

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. З. Ильязова

ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлениям
09.03.02 «Информационные системы и технологии»,
38.03.01 «Экономика»

Ульяновск
УлГТУ
2016

УДК 512.64 (075)

ББК 22.143я7

И 49

Рецензенты:

доцент кафедры «Высшая математика» УлГПУ кандидат физико-математических наук, доцент Г. С. Прокопьев;

доцент кафедры «Математика и физика» УГСХА кандидат физико-математических наук, доцент Т. А. Джабраилов

*Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия*

Ильязова, Д. З.

И 49 Основы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие / Д. З. Ильязова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 237 с.

ISBN 978-5-9795-1534-2

Учебное пособие «Основы линейной алгебры и аналитической геометрии» содержит следующие разделы ФГОС ВО по математике и линейной алгебре: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия. Отличительной особенностью пособия является то, что весь учебно-методический материал разделён на главы, соответствующие одной теме программы. Каждая глава содержит теорию с примерами, её иллюстрирующую; задачи с ответами; тест и типовой расчёт с образцом решений задач. Последняя глава содержит задачи с экономическим содержанием, для части из которых приведены решения. Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 09.03.02, 38.03.01, а также для студентов технических и экономических вузов; для преподавателей.

УДК 512.64 (075)

ББК 22.143я7

ISBN 978-5-9795-1534-2

© Ильязова Д. З., 2016

© Оформление. УлГТУ, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	8
ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА	9
1.1. Матрицы и действия над ними	9
1.1.1. Основные сведения о матрицах	9
1.1.1. Ступенчатая матрица. Элементарные (эквивалентные) преобразования матрицы	10
1.1.2. Действия над матрицами	12
1.2. Определители	14
1.2.1. Основные понятия	14
1.2.2. Определитель матрицы n -го порядка	16
1.2.3. Свойства определителей	18
1.3. Обратная матрица	20
1.4. Ранг матрицы и способы его нахождения	23
1.4.1. Минор матрицы. Метод окаймляющих миноров	23
1.4.2. Метод элементарных преобразований	25
1.5. Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными	26
1.5.1. Основные понятия	26
1.5.2. Решение системы методом обратной матрицы	27
1.5.3. Решение системы методом Крамера	29
1.5.4. Решение системы уравнений методом Гаусса	31
1.6. Решение систем m линейных уравнений с n неизвестными	33
1.6.1. Критерий совместности системы линейных уравнений	33
1.6.2. Однородная система линейных уравнений	36
1.6.3. Фундаментальная система решений	38
1.7. Линейные пространства	41
1.7.1. Понятие линейного пространства	41
1.7.2. Линейная зависимость и независимость векторов	42

1.7.3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты вектора.....	44
1.7.4. Матрица перехода от одного базиса к другому.....	48
1.8. Евклидовы пространства	49
1.8.1. Евклидово пространство	49
1.8.2. Ортонормированный базис.....	51
1.9. Линейные операторы	51
1.9.1. Линейный оператор	51
1.9.2. Матрица линейного оператора.....	53
1.9.3. Собственные значения и собственные векторы.....	54
1.10. Контрольные вопросы.....	57
1.11. Тест «Линейная алгебра»	58
1.12. Задачи	65
1.13. Ответы.....	74
1.14. Типовой расчёт «Линейная алгебра».....	78
1.15. Решение типового расчёта.....	88
ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА	95
2.1. Векторы	95
2.1.1. Основные понятия	95
2.1.2. Линейные операции над векторами.....	96
2.1.3. Проекция вектора на ось	98
2.1.4. Разложение вектора по базису. Длина вектора	100
2.1.5. Действия над векторами, заданными своими координатами..	101
2.2. Скалярное произведение векторов.....	102
2.2.1. Определение	102
2.2.2. Свойства скалярного произведения.....	103
2.2.3. Выражения скалярного произведения через координаты векторов. Направляющие косинусы	103
2.2.4. Приложение скалярного произведения (работа постоянной силы).....	105

2.3. Векторное произведение векторов.....	106
2.3.1. Определение, свойства.....	106
2.3.2. Выражение векторного произведения через координаты.....	107
2.3.3. Приложения векторного произведения.....	108
2.4. Смешанное произведение векторов.....	111
2.4.1. Определение.....	111
2.4.2. Свойства смешанного произведения.....	112
2.4.3. Выражение смешанного произведения через координаты векторов.....	112
2.4.4. Приложения смешанного произведения.....	113
2.5. Контрольные вопросы.....	115
2.6. Тест «Векторная алгебра».....	116
2.7. Задачи.....	121
2.8. Ответы.....	124
2.9. Типовой расчёт «Векторная алгебра».....	125
2.10. Решение типового варианта.....	132
ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	135
3.1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой.....	135
3.1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.....	135
3.1.2. Общее уравнение прямой.....	136
3.1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку.....	137
в данном направлении.....	137
3.1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.....	137
3.1.5. Уравнение прямой в отрезках.....	138
3.1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.....	139
3.1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности.....	141
и перпендикулярности прямых.....	141
3.1.8. Расстояние от точки до прямой.....	142
3.2. Кривые на плоскости.....	143

3.2.1. Уравнение линии на плоскости.....	143
3.2.2. Эллипс	144
3.2.3. Гипербола	146
3.2.4. Парабола	148
3.3. Преобразование координат. Уравнение линии в полярной системе координат. Параметрические уравнения линии.	151
3.3.1. Преобразование системы координат	151
3.3.2. Уравнение линии в полярной системе координат. Параметрические уравнения линии.....	154
3.4. Контрольные вопросы.....	159
3.5. Тест «Аналитическая геометрия на плоскости»	160
3.6. Задачи	167
3.7. Ответы	173
3.8. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия на плоскости»	176
3.9. Решение типового варианта	180
3.10. Прямая и плоскость в пространстве	183
3.10.1. Векторное уравнение плоскости	183
3.10.2. Общее уравнение плоскости	183
3.10.3. Уравнение плоскости в отрезках	185
3.10.4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.....	185
3.10.5. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.....	186
3.10.6. Уравнения прямой в пространстве	188
3.10.7. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.....	191
3.10.8. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.....	193
3.10.9. Пересечение прямой с плоскостью. Условия принадлежности прямой плоскости	195
3.11. Поверхности второго порядка.....	196

3.12. Контрольные вопросы.....	200
3.13. Тест «Аналитическая геометрия в пространстве».....	201
3.14. Задачи	207
3.15. Ответы	211
3.16. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия в пространстве»..	214
3.17. Решение типового варианта	219
ПРИЛОЖЕНИЕ. ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ	
СОДЕРЖАНИЕМ.....	221
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	235
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	236

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования (ФГОС ВО). Оно содержит учебно-методические материалы по следующим разделам: линейная алгебра, векторная алгебра и аналитическая геометрия. Указанные разделы, согласно требованиям ФГОС ВО, входят в учебные программы по дисциплинам «Математика» для инженерных, технологических и других нематематических специальностей и «Линейная алгебра» для экономических специальностей вузов.

Современный процесс обучения математике требует не только новые методики, но и создание соответствующей учебной литературы.

Целью написания данного пособия является разработка современной учебно-методической литературы нового поколения, которая предполагает использование дифференцированного подхода к обучению студентов с различным уровнем математической подготовки. Данное пособие будет полезно для преподавателей и студентов вузов.

Структура пособия следующая. Весь материал разделён на главы и параграфы. В каждой главе в параграфах изложена теория, которая для удобства её использования разбита на пункты. В каждом пункте приведены примеры, иллюстрирующие соответствующую теорию. В главах после изложения теории приводятся задачи различного характера и трудности для решения на практическом занятии и для домашнего задания. Большая часть задач снабжена ответами, которые приводятся после условий всех задач. Глава 4 содержит задачи с экономическим содержанием, для некоторых из них приведены решения, а для остальных – ответы. В конце каждой из первых трёх глав для самопроверки предлагаются контрольные вопросы; для оценки уровня знаний студентов в каждой главе предлагаются тестовые задания и типовые расчёты (индивидуальные задания) с образцами их решения.

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и действия над ними

1.1.1. Основные сведения о матрицах

Всякая прямоугольная таблица из mn чисел (или иных объектов), расположенных в m её строках и n её столбцах, называется матрицей размера $m \times n$ (m на n). Числа, из которых она состоит, называются её элементами.

Обозначения: A, B, C, \dots – матрицы,

$a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$ – элементы матриц, где i – номер строки, j – номер столбца, на пересечении которых стоит элемент.

$$\text{Запись: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

короткая запись: $A = (a_{ij})_{m,n}$ или $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрица, у которой число строк m равно числу столбцов n , называется квадратной n -го порядка. Совокупность элементов квадратной матрицы с одинаковыми индексами называется главной диагональю.

Матрицы A и B называются равными, если у них равны соответствующие элементы: $A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны нулю, называется диагональной.

Диагональная матрица E , у которой все элементы главной диагонали равны единице, называется единичной.

Квадратная матрица, у которой все элементы выше (ниже) главной диагонали равны нулю, называется верхне-, нижнетреугольной.

Матрица O , у которой все элементы равны нулю, называется нулевой.

Матрица, состоящая из одной строки (столбца), называется матрицей – строкой (столбцом) или вектором – строкой (столбцом).

Примеры 1.1.

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица размера 3×4 ,

2) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица 2-го порядка,

3) $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица размера 3×2 ,

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица 3-го порядка,

5) $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица 3-го порядка,

6) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ – нижнетреугольная матрица 3-го порядка,

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – верхнетреугольная матрица 3-го порядка,

8) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ – матрица-столбец,

9) $(-2 \ 0 \ 4 \ 5)$ – матрица-строка.

1.1.1. Ступенчатая матрица. Элементарные (эквивалентные) преобразования матрицы

Ведущим элементом (лидером) строки матрицы называется первый её ненулевой элемент.

Ступенчатой матрицей называется матрица, удовлетворяющая двум условиям:

- 1) все нулевые строчки расположены ниже ненулевых,

2) в каждой строке лидер расположен правее лидера предыдущей строки.

Нулевая матрица по определению является ступенчатой.

Примеры 1.2.

1) В матрице $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ лидер первой строки 2; второй – 4;

третьей – 1.

2) Матрицы $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатые.

3) Матрица $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ не является ступенчатой.

4) Ступенчатыми матрицами являются: диагональные матрицы, единичные матрицы, верхнетреугольные матрицы.

Элементарными (эквивалентными) преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- 1) перестановка местами двух строк матрицы,
- 2) умножение строки матрицы на число, не равное нулю,
- 3) умножение строки матрицы на число и прибавление к другой строке,
- 4) вычёркивание (вписывание) строки из нулей.

Аналогичные преобразования можно производить и над столбцами матрицы.

Две матрицы A и B называются эквивалентными, если одна из них получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Обозначение: $A \sim B$.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Пример 1.3.

Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

$A =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 1 & 5 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times(-1) \\ + \end{matrix}} \sim \text{умножим элементы 1-й строки на } (-1) \text{ и прибавим её к 3-й строке матрицы;}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \times 3 \\ \times 4 \\ + \end{matrix}} \sim \text{умножим элементы 2-й строки на 3, 3-й – на 4 и прибавим вновь полученную 2-ю строку к 3-й.}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -4 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 27 & -29 \end{pmatrix}.$$

Получили ступенчатую матрицу.

1.1.2. Действия над матрицами

Суммой матриц $A = (a_{ij})_{m,n}$ и $B = (b_{ij})_{m,n}$ называется матрица $A+B = (a_{ij}+b_{ij})_{m,n}$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число λ называется матрица $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{m,n}$.

Произведением матриц $A = (a_{il})_{m,k}$ и $B = (b_{lj})_{k,n}$ называется матрица $C = AB = (c_{ij})_{m,n}$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj}$.

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $A+B = B+A$;
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$;
3. $A+O = A$;
4. $A-A = O$;
5. $I \cdot A = A$;
6. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$;

7. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
9. $A(BC) = (AB)C$;
10. $A(B+C) = AB+AC$;
11. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;
12. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$;
13. если $A_{n,n}$ и $E_{n,n}$, то $AE = EA = A$.

Здесь предполагается, что левые части равенств 1–12 имеют смысл, тогда будут иметь смысл и правые части, причём выполняются написанные равенства.

Заметим, что произведение матриц, вообще говоря, некоммукативно, т. е. $AB \neq BA$.

Матрица A^T , полученная из матрицы A заменой строк соответствующими столбцами, называется транспонированной матрице A .

Свойства операции транспонирования:

1. $(A^T)^T = A$;
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

Пример 1.4.

- 1) Найти матрицу $-2A+3B^T$, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Найдём матрицу B^T , транспонированную матрице B : $B^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Найдём матрицы $-2A$ и $3B^T$, умножив все элементы матрицы A на (-2) , матрицы B^T — на 3 , а затем найдём сумму матриц $-2A$ и $3B^T$ (поэлементно):

$$\begin{aligned}
 -2A + 3B^T &= -2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & -2 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 12 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 15 & 10 \\ 2 & -17 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

2) Найти произведение матриц A и B , если $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$,
 $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Произведение матриц $B_{2,3}A_{2,2}$ не существует, а произведение матриц $A_{2,2}B_{2,3}$ существует. Найдём произведение $AB = C_{2,3}$:

$$\begin{aligned}
 C = AB &= \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 & -2 \cdot 5 + 0 \cdot 4 & -2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 & 5 \cdot 1 + (-4) \cdot 4 & 1 \cdot 0 + (-4) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -6 & -10 & 0 \\ -5 & -11 & 12 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

1.2. Определители

1.2.1. Основные понятия

Любой квадратной матрице A n -го порядка, элементами которой являются числа, можно сопоставить число, называемое определителем (детерминантом).

Обозначение: $|A|$ или $\det A$.

Определителем матрицы $A = (a)$ первого порядка называется число $|A| = a$.

Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ второго порядка называется число $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определителем матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ третьего порядка

называется число $|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Схема вычислений определителя второго и третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Правило вычисления определителя третьего порядка называют правилом треугольников или правилом Саррюса.

Пример 1.5.

Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$1) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-2) \cdot 5 = 7.$$

$$2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-4) \cdot (-8) + 1 \cdot 5 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 7 - 2(-4) \times \\ \times 6 - 1 \cdot 3 \cdot (-8) - 0 \cdot 5 \cdot 7 = 144.$$

1.2.2. Определитель матрицы n -го порядка

Пусть матрица A – матрица n -го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -го порядка называется определитель, получаемый из определителя $|A|$ вычёркиванием i -й строки и j -го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij} .

Из определения следует, что минор M_{ij} – определитель, порядок которого на единицу меньше, чем у определителя $|A|$, т. е. порядок M_{ij} равен $n - 1$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A n -го порядка называется минор M_{ij} элемента a_{ij} , взятый по знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Пример 1.6.

Найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{21} и a_{33}

матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{pmatrix}.$

Решение.

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix} = -8 + 14 = 6; A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)6 = -6;$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3; A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33} = -3.$$

Предположим, что определители матриц, порядок которых меньше, чем n , введены.

Определителем квадратной матрицы $A=(a_{ij})$ n -го порядка называется число $|A|$, вычисляемое по формуле:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}. \quad (1.1)$$

Формулу (1.1) называют разложением определителя $|A|$ по элементам 1-й строки.

Имеет место следующая важная теорема.

Теорема. Определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n -го порядка равен сумме произведений элементов какой-нибудь строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \quad (1.2)$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (1.3)$$

Формула (1.2) – разложение определителя $|A|$ по элементам i -й строки, а (1.3) – по элементам j -го столбца.

Пример 1.7.

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix}$, используя формулы (1.2) и (1.3).

Решение.

1) Разложим определитель по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + (-2) \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 54 - 90 = -36.$$

2) Вычислим определитель по формуле (1.3), разложив его по элементам 2-го столбца:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{12} - 4 \cdot A_{22} + 7 \cdot A_{32} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 54 - 48 - 42 = -36.$$

1.2.3. Свойства определителей

1. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

2. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

3. Определители данной матрицы $A = (a_{ij})$ и транспонированной ей $A^T = (a_{ji})$ равны: $|A| = |A^T|$.

Из свойства 3 следует, что строки и столбцы в определителе равноправны. Далее будем формулировать свойства для строк.

4. При перестановке двух строк определитель меняет знак.

5. Общий множитель всех элементов одной строки можно выносить за знак определителя.

6. Определитель, имеющий две одинаковые строки, равен нулю.

7. Если в определителе каждый элемент какой-нибудь строки представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух соответствующих слагаемых.

Например:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + c_{21} & a_{22} + c_{22} & a_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Определитель, имеющий строку из нулей, равен нулю.

9. Если в определителе соответствующие элементы двух строк пропорциональны, то он равен нулю.

10. Величина определителя не изменится, если к элементам одной строки прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на одно и то же число.

11. «Фальшивое разложение определителя». Сумма произведений элементов какой-нибудь строки определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки равна нулю.

Следствие.

Если какая-нибудь строка определителя – линейная комбинация других строк, то определитель равен нулю.

12. Определитель произведения двух квадратных матриц одного порядка равен произведению определителей этих матриц.

Замечание. Свойство 10 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 1.8.

Вычислить определитель
$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ \times 2 \\ + \\ +}} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3), (-4)} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -14 & -3 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \end{vmatrix}$$

прибавим к элементам первой строки элементы второй строки, умноженные на 2, к элементам третьей строки – элементы второй строки, умноженные на (-3) , а к элементам четвертой строки – элементы второй строки, умноженные на (-4)

$$= \begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -14 & -3 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \text{разложим определитель по элементам первого столбца:}$$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = A_{21} = - \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -14 & -3 & 4 \\ -11 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} 9 & 4 & 1 \\ -50 & -19 & 0 \\ -65 & -29 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -50 & -19 \\ -65 & -29 \end{vmatrix} = -5(290 - 247) = -215. \end{aligned}$$

1.3. Обратная матрица

Пусть A – квадратная матрица n -го порядка.

Матрица B называется обратной матрице A , если $AB = BA = E$.

Матрица A называется обратимой, если для неё есть обратная.

Теорема. Если матрица A – обратимая, то для неё существует единственная ей обратная матрица.

Матрицу, обратную матрице A , будем обозначать A^{-1} .

Матрица A называется невырожденной, если её определитель $|A|$ не равен нулю.

Теорема (критерий обратимости матрицы).

Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.

Доказательство.

1. Пусть A – обратимая матрица. Докажем, что она невырожденная, т. е., что $|A| \neq 0$.

A – обратимая матрица. Тогда существует A^{-1} такая, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1}A = E$. Отсюда имеем, например, $|A \cdot A^{-1}| = |E|$ или $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Следовательно, $|A| \neq 0$.

2. Пусть матрица A – невырожденная. Докажем, что она обратимая, т. е. существует матрица A^{-1} .

Введём в рассмотрение матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \text{ где } A_{ij} - \text{алгебраическое дополнение элемента}$$

a_{ij} матрицы A .

Покажем, что матрица $\frac{1}{|A|}B = A^{-1}$, т. е., что $A \frac{1}{|A|}B = \frac{1}{|A|}BA = E$.

Вычислим, например, $\frac{1}{|A|}BA$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + \cdots + a_{n1}A_{n1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{12}A_{12} + \cdots + a_{n2}A_{n2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{1n}A_{1n} + \cdots + a_{nn}A_{nn} \end{pmatrix} = \\ & = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{1}{|A|}B = A^{-1}$. (При вычислениях использовались теорема о разложении определителя по элементам столбца и свойство «о фальшивом разложении определителя»).

Теорема доказана.

Из доказательства теоремы следует способ вычисления матрицы A^{-1} .

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A .

Пример 1.9.

Найти обратную матрицу A^{-1} , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение.

Вычислим определитель $|A|$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{13} =$$

$$= 2 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Следовательно, матрица A – обратимая.

Найдём матрицу A^{-1} . Воспользуемся формулой (1.4), которая в нашем случае имеет вид: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Найдём все алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2, & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6, & A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \\ A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -3, & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \\ A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2, & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, имеем } A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: вычислим $A^{-1}A$:

$$\begin{aligned} A^{-1}A &= -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Аналогично, $A \cdot A^{-1} = E$.

Таким образом, матрица A^{-1} найдена верно.

1.4. Ранг матрицы и способы его нахождения

1.4.1. Минор матрицы. Метод окаймляющих миноров

Пусть A – матрица размера $m \times n$. Выделим в матрице какие-нибудь k строк и k столбцов ($1 = k \leq \min\{m, n\}$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка. Он называется минором k -го порядка данной матрицы A .

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля её миноров.

Обозначения: $\text{rang } A$ или r_A .

Ранг нулевой матрицы считается равным нулю.

Пример 1.10.

Найти ранг матрицы A : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение.

В матрице A имеются отличные от нуля миноры 2-го порядка, например, $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Выясним, имеются ли отличные от нуля миноры 3-го порядка.

Вычислим все миноры 3-го порядка, которые можно образовать из матрицы A вычёркиванием одного столбца:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как 2-й столбец из нулей,}$$
$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как все миноры 3-го порядка равны нулю, то $\text{rang } A = 2$.

Вычисление ранга матрицы по определению связано с подсчётом большого числа определителей. Поэтому при вычислении ранга

матрицы используют один из двух методов: метод окаймляющих миноров или метод элементарных преобразований.

Метод окаймляющих миноров

В основе метода окаймляющих миноров лежит следующая теорема.

Теорема (метод окаймляющих миноров).

Если в матрице какой-нибудь минор порядка r не равен нулю, а все миноры порядка $r+1$, его содержащие, равны нулю, то ранг матрицы равен r .

Пример 1.11.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Так как матрица A не является нулевой, то $\text{rang } A \geq 1$. В матрице A имеется минор порядка 2, отличный от нуля, например, $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$. Следовательно, $\text{rang } A \geq 2$. Подсчитаем все возможные миноры 3-го порядка, окаймляющие $M_2^{(1)}$. Их два:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 8 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2), (-1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 0,$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 8 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2), (-1)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, все окаймляющие миноры минора $M_2^{(1)}$ равны нулю. Значит, $\text{rang } A = 2$.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется базисным.

В примере 1.11 базисный минор $M_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Заметим, что у матрицы может быть несколько базисных миноров.

1.4.2. Метод элементарных преобразований

Теорема (о ранге матрицы при элементарных преобразованиях).

Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Теорема (о ранге ступенчатой матрицы).

Ранг ступенчатой матрицы равен числу её ненулевых строк.

Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований строк и столбцов можно привести к ступенчатому виду.

Теорема (о ранге матрицы).

Ранг матрицы равен рангу ей эквивалентной ступенчатой матрицы.

Пример 1.12.

Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2), (-1) \\ + \\ +}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 10 & 10 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2) \\ +}} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Число ненулевых строк равно 2, следовательно, $\text{rang } A = 2$.

Если в системе линейных уравнений (1.5) все свободные члены равны нулю (т. е. B – нулевая матрица-столбец), то она называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Решением системы линейных уравнений называется упорядоченная совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, которая при подстановке в систему обращает каждое уравнение в тождество.

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то она называется совместной, в противном случае – несовместной.

Две системы линейных уравнений называются равносильными (эквивалентными), если равны множества их решений.

1.5.2. Решение системы методом обратной матрицы

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными, у которой матрица A системы – невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$. Запишем систему в матричной форме: $AX = B$.

Так как $|A| \neq 0$, то существует матрица A^{-1} . Умножим слева обе части матричного уравнения $AX = B$ на A^{-1} : $A^{-1}AX = A^{-1}B$ или

$$X = A^{-1}B. \quad (1.9)$$

Равенство (1.9) – матричная форма записи решения системы (1.5). Для того чтобы найти элементы матрицы X из неизвестных, нужно найти обратную матрицу A^{-1} и умножить её на столбец свободных членов B .

Пример 1.13.

Решить систему уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение.

Запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли матрица A системы невырожденной:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[+]{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[(-2)]{+} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10 \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица A является невырожденной. Поэтому существует обратная матрица A^{-1} ; воспользуемся формулой (1.4):

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, A_{11} = -13, A_{21} = 2, A_{31} = 5, A_{12} = -6, A_{22} = 4, \\ A_{32} &= 0, A_{13} = 17, A_{23} = -8, A_{33} = -5. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 0 \\ 17 & -8 & -5 \end{pmatrix}.$$

Найдём произведение $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} -13 & 2 & 5 \\ -6 & 4 & 0 \\ 17 & -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

Матрица неизвестных равна:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{7}{2} \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = \frac{5}{2}, x_2 = 1, x_3 = -\frac{7}{2}.$$

Ответ можно записать также в виде $\left\{ \left(\frac{5}{2}; 1; -\frac{7}{2} \right) \right\}$.

Отсюда имеем: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \dots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$.

Теорема доказана.

Заметим, что способ решения системы линейных уравнений, основанный на формулах (1.10) Крамера, называют методом, или правилом Крамера.

Пример 1.14.

Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

Данная система линейных уравнений является крамеровской (так как $|A| \neq 0$). Согласно формулам (1.10) имеем:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-25}{-10} = \frac{5}{2},$$

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-10} = 1,$$

$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-35}{-10} = -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{5}{2}; 1; -\frac{7}{2}\right)\right\}$.

Замечание. Метод обратной матрицы и метод Крамера решения систем линейных уравнений становятся трудоёмкими при $n \geq 4$. Они удобны при решении на компьютере.

1.5.4. Решение системы уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса (методом последовательного исключения неизвестных) можно решить любую систему линейных уравнений. Процесс решения системы по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе (прямой ход) систему с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (её расширенная матрица – ступенчатая). На втором этапе (обратный ход) из ступенчатой системы последовательно, начиная с последнего уравнения, определяют значения неизвестных.

Эквивалентными (равносильными) преобразованиями системы линейных уравнений называются следующие действия:

- 1) перестановка местами двух уравнений системы,
- 2) умножение любого уравнения на число, отличное от нуля,
- 3) прибавление к одному из уравнений другого уравнения, умноженного на любое число,
- 4) удаление (вписывание) уравнения вида $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$.

На практике проделывают эквивалентные преобразования не над системой, а над её расширенной матрицей.

Проиллюстрируем применение метода Гаусса.

Пример 1.15.

Методом Гаусса решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 7, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_4 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем расширенную матрицу \tilde{A} и с помощью эквивалентных преобразований приведем её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \curvearrowright (-1) \\ \downarrow + \\ \uparrow + \end{array}$$

1-ю строку прибавим к 3-й, а затем умножим её на (-1) и прибавим к 4-й.

В дальнейшем 1-ю строку не трогаем, работаем со 2-й строкой.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & -4 & -3 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \curvearrowright (3) \\ \downarrow + \\ \uparrow + \end{array}$$

Прибавим 2-ю строку к 3-й, а затем прибавим утроенную 2-ю строку к 4-й.

Далее первые две строки не трогаем, работаем с 3-й.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 3 & 20 \end{array} \right) \begin{array}{l} \curvearrowright (7) \\ \downarrow + \end{array}$$

Умножим 3-ю строку на 7 и прибавим к 4-й.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 34 \end{array} \right) - \text{ступенчатая матрица.}$$

Таким образом, в результате проведённых преобразований пришли к следующей системе линейных уравнений, равносильной данной:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ -x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_3 + 2x_4 = 2, \\ 17x_4 = 34. \end{cases}$$

Полученная система (значит, и данная) имеет единственное решение.

Из последнего уравнения $x_4 = 2$; из третьего $x_3 = 2 - 2x_4 = 2 - 2 \cdot 2 = -2$, т. е. $x_3 = -2$; из второго $x_2 = -7 - x_3 + 2x_4 = -7 - (-2) + 2 \cdot 2 = -1$, т. е. $x_2 = -1$; из первого $x_1 = 2 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2 + (-1) - 2(-2) - 2 \cdot 2 = 1$, т. е. $x_1 = 1$.

Ответ: $\{(1; -1; -2; 2)\}$.

1.6. Решение систем m линейных уравнений с n неизвестными

1.6.1. Критерий совместности системы линейных уравнений

Вычисление ранга матрицы редко является самоцелью. Ранг матрицы – одно из важнейших понятий линейной алгебры и используется во многих вопросах, например, им пользуются при исследовании и решении систем линейных уравнений.

Пусть A – матрица системы, а \tilde{A} – её расширенная матрица. Очевидно, что ранг матрицы \tilde{A} не может быть меньше ранга матрицы A (почему?). Имеет место следующая теорема.

Теорема Кронекера-Капелли (критерий совместности системы линейных уравнений). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы: $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$.

Следствие. Пусть ранги матриц A и \tilde{A} равны: $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$. Тогда:

1) если $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = n$ (n – число неизвестных), то система уравнений имеет единственное решение,

2) если $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} < n$, то система уравнений имеет бесконечное множество решений.

В примере 1.15 $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = 4 = n$ (n – число неизвестных). Поэтому система имеет единственное решение.

Пример 1.16.

Исследовать и решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_4 = -1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_4 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = 5. \end{cases}$$

Решение.

1. Выпишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & -3 & 2 \\ 5 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-1), (-2)} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \xrightarrow{(-1), (-2)} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \\ \xrightarrow{+} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Процесс преобразований можно закончить, так как уже на этом этапе преобразований можно сделать вывод: $\text{rang } A \neq \text{rang } \tilde{A}$, т. е. данная система уравнений несовместна (не имеет решений).

Ответ: \emptyset .

2) Составим расширенную матрицу данной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -7 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & -4 & 5 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -7 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 & -4 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2), (-1), (-3)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & -4 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Отсюда имеем, что система совместна. Так как ранг матрицы A меньше числа неизвестных $n = 4$, то система имеет бесконечное множество решений, которое получим следующим образом: перенесём неизвестные x_3 и x_4 в правые части уравнений (неизвестные x_3 и x_4 называют свободными неизвестными), получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$$

Выразим неизвестные x_1 и x_2 через свободные: $x_2 = -2 + 2x_3 - x_4$,
 $x_1 = -1 - x_2 + 3x_3 = -1 - (-2 + 2x_3 - x_4) + 3x_3 = 1 + x_3 + x_4$,

$$\text{т. е. } \begin{cases} x_1 = 1 + x_3 + x_4, \\ x_2 = -2 + 2x_3 - x_4. \end{cases}$$

Придавая произвольные значения неизвестным $x_3 = \alpha$ и $x_4 = \beta$, получим бесконечное множество решений данной системы:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + \alpha + \beta, \\ x_2 = -2 + 2\alpha - \beta, \\ x_3 = \alpha, \\ x_4 = \beta. \end{cases} \quad \text{Эти формулы дают общее решение системы.}$$

Полагая, например, $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, получим частное решение.

Взяв другие значения α и β , получим другое частное решение.

$$\text{Ответ: } \left\{ \begin{pmatrix} 1 + \alpha + \beta \\ -2 + 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}.$$

Другая форма записи множества решений:

$$\left\{ (1 + \alpha + \beta; -2 + 2\alpha - \beta; \alpha; \beta) \middle| \alpha, \beta \in \mathbf{R} \right\}, \quad \text{где } (1 + \alpha + \beta; -2 + 2\alpha - \beta; \alpha; \beta) - \text{общее решение.}$$

Рассмотрим немного подробнее случай, когда система уравнений имеет бесконечное множество решений, т. е. когда $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = r < n$, n – число неизвестных. Множество решений системы можно получить следующим образом:

- [illegible]

- 3) придавая свободным неизвестным произвольные значения, из последней системы выразить оставшиеся базисные (главные) неизвестные x_1, x_2, \dots, x_r через свободные неизвестные; в результате получится общее решение данной системы.

Пусть дана однородная система m линейных уравнений с n не-

Систему (1.11) можно записать в матричной форме:

36

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Перечислим свойства однородной системы линейных уравнений.

1) Однородная система линейных уравнений всегда совместна.

Действительно, любая однородная система имеет хотя бы нулевое решение.

2) Если матрица-столбец $a = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ – решение системы (1.11),

то и столбец $\lambda a = \begin{pmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \lambda \alpha_2 \\ \dots \\ \lambda \alpha_n \end{pmatrix}$ – решение системы (1.11),

где λ – произвольное число.

3) Если матрицы-столбцы $a_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ и $a_2 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ – решения

системы, то и матрица столбец $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 \\ \lambda_1 \alpha_2 + \lambda_2 \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1 \alpha_n + \lambda_2 \beta_n \end{pmatrix}$ – решение

системы (1.11).

Из свойства 3) следует, что всякая линейная комбинация решений однородной системы линейных уравнений является решением этой системы.

В каком случае однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения? Ответ на поставленный вопрос сформулирован в следующих теоремах.

Теорема (критерий существования ненулевых решений однородной системы линейных уравнений).

Однородная система линейных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы меньше числа неизвестных n ($\text{rang } A < n$).

Теорема (критерий существования ненулевых решений однородной системы линейных уравнений).

Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель $|A|$ матрицы системы равен нулю ($|A|=0$).

Доказательство.

1) Если бы $|A| \neq 0$, то однородная система имела бы единственное решение – нулевое. Последнее противоречит условию. Следовательно, $|A| = 0$.

2) Если $|A| = 0$, то $\text{rang } A = r < n$ и, следовательно, однородная система имеет бесконечное множество решений, в том числе и ненулевых.

Заметим, что среди ненулевых решений однородной системы есть такие решения, через которые выражаются другие решения. Эти ненулевые решения называются фундаментальными (базисными) решениями. Как найти эти решения?

1.6.3. Фундаментальная система решений

Решения a_1, a_2, \dots, a_k однородной системы называются линейно независимыми, если линейная комбинация этих решений $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_k a_k$ равна нулевому решению только тогда, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Совокупность решений a_1, a_2, \dots, a_k однородной системы называется фундаментальной (базисной) системой решений (фср), если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1) эта совокупность линейно независимая,
- 2) каждое решение однородной системы линейно выражается через эту совокупность решений.

Теорема (о числе решений в фундаментальной системе решений). Если ранг матрицы A системы меньше числа неизвестных n ($\text{rang } A = r < n$), то фундаментальная система решений состоит из $n - r$ решений.

Пример 1.17.

Найти общее решение и фундаментальную систему решений

(фср) однородной системы уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3), (-4), (-3)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3), (2)} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Rang } A = r = 2 < n = 4.$$

Таким образом, фср состоит из $n - r = 2$ решений; два главных (базисных) неизвестных, например, x_1 и x_2 , и два свободных: x_3 и x_4 . Найдём решения системы. По последней матрице восстановим систему, равносильную данной:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -2(-6x_3 + 5x_4) - 4x_3 + 3x_4 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4, \end{cases}$$

т. е. $\begin{cases} x_1 = 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 = -6x_3 + 5x_4. \end{cases}$

Следовательно, общее решение имеет вид $(8x_3 - 7x_4; -6x_3 + 5x_4; x_3; x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbf{R}$.

Получим фср двумя способами.

Первый способ

Положим $x_3 = 1$ и $x_4 = 0$, тогда $x_1 = 8$, $x_2 = -6$, а затем положим $x_3 = 0$ и $x_4 = 1$, тогда $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. Таким образом, получим два частных решения данной однородной системы:

$a_1 = (8, -6, 1, 0)$ и $a_2 = (-7, 5, 0, 1)$, которые и составляют фср.

Все решения данной системы выражаются через фср по формуле $a = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, где λ_1, λ_2 – произвольные числа.

Второй способ

Запишем общее решение системы как матрицу-столбец:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x_3 - 7x_4 \\ -6x_3 + 5x_4 \\ 1x_3 - 0x_4 \\ 0x_3 + 1x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2,$$

где $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T$, $a_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^T$.

Таким образом, $a_1 = (8, -6, 1, 0)$, $a_2 = (-7, 5, 0, 1)$ – фср.

Ответ: (общее решение) – $(8x_3 - 7x_4; -6x_3 + 5x_4; x_3; x_4)$, $x_3, x_4 \in \mathbf{R}$;

фср: $a_1 = (8, -6, 1, 0)$, $a_2 = (-7, 5, 0, 1)$.

1.7. Линейные пространства

1.7.1. Понятие линейного пространства

Одним из основных объектов, изучаемых в линейной алгебре, являются линейные пространства.

Непустое множество V с заданными на нём операциями сложения элементов множества V и умножением элементов множества V на действительные числа называется линейным (векторным) пространством, если выполнены следующие условия:

1. $a+b = b+a$;
2. $a+(b+c) = (a+b)+c$;
3. существует нулевой элемент $\theta \in V$ такой, что $a + \theta = a$;
4. для каждого элемента $a \in V$ существует в V элемент $-a$ (противоположный элементу a) такой, что $a + (-a) = \theta$;
5. $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$;
6. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
7. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
8. $1 \cdot a = a$,

где a, b, c – произвольные элементы V ; α, β – произвольные действительные числа; 1 – действительное число. Элементы множества V называются векторами, а действительные числа – скалярами.

Пример 1.18.

Векторными пространствами являются:

1. множество матриц размера $m \times n$ с действительными элементами,
2. множество геометрических векторов трёхмерного пространства,
3. множество действительных чисел \mathbf{R} .

Таким образом, множество элементов любой природы, удовлетворяющее требованиям, сформулированным в определении, образует линейное (векторное) пространство.

n -мерным вектором называется упорядоченная совокупность n действительных чисел, называемых компонентами (координатами) вектора, и записывается в виде строки $\mathbf{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ или столбца

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

n -мерные векторы $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называются равными, если равны все их соответствующие компоненты, т. е. $\alpha_i = \beta_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Суммой векторов $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ называется вектор $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n)$.

Произведением скаляра $\lambda \in \mathbf{R}$ на вектор $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется вектор $\lambda \mathbf{a} = (\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n)$.

Нетрудно доказать, что множество всех n – мерных векторов – линейное (векторное) пространство, которое обозначается \mathbf{R}^n и называется n -мерным арифметическим пространством.

Замечание. n -мерные векторы можно рассматривать как матрицы-строки или как матрицы-столбцы.

1.7.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ – n -мерные векторы.

Вектор \mathbf{a} называется линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, что $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ называются линейно независимыми, если равенство $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$ выполняется только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют такие действительные числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, одновременно не равные нулю, что $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k = \mathbf{0}$.

Пример 1.19.

1) Векторы $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 2, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (3, 4, 5)$ из \mathbf{R}^3 являются линейно зависимыми, так как $2\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + (-1)\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

2) Векторы $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ из пространства \mathbf{R}^3 являются линейно независимыми, так как равенство $\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0}$ возможно только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\text{Действительно, } \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{С другой стороны, } \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_3 = \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Отсюда имеем: } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Последнее возможно только при } \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Рассмотрим свойства линейной зависимости и независимости конечной системы векторов.

1. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.
2. Система векторов линейно зависима, если какая-нибудь её подсистема линейно зависима.
3. Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.
4. Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ ($k > 1$) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является линейной комбинацией других векторов данной системы векторов.

