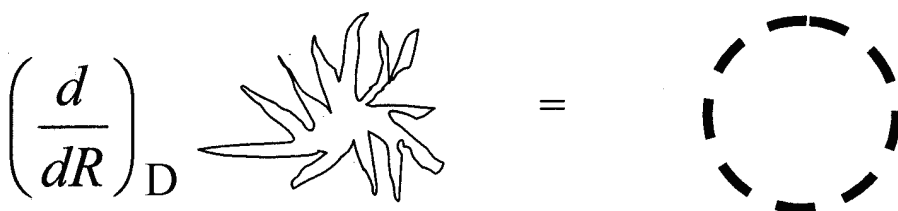
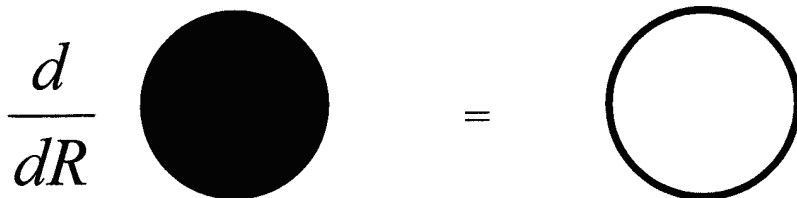


**В. К. БАЛХАНОВ**

**ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ  
И ФРАКТАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**



Улан-Удэ  
2013

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ ФИЗИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛОВЕДЕНИЯ

**В.К. Балханов**

# **ОСНОВЫ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ФРАКТАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО БГУ  
Улан-Удэ  
2013

УДК 513.0  
ББК 22.151.1  
Б 208

Утверждено к печати ученым советом  
федерального государственного бюджетного учреждения  
<<Института физического материаловедения СО РАН>>

*Ответственный редактор*  
**Ю. Б. Башкуев**, д-р техн. наук, проф.

*Рецензенты*  
**Г. С. Бордонский**, д-р физ.-мат. наук, проф.  
**С. О. Никифоров**, д-р технических наук, проф.  
**В. И. Козлов**, канд. физ.-мат. наук

*Исследования частично поддержаны РФФИ грантом  
№ 12-01-98006 и интеграционным проектом СО РАН № 11*

**В. К. БАЛХАНОВ**

Б 208 **Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления**/ от.  
ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета,  
2013. – 224 с. ISBN 978-5-9793-0549-3

Монография посвящена математической формулировке основ фрактальной геометрии и математического аппарата фрактального исчисления. Изложен канторовский метод измерения фрактальной размерности разветвленных структур. Вместе с традиционным материалом рассмотрены некоторые широко представленные в природе объекты. Существенное внимание уделено электромагнитным процессам во фрактальных средах.

Предназначена специалистам в области математики и физики, а также студентам естественнонаучных специальностей высших учебных заведений, аспирантам и научным работникам.

*Исследования частично поддержаны РФФИ грантом № 12-01-98006 и интеграционным проектом СО РАН № 11*

© В.К. Балханов, 2013  
© ИФМ СО РАН, 2013

ISBN 978-5-9793-0549-3

*Бенуа Б. Мандельброт (1924-2010)*



**В одиночку спас наиболее хрупкие функции теории множеств и наиболее «пыльные» множества от почти полного забвения, поместив их в самый центр нашего повседневного опыта и представлений.**

(Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы)

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ .....</b>	<b>7</b>
<b>ПРЕДИСЛОВИЕ.....</b>	<b>8</b>
<b>ГЛАВА 1. ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....</b>	<b>11</b>
§ 1. Введение.....	11
§ 2. Фрактальная линия. Закон Мандельброта.....	14
§ 3. Самоподобие .....	19
§ 4. Альтернативная формулировка аксиом.....	21
§ 5. Алгебраические и геометрические иерархические структуры.....	23
§ 6. Двух- и трехмерные фрактальные размерности.....	28
§ 7. Фрактальная размерность фрагментов растительности.....	31
§ 8. Измерение площади произвольной фигуры.....	35
§ 9. Соотношение периметр–площадь.....	37
§ 10. Мультифрактальность.....	40
§ 11. Фрактальная размерность Чивыркуйского залива оз. Байкал.....	43
§ 12. Фрактальная размерность узоров и орнаментов.....	48
<b>ГЛАВА 2. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ.....</b>	<b>53</b>
§ 1. Классические методы измерения фрактальной размерности.....	53
§ 2. Канторовский метод измерения фрактальной размерности.....	56
§ 3. Измерение фрактальной размерности грозового разряда.....	58
§ 4. Дельта Лены.....	62
§ 5. Дельта Селенги и Волги.....	65
§ 6. Фрактальная зависимость скорости течения реки.....	71
§ 7. Фрактальная размерность плоскостной проекции стримерных каналов.....	71
§ 8. Тундровые озера.....	75
§ 9. Временная динамика фрактальной размерности дельты Селенги.....	78
<b>ГЛАВА 3. ФРАКТАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....</b>	<b>82</b>
§ 1. Фрактальное интегрирование.....	82
§ 2. Фрактальное интегрирование элементарных функций.....	86
§ 3. Фрактальное дифференцирование.....	87
§ 4. Уравнения во фрактальных производных.....	91
§ 5. Некоторые физические применения.....	93
§ 6. Геометрический смысл фрактальной производной.....	95

<b>ГЛАВА 4. ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА</b>	98
§ 1. Факториал и специальные функции	98
§ 2. Дробный интеграл	100
§ 3. Элементарные функции	102
§ 4. Дробное дифференцирование	105
<b>ГЛАВА 5. ФРАКТАЛЬНОЕ БЛУЖДЕНИЕ</b>	109
§ 1. Броуновское движение	109
§ 2. Теория перколяции	112
§ 3. Фрактальное блуждание	114
§ 4. Связь между $h$ и $D$ для электромагнитных процессов	118
§ 5. Статистическая теория полимерных цепей	120
§ 6. Статистическая теория стримерных каналов	123
§ 7. Статистическая теория ветвлений дельты рек	126
<b>ГЛАВА 6. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ</b>	129
§ 1. Функция Лагранжа	129
§ 2. Фрактальная природа времени	132
§ 3. Связь коэффициента затухания с фракталом	134
§ 4. Фрактал и турбулентность	135
§ 5. Турбулентность. Закон Колмогорова	138
§ 6. Один из способов получения степенных законов	141
§ 7. Дуальность полимерных цепей и стримерных каналов	143
<b>ГЛАВА 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРИРОДНЫХ СРЕД И ИСКУССТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ</b>	145
§ 1. Обоснование задач исследования по применению фрактальной геометрии к электрическим свойствам природных сред и искусственных материалов	146
§ 2. Фрактальная модель среды для электромагнитных процессов	150
§ 3. Законы подобия электрических параметров	155
§ 4. Фрактальные характеристики сопротивления и емкости	159
§ 5. Законы подобия для модуля поверхностного импеданса	166
§ 6. Аналогия между электрическими параметрами неоднородных сред и геометрическими характеристиками фрактальной линии	171
§ 7. Скин-слой пункта измерения “Озерный”	173
§ 8. Электрические характеристики талой воды	179
§ 9. Электрофизические параметры ствола живого дерева	185
§ 10. Предельный степенной закон	190

§ 11. Измерение фрактальной размерности грозового разряда.....	193
§ 12. Пространственные характеристики излучения разрядов молнии.....	195
§ 13. Моделирование длины разрядов молнии фрактальной геометрией.....	203
§ 14. Фрактальная размерность плоскостной проекции стримерных каналов.....	206
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....</b>	<b>209</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА.....</b>	<b>210</b>
<b>СПИСОК ТРУДОВ АВТОРА.....</b>	<b>220</b>

## НЕКОТОРЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$L$  – длина фрактальной линии

$S$  – площадь фрактальной поверхности

$V$  – объем фрактального объекта

$\chi$  – масштаб измерения

$\eta$  – масштабный множитель

$C$  – неопределенный множитель

$D$  – фрактальная размерность

$h$  – размерность блуждания

$E$  – евклидова размерность

$N$  – число масштабов

$\alpha$  – параметр фрагментации

$R$  – линейный размер

$t$  – время

$d_D$  – фрактальный дифференциал

фрактальный интеграл (см. глава 3)

$r$  – координата

$\delta$  – поверхностный импеданс

$|\delta|$  – модуль импеданса

$\varphi$  – фаза импеданса

$H$  – скин – слой

$W$  – функция ослабления

$Y$  – ослабление

$\omega$  – круговая частота; частота  $f = \omega / 2\pi$

$R$  – сопротивление

$\sigma$  – проводимость

$\rho$  – удельное сопротивление ( $= 1 / \sigma$ )

$\epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость

$\epsilon_0$  – диэлектрическая постоянная вакуума

$\mu$  – магнитная проницаемость вещества

$\mu_0$  – магнитная постоянная

$c$  – скорость света

$v$  – скорость

$E$  – напряженность электрического поля

$B$  – индукция магнитного поля

Формула (1.2) означает формулу 2 из Главы 1, то же самое для рисунков и таблиц.



*Если ты все понял, значит, тебе не все рассказали.  
(народная мудрость)*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Фрактальная геометрия изучает закономерности, проявляемые в структуре природных объектов, процессов и явлений, обладающих явно выраженной фрагментарностью, изломанностью и искривленностью. Достаточно большое число объектов на поверхности Земли и атмосфере подчиняются степенным законам. Моделированию этих закономерностей и занимается фрактальная геометрия. Методы фрактальной геометрии широко применяются в различных отраслях естествознания и техники. Умение их применять, приобретение навыков моделирования фрактальных систем необходимо современному исследователю. В этом и состоит цель монографии – привить навык решения задач методами фрактальной геометрии.

Сделаем небольшой экскурс в историю. В 20-х гг. XX в. английский ученый Ричардсон решил подсчитать длины границ европейских государств. К его удивлению оказалось, что длина границы государства зависит от масштаба измерения. В 30-х гг. польские геодезисты измеряли длину р. Вислы. После подсчета длины реки выяснилось, что длина при измерении различными масштабами оказалась разная, причем с уменьшением масштаба длина реки возрастала. Этот факт отнесли к математическим курьезам и надолго о ней забыли (см. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981. 160 с.]. В начале 70-х гг. история перенеслась в Северную Америку. Любопытные американцы, находясь на отдыхе, своими шагами измеряли периметр озер. Выяснилось обстоятельство, вызвавшее удивление, – у различных людей периметр оказался разным. С этим фактом они обратились к местным математикам и им повезло – любопытствующие «попали» на Бенуа Мандельброта, американского математика (см. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Изд-во Института компьютерных исследований, 2002. 656 с.). С этого началось становление нового языка науки, где основными понятиями являются *фрактал*, *фрактальная размерность*, *фрактальная геометрия*, *фрактальное исчисление* и *иерархическое построение*.

