)$ – *функция Лапласа* $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

Правило трех сигм выражается равенством

$$P(|X-a|<3\sigma)=0{,}9973.$$

(Модуль отклонения нормальной величины не превышает утроенного среднего квадратичного отклонения).

13.4. Комбинаторика и вероятность

Комбинаторика изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах. Формулы комбинаторики используют при непосредственном вычислении вероятностей.

Множества элементов, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся друг от друга только их порядком, называют *перестановками* этих элементов. Число возможных перестановок из n элементов обозначают через P_n; это число равно $n!$ (читается эн-факториал):

$$P_n = n!, \text{ где } n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

По определению полагают $0!=1$.

Размещениями называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо их составом, либо их порядком. Число всех возможных размещений определяется формулой

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Сочетаниями из n различных элементов по m называют множества, содержащие m элементов из числа заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний из n элементов по m выражается формулой

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

По определению полагают $C_n^0 = 1$.

Числа перестановок, размещений и сочетаний связаны равенством

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

Примеры

1. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

В соответствии с формулой $P_n = n!$ получаем $P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120.$

2. Сколькими способами можно избрать 3 лица на три одинаковые должности из десяти кандидатов?

Применяя формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, получаем

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

3. На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК?

Из пяти различных элементов можно составить P_5 перестановок: $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Значит, всего равновозможных исходов будет 120, и благоприятствующих данному событию – только одно. По формуле классической вероятности получаем $P(A) = \frac{1}{120} = 0{,}008$, где событие A – появление слова МИНСК.

4. На отрезке натурального ряда от 1 до 20 найти частоту простых чисел.

На указанном отрезке находятся следующие простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19; всего их 8. Так как $n = 20$, $m = 8$, то искомая частота $W = \frac{8}{20} = 0{,}4$.

5. При стрельбе по мишеням частота попаданий $W = 0{,}75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Из формулы $W = \frac{m}{n}$ следует, что $m = Wn$. Поскольку $W = 0{,}75$, $n = 40$, то $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$. Следовательно, было получено 30 попаданий.

6. Проведены три серии многократных подбрасываний монеты. Подсчитывалась частота появлений цифры (событие A), получены следующие результаты:

n	m	$W(A) = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Приведенные данные свидетельствуют о том, что частота появления цифры на верхней стороне монеты (когда она упадет) при достаточно больших n незначительно отличается от вероятности появления цифры при однократном испытании $P(A) = \frac{1}{2} = 0{,}5$, так как в этом случае $m = 1$, $n = 2$.

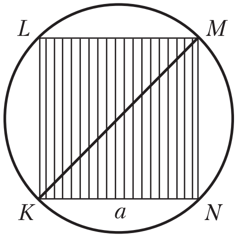

Рис. 13.5

7. В круг вписан квадрат (рис. 13.5). В круг наудачу брошена точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

Введем обозначения: событие A – попадание точки в квадрат, R – радиус круга, a – сторона вписанного квадрата, причем $a = \sqrt{2}R$ (так как $KM^2 = KN^2 + NM^2$, т.е. $2a^2 = 4R^2$, $a^2 = 2R^2$). Как известно, площадь круга $S = \pi R^2$, а площадь квадрата выражается формулой $S_1 = 2R^2$. По формуле геометрической вероятности $P(A) = \frac{S}{S_1}$ находим $P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 0{,}637$.

8. На плоскости область G ограничена эллипсом $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1$, а область g – эллипсом $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (рис. 13.6). В область G брошена точка. Найти вероятность того, что точка попадет в область g?

Как известно, площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна $S = \pi ab$. В данном случае $S_G = \pi \cdot 7 \cdot 4 = 28\pi$, $S_g = \pi \cdot 5 \cdot 3 = 15\pi$. Следовательно, $P(A) = \frac{15\pi}{28\pi} = \frac{15}{28} = 0{,}536$.

9. Подбрасывается два игральных кубика. Найти вероятность события A – «сумма выпавших очков не превосходит четырех».

Событие A есть сумма трех несовместных событий B_2, B_3, B_4 и заключается в том, что сумма очков равна соответственно 2, 3, 4. Поскольку $P(B_2) = \frac{1}{36}$, $P(B_3) = \frac{2}{36}$, $P(B_4) = \frac{3}{36}$, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий получим:

$$P(A) = P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

З а м е ч а н и е. Тот же результат можно получить непосредственно. Действительно, событию A благоприятствуют 6 элементарных исходов: (1,1), (1, 2), (2, 1), (1,3), (3,1), (2, 2). Всего элементарных исходов, образующих полную группу событий, $n = 36$, поэтому $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

10. Вероятность попадания при стрельбе по мишени для первого спортсмена рана 0,85, для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один спортсмен.

Введем обозначения событий: A – «попадание первого спортсмена», B – «попадание второго спортсмена», C – «попадание хотя бы одного из спортсменов». Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совмест-

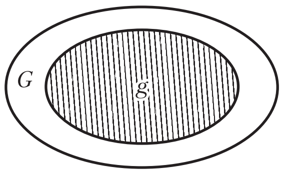

Рис. 13.6

ны, но независимы. По теореме сложения вероятностей $\mathrm{P}(A+B)=$ $=P(A)+P(B)-P(AB)$ в данном случае находим:

$$P(C)=(0{,}85+0{,}8)-0{,}85\cdot 0{,}8=0{,}97\,.$$

11. Симметричная монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что «цифра» появится два раза.