5. Если векторы a_1, a_2, \dots, a_k линейно независимы, а векторы a, a_1, a_2, \dots, a_k линейно зависимы, то тогда вектор a линейно выражается через векторы a_1, a_2, \dots, a_k , и притом единственным образом.

1.7.3. Базис и размерность линейного пространства.

Координаты вектора

Конечная система векторов a_1, a_2, \dots, a_k пространства V называется базисом, если:

- 1) она линейно независима,
- 2) любой вектор пространства через неё линейно выражается.

Заметим, что не всякое пространство обладает конечным базисом. Пространства, в которых существуют конечные базисы, называются конечномерными. В линейной алгебре изучаются только конечномерные пространства.

Количество векторов в каком-нибудь базисе пространства V называется размерностью пространства V и обозначается $\dim V$.

Пример 1.20.

В пространстве R^n в качестве базиса можно взять совокупность n векторов: $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0), \dots, e_{n-1} = (0, 0, 0, \dots, 1, 0)$, $e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$.

Действительно, в том, что эта система векторов линейно независима, легко убедиться (см. пример 1.19).

Покажем, что любой вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in R^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов e_1, e_2, \dots, e_n . Представим вектор a в следующем виде: $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, 0, \dots, 0) + (0, \alpha_2, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \alpha_n) = \alpha_1(1, 0, \dots, 0) + \alpha_2(0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_n(0, 0, \dots, 1) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ — что и требовалось.

Следовательно, конечная система векторов e_1, e_2, \dots, e_n — один из базисов пространства R^n .

Теорема. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис пространства V , тогда любой вектор $a \in V$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \quad (1.13)$$

Доказательство.

Пусть для вектора a кроме представления (1.13) имеется ещё одно представление через базисные векторы:

$$a = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n, \quad (1.14)$$

тогда $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$ или

$$(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + (\alpha_2 - \beta_2)e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = \theta. \quad (1.15)$$

Так как векторы e_1, e_2, \dots, e_n являются базисом пространства V , то они являются линейно независимыми. Поэтому равенство (1.15) возможно только при $\alpha_1 - \beta_1 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \alpha_n - \beta_n = 0$. Отсюда имеем: $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$. Последнее и означает, что для вектора a существует единственное представление через базисные векторы, что и требовалось доказать.

В равенстве (1.13) коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются координатами вектора a в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Заметим, что наряду с записью (1.13) применяется запись $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$. Таким образом, совокупность координат вектора является элементом арифметического пространства R^n . С этим связана особая роль арифметического пространства R^n .

Пусть векторы a_1, a_2, \dots, a_n n -мерного пространства заданы своими координатами в некотором базисе пространства. Для выяснения линейной зависимости векторов рассматривают матрицу, составленную из координат данных векторов. Векторы будут линейно независимыми в том и только в том случае, когда ранг этой матрицы равен числу векторов системы.

Пример 1.21.

Выяснить линейную зависимость систем векторов. В линейно зависимых системах выписать какую-нибудь линейную зависимость:

$$1) \mathbf{a}_1 = (1, 1, 1, 1),$$

$$\mathbf{a}_2 = (3, -4, 0, -1),$$

$$\mathbf{a}_3 = (2, 0, 1, -1),$$

$$\mathbf{a}_4 = (13, -10, 3, -2).$$

$$2) \mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{a}_2 = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{a}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4.$$

Решение.

1) Составим матрицу B , в строках которой запишем координаты векторов:

$$\begin{aligned}
 B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{a}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 13 & -10 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-3), (-2), (-13) \\ + \\ + \\ +}} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -7 & -3 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -23 & -10 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{+ \\ (-3), (-11) \\ +}} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 18 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2), (-1) \\ + \\ +}} \sim \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Rang } B = 3 < n = 4 \quad (n - \text{число векторов}).$$

Следовательно, данная система векторов линейно зависима. Это означает, что выполняется равенство $\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \alpha_3 \mathbf{a}_3 + \alpha_4 \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$ (где не все α_i равны нулю). Распишем это векторное равенство:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 13 \\ -10 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 13\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 - 4\alpha_2 - 10\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - 2\alpha_4 = 0, \end{cases}$$

у которой матрица A системы является транспонированной матрице $B : A = B^T$. Решим полученную систему.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 1 & -4 & 0 & -10 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & -7 & -2 & -23 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & -4 & -3 & -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & -1 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{rang } A = 3 < n = 4. \end{aligned}$$

Система имеет бесчисленное множество решений, главные неизвестные — $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, свободное неизвестное — α_4 .

Выразим главные неизвестные через свободное:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3 + 13\alpha_4 = 0, \\ \alpha_2 + 3\alpha_4 = 0, \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_4, \\ \alpha_2 = -3\alpha_4, \\ \alpha_3 = -\alpha_4. \end{cases}$$

Найдём частное решение, положив, например, $\alpha_4 = -1$. Тогда $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3, \alpha_3 = 1$. Получаем следующее равенство: $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_4 = \mathbf{0}$.

2) Составим матрицу A из координат данных векторов и найдём ранг этой матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\text{Rang } A = 3 = n$. Следовательно, данные векторы линейно независимы.

1.7.4. Матрица перехода от одного базиса к другому

Пусть в n -мерном пространстве V заданы два базиса e_1, e_2, \dots, e_n – «старый» базис и e_1', e_2', \dots, e_n' – «новый» базис. Каждый из векторов «нового» базиса можно выразить через векторы «старого» базиса:

[illegible]

«старого» базиса к «новому» базису.

Замечание. В матрице T координаты векторов «нового» базиса, разложенных по «старому» базису, располагаются в матрице перехода T по столбцам.

Нетрудно показать, что связь между координатами вектора в разных базисах задаётся формулой:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} c_{12} \dots c_{1n} \\ c_{21} c_{22} \dots c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} c_{n2} \dots c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \dots \\ \alpha_n' \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad X = TX', \quad (1.16)$$

где X, X' – матрицы-столбцы из координат вектора x в «старом» и «новом» базисах соответственно, T – матрица перехода от «старого» к «новому» базису.

Связь координат вектора в «новом» базисе через координаты вектора в «старом» базисе задаётся формулой:

$$X' = T^{-1}X. \quad (1.17)$$

Формулы (1.16) и (1.17) называются формулами преобразования координат.

Пример 1.22.

Вектор $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$ в «старом» базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ задан своими координатами. Найти координаты этого вектора в «новом» базисе $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, если «новые» базисные векторы выражаются через «старые» базисные векторы по формулам:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = 6\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2' = -4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}_3' = 5\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3. \end{cases}$$

Решение.

Составим матрицу T перехода от «старого» базиса к «новому»:

$$T = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 5 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ где в 1-м столбце – координаты вектора } \mathbf{e}_1',$$

во 2-м – координаты вектора \mathbf{e}_2' , в 3-м – координаты вектора \mathbf{e}_3' в «старом» базисе».

Найдём матрицу T^{-1} :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Координаты вектора } \mathbf{x} \text{ в «новом» базисе:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: новые координаты вектора $\mathbf{x} = (-2, -2, 1)$.

1.8. Евклидовы пространства

1.8.1. Евклидово пространство

Линейное (векторное) пространство V называется евклидовым, если любым двум векторам \mathbf{a} и \mathbf{b} из V ставится в соответствие действительное число, обозначаемое (\mathbf{a}, \mathbf{b}) , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $(a, b) = (b, a)$,
- 2) $(a + c, b) = (a, b) + (c, b)$,
- 3) $(\alpha a, b) = \alpha (a, b)$,
- 4) $(a, a) > 0$, Для любого $a \neq \theta$ и $(a, a) = 0$, если $a = \theta$.

Здесь a, b – произвольные векторы из V ; α – произвольное действительное число.

Обозначение евклидова пространства: E .

Число (a, b) называется скалярным произведением векторов a и b .

Длиной (нормой) вектора a в евклидовом пространстве называется число $|a| = \sqrt{(a, a)}$.

Углом между ненулевыми векторами a и b из евклидова пространства E называется число φ , определяемое из равенства:

$$\cos \varphi = \frac{(a, b)}{|a||b|}, \text{ где } 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Векторы a и b евклидова пространства E называются ортогональными, если $(a, b) = 0$.

Заметим, что нулевой вектор ортогонален любому вектору $a \in E$.

Пример 1.23.

В арифметическом n -мерном пространстве R^n скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ можно задать формулой:

$$(a, b) = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n. \quad (1.18)$$

Нетрудно проверить выполнимость условий 1)-4), которым должно удовлетворять скалярное произведение.

E^n – обозначение евклидова пространства со скалярным произведением, задаваемым формулой (1.18).

Пример 1.24.

В пространстве непрерывных функций на отрезке $[\alpha, \beta]$ скалярное произведение векторов $f(t)$ и $g(t)$ можно задать формулой

$$(f(t), g(t)) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)g(t)dt.$$

Замечание. В одном и том же векторном пространстве скалярное произведение можно задать по-разному. В результате получаются разные евклидовы пространства.

1.8.2. Ортонормированный базис

Система векторов e_1, e_2, \dots, e_n называется ортogonalной, если $(e_i, e_j) = 0$ и $i \neq j$. Если кроме этого для каждого вектора e_i его норма $|e_i| = 1$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$, то система векторов называется ортонормированной.

Базис e_1, e_2, \dots, e_n n -мерного евклидова пространства называется ортонормированным, если он является ортонормированной системой векторов.

Теорема. Во всяком n -мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример 1.25.

В евклидовом пространстве E^n ортонормированным базисом является, например, базис:

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0),$$

$$e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0),$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1).$$

1.9. Линейные операторы

1.9.1. Линейный оператор

Линейным оператором называется отображение φ пространства V на себя: $\varphi = V \rightarrow V$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$1) \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$2) \varphi(\alpha a) = \alpha \varphi(a),$$

где a и b – произвольные векторы пространства V , а α – произвольное действительное число.

Пример 1.26.

В пространстве R^3 , отображение $\varphi: (x_1, x_2, x_3) \rightarrow (2x_1, x_2+x_3, 0)$ является линейным оператором. Покажем это:

$$1. (2x_1; x_2+x_3; 0) \in R^3.$$

2. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$; $y = (y_1, y_2, y_3)$ – произвольные векторы из R^3 . Тогда $x+y = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$ и $\varphi(x+y) = \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (2(x_1+y_1), (x_2+y_2) + (x_3+y_3), 0) = (2x_1, x_2+x_3, 0) + (2y_1, y_2+y_3, 0) = \varphi(x) + \varphi(y)$, т. е. первое условие из определения линейного оператора выполняется.

3. Нетрудно проверить выполнимость и второго условия из определения линейного оператора.

Следовательно, φ – линейный оператор, действующий в пространстве R^3 .

Пример 1.27.

$\Lambda(x) = \lambda x$, x – произвольный вектор из V , λ – фиксированное действительное число.

Отображение $\Lambda: V \rightarrow V$ является линейным оператором (проверьте).

Пример 1.28.

Отображение $\varphi: R^3 \rightarrow R^3$ заданное формулой $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 1, x_2, -x_3)$ не является линейным оператором, так как не выполняется условие 1 из определения.

Действительно, если $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$, то $\varphi(x+y) = \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) = (x_1+y_1+1, x_2+y_2, -x_3-y_3) = (x_1+1, x_2, -x_3) + (y_1, y_2, -y_3) \neq (x_1+1, x_2, -x_3) + (y_1+1, y_2, -y_3) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

1.9.2. Матрица линейного оператора

Пусть пространство V – n -мерное пространство и φ – линейный оператор, действующий в пространстве V . Чтобы задать линейный оператор, достаточно указать образы базисных векторов e_1, e_2, \dots, e_n пространства V , т. е. указать векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$. Тогда столбец из координат вектора $x \in V$ в данном базисе и столбец координат $y = \varphi(x)$

связаны соотношением:
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A_\varphi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},$$
 где A_φ – квадратная матрица

порядка n , в столбцах которой стоят координаты образов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots, \varphi(e_n)$ базисных векторов в базисе e_1, e_2, \dots, e_n пространства V . Матрица A_φ называется матрицей линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Пример 1.29.

Найти матрицу линейного оператора из примера 1.26.

Пусть $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ – базис пространства R^3 .

Найдём координаты векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ в базисе e_1, e_2, e_3 :

$$\varphi(e_1) = \varphi(1, 0, 0) = (2 \cdot 1, 0 + 0, 0) = (2, 0, 0),$$

$$\varphi(e_2) = \varphi(0, 1, 0) = (2 \cdot 0, 1 + 0, 0) = (0, 1, 0),$$

$$\varphi(e_3) = \varphi(0, 0, 1) = (2 \cdot 0, 0 + 1, 0) = (0, 1, 0).$$

Запишем координаты векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, $\varphi(e_3)$ в соответствующих столбцах матрицы, получим матрицу A_φ данного оператора в базисе e_1, e_2, e_3 :

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.9.3. Собственные значения и собственные векторы

Пусть φ – линейный оператор, действующий в пространстве V .

Ненулевой вектор $x \in V$ называется собственным вектором линейного оператора φ , если существует такое действительное число λ , называемое собственным значением линейного оператора, что

$$\varphi(x) = \lambda x. \quad (1.19)$$

Равенство (1.19) означает, что под действием оператора φ собственный вектор x превращается в коллинеарный ему вектор λx .

Решим задачу нахождения собственных векторов оператора. Запишем равенство (1.19) в матричной форме:

$$A_\varphi X = \lambda X, \text{ или } A(x) = \lambda x, \text{ или } (A_\varphi - \lambda E)X = O. \quad (1.20)$$

Для существования ненулевых решений должно выполняться условие:

$$|A_\varphi - \lambda E| = 0. \quad (1.21)$$

Распишем уравнение (1.21) относительно λ , получим:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель, то получим уравнение n -й степени относительно λ , которое называется характеристическим уравнением оператора φ . Действительные корни характеристического уравнения являются собственными значениями оператора φ .

Решив характеристическое уравнение, получим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Для каждого найденного собственного значения λ_i найдём соответствующие собственные векторы; координаты x_1, x_2, \dots, x_n собственных векторов являются ненулевыми решениями системы линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \quad (1.22)$$

Заметим, что матричное уравнение (1.20) – матричная запись системы уравнений (1.22); множество её ненулевых решений и будет множеством собственных векторов, отвечающих λ_i .

Пример 1.30.

Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Составим характеристическое уравнение и найдём его корни:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda & 0 \\ 8 & 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислив определитель, получим уравнение: $(2 - \lambda)(\lambda^2 - 9) = 0$. Его корнями являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$.

Найдём собственные векторы данного оператора, соответствующие найденным собственным значениям.

Координатные столбцы $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ собственных векторов удовле-

творяют уравнению (1.20), а координаты собственных векторов (x_1, x_2, x_3) удовлетворяют системе уравнений вида (1.22):

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + (2 - \lambda)x_3 = 0, \\ 8x_1 + (-1 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (1.23)$$

При $\lambda = 2$ система (1.23) принимает вид:

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \\ 8x_1 - 3x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$$\{\mathbf{a}_1 = (0, x_2, 0) | x_2 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}; \text{ фср: } \{(0, 1, 0)\}.$$

При $\lambda = 3$ система (23) принимает вид:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 8x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = x_1, \\ x_3 = 2x_1. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$$\{\mathbf{a}_2 = (x_1, x_2, 2x_1) | x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}; \text{ фср: } \{(1, 1, 2)\}.$$

При $\lambda = -3$ система (1.23) принимает вид:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 = 0, \\ 8x_1 + 2x_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{5}x_1, \\ x_3 = -4x_1. \end{cases}$$

Множество собственных векторов:

$$\{\mathbf{a}_3 = (x_1, -\frac{1}{5}x_1, -4x_1) | x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}\}; \text{ фср: } \{(5, -1, -20)\}.$$

Проверка. Проверим, что вектор $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0)$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda_1 = 2$.

$$A_\varphi \mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{a}_1.$$

Таким образом, вектор $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 0)$ – собственный вектор, отвечающий собственному значению $\lambda_1 = 2$.

Аналогично,

$$A_\varphi \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3\mathbf{a}_2,$$

$$A_\varphi \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 60 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -20 \end{pmatrix} = 3\mathbf{a}_3.$$

Собственные векторы определены верно.

Ответ: собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -3$; собственные векторы соответственно: $(0, x_2, 0); (x_1, x_1, 2x_1); (x_1, -\frac{1}{5}x_1, -4x_1)$, $x_2, x_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

1.10. Контрольные вопросы

1. Сформулировать определение матрицы. Перечислить виды матриц.
2. Какие арифметические операции можно производить над матрицами?
3. Любые ли две матрицы можно складывать (умножать)?
4. Для всякой ли матрицы можно написать определитель?
5. Что означает, что матрица является невырожденной?
6. Для всякой ли матрицы можно найти обратную?
7. Существует ли связь между алгебраическим дополнением и минором элемента матрицы?
8. Сформулировать определение ступенчатой матрицы. Всякую ли матрицу можно привести к ступенчатому виду?
9. Сколькими способами можно найти ранг матрицы?
10. Описать способы нахождения ранга матрицы.
11. Всякую ли систему линейных уравнений можно решить по правилу Крамера (методом обратной матрицы, методом Гаусса)?
12. Какова идея метода Гаусса?
13. Справедливо ли утверждение, что всякая система линейных однородных уравнений является совместной.
14. В каком случае система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения?
15. Сформулировать определение фундаментальной системы решений (фср). Всякая ли система линейных однородных уравнений имеет фср?
16. Сформулировать определение линейного оператора.
17. Какова особенность собственного вектора линейного оператора?
18. Сформулировать определение векторного пространства.
19. Во всяком ли векторном пространстве существует базис?

1.11. Тест «Линейная алгебра»

1. Единичной матрицей является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Диагональной матрицей является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Ступенчатой является матрица.

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Для матриц $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ можно выполнить

операции.

a) $A + B$; b) $B + A^T$; c) AB ; d) BA .

5. Если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, то

a) AB не существует;

b) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

d) нет верного ответа.

6. Последовательность матриц в порядке убывания их ранга.

a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 1-3 & 1 & 1 \\ 2-6 & 2 & 2 \\ 3-9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

7. Решением системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 8 \end{cases} \text{ является:}$$

a) (1,1,1,0); b) (-1,-1,-1,0); c) (2,0,0,0); d) (3,1,1,0).

8. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$ состоит из:

- a) одного решения;
- b) двух решений;
- c) трёх решений;
- d) нуль решений.

9. Если в определителе поменять местами две строки, то определитель:

- a) не изменится;
- b) обратится в нуль;
- c) изменит знак на противоположный;
- d) нет верного ответа.

10. Невырожденной матрицей является матрица:

a) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Обратная для матрицы A является матрица:

a) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$; d) $\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$.

12. Систему линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1, \\ 3x_1 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ можно решить по методу Крамера, так как:

a) $|A_1| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;

b) $|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;

c) $|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$;

d) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$.

13. Однородная система трёх линейных уравнений с тремя неизвестными имеет ненулевые решения, если:

a) $|A| = 0$;

c) $|A| > 0$;

b) $|A| \neq 0$;

d) $|A| < 0$.

14. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$:

- a) система имеет единственное решение;
- b) в общем решении системы три главных и одно свободное неизвестное;
- c) система неопределённая, её общее решение зависит от двух свободных неизвестных;
- d) система имеет бесконечное множество решений.

15. Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет бесконечное множество решений, если:

- a) $n > m$;
- b) $n < m$;
- c) $n = m$;
- d) $r < n$, где r – ранг матрицы системы.

16. Всякая однородная система линейных уравнений является:

- a) совместной;
- b) определённой;
- c) неопределённой;
- d) несовместной.

17. Матрица имеет обратную, если:

- a) она вырожденная;
- b) определитель матрицы отличен от нуля;
- c) число её строк равно числу её столбцов;
- d) она невырожденная.

18. Матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$:

- a) имеет единственное решение;
- b) не имеет решения;

- с) имеет бесконечное множество решений;
- д) имеет более одного решения.

19. Матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

- а) система совместная;
- б) система приведена к ступенчатому виду;
- с) система несовместная;
- д) система определённая.

20. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & a \\ 3 & 3 & 3 & a \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$:

- а) ранг матрицы равен 4 при $a \neq 0$;
- б) ранг матрицы равен 2 при $a = 0$;
- с) ранг матрицы равен 2 при $a = 0$;
- д) ранг матрицы не зависит от параметра a .

21. Линейно зависимой системой векторов пространства \mathbf{R}^3 является:

- а) (1,2,3), (0,0,0), (-1, -2, -10);
- б) (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1);
- с) (1,1,1), (2,3,4), (-2, -2, -2);
- д) (1,0,0), (0,1,0), (2,2,2), (0,0,1).

22. Линейно независимой системой векторов пространства R^3 является:

- a) $(1,2,3), (0,0,0), (1,2, -10)$;
- b) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;
- c) $(1,1,1), (2,3,4), (-2, -2, -2)$;
- d) $(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)$.

23. Базисом пространства R^3 является система векторов:

- a) $(1,2,3), (1,0,0), (-1,2,10)$;
- b) $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$;
- c) $(1,1,1), (2,3,4), (-2, -2, -2)$;
- d) $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)$.

24. Нормированными векторами пространства E^4 являются

- a) $(1,0,1,0)$;
- b) $(1,1,1,1)$;
- c) $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$;
- d) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

25. Последовательность векторов в порядке убывания их норм (длин):

- a) $(1, 2, 3, 0)$;
- b) $(-2, 1, 1)$;
- c) $(1, 1, 1, 1)$;
- d) $(0, 1)$.

26. Из данных операторов не являются линейными:

- a) $\varphi(x) = (x_1 - x_2, x_3, x_2)$;
- b) $\varphi(x) = (x_1 + 3x_3, x_3, x_2)$;

c) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1+3, x_3, x_2)$;

d) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, x_3, x_3)$.

27. Соответствие линейного оператора его матрице:

a) $\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1+x_2+x_3, -x_1-2x_2-x_3, x_1+x_2+2x_3)$;

b) $\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1-x_2+x_3, -x_1-2x_2-x_3, x_1+x_2+2x_3)$;

c) $\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1+x_2+x_3, x_1-2x_2+x_3, x_1-x_2+2x_3)$;

d) $\varphi(\mathbf{x}) = (2x_1+x_2+x_3, x_1-2x_2+x_3, x_1-x_2+2x_3)$.

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

28. Характеристический многочлен линейного оператора позволяет определить:

a) только количество собственных значений;

b) все собственные значения;

c) все несобственные значения;

d) нет правильного ответа.

29. В порядке увеличения числа различных собственных значений матрицы линейных операторов располагаются

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

30. Собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,

1.12. Задачи

1.1. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти $A+B, B+A, A-B, B-A, AB, BA, -3A, B^T$.

1.2. Вычислить произведения AB и BA , если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix};$

2) $A = (1 \ 2 \ 3), B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};$

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$

4) $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, B = (2 \ -1);$

5) $A = (-1 \ 2), B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};$

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -3 & -4 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

1.3. Найти матрицу A^2-4B , если:

1) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Найти:

1) $A^2-B^2;$

2) $B^2+A^2;$

3) $AB;$

- 4) BA ;
 5) $B^2 - 2BA + A^2$;
 6) $3A^2 - 4B + 5E$.

1.5. Вычислить значение многочлена $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ от матрицы A , если:

- 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$;
 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^T$.

1.6. Решить матричное уравнение вида $AX = B$, если:

- 1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$;
 2) $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Решить матричное уравнение вида $XA = B$, если:

- 1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 0 & -8 & -6 \end{pmatrix}$;
 2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1.8. Вычислить определители:

- 1) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.9. Вычислить определители:

- 1) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & -8 & 4 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

1.10. Вычислить определители, используя свойства определителей:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix};$$

$$3) \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.11. Дан определитель $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$. Вычислить миноры и алгебраические дополнения элементов:

- 1) второй строки;
- 2) третьего столбца.

1.12. Вычислить определители из задания 1.9, используя теорему о разложении.

1.13. Вычислить определители, используя теорему о разложении:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 1 & b \\ 3 & 2 & 1 & c \\ 1 & 2 & 3 & d \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ a & b & c & d \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

1.14. Решить уравнения:

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.15. Какие из следующих матриц являются обратимыми:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

1.16. Найти матрицу A^{-1} , если:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.17. Привести данную матрицу к ступенчатому виду:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.18. Найти ранги матриц из задания 1.17.

1.19. Найти ранги матриц двумя способами (с помощью элементарных преобразований и методом окаймляющих миноров):

1) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$.

1.20. Найти ранги следующих матриц при различных значениях параметра a :

1) $\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

1.21. Выяснить, являются ли строки матрицы линейно независимыми:

$$1) (2 \ 3 \ 4 \ -1), (-4 \ -6 \ -8 \ 2);$$

$$2) (1 \ 2 \ 3 \ 4), (2 \ 4 \ 5 \ 1).$$

1.22. Найти максимальное число линейно независимых строк (столбцов) матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

1.23. Методом обратной матрицы решить системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 3, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 6x_3 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 = 2, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 + 3x_3 = 16, \\ 5x_2 - x_3 = 10, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 - 4x_2 = -5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$$

1.24. Методом Крамера решить системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

1.25. Методом Гаусса решить системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -3, \\ -5x_1 + x_2 - x_4 = -19, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 - x_4 = 4, \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 3x_4 = 2, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0, \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 21. \end{cases}$$

1.26. Исследовать и решить системы линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3, \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 = -3. \end{cases}$$

1.27. Найти фундаментальную систему решений систем уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0, \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \end{cases} \quad 6) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 11x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 13x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

1.28. Выяснить, является ли векторным (линейным) пространством:

- 1) множество многочленов степени n с действительными коэффициентами;
- 2) множество многочленов степени $\leq n$ с действительными коэффициентами.

1.29. Множество V состоит из одного элемента θ . Операции в V определены следующим образом:

1) $\theta + \theta = \theta$; 2) $\lambda\theta = \theta$, где λ – любое действительное число.

Проверить, что V – векторное пространство.

1.30. Выяснить, является ли векторным пространством множество матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$, где a, b, c – любые действительные числа относительно сложения матриц и умножения на действительное число.

1.31. Являются ли следующие множества матриц векторными пространствами:

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbf{R} \right\}$; 2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$?

1.32. Найти линейную комбинацию $2a_1 - 3a_2 + 6a_3$ векторов a_1, a_2, a_3 , если:

1) $a_1 = (2, 1, 2, 1)$, $a_2 = (-2, -2, 3, 4)$, $a_3 = (-3, 0, 0, 1)$;

2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $a_1 = 2x^2 - 3x + 1$, $a_2 = 3x^2 + x$, $a_3 = 2x - 1$.

1.33. Решить уравнение $2(a_1 - x) + 3(a_1 + a_3 - 2x) = a_2 + x$, если:

1) $a_1 = (1, 3)$, $a_2 = (2, -1)$, $a_3 = (-4, 1)$;

2) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1.34. В указанных векторных пространствах определить, линейно зависима или линейно независима данная система векторов.

1) В \mathbf{R}^3 :

a) $(0, 0, 0)$;

b) $(-2, 1, 1)$;

- c) $(1,0,0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
- d) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)$;
- e) $(-1, 1, 1), (-1, 1, -2), (0, 0, 3)$;
- f) $(3, 2, 1), (-1, 1, 1), (-1, 1, -2), (0, 0, 3)$;
- g) $(-3, 3, 3), (0, 0, 1), (4, -4, -4)$.

2) В векторном пространстве квадратных матриц 2-го порядка с действительными элементами:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

1.35. Показать, что каждая из нижеприведённых систем векторов является базисом пространства \mathbf{R}^3 :

- 1) $\mathbf{a}_1 = (1,2,1), \mathbf{a}_2 = (1,2,2), \mathbf{a}_3 = (3,7,4)$;
- 2) $\mathbf{a}_1 = (3,1,4), \mathbf{a}_2 = (2,1,-3), \mathbf{a}_3 = (4,1,7)$.

1.36. При каких значениях параметра λ система векторов $(1, 2, -1, 1), (5,1,2,1), (4, -1,\lambda,0), (3,\lambda,4, -1)$ являются базисом пространства \mathbf{R}^4 .

1.37. Доказать, что для любых α, β, γ система векторов $(1, \alpha, \beta), (0,1,\gamma), (0,0,1)$ являются базисом пространства \mathbf{R}^3 .

1.38. Выяснить, можно ли в пространстве \mathbf{R}^2 задать скалярное произведение (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , $(\mathbf{x} = (x_1, x_2), \mathbf{y} = (y_1, y_2))$ с помощью следующих формул:

- 1) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha x_1 y_1 + \beta x_2 y_2, \alpha, \beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;
- 2) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1$;
- 3) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_2 + x_2 y_2$;
- 4) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x_1| |y_1| + |x_2| |y_2|$.

1.39. В евклидовом пространстве E^4 найти угол между следующими парами векторов:

- 1) $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (3, 5, 1, 1)$;
- 2) $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (3, -5, 1, 1)$;
- 3) $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (-3, -3, -3, -3)$;
- 4) $\mathbf{a} = (2, 1, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, -2, 1)$.

1.40. Выяснить, являются ли ортогональными (ортонормированными) следующие системы векторов из пространства E^4 :

- 1) $\mathbf{a}_1 = (1, -5, -2, 10)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 11, -6, -22)$,
 $\mathbf{a}_3 = (3, 11, 4, 7)$, $\mathbf{a}_4 = (3, -2, -6, 4)$;
- 2) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (3, 2, -3, -1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 5, 1, 10)$;
- 3) $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 3, -1)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 1, -6, 0)$, $\mathbf{a}_3 = (5, 7, 7, 8)$,
 $\mathbf{a}_4 = (7, 4, 3, -3)$.

1.41. Указать, какие из следующих операторов, действующих в пространстве R^3 , являются линейными:

- 1) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, 2x_2, -3x_3)$;
- 2) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, x_1 + x_2, x_2 + x_3)$;
- 3) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2, 0, x_1 + x_3)$;
- 4) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1, x_2^2, x_3)$;
- 5) $\varphi(\mathbf{x}) = (x_1 + 1, x_2, x_3)$, где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$.

Для линейных операторов найти их матрицы в том же базисе, в котором заданы координаты векторов \mathbf{x} и $\varphi(\mathbf{x})$.

1.42. Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе, матрицами:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.43. Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом R^3 , и найти связь координат одного и того же вектора в этих базисах:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 2, 1), & \mathbf{e}_2 &= (2, 3, 3), & \mathbf{e}_3 &= (3, 7, 1); \\ \mathbf{e}'_1 &= (3, 1, 4), & \mathbf{e}'_2 &= (5, 2, 1), & \mathbf{e}'_3 &= (1, 1, -6). \end{aligned}$$

1.13. Ответы

$$1.1. \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -8 & -8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.2. 1) AB = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 9 & -22 \\ 23 & -14 \end{pmatrix}, \quad 2) AB = (8), \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) AB = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 9 & 11 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

$$4) AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 5) AB = (4), \quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$6) AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 10 & 9 \\ -5 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

$$BA = \begin{pmatrix} 29 & 17 & 14 \\ -56 & -36 & -25 \\ 27 & 19 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$1.3. 1) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. \quad 1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 5) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. \quad 1) \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} -8 & 9 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. \quad 1) \begin{pmatrix} -\alpha & 2-\beta \\ 2 & -2 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}; \quad 2) \text{ нет решения.}$$

$$1.7. \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 5-\alpha & \alpha & -2 \\ -2-\beta & \beta & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}.$$

$$1.8. \quad 1) 38, \quad 2) 1, \quad 3) 0, \quad 4) -5.$$

$$1.9. \quad 1) 40, \quad 2) -21, \quad 3) 0, \quad 4) 12.$$

$$1.10. \quad 1) 0, \quad 2) 0, \quad 3) 0, \quad 4) -18.$$

$$1.11. \quad 1) M_{21} = 0, \quad M_{22} = 0, \quad M_{23} = 11; \quad A_{21} = 0, \quad A_{22} = 0, \\ A_{23} = -11;$$

$$2) M_{13} = -16, \quad M_{23} = 11, \quad M_{33} = -2; \quad A_{13} = -16, \quad A_{23} = -11, \\ A_{33} = -2.$$

$$1.13. \quad 1) 4a-c-d, \quad 2) -5a-5b-5c-5d.$$

$$1.14. \quad 1) x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad 2) x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$1.15. \quad 1) \text{ обратимая, } 2) \text{ не является обратимой, } 3) \text{ не является об-} \\ \text{ратимой, } 4) \text{ обратимая.}$$

$$1.16. \quad 1) -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2) -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$3) -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad 4) -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & 7 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$1.18. \quad 1) 4, \quad 2) 2.$$

$$1.19. \quad 1) 2, \quad 2) 3.$$

$$1.20. \quad 1) \text{ при } a = 3 \quad r = 2, \text{ при } a \neq 3 \quad r = 3, \quad 2) \text{ при } a = 1 \quad r = 1, \\ \text{при } a = -3 \quad r = 3, \text{ при } a \neq 1 \text{ и } a \neq -3 \quad r = 4.$$

$$1.21. \quad 1) \text{ линейно зависимые,} \quad 2) \text{ линейно независимые.}$$

$$1.22. \quad 1) 2, \quad 2) 2.$$

$$1.23. \quad 1) x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -2, \quad 2) x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = -1, \\ 3) x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5, \quad 4) x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -2.$$

$$1.24. \quad 1) x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1, \\ 2) x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -3,$$

$$1.25. \quad 1) x_1 = 5, x_2 = 7, x_3 = 0, x_4 = 1, \\ 2) x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1, \\ 3) x_1 = -2, x_2 = 3, x_3 = 5, x_4 = 2, \\ 4) x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

$$1.26. \quad 1) x_1 = \frac{-2+\alpha-9\beta}{11}, x_2 = \frac{10-5\alpha+\beta}{11}, x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in R, \\ 2) x_1 = \alpha, x_2 = \beta, x_3 = 13, x_4 = 19-3\alpha-2\beta, x_5 = -34, \quad \alpha, \beta \in R,$$

3) x_1 = система несовместна, 4) $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 1$,

5) $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, 6) система несовместна.

1.27. 1) $a_1 = (-1, 2, 1, 0, 0)$, $a_2 = (-2, 8, 0, 1, 0)$, 2) $a_1 = (0, 1, 1, 0)$,

$a_2 = (1, 7, 0, -5)$, 3) $a_1 = (8, -6, 1, 0)$, $a_2 = (-7, 5, 0, 1)$,

4) $a_1 = (-7, 5, 1, 0)$, $a_2 = (7, -5, 0, 2)$, 5) система имеет только нулевое решение, 6) $a = (9, -5, -1, 1)$.

1.28. 1) не является, 2) является.

1.30. Является.

1.31. 1) является, 2) не является.

1.32. 1) $(-8, 8, -5, -4)$, 2) $\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -31 & -6 \end{pmatrix}$, 3) $-5x^2 + 3x - 4$.

1.33. 1) $(-1, \frac{19}{9})$, 2) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -9 & -19 \\ 19 & -9 \end{pmatrix}$.

1.34. 1) а) линейно зависима, б) линейно независима, в) линейно независима, д) линейно независима, е) линейно зависима, ф) линейно зависима, г) линейно зависима;

2) а) линейно независима, б) линейно зависима, в) линейно зависима.

1.36. При $\lambda \neq 3$ и $\lambda \neq -3$.

1.38. 1) нельзя, 2) нельзя, 3) можно, 4) нельзя.

1.39. 1) $\cos \varphi = \frac{5}{6}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = -\pi$; 4) $\cos \varphi = -\frac{1}{5\sqrt{6}}$.

1.40. 1) не является ортогональной, 2) ортогональная система векторов, но не ортонормированная, 3) не является ортогональной.

1.42. 1) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$,

2) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

3) оператор φ – линейный, $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) оператор φ не является линейным,

5) оператор φ не является линейным.

1.43. 1) $\lambda = 3$, $\alpha \left(1, -\frac{2}{5}, 1\right)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$\lambda = -3$, $\beta(-1, 0, 1)$, $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$\lambda = -2$, $\gamma(-5, 1, 5)$, $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

2) $\lambda = 1$, $\alpha(1, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$\lambda = -1$, $\beta(-1, 1, 0)$, $\beta \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

$\lambda = 0$, $\gamma(-1, 1, 1)$, $\gamma \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$;

3) $\lambda = 2$, $\alpha(0, -1, 1)$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$,

4) $\lambda = 2$, $\alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 0, 1)$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

1.14. Типовой расчет «Линейная алгебра»

1. Найти произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned}
3) & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & 4) & \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \\
5) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; & 6) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}; \\
7) & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; & 8) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}; \\
9) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; & 10) & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}; \\
11) & \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; & 12) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}; \\
13) & \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}; & 14) & \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \\
15) & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ -5 & 3 & 4 \\ 6 & 2 & 7 \end{pmatrix}; & 16) & \begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}; \\
17) & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}; & 18) & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \\
19) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; & 20) & \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}; \\
21) & \begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; & 22) & \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \\
23) & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}; & 24) & \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \\
25) & \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}; & 26) & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27) & \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}; & 28) & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}; \\
 29) & \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}; & 30) & \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2. Найти произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix} \qquad 2) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad 4) \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ 2) \qquad 6) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 0 \ -3 \ 0)$$

$$7) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad 8) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 5 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 2 \ 1) \qquad 10) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$11) (4 \ -1 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix} \qquad 12) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -4 & 3 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (13 \ 1 \ 0 \ 4) \qquad 14) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$15) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (4 \ 1 \ 2)$$

$$17) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$19) \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$20) (1 \ -1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -8 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$21) \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 0 \ 6)$$

$$22) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$23) \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$24) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$25) \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 3 & 3 \\ 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$26) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 1 \ 4 \ 4)$$

$$27) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$28) \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$29) \begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$30) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 2 \ -4 \ 3)$$

3. Вычислить определитель:

$$1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 5 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$15) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$17) \begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$19) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

$$21) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$23) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$14) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$16) \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$18) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$20) \begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$22) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$24) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$25) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$27) \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$29) \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$26) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$28) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$30) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

31)

4. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки:

$$1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$3) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$5) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -3 & 2 & -2 \\ -5 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$7) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -2 & -4 \\ 3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

$$9) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$11) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$13) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$15) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 5 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$4) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$6) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$8) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$10) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$12) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$14) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$16) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$17) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$19) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 4 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$21) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$23) \begin{vmatrix} a & b & c \\ -4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$25) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$27) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$$29) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & -5 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$18) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$20) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$22) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$24) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$26) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$28) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$30) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

5. Найти матрицу, обратную данной, и сделать проверку:

$$1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$5) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$9) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$8) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 9 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$11) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$15) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$19) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$23) \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$25) \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$27) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$29) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$14) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$20) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -9 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$22) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$24) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$26) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$28) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$30) \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Решить систему и найти фундаментальную систему решений

(фсп):

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
3) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} & 4) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \\
5) \begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & 6) \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
7) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 9x_1 + 7x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 8) \begin{cases} 4x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 8x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
9) \begin{cases} 8x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 12x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} & 10) \begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 10x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\
11) \begin{cases} 15x_1 - 10x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 10x_3 + 12x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 12) \begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
13) \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} & 14) \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\
15) \begin{cases} -10x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ -15x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & 16) \begin{cases} 8x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \\ 16x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
17) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 6x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & 18) \begin{cases} 9x_1 - x_2 - 4x_3 - x_4 = 0 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases} \\
19) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 14x_1 - 6x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 20) \begin{cases} 10x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 20x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \\
21) \begin{cases} 8x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 12x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 22) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \\
23) \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 24) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \\
25) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ -8x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 12x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} & 26) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 9x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}
\end{array}$$

$$27) \begin{cases} -21x_1 + 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 14x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} -3x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 12x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

7. Решить систему а) методом Крамера,
 б) методом обратной матрицы,
 в) методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = -3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 6 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 3 \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = -4 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 7 \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 2 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + x_3 = -6 \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 1 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 6x_3 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -4 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 9x_1 + x_2 - 3x_3 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 4 \\ 18x_1 + 3x_2 + x_3 = 19 \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \\ -4x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -5 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 4 \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 = 11 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 - x_3 = -6 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 2 \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ 6x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 6 \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 - x_3 = -6 \\ 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 3 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

1.15. Решение типового расчёта

1. Найти произведение матриц:

$$1) \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -12 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Решение.