Геометрия встречающихся в природе объектов самых различных размеров – от атомных масштабов до Вселенной – занимает центральное место в моделях, которые строят, чтобы «понять» природу. По традиции основой интуитивного понимания геометрии природы служили евклидовы прямые, окружности, из которых строили пространства с целочисленной размерностью. Однако классический набор геометрических фигур: прямых, окружностей и тому подобных, становится не применимым для описания длины рек, периметра озер, формы облаков и еще огромного множества других природных объектов. Бенуа Б. Мандельброт поведал миру об объектах, для описания которых необходимо введение нецелочисленных, дробноразмерных пространств. Он им дал объединяющее название – *фрактал*. Для описания природных образований необходимо использовать понятия новой фрактальной геометрии. Дробную размерность новых объектов стали называть фрактальной размерностью, которая и служит количественной мерой определения самих фракталов.

Описание Природы и разнообразных ее проявлений требует привлечения соответствующего математического аппарата. Без этого невозможно зачастую сформулировать первоначальные понятия. Для лучшего понимания вводимых определений прибегают к известным аналогиям, сравнивают со знакомыми явлениями и понятиями. Однако в изучении фрактальной геометрии возникают определенные трудности к привлечению наглядных образов. Довольно неожиданно привыкать к тому, что одномерные объекты на самом деле не совсем одномерны, а чуть нечто большее.

Мы надеемся, что привлечение рисунков и рассмотрение различных примеров подведут читателя к появлению у него своеобразной интуиции. Встречаясь в своей практике с реальными природными объектами, он сразу сможет сказать, относятся ли они к фрактальным структурам и вычислить их фрактальную размерность. Только прямое общение с конкретными задачами даст общее представление, вырабатывает необходимую точку зрения (с этой целью, имеющей в большей степени методический характер, мы приводим в монографии задачи). К некоторым из них решения не даются. Например, задача об измерении фрактальной размерности городских улиц.

Излагаемое в монографии фрактальное исчисление – это абстрактная математическая конструкция. При ее построении выясняется, что

все становится с «ног на голову». Развиваемое фрактальное исчисление в некотором роде аналогично теории интегрирования и дифференцирования дробного порядка. Поэтому вполне уместно изложение теории последней в нашей книге. При этом для быстрого введения в предмет опустили определенные тонкости, необходимые при математическом описании. Автор считает, что при первом знакомстве достаточно и интуитивного понимания. Этому будем следовать и при построении фрактального исчисления.

Любая математическая конструкция в качестве своей основы имеет набор аксиом. Фрактальная геометрия не исключение, ее началами являются аксиомы многомасштабности и самоподобия. Мы в монографии вместо аксиом будем говорить о математических формулировках многомасштабности и самоподобия. Этим математическим формулировкам посвящена глава 1.

Основной величиной фрактальной геометрии является фрактальная размерность. В главе 2 предложен новый метод измерения, эффективность которого показана на некоторых природных объектах.

В главе 3 развивается фрактальное исчисление – математический аппарат фрактальной геометрии. Дана геометрическая интерпретация фрактальной производной. Фрактальное исчисление во многих местах аналогично дробным интегралам и дифференциалам, изложению которых посвящена глава 4.

Обширной областью применения фрактальной геометрии являются разнообразные физические задачи. В главе 5 показано, как фрактальная размерность для некоторых физических объектов может быть вычислена. Физика обширна, и применение здесь фрактальной геометрии находится еще в начале пути. В главе 6 излагаются некоторые (по мнению автора) перспективные направления, которые могут быть исследованы. Из-за введения в новую математическую область представленная работа не является однородной по содержанию. Если первые 4 главы не предполагают знакомства с предметом, то последние 5, 6 и 7 главы требуют знаний читателя с основами общей и теоретической физики.

Автор благодарен рецензентам за советы, которые учтены в монографии.

## ГЛАВА 1

### ФРАКТАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В настоящей главе измерением длины кривой линии с необходимостью придем к первоначальным понятиям фрактальной геометрии, а именно к масштабу измерения и фрактальной размерности. Дадим математическую формулировку многомасштабности и самоподобия. На примере геометрических и алгебраических структур покажем, как фрактальную размерность можно вычислить. Введем двух- и трехмерные фрактальные размерности. Напомним о формуле Георга Пика для измерения площади фигур. Рассмотрим мультифрактальные геометрические фигуры.

#### § 1. ВВЕДЕНИЕ

Математическая наука в 1975 г. обогатилась новым геометрическим языком. В ней только понятие *точки* не изменилось. Следующий по сложности объект – *кривая линия* – приобретает новые свойства. Мир, к которому мы привыкли, цельноразмерный. Наличие длины, ширины и высоты означает, что физические объекты находятся в трехмерном пространстве. Само наличие физических объектов означает существование пространства. Физические объекты создают геометрию, а геометрия говорит, как должны происходить физические процессы. Но многие физические объекты и происходящие в них процессы изломаны, изрезаны, фрагментарны. Они создают новую геометрию, в которой пространство не цельноразмерное, а дробное, или *фрактальное*. Наглядные образы, к которым мы привыкли, для понимания новой геометрии не подходят. Только общение с многочисленными примерами дадут понимание фрактальной геометрии. Рассматриваемые примеры приведут читателя к появлению у него своеобразной интуиции. Решения конкретных задач дадут представление о новой, фрактальной геометрии, выработают точку зрения.

В Евклидовой геометрии линия – это одномерный объект и для измерения ее длины требуется только один масштаб. Новая геометрия имеет дело с фрактальной линией, измерение длины которой требует

бесконечного числа масштабов. Размерность такой фрактальной линии оказывается больше единицы. По поводу этого говорят о многомасштабности, или масштабируемости, объектов. Кроме этого, во фрактальной геометрии фрактальные линии обладают еще одним удивительным свойством. Под каким бы увеличением не смотреть на фрактальную линию в микроскоп, она будет все такой же изрезанной и изломанной. Как вся кривая линия, так и любой ее участок обладают одной и той же фрактальной размерностью. Такое свойство называют самоподобием. Цельноразмерная Евклидова геометрия – это 39 аксиом (по Давиду Гильберту). Новую фрактальную геометрию мы будем описывать дополнительно еще двумя аксиомами – аксиомами многомасштабности и самоподобия. Точнее, будем говорить о математических формулировках многомасштабности и самоподобия.

Многомасштабность качественно можно понять следующим образом. Наверняка все замечали, что оценка расстояния «на глазок» в горах или на сильнопересеченной местности не совпадает с реально пройденным расстоянием. Если прикидываем, что участок преодолеем за полчаса, то реально оказывается, что потратили почти час. Это связано с тем, что обычно линии мы представляем себе плавными, а на самом деле в природе почти все линии сильно изрезаны и искривлены. Такие линии Мандельброт назвал фрактальными. Они обладают многими замечательными свойствами, главным из которых является зависимость длины от измерительной линейки. Измерение длины метровой линейкой не совпадает с измерениями длины сантиметровой.

Первым, примерно в 1920 г., многомасштабность установил английский математик Ричардсон. Он обратил внимание, что длины границ государств зависят от того, какой мерной линейкой измерять длину. В 30-х гг. в Польше картографы измеряли длину р. Висла. При этом получили ошеломляющий результат: при уточнении измерений длина реки увеличивалась! Так математики получили задачу, которую отнесли к математическим курьезам, и благополучно забыли. В 70-х гг. туристы обратили внимание, что при измерении периметров Великих Озер в Америке у всех людей получались разные результаты. Так природа в третий раз продемонстрировала, что длина природной линии зависит от масштаба измерения.

В следующих параграфах мы дадим математическую формулировку основным положениям фрактальной геометрии. Только после мате-

матической формулировки задачи начинается Наука, становится возможным объяснить известные факты и экспериментально, после соответствующих измерений, проверить предсказание о новых явлениях. Мы проведем элементарные измерения – будем прикладывать линейку или циркуль к кривой линии, подсчитывая ее длину. Разработаем новые методы подсчета и вычисления фрактальной размерности для некоторых природных объектов. Привьем навык научного ремесла, который войдет в сознание так, что, применяя различные приемы и методы, даже будем не замечать этого.

Прямая линия имеет размерность, равную 1. Если кривая линия заполняет всю плоскость, то, как и для всякого двухмерного образования, размерность кривой будет равна 2. Следовательно, изломанная линия на плоскости будет иметь фрактальную размерность, принимающую любое значение между 1 и 2. Если линия пронизывает пространство и плотно ее заполняет, то ее размерность, очевидно, будет равной 3. Математика – это такая наука, что может предложить геометрические объекты, обладающие фрактальной размерностью меньше 1, такие объекты называют канторовскими множествами.

В XIX в. было замечено, что существуют функции, не имеющие производных. Наглядно это можно представить, нарисовав «птичку» – обычную галочку (рис. 1.1). Как видно из рисунка 1.1, в точке излома будет две касательные. Так как касательные определяются производными, то получаем, что в некоторой точке необходимо рассматривать две производные. Это означает, что мы не знаем, какую производную надо брать в данной точке – наша «птичка» в этой точке не имеет обычную производную. Многомасштабные самоподобные кривые аналогичны точке излома рассмотренной галочке. Надо только представить, что кривая линия изломана в каждой точке. Такая наглядная картина дает возможность почувствовать необычные свойства новой геометрии.

Отличие фрактальной размерности от единицы можно еще представить следующим образом. Спроецируем нашу «птичку» на горизонтальную ось. Тогда из места излома будут проецироваться как бы две точки. Для фрактальной линии из каждого его места будут проецироваться как бы больше, чем одна точка.