Введем обозначения: A_k – «выпадение цифры при k-том подбрасывании (k = 1, 2, 3), $\overline{A}_k$ – соответствующие противоположные события», A – «выпадение двух цифр при трех подбрасываниях», тогда $A=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$. Поскольку слагаемые в правой части попарно несовместны, то по теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A)=P\left(A_1A_2\overline{A}_3\right)+P\left(A_1\overline{A}_2A_3\right)+P\left(\overline{A}_1A_2A_3\right).$$

Принимая во внимание независимость событий A_1, A_2, A_3, находим искомую вероятность

$$P(A)=P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A}_3\right)+P(A_1)P\left(\overline{A}_2\right)P(A_3)+P\left(\overline{A}_1\right)P(A_2)P(A_3)=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}=0{,}375.$$

12. В урне находятся 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекаются 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

Введем обозначения событий: A_1 – «первый шар голубой», A_2 – «второй шар голубой», A_3 – «третий шар голубой», A – «все три шара голубые», тогда $A=A_1A_2A_3$. По теореме умножения вероятностей $P(A_1A_2A_3)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)$. Поскольку $P(A_1)=\dfrac{6}{14}$, $P(A_2/A_1)=\dfrac{5}{13}$, $P(A_3/A_1A_2)=\dfrac{4}{12}$, то

$$P(A)=\frac{6}{14}\cdot\frac{5}{13}\cdot\frac{4}{12}=\frac{5}{91}=0{,}055.$$

З а м е ч а н и е. Эту вероятность можно найти и по формуле $P(A)=\dfrac{m}{n}$. Поскольку в данном случае

$$n=C_{14}^3=\frac{14!}{3!11!},\ m=C_6^3=\frac{6!}{3!3!},\ P(A)=\frac{C_6^3}{C_{14}^3},\text{ то}$$

$$P(A)=\frac{6!}{3!3!}:\frac{14!}{3!11!}=\frac{6!\cdot 3!\cdot 11!}{14!\cdot 3!\cdot 3!}=\frac{6!\cdot 11!}{14!\cdot 3!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{12\cdot 13\cdot 14}=\frac{5}{91}=0{,}055.$$

13. В каждом из трех ящиков находится по 30 деталей. В первом ящике 27, во втором 28, в третьем 25 стандартных деталей. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Какова вероятность того, что все три извлеченные детали окажутся стандартными.

Вероятность того что из первого ящика вынута стандартная деталь (событие A) $P(A)=\frac{27}{30}=\frac{9}{10}$. Вероятность того, что из второго ящика вынута стандартная деталь (событие B) $P(B)=\frac{28}{30}=\frac{14}{15}$. Вероятность того, что из третьего ящика вынута стандартная деталь (событие C) $P(C)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. По теореме умножения независимых событий A, B, C $P(ABC)=\frac{9}{10}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{5}{6}=0{,}7.$

14. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60 % изготовлено на первом заводе и 40 % – на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 является стандартными, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, 85 удовлетворяют стандартам. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка будет стандартной.

Обозначим через A событие, состоящее в том, что взятая лампочка является стандартной. Введем две гипотезы: H_1 – «лампочка изготовлена первым заводом», H_2 – «лампочка изготовлена вторым заводом». Из условия задачи следует, что $P(H_1)=0{,}6$, $P(H_2)=0{,}4$; $P(A/H_1)=0{,}95$, $P(A/H_2)=0{,}85$. По формуле полной вероятности при n = 2 $P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)$ получаем

$$P(A)=0{,}6\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}85=0{,}57+0{,}34=0{,}91.$$

15. На фабрике машины a, b, c производят соответственно 20 %, 35 %, 45 % всех изделий. В их продукции брак составляет 3 %, 2 %, 4 %. Какова вероятность того, что случайно выбранное дефектное изделие произведено машинами a, b, c соответственно.

Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранное изделие является дефектным, а H_1, H_2, H_3 – события, состоящие в том что изделие произведено машинами a, b, c соответственно.

События H_1, H_2, H_3 образую полную группу событий. Числа 0,20, 0,35, 0,45 (20 %, 35 %, 45 %) являются вероятностями этих событий, т.е. $P(H_1)=0{,}20$, $P(H_2)=0{,}35$, $P(H_3)=0{,}45$. Аналогично, числа 0,03, 0,02, 0,04 (3 %, 2 %, 4 %) будут условными вероятностями события A

при выполнении гипотез H_1, H_2, H_3 соответственно, т.е. $P(A/H_1) = 0{,}03$, $P(A/H_2) = 0{,}02$, $P(A/H_3) = 0{,}04$.

Применив формулу полной вероятности, найдем

$$P(A) = 0{,}20 \cdot 0{,}03 + 0{,}35 \cdot 0{,}02 + 0{,}45 \cdot 0{,}04 = 0{,}031.$$

По формулам Бейеса получаем

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}20 \cdot 0{,}03}{0{,}031} = \frac{0{,}006}{0{,}031} = 0{,}1936;$$

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}02}{0{,}031} = \frac{0{,}007}{0{,}031} = 0{,}2258;$$

$$P(H_3/A) = \frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}04}{0{,}031} = \frac{0{,}018}{0{,}031} = 0{,}5806.$$

З а м е ч а н и е. Правильность вычислений подтверждается тем, что $P(H_1/A) + P(H_2/A) + P(H_3/A) = 0{,}1936 + 0{,}2258 + 0{,}5806 = 1$.

16. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытаний случайная величина X примет значение из интервала (1, 2).

Для этого интервала $F(x) = \dfrac{x}{2}$. В соответствии с формулой $P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ получаем

$$P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = \left(\frac{2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}5.$$

17. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найти плотность распределения величины X.

Плотность распределения $p(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны равенством $F'(x) = p(x)$, в соответствии с которым находим

$$p(x) = F'(x) = \frac{2x\left(1+x^2\right) - 2x \cdot x^2}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \text{ при } x > 0;$$

$$p(x) = F'(x) = 0 \text{ при } x \le 0 .$$

Следовательно, плотность распределения данной величины X определяется формулой

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0 \\ \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е. Эта функция удовлетворяет условиям: $p(x) \ge 0$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1.$ Действительно, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{2xdx}{\left(1+x^2\right)^2} =$ $= 0 + \int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{d\left(x^2+1\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}\Bigg|_0^{+\infty} = -(0-1) = 1.$

18. Дискретная случайная величина X со счетным множеством значений задана законом распределения

X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{1}{3^3}$	...	$\frac{1}{3^k}$	...
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	...	$\frac{1}{2^k}$	...

, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = 1.$

Найти математическое ожидание случайной величины X. В соответствии с определением находим

$$M(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \cdot \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6^k} = \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

19. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{3x^2}{8} & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X. В соответствии с формулой $M(X) = \int\limits_a^b xp(x)dx$ находим

$$M(X) = \int_0^2 x \frac{3x^2 dx}{8} = \int_0^2 \frac{3x^3 dx}{8} = \frac{3}{8} \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 1{,}5.$$

20. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения

X	0	1	2
P	0,3	0,5	0,2

Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

В соответствии с определением

$$M(X)=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5+2\cdot 0{,}2=0{,}9.$$

Запишем закон распределения квадрата отклонения этой величины, т.е. величины $(X-M(X))^2$:

$(X-M(X))^2$	$(0-0{,}9)^2$	$(1-0{,}9)^2$	$(2-0{,}9)^2$
P	0,3	0,5	0,2

Использую определение, получаем

$$D(X)=(0-0{,}9)^2\cdot 0{,}3+(1-0{,}9)^2\cdot 0{,}5+(2-0{,}9)^2\cdot 0{,}2=$$
$$=0{,}81\cdot 0{,}3+0{,}01\cdot 0{,}5+1{,}21\cdot 0{,}2=0{,}49.$$

Следовательно, $D(X)=0{,}49;$ $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=0{,}7.$

Замечание. Дисперсию можно вычислить и по формуле $D(X)=M\left(X^2\right)-(M(X))^2$. Найдем для этого математического ожидания квадрата случайной величины X, предварительно записав закон распределения случайной величины X^2:

X^2	0	1	4
P	0,3	0,5	0,2

$$M\left(X^2\right)=0\cdot 0{,}3+1\cdot 0{,}5+4\cdot 0{,}2=1{,}3.$$

В соответствии с указанной формулой получаем

$$D(X)^2=1{,}3-0{,}9^2=1{,}3-0{,}81=0{,}49.$$

21. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^3 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Сначала найдем плотность распределения $p(x)$. Так как $p(x) = F'(x)$, то

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 3x^2 & \text{при } 0 < x \le 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

По формуле $M(X) = \int\limits_a^b xp(x)dx$ вычисляем

$$M(X) = \int\limits_0^1 x \cdot 3x^2 dx = \int\limits_0^1 3x^3 dx = 3\frac{x^4}{4}\Bigg|_0^1 = \frac{3}{4}.$$

Применяя формулу $D(X) = \int\limits_\alpha^\beta (x-a)^2 p(x)dx$, находим

$$D(X) = \int\limits_0^1 \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 3x^2 dx = 3\int\limits_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right)x^2 dx =$$

$$= 3\int\limits_0^1 \left(x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{16}x^2\right)dx = 3\left(\frac{x^5}{5} - \frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = 3\left(\frac{1}{5} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16}\right) = \frac{3}{80}.$$

Следовательно, $D(X) = \frac{3}{80}$, $\sigma(X) = \sqrt{\frac{3}{80}} \approx 0{,}19.$

Задачи

1. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 6 человек?

2. На пяти одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово БРЕСТ?

3. Из 500 взятых наугад деталей оказалось 8 бракованных. Чему равна частота бракованных деталей?

4. Частота нормального всхода семян $W = 0{,}97$. Из высеянных семян взошло 970. Сколько семян было высеяно?

5. Точка брошена в область G, ограниченную эллипсом $x^2 + 4y^2 = 8$. Какова вероятность того, что она попадет в область g, ограниченную этим эллипсом и параболой $x^2 - 4y = 0$? (Сделайте чертеж).

6. Область G ограничена эллипсоидом $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, а область g – этим эллипсоидом и сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. В область G наугад зафиксирована точка. Какова вероятность того, что она принадлежит области g (событие А).

7. В ящике 6 голубых, 5 красных и 4 белых шара. Из ящика поочередно извлекают шар, не возвращая его обратно. Найдите вероятность того, что при первом извлечении появится голубой шар (событие А), при втором – красный (событие В), при третьем – белый (событие С).

8. На 30 одинаковых жетонах написаны 30 двузначных чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешены. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

9. Партия электрических лампочек на 20 % изготовлена первым заводом, на 30 % – вторым, на 50 % – третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0{,}01$, $q_2 = 0{,}005$, $q_3 = 0{,}006$. Найдите вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной.

10. Рабочий обслуживает 3 станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,02, для второго – 0,03, для третьего – 0,04. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в три раза больше, чем второго, а третьего в два раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наудачу деталь будет бракованной?

11. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{x}{3} & \text{при } 0 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытаний величина X примет значение из интервала (2, 3).

12. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ \dfrac{(1 - \cos x)}{2} & \text{при } 0 < x \le \pi, \\ 1 & \text{при } x > \pi. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения этой величины. Вычислите вероятность того, что величина X примет значение из интервала $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$.

13. Случайная величина X имеет плотность распределения $p(x) = \frac{c}{\left(e^x + e^{-x}\right)}$. Найдите значение параметра c, функцию распределения $F(x)$.

14. Найдите математическое ожидание случайной величины X, заданной функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 1 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

15. Найдите математическое ожидание случайной величины X, плотность распределения которой

$$p(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}\quad(-\infty<x<+\infty).$$

16. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Вычислите дисперсию этой величины.

17. Найдите дисперсию случайной величины X – числа очков, выпадающих при подбрасывании игрального кубика.