1) Найдём произведение

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 + 0 - 2 & -8 + 0 + 1 & 12 + 0 + 3 \\ 2 - 2 + 6 & 4 + 0 - 3 & -6 + 1 - 9 \\ 3 + 4 - 4 & 6 + 0 + 2 & -9 - 2 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -7 & 15 \\ 6 & 1 & -14 \\ 3 & 8 & -5 \end{pmatrix}.$$

2) Вычислим данное произведение. В результате получим матрицу размера 2×1 :

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 6 + 0 - 3 \\ -4 - 2 - 6 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определители:

$$1) \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}; 2) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение.

1) Вычислим определитель двумя способами: а) по правилу Саррюса; б) используя свойства определителей и теорему о разложении определителя по элементам строки:

$$a) \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 4 + 3 - 24 + 0 = -9,$$

$$b) \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -10 & -1 & -3 \\ 11 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1A_{13} =$$

$$= (-1)^4 \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -9.$$

$$2) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+4} \begin{vmatrix} -6 & -2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -2 \begin{vmatrix} 9 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2(9 + 10) = -38.$$

3. Вычислить определитель разложением по элементам первой строки.

Решение.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot A_{11} + b \cdot A_{12} + c \cdot A_{13} = \\ = a \cdot (-1)^{1+1} M_{11} + b \cdot (-1)^{1+2} M_{12} + c \cdot (-1)^{1+3} M_{13} = \\ = a \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 14a + 5b - 4c.$$

4. Найти матрицу, обратную данной, и сделать проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Обратная матрица A^{-1} матрицы A имеет вид:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \text{ где } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 14 + 2 \times \\ \times 5 - 4 \cdot 3 = 12 \neq 0, \text{ т. е. матрица } A \text{ является обратимой, т. е. суще-} \\ \text{ствует матрица } A^{-1}.$$

Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 14, A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -8, A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -2, A_{12} = \\ = - \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, A_{22} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = \\ = -5, A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4, A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \\ A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4.$$

$$\text{Тогда: } A^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14 & -8 & -2 \\ 5 & -2 & -5 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Проверка.

Найдём:

$$A^{-1}A = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 14 & -8 & -2 \\ 5 & -2 & -5 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогично $AA^{-1} = E$. Следовательно, обратная матрица найдена верно.

5. Решить систему и найти фундаментальную систему решений (фср):

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ 10x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0, \\ 15x_1 - 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Выпишем матрицу данной однородной системы уравнений и с помощью эквивалентных преобразований приведём её к ступенчатому виду:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -2 \\ 10 & -5 & -4 & -4 \\ 15 & -4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2), \\ (-3) \\ +}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -7 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 5 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\text{rang } A = 2 < n = 4$. Следовательно, система имеет бесконечное множество решений; главных неизвестных – два ($n-r=2$): x_1 и x_2 ; свободных неизвестных – два: x_3, x_4 . Найдём множество решений системы:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 = 0, \end{cases}$$

$$x_2 = -2x_3,$$

$$x_1 = \frac{1}{5}(-x_2 - 5x_3 + 2x_4) = \frac{1}{5}(2x_3 - 5x_3 + 2x_4) + \frac{1}{5}(-3x_3 + 2x_4),$$

$$\text{Следовательно, } \left\{ \left(-\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4; -2x_3, x_3, x_4, \right) \mid x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\} -$$

множество решений системы, а фср состоит из $n-r=2$ решений.

Построим фср одним из двух способов (см. п. 1.6.3).

Пусть $x_3 = 5$ (можно было положить $x_3 = 1$, тогда далее пришлось бы работать с дробями) и $x_4 = 0$, тогда $x_1 = -3$, $x_2 = -10$; а затем положим $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, получим $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

Таким образом, получили два частных решения данной однородной системы линейных уравнений: $a_1 = (-3, -10, 5, 0)$, $a_2 = (2, 0, 0, 5)$, которые и образуют фср.

Ответ: $\left\{ \left(-\frac{3}{5}x_3 + \frac{2}{5}x_4; -2x_3, x_3, x_4, \right) \mid x_3, x_4 \in \mathbf{R} \right\}$; $\{a_1, a_2\}$ – фср.

6. Решить систему а) методом Крамера,
 б) методом обратной матрицы,
 с) методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение.

а) Вычислим определители матрицы A системы и матриц A_i , получаемых из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов, где $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -6 & -15 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -21 \end{vmatrix} = 141, \\ |A_1| &= \begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -5 & -4 & -5 \\ 4 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 3 & -3 & 0 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 12 & 5 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \begin{vmatrix} 8 & 9 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 12 & 17 & -1 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 17 & -1 \end{vmatrix} = 282, \\ |A_2| &= \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 2 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 5 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & 12 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= -3 \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -1 \end{vmatrix} = 141, \end{aligned}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -6 & -21 \\ 0 & 12 & -20 \end{vmatrix} = 141.$$

Тогда, согласно формулам Крамера, имеем: $x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 2$,

$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = 1, x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = 1.$$

Ответ: $\{(2, 1, 1)\}$.

б) Запишем данную систему линейных уравнений в виде матричного уравнения $AX = B$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -5 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Выше установлено, что $|A| = 141$, т.е. $|A| \neq 0$. Следовательно, существует матрица A^{-1} ; вычислим её. Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A :

$$A_{11} = 44, A_{12} = -3, A_{13} = 20, A_{21} = 26, A_{22} = -21, A_{23} = -1, \\ A_{31} = 15, A_{32} = 15, A_{33} = -6, \text{ и тогда}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 44 & 26 & 15 \\ -3 & -21 & 15 \\ 20 & -1 & -6 \end{pmatrix}, \quad \text{Так как } X = A^{-1}B, \text{ то}$$

$$X = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 44 & 26 & 15 \\ -3 & -21 & 15 \\ 20 & -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{141} \begin{pmatrix} 282 \\ 141 \\ 141 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Ответ: $\{(2, 1, 1)\}$.

с) Выпишем расширенную матрицу данной системы и приведём её к ступенчатому виду:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & -4 & -5 & -5 \\ 3 & 4 & -6 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & -6 & -15 & -21 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \\ 0 & 0 & -141 & -141 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -21 & -20 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Полученная матрица является ступенчатой; $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A} = 3 = n$ (n – число неизвестных). Система имеет единственное решение. Восстановим систему уравнений, равносильную данной, по последней матрице:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + 5x_3 = 8, \\ x_2 - 21x_3 = -20, \\ x_3 = 1, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1. \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(2, 1, 1)\}$.

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Векторы

2.1.1. Основные понятия

Различают скалярные величины (масса, объём, площадь, длина и т. д.), которые определяются своим численным значением, и векторные величины (сила, скорость, ускорение и т. д.), определяемые не только своим числовым значением, но и направлением. Векторные величины геометрически изображаются с помощью векторов.

Вектором (геометрическим вектором) называется направленный отрезок, имеющий определённую длину и определённое направление.

Векторы обозначаются либо так: \overline{AB} (точка A – начало вектора, точка B – конец вектора), либо так: \vec{a} . Длиной (модулем) вектора \overline{AB} называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$ (или $|\vec{a}|$).

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают, длина нулевого вектора равна нулю. Вектор, длина которого равна единице, называется единичным вектором и обозначается \vec{e} . Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора \vec{a} , называется его ортом и обозначается \vec{a}^0 .

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, записывают $\vec{a} || \vec{b}$.

Если $\vec{a} || \vec{b}$, то либо они направлены одинаково, и тогда векторы \vec{a} и \vec{b} называются сонаправленными и обозначаются как $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, либо векторы \vec{a} и \vec{b} направлены противоположно и обозначаются как $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$.

Заметим, что нулевой вектор $\vec{0}$ считается коллинеарными любому вектору \vec{a} .

Векторы \vec{a} и \vec{b} называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если они сонаправленные ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$) и имеют одинаковые длины ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$). Отсюда сле-

дует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, а начало вектора поместить в любую точку пространства.

Три вектора пространства, лежащие на одной плоскости или на параллельных плоскостях, называются компланарными.

2.1.2. Линейные операции над векторами

Линейные операции над векторами – сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Пусть \vec{a} и \vec{b} – произвольные векторы, и точка O – произвольная точка. Построим вектор $\vec{OA} = \vec{a}$. От точки A отложим вектор $\vec{AB} = \vec{b}$. Вектор \vec{OB} называется суммой векторов \vec{a} и \vec{b} : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$.

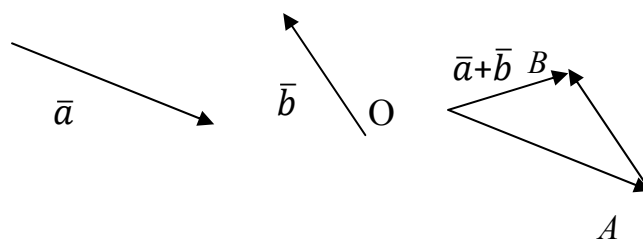


Рис. 2.1

Это правило сложения векторов называется правилом треугольника.

Сумму неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} можно построить по правилу параллелограмма (рис. 2.2).

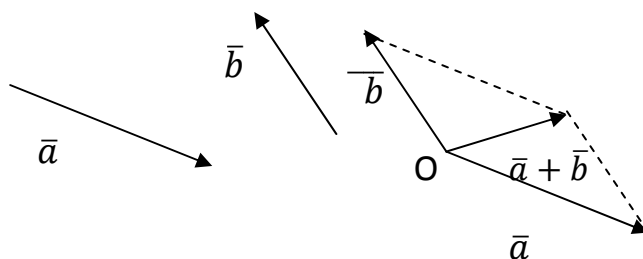


Рис. 2.2

Сумму произвольного числа векторов $\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_k$ можно построить по следующему правилу: приложим вектор \vec{a}_2 к концу век-

тора \vec{a}_1 , вектор \vec{a}_3 – к концу вектора \vec{a}_2 и т. д.; тогда сумма k векторов будет представлять собой вектор с началом, совпадающим с началом вектора \vec{a}_1 , и концом, совпадающим с концом вектора \vec{a}_k .

На рис. 2.3 показано сложение трёх векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

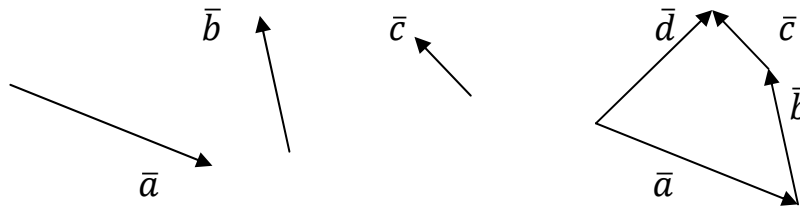


Рис. 2.3

Разностью векторов \vec{a} и \vec{b} называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис 2.4).

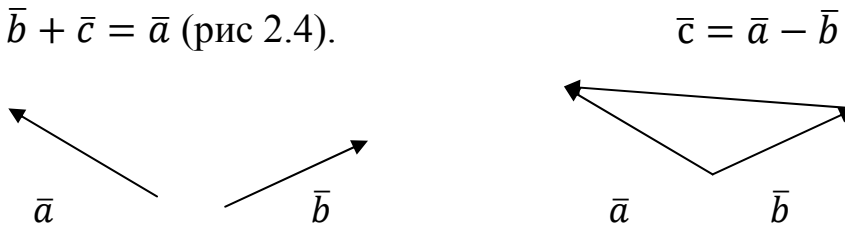


Рис. 2.4

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах \vec{a} и \vec{b} , одна направленная диагональ является суммой векторов \vec{a} и \vec{b} , а другая – разностью (рис. 2.5).



Рис. 2.5

Можно рассматривать разность векторов \vec{a} и \vec{b} как сумму векторов \vec{a} и $(-\vec{b})$, противоположного вектору \vec{b} , $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Произведением вектора \vec{a} на действительное число α называется вектор $\alpha\vec{a}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}|$,
- 2) $(\alpha\vec{a})||\vec{a}$,
- 3) $\alpha\vec{a}, \vec{a}$ – векторы сонаправленные, если $\alpha > 0$, и противоположно направленные, если $\alpha < 0$ (если $\alpha = 0$, то $\alpha\vec{a} = \vec{0}$).

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

- 1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$,
- 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$,
- 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,
- 4) $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$,
- 5) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$,
- 6) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$,
- 7) $(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$,
- 8) $1 \cdot \vec{a} = 1 \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.1.3. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве задана ось l .

Проекцией (ортогональной проекцией) точки A на ось l называется основание A_1 перпендикуляра, опущенного из точки A на ось l (рис. 2.6).

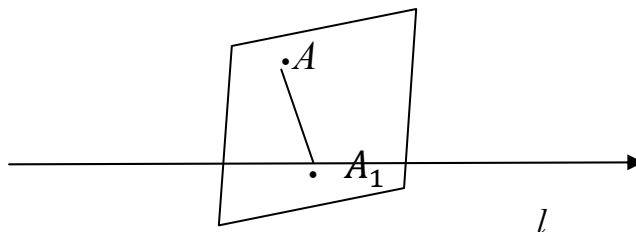


Рис. 2.6

Заметим, что если точка A лежит на оси l , то $A = A_1$.

Пусть $\overline{AB} \neq \vec{0}$ – ненулевой произвольный вектор, A_1 и B_1 – проекции точек A и B соответственно вектора \overline{AB} (рис. 2.7).

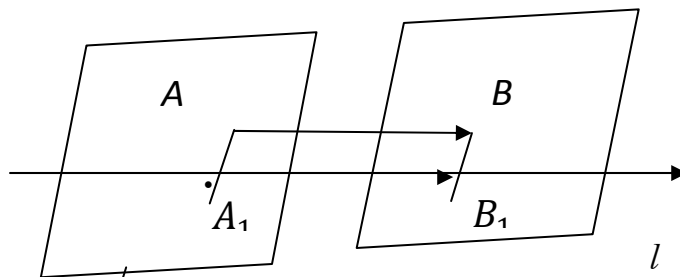


Рис. 2.7

Проекцией (ортогональной проекцией) вектора \overline{AB} на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор \overline{AB} и ось l одинаково направлены; отрицательное число $(-|\overline{A_1B_1}|)$, если вектор \overline{AB} и ось l противоположно направлены; число 0, если $A_1 = B_1$ (т. е. $\overline{AB} = \vec{0}$). Обозначение: $\text{пр}_l \overline{AB}$.

Углом φ ($0 \leq \varphi \leq \pi$) между векторами \vec{a} и осью l (или между двумя векторами) называется угол кратчайшего поворота оси до совмещения её направления с направлением вектора (аналогично определяется угол между двумя векторами) (рис. 2.8).

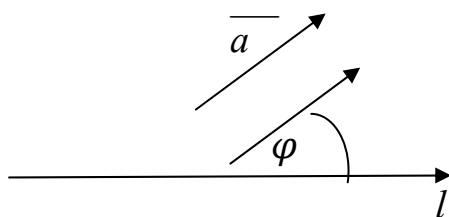


Рис. 2.8

Проекция вектора \vec{a} на ось l находится по формуле:

$$\text{пр}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi. \quad (2.1)$$

Отметим основные свойства проекций:

- 1) если $\bar{a} = \bar{b}$, то $\text{пр}_l \bar{a} = \text{пр}_l \bar{b}$,
- 2) $\text{пр}_l (\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \text{пр}_l \bar{a} + \text{пр}_l \bar{b} - \text{пр}_l \bar{c}$,
- 3) $\text{пр}_l (\alpha \bar{a}) = \alpha \text{пр}_l \bar{a}$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

2.1.4. Разложение вектора по базису. Длина вектора

Пусть $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы осей прямоугольной системы координат $Oxyz$. Эти векторы образуют базис. Поэтому любой вектор \bar{a} пространства можно разложить по этому базису:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad (2.2)$$

где a_x, a_y, a_z – координаты вектора \bar{a} . Они представляют собой проекции вектора на оси координат.

Если даны начало вектора $A(x_A, y_A, z_A)$, и конец $B(x_B, y_B, z_B)$, то имеем:

$$\overline{AB} = (x_B - x_A)\bar{i} + (y_B - y_A)\bar{j} + (z_B - z_A)\bar{k} \quad (2.3)$$

$$\text{или } \overline{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

В частном случае, когда начало вектора \overline{OB} находится в начале координат, то имеем:

$$\overline{OB} = x_B \bar{i} + y_B \bar{j} + z_B \bar{k} = (x_B, y_B, z_B), \quad (2.4)$$

т. е. в этом случае координаты вектора совпадают с координатами конца вектора. Заметим, что вектор \overline{OB} называется радиусом-вектором точки B .

Длина вектора \overline{AB} находится по формуле:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (2.5)$$

В частности, длина вектора \overline{OB} :

$$|\overline{OB}| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}. \quad (2.6)$$

Пример 2.1.

1) Пусть точки $A(-2, 3, 0)$ и $B(1, 2, -1)$ – соответственно начало и конец вектора \overline{AB} . Найти длину векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{OB}, \overline{OA}$. Используем формулы (2.5) и (2.6).

$$\overline{AB} = (1 - (-2); 2 - 3; -1 - 0) = (3, -1, -1),$$

$$\overline{OA} = (-2, 3, 0); \overline{OB} = (1, 2, -1).$$

Тогда

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},$$

$$|\overline{OA}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{4 + 9 + 0} = \sqrt{13},$$

$$|\overline{OB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 4 + 1} = \sqrt{6}.$$

Ответ: $|\overline{AB}| = \sqrt{11}, |\overline{OA}| = \sqrt{13}, |\overline{OB}| = \sqrt{6}$.

2.1.5. Действия над векторами, заданными своими координатами

Пусть векторы $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ заданы своими координатами или иначе $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}$.

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{a} \pm \bar{b} &= (a_x \pm b_x) \bar{i} + (a_y \pm b_y) \bar{j} + (a_z \pm b_z) \bar{k} = \\ &= (a_x \pm b_x, a_y \pm b_y, a_z \pm b_z), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\alpha \bar{a} = \alpha a_x \bar{i} + \alpha a_y \bar{j} + \alpha a_z \bar{k} = (\alpha a_x; \alpha a_y; \alpha a_z). \quad (2.8)$$

Два вектора \bar{a} и \bar{b} равны тогда и только тогда, когда выполняются равенства: $a_x=b_x, a_y=b_y, a_z=b_z$ (т. е. равны у них соответствующие координаты).

$$\text{Итак,} \quad \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_x = b_x, \\ a_y = b_y, \\ a_z = b_z. \end{cases} \quad (2.9)$$

Пример 2.2.

Найти координаты вектора $-4\bar{a} + 3\bar{b}$, если $\bar{a} = (-1, 2, -3), \bar{b} = (4, 0, 1)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $(-4)\bar{a}$ и $3\bar{b}$: $-4\bar{a} = (4, -8, 12)$, $3\bar{b} = (12, 0, 3)$, тогда $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (4 + 12, -8 + 0, 12 + 3) = (16, -8, 15)$.

Ответ: $-4\bar{a} + 3\bar{b} = (16, -8, 15)$.

Векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны (т.е. $\bar{a} = \lambda\bar{b}$, λ – некоторое число) тогда и только тогда, когда

$a_x = \lambda b_x, a_y = \lambda b_y, a_z = \lambda b_z$, т. е.

$$\bar{a} = \lambda\bar{b} \Leftrightarrow \frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}. \quad (2.10)$$

2.2. Скалярное произведение векторов

2.2.1. Определение

Скалярным произведением векторов \bar{a} и \bar{b} называется число, обозначаемое $\bar{a}\bar{b}$ и равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi, \quad (2.11)$$

где $\varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b})$.

Другие обозначения скалярного произведения: $\bar{a} \cdot \bar{b}$, (\bar{a}, \bar{b}) .

Формулу (2.11) можно переписать иначе, если учесть, что

$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$, $\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi$. (см. рис. 2.9):

$$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}|\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b} = |\bar{b}|\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}.$$

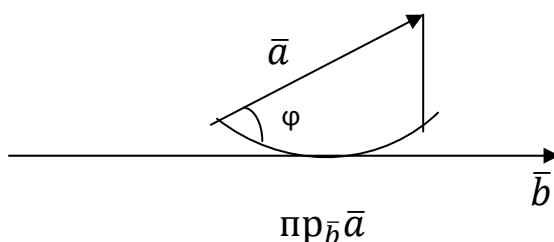


Рис. 2.9

2.2.2. Свойства скалярного произведения

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

- 1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$,
- 2) $(\alpha\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\alpha\bar{b}) = \alpha(\bar{a}\bar{b})$, $\alpha \in \mathbf{R}$,
- 3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$,
- 4) $\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$,
- 5) ненулевые векторы \bar{a} и \bar{b} взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\bar{a}\bar{b} = 0$, т. е.

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b} = 0. \quad (2.12)$$

Заметим, что $\sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|$ ($\sqrt{\bar{a}^2} \neq \bar{a}$).

Пример 2.3.

Найти длину вектора $\bar{c} = 2\bar{a} + 5\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$, $(\bar{a} \wedge \bar{b}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение.

$$\begin{aligned} |\bar{c}| &= \sqrt{\bar{c}^2} = \sqrt{(2\bar{a} + 5\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b})} = \sqrt{4\bar{a}^2 + 20\bar{a}\bar{b} + 25|\bar{b}|^2} = \\ &= \sqrt{4 \cdot 3^2 + 20 \cdot 3 \cdot 4 \cos \frac{\pi}{3} + 25 \cdot 4^2} = \sqrt{36 + 120 + 400} = \sqrt{556} = \\ &= 2\sqrt{139}. \end{aligned}$$

Ответ: $|\bar{c}| = 2\sqrt{139}$.

2.2.3. Выражения скалярного произведения через координаты векторов. Направляющие косинусы

Пусть векторы \bar{a}, \bar{b} в прямоугольной системе координат $Oxyz$ заданы своими координатами: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$

(т. е. $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$).

$$\begin{aligned}
\text{Тогда } \bar{a}\bar{b} &= (a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k})(b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}) = \\
&= a_x b_x \bar{i}\bar{i} + a_x b_y \bar{i}\bar{j} + a_x b_z \bar{i}\bar{k} + a_y b_x \bar{j}\bar{i} + a_y b_y \bar{j}\bar{j} + \\
&+ a_y b_z \bar{j}\bar{k} + a_z b_x \bar{k}\bar{i} + a_z b_y \bar{k}\bar{j} + a_z b_z \bar{k}\bar{k} = \\
&= a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z = \\
&= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \text{ т. е.} \\
\bar{a}\bar{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Угол между ненулевыми векторами \bar{a} и \bar{b} можно найти из соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \tag{2.14}$$

Если векторы \bar{a} и \bar{b} – ненулевые, то необходимое и достаточное условия перпендикулярности векторов \bar{a} и \bar{b} следующие:

$$\bar{a} \neq \bar{0}, \bar{b} \neq \bar{0}, \bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \tag{2.15}$$

Обозначим через α, β, γ углы, образованные вектором $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно. Тогда справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\bar{a}\bar{i}}{|\bar{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \\
\cos\beta &= \frac{\bar{a}\bar{j}}{|\bar{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}, \tag{2.16}
\end{aligned}$$

$$\cos\gamma = \frac{\bar{a}\bar{k}}{|\bar{a}|} = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Величины $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора \bar{a} .

Пример 2.4.

Даны точки $A(-5,1,6)$, $B(1,3,3)$, $C(2,1,3)$. Найти: 1) длину вектора $\vec{a} = 4\vec{AB} + 3\vec{BC}$; 2) скалярное произведение векторов \vec{a} и $\vec{b} = \vec{BC}$; 3) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{b}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AB}$.

Решение.

1) Найдём координаты векторов \vec{AB} и \vec{BC} .

$$\vec{AB} = (1 - (-5), 3 - 1, 3 - 6) = (6, 2, -3); \vec{BC} = (2 - 1, 1 - 3, 3 - 3) = (1, -2, 0).$$

$$\begin{aligned} 2) \vec{a}\vec{b} &= (4\vec{AB} + 3\vec{BC}) \cdot \vec{BC} = \\ &= (4 \cdot 6 + 3 \cdot 1, 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-2), 4 \cdot (-3) + 3 \cdot 0)(1, -2, 0) = \\ &= (27, 2, -12)(1, -2, 0) = 27 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-12) \cdot 0 = 23. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \text{ Так как } \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} &= \frac{\vec{c}\vec{d}}{|\vec{d}|}, \vec{d} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7, \\ \text{то } \text{пр}_{\vec{d}} \vec{c} &= \frac{23}{7} = \frac{23}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \vec{a} = (27, 2, -12), \vec{a}\vec{b} = 23, \text{ пр}_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{23}{7}.$$

2.2.4. Приложение скалярного произведения

(работа постоянной силы)

Пусть материальная точка перемещается прямолинейно из положения A в положение B под действием постоянной силы \vec{F} , образующей угол φ с перемещением $\vec{AB} = \vec{S}$ (рис. 2.10).

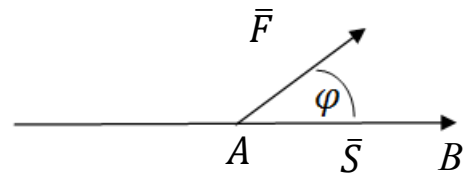


Рис. 2.10

Известно, что работа силы \vec{F} при перемещении \vec{S} равна $A = \vec{F} \cdot \vec{S} \cos \varphi$, т. е. $A = \vec{F}\vec{S}$. Следовательно, работа постоянной силы при прямолинейном перемещении её точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения.

Пример 2.5.

Вычислить работу, произведённую силой $\vec{F} = (3, 2, 4)$, если точка её приложения перемещается прямолинейно из положения $A(2, -4, 4)$ в положение $B(4, 2, 3)$. Под каким углом к \overline{AB} направлена сила \vec{F} ?

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Найдём } \vec{S} = \overline{AB} = (2, 6, -1) \text{ тогда } A = \vec{F} \vec{S} = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot \\ \cdot (-1) = 14 \text{ (ед. работы) и } \cos \varphi = \frac{\vec{F} \vec{S}}{|\vec{F}| |\vec{S}|} = \frac{14}{\sqrt{9+4+1} \cdot \sqrt{4+36+1}} = \\ = \frac{14}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{41}} = \sqrt{\frac{14}{41}}, \varphi = \arccos \sqrt{\frac{14}{41}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } A = 14, \quad \varphi = \arccos \sqrt{\frac{14}{41}}.$$

2.3. Векторное произведение векторов

2.3.1. Определение, свойства

Векторным произведением вектора \vec{a} на вектор \vec{b} называется вектор, обозначаемый символом $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и удовлетворяющий следующим трём условиям:

1) длина вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} , приведённых к общему началу, т. е. $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi$, где $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$,

2) вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ перпендикулярен векторам \vec{a} и \vec{b} , т. е.

$$\vec{c} \perp \vec{a} \text{ и } \vec{c} \perp \vec{b},$$

3) вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ относительно векторов \vec{a} и \vec{b} направлен так же, как ось Oz направлена относительно осей Ox и Oy (рис. 2.11).

Другое обозначение векторного произведения: $[\vec{a}, \vec{b}]$.

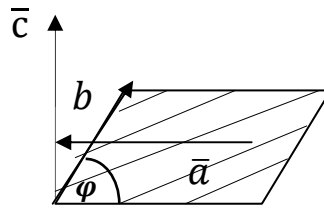


Рис. 2.11

Условие 3) можно выразить и так: векторы \bar{a} , \bar{b} и $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ образуют правую тройку векторов, т. е. эти векторы (приведённые к общему началу) располагаются в порядке нумерации аналогично большому, указательному и среднему пальцам правой руки («правило правой руки»).

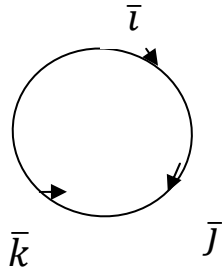
Свойства векторного произведения:

- 1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$,
- 2) $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$, где $\lambda \in \mathbf{R}$,
- 3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,
- 4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$, тогда для того, чтобы векторы \bar{a} и \bar{b} были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

2.3.2. Выражение векторного произведения через координаты векторов

Составим таблицу векторного умножения базисных векторов \bar{i} , \bar{j} , \bar{k} в прямоугольной системе координат:

	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	$\bar{0}$	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	$\bar{0}$	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	$\bar{0}$



При определении знака удобно пользоваться схемой: если направление кратчайшего пути от первого вектора ко второму совпадает с направлением стрелки, то произведение равно третьему вектору, если не совпадает – третий вектор берётся со знаком «минус».

Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} разложены по базису $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}.$$

Найдём векторное произведение векторов, используя при этом свойства векторного произведения и таблицу:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + \\ &+ a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + \\ &+ a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) = \\ &= 0 + a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + 0 + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} + 0 = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k} = \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \quad (2.15)$$

или

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (2.16)$$

2.3.3. Приложения векторного произведения

1) Установление коллинеарности векторов.

Пусть векторы \bar{a} и \bar{b} – ненулевые. Тогда векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) в том и только в том случае, когда $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$, т. е.

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \frac{a_x}{a_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} \Leftrightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}.$$

2) Нахождение площади параллелограмма и треугольника.

По определению векторного произведения векторов \bar{a} и \bar{b}

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin(\bar{a} \wedge \bar{b}) = S_{\text{пар.}} = 2S_{\Delta}.$$

3) Определение момента силы относительно точки.

Пусть в точке A приложена сила $\bar{F} = \overline{AB}$ и O – некоторая точка пространства (рис. 2.12).

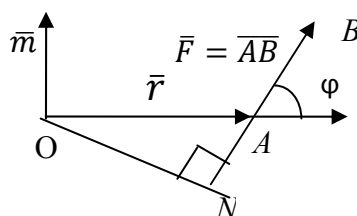


Рис. 2.12

Из физики известно, что моментом силы \bar{F} относительно точки O называется вектор \bar{m} , который проходит через точку O и:

- 1) перпендикулярен плоскости, проходящей через точки O, A, B ,
- 2) численно равен произведению силы на плечо

$$|\bar{m}| = |\bar{F}| \cdot |\bar{r}| \sin \varphi = |\bar{F}| |\overline{OA}| \sin(\bar{F}, \wedge \overline{OA}),$$

- 3) образует правую тройку с векторами $\overline{OA}, \overline{AB}$.

Следовательно,

$$\bar{m} = \overline{OA} \times \bar{F}. \quad (2.17)$$

Пример 2.6.

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}, \quad \bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n},$$

где \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы, образующие угол 30° .

Решение.

- 1) Найдём векторное произведение $\bar{a} \times \bar{b}$.

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} &= (\bar{m} + 2\bar{n}) \times (2\bar{m} + \bar{n}) = 2(\bar{m} \times \bar{m}) + 4(\bar{n} \times \bar{m}) + \bar{m} \times \\ &\times \bar{n} + 2(\bar{n} \times \bar{n}) = 2 \cdot \bar{0} + 4(\bar{n} \times \bar{m}) - (\bar{n} \times \bar{m}) + 2 \cdot \bar{0} = 3(\bar{n} \times \bar{m}) = \\ &= 3|\bar{n}||\bar{m}|\sin 30^\circ = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

$$2) \text{ Спар.} = |\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Ответ: Спар.} = \frac{3}{2}.$$

Пример 2.7.

Даны точки $A(2, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$ и $C(3, 2, 1)$. Найти площадь треугольника ABC .

Решение.

1) Найдём векторы \overline{AB} и \overline{AC} :

$$\overline{AB} = (1 - 2, 2 - (-1), -1 - 2) = (-1, 3, -3),$$

$$\overline{AC} = (3 - 2, 2 - (-1), 1 - 2) = (1, 3, -1).$$

2) Вычислим векторное произведение:

$$\begin{aligned}\overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= 6\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \text{ } S_{\Delta ABC} &= \frac{1}{2} S_{\text{пар.}} = \frac{1}{2} |6\bar{i} - 4\bar{j} - 6\bar{k}| = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{84} = \sqrt{21} \text{ (кв. ед.)}.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta} = \sqrt{21} \text{ кв. ед.}$$

Пример 2.8.

Даны векторы $\bar{a} = (2, 3, 5)$ и $\bar{b} = (1, 2, 1)$. Найти координаты вектора, перпендикулярного векторам \bar{a} и \bar{b} .

Решение.

Найдём векторное произведение векторов данных векторов:

$$\begin{aligned}\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= -7\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}.\end{aligned}$$

Согласно определению векторного произведения, вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ перпендикулярен векторам \bar{a} и \bar{b} .

Ответ: $\bar{c} = (-7, 3, 1)$.

Пример 2.9.

Сила $\bar{F} = (2, -4, 5)$ приложена к точке $A(4, 2, -3)$. Определить момент этой силы относительно точки $O(3, -2, 1)$.

Решение.

Найдём вектор \overline{OA} :

$$\overline{OA} = (4 - 3; 2 - (-2); -3 - 1) = (1, 4, -4).$$

Тогда момент \bar{m} силы \bar{F} относительно точки O согласно формуле (2.17) равен:

$$\begin{aligned} \bar{m} = \bar{F} \times \overline{OA} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -4 & 5 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= -4\bar{i} + 13\bar{j} + 12\bar{k} = (-4, 13, 12). \end{aligned}$$

Ответ: $\bar{m} = (-4, 13, 12)$.

2.4. Смешанное произведение векторов

2.4.1. Определение

Смешанным произведением векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} называется число $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Выясним геометрический смысл выражения $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Построим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} и вектор $\bar{d} = \bar{a} \times \bar{b}$ (рис. 2.13).

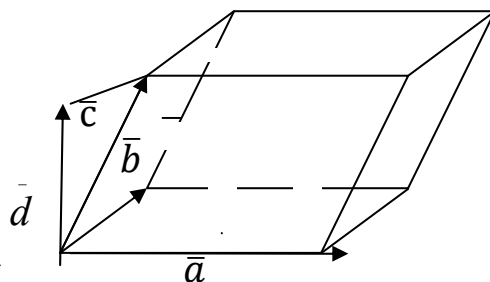


Рис. 2.13

Имеем: $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{c} = \bar{c}\bar{d} = |\bar{a} \times \bar{b}| \text{пр}_{\bar{c}}\bar{d} = S_{\text{пар}} \cdot H$,

где H – высота параллелепипеда и

$$\text{пр}_{\bar{c}}\bar{d} = \begin{cases} H, & \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} \text{ – правая,} \\ -H, & \text{если тройка векторов } \bar{a}, \bar{b} \text{ и } \bar{c} \text{ – левая.} \end{cases}$$

Таким образом,

$$(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = S_{\text{пар}} (\pm H) = \pm V, \quad (2.18)$$

где V – объём параллелепипеда, построенного на векторах \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} (если эти векторы приведены к общему началу и некопланарны, т. е. не лежат в одной плоскости).

2.4.2. Свойства смешанного произведения

1) Из геометрического смысла смешанного произведения следует, что $(\bar{a} \times \bar{b})\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c})$; это позволяет обозначать смешанное произведение символом $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$,

2) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b}$, $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}$ (при перестановке любых двух сомножителей смешанное произведение меняет знак),

$$3) \bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b},$$

4) пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$, $\bar{c} \neq \bar{0}$ тогда для того, чтобы векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

2.4.3. Выражение смешанного произведения через координаты векторов

Пусть векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ разложены по базису \bar{i}, \bar{j} и \bar{k} :

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}, \quad \bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}, \quad \bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}.$$

Найдём смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$\begin{aligned}
abc &= (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \right. \\
&- \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \left. \right) (c_x \bar{i} + c_y \bar{j} + c_z \bar{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \\
&- \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z \quad (2.19)$$

или

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (2.20)$$

2.4.4. Приложения смешанного произведения

1) Определение взаимной ориентации векторов в пространстве.

Если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} > 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} < 0$, то тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая.

2) Определение объёмов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен:

$$V = |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \quad (2.21)$$

А объём треугольной пирамиды, построенной на этих векторах, равен:

$$V = \frac{1}{6} |\bar{a}\bar{b}\bar{c}|. \quad (2.22)$$

Пример 2.10.

Показать, что точки $A(2, -1, -2)$, $B(1, 2, 1)$, $C(2, 3, 0)$ и $D(5, 0, -6)$ лежат в одной плоскости.

Решение.

1) Найдём векторы $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (1 - 2, 2 - (-1), 1 - (-2)) = (-1, 3, 3),$$

$$\overline{AC} = (2 - 2, 3 - (-1), 0 - (-2)) = (0, 4, 2),$$

$$\overline{AD} = (5 - 2, 0 - (-1), -6 - (-2)) = (3, 1, -4).$$

2) Вычислим смешанное произведение векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда на основании свойства 4) смешанного произведения делаем вывод, что векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и \overline{AD} лежат в одной плоскости, а значит, и точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Пример 2.11.

Найти объём треугольной пирамиды, если даны координаты её вершин $A(1, -1, -1), B(0, 5, 4), C(2, -3, -4), D(5, -4, -6)$.

Решение.

Найдём координаты векторов $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$.

$$\overline{AB} = (-1, 6, 5), \quad \overline{AC} = (1, -2, -3), \quad \overline{AD} = (4, -3, -5).$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} &= \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 21 & 15 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 3 \begin{vmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -18. \end{aligned}$$

Тогда объём параллелепипеда, построенного на трёх рассматриваемых векторах, равен: $V = |-18| = 18$, а искомый объём треугольной пирамиды $ABCD$ равен: $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}V = \frac{18}{6} = 3$ куб. ед.