## касательные



**Рис. 1.1.** Галочка в точке излома имеет две касательные

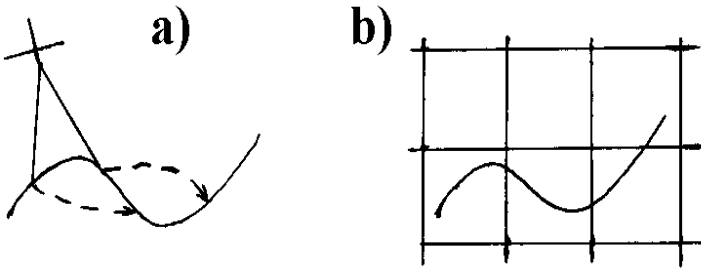
## § 2. ФРАКТАЛЬНАЯ ЛИНИЯ. ЗАКОН МАНДЕЛЬБРОТА

Математика, как и любая наука, основывается на простых, интуитивно понятных и легко проверяемых положениях. Фрактальная геометрия в этом смысле начинается с измерения длины какой-либо кривой линии. Сам процесс измерения означает, что надо смотреть, сколько раз заранее выбранный масштаб уложится на кривую. Затем масштаб меняется, и процесс измерения повторяется. Масштабом называют прямой отрезок длиной в 1 м. Для удобства можно брать доли масштаба – км, см ... Надо только следить, чтобы масштаб априори был значительно меньше измеряемой длины, а это интуитивно всегда можно сделать. Обозначим масштаб измерения символом  $\chi$  (кси). Если его достаточно приложить к линии два раза, то длина линии будет равна  $2 \chi$ . В практических случаях используют циркуль, обходя с его помощью всю кривую. На рисунке 1.2а показаны два шага раствором циркуля. Также используется другой способ, называемый стандартным клеточным методом. При этом лист, на котором начертана измеряемая линия, покрывается сеткой ячеек со стороной  $\chi$  (рис. 1.2б). Тогда длина будет равна произведению размера ячейки на число ячеек, в которых находится рассматриваемая кривая линия.

В качестве кривой, у которой будем измерять ее длину, выберем линию, показанную на рисунке 1.3. Ее некоторой периодичностью попытаемся учесть свойство самоподобия, хотя это и трудно продемонстрировать «от руки». Возьмем циркуль с раствором  $\chi$  единиц измере-

ния и сосчитаем число шагов  $N(\chi)$ , необходимых для обхода из одного конца в другой конец всей линии. Даже если останется лишний участок кривой, то при достаточно большом числе  $N$  это не сказывается на общем фрактальном свойстве кривой. Произведение измеренного числа шагов  $N(\chi)$  на заранее выбранный масштаб  $\chi$  по определению означает искомую длину  $L$ :

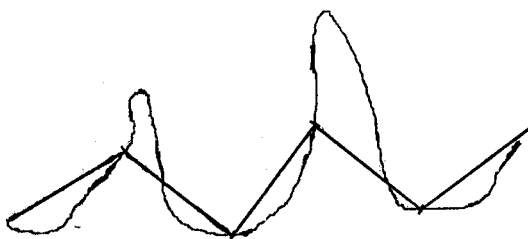
$$L = N(\chi) \cdot \chi . \quad (1.1)$$



**Рис. 1.2.** Измерение длины: а) обходом по линии раствором циркуля, б) подсчетом клеток, содержащих линию

Проведем первое измерение с масштабом  $\chi_1 = 1/10$  (в некоторых условных единицах). На рисунке 1.3 показано, что этот масштаб укладывается  $N_1 = 5$  раз, так что длина будет равна  $L_1 = N_1 \cdot \chi_1 = 5/10$ . Следующее измерение проведем с меньшим масштабом  $\chi_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ . На рисунке 1.4 показано, что циркуль с новым масштабом обойдет линию  $N_2 = 9$  раз. Новая длина станет равной  $L_2 = N_2 \cdot \chi_2 = 6/10$ , что больше, чем  $5/10$  – предыдущий результат. Видим, что при уменьшении масштаба измерения длина кривой линии увеличивается, и такое увеличение является общим свойством непрерывных фрактальных линий.





**Рис. 1.3.** Пример самоподобной кривой линии;  
первое измерение длины



**Рис. 1.4.** Пример самоподобной кривой линии;  
второе измерение длины

Продолжим измерения, уменьшая последовательно масштаб и считая каждый раз число растворов циркуля. Все измерения сведем в таблице 1.1. Рисунки для измерений 3 и 4 мы не приводим, предоставим это читателю. Для наглядности нанесем измеренные значения на график в билогарифмическом масштабе (рис. 1.5). Логарифмирование – это такая операция, что небольшое изменение своего аргумента мало сказывается на самом логарифме. Поэтому небольшие «хвосты», возникающие при подсчете числа  $N$ , можно не учитывать. Как видно из рисунка 1.5, все точки ( $\ln N$ ,  $\ln 1/\chi$ ) практически идеально легли на прямую линию. Таким образом, методом линейной регрессии, для кривой на рисунке 1.3 получаем:

$$\ln N = -1.12 + 1.23 \ln 1/\chi,$$

или

$$N = 0.33 \chi^{-1.23}.$$

Таблица 1.1

Результаты измерения

Изм. 1	Изм. 2	Изм. 3	Изм. 4
$\chi_1 = 1/10$	$\chi_2 = 1/15$	$\chi_3 = 1/20$	$\chi_4 = 1/30$
$N_1 = 5$	$N_2 = 9$	$N_3 = 13$	$N_4 = 22$

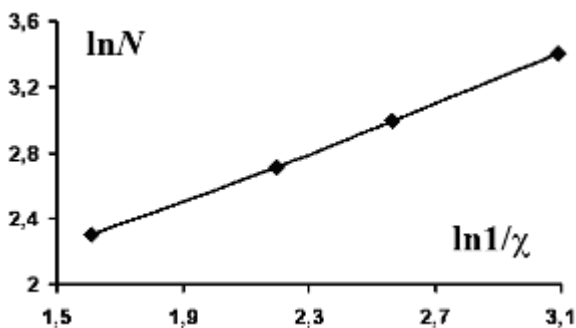


Рис. 1.5. График зависимости  $N$  от  $\chi$   
(в билогарифмическом масштабе, натуральные логарифмы)

Линейная зависимость между  $\ln N$  и  $\ln 1/\chi$  соблюдается для любой кривой, какую только можно вообразить. Это положение удобно записать в виде следующей степенной зависимости между  $N$  и  $\chi$ :

$$N = C \cdot \chi^{-D}. \quad (1.2)$$

Так, для кривой на рисунке 1.3 будет  $C = 0.33$  и  $D = 1.23$ . Чтобы не отвлекаться на множитель  $C$ , соотношения, подобные (1.2), часто будем записывать в виде

$$N \sim \chi^{-D},$$

как это принято во фрактальной геометрии.

Результат (1.2) означает, что кривая линия представляет собой фрактальный объект с размерностью  $D$ . Чтобы не обращать внимания

на множитель  $C$ , степенной показатель  $D$ , как это следует из (1.2), удобно определить следующим образом:

$$D = \lim_{\chi \rightarrow 0} \frac{\ln N(\chi)}{\ln 1/\chi}. \quad (1.3)$$

Таким образом, число масштабов степенным образом зависит от масштаба измерения, а степенной показатель оказывается фрактальной размерностью рассматриваемого объекта. При этом, чем меньше масштаб, тем больше требуется число масштабов. Умножая число  $N(\chi)$  на масштаб  $\chi$ , согласно (1.1), получаем длину измеряемой кривой линии:

$$L = C \cdot \chi^{1-D}. \quad (1.4)$$

Это знаменитая формула Мандельброта, с которой и началось становление фрактальной геометрии. Аналогичное соотношение для границ государств в 1920 г. установил Ричардсон, поэтому часто формулу (1.4), отдавая дань исторической справедливости, называют законом Мандельброта – Ричардсона. Гениальной догадкой Бенуа Мандельброта было то, что величина  $D$  в (1.4) как раз и является фрактальной размерностью. Формулу (1.4) определим как математическую формулировку первой аксиомы фрактальной геометрии – аксиомы многомасштабности: *чтобы что-то измерить, надо иметь набор масштабов.*

Поскольку  $D > 1$ , то при  $\chi \rightarrow 0$  длина  $L \rightarrow \infty$ . Обратно, увеличивая масштаб измерения, мы будем уменьшать длину кривой. Наглядно можно сказать, что при движении по пересеченной местности шаги надо делать как можно шире. Длинноногому путнику дорога будет казаться короче.

В конце данного параграфа сделаем два замечания методического характера. На рисунке 1.5 по осям отложены натуральные логарифмы. Однако в литературе часто используют десятичные логарифмы. В этом случае график зависимости  $N$  от  $\chi$  будет выглядеть так, как показано на рисунке 1.6. Для подобных графиков иногда говорят, что одной декады маловато для доказательства фрактальности объекта. В пользу полноценности наших измерений и доказательства этим самым фрактальности кривой сошлемся на известный сборник трудов [44], где примерно половина рисунков, иллюстрирующие фрактальные свойства

рассматриваемых там природных объектов и процессов, приведены в логарифмическом масштабе на интервале одной декады.

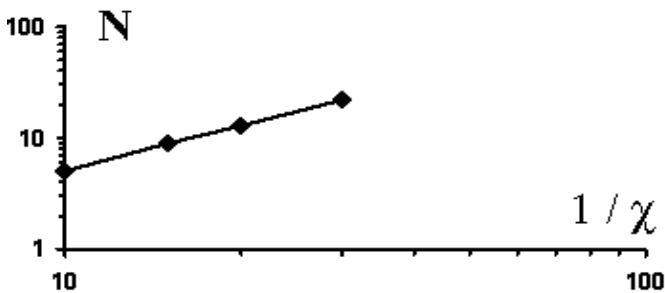


Рис. 1.6. Зависимость  $N$  от  $\chi$  (десятичные логарифмы)

В формулах (1.2) и (1.4) содержится множитель  $C$ , который является типичным для фрактальной геометрии. Он зависит от размерности величин и их разрядов. Чтобы не отвлекаться на этот множитель, его часто называют неопределенным. Его даже можно не выписывать. Тогда, например, формулу (1.4) записывают в виде:

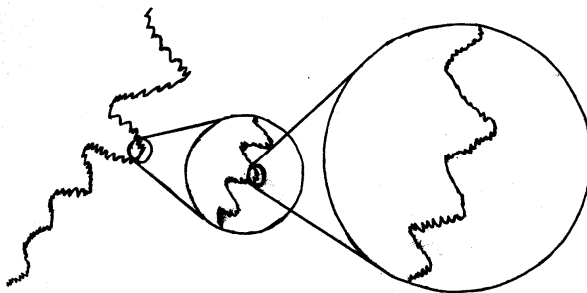
$$L \sim \chi^{1-D}.$$

### § 3. САМОПОДОБИЕ

Фрактальные объекты имеют удивительные свойства – как в целом, так и любые их участки обладают одной и той же размерностью. Это свойство называется самоподобием. Представим исследователя, наблюдающего в микроскоп за кривой линией. Стараясь разглядеть более тонкую структуру, исследователь с удивлением видит, что в окуляре микроскопа ничего не меняется. Это хорошо видно на рисунке 1.7 (рисунок автор взял из книги Фейнман Р., Хибс А. Квантовая механика и интегралы по траекториям. – М.: Мир. 1968).