18. Даны все возможные значения случайной величины X: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, а также известны $M(X)=2{,}3$, $M\left(X^2\right)=5{,}9$. Найдите закон распределения этой дискретной величины.

19. Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения

$$p(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 2,\\ 0{,}5 & \text{при } 2<x\le 4,\\ 0 & \text{при } x>4.\end{cases}$$

20. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -2,\\ 0{,}2(x+2) & \text{при } -2<x\le 3,\\ 1 & \text{при } x>3.\end{cases}$$

Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ этой величины и вероятность $P(1<X<5)$.

Ответы

1. 720. **2.** $\frac{1}{120}=0{,}008$. **3.** $\frac{8}{500}=0{,}016$. **4.** 1000. **5.** $\pi+\frac{2}{3}$. **6.** $\frac{2}{3}$. **7.** $\frac{4}{91}\approx 0{,}044$. **8.** $\frac{2}{3}\approx 0{,}667$. **9.** 0,9935. **10.** 0,024. **11.** $\frac{1}{3}$. **12.** $p(x)=0$ при

$x \leq 0$ и $x > \pi$, $p(x) = \frac{(\sin x)}{2}$ в интервале $(0, \pi]$. $P\left(\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

13. $c = \frac{2}{\pi}$, $F(x) = \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} e^x$. **14.** $\frac{2}{3}$. **15.** $M(X) = 0$. **16.** $D(X) = 1{,}2$.

17. $D(X) = \frac{35}{12}$. **18.**

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

19. $M(X) = 3$, $D(X) = \frac{1}{3}$, $\sigma(X) \approx 0{,}58$. **20.** $M(X) = 0{,}5$, $D(X) = \frac{6{,}25}{3} \approx 2{,}083$; $\sigma(X) \approx 1{,}443$; $p(1 < X < 5) \approx 0{,}4$.

X

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Глава 14. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Математическая статистика разрабатывает методы сбора, описания и анализа результатов наблюдений массовых случайных явлений с целью изучения существующих в них закономерностей.

14.1. Выборочный метод

Выборочным методом называют метод исследования общих свойств совокупностей каких-либо объектов на основе изучения свойств лишь части этих объектов.

Статистической совокупностью называют множество однородных объектов, объединенных по некоторому отличительному признаку. *Генеральной совокупностью* называют множество всех значений признака. *Выборочной совокупностью*, или *выборкой*, называют часть значений признака, случайно отобранных из генеральной совокупности. *Объемом совокупности* (генеральной или выборочной) называют число ее объектов.

При изучении некоторого признака выборки производят измерения. Результаты измерений $x_1, x_2, ..., x_n$, записанные в возрастающем порядке $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$, называют *дискретным вариационным рядом*, а сами значения – *вариантами*. Среди вариант могут быть равные, тогда вариационный ряд принимает вид

Значения признака (X)	x_1	x_2	...	x_k
Частоты (m)	m_1	m_2	...	m_k

Мода – это значение признака, наиболее часто встречающееся в вариационном ряду; обозначается M_0.

Медиана – значение признака ряда, относительно которого ряд делится на две равные части по числу вариант; обозначается M_e. Для дискретного ряда с нечетным числом вариант $2m+1$ медиана равна серединному варианту x_{m+1}. Для ряда с четным числом $2m$ медиана равна полусумме серединных вариант: $M_e = \frac{(x_m + x_{m+1})}{2}$.

Рассматривают также признаки, которые могут принимать любые значения из некоторого интервала. Такие признаки называют непрерывно варьирующими. Данные, полученные в результате наблюдения непрерывно варьирующего признака, представляют в виде *интервального вариационного ряда*:

Значения признака	Частота
(x_0, x_1)	n_1
(x_1, x_2)	n_2
...	...
(x_{k-1}, x_k)	n_k
Сумма	n (объем выборки)

14.2. Статистическое распределение. Полигон и гистограмма. Эмпирическая функция распределения

Статистическим распределением называют соответствие между вариантами и их частотами; его задают посредством таблицы:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Разности $x_1 - x_0,\ x_2 - x_1,\ ...,\ x_k - x_{k-1}$ называют *интервальными разностями*. Разность между наибольшим и наименьшим значением признака X, т.е. $x_k - x_0$ (или $b - a$) называют *размахом вариации*.

Полигоном частот называют ломаную линию, соединяющую точки $M_1(x_1, n_1),\ M_2(x_2, n_2),\ ...,\ M_k(x_k, n_k)$, где x_i $(i = 1, 2, ..., k)$ – варианты, n_i – их частоты $(i = 1, 2, ..., k)$.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников с основаниями $h = x_i - x_{i-1}$ и высотами $\frac{n_i}{h}$ $(i = 1,\ 2,\ 3\ ...,\ k)$.

Эмпирической функцией распределения, или *функцией распределения выборки*, называют функцию, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Свойства этой функции $F^*(x)$: 1) $0 \le F^*(x) \le 1$. 2) $F^*(x)$ – неубывающая функция. 3) если a – наименьшая, b – наибольшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x \le a$; $F^*(x) = 1$ при $x \ge b$.

14.3. Оценка параметров по выборке. Числовые характеристики выборки

Пусть случайная величина X имеет распределение $F(x,\alpha)$, содержащее неизвестный параметр α. Требуется оценить параметр α, т.е. приближенно определить его значение по некоторой выборке $x_1, x_2, ..., x_n$. Оценку параметра α обозначим через $\tilde{\alpha}$; очевидно $\tilde{\alpha}$ зависит от $x_1, x_2, ..., x_n$, т.е. $\tilde{\alpha}=\tilde{\alpha}\ (x_1, x_2, ..., x_n)$. Отметим, что $\tilde{\alpha}$ является случайной величиной, так как в i-ой серии испытаний принимает некоторое значение $\tilde{\alpha}_i$.