Ответ: $V_{\text{пир.}} = 3$ куб. ед.

Пример 2.12.

Найти смешанное произведение векторов $\bar{a} = (1, 0, -1)$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = (2, 3, 4)$.

Решение.

Напишем координаты вектора \bar{b} : $\bar{b} = (1, 1, 1)$.

Вычислим смешанное произведение данных векторов:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Ответ: $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$.

2.5. Контрольные вопросы

1. Что такое вектор? Каковы линейные операции над векторами?
2. Верно ли, что равные векторы – векторы, имеющие равные длины?
3. Что значит – разложить вектор по базису?
4. Что определяют для вектора коэффициенты в разложении его по базису?
5. Каковы условия коллинеарности, ортогональности и компланарности векторов?
6. Каковы геометрические приложения векторного (смешанного) произведения векторов ?
7. Каковы физические приложения скалярного (векторного, смешанного) произведения?
8. Что произойдёт со скалярным (векторным) произведением векторов, если поменять местами сомножители?
9. Что произойдёт со смешанным произведением векторов, если поменять местами два каких-нибудь вектора (два соседних вектора)?

2.6. Тест «Векторная алгебра»

1. Даны векторы $\overline{AB} = (5, \alpha, \beta)$ и $\overline{AC} = (2, -4, 8)$. Если точки A , B и C лежат на одной прямой, то сумма $\alpha + \beta$ равна:

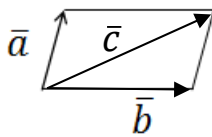
- 1) 8; 2) 10; 3) 20; 4) 30.

2. Векторы \bar{a} и \bar{b} равны, если:

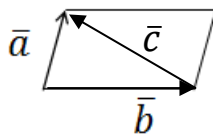
- 1) $\bar{a} \parallel \bar{b}, |\bar{a}| = |\bar{b}|$; 2) $\bar{a} \uparrow \uparrow \bar{b}, |\bar{a}| - |\bar{b}| = 0$; 3) $\bar{a} \uparrow \downarrow \bar{b}, |\bar{a}| = |\bar{b}|$.

3. Установить соответствие между рисунками а)-д) и векторами 1)-4).

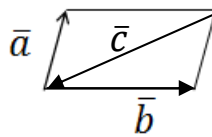
- 1) $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ 2) $\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$ 3) $\bar{a} + \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$ 4) $\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$



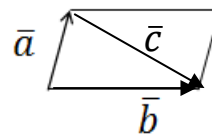
а);



б);



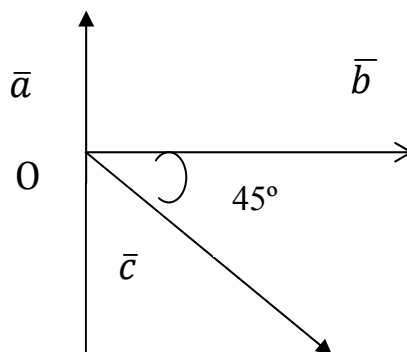
в);



г).

4. Из точки O выходят три единичных компланарных вектора $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ как указано на рисунке. Тогда длина вектора $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ равна:

- 1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) $\sqrt{3}$.



5. Единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a} = (2, -6, 3)$ и одинаково с ним направленный, имеет координаты:

$$\begin{aligned} 1) \overline{a_1} &= (1, -1, 1); \quad 2) \overline{a_2} = \left(\frac{2}{7}, -\frac{6}{7}, \frac{3}{7}\right); \\ 3) \overline{a_3} &= \left(\frac{2}{49}, -\frac{6}{49}, \frac{3}{49}\right); \quad 4) \overline{a_4} = (0, -1, 0). \end{aligned}$$

6. Дан вектор $\bar{a} = (4, -12, z)$. Известно, что $|\bar{a}| = 13$. Тогда координата z вектора \bar{a} равна:

$$1) 9; \quad 2) 3; \quad 3) -3; \quad 4) 3 \text{ или } -3.$$

7. Даны точки $A(5, -4, 2)$, $B(5, -7, 8)$, $C(2, 2, -7)$, $D(-1, 5, \alpha)$. При каком значении α векторы \overline{OB} и \overline{CA} коллинеарны:

$$1) 26; \quad 2) 0; \quad 3) -1; \quad 4) -10.$$

8. При каком значении α точки $A(0, -2, 5)$, $B(-4, 4, 3)$, $C(3, 4, -1)$, $D(5, 1, \alpha)$ являются вершинами трапеции:

$$1) 1; \quad 2) 0; \quad 3) -1; \quad 4) \text{ни при каком.}$$

9. Для ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} выполняется неравенство $\bar{a}\bar{b} \leq 0$. Тогда угол φ между векторами \bar{a} и \bar{b} удовлетворяет условию:

$$1) 0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}; \quad 2) \varphi = \frac{\pi}{2}; \quad 3) \varphi \geq \frac{\pi}{2}; \quad 4) \frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi.$$

10. При каком значении α вектор $2\bar{a} + \alpha\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{b} - \bar{a}$, если $\bar{a}(2, -1, 0)$, $\bar{b}(4, 3, 1)$:

$$1) -2; \quad 2) 0; \quad 3) -\frac{16}{21}; \quad 4) \frac{16}{21}.$$

11. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, если известно, что векторы $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ и $5\mathbf{e}_1 - 4\mathbf{e}_2$ взаимно перпендикулярны?

$$1) \frac{2\pi}{3}; \quad 2) \frac{\pi}{2}; \quad 3) \frac{\pi}{3}; \quad 4) \frac{\pi}{6}.$$

12. Поставить в соответствие каждому выражению а)-d) его числовое значение, если $|\bar{a}| = 3, |\bar{b}| = 2, \varphi = \frac{2\pi}{3}$:

$$a) |\bar{a}\bar{b}|, \quad b) (\bar{a} + \bar{b})^2, \quad c) (\bar{a} - \bar{b})^2, \quad d) |[\bar{a}\bar{b}]|;$$

$$1) 19, \quad 2) -3, \quad 3) 3\sqrt{3}, \quad 4) 7.$$

13. Векторы $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}, \bar{b} = 3\bar{i} + \bar{j}, \bar{c} = m\bar{i} + 2\bar{k}$ компланарны, если m равно:

$$1) 2; \quad 2) 4; \quad 3) 0; \quad 4) -4.$$

14. Для ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} выполняется условие $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a} \times \bar{b}|$. Тогда угол между векторами \bar{a} и \bar{b} равен:

$$1) 0; \quad 2) \frac{\pi}{4}; \quad 3) \frac{\pi}{2}; \quad 4) \pi.$$

15. Для ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} выполняется равенство $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$. Какое из следующих утверждений неверно?

$$1) \bar{a} \parallel \bar{b}; \quad 2) \text{ векторы } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \text{ линейно зависимы};$$

$$3) \exists \alpha \in R: \bar{a} = \alpha \bar{b}; \quad 4) \bar{a} \perp \bar{b}.$$

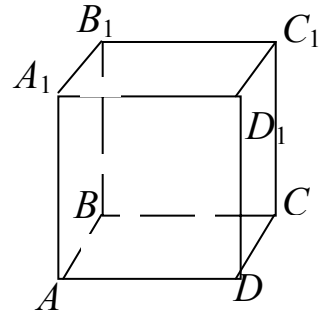
16. Пусть $|\bar{a} \times \bar{b}| = 1$. Чему равно тогда $|(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b})|$:

$$1) -2; \quad 2) 0; \quad 3) 2; \quad 4) \text{ нельзя определить}.$$

17. Если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ — единичные векторы, идущие из центра равностороннего треугольника в его вершины A, B, C , то $|(\bar{c} \times \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{b})|$ равен:

$$1) -1; \quad 2) 0; \quad 3) 1; \quad 4) \sqrt{3}.$$

18. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ – единичный куб. Установить соответствие между векторными произведениями а)-д) и их значениями 1)-4).



- а) $\overline{AB} \times \overline{AD}$, б) $\overline{C_1 C} \times \overline{C_1 D_1}$,
 в) $\overline{A_1 C_1} \times \overline{BD}$, д) $\overline{A_1 C_1} \times \overline{AC}$;
 1) $\vec{0}$, 2) $\overline{A_1 A}$, 3) $\overline{B_1 C}$, 4) $-2\overline{A_1 A}$.

19. В треугольной призме $ABC_1 B_1 C_1$ векторы $\overline{AB} = (0, 1, -1)$ и $\overline{AC} = (2, -1, 4)$ определяют основание, а вектор $\overline{A_1 A} = (-3, 2, 2)$ направлен по боковому ребру. Тогда объём призмы равен:

- 1) 17; 2) $\frac{17}{2}$; 3) 34; 4) $\frac{17}{4}$.

20. Векторы $\vec{a} = (-2, 2\alpha, -1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$ взаимно перпендикулярны, если α равно:

- 1) -2 ; 2) -1 ; 3) 1 ; 4) 2 .

21. Угол между векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ равен:

- 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$; 4) $\frac{\pi}{6}$.

22. Векторное произведение векторов $\vec{a} = (4, 2, \alpha)$, $\vec{b} = (2, \beta, 3)$ равно $\vec{0}$, если:

- 1) $\alpha = 3, \beta = 1$; 2) $\alpha = 1, \beta = 1$; 3) $\alpha = 6, \beta = 1$; 4) $\alpha = \frac{1}{3}, \beta = 1$.

23. Среди векторов $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{k}$,
 $\vec{c} = \sqrt{5}\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$ наибольшую длину имеет вектор ...

24. В треугольнике ABC : $\overline{AB} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$, $\overline{AC} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$. Проекция $\text{пр}_{\overline{AB}}\overline{AC}$ равна:

$$1) \frac{8}{3}; \quad 2) \frac{4}{3}; \quad 3) \frac{1}{8}; \quad 4) -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

25. Среди формул для вычисления длины вектора $\bar{a} = (x, y, z)$ верными являются:

$$1) |\bar{a}| = \bar{a}^2; \quad 2) |\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$3) |\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}; \quad 4) |a| = \sqrt{\bar{a}^2 \cos \frac{\pi}{2}}$$

26. Даны две тройки векторов:

$$1) \bar{a} = \bar{i} + \bar{k}, \bar{b} = \bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{j} + 5\bar{k}; \quad 2) \bar{a} = \bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - \bar{k}, \bar{c} = \bar{i} - \bar{j}.$$

Определить, образуют ли они правую или левую тройки.

27. Даны векторы $\overline{a_1} = (2, 1, 1)$, $\overline{a_2} = (2, 0, 1)$, $\overline{a_3} = (-2, 2, 0)$, $\overline{a_4} = (1, 1, 1)$. С увеличением их длин векторы расположены в порядке...

28. Угол между векторами $\bar{a} = (\alpha, -1, 2)$ и $\bar{b} = (\alpha, 1, 0)$ равен $\frac{\pi}{2}$, если действительное число α равно...

29. Даны векторы $\bar{a} = (-1, -1, 0)$ и $\bar{b} = (1, 1, 1)$. Длина $\bar{a} - \bar{b}$ больше длины вектора $\bar{a} + \bar{b}$ в α раз, где α равно...

30. Два ненулевых вектора \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, если:

$$1) \bar{a} = \alpha \bar{b}, \alpha - \text{число}; \quad 2) \bar{a} \bar{b} = 0; \quad 3) \bar{a} \bar{b} \neq |\bar{a}| |\bar{b}|;$$

$$4) \bar{a} \bar{b} = |\bar{a}| |\bar{b}|; \quad 5) \bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}.$$

Среди перечисленных выражений верными являются...

2.7. Задачи

2.1. Даны векторы: $\bar{a} = (2,1)$, $\bar{b} = (1,-2)$, $\bar{c} = (-1,0)$. Построить векторы $\bar{p} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{m} = \bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, найти длину векторов \bar{p} , \bar{m} и разложить вектор \bar{p} по векторам \bar{a} и \bar{b} , а вектор \bar{m} – по векторам \bar{a} и \bar{c} .

2.2. Даны вершины треугольника $A(-7,4)$, $B(-5,2)$, $C(6,-3)$. Найти координаты середин всех сторон треугольника.

2.3. Вычислить площадь квадрата, две смежные вершины которого $A(3,-7)$ и $B(-1,4)$.

2.4. Даны две противоположные вершины квадрата $A(3,5)$ и $C(1,-3)$. Вычислить площадь квадрата.

2.5. Для векторов $\bar{a} = (4,3)$, $\bar{b} = (2,-1)$:

- 1) вычислить длину вектора \bar{a} и орт вектора \bar{b} ;
- 2) скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} и проекцию \bar{a} на \bar{b} ;
- 3) определить, при каком α векторы \bar{b} и $\bar{m} = (\alpha, 4)$ коллинеарны.

2.6. Для векторов $\bar{a} = (7; 1)$ и $\bar{b} = (3,4)$:

- 1) найти векторы $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, $\bar{\alpha} = \bar{a} - \bar{b}$, $\bar{m} = 2\bar{a} - 3\bar{b}$ и записать их разложения по ортам (единичным векторам) \bar{i} и \bar{j} ;
- 2) вычислить скалярное произведение $\bar{a}\bar{b}$;
- 3) найти угол между векторами \bar{a} и \bar{b} и проекцию вектора \bar{a} на \bar{b} ;
- 4) определить длину вектора \bar{m} и его направляющие косинусы.

2.7. Выяснить, является ли треугольник с вершинами $A(2,2)$, $B(1,6)$, $C(7, -1)$ прямоугольным, остроугольным или тупоугольным. Вычислить угол при вершине A .

2.8. Показать, что четырёхугольник с вершинами $A(1,3)$, $B(4,7)$, $C(2,8)$ и $D(-1,4)$ является параллелограммом, и найти точку пересечения его диагоналей.

2.9. В параллелограмме $ABCD$ заданы вершины $A(3, -3)$, $B(-1,1)$, $C(1,6)$. Определить координаты вершины D и длины диагоналей параллелограмма.

2.10. Показать, что точки $A(3, -5)$, $B(-2, -7)$ и $C(18,1)$ лежат на одной прямой.

2.11. Найти $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$, если $\vec{a} \perp \vec{b}$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$.

2.12. При каких значениях α векторы $\vec{a} + \alpha\vec{b}$ и $\vec{a} - \alpha\vec{b}$ являются ортогональными, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$.

2.13. Дано разложение вектора \vec{c} по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:
 $\vec{c} = 16\vec{i} - 15\vec{j} + 12\vec{k}$. Определить разложение по тому же базису вектора \vec{a} , противоположно направленного вектору \vec{c} , при условии, что $|\vec{a}| = 75$.

2.14. При каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$:

1) коллинеарны; 2) ортогональны.

2.15. Даны векторы $\bar{a} = (4, -2, 4)$, $\bar{b} = (6, -3, 2)$, $\bar{c} = (2, 1, -1)$.

Вычислить:

- 1) $\bar{a}\bar{b}$;
- 2) $\bar{a} \times \bar{b}$;
- 3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$;
- 4) $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$, $(2\bar{a} - 3\bar{b}) \times (\bar{a} + 2\bar{b})$;
- 5) $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b}) \cdot \bar{c}$.

2.16. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах \bar{a} и \bar{b} , если:

- 1) $\bar{a} = \bar{m} + 2\bar{n}$ и $\bar{b} = 2\bar{m} + \bar{n}$, где \bar{m} и \bar{n} – единичные векторы, образующие угол 30° ;
- 2) $\bar{a} = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + 6\bar{k}$.

2.17. Вычислить площадь треугольника с вершинами A , B и C и найти высоту BH , если:

- 1) $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$;
- 2) $A(1, -2, 8)$, $B(0, 0, 4)$, $C(6, 2, 0)$.

2.18. Установить компланарность векторов:

- 1) $\bar{a} = (2, 3, -1)$, $\bar{b} = (1, -1, 3)$, $\bar{c} = (1, 9, -11)$;
- 2) $\bar{a} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$.

2.19. Показать, что точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

2.20. Вершины тетраэдра находятся в точках $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$. Найти объём тетраэдра и высоту, опущенную из вершины D .

2.8. Ответы

$$2.1. 2\bar{a} = (2, -3), |\bar{p}| = \sqrt{13}, \bar{p} = \frac{1}{3}\bar{a} + \frac{4}{3}\bar{b}, \\ \bar{m} = (0,1), |\bar{m}| = 1, \bar{m} = -\bar{a} + 2\bar{c}.$$

$$2.2. (-6,3), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

$$2.3. 137.$$

$$2.4. 34.$$

$$2.5. 1) |\bar{a}| = 5, \bar{b} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right); 2) \bar{a}\bar{b} = 5 \text{ пр}_{\bar{b}}\bar{a} = \sqrt{5}, 3) \alpha = -8.$$

$$2.6. 1) \bar{c} = 10\bar{i} + 5\bar{j}, \bar{d} = 4\bar{i} - 3\bar{j}, \bar{m} = 5\bar{i} - 10\bar{j}; \\ 2) \bar{a}\bar{b} = 25; 3) \varphi = 45, \text{пр}_{\bar{b}}\bar{a} = 5; 4) |\bar{m}| = 5\sqrt{5}, \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$2.7. \text{Тупоугольный, } \angle A = 135^\circ.$$

$$2.8. O\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

$$2.9. D(5,2), AC = \sqrt{85}, BD = \sqrt{37}.$$

$$2.11. |\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| = 13.$$

$$2.12. \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

$$2.13. \bar{\alpha} = -48\bar{i} + 45\bar{j} - 36\bar{k}.$$

$$2.14. 1) \alpha = 4, \beta = -1; 2) \alpha = c, \beta = c + 9, \text{ где } C - \text{любое действительное число.}$$

2.15. 1) $\bar{a}\bar{b} = 38$; 2) $\bar{a} \times \bar{b} = (8, 16, 0)$; 3) $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 32$;
4) -184 ; $(56, 112, 0)$; 5) 224 .

2.16. 1) $1,5$; 2) 49 .

2.17. 1) $S = 24,5$, $BH = 7$; 2) $S = 7\sqrt{5}$, $BH = \frac{2\sqrt{21}}{3}$.

2.18. 1) компланарны; 2) не компланарны.

2.20. $V = \frac{154}{3}$, $DO = H = 11$.

2.9. Типовой расчёт «Векторная алгебра»

1. Найти вектор \bar{m} :

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{m}
1	$(2; -1; 0)$	$(1; 1; 3)$	$(0; 2; 1)$	$2\bar{a} + 2\bar{b} - 3\bar{c}$
2	$(0; 1; 3)$	$(-1; 2; 3)$	$(-2; 3; 5)$	$\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}$
3	$(-2; 1; 3)$	$(0; -1; 1)$	$(4; 1; -9)$	$2\bar{a} + 3\bar{b} + \bar{c}$
4	$(-1; 3; 0)$	$(1; 0; 1)$	$(-3; -2; 3)$	$2\bar{a} + 3\bar{b} - \bar{c}$
5	$(2; 0; 3)$	$(-1; 2; 2)$	$(0; 1; -1)$	$2\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$
6	$(-2; 3; 1)$	$(-1; 3; 1)$	$(0; 3; 1)$	$-3\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c}$
7	$(1; -1; 4)$	$(-1; -2; 0)$	$(2; 2; -2)$	$2\bar{a} + 3\bar{b} + 4\bar{c}$
8	$(1; 3; 2)$	$(0; -1; 3)$	$(2; 3; 0)$	$4\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$
9	$(1; 4; -2)$	$(2; 3; -1)$	$(4; 0; -1)$	$-3\bar{a} + 4\bar{b} + \bar{c}$
10	$(2; 0; -1)$	$(0; 1; -1)$	$(5; 4; -7)$	$3\bar{a} + 4\bar{b} - \bar{c}$
11	$(1; 0; 2)$	$(-6; 3; -1)$	$(0; 6; -5)$	$5\bar{a} - 6\bar{b} + 3\bar{c}$
12	$(2; -2; 3)$	$(2; -2; -5)$	$(3; 0; 2)$	$-\bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}$

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}	\bar{m}
13	(0; -1; -2)	(3; -1; 1)	(2; -7; 1)	$2\bar{a} + 5\bar{b} - \bar{c}$
14	(4; 3; 0)	(0; 3; 4)	(1; -3; 2)	$3\bar{a} - \bar{b} + 2\bar{c}$
15	(-3; -2; 1)	(1; 0; -1)	(4; -6; 5)	$-3\bar{a} + 2\bar{b} + \bar{c}$
16	(4; -2; -1)	(3; 5; 1)	(1; -1; -1)	$4\bar{a} + \bar{b} - 3\bar{c}$
17	(8; 2; 0)	(3; 2; 2)	(9; 2; 3)	$\bar{a} - 3\bar{b} + 2\bar{c}$
18	(-6; 2; 2)	(1; -1; 0)	(4; 3; 1)	$-\bar{a} + 4\bar{b} + 2\bar{c}$
19	(5; 0; -2)	(0; 2; 3)	(-1; 1; 0)	$3\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}$
20	(4; -1; 1)	(0; 1; 2)	(4; 1; 0)	$4\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c}$
21	(-3; 1; -1)	(-2; -2; 3)	(2; 1; 0)	$-5\bar{a} + 3\bar{b} + \bar{c}$
22	(-1; -3; 1)	(-2; 1; -1)	(3; 1; 0)	$2\bar{a} + \bar{b} - 4\bar{c}$
23	(-3; 1; -2)	(-3; -2; 2)	(3; -2; 0)	$2\bar{a} - 4\bar{b} + 5\bar{c}$
24	(-4; -2; 1)	(-2; 3; 0)	(-2; 3; -1)	$4\bar{a} + 3\bar{b} - 5\bar{c}$
25	(5; 2; 3)	(-3; 1; 0)	(-2; -1; 1)	$5\bar{a} - 3\bar{b} + 4\bar{c}$
26	(-2; 0; 4)	(-3; 0; -1)	(3; -2; 2)	$-3\bar{a} + 5\bar{b} + \bar{c}$
27	(-1; 3; -2)	(-3; 2; 0)	(-3; -1; 1)	$-4\bar{a} + \bar{b} + 3\bar{c}$
28	(1; 5; 2)	(1; -3; -2)	(0; 3; 1)	$2\bar{a} + 4\bar{b} - 3\bar{c}$
29	(-2; 4; 0)	(-2; 3; 3)	(3; 2; 1)	$\bar{a} + 2\bar{b} - 4\bar{c}$
30	(1; -2; 3)	(-3; 1; 1)	(-1; -2; 0)	$2\bar{a} + \bar{b} + 4\bar{c}$

2. Найти значения неизвестных, при которых векторы \bar{a} и \bar{b} коллинеарны:

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}
1	$-2\bar{i} + 3\bar{j} + z\bar{k}$	$x\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$
2	$-3\bar{i} + 7\bar{j} + \bar{k}$	$2\bar{i} - y\bar{j} + z\bar{k}$
3	$2\bar{i} + y\bar{j} + \bar{k}$	$4\bar{i} + \bar{j} - z\bar{k}$
4	$7\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$	$-14\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$
5	$2\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}$	$\bar{i} + 3\bar{j} - z\bar{k}$
6	$x\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$	$3\bar{i} + 8\bar{j} + z\bar{k}$
7	$2\bar{i} - 8\bar{j} + z\bar{k}$	$x\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$
8	$3\bar{i} - y\bar{j} + 3\bar{k}$	$x\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$
9	$\bar{i} - y\bar{j} + 2\bar{k}$	$x\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$
10	$3\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}$	$x\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$
11	$6\bar{i} - y\bar{j} + 5\bar{k}$	$3\bar{i} - 2\bar{j} + z\bar{k}$
12	$2\bar{i} + 4\bar{j} - z\bar{k}$	$\bar{i} - y\bar{j} - 3\bar{k}$
13	$5\bar{i} + 4\bar{j} - z\bar{k}$	$x\bar{i} + 2\bar{j} + 2\bar{k}$
14	$-3\bar{i} - y\bar{j} + \bar{k}$	$-\bar{i} - \bar{j} + z\bar{k}$
15	$-2\bar{i} + 3\bar{j} - z\bar{k}$	$x\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}$
16	$x\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$	$\bar{i} - y\bar{j} + 3\bar{k}$
17	$3\bar{i} - 2\bar{j} + z\bar{k}$	$-\bar{i} + y\bar{j} + 3\bar{k}$
18	$-\bar{i} + y\bar{j} - 3\bar{k}$	$-x\bar{i} + 2\bar{j} + 3\bar{k}$
19	$-\bar{i} + 3\bar{j} + z\bar{k}$	$2\bar{i} - y\bar{j} + 6\bar{k}$
20	$-4\bar{i} + 3\bar{j} + z\bar{k}$	$\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}$
21	$\bar{i} - 4\bar{j} + z\bar{k}$	$-x\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
22	$2\bar{i} - 3\bar{j} + z\bar{k}$	$4\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}$
23	$x\bar{i} + 6\bar{j} + z\bar{k}$	$2\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
24	$4\bar{i} + y\bar{j} - 3\bar{k}$	$2\bar{i} - 3\bar{j} + z\bar{k}$

Окончание

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}
25	$-x\bar{i} + 4\bar{j} + 2\bar{k}$	$3\bar{i} + 2\bar{j} - z\bar{k}$
26	$x\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$	$-2\bar{i} + y\bar{j} + \bar{k}$
27	$-\bar{i} + y\bar{j} - 5\bar{k}$	$x\bar{i} + 3\bar{j} + \bar{k}$
28	$x\bar{i} + 2\bar{j} + 8\bar{k}$	$-\bar{i} + y\bar{j} - 4\bar{k}$
29	$-2\bar{i} + y\bar{j} - 4\bar{k}$	$3\bar{i} - 5\bar{j} + z\bar{k}$
30	$4\bar{i} - 5\bar{j} - z\bar{k}$	$-8\bar{i} + y\bar{j} - \bar{k}$

3. Даны координаты точек A, B, C . Найти скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} и косинус угла между векторами:

№ вар.	A	B	C
1	(3;0;1)	(-1; -2;3)	(-1; -2;0)
2	(-2; -1;3)	(-1;2;3)	(-2;3;2)
3	(-2;1;3)	(4; -1;8)	(0; -1; -3)
4	(7;2; -5)	(6;0; -3)	(3;2;7)
5	(-5;0;2)	(-4;4;3)	(7;9; -2)
6	(-5;1;0)	(6; -3; -1)	(4;3;7)
7	(8;0;1)	(-1;5;4)	(0;4; -2)
8	(9;9; -2)	(7;11; -4)	(5;6; -1)
9	(4; -3;0)	(10;5; -4)	(2;2; -3)
10	(-6;1; -3)	(-4;4; -2)	(3;2;1)
11	(-5;4; -1)	(10;5; -4)	(0;4; -3)
12	(4;5; -3)	(0;7;3)	(2; -6; -2)
13	(4; -5;0)	(1; -1;1)	(4;5;3)
14	(-4; -6;1)	(5; -2;0)	(1; -3;7)
15	(-5;4;0)	(6;0;3)	(4;8; -1)
16	(1; -4;3)	(5;0; -1)	(-2;0;6)

Окончание

№ вар.	A	B	C
17	$(4; -5; 1)$	$(4; 1; -7)$	$(0; 1; 7)$
18	$(-1; 3; -2)$	$(4; 9; -1)$	$(1; 3; 5)$
19	$(-7; 2; -2)$	$(-9; -3; 2)$	$(0; 1; -4)$
20	$(-5; -1; 1)$	$(3; -1; 8)$	$(-3; 4; 4)$
21	$(0; 3; -3)$	$(-7; 5; 1)$	$(1; 1; 6)$
22	$(-4; 0; 8)$	$(7; 1; 9)$	$(-6; -1; 0)$
23	$(5; 1; -1)$	$(8; -3; 1)$	$(-3; 0; 1)$
24	$(0; 5; 2)$	$(-1; 0; 3)$	$(-4; 4; 1)$
25	$(-1; -8; 0)$	$(-6; 1; 1)$	$(-4; 0; -1)$
26	$(5; 0; 5)$	$(-4; 1; 0)$	$(-3; 2; 7)$
27	$(-5; 1; -2)$	$(-9; 2; 2)$	$(-3; 0; -1)$
28	$(7; 7; 2)$	$(-2; 4; -4)$	$(0; 3; 6)$
29	$(-8; 3; 3)$	$(-3; -9; 0)$	$(4; 2; -2)$
30	$(-7; -1; 5)$	$(-4; 3; 8)$	$(-3; 2; 1)$

4. Используя векторное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , найти площадь треугольника ABC :

№ вар.	A	B	C
1	$(-2; -3; 1)$	$(0; 1; 2)$	$(3; 1; 2)$
2	$(3; -2; 1)$	$(1; 0; -1)$	$(3; 2; -2)$
3	$(-1; -2; 0)$	$(-1; 0; 1)$	$(2; -2; 3)$
4	$(-1; 0; -2)$	$(-1; 1; 0)$	$(2; 3; -2)$
5	$(3; 2; 0)$	$(3; 2; -1)$	$(-2; 1; 0)$
6	$(-2; 0; -1)$	$(0; 1; -1)$	$(3; -1; -2)$
7	$(0; -1; -2)$	$(3; -1; 1)$	$(3; -2; 2)$
8	$(1; 2; 3)$	$(-3; -1; 0)$	$(-2; -1; 1)$

Окончание

№ вар.	A	B	C
9	(0;2;3)	(-1;2;3)	(-2;3;2)
10	(3; -2;1)	(0;3;-2)	(3;2; -2)
11	(2;0;3)	(-1;3;2)	(1;0;2)
12	(1;3; -2)	(1;3; -1)	(1;0;3)
13	(3;0;2)	(2;3; -1)	(0; -2;3)
14	(-2; -3;0)	(-3;1; -2)	(0; -3;2)
15	(-2;0;3)	(-3;1;1)	(3; -2;1)
16	(-2;3;1)	(-1;3;1)	(0;3;1)
17	(0;3;2)	(2; -1;3)	(1;3;0)
18	(1; -2;3)	(1; -1;3)	(3;0; -2)
19	(-2;0; -1)	(0;1;3)	(-2; -3;1)
20	(-3;0; -2)	(-3;-2;1)	(3; -2;0)
21	(-3;2;0)	(-1;3; -2)	(-2;3; -1)
22	(-2;1;3)	(0; -1;1)	(2;1;3)
23	(-3;0;1)	(-2;2;3)	(-2;1;0)
24	(0; -2; -1)	(3;1; -1)	(2;0;1)
25	(1;2;3)	(-3;1; -2)	(-3; -1;1)
26	(-1; -3;1)	(-2;1; -1)	(3;1;0)
27	(3;1; -2)	(1; -1;0)	(-1; -3;0)
28	(-2; -1;3)	(-2;3;0)	(3;2;1)
29	(-1; -2;1)	(-2; -3;0)	(-2;3; -1)
30	(3;0;1)	(-1; -2;3)	(-1; -2;0)

5. Исследовать компланарность векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} :

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
1	(1;2;3)	(2;0;4)	(2; -4;2)
2	(4;4; -3)	(1;0;2)	(3;4; -5)
3	(2;1;0)	(-1;3;1)	(5;1;2)
4	(5;3; -2)	(-5; -3;0)	(5;3; -1)
5	(3; -1;0)	(3;1;2)	(2;5;4)
6	(-2;2; -2)	(0;4; -3)	(-2; -2;1)
7	(0;2;1)	(1;1;5)	(3; -2;4)
8	(2; -2; -2)	(4; -1; -1)	(-1;-1; -1)
9	(0;2;1)	(3;0;3)	(-3;2; -2)
10	(-3;3; -1)	(-1;0; -1)	(-2;3;0)
11	(-1;1;2)	(2;0;3)	(1;5;2)
12	(0;1;2)	(3;3;0)	(-3; -2;2)
13	(2; -1;1)	(1;0; -2)	(1; -4;3)
14	(2;1;2)	(3; -1;0)	(2;3;2)
15	(2;1;0)	(5; -1;1)	(-3;2;1)
16	(-1;3; -3)	(-3; -2;1)	(2;5; -4)
17	(-4; -2;2)	(-4; -2; -1)	(2;1; -1)
18	(-1;2;2)	(3;1;0)	(5;4;3)
19	(1; -4;2)	(-2;0; -2)	(3; -4;4)
20	(3;5; -3)	(0;4; -3)	(-3;1;0)
21	(0;4; -3)	(5;3; -2)	(-5;1; -1)
22	(0; -1;3)	(3;1;2)	(4;1;5)
23	(-2; -1; -2)	(-4; -4; -1)	(0;2; -3)
24	(0;4;2)	(1;1;3)	(2; -1;3)
25	(-1;1; -4)	(5; -2; -2)	(-6;3; -2)

№ вар.	\bar{a}	\bar{b}	\bar{c}
26	(2;1;3)	(1;3;2)	(0;4;-1)
27	(1;2;4)	(5;1;1)	(-4;1;3)
28	(2;4;1)	(5;4;1)	(-1;4;1)
29	(2;4;2)	(1;3;1)	(0;-1;2)
30	(3;4;2)	(2;2;-1)	(1;2;3)

2.10. Решение типового варианта

1. Найти вектор $\bar{m} = -3\bar{a} + 2\bar{b} + 4\bar{c}$, если $\bar{a} = (2,0,-3)$,
 $\bar{b} = (-3,1,-1)$, $\bar{c} = (-1,-2,0)$.

Решение.

Вычислим вектор \bar{m} , используя правила умножения вектора на число и сложения (вычитания) векторов, заданных своими координатами:

$$\begin{aligned}\bar{m} &= -3\bar{a} + 2\bar{b} + 4\bar{c} = -3(2,0,-3) + 2(-3,1,-1) + 4(-1,-2,0) = \\ &= (-6,0,9) + (-6,2,-2) + (-4,-8,0) = (-16,-6,7).\end{aligned}$$

Ответ: $\bar{m} = (-16,-6,7)$.

2. Найти значения неизвестных, при которых \bar{a} и \bar{b} коллинеарны, если $\bar{a} = -3\bar{i} + 2\bar{j} + z\bar{k}$, $\bar{b} = x\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$.

Решение.

Неизвестные z и x найдём, используя условия коллинеарности векторов:

$$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow \frac{-3}{x} = \frac{2}{-4} = \frac{z}{2}. \text{ Так как } \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}, \text{ то } x = 6 \text{ и } z = -1.$$

Ответ: $x = 6, z = -1$.

3. Даны координаты трёх точек $A(2,0,1)$, $B(2,1,-3)$, $C(-1,-3,0)$. Найти скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} и косинус угла между векторами.

Решение.

Найдём координаты векторов \overline{AB} и \overline{AC}

$$\overline{AB} = (2 - 2, 1 - 0, -3 - 1) = (0, 1, -4),$$

$$\overline{AC} = (-1 - 2, -3 - 0, 0 - 1) = (-3, -3, -1).$$

Вычислим скалярное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} :

$$\overline{AB} \overline{AC} = 0 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) + (-4) \cdot (-1) = 0 - 3 + 4 = 1.$$

Найдём косинус угла между векторами \overline{AB} и \overline{AC} :

$$\begin{aligned} \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) &= \frac{1}{\sqrt{0^2+1^2+(-4)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{17} \cdot \sqrt{19}} = \frac{1}{\sqrt{323}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \overline{AB} \overline{AC} = 1, \cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{323}}.$$

4. Используя векторное произведение векторов \overline{AB} и \overline{AC} , найти площадь треугольника ABC , если $A(-2,0,-1)$, $B(1,0,-2)$, $C(3,1,2)$.

Решение.

$$\overline{AB} = (1 - (-2), 0 - 0, -2 - (-1)) = (3, 0, -1),$$

$$\overline{AC} = (3 - (-2), 1 - 0, 2 - (-1)) = (5, 1, 3).$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = \\ &= \bar{i} - 14\bar{j} + 3\bar{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Окончательно имеем: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-14)^2 + 3^2} = \frac{1}{2} \sqrt{206} \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{206} \text{ кв. ед.}$$

5. Исследовать компланарность векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, если

$$\bar{a} = (1, 1, 1), \bar{b} = (1, 2, 2), \bar{c} = (-1, 2, -1).$$

Решение.

Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, если их смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$ равно нулю. Вычислим $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

т. е. векторы \bar{a}, \bar{b} и \bar{c} не являются компланарными.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Прямая на плоскости.

Различные виды уравнения прямой

3.1.1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy задана прямая l , не параллельная оси Oy . Её положение вполне определяется ординатой b точки пересечения прямой l с осью Oy и углом α между положительным направлением оси \overrightarrow{Ox} и прямой l (рис. 3.1).

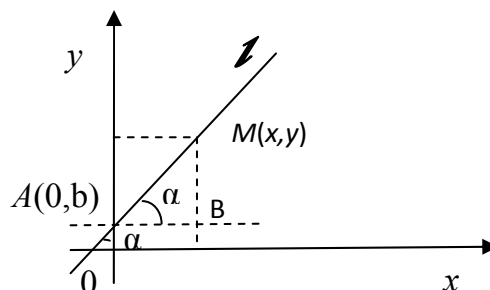


Рис. 3.1

Обозначим через α угол между прямыми l и AB : $\alpha = \angle MAB$.

Тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MB}{AB} = \frac{y-b}{x}$. Отсюда имеем: $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$ или

$$y = kx + b, \quad (3.1)$$

где $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называется угловым коэффициентом прямой, а уравнение (3.1) называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

Уравнению (3.1) удовлетворяют координаты любой точки $M(x, y)$ прямой l , а координаты любой точки $N(x, y)$, лежащей вне данной прямой, уравнению (3.1) не удовлетворяют.

Частные случаи:

- 1) если $0 \in l$, то $b = 0$ и уравнение (3.1) примет вид $y = kx$,
- 2) если прямая l параллельна Ox , то $\alpha = 0$ и, следовательно, $k = \operatorname{tg} \alpha = 0$, и уравнение (3.1) примет вид: $y = b$,

- 3) если прямая l параллельна оси Oy , то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и $k = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}$ не существует, уравнение прямой в этом случае будет иметь вид:

$$x = a, \quad (3.2)$$

где a – абсцисса точки пересечения прямой l с осью Ox .

Заметим, что уравнения (3.1) и (3.2) – уравнения первой степени.

3.1.2. Общее уравнение прямой

Рассмотрим уравнение 1-й степени относительно x и y в общем виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.3)$$

где $A, B, C \in \mathbf{R}$ и $A^2 + B^2 \neq 0$ (т. е. A и B не равны нулю одновременно).

Покажем, что уравнение (3.3) – уравнение прямой.

Рассмотрим два возможных случая.

1) Если $B = 0$, тогда уравнение (3.3) примет вид $Ax + C = 0$, причём $A \neq 0$. Отсюда имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(-\frac{C}{A}, 0)$.

2) Если $B \neq 0$, то из уравнения (3.3) имеем $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{A}{B}$.

Таким образом, уравнение (3.3) – уравнение прямой, которое называется общим уравнением прямой.