Математическую формулировку самоподобия фрактальных объектов дадим интуитивным, очевидным образом. Растянем или сожмем кривую линию в  $\eta$  раз, так что новая длина будет

$$L * = \eta L. \quad (1.5)$$



**Рис. 1.7.** Изменяя поле зрения,  
будем наблюдать одну и ту же картину

Величину  $\eta$  называют масштабным множителем. Поскольку самоподобие означает, что любая часть кривой подобна всей линии, то измерение новой длины можно осуществить масштабом, в  $\eta$  раз отличным от исходного масштаба, т. е.

$$\chi^* = \eta \chi. \quad (1.6)$$

Два выражения (1.5) и (1.6) составляют математическую формулировку второй аксиомы фрактальной геометрии – самоподобия фрактальных объектов. Используя формулу Мандельброта – Ричардсона (1.4), второй аксиоме можно придать компактную (и абстрактную!) формулировку, именно:

$$\eta L = C \cdot (\eta \chi)^{1-D}. \quad (1.7)$$

Надо только учитывать, что здесь скобки представляют собой оператор, означающий, что сначала надо задавать масштабный множитель, и только после этого можно будет возводить в степень. Формула (1.7) означает, что *любой участок фрактальной линии обладает одной и той же фрактальной размерностью*.

Теперь у нас есть все, чтобы решать разнообразные задачи, связанные с фрактальным описанием геометрических и физических объектов.

Формулы Мандельброта – Ричардсона (1.4) и самоподобия (1.7), несмотря на формальную схожесть, независимы друг от друга. Они получены в результате обобщения экспериментов – измерения длины и наблюдение линии в различных масштабах. Аксиомы фрактальной

геометрии составляют два уравнения для трех величин – длины, масштаба и фрактальной размерности. В качестве свободного параметра, очевидно, надо брать фрактальную размерность, ее можно определить либо опытным путем, либо вычислить математически, либо установить методами теоретической физики, рассматривая детальный механизм явления. Природные объекты описываются геометрическими и физическими величинами. Если эти объекты обладают свойствами многомасштабности и самоподобия, т. е. являются фрактальными, то геометрические и физические величины будут связаны между собой степенным образом. Это приводит к появлению обилия степенных показателей. Если после измерений или другим способом определена размерность фрактального объекта, то постулаты позволяют выразить через найденную размерность все степенные показатели. Это одна из целей научной работы – свести многообразие явлений и процессов как можно к меньшему числу способов их описания.

#### § 4. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

При решении различных задач бывает удобным использовать различные математические формулировки основных положений фрактальной геометрии. Дадим одну из возможных формулировок. Замечаем, что в формуле (1.6)  $\chi^* = \eta \chi$  сомножители входят равным образом. Их переобозначение

$$\eta \leftrightarrow \chi \quad (1.8)$$

не изменит общего вида самой формулы (1.6). Можно считать  $\eta$  масштабом, а  $\chi$  – масштабным множителем. Это легко понять. Чтобы измерить шестиметровую длину, нужно двухметровый эталон приложить 3 раза, а можно трехметровый эталон приложить всего 2 раза. На практике масштабный множитель  $\eta$  выбирают в виде  $\eta = 1/R$ , где  $R$  есть линейный размер области, содержащий фрактальный объект.

Рассмотрим, к чему приводит условие самоподобия для числа шагов  $N(\chi)$ . После масштабного преобразования новая длина станет равной  $L^* = C \cdot \chi^{1-D}$ , если здесь заменить  $\chi^*$  на  $\eta \chi$ , то длина при-

мет следующий вид:  $L^* = C \cdot \eta^{1-D} \chi^{1-D}$ . Но здесь  $C \chi^{1-D}$  есть старая длина  $L$ , равная  $N(\chi) \cdot \chi$ , т. е.

$$L^* = \eta^{1-D} N(\chi) \chi. \quad (1.9)$$

С другой стороны,  $L^* = N(\chi^*) \chi^*$  или, заменяя  $\chi^*$  на  $\eta \chi$ :

$$L^* = N(\eta \chi) \cdot \eta \chi. \quad (1.10)$$

Сравнивая полученные формулы (1.9) и (1.10) и проведя простые сокращения, в итоге приходим к замечательному результату:

$$N(\eta \chi) = \eta^{-D} N(\chi). \quad (1.11)$$

В таком виде обычно и записывают условие самоподобия, подразумевая под  $N$  любую функцию от своих аргументов с отличным от  $D$  показателем. В статистической физике закон, подобный (1.11), обосновывают гипотезой масштабной инвариантности. Например, если  $F$  –

свободная энергия,  $\tau = \frac{|T - T_c|}{T_c}$  – безразмерная температура, то вблизи

фазового перехода, согласно гипотезе масштабной инвариантности:

$F(\eta \tau) = \eta^{-\alpha} F(\tau)$ . Заменяя  $\eta = \frac{1}{\tau}$ , получим  $F(1) = \tau^{-\alpha} F(\tau)$ , или

$F(\tau) = \tau^{\alpha} F(1)$ . Отсюда теплоемкость (при постоянном давлении)

$$C = \frac{\partial F(\tau)}{\partial \tau} = \frac{const}{\tau^{1-\alpha}},$$

она имеет аномальное поведение: если  $\alpha < 1$ , то теплоемкость  $C$  расходится (стремится в бесконечность) при  $\tau \rightarrow 0$ .

Самоподобие в форме (1.11) и переобозначение (1.8) составляют альтернативную формулировку основных положений фрактальной геометрии. Действительно, после переобозначения формула (1.11) примет вид  $N(\eta \chi) = \chi^{-D} N(\eta)$  и длина станет равной  $N(\eta \chi) \eta \chi = \chi^{1-D} \eta N(\eta)$ . Если здесь заменить  $\chi$  на  $\chi^* / \eta$  и ввести обозначение  $C_\eta = \eta^D N(\eta)$ , то получим  $L^* = C_\eta \cdot \chi^{1-D}$ . Убрав теперь звездочки, находим

$$L = C_{\eta} \cdot \chi^{1-D}.$$

Таким образом, применение формул (1.8) и (1.11) сразу привело к результату (1.4), причем коэффициент пропорциональности оказался неопределенным масштабным множителем  $C_{\eta}$ .

**Задача 1.** Получить из альтернативной формулировки результат (1.7).

## § 5. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИЕРАРХИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

На практике, имея реальный объект, фрактальную размерность находят после необходимых тщательных измерений. Но для алгебраических и геометрических иерархических структур их размерность можно *вычислить*.

**Квадрат и круг.** В качестве первого примера рассмотрим квадрат стороной  $a$  (рис. 1.8).

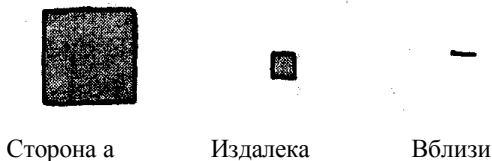
Его периметр  $L = 4a$ . Согласно методу подсчета раствором циркуля сначала выберем масштаб  $\chi = a$ , чтобы обойти периметр, циркуль должен сделать 4 шага, т. е.  $N = 4$ . Если взять  $\chi = a/2$ , то потребуется  $N = 8$  шагов. Для удобства выпишем результаты подсчета в следующем виде:

если $\chi = a$	то, $N = 4$
$\chi = a/2$	$N = 8 = 4 \cdot 2$
$\chi = a/4 = a/2^2$	$N = 16 = 4 \cdot 2^2$
...	...
$\chi = a/2^n$	$N = 4 \cdot 2^n$

Отсюда длина  $L = N \cdot \chi = 4a$  и, согласно (1.3), фрактальная размерность

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(4 \cdot 2^n)}{\ln(2^n/a)} = 1.$$





**Рис. 1.8.** Квадрат издалека выглядит точкой, а вблизи – прямой линией

С размерностью, равной 1, кривая, образующая периметр квадрата, не будет самоподобной, любой отрезок стороны квадрата не может повторить свойства всего квадрата. Действительно, если смотреть издалека, квадрат будет выглядеть как точечный объект. Вблизи увидим только отрезок какой-либо стороны. В разных масштабах квадрат выглядит по-разному, а его периметр не зависит от масштаба.

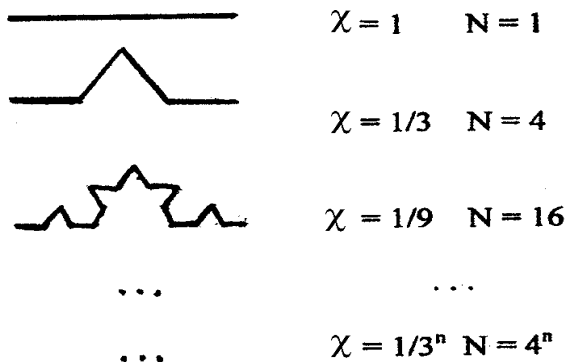
Для круга радиусом  $R$  выберем масштаб как  $\chi = R \cdot 2\pi / n$ , где  $n$  – целое число. По окружности этот масштаб уложится  $N = n$  раз, откуда  $L = N \chi = 2\pi R$  и размерность

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(n / 2\pi R)} = 1.$$

Издалека круг выглядит как точечный объект, а вблизи увидим только небольшую часть дуги. Самоподобия вообще нет.

**Триадная кривая Коха.** Необычные свойства фрактальности изломанной линии ярко проявляются у триадной кривой Коха (Helge von Koch, 1904). Процесс ее построения выглядит следующим образом: берем единичный отрезок, делим его на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. В результате образуется ломаная, состоящая из четырех звеньев длины  $1/3$ . На следующем шаге повторяем операцию для каждого из четырех получившихся звеньев. Повторяя описанное построение, в пределе получаем кривую, которая и есть кривая Коха. Если выбрать масштаб  $\chi_1 = 1$ , то он уложится на отрезке единичной длины один раз:

$N_1 = 1$ . Следующим шагом является разбиение отрезка на три равные части. Далее среднюю часть выбрасываем, а на ее месте строим треугольную «шляпку». Взяв  $\chi_2 = 1/3$ , укладываем его 4 раза на полученную ломаную кривую со «шляпой», т. е.  $N_2 = 4$  (рис. 1.9). Далее каждый маленький отрезок делим на три части и средние части выбрасываем, а на их месте также строим «шляпки».