Параметр $\tilde{\alpha}$ является подходящей оценкой параметра α, если:

1) $M(\tilde{\alpha})=\alpha$; 2) $P(|\tilde{\alpha}-\alpha|<\varepsilon)=1$; 3) дисперсия $D(\tilde{\alpha})$ является минимальной.

Параметр $\tilde{\alpha}$, удовлетворяющий условиям 1) – 3), называют соответственно *несмещенной*, *состоятельной* и *эффективной оценкой параметра* α генеральной совокупности признака X.

Выборочным средним, или *средним значением выборки*, называют число

$$x_{\text{в}}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i;\ \ x_{\text{в}}=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i,$$

где x_i – варианты выборки n_i-частоты x_i $(i=1, 2, ..., k)$, $n=\sum\limits_{i=1}^{k}n_i$ – объем выборки.

Выборочное среднее является несмещенной, состоятельной и эффективной оценкой для математического ожидания генеральной совокупности.

Выборочной дисперсией случайной величины X называют число

$$D^*(X)=S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \text{ или } D^*(X)=S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2,$$

где $\bar{x}$ – выборочное среднее.

Поскольку $M\left(S^2\right)=\dfrac{n-1}{n}D(X)$, то в качестве *несмещенной* оценки принимают величину

$$\bar{D}(X)=S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \text{ или } \bar{D}(X)=S_0^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2.$$

Величину S_0^2 называют *эмпирической* (или *исправленной*) *дисперсией*, а S_0 – *исправленным средним квадратическим отклонением*, или *эмпирическим стандартом*.

Если в каждом из наблюдений рассматриваются одновременно два признака X и Y с выборками соответственно:

X	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Y	y_1	y_2	...	y_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

,

то для характеристики их связи вводится *момент корреляции*

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}),$$

где $\overline{x}$ и $\overline{y}$ – выборочные средние признаков X и Y, n – объем выборки.

Коэффициентом корреляции называют величину

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y},$$

где S_x, S_y – выборочные средние квадратические отклонения.

Величину $M_r = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - x)^r$ называют *центральным моментом порядка r*. *Асимметрией выборки* называют число $a_S = \dfrac{M_3}{S^3}$, *эксцессом* (*крутизной*) выборки – число $e_S = \dfrac{M_4}{S^4} - 3$.

Асимметрия и *эксцесс* являются характеристиками отклонения эмпирического распределения от нормального.

14.4. Доверительный интервал. Доверительная вероятность

Оценку, определяемую одним числом, называют *точечной*. Оценку, определяемую двумя числами – концами интервалов, называют *интервальной*.

Доверительной вероятностью (*надежностью*) оценки $\tilde{\alpha}$ параметра α называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство

$$P(|\alpha - \tilde{\alpha}| < \delta) = \gamma \text{ или } P(\tilde{\alpha} - \delta < \alpha < \tilde{\alpha} + \delta) = \gamma.$$

Эта формула означает следующее: вероятность того, что интервал $(\tilde{\alpha} - \delta, \tilde{\alpha} + \delta)$ заключает в себе (покрывает) неизвестный параметр α равна γ. Интервал $(\tilde{\alpha} - \delta, \tilde{\alpha} + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр α с заданной надежностью γ, называют *доверительным интервалом*, а его концы – *доверительными границами*.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение с заданным средним квадратическим отклонением σ и неизвестным математическим ожиданием a, то

$$P\left(x_{\text{в}} - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} < a < x_{\text{в}} + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right) = \gamma,$$

где $x_в$ – выборочное среднее, $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$, $2\Phi(t) = \gamma$, т.е. доверительный интервал $l = \left(x_в - \frac{\sigma t}{\sqrt{n}},\ x_в + \frac{\sigma t}{\sqrt{n}} \right)$ покрывает неизвестный параметр a с надежностью γ. Значение γ задано заранее; число $\Phi(t)$ определяется формулой $2\Phi(t) = \gamma$; значение t находится с помощью таблиц значений функции Лапласа; точность оценки выражается формулой $\delta = \frac{\sigma t}{\sqrt{n}}$.

14.5. Метод наименьших квадратов. Эмпирические формулы

При обработке результатов наблюдений часто встречаются со следующей задачей: получен ряд значений переменных x и y

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

Требуется найти аналитическое выражение $y = y(x)$.

Искомую формулу можно получить с помощью метода наименьших квадратов, называют ее *эмпирической формулой.*

Если установлено, что между x и y существует линейная зависимость $y = ax + b$, то значения параметров a и b этой эмпирической формулы находят по методу наименьших квадратов из системы уравнений

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Примеры

1. Задано распределение выборки объема $n = 60$

x_i	4	10	16	20	24	30
n_i	15	18	6	4	5	12

Построить полигон частот. Чему равна мода этого распределения?

В системе координат Oxn_i строим точки $M_1(4, 15)$, $M_2(10, 18)$, $M_3(16, 6)$, $M_4(20, 4)$, $M_5(24, 5)$, $M_6(30, 12)$. Соединяем последовательно эти точки отрезками прямых. Полученная ломаная является полигоном частот данного распределения (рис. 14.1).

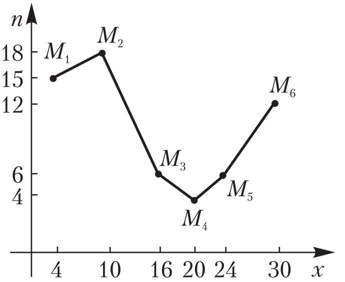

Рис. 14.1

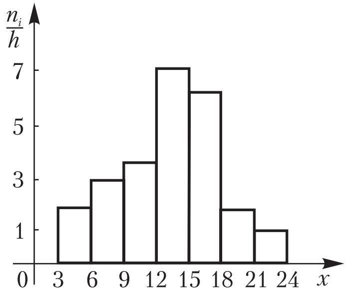

Рис. 14.2

Мода – значение признака, наиболее часто встречающегося в вариационном ряду. В данном случае $M_0 = 10$.