Частные случаи общего уравнения прямой:

1) если $A = 0$, то (3.3) примет вид: $y = -\frac{C}{B}$ – уравнение прямой, параллельной оси Ox ,

2) если $B = 0$, то имеем уравнение $x = -\frac{C}{A}$ – уравнение прямой, параллельной оси Oy ,

3) если $C = 0$, то получаем уравнение $Ax + By = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $O(0,0)$.

3.1.3. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, и её направление характеризуется угловым коэффициентом k . Тогда уравнение прямой l можно записать так: $y = kx + b$, где b – пока неизвестная величина.

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой l , то её координаты удовлетворяют уравнению прямой: $y_0 = kx_0 + b$. Отсюда $b = y_0 - kx_0$. Подставив значения b в уравнение $y = kx + b$, получим уравнение $y = kx + y_0 - kx_0$, т. е.

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3.4)$$

Заметим, что уравнение (3.4) с различными значениями k называется уравнениями пучка прямых с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из этого пучка нельзя определить лишь прямую, параллельную оси Oy .

3.1.4. Уравнение прямой, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – точки, лежащие на прямой l . Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид (см. формулу (3.4)):

$$y - y_1 = k(x - x_1), \quad (3.5)$$

где k – пока неизвестный коэффициент. Так как точка $M_2 \in l$, то координаты её удовлетворяют уравнению (3.5): $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$. Отсюда имеем: $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Подставив значение k в уравнение (3.5), получим

уравнение прямой, проходящей через две точки M_1 и M_2 :

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \quad (3.6)$$

где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$.

Если $x_1 = x_2$, то прямая l , проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси Oy : $l \parallel Oy$, и уравнение прямой l имеет вид: $x = x_1$.

Если $y_1 = y_2$, то прямая l , проходящая через точки M_1 и M_2 , параллельна оси Ox , и её уравнение имеет вид: $y = y_1$.

Из уравнения (3.6) можно получить так называемые каноническое и параметрические уравнения прямой.

Обозначим через $m = x_2 - x_1$, $p = y_2 - y_1$ и введём вектор $\overline{M_1M_2} = (m, p)$. Тогда уравнение (3.6), с учётом введённых обозначений, можно записать в виде

$$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{p}, \quad (3.7)$$

где вектор $\vec{S} = \overline{M_1M_2} = (m, p)$ – направляющий вектор прямой l . Уравнение (3.7) называется каноническим уравнением прямой.

Положим в уравнении (3.7) $\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{p} = t$, где t – параметр. Тогда

$$\begin{cases} x = mt + x_1, \\ y = pt + y_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Уравнения (3.8) называют параметрическими уравнениями прямой.

3.1.5. Уравнение прямой в отрезках

Пусть $M_1(a,0)$, $M_2(0,b)$ – точки пересечения прямой l с осями Ox и Oy соответственно (рис. 3.2).

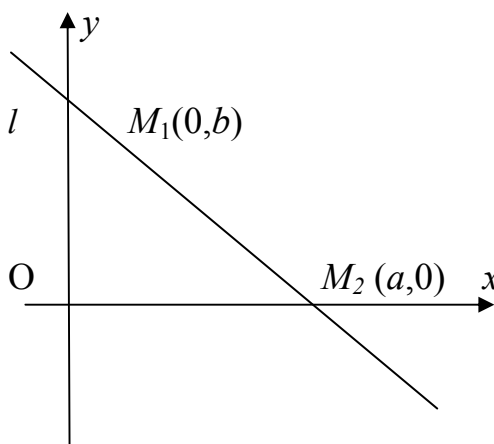


Рис. 3.2

Тогда уравнение (3.6) примет вид: $\frac{y-o}{b-o} = \frac{x-a}{o-a}$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (3.9)$$

Уравнение (3.9) называется уравнением прямой в отрезках, так как числа a и b указывают, какие отрезки отсекает прямая на осях координат.

3.1.6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Пусть прямая l проходит через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n} = (A, B)$. Возьмём на прямой произвольную точку $M(x, y)$ и введём в рассмотрение вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0)$ (см. рис. 3.3.). Так как векторы \vec{n} и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{n} \overline{M_0M} = 0$:

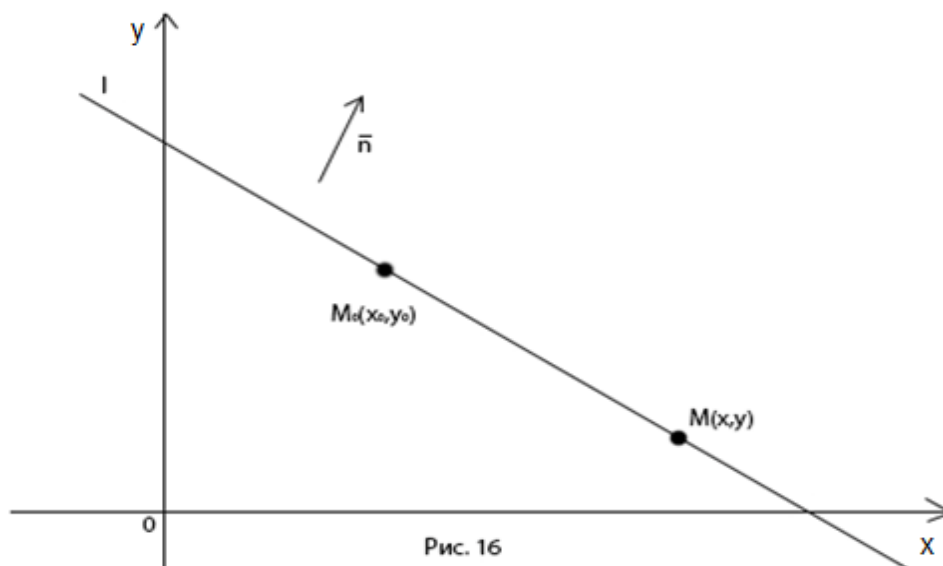


Рис. 16

Рис. 3.3

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.10) называется уравнением прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Вектор $\vec{n} = (A, B)$, перпендикулярный прямой, называется нормальным вектором прямой.

Уравнение (3.10) можно переписать иначе, а именно, в виде:

$$Ax + By + C = 0, \quad (3.11)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$ – свободный член, A и B – координаты нормального вектора.

Уравнение (3.11) есть общее уравнение прямой (см. (3.3)).

Пример 3.1.

Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 2)$, $B(1, -3)$. Записать полученное уравнение в различных видах.

Искомое уравнение имеет вид (см. (3.6)):

$$\frac{x+1}{1-(-1)} = \frac{y-2}{-3-2} \text{ или } \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} - \text{каноническое уравнение прямой;}$$

направляющий вектор $\vec{S} = (2, -5)$, откуда имеем: $5x + 2y + 1 = 0$ – общее уравнение прямой.

Выразим y из общего уравнения прямой: $y = -\frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{2}$. Из канонического уравнения получим параметрические уравнения.

Положим $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = t$, t – параметр; имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = -5t + 2 \end{cases} - \text{параметрические уравнения прямой.}$$

Из общего уравнения получим также уравнения прямой в отрезках; перенесем 1 с противоположным знаком в правую часть уравнения и разделим обе части полученного уравнения на (-1) , в результате получим: $-5x - 2y = 1$ или $\frac{x}{-\frac{1}{5}} + \frac{y}{-\frac{1}{2}} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

3.1.7. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых

1) Пусть даны две прямые l_1 и l_2 (не параллельные оси Oy) уравнениями: $l_1: y = k_1x + b_1$ и $l_2: y = k_2x + b_2$ (см. рис. 3.4).

2)

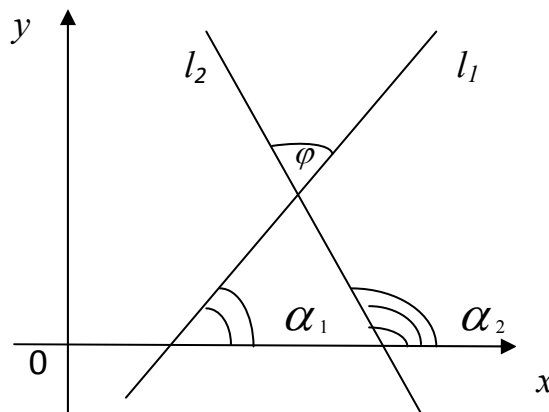


Рис. 3.4

Найдём угол φ между прямыми l_1 и l_2 . По теореме о внешнем угле треугольника $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$. Отсюда $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Так как $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tga}_2 - \operatorname{tga}_1}{1 + \operatorname{tga}_1 \cdot \operatorname{tga}_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}, \quad (3.13)$$

где k_1, k_2 – угловые коэффициенты прямых l_1 и l_2 соответственно.

Заметим, что если требуется вычислить острый угол, то полагают

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

Получим условия параллельности и перпендикулярности прямых:

$$\text{а) } l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \varphi = 0 \Leftrightarrow k_2 - k_1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

$$b) \ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \varphi = 0 \Leftrightarrow \frac{1+k_1k_2}{k_2-k_1} = 0 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1.$$

3) Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ соответственно. Определим условия параллельности и перпендикулярности:

$$a) \ l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}, \text{ где } \overline{n_1} = (A_1, B_1),$$

$\overline{n_2} = (A_2, B_2)$ – нормальные векторы прямых l_1 и l_2 соответственно,

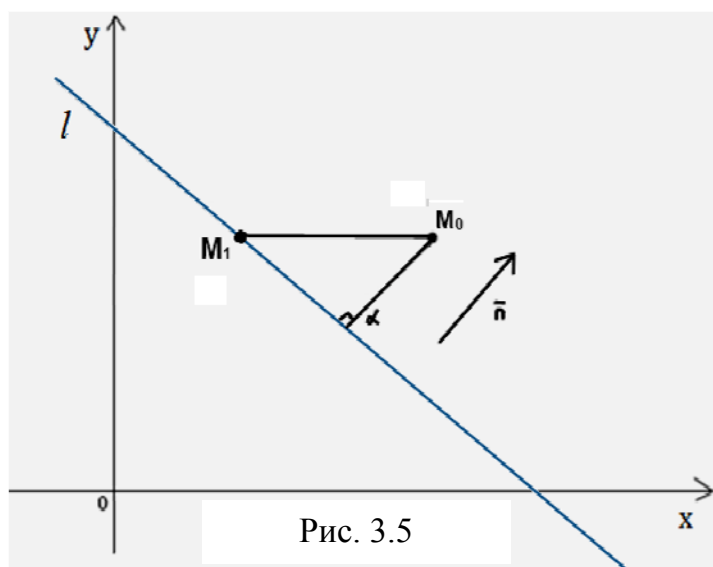
$$b) \ l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Для вычисления угла φ можно воспользоваться формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}. \quad (3.14)$$

3.1.8. Расстояние от точки до прямой

Пусть заданы точка $M_0(x_0, y_0)$ и прямая l уравнением $Ax+By+C=0$ (см. рис. 3.5).



Найдём расстояние d от точки M_0 до прямой l . Расстояние d от точки M_0 до прямой l равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$, где $M_1(x_1, y_1)$ – произвольная точки прямой l на направление нормального вектора $\vec{n} = (A, B)$.

$$\begin{aligned} \text{Значит, } d &= |\text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_1 M_0}| = \left| \frac{\overline{M M_0} \vec{n}}{|\vec{n}|} \right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \\ &= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{aligned}$$

Так как точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой l , то $Ax_1 + By_1 + C = 0$ или $C = -Ax_1 - By_1$. Поэтому

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (3.15)$$

Пример 3.2.

Показать, что прямые $2x + 5y + 3 = 0$ и $-4x - 10y + 21 = 0$ параллельны, и найти расстояние между ними.

Решение.

1) Данные прямые параллельны, так как отношение соответствующих коэффициентов при переменных равны: $\frac{2}{-4} = \frac{5}{-10}$.

2) Подберём точку, лежащую на прямой l_1 : $2x + 5y + 3 = 0$. Такой точкой, например, будет точка $A(1, 1)$. Искомым расстоянием будет расстояние от точки A до прямой l_2 : $-4x - 10y + 21 = 0$. Воспользуемся формулой (3.15):

$$d = \frac{|(-4) \cdot 1 + (-10) \cdot 1 + 21|}{\sqrt{(-4)^2 + (-10)^2}} = \frac{7}{\sqrt{116}} = \frac{7}{2\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

$$\text{Ответ: } d = \frac{7\sqrt{29}}{58}.$$

3.2. Кривые на плоскости

3.2.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы прямоугольная декартова система координат (ПДСК) Oxy и некоторая линия L . Рассмотрим уравнение $F(x, y) = 0$ (или $y = f(x)$). Это уравнение называется уравнением линии L в заданной системе координат, если:

1) ему удовлетворяют координаты (x, y) любой точки линии L ,

2) ему не удовлетворяют координаты ни одной точки, не лежащие на линии L .

Уравнения 2-й степени от двух переменных в ПДСК Oxy – уравнения кривых, частными случаями которых являются: эллипс, окружность, гипербола, парабола.

3.2.2. Эллипс

Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная большая, чем расстояние между фокусами, и равная $2a$ (см. рис. 3.6).

Если ось Ox проходит через фокусы F_1 и F_2 (Ox – фокальная ось), а ось Oy – через середину отрезка $F_1 F_2$, то каноническое уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.16)$$

Оси Ox и Oy – оси симметрии эллипса, точка $O(0,0)$ – центр симметрии эллипса. Точки пересечения эллипса с осями координат $(\pm a, 0), (0 \pm b)$ – вершины эллипса, а точки $F_1(c,0)$ и $F_2(-c,0)$ – фокусы, причём $a \geq b$ и

$$c^2 = a^2 - b^2. \quad (3.17)$$

В частности, если $a = b = r$, то $c = 0$, $F_1 = F_2 = O(0,0)$, и эллипс превращается в окружность $x^2 + y^2 = r^2$ с центром в точке $O(0,0)$ и радиусом r .

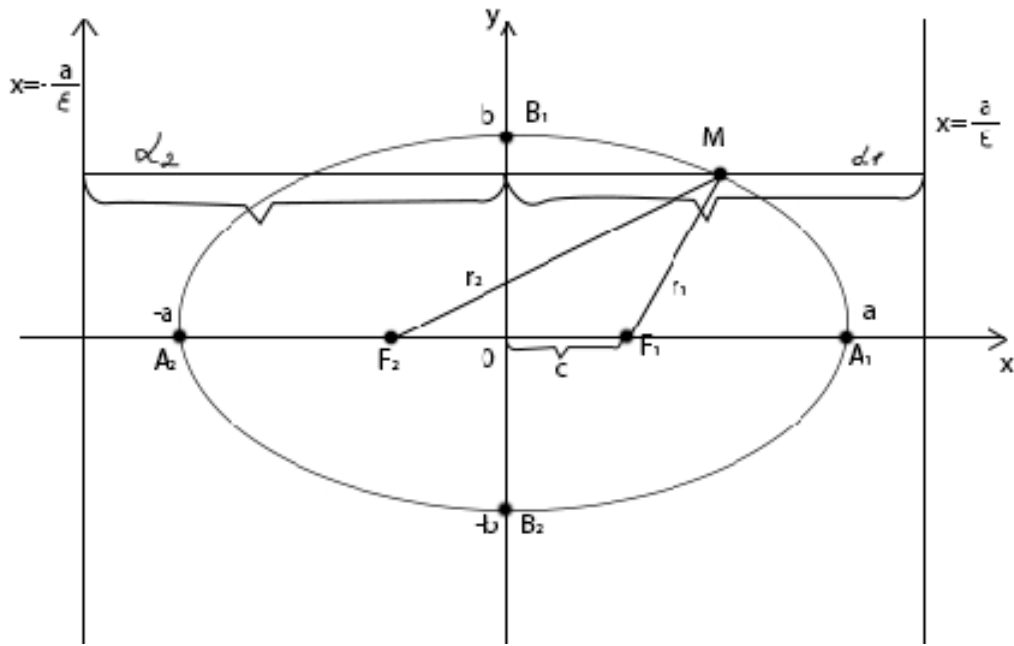


Рис. 3.6

Числа a и b называются большой и малой полуосью эллипса соответственно.

Заметим, что если фокусы эллипса лежат на оси Oy , то его уравнение так же имеет вид (3.16), но большая полуось – b , а малая – a , причём $b > a$ и $c^2 = b^2 - a^2$.

Эксцентриситетом эллипса называется отношение

$$\frac{c}{a} = \varepsilon \quad (0 \leq \varepsilon < 1), \text{ если } a \geq b \text{ и } \varepsilon = \frac{c}{b}, \text{ если } b > a.$$

Отметим, что чем меньше ε , тем он менее сплюснен.

Фокальные радиусы точки $M(x, y)$ эллипса (расстояния от точки M до фокусов) определяются по формулам:

$$r_1 = |F_1M| = a - \varepsilon x, r_2 = |F_2M| = a + \varepsilon x \quad (\text{или } r_1 = b - \varepsilon y, r_2 = b + \varepsilon y, \text{ если } b > a).$$

Директрисами эллипса называются прямые, уравнения которых $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, если $a \geq b$ (или $y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$, если $b > a$).

Если d_1 и d_2 – расстояния от точки $M(x,y)$ до директрис, то

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon. \quad (3.18)$$

3.2.3. Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний которых от двух фиксированных точек F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $2a$ (см. рис. 3.7).

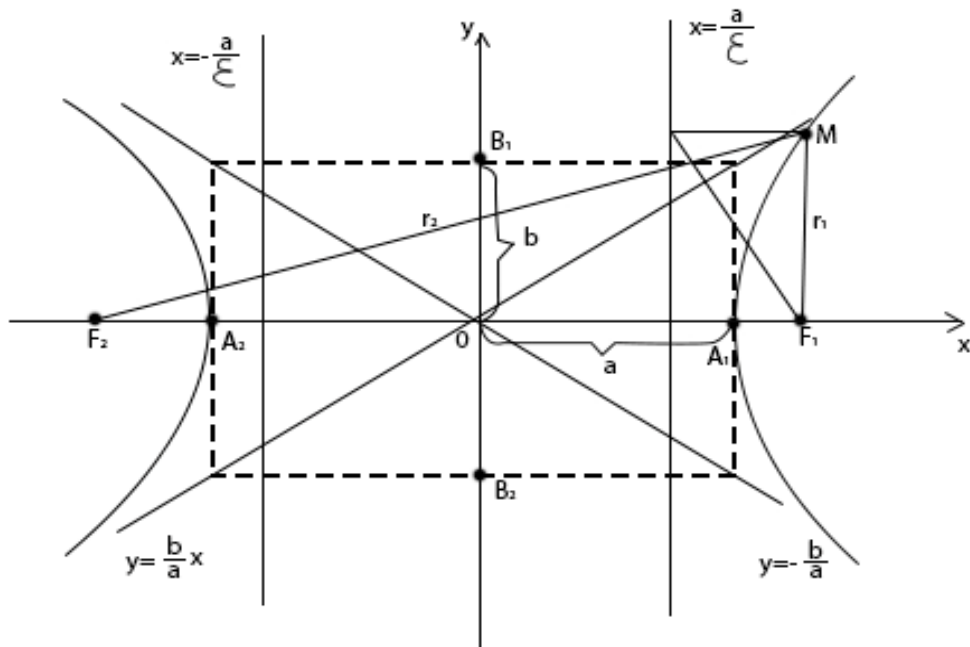


Рис. 3.7

Если ось Ox проходит через фокусы, а ось Oy – через середину отрезка F_1F_2 , то каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.19)$$

Оси Ox и Oy – оси симметрии гиперболы, точка $O(0,0)$ – центр симметрии гиперболы.

Точки $(\pm a, 0)$, – вершины гиперболы, точки $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$ – фокусы, причём

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (3.20)$$

Число a называется действительной полуосью, а b – мнимой полуосью гиперболы.

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение $\frac{c}{a} = \varepsilon$, причём $\varepsilon > 1$.

Кривую
$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (3.21)$$

называют гиперболой, сопряжённой с гиперболой (3.19). У этой гиперболы b – действительная полуось, a – мнимая, причём её фокусы $(0, \pm c)$ лежат на оси Oy и $\varepsilon = \frac{c}{b}$.

Фокальные радиусы точки $M(x,y)$ гиперболы (3.19) определяются по формулам: $r_1 = |\varepsilon x - a|$, $r_2 = |\varepsilon x + a|$,

($r_1 = |b - \varepsilon y|$, $r_2 = |b + \varepsilon y|$ – для сопряжённой гиперболы).

Директрисами гиперболы (3.19) называются прямые, уравнения которых $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ ($y = \pm \frac{b}{\varepsilon}$ для сопряжённой гиперболы (3.21)).

Если d_1 и d_2 – расстояния от точки $M(x,y)$ гиперболы до директрис, то для фокальных радиусов гиперболы выполняются равенства:

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Асимптотами гиперболы (3.19) и сопряжённой с ней гиперболы (3.21) являются прямые $y = \pm \frac{b}{a}x$.

3.2.4. Парабола

Параболой называется множество точек плоскости, расстояние которых от фиксированной точки F (фокус) равняется расстоянию от фиксированной прямой (директрисы) (см. рис. 3.8).

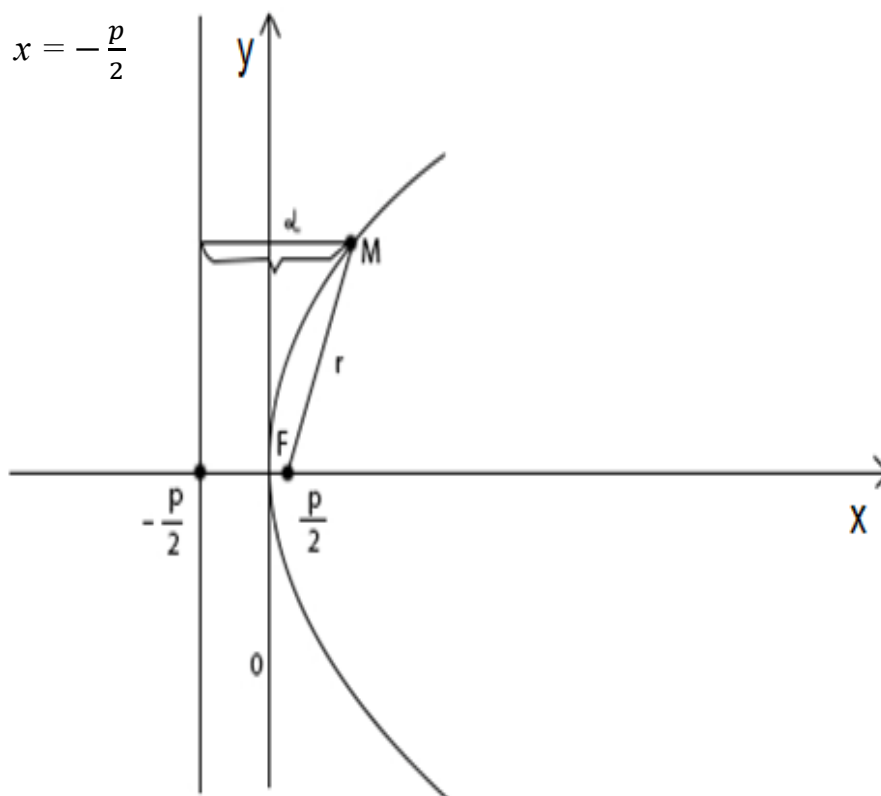


Рис. 3.8

Пусть ось Ox проходит через фокус F перпендикулярно директрисе, а начало координат лежит посередине между фокусом и директрисой, причём $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, где p – расстояние от фокуса до директрисы. Тогда уравнение директрисы имеет вид: $x = -\frac{p}{2}$. В этом случае каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px. \quad (3.22)$$

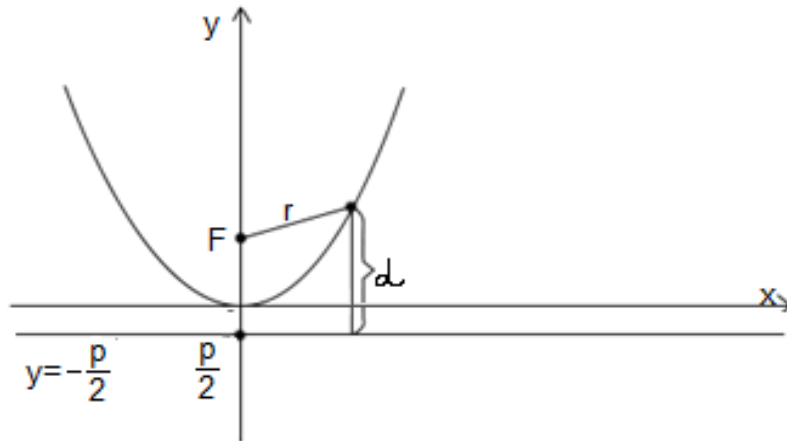


Рис. 3.9

Ось Ox (фокальная ось) – ось симметрии параболы (3.22), а точка $(0,0)$ – её вершина.

Эксцентриситет параболы $\varepsilon = 1$; фокальный радиус точки $M(x,y)$ параболы (3.22) вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$, $r = d$ (d – расстояние точки M до директрисы) и $\varepsilon = \frac{r}{d} = 1$.

Кривая, симметричная параболе (3.22) относительно оси Oy , также – парабола, уравнение которой $y^2 = -2px$, $F\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$, уравнение директрисы $x = \frac{p}{2}$.

Аналогично определяют параболы $x^2 = \pm 2py$, осью симметрии (фокальной осью) которых является ось Oy , причём их фокусы лежат в точке $F(0, \pm \frac{p}{2})$, а уравнение директрисы: $y = \mp \frac{p}{2}$.

Пример 3.3.

Найти полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Решение.

Разделим обе части данного уравнение на 36, получим каноническое уравнение данного эллипса: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

Отсюда имеем: большая полуось эллипса $a = 3$, малая $b = 2$, фокусы лежат на оси Ox .

Найдём координаты фокусов: $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, т. е. координаты фокусов $F_1(\sqrt{5}, 0)$, $F_2(-\sqrt{5}, 0)$. Эксцентриситет эллипса определим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a}$: $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ: $a = 3, b = 2, F_1(\sqrt{5}, 0), F_2(-\sqrt{5}, 0), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Пример 3.4.

Составить уравнение гиперболы, если её асимптоты заданы уравнениями $y = \pm \frac{2}{3}x$ и гипербола проходит через точку $M(8, 2\sqrt{3})$. Найти расстояние между фокусами и вершинами гиперболы.

Решение.

Так как точка $(8, 2\sqrt{3})$ лежит на гиперболе, то её координаты удовлетворяют уравнению (3.19): $\frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1$, кроме того, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$ (так как у гиперболы её асимптоты: $y = \pm \frac{2}{3}x$).

Таким образом, имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{b}{a} = \frac{2}{3}, \\ \frac{64}{a^2} - \frac{12}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Решив полученную систему, найдём: $a = \sqrt{37}, b = \frac{2\sqrt{37}}{3}$; уравнение гиперболы $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1$.

Расстояние между вершинами гиперболы: $2a = 2\sqrt{37}$, между фокусами: $2c = 2\frac{\sqrt{481}}{3} = \frac{2\sqrt{481}}{3}$ ($c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{37 + \frac{148}{9}} = \frac{\sqrt{481}}{3}$).

Ответ: $\frac{x^2}{37} - \frac{y^2}{\frac{148}{9}} = 1, 2a = 2\sqrt{37}; 2c = \frac{2\sqrt{481}}{3}$.

Пример 3.5.

Составить уравнение параболы, проходящей через точки $O(0,0)$ и $M(5,-3)$ и симметричной относительно оси Ox ; написать уравнение директрисы, найти фокальный радиус точки M .

Решение.

Искомое уравнение имеет вид: $y^2 = 2px$; подставив сюда $x = 5$, $y = -3$, получим $9 = 2p \cdot 5$, отсюда $2p = \frac{9}{5}$.

Таким образом, имеем уравнение параболы: $y^2 = \frac{9}{5}x$, $p = \frac{9}{10}$.

Поэтому уравнение директрисы: $x = -\frac{9}{20}$. Фокальный радиус:

$$MF = 5 + \frac{9}{20} = \frac{109}{20}.$$

Ответ: $y^2 = \frac{9}{5}x$, $x = -\frac{9}{20}$ – уравнение директрисы, $MF = \frac{109}{20}$.

3.3. Преобразование координат.

Уравнение линии в полярной системе координат.

Параметрические уравнения линии

3.3.1. Преобразование системы координат

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется преобразованием системы координат.

Рассмотрим два случая преобразования одной прямоугольной системы координат в другую. Полученные формулы устанавливают зависимость между координатами произвольной точки плоскости в разных системах координат.

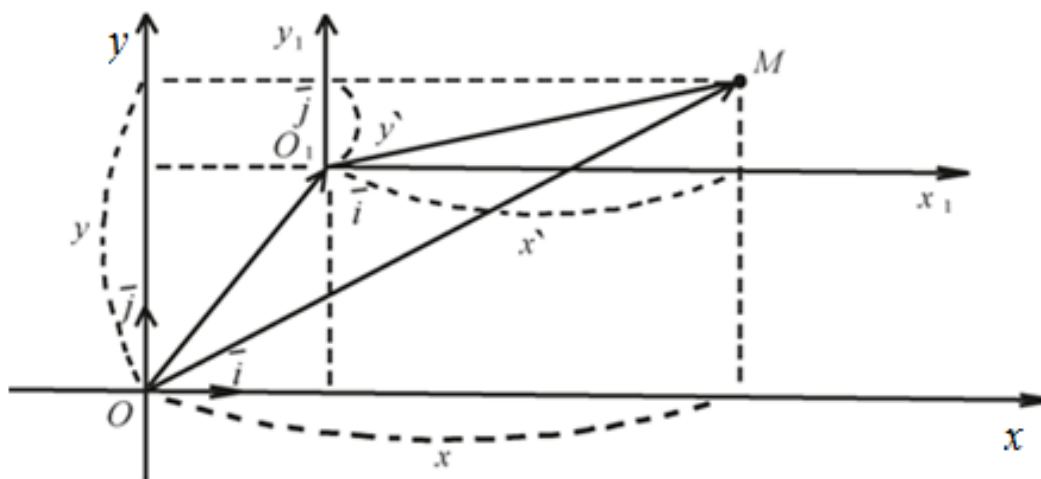


Рис. 3.10

1. Параллельный перенос осей координат

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy . Под параллельным переносом осей координат понимают переход от системы координат Oxy к новой системе $O_1x_1y_1$, при котором меняется положение начала координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными.

Пусть начало новой системы координат точка O_1 имеет координаты (x_0, y_0) в старой системе координат Oxy , т. е. $O_1(x_0, y_0)$. Обозначим координаты произвольной точки M плоскости в системе Oxy через (x, y) , а в новой системе $O_1x_1y_1$ через (x', y') (см. рис. 3.10).

Рассмотрим векторы:

$$\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \overline{OO_1} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}, \quad \overline{O_1M} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Так как $\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$, то $x\vec{i} + y\vec{j} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + x'\vec{i} + y'\vec{j}$, т. е.

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j}. \text{ Следовательно, } \begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases}$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x и y по известным новым x' и y' и наоборот.

2. Поворот осей координат. Полярные координаты

Под поворотом осей координат понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один и тот же угол, а начала координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть новая система $O_1x_1y_1$ получена поворотом системы Oxy на угол α . Пусть M – произвольная точка плоскости, (x, y) – её координаты в старой системе и (x', y') – в новой системе.

Введём две полярные системы координат с общим полюсом O и полярными осями Ox и Ox_1 (масштаб одинаков). Полярный радиус r в обеих системах одинаков, а полярные углы соответственно равны $\alpha + \varphi$ и φ , где φ – полярный угол в новой полярной системе координат (см. рис. 3.11).

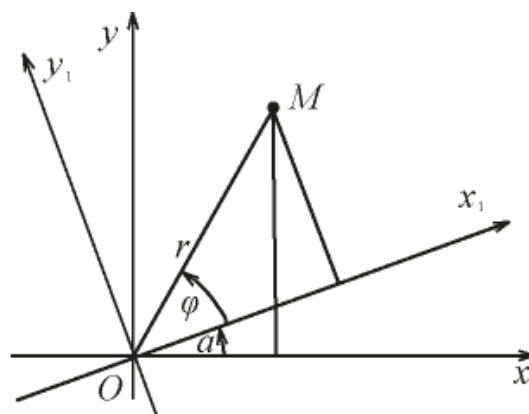


Рис. 3.11

По формулам перехода от полярных координат к прямоугольным имеем: $\begin{cases} x = r \cos(\alpha + \varphi) \\ y = r \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$, т. е. $\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \alpha - r \sin \varphi \sin \alpha \\ y = r \cos \varphi \sin \alpha + r \sin \varphi \cos \alpha \end{cases}$

Но $r \cos \varphi = x'$ и $r \sin \varphi = y'$. Поэтому:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases}$$

Полученные формулы называются формулами поворота осей. Они позволяют определять старые координаты (x, y) произвольной точки M через новые координаты (x', y') этой же точки M , и наоборот.

В полярной системе координат положение точки M на плоскости определяется её расстоянием $|OM| = r$ от полюса O (r -полярный радиус – вектор точки) и углом φ , образованным отрезком OM с полярной осью Ox (φ – полярный угол точки). Угол φ считается положительным при отсчёте от полярной оси против часовой стрелки (см. рис. 3.12).

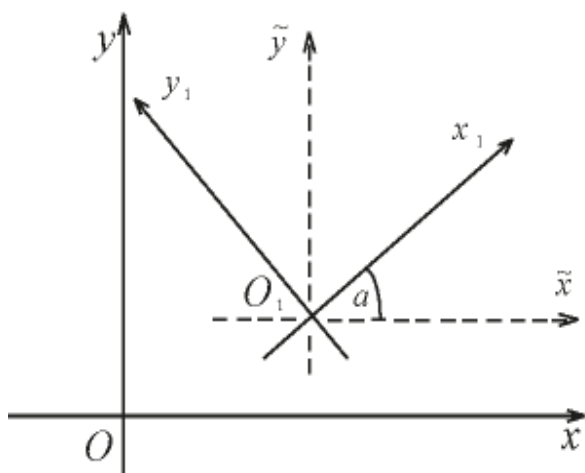


Рис. 3.12

Если точка M имеет полярные координаты $r > 0$ и $0 \leq \varphi < 2\pi$, то ей же отвечает и бесчисленное множество пар полярных координат $(r, \varphi + 2\pi k)$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Если начало декартовой прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а

ось Ox направить по полярной оси, то декартовы координаты x и y точки M и её полярные координаты r и φ связаны формулами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = x/r, \quad \sin \alpha = y/r.$$

3.3.2. Уравнение линии в полярной системе координат.

Параметрические уравнения линии

Линия на плоскости часто задаётся как множество точек, обладающих некоторым только им присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса r есть множество всех точек плоскости, удалённых на расстояние r от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел – её координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т. е. равенства, связывающего координаты точек линий).

Уравнением линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Переменные x и y в уравнении линии называется текущими координатами точек линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линий заменить исследованием его уравнения.

Так, для того чтобы установить, лежит ли точка $A(x_0, y_0)$ на данной линии, достаточно проверить (не прибегая к геометрическим построениям), удовлетворяют ли координаты точки A уравнению этой линии в выбранной системе координат.

Пример 3.6.

Лежат ли точки $K(-2; 1)$ и $L(1; 1)$ на линии $2x + y + 3 = 0$?

Решение.

Подставив в уравнение вместо x и y координаты точки K , получим $2(-2) + 1 + 3 = 0$. Следовательно, точка K лежит на данной линии. Точка L не лежит на данной линии, так как $2 \cdot 1 + 1 + 3 \neq 0$.

Задача о нахождении точек пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$, сводится к отысканию точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям обеих линий, т. е. сводится к решению системы двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 0, \\ F_2(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если эта система не имеет действительных решений, то линии не пересекаются. Аналогичным образом вводится понятие уравнения линии в полярной системе координат.

Уравнение $F(r; \varphi) = 0$ называется уравнением данной линии в полярной системе координат, если координаты любой точки, лежащей на этой линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (3.23)$$

где x и y – координаты произвольной точки $M(x,y)$, лежащей на данной линии, а t – переменная, называемая параметром; параметр t определяет положение точки (x,y) на плоскости.

Например, если $x = t+1$, $y = t^2$, то значению параметра $t = 2$ соответствует на плоскости точка $(3,4)$, так как $x = 2+1 = 3$, $y = 2^2 = 4$.

Если параметр t изменяется, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию. Такой способ задания линии называется параметрическим, а уравнения (3.23) – параметрическими уравнениями линии.

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии к уравнению вида $F(x,y) = 0$, надо каким-либо способом из двух уравнений исключить параметр t . Например, от уравнений $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases}$ путём подстановки $t = x$ во второе уравнение, легко получить уравнение $y = x^2$ или $y - x^2 = 0$, т. е. вида $F(x,y) = 0$. Однако заметим, такой переход не всегда целесообразен и не всегда возможен.

Линию на плоскости можно задать векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, где t – скалярный переменный параметр. Каждому значению t_0 соответствует определённый вектор $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$ плоскости. При изменении параметра t конец вектора $\vec{r} = \vec{r}(t)$ опишет некоторую линию.

На рисунках 3.13–3.21 приведены примеры некоторых кривых и указаны их уравнения.

Векторному уравнению линии $\vec{r} = \vec{r}(t)$ в системе координат Oxy соответствуют два скалярных уравнения (10.1), т. е. уравнения проекций на оси координат векторного уравнения имеют механический смысл. Если точка перемещается на плоскости, то указанные уравнения называются уравнениями движения, а линия – траекторией точки, параметр t при этом есть время.

Итак, всякой линии на плоскости соответствует некоторое уравнение вида $F(x,y) = 0$.

Всякому уравнению вида $F(x,y) = 0$ соответствует, вообще говоря, некоторая линия, свойства которой определяются данным уравнением (выражение «вообще говоря» означает, что сказанное допускает исключения. Так, уравнению $(x-2)^2+(y-3)^2 = 0$ соответствует не линия, а точка $(2,3)$; уравнению $x^2+y^2+5 = 0$ на плоскости не соответствует никакой геометрический образ).

В аналитической геометрии на плоскости возникают две основные задачи. Первая: зная геометрические свойства кривой, найти её уравнение; вторая: зная уравнение кривой, изучить её форму и свойства.