**Рис. 1.9.** Триадная кривая Коха. В любом масштабе можно взять отрезок и провести аналогичное построение

В итоге получаем триадную кривую Коха – один из стандартных примеров того, что кривая имеет размерность  $D > 1$ . Для  $n$ -го построения получаем  $\chi_n = 1/3^n$  и  $N_n = 4^n$ , откуда

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln 1/\chi_n} = \frac{\ln 4^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1.26.$$

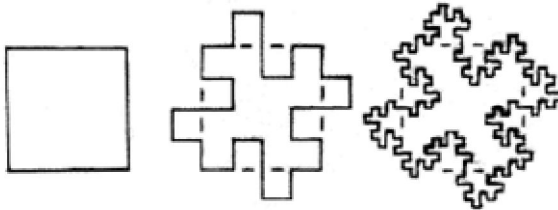
Таким образом, триадная кривая Коха имеет фрактальную размерность  $D = 1.26$ . Ее длина  $L = N \chi = (4/3)^n$  неограниченно растет при увеличении  $n$ .

**Кривая Гивена.** По аналогии с последними построениями, которые называются иерархическими, можно привести множество других примеров фрактальных линий, каждая со своей размерностью. Напри-

мер, кривая Гивена строится так же, как и кривая Коха, только вместо треугольной шляпки строится прямоугольная. Здесь масштаб  $\chi = 1/3$  при первой итерации необходимо уложить  $N = 5$  раз, чтобы измерить длину кривой Гивена. Тогда из соотношения  $5 = (1/3)^{-D}$  находим фрактальную размерность кривой Гивена:  $D = \ln 5 / \ln 3 = 1.465$ .

Можно провести и прямоугольное построение, например, на сторонах квадрата (рис. 1.10). При этом каждая сторона делится на четыре равные части, и на этих частях строятся прямоугольные «шляпки». В итоге получаем другую кривую Гивена. Для этого случая легко находим, что длина периметра растет как  $2^n$ , а его фрактальная размерность

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 4^n} = 3/2 = 1.5.$$

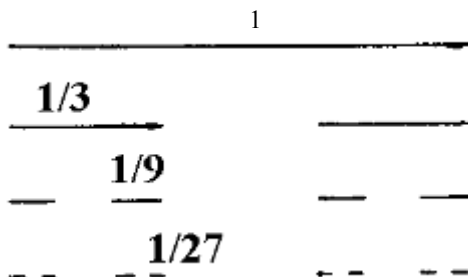


**Рис. 1.10.** Прямоугольное построение (кривая Гивена); каждая сторона квадрата делится на четыре равные части

Разумеется, аналогичное построение можно провести и для триадной кривой Коха.

**Канторовское множество.** Исторически первый геометрический фрактальный объект был получен следующим образом (Cantor, 1850). Возьмем отрезок единичной длины (рис. 1.11). Разделим его на три равные части и среднюю часть выбросим. Для оставшихся двух отрезков повторим операцию удаления средней части и т. д. В итоге получаем структуру, которую называют «канторовской пылью». Чтобы вычислить ее размерность, выпишем цепочку подсчетов:

если  $\chi = 1$      $\chi = 1/3$      $\chi = 1/3^2$     ...     $\chi = 1/3^n$ ,  
то  $N = 1$      $N = 2$      $N = 2^2$     ...     $N = 2^n$ .



**Рис. 1.11.** Канторовское построение;  
первые три шага

Отсюда находим

$$D = \lim \frac{\ln N}{\ln 1/\chi} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0.63 \cdot$$

Для канторовского множества фрактальная размерность оказывается меньше единицы.

Обратим внимание, что для «канторовой пыли»  $L = \chi \cdot N = (2/3)^n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . В то время как для триадной кривой Коха  $L = \chi \cdot N = (4/3)^n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Геометрический ряд.** Алгебраические структуры позволяют аналитически вычислять фрактальную размерность. В качестве примера рассмотрим геометрический ряд  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{N}, \frac{1}{N+1} \dots$ . Расстояние между соседними членами ряда будет  $\chi = \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} = \frac{1}{N(N+1)}$ , или  $\chi \sim 1/N^2$  при  $N \gg 1$ . Отсюда  $N \sim \chi^{-1/2}$ . Сравнивая с формулой (1.2) ( $N \sim \chi^{-D}$ ), находим фрактальную размерность геометрического

ряда:  $D = 1/2$ . Поскольку  $D < 1$ , то геометрический ряд является еще одним примером канторовского множества.

**Задача 2.** Найти фрактальную размерность ряда  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9} \dots \frac{1}{N^2} \dots$ .

## § 6. ДВУХ - И ТРЕХМЕРНЫЕ ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Фрактальные линии все же ассоциируются с одномерными образованиями, поэтому определяемую формулой Мандельброта – Ричардсона (1.3) фрактальную размерность можно обозначить как  $D_1$ . Поверхность, образованная горами и впадинами, также является фрактальным объектом. Ее фрактальную размерность обозначим как  $D_2$ . Фрактальную поверхность можно сложить, как меха аккордеона, и заполнить весь объем, поэтому  $D_2$  может принять значение, равное 3. Если поверхность испещрена дырками, то ее фрактальная размерность может быть и меньше единицы.

Таким образом,

$$0 < D_2 < 3,$$

т. е. как и для  $D_1$ .

Если объемное тело покоится, то ее размерность равна 3. Пробуравив во многих местах такое тело во всем его объеме. Оно уже будет занимать меньшее пространство, станет фрактальным объектом с размерностью  $D_3 < 3$ . Внутренность можно высверлить так, что от тела почти ничего не останется, размерность будет стремиться к нулю. Видим, таким образом, что для любого фрактального объекта

$$0 < D_E < 3, \quad (1.12)$$

где через  $E$  обозначили размерность евклидова пространства:  $E = 1, 2, 3$ .

Площадь  $S$  фрактальной поверхности можно измерить клетками, площадью  $\chi \times \chi = \chi^2$ . Если их потребуется  $N(\chi)$ , то площадь  $S$  будет

$$S = N(\chi) \cdot \chi^2.$$

Поскольку, согласно (1.2),  $N = C \cdot \chi^{-D}$ , где под  $D$  уже надо иметь в виду  $D_2$ , то

$$S = C \cdot \chi^{2-D_2}. \quad (1.13)$$

Эта формула означает многомасштабность, необходимая для измерения площади фрактальной поверхности. Для самоподобия фрактальной поверхности необходимо  $\chi$  заменить на  $\eta\chi$ . При этом в силу двухмерности площадь  $S$  заменяется на  $\eta^2 \cdot S$ . Таким образом, самоподобие для двумерных фрактальных объектов принимает следующий символический вид:

$$\eta^2 S = C \cdot (\eta\chi)^{2-D_2}. \quad (1.14)$$

Это выражение надо расшифровывать следующим образом. Растянем или сожмем фрактальную поверхность в  $\eta$  раз, ее площадь  $S$  станет равным

$$S^* = \eta^2 S.$$

Поскольку любая часть поверхности подобна всей поверхности, то измерение площади можно осуществить масштабом

$$\chi^* = \eta \chi.$$

Какую бы замкнутую линию не нарисовали на листке, площадь ограниченной ею фигуры будет не больше, чем площадь листка. Периметр при уменьшении масштаба может расти неограниченно, заключенная внутри периметра фигура тем не менее имеет конечную площадь. Поскольку  $C \cdot \chi^{1-D}$  есть периметр  $L$ , то (1.13) примет вид  $S = L(\chi) \cdot \chi$ , и при стремлении  $\chi \rightarrow 0$  площадь остается конечной величиной.

Пусть фрактальный объект вложен в объем. Для измерения объема рассматриваемого объекта берем кубик объемом  $\chi \times \chi \times \chi = \chi^3$ . Если их потребуется  $N$  штук, то объем  $V$  фрактального тела будет

$$V = N(\chi) \chi^3 = C \cdot \chi^{3-D_3}. \quad (1.15)$$

Самоподобие объемного фрактального тела будет иметь следующий вид:

$$\eta^3 V = C \cdot (\eta\chi)^{3-D_3}. \quad (1.16)$$

Одна из задач фрактальной геометрии – установление связи между размерностями в разных евклидовых пространствах. В следующем параграфе покажем, как для фрагментов растительности  $D_1$ ,  $D_2$  и  $D_3$  связаны между собой.

Мы рассмотрели величины  $\chi^n$  при  $n = 0, 1$  и  $3$ . При каждом значении  $n$  величины  $\chi^n$  представляют собой определенный масштаб измерения – длины, площади или объема. Возникает законный вопрос, а что будет при  $n = 0$ ? В Евклидовой геометрии для любой величины  $a$  будет  $a^0 = 1$ . Для фрактальной геометрии положим  $\chi^0 = \hat{1}$ . Этим самым ввели некоторый единичный элемент  $\hat{1}$ . Здесь о нем пока ничего сказать нельзя. Но при построении фрактального исчисления в главе 3 единичный элемент появится естественным образом и будет играть свою определенную роль.

## § 7. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ФРАГМЕНТОВ РАСТИТЕЛЬНОСТИ

Одними из канторовских множеств, реализуемых в природе, являются фрагменты растительности. Лес, деревья, ветки, сучья, листва и хвоя образуют иерархическую структуру. Возьмем ветку, ее длину можно измерить одним масштабом. Переломим ветку пополам, полученные кусочки отодвинем друг от друга. Чтобы измерить их длину, понадобится уже два масштаба. Продолжая переламывать веточки, в итоге получаем канторовскую одномерную структуру. Построение математически описывается следующим образом.

Возьмем единичный отрезок, чтобы измерить его длину, достаточно единичный масштаб приложить один раз. Таким образом, для этого нулевого измерения имеем:

$$\chi_0 = 1, N_0 = 1, L_0 = 1.$$

Отрежем с обоих концов отрезка маленькие кусочки длиной  $1/\alpha$ , где по определению  $\alpha > 2$ . Случай  $\alpha = 2$  означает просто деление отрезка пополам. Величину  $\alpha$  можно назвать параметром фрагментации. Среднюю часть удалим, так что остаются два отрезка, каждый длиной  $1/\alpha$ . Описываемая процедура называется канторовским построением. Теперь, выбирая масштаб, равный  $1/\alpha$ , и прикладывая его два раза, измеряем длину полученных отрезков, т. е. для этого первого измерения имеем:

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha}, N_1 = 2, L_1 = \frac{2}{\alpha}.$$

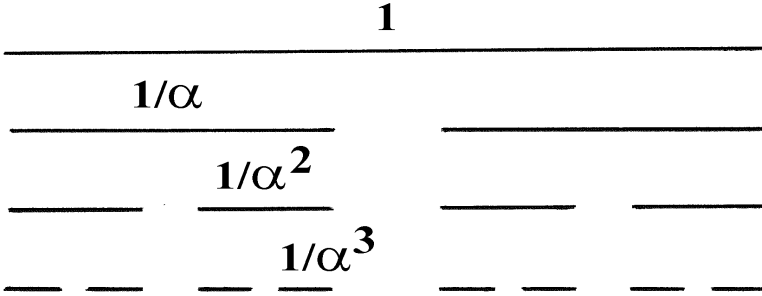
Для каждого из отрезков повторяем нашу процедуру, как показано на рисунке 1.12.