2. Задано интервальное распределение частот

Частичный интервал длины $h = 3$	3–6	6–9	9–12	12–15	15–18	18–21	21–24
Сумма частот вариант интервала n_i	6	9	12	21	18	6	3
Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	2	3	4	7	6	2	1

Построить гистограмму частот.

В системе координат $Ox\frac{n_i}{h}$ строим прямоугольники с основаниями $h = 3$ и высотами $\frac{n_i}{h}$. Полученная ступенчатая фигура является гистограммой частот (рис. 14.2).

3. Найти выборочное среднее распределения выборки, заданной в примере 1.

В соответствии с определением получаем

$$x_{\text{в}} = \overline{x} = \frac{1}{60}\left(4\cdot 15 + 10\cdot 18 + 16\cdot 6 + 20\cdot 4 + 24\cdot 5 + 30\cdot 12\right) =$$

$$= \frac{1}{60}(60 + 180 + 96 + 80 + 120 + 360) = \frac{896}{60} \approx 14{,}9.$$

4. Если выборка задана распределением равноотстоящих вариант, то выборочное среднее $x_{\text{в}}$ и выборочную дисперсию $D_{\text{в}}$ удобно находить методом произведений по формулам $x_{\text{в}} = M_1^* h + C$, $D_{\text{в}} = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2\right)h^2$, где C – варианта, имеющая наибольшую частоту (ложный нуль), h – шаг $(h = x_{i+1} - x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1)$, M_1^* – условный момент первого порядка, M_2^* – условный момент второго порядка, $u_i=\frac{(x_i-C)}{h}$, $M_1^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_iu_i$, $M_2^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_iu_i^2$, u_i – условная варианта, n – объем выборки, n_i – частота варианты x_i $\left(\sum_{i=1}^{k}n_i=n\right)$.

Методом произведений найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение по статистическому распределению выборки

x_i	10,2	10,9	11,6	12,3	13,0	13,7	14,4
n_i	8	10	60	12	5	3	2

В данном случае $h=0,7$, $n=100$, $C=11,6$. С помощью формулы $u_i=\frac{(x_i-C)}{h}$ находим условные варианты u_i и составляем таблицу (табл. 1) значений соответствующих величин, входящих в формулы $x_{\text{в}}=M_1^*h+C$, $D_{\text{в}}=\left(M_2^*-\left(M_1^*\right)^2\right)h^2$, где $M_1^*=\frac{13}{100}=0,13$, $M_2^*=\frac{133}{100}=1,33$. В итоге получаем $x_{\text{в}}=0,13\cdot 0,7+11,6=11,691\approx 11,7$, $D_{\text{в}}=$ $=\left(1,33-0,13^2\right)\cdot 0,7^2=0,643419\approx 0,64$, $\sigma_2=0,8$.

Таблица 1

i	x_i	n_i	u_i	n_iu_i	$n_iu_i^2$
1	10,2	8	–2	–16	32
2	10,9	10	–1	–10	10
3	11,6	60	0	0	0
4	12,3	12	1	12	12
5	13,0	5	2	10	20
6	13,7	3	3	9	27
7	14,4	2	4	8	32
Σ		100		13	133

Ответ. $x_{\text{в}}=11,7$, $D_{\text{в}}=0,64$, $\sigma_{\text{в}}=\sqrt{0,64}=0,8$.

5. Найти эмпирическую функцию по распределению выборки

Варианты x_i	6	8	12	15
Частоты n_i	2	3	10	5

Объем выборки $n=\sum_{i=1}^{4} n_i = 2+3+10+5=20.$ Наименьшая варианта $x_1=6,$ поэтому $F^*(x)=0,$ если $x \le 6.$ Значение $x<8,$ т.е. $x_1=6,$ наблюдалось 2 раза, поэтому $F^*(x)=\frac{2}{20}=0{,}1,$ если $6<x\le 8.$

Значение $x<12,$ т.е. $x_1=6,$ $x_2=8,$ наблюдались 2 + 3 = 5 раз, поэтому $F^*(x)=\frac{5}{20}=0{,}25,$ если $8<x\le 12.$ Значение $x<15,$ т.е. $x_1=6,$ $x_2=8,$ $x_3=12$ наблюдались 2 + 3 + 10 = 15 раз, поэтому $F^*(x)=\frac{15}{20}=0{,}75,$ если $12<x\le 15.$ Поскольку $x_4=15$ – наибольшая варианта, то $F^*(x)=1,$ если $x>15.$

Следовательно, искомая эмпирическая функция определяется формулами

$$F^*(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x\le 6, \\ 0{,}1 & \text{при } 6<x\le 8, \\ 0{,}25 & \text{при } 8<x\le 12, \\ 0{,}75 & \text{при } 12<x\le 15, \\ 1 & \text{при } x>15. \end{cases}$$

График функций изображен на рис. 14.3.

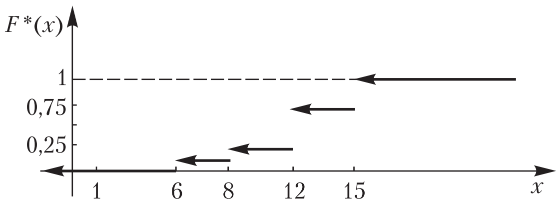

Рис. 14.3

6. С помощью метода наименьших квадратов найти параметры эмпирической формулы $y=ax+b$ по результатам измерений переменных x и y:

x	–2	–1	0	1	2	3
y	5,6	5	4,3	4	3,6	3

Результаты измерений и итоги их обработки запишем в табл. 2.