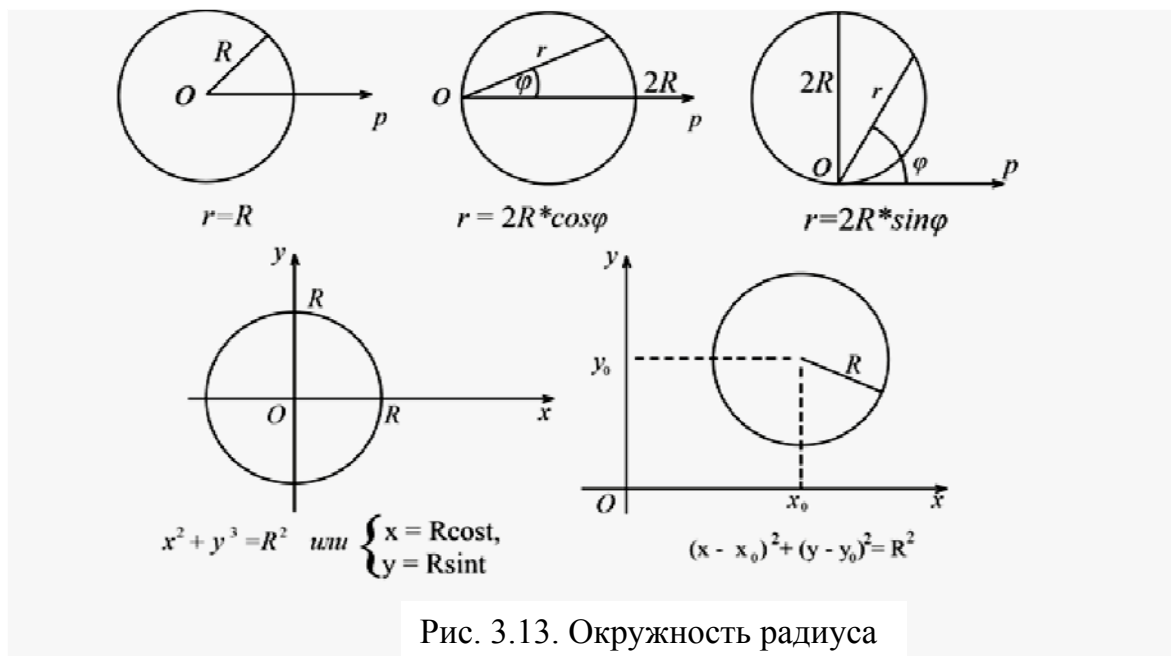


Рис. 3.13. Окружность радиуса

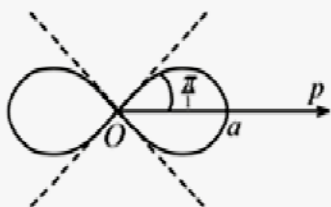


Рис. 3.14. Лемиската Бернулли

Сравнение в прямоугольных координатах :
 $(x+y) - a(x-y) = 0, a > 0$; в полярных
 координатах $r = a \cdot \sqrt{\cos 2\varphi}$

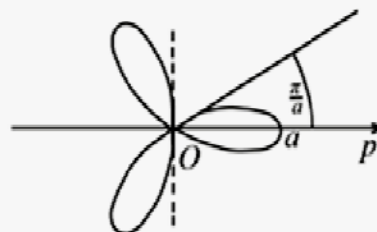


Рис. 3.15. Трехлепестковая роза

В полярных координатах ее уравнение имеет
 Вид $r = a \cdot \cos 3\varphi$; где $a > 0$.

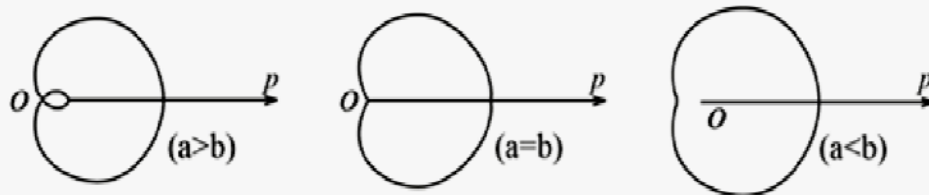


Рис. 3.16. Улитка Паскаля

Уравнение в полярных координатах имеет вид $r = b + a \cos \varphi$

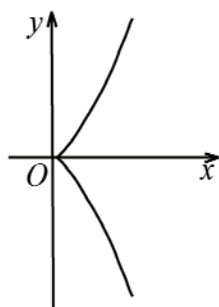


Рис. 3.17. Полукубическая парабола

Уравнение кривой $y^2 = x^3$ или $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$

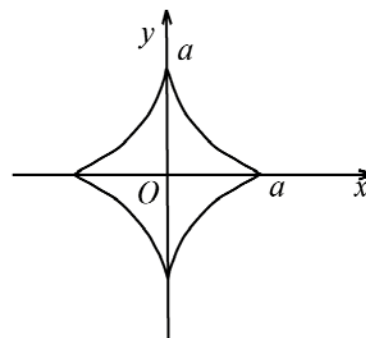


Рис. 3.18. Астероида

Уравнение в прямоугольных

координатах: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$;

параметрические

уравнения: $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t \end{cases}$

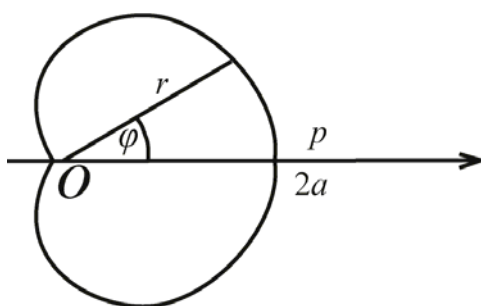


Рис. 3.19. Кардиоида

Уравнение в полярных координатах имеет вид:

$r = a(1 + \cos \varphi)$, где $a > 0$.

Кардиоида – частный случай улитки Паскаля ($a = b$)

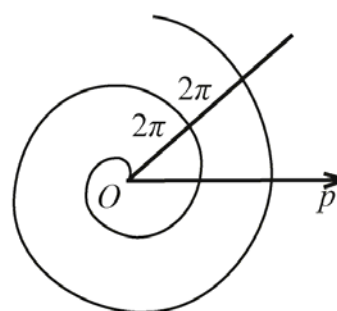


Рис. 3.20. Спираль Архимеда

Уравнение кривой в полярных

координатах $r = a\varphi$, где

$a > 0$ – постоянное.

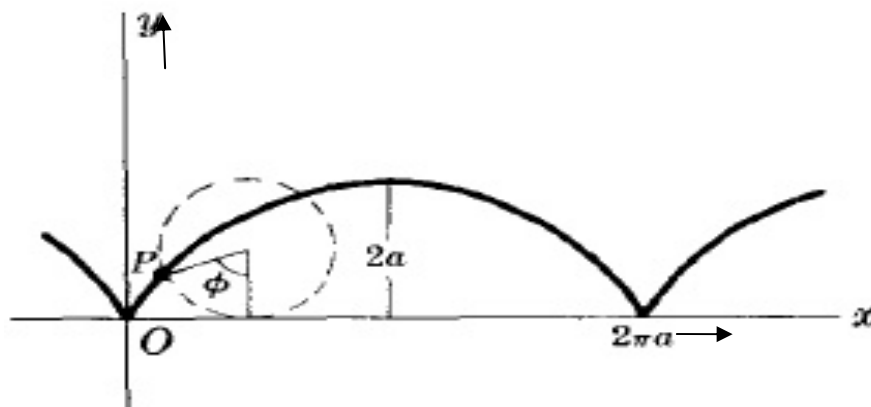


Рис. 3.21. Циклоида

Параметрические уравнения циклоиды имеют вид:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \text{ где } a > 0. \text{ Циклоида – это кривая, которую}$$

описывает фиксированная точка окружности, катящаяся без скольжения по неподвижной прямой.

3.4. Контрольные вопросы

1. Какую фигуру на плоскости описывает линейное уравнение?
2. Верно ли, что каждое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ является уравнением прямой на плоскости?
3. Верно ли, что любая прямая на плоскости определяется своим нормальным или направляющим вектором?
4. Перечислить виды уравнений прямой на плоскости.
5. Каковы условия перпендикулярности (параллельности) прямых на плоскости?
6. Справедливо ли утверждение, что в уравнении кривой
 - а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ большой полуосью является число a , а малой – число b ?

б) $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ действительной полуосью является число a , мнимой – число b .

7. Чему равны эксцентриситеты у окружности, эллипса, гиперболы и параболы?

8. Что характеризует у кривой величина эксцентриситета?

3.5. Тест «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Угловой коэффициент прямой $6x+2y-5=0$ равен:

1) -3 ; 2) 3 ; 3) -6 ; 4) 2 .

2. Уравнение прямой, перпендикулярной прямой $y=2x+3$, является:

1) $2x - y + 1 = 0$; 2) $3x - y - 5 = 0$;
3) $x + 3y + 12 = 0$; 4) $x + 2y + 4 = 0$.

3. Уравнение прямой, проходящей через точку $(-2,0)$ перпендикулярно прямой $3x+y+4=0$, имеет вид...

4. Даны уравнения прямых:

1) $x+y=0$;
2) $x+y+2=0$;
3) $2x+y+2=0$;
4) $y=3x$.

Выбрать те, которые проходят через начало координат:

а) только 1) и 4);
б) только 4);
с) только 3);
д) только 1);
е) только 2).

5. В порядке увеличения угла их наклона к оси абсцисс прямые располагаются:

- 1) $2y+x-16=0$;
- 2) $3y+x-6=0$;
- 3) $x-4y+18=0$;
- 4) $y+x-8=0$;
- 5) $x-6y+20=0$.

6. Пары прямых:

- 1) $2y-6x-10=0$ и $3y-9x+4=0$;
- 2) $3y-8x-2=0$ и $16x-6y+4=0$;
- 3) $y-2x-7=0$ и $x+2y+10=0$;
- 4) $y-6x-10=0$ и $y-3x+2=0$;
- a) параллельны;
- b) пересекаются;
- c) взаимно перпендикулярны;
- d) совпадают.

7. Из перечисленных прямых:

- 1) $3x-4y+5=0$;
- 2) $2x+5y-4=0$;
- 3) $6x-8y-3=0$;
- 4) $y = -\frac{3}{4}x + 2$;
- 5) $3x-5y+5=0$;

параллельными являются...

8. Уравнение прямой, проходящей через точки $(-1,1)$ параллельно прямой $2x-y+5=0$, имеет вид...

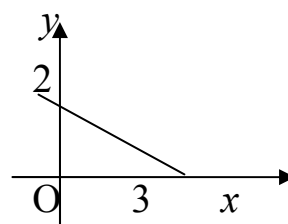
9. Уравнение прямой, изображённой на рисунке:

1) $3x+2y = 6$;

2) $2x+3y = 1$;

3) $2x+3y = 6$;

4) $3x+2y = 1$.



10. Из перечисленных прямых:

1) $y = 4x+1$;

2) $y = 2x$;

3) $y + \frac{x}{4} - 4 = 0$;

4) $y+4x+5 = 0$

перпендикулярными являются...

11. Прямые $4x+2y+5 = 0$ и $\alpha x+y-1 = 0$ перпендикулярны, если α равно...

12. Прямая $3x-3y+5 = 0$ образует с положительным направлением оси Oх угол, равный...

13. Уравнением прямой, параллельной прямой $y = 2x-1$, является

1) $\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{7}$;

2) $\frac{x}{4} = \frac{y-3}{2}$;

3) $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4}$;

4) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{5}$.

14. Угловой коэффициент k и величина отрезка b , отсекаемого прямой $x+2y+6 = 0$ на оси Oy, равны:

1) $b = -3, k = -\frac{1}{2};$

2) $b = 6, k = 2;$

3) $b = 3, k = \frac{1}{2};$

4) $b = 6, k = \frac{1}{2};$

5) $b = 3, k = 2.$

15. Уравнение прямой, проходящей через точки $A(0,3)$ и $B(1,2)$, имеет вид...

16. Прямые $4x+2y+5 = 0$ и $\alpha x+y-1 = 0$ перпендикулярны, если α равно...

17. Прямые $2x+y-2 = 0$ и $x+y-3 = 0$ пересекаются в точке...?

18. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,4)$ с направляющим вектором $\vec{S} = (1,3)$, имеет вид...

19. Уравнение оси Ox имеет вид...

20. Уравнение оси Oy имеет вид...

21. Прямая $x+2y = 6$ отсекает на оси Oy отрезок, равный...

22. Уравнение $Ax+By+C = 0$ определяет прямую, параллельную оси Oy , если:

1) $A = 0;$

2) $B = 0;$

3) $B = C = 0;$

4) $A = C = 0;$

5) $C = 0.$

23. Расстояние от точки $A(1,1)$ до прямой $3x+4y+3 = 0$ равно...

24. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -4)$ параллельно оси Ox , имеет вид...

25. Параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -4)$ параллельно оси Oy , имеют вид...

26. Соответствие между уравнениями прямых на плоскости и их названиями:

1) $y = kx + b$;

2) $Ax + Bx + C = 0$;

3) $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q}$;

4) $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

5) $\begin{cases} x = pt + x_0 \\ y = qt + y_0 \end{cases}$;

6) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$;

a) параметрические уравнения;

b) уравнение прямой, проходящей через две данные точки;

c) каноническое уравнение;

d) уравнение прямой в отрезках;

e) с угловым коэффициентом;

f) общее уравнение.

27. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2y = 0$, равен:

1) 1; 2) 4; 3) -1; 4) 3.

28. Уравнение $x^2 - 2y^2 = -8$ определяет на плоскости:

1) гиперболу;

2) прямую;

- 3) параболу;
- 4) окружность;
- 5) эллипс.

29. Даны уравнения кривых на плоскости:

- 1) $2y^2 + (x - 1) - 5 = 0$;
- 2) $4(x - 1)^2 + (y + 3)^2 - 5 = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 - 5 = 0$;
- 4) $2x^2 - y^2 - 5 = 0$;
- 5) $y^2 - x - 5 = 0$;
- 6) $(y + 1)^2 - 2x^2 - 5 = 0$.

Число уравнений, задающих гиперболу в этом списке, равно...

30. Уравнение $2x^2 + 2y^2 + x = 0$ определяет на плоскости:

- 1) эллипс;
- 2) окружность;
- 3) прямую;
- 4) гиперболу;
- 5) параболу.

31. Соответствие между кривыми второго порядка и их уравнениями:

- 1) $(x - 2)^2 + (y - 6)^2 = 64$;
- 2) $x^2 + 2y = 4$;
- 3) $x^2 + 9y^2 = 9$;
- 4) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$;
- a) окружность;
- b) эллипс;
- c) парабола;
- d) гипербола.

32. Дано уравнение гиперболы $9x^2 - y^2 + 9 = 0$. Расстояние между вершинами гиперболы равно...

33. Дано уравнение эллипса $3x^2 + 6y^2 - 18 = 0$. Расстояние между вершинами эллипса равно...

34. Координаты фокуса параболы $x^2 + 18y = 0$ равны...

35. Уравнения асимптот гиперболы $3x^2 - y^2 = 12$ имеют вид...

36. Координаты фокуса эллипса $10x^2 + y^2 = 10$ равны...

37. Уравнение директрисы параболы $y^2 - 18x = 0$...

38. Координаты фокуса гиперболы $5y^2 - 4x^2 = 20$ равны...

39. Фокусы эллипса имеют координаты $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$; большая полуось равна 5. Уравнение эллипса имеет вид:

1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$;

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$;

3) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$;

4) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$.

40. Уравнение параболы с фокусом $F(3, 0)$ и директрисой $x + 3 = 0$ имеет вид:

1) $y^2 = -12x$;

2) $x^2 = 12y$;

3) $y^2 = 12x$;

4) $x^2 = -12y$.

3.6. Задачи

3.1. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(3, -1)$ и:

- 1) имеющей направляющий вектор $\vec{S} = (1, -3)$;
- 2) имеющей угловой коэффициент $k = \frac{5}{2}$;
- 3) имеющую вектор-нормаль $\vec{n} = (2, 5)$;
- 4) отсекающей на оси Ox отрезок $a = -3$;
- 5) проходящей через точку $B(4, -2)$;
- 6) отсекающей на осях координат одинаковые отрезки.

3.2. Составить разные виды уравнения прямой, проходящей через точку $A(2, 3)$ параллельно прямой $5x - 2y + 7 = 0$.

3.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3, 2)$:

- 1) под углом 135° к оси Ox ;
- 2) параллельно оси Oy ;
- 3) параллельно оси Ox ;
- 4) и точку $B(-2, -1)$.

3.4. В треугольнике с вершинами $A(16, -6)$, $B(4, 3)$ и $C(20, 16)$ найти уравнение сторон AB , AC и угол при вершине A .

3.5. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x - 3y + 5 = 0$ и $x + y - 7 = 0$ и параллельной прямой $y = 4x + 1$.

3.6. Найти точку, симметричную точке $A(-2, -1)$ относительно прямой l , заданной уравнением $x = 2y - 16$.

3.7. Составить уравнения прямых, которые проходят через вершины треугольника $A(2, -1)$, $B(3, 5)$ и $C(-4, 2)$ параллельно противоположным сторонам.

3.8. В параллелограмме заданы уравнения двух сторон $8x+3y+1=0$ и $2x+y-1=0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x+2y+3=0$. Определить вершины этого параллелограмма.

3.9. Дан треугольник ABC с вершинами $A(-7, 2)$, $B(5, -3)$, $C(8, 1)$. Составить уравнение медианы, высоты и биссектрисы, проведённых из вершины B .

3.10. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-2, 2)$ и $C(0, -3)$. Составить уравнения его сторон.

3.11. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения двух прямых $3x-2y+5=0$ и $4x+3y+1=0$, если эта прямая:

- 1) проходит через точку $A(6, -1)$;
- 2) параллельна прямой $x+2y-7=0$;
- 3) перпендикулярна к прямой $2x-5y+6=0$;
- 4) проходит над углом $\frac{\pi}{4}$ к прямой $3x+y-1=0$.

Решить задачу, определяя и не определяя точки пересечения заданных прямых.

3.12. Определить длину перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $x-y+4=0$. Найти угол, который образует этот перпендикуляр с осью Ox .

3.13. Найти расстояние:

- 1) от точки $A(1, -2)$ до прямой $3x - 4y + 9 = 0$;
- 2) от точки пересечения прямых $3x - 4y + 25 = 0$ и $5x + 2y - 19 = 0$ до прямой $6x - 8y - 5 = 0$;
- 3) от середины отрезка, который соединяет точки $A(3, -4)$ и $B(-7, 6)$ до прямой $x + 2y - 5 = 0$.

3.14. В квадрате заданы вершины $A(-2, -3)$ и одна из его сторон $3x - 4y - 2 = 0$. Найти площадь квадрата и длину его диагонали.

3.15. Найти центр и радиус окружности:

- 1) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 8y = 0$;
- 2) проходящей через точки $A(-1, 5)$, $B(-2, -2)$ и $C(5, 5)$.

3.16. Через точки $A(8, -2)$ и $B(10, 0)$ провести окружность радиуса $r = 10$.

3.17. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $(5, 3)$ с центром в точке пересечения прямых $5x - 3y - 13 = 0$ и $x + 4y + 2 = 0$.

3.18. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если:

- 1) большая полуось равна 13, а расстояние между фокусами равно 10,
- 2) малая полуось равна 4, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{3}{5}$.

3.19. Выяснить, какая кривая задаётся уравнением:

- 1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$;
- 2) $25x^2 + 169y^2 = 4225$.

3.20. Определить полуоси, координаты фокусов и эксцентриситет эллипса $3x^2 + 4y^2 - 12 = 0$.

3.21. Определить эксцентриситет эллипса, если его большая ось втрое больше малой.

3.22. Составить каноническое уравнение эллипса, если его большая полуось равна 12, а эксцентриситет равен 0,8. Найти расстояние между фокусами.

3.23. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат симметрично относительно начала координат, если:

1) полуоси эллипса равны 7 и 4,

2) расстояние между фокусами равно 24, а эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$.

3.24. Эллипс проходит через точки $A(2, \sqrt{3})$ и $B(0, 2)$. Составить уравнение эллипса и найти расстояние от точки A до фокусов.

3.25. Найти точки эллипса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, расстояние от которых до правого фокуса F_2 равно 14.

3.26. Выяснить, какая кривая задаётся уравнением $3x^2 - 4y^2 = 12$. Найти основные параметры кривой, её эксцентриситет, изобразить её графически.

3.27. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между фокусами равно 6, а эксцентриситет $\frac{3}{2}$;

2) расстояние между фокусами равно 20, а уравнение асимптот $y = \pm \frac{4}{3}x$.

3.28. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Oy симметрично относительно начала координат, если:

1) расстояние между её вершинами равно 20, а расстояние между фокусами – 24;

2) действительная полуось равна 5, а эксцентриситет $-\frac{7}{5}$.

3.29. Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через точки $A(2,1)$ и $B(-4,\sqrt{7})$.

3.30. Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах, а фокусы – в вершинах эллипса $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

3.31. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, если эта парабола проходит через точку A и имеет указанную ось симметрии:

1) $A(-2,4)$, Ox ;

2) $A(1, -2)$, Ox ;

3) $A(6,2)$, Oy ;

4) $A(-1, -1)$, Oy .

Определить фокус и уравнение директрисы для каждой из этих парабол.

3.32. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная координаты её фокуса:

1) $F(-5,0)$; 2) $F(0,\frac{1}{2})$.

3.33. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если её директрисой является прямая $2y-5=0$.

3.34. Составить уравнение параболы:

1) проходящей через точки $(0,0)$ и $(1,-3)$ и симметричной относительно оси Ox ;

2) проходящей через точки $(0,0)$ и $(2,-4)$ и симметричной относительно оси Oy .

3.35. Выяснить вид заданных кривых:

1) $y = x^2 + 5x + 6$;

2) $x = y^2 + 2y + 3$;

3) $y = \frac{1+x}{y-2}$;

4) $x = \frac{2y+3}{x+5}$;

5) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$;

6) $\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1$;

7) $\frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$;

8) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$.

3.36. Для каждого из заданных уравнений определить, какие геометрические объекты они определяют:

1) $x^2 + y^2 - 8x + 12 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + 4y + 5 = 0$;

3) $2x^2 - 3y^2 - 12x - 12y = 0$;

4) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$;

5) $2y^2 + 2y - x + 2 = 0$;

6) $5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0$.

3.7. Ответы

3.1. 1) $3x+y-8=0$;

2) $5x-2y-17=0$;

3) $2x+5y-1=0$;

4) $x+6y+3=0$;

5) $x+y-2=0$;

6) $x+y-2=0, x-y-4=0$.

3.2. 1) $y-3 = \frac{5}{2}(x-2)$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$ с заданным угловым коэффициентом $k = \frac{5}{2}$;

2) $5(x-2)-2(y-3) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$ и с вектором нормали $\vec{n} = (5, -2)$;

3) $5x-2y-4=0$ – общее уравнение прямой;

4) $\frac{x}{\frac{4}{5}} + \frac{y}{-2} = 1$ – уравнение прямой в отрезках.

3.3. 1) $y-2 = (-1)(x-3)$ или $x+y-5=0$;

2) $x=3$;

3) $y=2$;

4) $3x-5y+1=0$.

3.4. $3x+4y-24=0$ – уравнение стороны AB ;

$11x-2y-188=0$ – уравнение стороны BC ;

$\operatorname{tg} \angle A = 2, A = \operatorname{arctg} 2$.

3.5. $4x-y-9=0$.

3.6. $B(6,15)$.

$$3.7. 3x-7y-13=0; \quad x+2y-13=0; \quad 6x-y+26=0.$$

$$3.8. A(-2,5), B(1, -3), C(8, -17), D(5, -9).$$

$$3.9. x+y-2=0 - \text{уравнение медианы } BM;$$

$$15x-y-78=0 - \text{уравнение высоты } BH;$$

$$11x+3y-46=0 - \text{уравнение биссектрисы } BL.$$

$$3.10. 3x+7y-8=0; \quad 7x-3y+20=0; \quad 3x+7y+21=0; \quad 7x-3y-9=0.$$

$$3.11. 1) 2x+7y-5=0; \quad 2) x+2y-1=0;$$

$$3) 5x+2y+3=0; \quad 4) 2x-y+3=0, x+2y-1=0.$$

$$3.12. OH = \frac{4}{\sqrt{2}}; \quad \alpha = \frac{3}{4}\pi.$$

$$3.13. 1) d=4; \quad 2) d=5,5; \quad 3) d=\sqrt{5}.$$

$$3.14. S=16, d=4\sqrt{2}.$$

$$3.15. 1) (1, \frac{4}{3}), \quad r = \frac{5}{3}; \quad 2) (2,1) \text{ и } r=5.$$

$$3.16. (x-16)^2 + (y-8)^2 = 100 \text{ и } (x-2)^2 + (y+6)^2 = 100.$$

$$3.17. (x-2)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

$$3.18. 1) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

$$3.19. 1) (x+2)^2 + (y-3)^2 = 16 - \text{окружность радиуса } r=4 \text{ с центром в точке } (-2,3);$$

$$2) \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 - \text{эллипс, большая полуось } a=13, \text{ а малая полуось } b=5.$$

$$3.20. x=2, b=\sqrt{3}, F_1(-1,0), F_2(1,0), \varepsilon=0,5.$$

$$3.21. \varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$3.22. \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{108} = 1, \quad 2c = 12.$$

$$3.23. 1) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{49} = 1; \quad 2) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

$$3.24. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad r_1 = 4 - \sqrt{3}, \quad r_2 = 4 + \sqrt{3}.$$

$$3.25. (-5, 3\sqrt{3}), (-5, -3\sqrt{3}).$$

$$3.26. \text{ Гипербола } a = 2, \quad b = \sqrt{3}, \quad c = \frac{5}{2}, F_1(-5,0), F_2(5,0).$$

$$3.27. 1) \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1;$$

$$2) \frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

$$3.28. 1) \frac{y^2}{100} - \frac{x^2}{44} = 1;$$

$$2) \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{24} = 1.$$

$$3.29. \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{1} = 1.$$

$$3.30. \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$3.31. 1) y^2 = -8x, \quad F(-2,0);$$

$$2) y^2 = 4x, \quad F(1,0);$$

$$3) x^2 = 18y, \quad F\left(0; \frac{9}{2}\right);$$

$$4) x^2 = -y, \quad F\left(0, -\frac{1}{4}\right).$$

$$3.32. 1) y^2 = -20x, \quad 2) x^2 = 2y.$$

3.33. $x^2 = -10y$.

3.34. 1) $y^2 = 9x$; 2) $x^2 = -y$.

3.35. 1)-4) – парабола, 5),8) – эллипс, 6),7) – гипербола.

- 3.36. 1) окружность;
 2) пустое множество;
 3) гипербола;
 4) эллипс;
 5) парабола;
 6) пара пересекающихся прямых.

3.8. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия на плоскости»

1. Даны вершины треугольника ABC . Найти:
 1) уравнение стороны AB ;
 2) уравнение высоты CH ;
 3) уравнение медианы AM ;
 4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH .

№ вар.	A	B	C
1	(-2;4)	(3;1)	(10;7)
2	(-3;-2)	(14;4)	(6;8)
3	(1;7)	(-3;-1)	(11;-9)
4	(1;0)	(-1;4)	(9;5)
5	(1;-2)	(7;1)	(3;7)
6	(-2;-3)	(1;6)	(6;1)
7	(-4;-2)	(-6;6)	(6;2)
8	(4;-3)	(7;3)	(1;10)
9	(4;-4)	(8;2)	(3;8)

Окончание

№ вар.	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
10	$(-3;-3)$	$(5;-7)$	$(7;7)$
11	$(1;-6)$	$(3;4)$	$(-3;3)$
12	$(-4;2)$	$(8;-6)$	$(2;6)$
13	$(-5;2)$	$(0;-4)$	$(5;7)$
14	$(4;-4)$	$(6;2)$	$(-1;8)$
15	$(-3;8)$	$(-6;2)$	$(0;-5)$
16	$(6;-9)$	$(10;-1)$	$(-4;1)$
17	$(4;1)$	$(-3;-1)$	$(7;-3)$
18	$(-4;2)$	$(6;4)$	$(4;10)$
19	$(3;-1)$	$(11;3)$	$(-6;2)$
20	$(-7;-2)$	$(-7;4)$	$(5;-5)$
21	$(-1;-4)$	$(9;6)$	$(-5;4)$
22	$(10;-2)$	$(4;-5)$	$(-3;1)$
23	$(-3;-1)$	$(-4;-5)$	$(8;1)$
24	$(-2;-6)$	$(-3;5)$	$(4;9)$
25	$(-7;-2)$	$(3;-8)$	$(-4;6)$
26	$(0;2)$	$(-7;-4)$	$(3;2)$
27	$(7;0)$	$(1;4)$	$(-8;-4)$
28	$(1;-3)$	$(0;7)$	$(-2;4)$
29	$(-5;1)$	$(8;-2)$	$(1;4)$
30	$(2;5)$	$(-3;1)$	$(0;4)$

2. Составить канонические уравнения:

- 1) эллипса;
- 2) гиперболы;
- 3) параболы.

A, B – точки, лежащие по кривой, F – фокус, a – большая (действительная) полуось, b – малая (мнимая) полуось, c – эксцентриситет, $y = \pm kx$ – уравнения асимптот гиперболы, D – директриса кривой, $2c$ – фокусное расстояние.

№ вар.	1)	2)	3)
1	$b=15, F(-10,0)$	$a=13, \varepsilon=\frac{14}{13}$	$D:x=-4$
2	$b=2, F(4\sqrt{5}, 0)$	$a=7, \varepsilon=\frac{\sqrt{85}}{7}$	$D:x=5$
3	$A(3,0), B(2,\frac{\sqrt{5}}{3})$	$k=\frac{3}{4}, \varepsilon = \frac{5}{4}$	$D:y=-2$
4	$\varepsilon = \frac{\sqrt{21}}{5}, A(-5,0)$	$A(\sqrt{80}, 3), B(4\sqrt{6}, 3\sqrt{2})$	$D:y=1$
5	$2a=22, \varepsilon = \frac{\sqrt{57}}{11}$	$k=\frac{2}{3}, 2c=10\sqrt{13}$	ось симметрии $Ox A(27,9)$
6	$b=\sqrt{15}, \varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{25}$	$k=\frac{3}{4}, 2a = 16$	ось симметрии $Ox A(4,-8)$
7	$a=4, F(3,0)$	$b=2\sqrt{10}, F(11,0)$	$D:x=-2$
8	$b=4, F(9,0)$	$a=5, \varepsilon=\frac{7}{5}$	$D:x=6$
9	$A(0,\sqrt{3}), B(\sqrt{\frac{14}{3}}, 1)$	$k=\frac{\sqrt{21}}{10}, \varepsilon = \frac{11}{10}$	$D:y=-4$
10	$\varepsilon = \frac{7}{8}, A(8,0)$	$A(3, \sqrt{\frac{3}{5}}), B(\sqrt{\frac{13}{5}}, 6)$	$D:y=4$

Продолжение

№ вар.	1)	2)	3)
11	$2a=24, \varepsilon = \frac{\sqrt{22}}{6}$	$k=\sqrt{\frac{2}{3}}, 2c = 10$	ось симметрии $Ox, A(-7,-7)$
12	$b=2, \varepsilon = \frac{5\sqrt{29}}{29}$	$k=\frac{12}{13}, 2a = 26$	ось симметрии $Ox, A(-5,15)$
13	$a=6, F(-4,0)$	$b=3, F(7,0)$	$D:x=-7$
14	$b=7, F(5,0)$	$a=11, \varepsilon=\frac{12}{11}$	$D:x=10$
15	$A(-\sqrt{\frac{17}{3}}, \frac{1}{3}),$ $B(\frac{\sqrt{21}}{2}, \frac{1}{2})$	$k=\frac{1}{2}, \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{2}$	$D:y=-1$
16	$\varepsilon = \frac{3}{5}, A(0,8)$	$A(\sqrt{6}, 0)$ $B(-2\sqrt{2}, 1)$	$D:y=9$
17	$2a=22, \varepsilon = \frac{10}{11}$	$k=\frac{\sqrt{11}}{5}, 2c=12$	ось симметрии $Ox,$ $A(-7,5)$
18	$b=5, \varepsilon = \frac{12}{13}$	$b=5, \varepsilon = \frac{13}{12}$	ось симметрии $Oy, A(-9,6)$
19	$a=9, F(7,0)$	$b=6, F(7,0)$	$D:x=-\frac{1}{4}$
20	$b=5, F(-10,0)$	$a=9, \varepsilon = \frac{4}{3}$	$D:x=12$
21	$A(0,-2), B(\frac{\sqrt{15}}{2}, 1)$	$k= \frac{2\sqrt{10}}{9}, \varepsilon = \frac{11}{9}$	$D:y=5$
22	$\varepsilon = \frac{2}{3}, A(-6,0)$	$A(\sqrt{8}, 0), B(\frac{\sqrt{20}}{3}, 2)$	$D:y=1$
23	$2a=50, \varepsilon = \frac{3}{5}$	$2c=30, k = \frac{\sqrt{29}}{14}$	ось симметрии $Oy, A(4,1)$

№ вар.	1)	2)	3)
24	$b=2\sqrt{15}, \varepsilon=\frac{7}{8}$	$2a=12, k=\frac{5}{6}$	ось симметрии Oy , $A(-2, 3\sqrt{2})$
25	$a=13, F(-5, 0)$	$b=44, F(-5, 0)$	$D: x=-\frac{3}{8}$
26	$b=7, F(13, 0)$	$b=4, F(-11, 0)$	$D: x=13$
27	$A(-3, 0), B(1, \frac{\sqrt{40}}{3})$	$k=\sqrt{\frac{2}{3}}, \varepsilon=\frac{\sqrt{15}}{3}$	$D: y=4$
28	$\varepsilon=\frac{5}{6}, A(0, -\sqrt{11})$	$A(\sqrt{\frac{32}{3}}, 1),$ $B(\sqrt{8}, 0)$	$D: y=3$
29	$2a=30, \varepsilon=\frac{15}{17}$	$2c=18, k=\frac{\sqrt{17}}{8}$	ось симметрии $Oy, A(4, -10)$
30	$b=2\sqrt{2}, \varepsilon=\frac{7}{9}$	$2a=12, k=\frac{\sqrt{2}}{2}$	ось симметрии Oy , $A(-45, 15)$

3.9. Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника ABC : $A(4, 3), B(-3, -3), C(2, 7)$.

Найти:

- 1) уравнение стороны AB ,
- 2) уравнение высоты CH ,
- 3) уравнение медианы AM ,
- 4) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ,
- 5) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB .

Решение.

1) Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки, получим уравнение или стороны AB : $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$ или $6x - 7y - 3 = 0$.

2) Согласно определению уравнения прямой с угловым коэффициентом, угловой коэффициент прямой AB : $k_1 = \frac{6}{7}$. Так как прямые AB и CH перпендикулярны, то угловой коэффициент k_2 высоты CH равен: $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{7}{6}$. Зная угловой коэффициент высоты CH и координаты точки C , составим уравнение высоты CH :

$$y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2) \text{ или } 7x + 6y - 56 = 0.$$

3) Находим координаты x_M и y_M середины M отрезка BC : $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-3+7}{2} = 2$. Нам известны две точки A и H , через которые проходит высота CH . По двум этим точкам составим уравнение медианы AM : $\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3}$ или $2x - 9y + 19 = 0$.

4) Найдём координаты точки N пересечения медианы AM и высоты CH . Для этого составим систему уравнений: $\begin{cases} 7x + 6y - 56 = 0, \\ 2x - 9y + 19 = 0 \end{cases}$ и решим её по правилу Крамера: $\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & -9 \end{vmatrix} = -75$, $\Delta x = \begin{vmatrix} 56 & 6 \\ -19 & -9 \end{vmatrix} = -390$, $\Delta y = \begin{vmatrix} 7 & 56 \\ 2 & -19 \end{vmatrix} = -245$, $x = -\frac{390}{-75} = \frac{26}{5}$, $y = -\frac{245}{-75} = \frac{49}{15}$.

Таким образом, имеем $N(\frac{26}{5}, \frac{49}{15})$.

5) Так как прямая, проходящая через вершину C , параллельна стороне AB , то их угловые коэффициенты равны $-k_1 = \frac{6}{7}$. Тогда по точке C и угловому коэффициенту k_1 составим уравнение прямой CD :

$$y - 7 = \frac{6}{7}(x - 2) \text{ или } 6x - 7y + 37 = 0.$$

Ответ: 1) $6x - 7y - 3 = 0$,

2) $7x + 6y - 56 = 0$,

$$3) 2x - 9y + 19 = 0,$$

$$4) \left(\frac{26}{5}, \frac{49}{15}\right),$$

$$5) 6x - 7y + 37 = 0.$$

2. Составить каноническое уравнение:

1) эллипса, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}, 0)$,

2) гиперболы с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}, 0)$,

3) параболы, имеющей директрису $x = -3$.

Решение.

1) Каноническое уравнение эллипса имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

По условию большая полуось $a = 3$, $c = \sqrt{5}$. Так как для эллипса $b^2 = a^2 - c^2$, то найдём $b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4$. Искомое уравнение эллипса $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

2) Каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

По условию $b = 2$, $c = \sqrt{13}$ для гиперболы $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому $a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9$. Искомое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

3) Каноническое уравнение параболы в данном случае имеет вид $y^2 = 2px$, а уравнение её директрисы — $x = -\frac{p}{2}$. По условию уравнение директрисы $x = -3$. Следовательно, $-\frac{p}{2} = -3$, $p = 6$. Искомое уравнение параболы: $y^2 = 12x$.

Ответ: 1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$; 2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$; 3) $y^2 = 12x$.

3.10. Прямая и плоскость в пространстве

3.10.1. Векторное уравнение плоскости

Пусть плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна вектору $\vec{n} = (A, B, C)$; точка $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда векторы \vec{n} и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны, т. е.

$$\vec{n} \overrightarrow{M_0M} = 0. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24) – векторное уравнение плоскости, ненулевой вектор \vec{n} называется нормальным вектором плоскости.

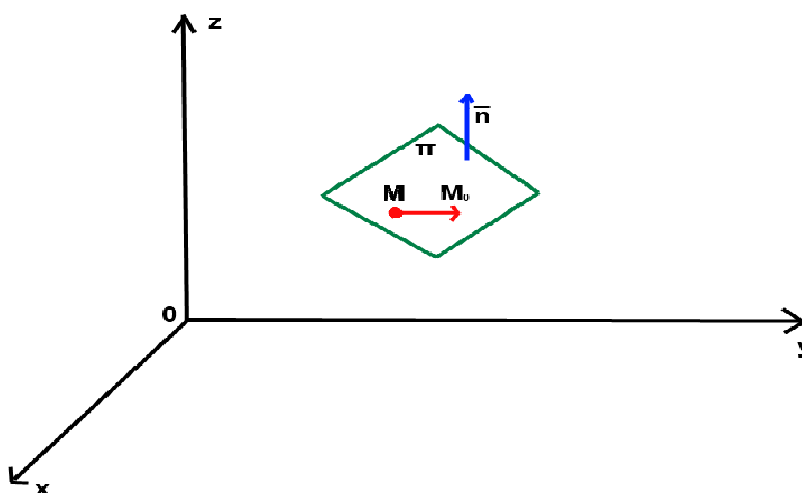


Рис. 3.22

Запишем векторное уравнение плоскости в координатной форме:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0) = 0. \quad (3.25)$$

3.10.2. Общее уравнение плоскости

Перепишем иначе уравнение (3.25):

$$Ax+By+Cz+D = 0, \quad (3.26)$$

где $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Уравнение (3.26) называется общим уравнением плоскости; оно является уравнением 1-й степени с тремя неизвестными.