Реальная картина фрактальной структуры образуется после бесконечного числа итераций, т. е. иерархическое построение предполагает, что  $n \gg 1$ . В этом случае слагаемым  $\ln C$  можно пренебречь. Сокращая в оставшемся выражении число  $n$ , находим  $D_1 = 1 + \frac{\ln 2 / \alpha}{\ln \alpha}$  или, используя известные свойства логарифма:



$$D_1 = \frac{\ln 2}{\ln \alpha}. \quad (1.17)$$

Поскольку  $\alpha > 2$ , то  $D_1 < 1$ . Теперь, располагая ветки и сучья вдоль прямой определенным образом, т. е. задавая параметр фрагментации  $\alpha$ , мы всегда можем вычислить их фрактальную размерность.



**Рис. 1.12.** Первые три шага иерархического построения кантровского  $\alpha$  - множества

Расположение фрагментов растительности на плоскости математически описывается следующим образом. Пусть плоскость представляет собой единичный квадрат, т. е. его площадь  $S = 1$ . Сначала имеем:

$$\chi_0 = 1, N_0 = 1, S_0 = 1.$$

Вырежем на единичном квадрате крест, как показано на рисунке 1.13. Для оставшейся фигуры будем иметь:

$$\chi_1 = \frac{1}{\alpha}, N_1 = 4, S_1 = \frac{4}{\alpha^2}.$$

(Напомним, что  $S_1 = N_1 \chi_1^2$ ). После  $n$  итераций получаем:

$$\chi_n = \left( \frac{1}{\alpha} \right)^n, N_n = 4^n, S_n = \left( \frac{4}{\alpha^2} \right)^n.$$

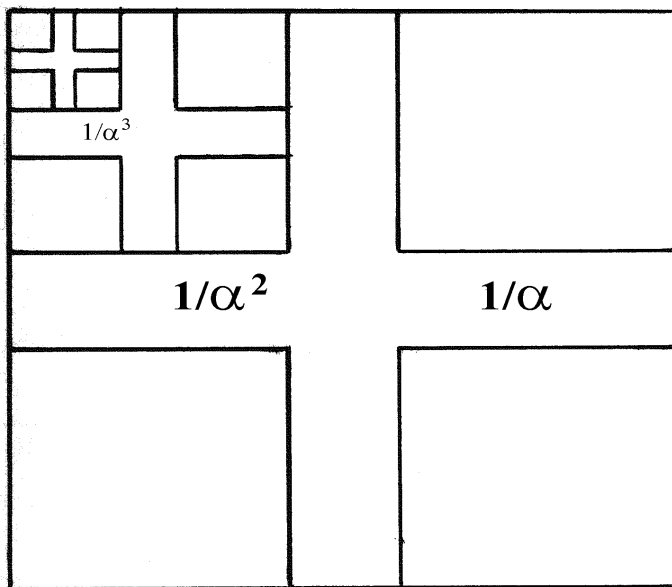
Опуская неопределенный множитель  $C$ , согласно формуле (1.2),  $(N_n = C \cdot \chi_n^{-D_2})$  имеем  $\left(\frac{4}{\alpha^2}\right)^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n(2-D_2)}$ . Логарифмируя, получаем

$$D_2 = 2 + \frac{\ln 4 / \alpha^2}{\ln \alpha} = \frac{\ln 4}{\ln \alpha} = \frac{\ln 2^2}{\ln \alpha}. \quad (1.18)$$

Перепишем (1.17) и (1.18) в следующем виде:  $D_1 = \frac{\ln 2}{\ln \alpha}$ ,

$D_2 = \frac{\ln 2^2}{\ln \alpha}$ . Если ввести размерность  $E$  евклидова пространства –местилище фрактального объекта, то последние соотношения можно переписать в следующем виде:

$$D_E = \frac{\ln 2^E}{\ln \alpha}, \text{ где } E = 1, 2. \quad (1.19)$$



**Рис. 1.13.** Канторовское двухмерное  $\alpha$ -множество

Из (1.19) следует полезное соотношение:

$$D_{E+1} = D_E + \frac{\ln 2}{\ln \alpha},$$

которое устанавливает связь между фрактальными размерностями фрагментов растительности. Соотношение показывает, что связь между фрактальными размерностями разных евклидовых пространств в общем случае хотя и линейное, но со сложным аддитивным слагаемым.

Обобщением на трехмерное пространство будет придание в соотношении (1.19) значения  $E = 3$ , тогда  $D_3 = \frac{\ln 2^3}{\ln \alpha}$ . К последнему

выражению можно прийти следующим образом. Пусть фрактальный объект вложен в объем. Для измерения его объема  $V$  необходимо  $N(\chi)$  кубиков объемом  $\chi^3$  каждый, т. е.

$$V = N(\chi) \chi^3 = C \chi^{3-D}. \quad (1.20)$$

Теперь выберем единичный куб. В начале, как обычно, имеем  $N_0 = 1$ ,  $V_0 = 1$ ,  $\chi_0 = 1$ . Следующим шагом будет вырезание крестовины, тогда  $N_1 = 8$ ,  $V_1 = \frac{8}{\alpha^3}$ ,  $\chi_1 = \frac{1}{\alpha}$ . После  $n$  итераций:

$$N_n = 8^n, V_n = \left(\frac{8}{\alpha^3}\right)^n, \chi_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n.$$

Из соотношения (1.20) получаем

$$\left(\frac{8}{\alpha^3}\right)^n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n(3-D_3)},$$

откуда  $D_3 = 3 + \frac{\ln 8 / \alpha^3}{\ln \alpha} = \frac{\ln 8}{\ln \alpha} = \frac{\ln 2^3}{\ln \alpha}$ . Этим самым мы доказали формулу (1.19) и для  $E = 3$ .

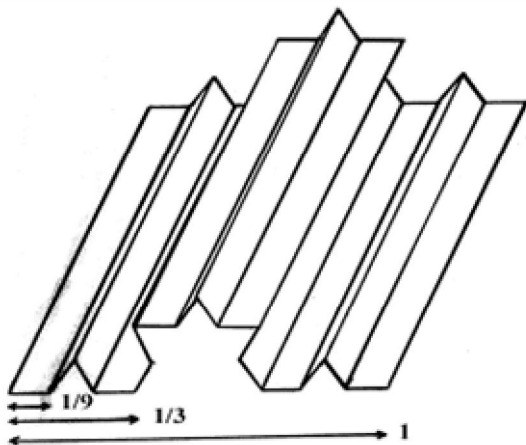
**Задача 3.** На рисунке 1.14 представлена гофрированная поверхность. Найти ее фрактальную размерность.

**Решение.** После  $n$ -го итерационного построения имеем:

$$N_0 = 4^n, \quad S_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad \chi_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Отсюда

$$D_2 = 2 + \frac{\ln 4/3}{\ln 3} = 1 + \frac{\ln 4}{\ln 3} = 2.262.$$



**Рис. 1.14.** Гофрированная поверхность,  
построенная по алгоритму Коха

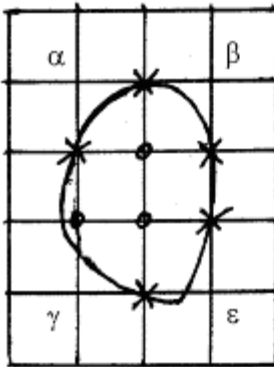
## **§ 8. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФИГУРЫ**

Один из способов измерения площади состоит в подсчете числа клеток сетки, находящихся внутри рассматриваемой фигуры (рис. 1.15а). Площадь овальной фигуры на рисунке примерно равна шести клеткам, умноженных на площадь самой клетки. Мы изложим один из самых красивых методов измерения площади – по подсчету не клеток, а точек, находящихся как внутри, так и на границе рассматриваемой фигуры. Определим  $n$  как число точек внутри фигуры, а  $m$  – число точек на границе фигуры. Тогда в единицах площади квадрата площадь самой фигуры будет

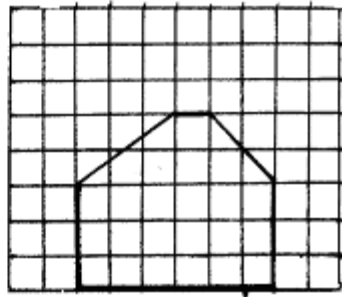
$$A = n + \frac{m}{2} - 1. \quad (1.21)$$

Эту формулу установил George Pick в 1899 г. Так, для фигуры на рисунке 1.15б  $n = 18$ ,  $m = 16$ , поэтому  $A = 18 + 16/2 - 1 = 25$  (для рассматриваемой фигуры это точный результат). Для произвольной фигуры, как на рисунке 1.15а, сначала надо подсчитать минимальное число граничных точек, т. е. те, которые явно принадлежат границе фигуры. Кружочками обозначены внутренние точки, для нашего примера  $n = 3$ . Крестиками показаны граничные точки, у нас  $m = 5$ . Затем подсчитывается максимальное число граничных точек – всех точек, находящихся с внешней стороны вблизи границы фигуры. При нашем подсчете добавляются точки  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\varepsilon$ , так что в этом случае  $m = 9$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{min: } n = 3, m = 5, \text{ площадь } A &= 4.5, \\ \text{max: } n = 3, m = 9, \quad \dots \quad A &= 6.5. \end{aligned}$$



а



б

**Рис. 1.15.** Измерение площади с помощью клеток сетки и точек пересечения узлов сетки с границей фигуры

Эти значения первого порядка точности к точному значению. Взяв среднее, получим наиболее близкое значение для площади фигуры:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (A_{\min} + A_{\max}).$$

Для нашего примера площадь  $A = \frac{1}{2} \cdot (4,5 + 6,5) = 5.5$ . Это значение будет второго порядка точности к истинному значению площади.