Таблица 2

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	–2	5,6	–1,2	4
2	–1	5	–5	1
3	0	4,3	0	0
4	1	4	4	1
5	2	3,6	7,2	4
6	3	3	9	9
Σ	3	25,5	4	19

В последней строке записаны коэффициенты системы уравнений для определения a и b, которая в данном случае принимает вид $19a+3b=4,\ \ 3a+6b=25{,}5,$ откуда $a=-0{,}5,\ \ b=4{,}5.$

Следовательно, $y=-0{,}5x+4{,}5.$

7. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормальной случайной величины с надежностью $\gamma=0{,}95,$ зная выборочную среднюю $x_\text{в}=75{,}15,$ объем выборки $n=64,$ среднее квадратическое отклонение $\sigma=8.$

Доверительный интервал определяется формулой

$$l=\left(x_\text{в}-\frac{\sigma t}{\sqrt{n}},\ x_\text{в}+\frac{\sigma t}{\sqrt{n}}\right).$$

Чтобы найти концы доверительного интервала, нужно знать значение t. Это значение определим из равенства $2\Phi(t)=0{,}95,$ откуда $\Phi(t)=0{,}475.$ По таблице значений функции Лапласа находим $t=1{,}96.$ Подставляя значения $x_\text{в},\ \sigma,\ t,\ n$ в выражения для концов доверительного интервала, получаем $x_\text{в}-\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}=75{,}15-\dfrac{8\cdot 196}{\sqrt{64}}=75{,}15-1{,}96=73{,}19,$ $x_\text{в}+\dfrac{\sigma t}{\sqrt{n}}=77{,}11.$

Следовательно, $73{,}19<a<77{,}11,$ т.е. (73,19; 77,11) – искомый доверительный интервал.

Задачи

1. Задано распределение выборки объема $n=60$

x_i	3	9	15	21	27	33	40
n_i	12	6	18	4	3	15	2

Постройте полигон частот. Чему равны мода и медиана? Запишите статистическое распределение относительных частот.

2. Задано интервальное распределение частот

Частичный интервал $h=2$	5–7	7–9	9–11	11–13	13–15	15–17
Сумма частот вариант интервала n_i	8	10	6	12	14	4
Плотность частоты $\frac{n_i}{h}$	4	5	3	6	7	2

Постройте гистограмму частот.

3. Задано распределение выборки объема $n=60$.

x_i	2	8	14	20	26	32	38
n_i	12	18	4	3	6	12	5

Найдите выборочное среднее и выборочную дисперсию. Чему равны мода и медиана для этой выборки?

4. Найдите эмпирическую функцию по распределению выборки

x_i	5	7	11	14
n_i	2	3	10	5

5. Найдите доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормальной случайной величины с надежностью $\gamma=0{,}95$, зная выборочную среднюю $x_{\text{в}}=65{,}25$, объем выборки $n=81$, среднее квадратическое отклонение $\sigma=10$.

6. С помощью метода наименьших квадратов определите параметры a и b эмпирической формулы $y=ax+b$ по результатам измерений переменных x и y:

x	–1	–2	0	1	2	3
y	2,8	2,3	3,6	4	4,7	5

7. Методом произведений найдите выборочное среднее, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратичное отклонение распределения выборки:

x_i	12	14	16	18	20	22
n_i	5	15	50	16	10	4

8. С помощью метода наименьших квадратов определите параметры a, b, c эмпирической формулы $y=ax^2+bx+c$ по результатам измерений переменных x и y:

x	1	2	3	4	5	6	7
y	0,5	0,5	1	2	3	5	8

Ответы

1. $M_0 = 15,\ M_e = 21;\ \omega_i = \dfrac{n_i}{60}$. **3.** $D_в = 15{,}8,\ x_в = 20;\ M_0 = 8,\ M_e = 20$.

4. $F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 5, \\ 0{,}1, & \text{если } 5 < x \le 7, \\ 0{,}25, & \text{если } 7 < x \le 11, \\ 0{,}75, & \text{если } 11 < x \le 14, \\ 1, & \text{если } x > 14. \end{cases}$ **5.** $(63{,}07;\ 67{,}43)$. **6.** $y = 0{,}56x + 3{,}45$.

7. $D_в = 4{,}88,\ \sigma_в = 2{,}21,\ x_в = 16{,}46$. **8.** $y = 0{,}046x^2 + 0{,}796x - 1{,}234$.

Указание. Используйте формулы, приведенные в книге: Гусак А. А. Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. – Минск: ТетраСистемс, 2003. – Т. 2. – С. 48.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гнеденко, Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука, 1965. – 400 с.

2. *Гусак, А. А.* Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 1. – 544 с.

3. *Гусак, А. А.* Высшая математика: учебник для студентов вузов: в 2 т. / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – Т. 2. – 448 с.

4. *Гусак, А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.

5. *Гусак, А. А.* Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 416 с.

6. *Гусак, А. А.* Теория вероятностей: справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 288 с.

7. *Ниворожкина, Л. И.* Теория вероятностей и математическая статистика / Л. И. Ниворожкина, З. А. Морозова. – М.: Эксмо, 2008. – 432 с.

БИОГРАФИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ

Бейес Томас (1702–1761) – английский математик, член Лондонского Королевского общества. Занимался исследованиями по теории вероятностей.

Бернулли – семейство швейцарских ученых. В различных поколениях математиками были: Якоб (1654–1705), Иоганн (1667–1748), Николай (1687–1759), Николай (1695–1726), Даниил (1700–1782), Иоганн (1744–1807), Якоб (1759–1789). Трое из них работали в Петербурге.

Бернулли Иоганн (1667–1748) – профессор математики Гронингенского (1695) и Базельского (1705) университетов, почетный член Петербургской академии наук (1725). Ему принадлежит первое систематическое изложение дифференциального и интегрального исчисления. Он разрабатывал методы интегрирования дифференциальных уравнений, включая и уравнение, позже названное его именем. Им предложено правило раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$.