Частные случаи уравнения (3.26) приведены в следующей таблице:

№	Значения коэффициентов	Уравнение плоскости	Положение плоскости
1	$D=0$	$Ax+By+Cz=0$	Плоскость проходит через начало координат
2	$A=0, B \neq 0, C \neq 0$	$By+Cz+D=0$	Плоскость параллельна оси Ox
3	$B=0, A \neq 0, C \neq 0$	$Ax+Cz+D=0$	Плоскость параллельна оси Oy
4	$C=0, A \neq 0, B \neq 0$	$Ax+By+D=0$	Плоскость параллельна оси Oz
5	$A=0, B=0, C \neq 0$	$Cz+D=0$	Плоскость параллельна плоскости Oxy
6	$A=0, C=0, B \neq 0$	$By+D=0$	Плоскость параллельна плоскости Oxz
7	$B=0, C=0, A \neq 0$	$Ax+D=0$	Плоскость параллельна плоскости Oyz
8	$C=0, D=0$	$Ax+By=0$	Плоскость проходит через ось Oz
9	$B=0, D=0$	$Ax+Cz=0$	Плоскость проходит через ось Oy
10	$A=0, D=0$	$By+Cz=0$	Плоскость проходит через ось Ox

Заметим, что для построения плоскости достаточно получить какие-нибудь три точки данной плоскости, например, точки пересечения с осями координат (если плоскость не параллельна ни одной из осей) и не проходит через начало координат.

3.10.3. Уравнение плоскости в отрезках

Если точки $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$ – точки пересечения плоскости π с осями Ox , Oy , Oz соответственно (a,b,c не равны нулю), то уравнение плоскости имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (3.27)$$

3.10.4. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть плоскость π проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.

Введём в рассмотрение векторы, лежащие в плоскости π :
 $\overline{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, $\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$,
 $\overline{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$. Тогда согласно условию компланарности векторов имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.28)$$

Пример 3.7.

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 2, 3)$ и:

- 1) перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-3, 4, 5)$,
- 2) параллельной плоскости $2x - 3y + 5z + 6 = 0$,
- 3) точку $M_2(2, 0, 5)$ и параллельной оси Ox ,
- 4) проходящей через ось Oy .

Решение.

1) Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n} = (-3, 4, 5)$ и проходящей через точку $M_1(-1, 2, 3)$, согласно формуле (3.25), имеем вид: $-3(x+1) + 4(y-2) + 5(z-3) = 0$ или $-3x + 4y + 5z - 26 = 0$, или $3x - 4y - 5z + 26 = 0$.

2) Плоскость, параллельная плоскости $2x-3y+5z+6=0$ перпендикулярна вектору $\vec{n} = (-3, 4, 5)$. Уравнение такой плоскости, проходящей через данную точку $M_1(-1, 2, 3)$, получено в п. 3.4.1.

3) Так как плоскость параллельна оси Ox , то в уравнении (3.26) коэффициент $A = 0$, т. е. уравнение плоскости имеет вид $Bu+Cz+D=0$. Точки $M_1(-1, 2, 3)$ и $M_2(2, 0, 5)$ лежат на плоскости. Поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению, т. е.
$$\begin{cases} 2B + 3C + D = 0, \\ 5C + D = 0. \end{cases}$$

Откуда $B = C$, $D = -5C$; следовательно, уравнение плоскости: $(y+z-5)C = 0$, $C \neq 0$, или $y+z-5=0$.

4) Так как плоскость проходит через ось Oy , то в уравнении (3.26) её коэффициенты $B = 0$, $D = 0$, т. е. уравнение плоскости имеет вид $Ax+Cz=0$. Подставив в уравнение координаты точки $M_1(-1, 2, 3)$, лежащей на плоскости, получим: $-A+3C=0$, откуда $A=3C$ и уравнение плоскости (после сокращения на $C \neq 0$): $3x+z=0$.

3.10.5. Угол между двумя плоскостями.

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$\begin{aligned} \pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \\ \pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Углом между двумя плоскостями называется один из двугранных углов, образуемых этими плоскостями.

Угол φ между нормальными векторами \vec{n}_1 и \vec{n}_2 равен одному из этих двугранных углов. Поэтому:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n}_1 \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \quad (3.30)$$

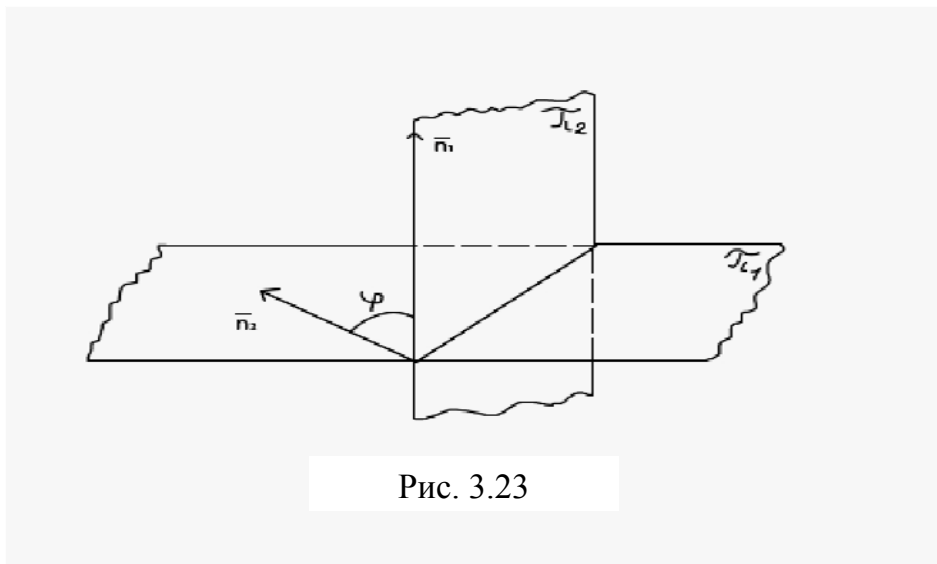


Рис. 3.23

Получим условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей π_1 и π_2 :

$$1) \pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

$$2) \pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \Leftrightarrow \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Пример 3.8.

Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(1,1,-1)$ параллельно плоскости $3x+2y-z+4=0$.

Решение.

Нормальный вектор $\overline{n_1} = (3, 2, -1)$ данной плоскости будет нормальным вектором плоскости, уравнение которой нужно составить. Поэтому искомое уравнение имеет вид $3(x-1)+2(y-1)-(z+1)=0$ или $3x+2y-z-6=0$.

Ответ: $3x+2y-z-6=0$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ равно $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Пример 3.9.

Найти угол между плоскостями $3x+2y-z+4=0$ и $x+2y-z+10=0$.

Решение.

Найдём косинус угла φ между нормальными векторами:

$$\vec{n} = (3, 2, -1) \text{ и } \vec{n}_2 = (1, 2, -1):$$

$$\cos \varphi = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{14} \sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{7} \sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{21}},$$

$$\text{отсюда } \varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

$$\text{Ответ: } \varphi = \arccos \frac{4}{\sqrt{21}}.$$

3.10.6. Уравнения прямой в пространстве

Положение прямой в пространстве определяется, если дана какая-нибудь точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой L и вектор $\vec{S} \parallel L$, называемый направляющим вектором прямой L

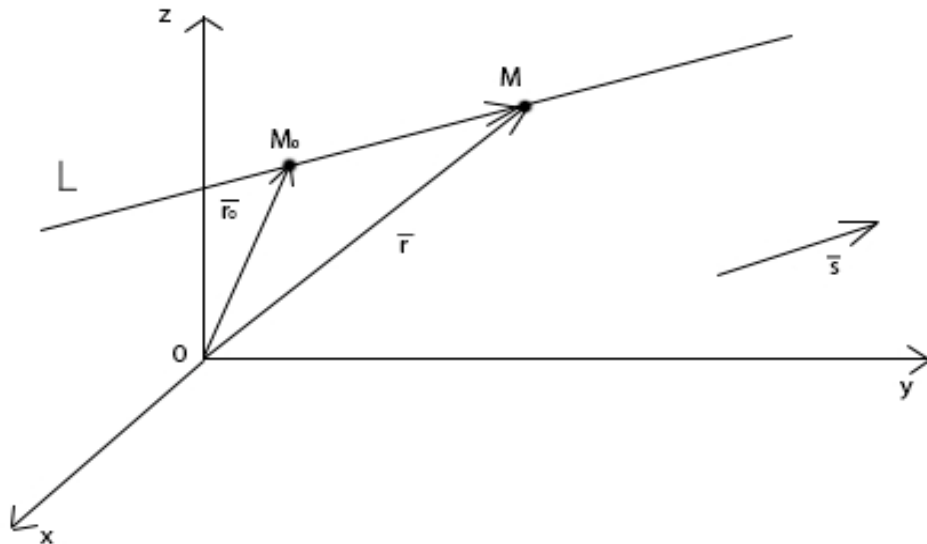


Рис. 3.24

Возьмём на прямой L произвольную точку $M(x,y,z)$. Обозначим через \bar{r}_0 и \bar{r} радиус-векторы точек M_0 и M соответственно. Тогда

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{M_0M}. \quad (3.31)$$

Вектор $\overline{M_0M} \parallel \bar{S}$. Поэтому $\overline{M_0M} = t\bar{S}$, где t – скаляр, называется параметром. Уравнение (3.31) можно переписать таким образом:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{S}. \quad (3.32)$$

Уравнение (3.32) называется векторным уравнением прямой.

Из уравнения (3.32) можно получить другие виды уравнений прямой:

$$1) \begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tp, \\ z = z_0 + tq. \end{cases} \quad (3.33)$$

Уравнения (3.33) называются параметрическими уравнениями прямой.

$$2) \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q}, \quad (3.34)$$

где $\bar{S} = (m, p, q)$ – направляющий вектор прямой.

Уравнения (3.34) называются каноническими уравнениями прямой.

$$3) \frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (3.35)$$

Уравнения (3.35) – уравнения прямой, проходящей через две точки.

Любую прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух не параллельных плоскостей, т. е. совместной системой двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Уравнения (3.36) называются общими уравнениями прямой в пространстве.

Пример 3.10.

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1,0,2)$ параллельно вектору $\bar{S} = (0,0,1)$.

Решение.

Согласно формуле (3.34) имеем: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Ответ: $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Заметим, что запись $\frac{x+1}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ означает, что прямая проходит через точку $M_0(-1,0,2)$ и её направляющий вектор $\bar{S} = (0,0,1)$. Нули в знаменателях в данном случае не означают деление на нуль.

Ниже покажем, как из общих уравнений прямой (3.36) перейти к каноническим (3.34). Это можно сделать двумя способами.

Первый способ. Координаты точки M_0 , лежащей на прямой L , можно получить из системы (3.36), придав одной из координат точки M_0 произвольное значение.

Так как векторы \bar{n}_1 и \bar{n}_2 перпендикулярны прямой L , то за направляющий вектор \bar{S} прямой L можно принять вектор $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$,

$$\text{т. е. } \bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Второй способ. Нужно взять две какие-нибудь точки на прямой L и применить уравнения (3.35).

Пример 3.11.

Написать канонические уравнения прямой $\begin{cases} x + y + z - 1 = 0, \\ 2x + y + 3z - 2 = 0. \end{cases}$

Решение.

Первый способ. Пусть $z = 0$, тогда $\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases}$, точка M_0 имеет координаты: $M_0(1,0,0)$.

Найдём координаты направляющего вектора $\bar{S} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$ прямой.

$$\begin{aligned}\bar{n}_1 &= (1,1,1), \bar{n}_2 = (2,1,3): \bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \bar{k} = 2\bar{i} - \bar{j} - \bar{k} = (2, -1, -1).\end{aligned}$$

Итак, искомое уравнение: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}$.

Второй способ. Возьмём две точки M_1 и M_2 на прямой. Координаты точек M_1 и M_2 получим, решив системы:

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1, \\ 2x + y = 2 \end{cases}, \text{ и } \begin{cases} x = 0, \\ y + z = 1, \\ y + 3z = -4. \end{cases}$$

Решим 1-ю систему:

$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases} \begin{cases} z = 0, \\ x = 1, \\ y = 0 \end{cases}, \text{ точка } M_1 \text{ имеет координаты: } M_1 (1,0,0).$$

Решим 2-ю систему:

$$\begin{cases} x = 3, \\ y + z = -2, \\ y + 3z = -4 \end{cases}, \begin{cases} x = 3, \\ z = -1, \\ y = -1. \end{cases} \text{ Точка } M_2 \text{ имеет координаты: } M_2 (3,-1,-1).$$

Вектор $\overline{M_1 M_2} = (3 - 1, -1 - 0, -1 - 0) = (2, -1, -1)$ – направляющий вектор прямой.

Итак, канонические уравнения прямой:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

3.10.7. Угол между прямыми в пространстве.

Условия параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы своими каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{p_1} = \frac{z-z_1}{q_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{p_2} = \frac{z-z_2}{q_2},$$

$\bar{S}_1 = (m_1, p_1, q_1), \bar{S}_2 = (m_2, p_2, q_2)$ – направляющие векторы прямых L_1 и L_2 соответственно (рис. 3.25).

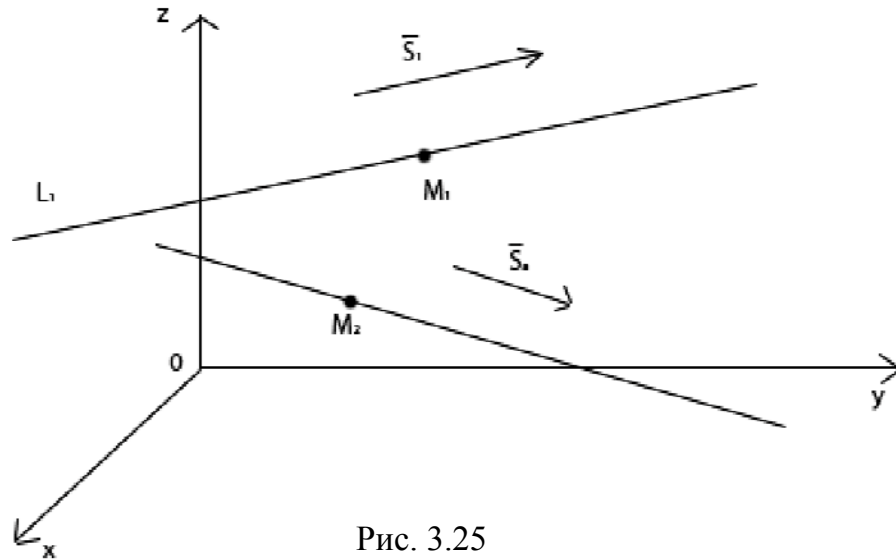


Рис. 3.25

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами \bar{S}_1 и \bar{S}_2 . Поэтому:

$$\cos \varphi = \frac{|\bar{S}_1 \bar{S}_2|}{|\bar{S}_1| |\bar{S}_2|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + q_1^2} \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + q_2^2}}. \quad (3.37)$$

Отсюда можно получить условия параллельности и перпендикулярности прямых L_1 и L_2 :

- 1) $L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \bar{S}_1 \parallel \bar{S}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{q_1}{q_2},$
- 2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \bar{S}_1 \bar{S}_2 = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + p_1 p_2 + q_1 q_2 = 0.$

Пример 3.12.

Найти косинус угла между прямыми:

$$L_1: \frac{x+2}{1} = \frac{y-10}{-2} = \frac{z-1}{3} \quad \text{и} \quad L_2: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{-1}.$$

Решение.

Найдём направляющие векторы прямых:

$$\bar{S}_1 = (1, -2, 3), \quad \bar{S}_2 = (1, -2, -1).$$

Тогда согласно (3.37) имеем:

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{21}}.$

Пример 3.13.

Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(1, -2, 1)$ и перпендикулярно прямым $\frac{x-5}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z}{-4}$ и $x = y = -z$.

Решение.

Так как направляющий вектор \bar{S} прямой должен быть перпендикулярным обоим данным прямым, то в качестве вектора \bar{S} можно взять векторное произведение направляющих векторов данных прямых:

$$\bar{S} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i} - 2\bar{j} - \bar{k} = (1, -2, -1).$$

Параметрические уравнения прямой имеют вид $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 - 2t, \\ z = 1 - t. \end{cases}$

3.10.8. Угол между прямой и плоскостью.

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Пусть плоскость π и прямая L заданы уравнениями:

$$\begin{aligned} \pi: Ax + By + Cz + D &= 0, \\ L: \frac{x - x_0}{m} &= \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{q}. \end{aligned}$$

Углом между прямой и плоскостью называется любой из двух смежных углов, образованных прямой и её проекцией на плоскость.

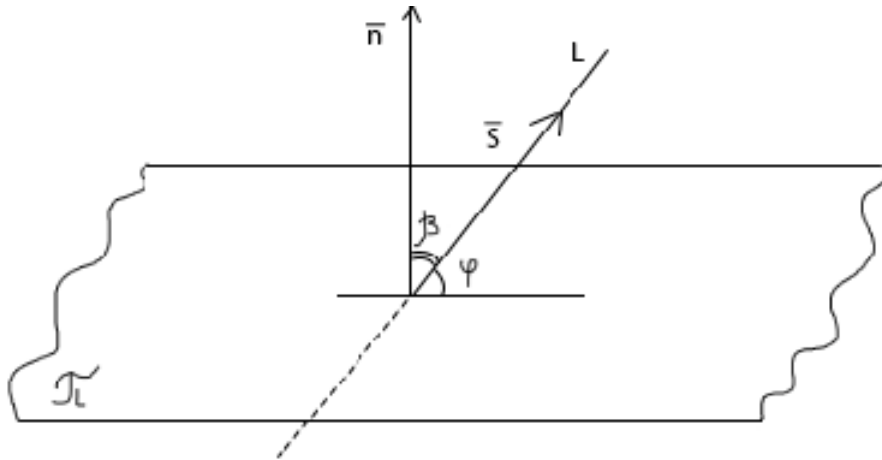


Рис. 3.26

Обозначим через φ угол между прямой L и плоскостью π , а β – угол между векторами $\vec{S} = (m, p, q)$ и $\vec{n} = (A, B, C)$.

Тогда $\cos\beta = \frac{\vec{n} \cdot \vec{S}}{|\vec{n}| |\vec{S}|}$. Найдём $\sin\varphi$ (считая $\varphi = \frac{\pi}{2}$): $\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\beta$. Отсюда с учётом, что $\sin\varphi \geq 0$, получаем:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bp + Cq|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + p^2 + q^2}}. \quad (3.38)$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости:

- 1) $L \perp \pi \Leftrightarrow \vec{S} \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{p} = \frac{C}{q}$,
- 2) $L \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{S} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{S} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow Am + Bp + Cq = 0$.

3.10.9. Пересечение прямой с плоскостью.

Условия принадлежности прямой плоскости

Для того чтобы найти точку пересечения прямой L

$$L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{q} \quad (3.39)$$

с плоскостью π

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.40)$$

нужно решить систему уравнений (3.39) и (3.40), предварительно записав уравнения (3.39) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + pt, \\ z = z_0 + qt. \end{cases}$$

Подставив эти выражения для x , y и z в уравнение плоскости (3.40) и преобразовав его, получим уравнение:

$$t(Am + Bp + Cq) + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (3.41)$$

Если прямая L не параллельна плоскости π , т. е. если $Am + Bp + Cq \neq 0$, то из равенства (3.41) находим t :

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bp + Cq}.$$

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдём координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Рассмотрим случай, когда $Am + Bp + Cq = 0$ ($L \parallel \pi$). Тогда возможны следующие два случая:

$$1) F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \text{ и } 2) F = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

В случае 1) прямая L параллельна плоскости π и не пересекает плоскость, т. е. уравнение (3.41) решения не имеет (так как имеет вид $0t + k = 0$, $k \neq 0$). В случае 2) уравнение (3.41) имеет вид $t \cdot 0 + 0 = 0$, которому удовлетворяет любое значение t , и поэтому любая точка прямой является точкой пересечения прямой и плоскости. Следовательно, прямая L лежит на плоскости π . Таким образом, условие принадлежности прямой плоскости имеет вид

$$\begin{cases} Am + Bp + Cq = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Пример 3.14.

Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 2, -1)$ и перпендикулярной плоскости $3x - 4y - 5z + 1 = 0$.

Решение.

За направляющий вектор прямой можно взять нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (3, -4, 5)$, поэтому канонические уравнения прямой имеют вид: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

Ответ: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z+1}{5}$.

Пример 3.15.

Найти точки пересечения прямой $\frac{x-1}{3} = y - 2 = \frac{z-2}{5}$ с плоскостью $x + 3y + 5z = 0$.

Решение.

Запишем уравнения прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 2 + 5t, \end{cases} \quad \text{подставим эти выражения для } x, y \text{ и } z \text{ в уравнение}$$

плоскости, получим: $(-1+3t)+3(2+t)+5(2+5t) = 0$ или $31t = -17$, т. е. $t = -\frac{17}{31}$.

Искомые координаты точки пересечения:

$$x_0 = 1 + 3\left(-\frac{17}{31}\right) = -\frac{20}{31}; \quad y_0 = 2 + \left(-\frac{17}{31}\right) = \frac{45}{31}; \quad z_0 = 2 + 5\left(-\frac{17}{31}\right) = -\frac{23}{31}.$$

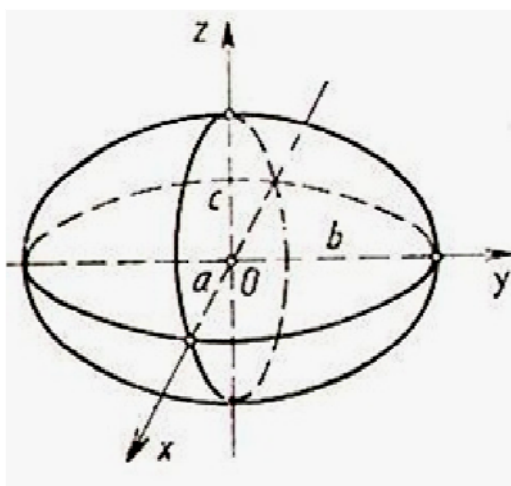
Ответ: точка пересечения $\left(-\frac{20}{31}, \frac{45}{31}, -\frac{23}{31}\right)$.

3.11. Поверхности второго порядка

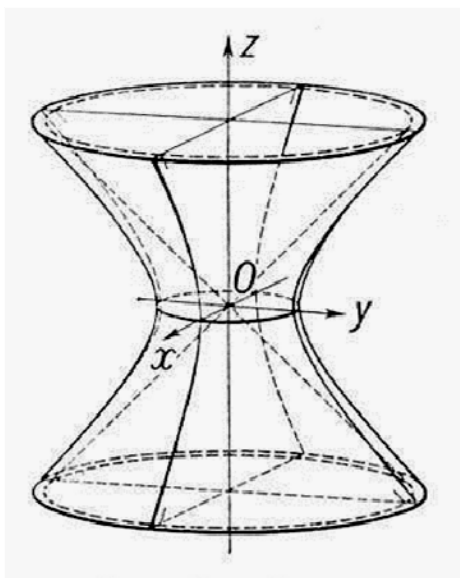
Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая алгебраическим уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z .

Поверхностью вращения второго порядка называется поверхность, полученная вращением линии второго порядка вокруг её оси симметрии.

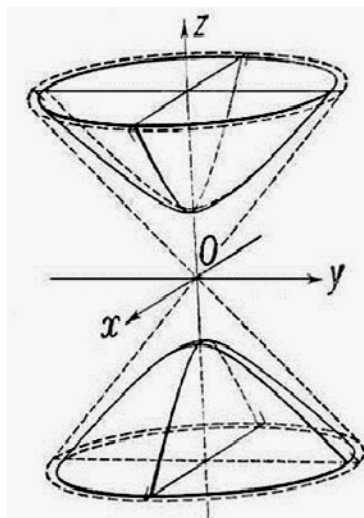
1. Эллипсоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,
 $a > 0, b > 0, c > 0$ – полуоси эллипсоида .



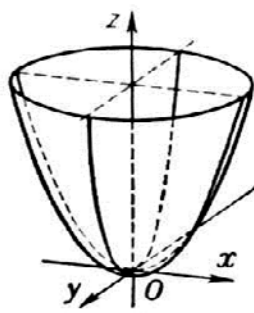
2. Однополостный гиперболоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$,
 $a > 0, b > 0, c > 0$.



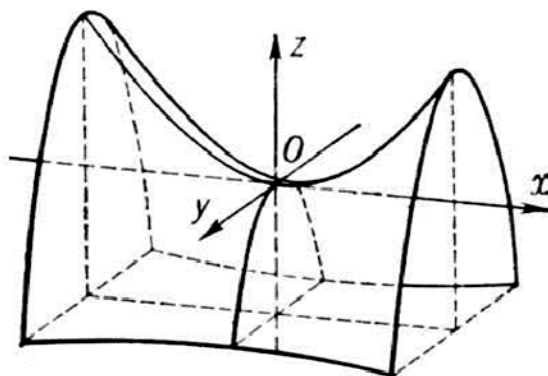
3. Двуполостный гиперболоид задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$,
 $a > 0, b > 0, c > 0$.



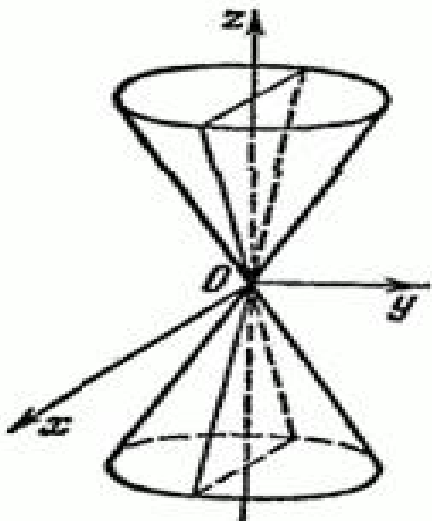
4. Эллиптический параболоид задаётся уравнением $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$,
 $a > 0, b > 0$.



5. Гиперболический параболоид задаётся уравнением $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$,
 $a > 0, b > 0$.

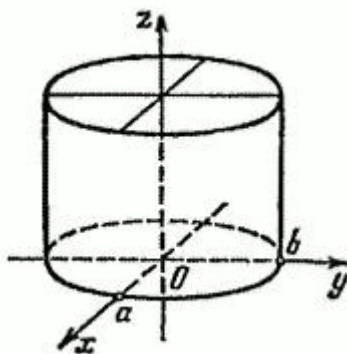


6. Конус второго порядка задаётся уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$,
 $a > 0, b > 0, c > 0$.

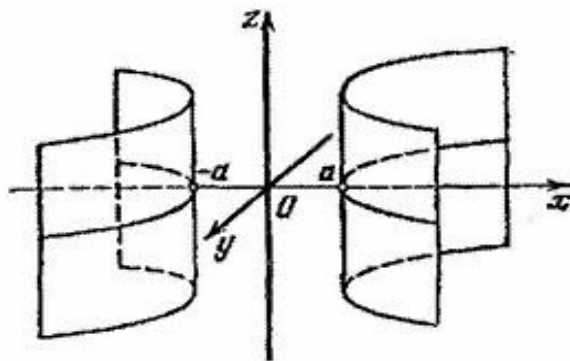


7. Цилиндры. Приведём уравнения цилиндров второго порядка:

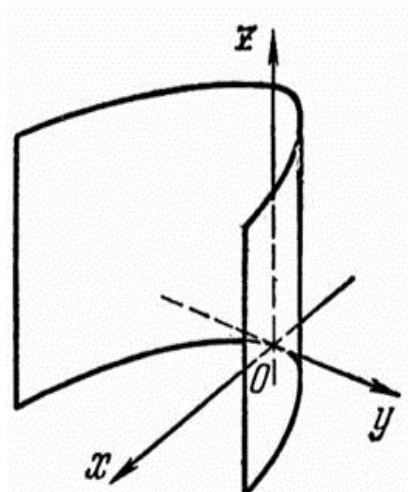
- эллиптический $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$,



- гиперболический $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, a > 0, b > 0$,



- параболический $y^2 = 2px$, $p > 0$.



3.12. Контрольные вопросы

1. Какую фигуру в пространстве описывает линейное уравнение?
2. Верно ли, что каждое уравнение вида $Ax + By + Cz = 0$ является уравнением плоскости в пространстве?
3. Верно ли, что любая плоскость в пространстве определяется своим нормальным вектором?
4. Перечислить виды уравнений прямой и плоскости в пространстве.
5. Каковы условия перпендикулярности (параллельности) прямых и плоскостей в пространстве?
6. Верно ли, что:
 - а) плоскость, проходящая через начало координат, параллельна вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, задаётся уравнением $Ax + By + Cz = 0$,
 - б) в уравнении плоскости в отрезках на осях координат параметры a, b, c – положительные.
7. Справедливы ли следующие утверждения:
 - а) эллипсоид, гиперболоид, цилиндр, конус имеют центр и три плоскости симметрии,
 - б) параболоиды и параболический цилиндр не имеют центра симметрии.

3.13. Тест «Аналитическая геометрия в пространстве»

1. Координата x_0 точки $A(x_0, 1, -7)$, принадлежащей плоскости $5x + y + z + 1 = 0$, равна:

1) 3; 2) 1; 3) 4; 4) 2.

2. Нормальный вектор плоскости $x - 4y - 8z - 3 = 0$ имеет координаты:

1) $(1, -4, -6)$; 2) $(1, -4, -3)$; 3) $(1, -4, -8)$; 4) $(-4, -8, -3)$.

3. Соответствие между уравнением плоскости и её положением в пространстве:

1) $2x + 3z + 5 = 0$; 2) $4y - z - 3 = 0$;

3) $5x + 2y - 9 = 0$; 4) $x + 2y - 2z = 0$;

a) параллельна оси Ox ;

b) параллельна оси Oz ;

c) параллельна оси Oy ;

d) проходит через начало координат.

4. Расстояние от точки $A(1, 2, -1)$ до плоскости $2x + 3y + 6z = 0$ равно:

1) 7; 2) $\frac{2}{49}$; 3) 2; 4) $\frac{2}{7}$.

5. Соответствие между уравнениями плоскостей и точками, которые лежат в этих плоскостях:

1) $2x + y - 3z + 2 = 0$;

2) $2y - z - 3x = 0$

3) $x + y - z = 0$;

4) $x + 2y + z - 4 = 0$;

a) $(-1, 0, 0)$;

b) $(0, 0, 0)$;

c) $(1, -1, 0)$;

d) $(1, 1, 1)$.

6. Уравнением плоскости в «отрезках», проходящей через точки $A(2,0,0)$, $B(0,0,1)$ и $C(0,3,0)$, является:

1) $x+6y+2z-6=0$;

2) $2x+3y+z=0$;

3) $\frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{3} = 1$;

4) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{1} = 1$.

7. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,0,-1)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y-z+5=0$, имеет вид:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$;

2) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{5}$;

3) $\frac{x+2}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{5}$;

4) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{-z+1}{1}$.

8. Даны уравнения плоскостей:

1) $2x-3y+z+3=0$;

2) $x-2y+3=0$;

3) $x+3y=0$.

Параллельными оси Oz являются

a) только 2) и 3);

b) только 3);

c) только 2);

d) ни одна;

e) только 1).

9. Через точки $M_1(1,1,0)$, $M_2(1,0,1)$ и $M_3(-1,0,0)$ проходит плоскость...

10. Сумма координат центра эллипсоида $4(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 16$ равна...

11. Из плоскостей:

1) $3x - 2y + 4 = 0$;

2) $y + z + 1 = 0$;

3) $x - 3y + z = 0$;

параллельны только оси Ox

a) только 2);

b) только 1);

c) ни одна;

d) только 1);

e) только 3).

12. Из уравнений:

1) $x + 2y - 4 = 0$;

2) $y^2 = 4x - 30$;

3) $2x + 3y + 3z = 0$;

определяют плоскость

a) только 1) и 3);

b) только 1);

c) все;

d) только 3);

e) ни одна.

13. Даны уравнения плоскостей:

1) $2x + 3y + z - 1 = 0$;

2) $x - 3y + 4z = 0$;

3) $y + z + 2 = 0$.

Через начало координат проходят:

- a) только 2);
- b) только 1) и 3);
- c) только 2) и 3);
- d) ни одна;
- e) все.

14. Центр сферы, заданной уравнением $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$:

- 1) $(-2, 1, 3)$;
- 2) $(2, -1, -3)$;
- 3) $(-2, -1, -3)$;
- 4) $(2, -1, 3)$.

15. Прямая $\frac{x-1}{a} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{5}$ параллельна плоскости $x-3y-5z = 0$ при a , равном...

- 1) 3; 2) -34; 3) -1, 4) 34.

16. Соответствие между уравнениями поверхностей и их названиями:

- 1) $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{3} = 1$;
- 2) $x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{3} = 1$;
- 3) $\frac{x^2}{4} + y^2 - \frac{z^2}{9} = -1$;
- 4) $2z = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}$;
- 5) $2z = \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4}$;

- a) эллиптический гиперболоид;
- b) однополостный гиперболоид;
- c) эллипсоид;

- d) двуполостный гиперболоид;
- e) гиперболический параболоид.

17. Соответствие между уравнениями поверхностей и их названиями:

1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$;

3) $2x = y^2$;

4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- a) круговой цилиндр;
- b) гиперболический цилиндр;
- c) эллиптический цилиндр;
- d) параболический цилиндр.

18. Направляющий вектор прямой $\frac{x}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{x+4}{2}$:

- 1) (0,5,-4);
- 2) (0,-5,4);
- 3) (2,3,2);
- 4) нет верного ответа.

19. Прямая $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ проходит через точку:

- 1) (1,1,1);
- 2) (0,2,2);
- 3) (0,-2,-1);
- 4) нет ответа.

20. Дана плоскость $x+z+5=0$. Параллелен плоскости вектор:

- 1) (1,0,1);
- 2) (1,1,5);

3) $(1, 2, -1)$;

4) $(1, 1, 1)$.

21. Соответствие между утверждениями относительно плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (1), $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (2),

прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и их признаками:

1) плоскости параллельны;

2) плоскости перпендикулярны;

3) плоскость (1) и прямая параллельны;

4) плоскость (1) и прямая перпендикулярны;

a) $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

b) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$;

c) $A_1m+B_1n+C_1p=0$;

d) $\frac{A_1}{m} = \frac{B_1}{n} = \frac{C_1}{p}$.

22. Плоскости $2x-3y+z-4=0$ и $mx+6y+kz+5=0$ параллельны, если:

1) $m=-4, k=2$;

2) $m=-4, k=-2$;

3) $m=2, k=-4$;

4) $m=-2, k=-4$.

23. Угол между плоскостями $x+y-\sqrt{2}z+5=0$ и $x-y-\sqrt{2}z-3=0$ равен:

1) $\arccos \frac{1}{4}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{\pi}{6}$; 4) $\frac{2}{3}\pi$.

24. Координаты точки пересечения прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ и плоскости $x+y+z-2=0$ равны...

25. Угол между прямой $\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$ и плоскостью $x+y+z-2=0$ равен:

1) $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}$; 2) $\pi - \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$; 3) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$; , 4) нет ответа.

3.14. Задачи

3.37. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,-2,3)$ и:

- 1) перпендикулярной вектору $\vec{n} = (3,4,5)$;
- 2) точку $B(0,2,5)$ и параллельной оси Oy ;
- 3) параллельной плоскости $3x-4y+5z+6=0$;
- 4) проходящей через ось Oz .

3.38. Составить уравнение плоскости, проходящей через:

- 1) точки $A(1,2,3)$, $B(4,-1,-2)$ и $C(4,0,3)$;
- 2) точки $A(1,2,3)$, $B(4,-1,-2)$ параллельно вектору $\vec{a} = (6, -8, 10)$;
- 3) точку $A(1,2,3)$ параллельно двум данным векторам $\vec{a} = (6, -8, 10)$ и $\vec{b} = (4, -3, 5)$.

3.39. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(-1,-1,2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $x-2y+z-4=0$ и $x+2y-2z+4=0$.

3.40. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $A(3,5,-2)$ параллельно плоскости $5x-3y+2z-6=0$.

3.41. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точки $A(1,4,-5)$ и $B(4,2,-3)$ перпендикулярно к плоскости $3x+5y-6z-8=0$.

3.42. Вычислить расстояние от точки M до заданной плоскости, если:

1) $M(-1, 2, 1)$ и $x - 2y - 2z - 2 = 0$;

2) $M(5, 6, 4)$ и $x + 3y + 4z - 13 = 0$.

3.43. Определить углы между заданными плоскостями:

1) $8x - 2y - 7z + 2 = 0$ и $7x + 8y - 11z + 6 = 0$;

2) $x - 2y + 2z + 1 = 0$ и $3x + 3y - 3z - 4 = 0$.

3.44. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(-1, 1, -3)$ параллельно вектору $\vec{S} = (1, -3, 4)$.

3.45. Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2, -1, -1)$ и $M_2(3, 3, -1)$.

3.46. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $A(1, -3, 5)$ параллельно прямой $\begin{cases} x + 3y - 2z + 3 = 0, \\ 3x - y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

3.47. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $M(3, -2, 4)$ перпендикулярно плоскости $5x + 3y - 7z + 0$.

3.48. Составить канонические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 15 = 0, \\ 2x + 3y - 4z - 12 = 0. \end{cases}$$

3.49. Составить параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0, \\ x + 2y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

3.50. Составить канонические уравнения прямой, которая:

1) проходит через точку $A(1, -2, 5)$ параллельно оси Ox ;

2) проходит через точку $M(-3, 2, 1)$ параллельно прямой

$$\frac{x-5}{-1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4};$$

3) проходит через точку $A(4, -5, 6)$ параллельно прямой

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 - 2t, \\ z = 5 - 4t; \end{cases}$$

4) проходит через точку $A(3, -1, 8)$ перпендикулярно плоскости

$$2x - 2y + z - 6 = 0;$$

5) проходит через точки $M_1(2, -3, 1)$ и $M_2(4, -2, 6)$.