Формула (1.21) верна, если внутри фигуры нет отверстий. Если внутри плоской фигуры имеются  $k$  отверстий, то можно показать, что (1.21) заменяется на следующую формулу:

$$A = n + \frac{m}{2} - 1 + k. \quad (1.22)$$

**Задача 4.** Обобщить формулы (1.21) и (1.22) на объемные фигуры.

**Задача 5.** Выведите формулы (1.21) и (1.22).

## § 9. СООТНОШЕНИЕ ПЕРИМЕТР – ПЛОЩАДЬ

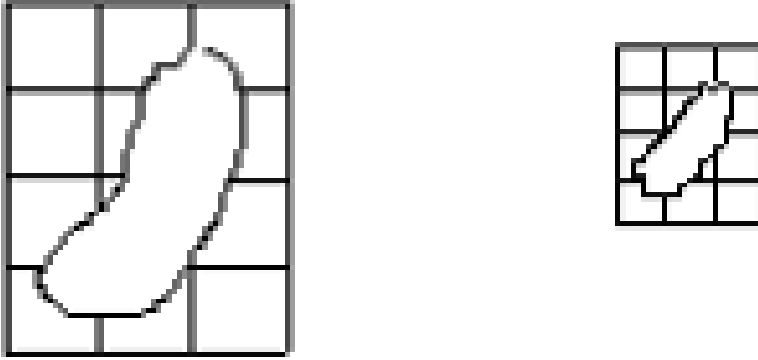
Площадь некоторой фигуры (острова) можно определить, сопоставив ей определенное число квадратов сетки. Если  $N(\chi)$  – число таких квадратов,  $\chi^2$  – площадь каждого из них, то площадь всего острова будет  $S = N(\chi) \chi^2$ . В пределе при  $\chi \rightarrow 0$  произведение  $N(\chi) \chi$  стремится к  $L(0)$ , так что  $S = L(\chi) \chi$ , и при  $\chi \rightarrow 0$  площадь остается конечной величиной.

Конечность площади согласуется с нашей интуицией. Какую бы фрактальную кривую не нарисовали на листке, площадь ограниченной ею фигуры будет не больше, чем площадь этого листа. Таким образом, хотя фрактальная береговая линия и неограниченно возрастает по длине при уменьшении масштаба, очерченная ею замкнутая фигура тем не менее имеет конечную площадь. Интересно найти соотношение, связывающее длину береговой линии (периметра) и площадь острова. Это можно сделать, рассматривая два подобных острова разной площади и выбирая масштаб, зависящий от площади (рис. 1.16). Размер одной ячейки  $\chi_1$ , другой –  $\chi_2$ . Острова подобны друг другу в отношении

$\eta$ . Размер ячейки связан с площадью фигуры соотношением  $\chi \sim \sqrt{S}$ .

Поскольку острова самоподобны, то самоподобны и их береговые линии, поэтому  $\chi_2 = \eta \chi_1$ , или

$$\chi_2 = \eta \sqrt{S_1}. \quad (1.23)$$



**Рис. 1.16.** Два подобных острова

При таком выборе масштабов числа  $N(\chi)$  начинают играть роль неопределенных множителей  $N_\eta$ . Из-за самоподобия фигур числа  $N_{\eta_1}$  и  $N_{\eta_2}$  не зависят от размеров и с точностью до масштабного множителя  $C$  равны друг другу; на рисунке 1.16 эти оба числа равны 12.

Для отношения периметров  $L_1$  и  $L_2$  имеем  $L_1 / L_2 = (\chi_1 / \chi_2)^{1-D}$ , откуда  $L_1 = (\chi_1 / \chi_2)^{1-D} L_2$ . Здесь сначала подставим  $L_2 = N_{\eta_2} \chi_2$ , а затем, согласно (1.23), заменим  $\chi_2$  на  $\eta \sqrt{S_1}$ . Тогда получим

$$L_1 = N_{\eta_2} \eta^D \chi_1^{1-D} S_1^{D/2}.$$

Теперь вместо  $N_{\eta 2}$  подставим  $N_{\eta 1}$ , после чего становится возможным убрать индекс 1. В итоге находим искомое соотношение Мандельброта, связывающее периметр и площадь:

$$L = C_{\eta} \chi^{1-D} S^{D/2}, \quad (1.24)$$

где в коэффициент  $C_{\eta}$  мы спрятали все неопределенные масштабные множители.

Рассмотрим квадрат стороной  $a$ . На сторонах квадрата будем строить перпендикуляры так, как это было сделано на рисунке 1.10. Здесь очевидно, что площадь исходного квадрата не меняется, т. е.  $S = a^2$ , или  $a = \sqrt{S}$ . Для масштаба имеем  $\chi = \sqrt{S} / 4^n$ , откуда, логарифмируя, получаем

$$n = \frac{\ln \chi / \sqrt{S}}{\ln 1/4}.$$

Тогда выражение для периметра фигуры примет вид:

$$L_n = 4 \cdot 8^n \cdot \chi = 4 \chi \exp\left(-\frac{3}{2} \ln \frac{\chi}{\sqrt{S}}\right).$$

Поскольку фрактал размерность  $D = 3/2$ , то получаем:

$$L_n = L(\chi) = 4 \chi \exp\left(-D \ln \frac{\chi}{\sqrt{S}}\right) = 4 \chi^{1-D} S^{D/2}.$$

Мы выразили периметр через площадь, т. е. пришли к результату (1.24).

Хорошим примером применения соотношения (1.24) является определение фрактала облаков. Для этого сфотографируем разные участки облачного неба. Далее выбираем какой-нибудь один масштаб  $\chi$  для всех снимков и с ее помощью подсчитываем периметр и площадь получаемых на снимках поперечных сечений облаков. Теперь строим график

$$\ln L = \text{const} + D \ln \sqrt{S},$$

и по его наклону находим фрактал  $D$  (обычно  $D = 1,35$ ). Наблюдая облака, иногда можно явно увидеть их самоподобие (рис. 1.17). Другими



словами, изменяя масштаб, можно маленькое облачко легко совместить с большим облаком.



**Рис. 1.17.** Самоподобие облаков; нижняя волнистая линия – горизонт

## § 10. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОСТЬ

Пусть  $R$  – линейный размер области, в которой расположена фрактальная линия. Это может быть расстояние по прямой от одного конца линии до другого. Выше было указано, что масштаб измерения  $\chi$  удобно выбирать в виде:

$$\chi = \frac{1}{R}. \quad (1.25)$$

Подставим (1.25) в формулу (1.7):

$$\frac{1}{R} L = C \left( \eta \frac{1}{R} \right)^{1-D}.$$

Поскольку масштаб измерения определен, то скобки здесь можно раскрыть. Проведя очевидные сокращения, получаем соотношение, связывающее длину  $L$  фрактальной линии с линейным размером области  $R$ :

$$L \sim R^D. \quad (1.26)$$

В этой формуле все множители, не связанные с  $L$  и  $R$ , не выписаны. Формулу (1.26) можно обобщить на двухмерной поверхности и трехмерном объеме, а именно:

$$S \sim R^D, \quad V \sim R^D. \quad (1.27)$$

Величина  $R$  для каждого случая сохраняет свой смысл – линейный размер области, где находится фрактальный объект. Очевидно, что для каждого случая под фрактальной размерностью надо понимать  $D_1$ ,  $D_2$  или  $D_3$ . Формулы (1.27) легко получить из условия самоподобия (1.14) и (1.15).

Применим формулу (1.26) для следующего случая. Рассмотрим кривую, состоящую из двух фрактальных линий с различными размерностями. Наша задача – найти общую фрактальную размерность. Если  $R$  – линейный размер кривой, то ее длину естественно определить как  $L \sim R^D$ , где  $D$  будет искомой фрактальной размерностью. При измерении длин каждой линии по отдельности имеем:  $L_1 \sim R_1^D$ ,  $L_2 \sim R_2^D$ , где  $R_1$  и  $R_2$  – линейные размеры линий. Поскольку общую длину можно записать как  $L = L_1 + L_2$ , то

$$R_1^D + R_2^D = R^D. \quad (1.28)$$

Здесь полагаем, что неопределенный масштабный множитель  $N(1)$  для каждого слагаемого в (1.28) один и тот же. К примеру, если кривая состоит из линии Коха с  $D = 1.261$  и линии Гивена с  $D = 1.465$ , то из уравнения

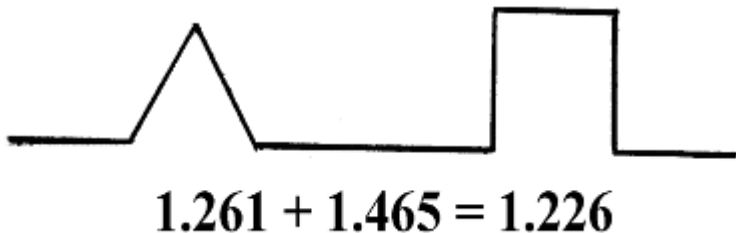
$$4 \left( \frac{1}{3} \right)^D + 5 \left( \frac{1}{3} \right)^D = 2^D$$

численным решением находим  $D = 1.226$ . Интересно, что в данном случае имеем точное решение:  $D = \ln 9 / \ln 6$ . Обратим внимание, что полученная размерность кривой меньше каждой из составляющих ее линий. Это общая теорема и она означает, что в пределе бесконечного числа линий получим гладкую линию с размерностью  $D = 1$ . На рисунке 1.18 сформулированная теорема представлена в виде нетрадиционного сложения размерностей, когда «сумма» оказывается меньше слагаемых.