Бернулли Якоб (1654–1705) – профессор Базельского университета разрабатывал проблемы анализа бесконечно малых, алгебры, арифметики, теории рядов, теории вероятностей. В книге «Искусство предположений» им доказана теорема (названная позже его именем), имеющая важное значение в теории вероятностей и математической статистике.

Гаусс Карл Фридрих (1777–1855) – немецкий математик, астроном, физик и геодезист, член Лондонского королевского общества (1804), Парижской академии (1820), Петербургской академии наук (1824). С 1807 г. – профессор математики Гёттингенского университета и директор астрономической обсерватории. Работы Гаусса оказали большое влияние на развитие алгебры, теории чисел, дифференциальной геометрии, теории вероятностей, геодезии, небесной механики, астрономии, теории электричества и магнетизма.

Дирихле Петер Густав (1805–1859) – немецкий математик, член Берлинской, иностранный член-корреспондент Петербургской и других академий. Работал в университетах Германии: Берлинском (1831–1855), Гёттингенском (1855–1859). Основные исследования вел по математическому анализу, теории чисел, механике, математической физике.

Коши Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик, член Парижской, почетный член Петербургской и других академий. Преподавал в Политехнической школе, в Парижском университете. Научные труды относятся к математическому анализу, дифференциальным уравнениям, алгебре, геометрии, теории чисел, теории упругости, математической физике, оптике.

Крамер Габриель (1704–1752) – швейцарский математик. С 1724 г. преподавал математику в Женевской кальвинистской школе, профессор (с 1734 г.). Основное направление исследований – высшая алгебра и аналитическая геометрия. Заложил основы теории определителей, установил правило решения систем линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Исследовал алгебраические линии высших порядков.

Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик и механик, член Берлинской академии (1759) и директор ее математического класса (1766–1787), почетный член Парижской (1772), Петербургской академии (1776). С 1787 г. работал в Париже. Ему принадлежат важные исследования по математическому анализу, дифференциальным уравнениям, алгебре, теории чисел, механике, астрономии, математической картографии.

Лаплас Пьер Симон (1749–1827) – французский математик, физик и астроном, член Парижской и Французской академий, почетный член Петербургской академии. Активно участвовал в реорганизации системы высшего образования во Франции, в создании Нормальной и Политехнической школ. Автор фундаментальных исследований по дифференциальным уравнениям, небесной механике, теории вероятностей, алгебре. Во времена Наполеона был министром внутренних дел (1799).

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий математик, физик, изобретатель, философ, юрист, историк, языковед, член Лондонского королевского общества (1673), член Парижской академии (1700). Ему принадлежат первые публикации по дифференциальному и интегральному исчислению (1684). Он ввел ряд математических терминов: дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, абсцисса, ордината, координата, алгоритм; предложил знаки дифференциала, интеграла.

Лейбниц трижды (1711, 1712, 1716) встречался с Петром I, по просьбе которого разработал ряд проектов развития образования и государственного управления в России.

Лопиталь Гийом Франсуа (1661–1704) – французский математик. Автор первого учебника по дифференциальному исчислению (1696), в основу которого положены лекции И. Бернулли. Этот учебник неоднократно переиздавался во Франции и в других странах. Опубликовано и другое его сочинение, посвященное теории линий второго порядка.

Маклорен Колин (1698–1746) – шотландский математик, член Лондонского королевского общества работал в Эдинбургском университете. Основные его труды относятся к теории рядов, исчислению конечных разностей, теории плоских кривых высших порядков, механике.

Ньютон Исаак (1643–1727) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (1672) и его президент (1703), иностранный член Парижской академии (1699). Окончил Кембриджский университет (1665). С именем Ньютона связаны открытие закона всемирного тяготения, создание теоретических основ механики и астрономии, разработка дифференциального и интегрального исчисления (почти одновременно с Лейбницем и независимо от него). Основными понятиями у Ньютона были: флюента (переменная величина, зависящая от времени), флюксия (скорость изменения флюенты), момент (бесконечно малое приращение флюенты). Работы по теории флюксий впервые были опубликованы в 1711 г.

Ролль Мишель (1652–1719) – французский математик, член Парижской академии наук. Разработал метод отделения действительных корней уравнения на частном случае теоремы, названной позже его именем.

Тейлор Брук (1685–1731) – английский математик, член Лондонского королевского общества. Основные его исследования относятся к математическому анализу, механике и баллистике. Он предложил формулу для разложения функций в степенные ряды, позже названной его именем.

Фурье Жан Жозеф (1768–1830) – французский математик, член Парижской, иностранный почетный член Петербургской академии. Основные работы относятся к теории теплопроводности, уравнениям с частными производными. Разработал учение о представлении функций в виде тригонометрических рядов (ряды Фурье). Первые его работы посвящены алгебре.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Гусак Алексей Адамович
Бричикова Елена Алексеевна

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Пособие для студентов вузов

Ответственный за выпуск *А. Д. Титов*
Компьютерная верстка *К. Н. Иваш*
Дизайн обложки *Н. М. Перепечко*

Подписано в печать 09.02.2012.
Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага типографская № 2. Гарнитура Таймс.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 12,09. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 2000 экз. Заказ

Научно-техническое общество с ограниченной ответственностью
«ТетраСистемс».
ЛИ № 02330/0494056 от 03.02.2009.
Ул. Железнодорожная, 9, 220014, г. Минск. Тел. 219-74-01,
e-mail: rtsminsk@mail.ru, http://www.ts.by.

Унитарное полиграфическое предприятие
«Витебская областная типография».
ЛП № 02330/0494165 от 03.04.2009.
Ул. Щербакова-Набережная, 4, 210015, г. Витебск.