3.51. Определить острый угол между прямыми:

$$1) \begin{cases} x = 7t - 2, \\ y = 2t + 3, \\ z = -8t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 11t - 1, \\ y = -8t + 4, \\ z = -7t + 5; \end{cases}$$

$$2) \frac{x+2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-1}{\sqrt{2}}.$$

3.52. Вычислить угол между прямой и плоскостью:

$$1) \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{-2} \quad \text{и} \quad 6x - 9y - 6z + 10 = 0;$$

$$2) \begin{cases} x = 5t + 4, \\ y = 3t - 3, \\ z = -8t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2x - 3y - 6z - 5 = 0.$$

3.53. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

$$1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6} \quad \text{и} \quad 2x + 3y + z - 1 = 0;$$

$$2) x = 2t - 1, y = t + 2, z = 1 - t \quad \text{и} \quad 3x - 2y + z - 3 = 0.$$

3.54. Вычислить расстояние от точки $A(2, 3, -1)$ до прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-13}{4}.$$

3.55. Составить уравнение сферы, если:

- 1) она имеет центр $C(0,0,0)$ и радиус $R = 9$;
- 2) она имеет центр $C(5,-3,7)$ и радиус $R = 2$;
- 3) она проходит через начало координат и имеет центр $C(4,-4,-2)$;
- 4) она проходит через точку $A(2,-1,-3)$ и имеет центр $C(3,-2,1)$;
- 5) центром сферы является начало координат, и плоскость $16x-15y-12z+75 = 0$ является касательной к сфере;
- 6) она имеет центр $C(3,-5,-2)$, и плоскость $2x-y-3z+11 = 0$ является касательной к сфере.

3.56. Определить координаты центра C и радиус R сферы:

- 1) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 19 = 0$;
- 2) $x^2 + y^2 + z^2 - 6z = 0$;
- 3) $x^2 + y^2 + z^2 + 20y = 0$.

3.57. Выяснить, какую поверхность определяют следующие уравнения:

- 1) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{8} + \frac{z^2}{6} = 1$;
- 2) $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{12} = -1$;
- 3) $y^2 - 9 = 0$;
- 4) $2x^2 + y^2 = z$.

3.58. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

- 1) $x^2 + y^2 = 4$;
- 2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{26} = 1$;
- 3) $x^2 - y^2 = 1$;
- 4) $y^2 = 2x$;
- 5) $z^2 = y$;
- 6) $z + x^2 = 0$;

$$7) x^2 + y^2 = 2y;$$

$$8) x^2 + y^2 = 0;$$

$$9) x^2 - z^2 = 0;$$

$$10) y^2 = xy.$$

3.59. По какой линии пересекается конус $x^2 - y^2 + z^2 = 0$ с плоскостями:

$$1) y = 3;$$

$$2) z = 1;$$

$$3) x = 0.$$

3.15. Ответы

$$3.37. 1) 3x+4y+5z-10 = 0;$$

$$2) 2x+z-5 = 0;$$

$$3) 3x-4y+5z-26 = 0;$$

$$4) 2x+y = 0.$$

$$3.38. 1) 10x+15y-3z-31 = 0;$$

$$2) 35x+30y+32-104 = 0;$$

$$3) 5x-5y-7z+26 = 0.$$

$$3.39. 2x+3y+4z-3 = 0.$$

$$3.40. 5x-3y+2z+4 = 0.$$

$$3.41. 2x+24y+21z+7 = 0.$$

$$3.42. 1) d = 3; \quad 2) d = \sqrt{26}.$$

$$3.43. 1) \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 2) \alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$3.44. \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{4}.$$

$$3.45. \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+1}{0}.$$

$$3.46. \frac{x-1}{-2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-5}{5}.$$

$$3.47. \frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-4}{-7}.$$

$$3.48. \frac{x+3}{-1} = \frac{y-6}{10} = \frac{z}{7}.$$

$$3.49. \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 3t. \\ z = -1 + 5t. \end{cases}$$

$$3.50. 1) \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-5}{0};$$

$$2) \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{4};$$

$$3) \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-6}{-4};$$

$$4) \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-8}{1};$$

$$5) \frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{5}.$$

$$3.51. 1) \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad 2) \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$3.52. 1) \alpha = \frac{\pi}{2}; \quad 2) \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

$$3.53. 1) (2, -3, 6); \quad 2) (5, 5, -2).$$

$$3.54. d = 6.$$

$$3.55. 1) x^2 + y^2 + z^2 = 81;$$

$$2) (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 4;$$

$$3) (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+2)^2 = 36;$$

$$4) (x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 18;$$

$$5) x^2 + y^2 + z^2 = 9;$$

$$6) (x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 21.$$

$$3.56. 1) C(2, 1, -1), R = 5;$$

$$2) C(0, 0, 3), R = 3;$$

$$3) C(0, -10, 0), R = 10.$$

3.57. 1) однополостный гиперболоид вращения, который получается вращением гиперболы $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{6} = 1$, лежащей в плоскости Oxy , вокруг оси Oy ;

2) гиперболический цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox , а направляющей является гипербола $\frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{12} = -1$, лежащей в плоскости Oyz ;

3) пара параллельных плоскостей $y = 3$ и $y = -3$;

4) эллиптический параболоид с осью симметрии Oz .

3.58. 1) круговой цилиндр;

2) эллиптический цилиндр;

3) гиперболический цилиндр;

4) параболический цилиндр;

5) параболический цилиндр;

6) параболический цилиндр;

7) круговой цилиндр;

8) ось Oz $x = 0, y = 0$;

9) две биссекториальные плоскости: $x = z$ и $x = -z$;

10) две плоскости $y = 0$ и $y = x$.

$$3.59. 1) \begin{cases} x^2 + z^2 = 9, \\ y = 3 \end{cases} - \text{окружность};$$

$$2) \begin{cases} y^2 - x^2 = 1, \\ z = 1 \end{cases} - \text{гипербола};$$

$$3) \begin{cases} z^2 - y^2 = 0, \\ x = 0 \end{cases} - \text{две прямые}.$$

3.16. Типовой расчёт «Аналитическая геометрия в пространстве»

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A, B, C , и найти вектор нормали к этой плоскости:

№ вар.	A	B	C
1	(1;2;5)	(0;7;2)	(0;2;7)
2	(2;4;10)	(4;10;2)	(2;8;4)
3	(3;6;5)	(6;9;4)	(2;10;10)
4	(4;5;4)	(8;7;4)	(6;10;4)
5	(5;6;6)	(-2;8;2)	(6;8;9)
6	(6;8;2)	(5;2;6)	(5;7;4)
7	(7;6;5)	(4;9;5)	(4;6;11)
8	(8;2;2)	(5;7;7)	(5;3;1)
9	(9;6;4)	(10;5;5)	(5;6;8)
10	(10;7;3)	(6;5;8)	(3;5;8)
11	(1;1;1)	(1;0;2)	(1;2;0)
12	(1;2;0)	(4;3;5)	(7;2;1)
13	(1;3;-3)	(3;2;1)	(4;3;1)
14	(1;4;2)	(2;3;1)	(3;2;1)
15	(1;5;-1)	(3;4;1)	(4;2;1)
16	(1;6;-2)	(2;-1;-2)	(4;0;1)
17	(1;7;3)	(3;0;-1)	(5;1;-2)

Окончание

№ вар.	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
18	(1;8;2)	(-1;3;2)	(-2;1;4)
19	(1;9;-5)	(-2;1;5)	(-1;2;8)
20	(2;0;1)	(4;-2;1)	(6;-1;1)
21	(2;4;-3)	(1;4;-3)	(3;5;1)
22	(3;0;1)	(6;0;1)	(7;2;3)
23	(-3;-4;5)	(-3;-4;5)	(-2;-1;3)
24	(5;-1;2)	(5;-1;2)	(2;3;0)
25	(1;-4;-3)	(1;-4;-3)	(3;-6;-4)
26	(0;3;5)	(0;3;5)	(-1;4;3)
27	(-4;5;0)	(-4;5;0)	(-3;0;-1)
28	(2;4;7)	(2;4;7)	(0;5;7)
29	(8;-3;2)	(8;-3;2)	(10;-1;6)
30	(-5;4;3)	(-5;4;3)	(-5;7;5)

2. Найти точку пересечения прямой и плоскости:

№ вар.	Прямая	Плоскость
1	$\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{1}$	$2x-y+3z+4=0$
2	$\frac{x-4}{3} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-10}{3}$	$x+y-z+7=0$
3	$\frac{x-6}{5} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+2}{-5}$	$2x+3y+z+10=0$
4	$\frac{x-7}{2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-8}{11}$	$3x+y+4z-5=0$
5	$\frac{x-9}{7} = \frac{y}{-6} = \frac{z-18}{18}$	$5x-3y-z+8=0$

№ вар.	Прямая	Плоскость
6	$\frac{x-4}{2} = \frac{y-1}{8} = \frac{z-11}{14}$	$x-2y+3z-7=0$
7	$\frac{x-4}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-6}{6}$	$x+3y+4z-11=0$
8	$\frac{x-13}{12} = \frac{y-5}{10} = \frac{z-3}{6}$	$4x+2y-3z-3=0$
9	$\frac{x-7}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z-7}{8}$	$7x-2y+4z-8=0$
10	$\frac{x-4}{-8} = \frac{y-9}{-1} = \frac{z+9}{-19}$	$2x+3y-5z-4=0$
11	$\frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+7}{-8}$	$x-2y+3z+10=0$
12	$\frac{x+3}{1} = \frac{y+9}{-12} = \frac{z-15}{12}$	$2x+5y-6z+11=0$
13	$\frac{x+8}{2} = \frac{y-8}{4} = \frac{z+5}{-7}$	$x-3y+7z+8=0$
14	$\frac{x+6}{-7} = \frac{y-9}{11} = \frac{z+16}{-16}$	$2x-4y+9z-10=0$
15	$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+3}{-5} = \frac{z-11}{7}$	$3x+5y-z-6=0$
16	$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-3}{13} = \frac{z+2}{-2}$	$3x-y+5z-25=0$
17	$\frac{x+3}{-7} = \frac{y-2}{6} = \frac{z-1}{-4}$	$2x-3y-z-15=0$
18	$\frac{x+2}{-1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-5}{3}$	$2x+2y+z+8=0$
19	$\frac{x-4}{5} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+1}{-2}$	$x-4y-2z+3=0$
20	$\frac{x-5}{8} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{7}$	$3x-2y+4z+37=0$

Окончание

№ вар.	Прямая	Плоскость
21	$\frac{x}{-5} = \frac{y+4}{-9} = \frac{z-3}{5}$	$4x+3y-z-37=0$
22	$\frac{x-3}{10} = \frac{y+2}{-7} = \frac{z-4}{0}$	$3x-4y+2z+33=0$
23	$\frac{x-2}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{-10}$	$5x+2y+3z-39=0$
24	$\frac{x+5}{0} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-2}{-3}$	$x-5y-4z+40=0$
25	$\frac{x+7}{-6} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$	$6x+y-2z-1=0$
26	$\frac{x-6}{5} = \frac{y-4}{9} = \frac{z+2}{-1}$	$7x+4y-3z+10=0$
27	$\frac{x-8}{7} = \frac{y-3}{5} = \frac{z-1}{4}$	$2x+6y-4z-2=0$
28	$\frac{x-1}{0} = \frac{y-9}{7} = \frac{z+7}{-5}$	$8x-6y+2z+8=0$
29	$\frac{x-2}{8} = \frac{y+6}{-7} = \frac{z-8}{7}$	$2x-y+9z+4=0$
30	$\frac{x+7}{9} = \frac{y+8}{-7} = \frac{z-4}{6}$	$9x+7y-6z-23=0$

3. Определить вид (название) поверхности:

№ вар.	1)	2)
1	$4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$	$x^2 + 4z = 0$
2	$3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$	$x^2 + 2y^2 - 2z = 0$
3	$-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$	$y^2 + 4z^2 = 5x^2$
4	$4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$	$x^2 - y = -9z^2$
5	$x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$	$7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$

№ вар.	1)	2)
6	$z=8-x^2-4y^2$	$4x^2+9y^2+36z^2=72$
7	$4x^2+6y^2-24z^2=96$	$y^2+8z^2=30x^2$
8	$4x^2-5y^2-5z^2+40=0$	$y=5x^2+3z^2$
9	$x^2=8(y^2+z^2)$	$2x^2+3y^2-z^2=18$
10	$5z^2+2y^2=10x$	$4z^2-3y^2-5x^2+60=0$
11	$x^2-7y^2-14z^2-21=0$	$2y=x^2+4z^2$
12	$6x^2-y^2+3z^2-12=0$	$8y^2+2z^2=x$
13	$-16x^2+y^2+4z^2-32=0$	$6x^2+y^2-3z^2=0$
14	$5x^2-y^2-15z^2+15=0$	$x^2+3z=0$
15	$6x^2+y^2+6z^2-18=0$	$3x^2+y^2-3z=0$
16	$-7x^2+14y^2-z^2+21=0$	$y^2+2z^2=6x^2$
17	$-3x^2+6y^2-z^2+18=0$	$x^2-2y=-z^2$
18	$4x^2-6y^2+3z^2=0$	$4x^2-y^2-3z^2=12$
19	$z=4-x^2-y^2$	$3x^2+12y^2+4z^2=48$
20	$4x^2+5y^2-10z^2=60$	$7y^2+z^2=14x^2$
21	$9x^2-6y^2-6z^2+1=0$	$15y=10x^2+6y^2$
22	$x^2=5(y^2+z^2)$	$2x^2+3y^2-z^2=36$
23	$4x^2+3y^2=12x$	$3x^2-4y^2-2z^2+12=0$
24	$8x^2-y^2-2z^2-32=0$	$y-4z^2=3x^2$
25	$x^2-6y^2+z^2-12=0$	$x-3z^2=9y^2$
26	$2x^2-3y^2-5z^2+30=0$	$2x^2+3z=0$
27	$7x^2+2y^2+6z^2-42=0$	$2x^2+4y^2-52=0$
28	$-4x^2+12y^2-3z^2+24=0$	$2y^2+6z^2=3x$
29	$3x^2-9y^2+z^2+27=0$	$z^2-2y=4x^2$
30	$27x^2-63y^2+21z^2=0$	$3x^2-7y^2-2z^2=42$

3.17. Решение типового варианта

1. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $A(3,-1,2)$, $B(4,-1,-1)$ и $C(2,0,2)$, и найти вектор нормали к этой плоскости.

Решение.

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

и составим уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 4 - 3 & -1 + 1 & -1 - 2 \\ 2 - 3 & 0 + 1 & 2 - 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x - 3 & y + 1 & z - 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда имеем:

$3(x-3)+3(y+1)+(z-2) = 0$ или $3x+3y+z-8 = 0$ – искомое уравнение плоскости; нормальный вектор \vec{n} к плоскости имеет координаты: $\vec{n} = (3,3,1)$.

Ответ: $3x+3y+z-8 = 0$, $\vec{n} = (3,3,1)$.

2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{6}$ и плоскости $2x+3y+z-1 = 0$.

Решение.

Напишем параметрические уравнения данной прямой:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 - 2t, \\ z = 6t. \end{cases}$$

Подставим в уравнение плоскости вместо x , y и z их выражения через параметр t , найдём значение t : $2(1+t)+3(-1-2t)+6t-1 = 0$ или $2t-2 = 0$, откуда $t = 1$.

Подставим найденное значение t в уравнение прямой и найдём искомую точку M :

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = -3, \\ z = 6. \end{cases} \quad \text{Имеем } M(2, -3, 6)$$

Ответ: $(2, -3, 6)$.

3. Определить вид (название) поверхности:

$$1) -\frac{x^2}{6} + 4y^2 + \frac{y}{2}z^2 - 2 = 0,$$

$$2) 3x^2 + \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{4} = 0.$$

Решение.

1) Приведём уравнение к каноническому виду. Для этого свободный член перенесём из левой части в правую с противоположным знаком, а затем обе части уравнения поделим на 2:

$$-\frac{x^2}{12} + 2y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \quad \text{или} \quad -\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Полученное уравнение – уравнение однополостного гиперболоида.

2) Приведём данные уравнения к каноническому виду (поделим обе части уравнения на 3: $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0$. Полученное уравнение – уравнение конуса второго порядка.

Ответ: 1) $-\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{4} = 1$ – однополостный гиперболоид,

2) $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0$ – конус второго порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ.
ЗАДАЧИ С ЭКОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ

1. В трёх магазинах продаются два различных по качеству вида некоторого товара. Матрица A – объёмы продаж этих продуктов в магазинах в первом месяце, матрица B – во втором месяце.

Определить:

- 1) объём продаж за два месяца;
- 2) прирост продаж во втором месяце по сравнению с первым, если:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

- 1) Объём продаж за два месяца равен сумме матриц A и B :

$$A + B = \begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 15 & 9 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

- 2) Прирост во втором месяце по сравнению с первым равен разности матриц B и A :

$$B - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: 1) $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 15 & 9 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$ – матрица объёма продаж за два месяца,

2) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица прироста во втором месяце по

сравнению с первым.

2. В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A_{m \times n}$ задаёт объёмы продукции на каждом заводе в первом квартале матрица $B_{m \times n}$, соответственно, во втором; (a_{ij}, b_{ij}) –

объёмы продукции j -го типа на i -м заводе в первом и втором кварталах соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти:

- 1) объёмы продукции;
- 2) прирост объемов производства во втором квартале по сравнению с первым по видам продукции и заводам;
- 3) стоимостное выражение выпущенной продукции за полгода (в евро), если α – курс доллара по отношению к рублю.

3. Определить вектор X валового выпуска продукции двух отраслей, если известны матрицы прямых затрат A и вектор конечного продукта Y :

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 0,11 & 0,07 \\ 0,17 & 0,07 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 670 \\ 422 \end{pmatrix};$$

$$2) \quad A = \begin{pmatrix} 0,12 & 0,12 \\ 0,04 & 0,04 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 344 \\ 748 \end{pmatrix};$$

$$3) \quad A = \begin{pmatrix} 0,08 & 0,07 \\ 0,04 & 0,08 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 312 \\ 720 \end{pmatrix};$$

$$4) \quad A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,20 & 0,04 \\ 0,14 & 0,03 & 0,07 \\ 0,03 & 0,10 & 0,04 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 713 \\ 317 \\ 499 \end{pmatrix}.$$

4. Предприятие производит n типов продукции, объёмы выпуска заданы матрицей $A_{1 \times n}$. Цена реализации единицы i -го типа продукции в j -м регионе задана матрицей $B_{n \times 4}$, где m – число регионов, в которых реализуется продукция.

Найти C – матрицу выручки по регионам, если $A = (100, 200, 100)$;

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Цех делает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида нужно 5 кг железа и 3 кг проволоки, второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора цех получает прибыль 6 и 5 у. е. соответственно. Цех располагает 4,8 т железа и 3 т проволоки. Сколько видов продукции производит цех? Сколько видов ресурсов используется? Составить матрицу норм расхода, векторы удельной прибыли и запасов ресурсов. Рассмотреть несколько планов производства и определить, какие из них допустимы. Например, допустимы ли планы:

$$\begin{pmatrix} 500 \\ 600 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 600 \\ 600 \end{pmatrix}.$$

6. Предприятие производит n типов продукции, используя m видов ресурсов. Норма затрат ресурса i -го товара на производство единицы продукции j -го типа задана матрицей затрат $A_{m \times n}$. Пусть за определенный отрезок времени предприятие выпустило количество продукции каждого типа x_{ij} , записанное матрицей $X_{n \times 1}$.

Определить S -матрицу полных затрат ресурсов каждого вида на производство всей продукции за данный период времени, если:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 80 \\ 100 \\ 110 \end{pmatrix}.$$

7. Пусть в условии предыдущей задачи указана стоимость каждого вида ресурсов в расчете на единицу. Она задается матрицей $P_{1 \times m}$.

Определить полную стоимость всех затраченных за данный отрезок времени ресурсов, если $P = (10, 20, 20, 10)$.

8. Три завода выпускают четыре вида продукции.

Найти:

1) матрицу выпуска продукции за квартал, если заданы матрицы помесечных выпусков A_1, A_2, A_3 ;

2) найти матрицы приростов выпуска продукции за каждый месяц B_1, B_2 и проанализировать результаты:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. Найти C – матрицу выручки по регионам в условиях задачи 3, если:

$$A = (10; 30; 10; 20); \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Определить, какой из трёх регионов наиболее выгоден для реализации товара и какой наименее выгоден.

10. Предприятие производит мебель трёх видов и продает её в четырёх регионах. Матрица

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

задаёт цену реализации единицы мебели i -го типа в j -м регионе. Определить выручку предприятия в каждом регионе, если реализация мебели за месяц (по видам) задана матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 120 \\ 80 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

11. В условиях задачи 5, 6 определить:

1) полные затраты ресурсов 3-х видов на производство месячной продукции, если заданы нормы затрат матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

и объём выпуска каждого из двух типов продукции $X = \begin{pmatrix} 100 \\ 300 \end{pmatrix}$;

2) стоимость всех затраченных ресурсов, если задана стоимость единиц каждого ресурса $P = (50; 30; 20)$.

12. Некто может закупить от 1 до 4 билетов на спектакль по цене 1000 рублей и продать перед спектаклем по 2000 рублей каждый. Составить матрицу выручки продавца в зависимости от количества купленных им билетов (строка матрицы) и от результата продажи (столбец матрицы).

13. В ремонтную мастерскую поступают телефонные аппараты, 70% которых требуют малого ремонта, 20% — среднего ремонта, 10% — сложного ремонта. Статистически установлено, что 10% аппаратов, прошедших малый ремонт, через год требуют малого ремонта, 60% — среднего, 30% — сложного ремонта. Из аппаратов, прошедших средний ремонт, 20% требуют через год малого ремонта, 50% — среднего, 30% — сложного ремонта. Из аппаратов, прошедших сложный ремонт, через год 60% требуют малого ремонта, 40% — среднего. Найти доли из отремонтированных в начале года аппаратов, которые будут требовать ремонта того или иного вида: через 1 год; 2 года.

14. Завод производит двигатели, которые могут либо сразу потребовать дополнительной регулировки (в 30% случаев), либо сразу могут быть использованы (в 70% случаев). Как показывают статистические исследования, те двигатели, которые изначально требовали регулировки, потребуют дополнительной регулировки через месяц в 65% случаев, а в 35% случаев через месяц будут работать хорошо. Те же двигатели, которые не требовали первоначальной регулировки, потребуют ее через месяц в 10% случаев и продолжат хорошо работать в 90% случаев.

Какова доля двигателей, которые будут работать хорошо или потребуют регулировки через 2 месяца после выпуска?

15. Некоторое производственное объединение выпускает три вида продукции A_1 , A_2 , A_3 , в количествах, выраженных в процентах к плану, соответственно 30%, 20%, 50%. В объединении участвуют четыре предприятия P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , причем по плану предприятие P_1

должно выпустить 30% всей продукции A_1 , 40% всей продукции A_2 и 10% всей продукции A_3 . План для остальных предприятий соответственно следующий:

Предприятие	A_1	A_2	A_3
$П_2$	40%	10%	30%
$П_3$	30%	20%	30%
$П_4$	0%	50%	30%

Требуется найти процент выполнения плана объединения каждым предприятием.

16. Предприятие выпускает ежедневно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых в таблице. Требуется определить следующие ежедневные показатели: расход сырья S , затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

Вид изделия № п/п	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг	Норма времени изготовления, ч/изд.	Цена изделия, ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	40

17. Предприятие выпускает продукцию трёх видов из сырья трёх видов. Нормы расхода сырья каждого вида на единицу продукции и объём расхода сырья за один день заданы таблицей.

Найти ежедневный объем выпуска продукции каждого вида:

1)

Вид сырья	Расход, ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	5	6	3600
2	3	2	3	1950
3	6	7	10	5800

2)

Вид сырья	Расход, ед.			Расход в день
	1	2	3	
1	3	3	6	4950
2	9	9	21	16 350
3	3	2	3	300

18. Фирмой было выделено 236 тыс. у. е. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. ден. ед. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. у. е. за стол, стульев по 1,5 тыс. у. е. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. у. е., столы по 8 тыс. у. е. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.

19. Рулон обоев первого вида стоит 400 руб., и длина его на 4 м меньше, чем длина рулона второго вида. Рулон обоев второго вида стоит 360 руб., и цена одного метра на 20 руб. меньше, чем цена одного метра обоев первого вида.

Сколько метров обоев в каждом рулоне первого и второго вида?

20. Для нормального функционирования рынка необходимо, чтобы ежедневно на работе находилось 36 контролёров.

Сколько необходимо нанять контролёров, чтобы каждый из них при семидневной рабочей неделе имел один выходной день?

21. Швейная фабрика в течение трёх дней производила костюмы, плащи и куртки. Известны объёмы выпуска продукции за три дня и денежные затраты на производство за эти дни:

День	Объём выпуска продукции, ед.			Затрат, тыс. у. е.
	Костюмы	Плащи	Куртки	
Первый	50	10	30	178
Второй	35	25	20	168
Третий	40	20	30	184

Найти себестоимость единицы продукции каждого вида.

22. Предприниматель взял в аренду на 4 года складское помещение на условиях ежегодной платы (в конце года), A руб. Имея некоторый первоначальный капитал, он удвоил его в течение года и оплатил аренду. Оставшийся капитал он опять удвоил в течение второго года и оплатил аренду. Такая схема деятельности осуществлялась все четыре года. В результате, в конце четвёртого года деятельности, после оплаты аренды предприниматель имел капитал, в четыре раза превышающий первоначальный. Построить экономико-математическую модель накопления капитала у предпринимателя и привести её анализ. Определить величину первоначального капитала, если аренда A составляла 16 000 руб.

23. Нефтяная компания ежедневно отправляет АЗС 120 000 л бензина (равное количество на каждую станцию). Подсчитано, что в выходные дни выгоднее четыре АЗС закрывать, а предназначенный для них бензин распределять (в равной мере) среди остальных. При этом каждая АЗС увеличит количество реализуемого бензина на 8 000 л (это их предельная вместительность). Требуется определить, сколько АЗС имеет нефтяная компания. Какова предельная вместимость каждый АЗС?

24. Собрания акционеров некоторого предприятия постановило распределить прибыль 5 600 000 руб. следующим образом: большую часть прибыли направить в фонд развития предприятия, 25% от этой

суммы использовать для выплаты дивидендов акционерам, а 15% использовать на социальные нужды работников. Кроме того, было решено выпустить дополнительно акции для продажи на бирже ценных бумаг на сумму, равную половине суммы выплаченных дивидендов, в количестве 250 обыкновенных и 100 привилегированных (в 1,5 раза более дорогих) акций.

Определить, сколько денег было выделено на каждое направление, какова стоимость акции?

25. Два предпринимателя совместно приобрели партию товара в 50 т по цене 10 у. е. за одну тонну. Второй предприниматель заплатил за товар, включая стоимость перевозки, на 112 у. е. больше, чем первый. Перевозка 10 т товара обошлась предпринимателям в одну ден. ед. за 100 км пути, причём первый предприниматель вёз товар на расстояние 600 км, а второй – на расстояние 800 км.

Какое количество товара приобрёл каждый предприниматель? Сколько денег затратил каждый из предпринимателей на покупку и перевозку товара?

26. В течение года цена товара два раза увеличивалась на один и тот же процент. Первоначальная цена составляла 10 у. е. После второго повышения она составила 21,1 у. е.

На сколько процентов повысилась цена товара оба раза?

27. В районе три обменных пункта валюты от одного банка. Обмен в них идёт только долларов и евро на рубли. Каждый вечер остаток всех денег сдаётся в банк. Обозначим через M вектор денежных средств, сдаваемых i -м пунктом. Имеют ли смысл (и какой именно) векторы $M_1 + M_2$, $M_1 + M_2 + M_3$?

28. При нормальной ($\lambda_1 = 1$) интенсивности работы фабрика верхней одежды производит в неделю $G_1 = (40, 30, 60)$ мужских, женских и детских курток, а при интенсивности $0 \leq \lambda \leq 4$ производит $\lambda_1 G_1$ курток (будем округлять не целые числа до целых, при необхо-

димости). Сколько курток производит фабрика при интенсивности $\lambda_1 = 2; 4; 0,5; 0,8$? Вторая фабрика при $\lambda_2 = 1$ производит в месяц $G_2 = (40, 60, 50)$ таких же курток.

Сколько (и каких) курток производят обе фабрики при $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 2); (2, 4)$?

29. При нормальной ($\lambda = 1$) интенсивности завод потребляет ресурсов $R = (20; 40)$ и выпускает продукции $V = (10, 30)$, а при интенсивности $0 \leq \lambda \leq 4$ – в λ раз больше и ресурсов потребляет, и продукции выпускает.

Описать пары (ресурсы, продукция) при $\lambda = 2; 3; 2,5$. Найти вектор потребляемых ресурсов, потребных для выпуска продукции $(20, 60); (15, 45)$; найти, сколько будет выпущено продукции, если будет потреблено $(25, 50); (30, 60)$.

30. В пространстве двух товаров с ценами $(3, 5)$ укажите несколько наборов товаров стоимостью 15, 25, 45. Пусть цены изменились и стали $(5, 5)$. Приведите примеры наборов товаров, которые подешевели, подорожали, остались той же стоимости.

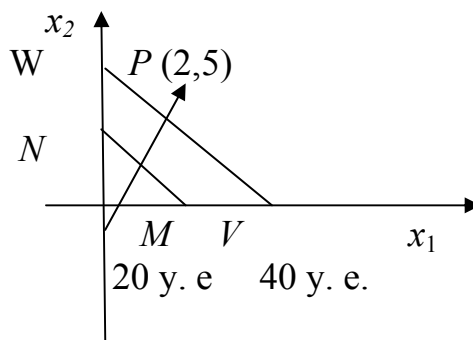
31. Магазин торгует гвоздями двух видов: 25 и 40 мм. Масса гвоздей соответственно 5 и 10 г, цена 50 и 70 руб. за 1 кг. Покупатель, ведущий ремонт, хотел бы купить гвоздей на 100 руб. Опишите доступные ему на эту сумму наборы гвоздей. Подскажите покупателю, сколько и каких гвоздей ему купить, если он хотел бы:

- а) купить гвоздей как можно меньше по массе;
- б) как можно больше по длине;
- в) купить гвоздей длиной 40 мм в два раза больше по массе, чем гвоздей по 25 мм.

32. Придумайте несколько линейных функций спроса и предложения, нарисуйте их графики (прямые линии) и найдите для каждого случая равновесную цену.

33. Для различных векторов цен нарисуйте несколько линий равной стоимости.

Например, $P = (2, 5)$. На рисунке линии MN , VW – стоимости соответственно 20 и 40 у. е.



34. ЦБ России определил валютный коридор на 1997 г.: в начале года доллар стоит 5500 руб., в конце года – 6230 руб. (цифры условные).

Найти аппроксимирующую линейную зависимость курса доллара от номера дня 1997 г.

35. В пространстве двух товаров рассмотрим два непропорциональных набора A и B . Опишите множество всех наборов X , представимых в виде комбинации $\alpha X + \beta Y$ с неотрицательными α, β . Что представляет собой подобное множество в пространстве трёх товаров? Какое условие заменяет в этом случае условие непропорциональности направления и какова стоимость акции?

36. В пространстве двух товаров заданы два вектора цен $P = (2, 5)$ и $Q = (3, 4)$. Первый – это цены покупки, второй – цены продажи (подумайте об аналогии с ценой покупки и продажи долларов за рубли). Является ли отношение равной прибыльности отношением эквивалентности на наборах товаров?

37. В пространстве трёх товаров с данными ценами $(3, 2, 5)$ указать графически множества наборов, которые стоят: а) ровно 30 у. е.; б) не более 50 у. е.; в) не менее 20 у. е.; г) не менее 30 и не более 40 у. е.

38. В пространстве двух товаров рассмотреть эквивалентность, порождённую пропорцией: 1-го товара в наборе должно быть в 5 раз больше 2-го.

39. В пространстве двух товаров с данными ценами (3, 5) указать графически множества наборов, которые стоят: а) ровно 30 у. е.; б) не более 50 у. е.; в) не менее 20 у. е.; г) не менее 30 и не более 50 у. е.

40. Для двух товаров проследить, как меняется бюджетное множество и его граница, если: а) меняется только доход; б) меняется цена только одного товара; в) меняются обе цены, но их соотношение остаётся постоянным.

41. Завод выпускает два товара и может работать с различной интенсивностью λ от 0 до 1 (это максимальная интенсивность). При $\lambda = 1$ он выпускает набор $Q = (30, 40)$ товаров, а при интенсивности λ – набор λQ . Описать и графически изобразить множество наборов товаров, которые может выпускать завод.

42. Два завода выпускают одну и ту же продукцию двух видов. При работе соответственно с интенсивностями (λ_1, λ_2) первый производит набор $\lambda_1 Q_1 = (10\lambda_1, 25\lambda_1)$, второй – $\lambda_2 Q_2 = (20\lambda_2, 15\lambda_2)$, а вместе они дают набор $(\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)$. Описать и графически изобразить множество наборов товаров, которые заводы могут выпустить вместе.

43. Функция издержек производства имеет вид: $C(q) = 30q + 2100$. Цена одной шины – 60 у. е. Найти точку безубыточности. Дать графическую иллюстрацию.

44. Фиксированные издержки составляют 5 тыс. у. е. в месяц, переменные издержки – 25 тыс. у. е., выручка – 45 у. е. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить её график. Найти точку безубыточности.

45. Мебельная фабрика продаёт каждый изготовленный стул по 64 тыс. руб. При этом издержки составляют 635 тыс. руб. за 8 стульев

и 750 тыс. руб. за 13 стульев. Найти точку безубыточности, если функция издержек линейная.

46. Стоимость y перевозки груза на расстояние X автотранспортом задается формулой $y = 0,2x + 4$, а водным транспортом – $y = 0,1x + 5$. Каким видом транспорта выгоднее осуществить перевозки?

47. Издержки перевозки двумя средствами транспорта выражаются функциями $y = 150 + 25x$ и $y = 200 + 20x$, где x – расстояние перевозки в сотнях километров, а y – транспортные расходы в денежных единицах. Определить, начиная с какого расстояния, более экономичными становится второе средство.

48. Предприятие купило оборудование стоимостью 30 тыс. у. е. Ежегодная норма износа составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость оборудования. Написать уравнение, определяющее стоимость оборудования в зависимости от времени t . Найти стоимость оборудования: 1) через 3 года; 2) 5 лет и 3 месяца.

49. Прибыль от продажи некоторого товара в двух магазинах выражается функциями $y = -1 + 2x$ и $y = -5 + 3x$, где x – количество товара в сотнях штук, а y – прибыль в тысячах рублей. Определить, начиная с какого количества товара, более выгодной становится продажа во втором магазине.

50. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями: $D = -2p + 12$; $S = p + 3$, где p – цена товара. Найти:

1) точку рыночного равновесия;

2) точку равновесия после введения налога, равного 3 у. е., определить увеличение цены и уменьшение равновесного объёма продаж;

3) величину субсидии, которая приведёт к увеличению объёма продаж на 2 единицы;

4) новую точку равновесия и доход государства, если вводится пропорциональный налог, равный 20%.

51. Цена телевизора 500 у. е., остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t . За сколько нужно продать телевизор после двух с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 50 у. е.?

52. Фирма купила пять одинаковых компьютеров. Первоначальная стоимость каждого из них составляет 2 000 у. е., остаточная – 100 у. е. Срок службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t . За сколько нужно продать телевизор после трёх лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 50 у. е.?

53. Объём сбыта y зависит от назначаемой цены w по формуле $y = 40 - 2w$. Зависимость издержек y от объема y выпуска даётся формулой $J(y) = y^2 + 2y + 7$. По критерию максимальной прибыли найти оптимальный объём производства, значения прибыли и издержек.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предлагаемом учебном пособии автор попытался найти наиболее доступные формы изложения первых разделов математики, изучаемой в высшей школе студентами всех инженерно-технических и экономических специальностей; проиллюстрировать теорию примерами.

Автор надеется, что данное учебное пособие будет полезным как для студентов, так и для преподавателей при проведении занятий по соответствующим темам.

Предложенные контрольные вопросы и тесты позволят студентам проверить свои знания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анкилов, А. В. Высшая математика : учебное пособие. В 2 ч. Ч. 1 / А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников ; под общ. ред. П. А. Вельмисова. – 2-е изд. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – 250 с.
2. Бараненков, А. И. Сборник задач и типовых расчётов по высшей математике : учебное пособие / А. И. Бараненков, Е. П. Богомолова, И. М. Петрушко. – СПб. : Издательство «Лань», 2009. – 240 с.
3. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемишев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 312 с.
4. Высшая математика для экономистов : учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / М. И. Кремер [и др.] ; под ред. Н. Ш. Крамера. – 3-е изд. – М. : ЮНИТИ – Дана, 2008. – 479 с.
5. Высшая математика: задачник : учебное пособие. / Е. А. Ровба [и др.] – Мн. : Высшая школа, 2012. – 319 с.
6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 : учебное пособие для вузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова, С. П. Данко. – 6-е изд. – М. : ООО «Издательство Оникс», ООО «Издательство «Мир и образование», 2006. – 304 с.
7. Жуков, В. М. Практические задания по математике: теория, задания, ответы / В. М. Жуков. – Ростов н/Д : Феникс, 2012. – 704 с.
8. Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 1999. – 280 с.
9. Ильязова, Д. З. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Теория и практика: учебное пособие. / Д. З. Ильязова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 171 с.
10. Красс, М. С. Математика для экономических специальностей : учебник / М. С. Красс. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Дело, 2002. – 704 с.

11. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты : учебное пособие / Л. А. Кузнецов. – 9-е изд., стер. – СПб. : Издательство «Лань», 2007. – 240 с.
12. Малыхин, В. И. Математика в экономике : учебное пособие / В. И. Малыхин. – М. : ИНФРА. – М, 2002. – 240 с.
13. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. В 2 ч. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 10-е изд. – М. : Айрис-пресс, 2010. – 288 с.
14. Проскуряков, И. В. Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – М. : СПб. : Физмат. Лит., 2001 – 384 с.
15. Рябушко, А. П. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч. 1 : учебное пособие / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юреть. – Мн. : Вышэйшая школа, 1990. – 270 с.
16. Шипачёв, В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2002. – 479 с.
17. Шипачёв, В. С. Задачник по высшей математике : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачёв. – 5-е изд., стер. – М. : Высшая школа, 2005 – 304 с.

Учебное электронное издание

ИЛЬЯЗОВА Дания Зарифовна

**ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ
И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

Учебное пособие

ЭИ № 700. Объем данных 3,48 Мб.

Редактор Е. Б. Полякова

Печатное издание

ЛР № 020640 от 22.10.97

Подписано в печать 12.07.2016. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 13,78. Тираж 100 экз. Заказ 664.

Ульяновский государственный технический университет

432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

ИПК «Венец» УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32.

Тел.: (8422) 778-113

E-mail: venec@ulstu.ru

<http://www.venec.ulstu.ru>