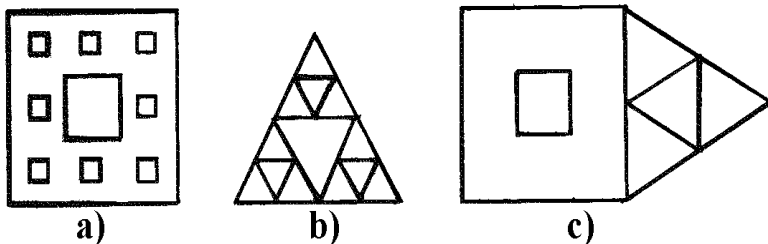
Аналогично тому, как кривая Коха является примером одномерного фрактального объекта, так ковры Серпинского (рис. 1.19а, б) явля-

ются примером двухмерного фрактального объекта. Для квадратного ковра Серпинского иерархическое вырезание квадратов приводит к следующему:

$$n - \text{ шаг итерации: } \chi_n = 1/3^n, N_n = 1/8^n.$$



**Рис. 1.18.** Мультифрактальная размерность линии, составленная из кривой Коха и кривой Гивена



**Рис. 1.19.** Ковры Серпинского:

а – квадратный, б – треугольный, в – мультифрактальная фигура

Отсюда фрактальная размерность квадратного ковра Серпинского:

$$D_2(\text{квадр}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln 1/\chi_n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} = 1.893.$$

Для треугольного ковра Серпинского:

$$n - \text{ шаг итерации: } \chi_n = 1/2^n, N_n = 1/3^n.$$

Отсюда

$$D_2(\text{треуг}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln N_n}{\ln 1/\chi_n} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.585.$$

Объединим оба ковра Серпинского, как показано на рис. 1.19.с. Из условия самоподобия (1.14), полагая  $\eta = 1/R$ , получаем  $S \sim R^D$ . Общая площадь ковров Серпинского  $S_1 + S_2 = S$ . Подставляя формулу (1.27)  $S \sim R^D$ , получим  $R_1^D + R_2^D = R^D$ . Таким образом,

$$8 \left(\frac{1}{3}\right)^D + 3 \left(\frac{1}{2}\right)^D = 2^D.$$

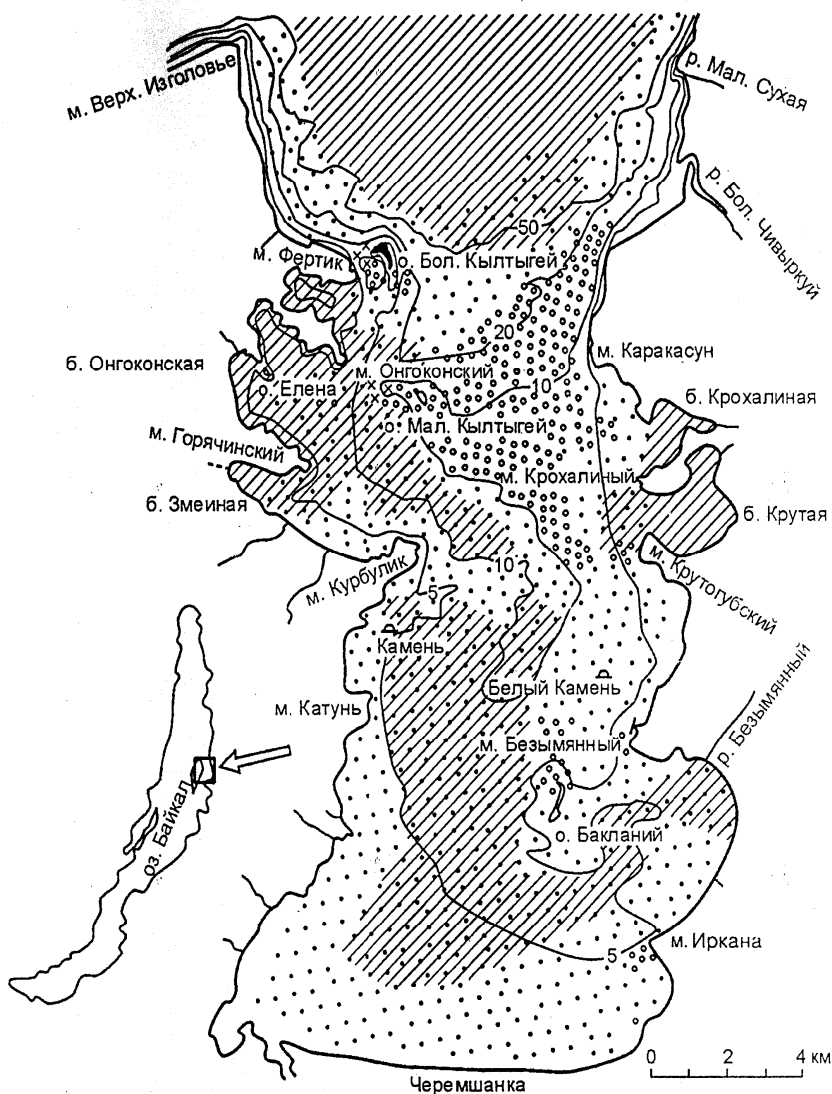
Его численного решение:  $D = 1.4483\dots$  Видим, что и здесь  $D < D_2(\text{квад})$  и  $D < D_2(\text{треуг})$ , как и для одномерных фигур.

Вычисляемая по формуле (1.25) фрактальная размерность называется мультифрактальной. В нашей книге объекты с мультифрактальной размерностью далее не рассматриваются. На Земле достаточно объектов, каждый из которых можно считать фрактальным с одним определенным значением  $D$ .

## § 11. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ЧИВЫРКУЙСКОГО ЗАЛИВА ОЗ. БАЙКАЛ

Здесь проведем небольшое научное исследование – стандартным методом, обходя циркуля, измерим фрактальную размерность реального природного объекта – Чивыркуйского залива оз. Байкал.

Озеро Байкал является интересным геологическим и геофизическим объектом. Из всего побережья оз. Байкал мы выберем Чивыркуйский залив (рис. 1.20), для которого стандартным методом измерим фрактальную размерность для полуострова от м. Фертик до м. Горячинский и береговой участок от м. Каракасун до м. Крутогубский.



**Рис. 1.20.** Чивыркуйский залив; слева – оз. Байкал, выделен квадратом. Измерения проводились по берегу полуострова от м. Фертик до м. Горячинский и по береговому участку от м. Каракасун до м. Крутогубский

Фрактальную размерность участков береговой линии оз. Байкал будем измерить, используя формулу Мандельброта – Ричардсона (1.2). Первое действие – обход раствором циркуля с шагом 20 мм от м. Фертик до м. Горячинский. Для этого потребовалось 10 шагов. Затем раствор циркуля уменьшался и производился новый подсчет шагов. Результаты всех измерений (их было 6) представлены в левых колонках таблицы 1.2. По этим данным вычислялись их логарифмы и значения наносились на график (рис. 1.21, кривая 1). Видим, что все точки легли возле прямой линии – линейной аппроксимации. Тангенс угла наклона прямой линии к горизонтальной оси как раз дает значение фрактальной размерности  $D$ . Чтобы увеличить статистику при вычислении  $D$ , используем следующий метод.

По любым двум значениям  $N_1(\delta_1)$  и  $N_2(\delta_2)$  находим одну величину:

$$D = \frac{\ln N_1 - \ln N_2}{\ln \delta_2 - \ln \delta_1}. \quad (1.29)$$

**Таблица 1.2**

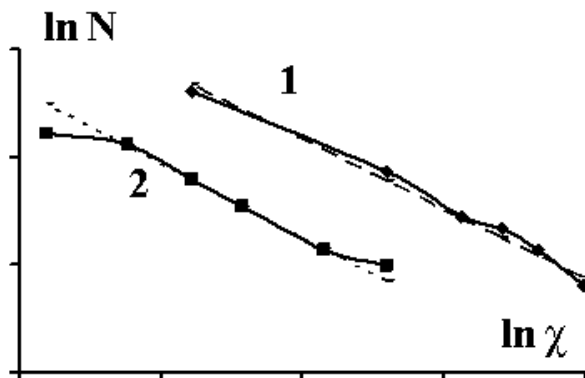
Результаты измерений для полуострова  
и береговой линии

полуостров		береговая линия	
$\chi$	$N$	$\chi$	$N$
20	10	10	12
17	14	8	14
15	17	6	21
13	19	5	27
10	29	4	37
5	61	3	41

Затем выбираются следующие измеренные значения, и вычисляется новая величина  $D$ . Таким образом, из 6 измеренных значений  $N_n(\delta_n)$ , где  $n = 1 \div 6$ , вычисляются (число сочетаний 6 по 2)

$$\frac{6!}{2!4!} = 15 \text{ величин } D_k, \text{ где } k = 1 \div 15 \text{ и } !\text{-факториал. Для этих 15}$$

величин по известным формулам



**Рис. 1.21.** Билогарифмический график зависимости числа шагов раствора циркуля от масштаба измерения для полуострова 1 ( $D = 1.30 \pm 0.02$ ) и береговой линии 2 ( $D = 1.37 \pm 0.02$ ). Пунктирные линии – линейные аппроксимации результатов измерений

$$\bar{D} = \frac{\sum_{k=1}^{k=15} D_k}{15}, \quad \Delta D = \sqrt{\frac{\overline{D^2} - \bar{D}^2}{15(15-1)}}$$

находим  $D = \bar{D} \pm \Delta D$ . В итоге получаем фрактальную размерность участка побережья от м. Фертик до м. Горячинский:  $D = 1.30 \pm 0.02$ .

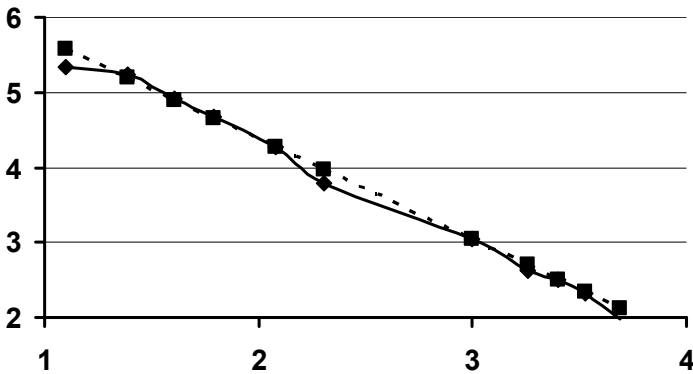
Затем рассматривался береговой участок от м. Каракасун до м. Крутогубский. Раствор циркуля с шагом 10 мм обходит кривую берега за 12 шагов. Результаты этого и других измерений представлены в правых колонках таблицы 1.2 и на рисунке 1.21, кривая 2. Используя описанный выше метод вычисления среднего  $\bar{D}$  и погрешность  $\Delta D$ , в итоге находим  $D = 1.37 \pm 0.02$ .

Существующая неточность измерения, связанная со схематичностью условной границы побережья на рисунке 1.20, позволяет предположить следующее. Береговая линия имеет по всей своей длине одинаковую фрактальную размерность. Для проверки этого положения объединим масштабированием все точки в одну линию, как

Таблица 1.3

Объединенная линия

$\chi$	$N$
3	208.4
4	188.1
5	137.3
6	106.8
8	71.2
10	44.3
20	21
26	13.8
30	12.3
34	10.1
40	7.2



**Рис. 1.22.** Объединенные масштабированием линии 1 и 2 на рис. 1.21  
 Линейная аппроксимация:  $\ln N = (7.03 \pm 0.03) - (1.33 \pm 0.03) \ln \chi$



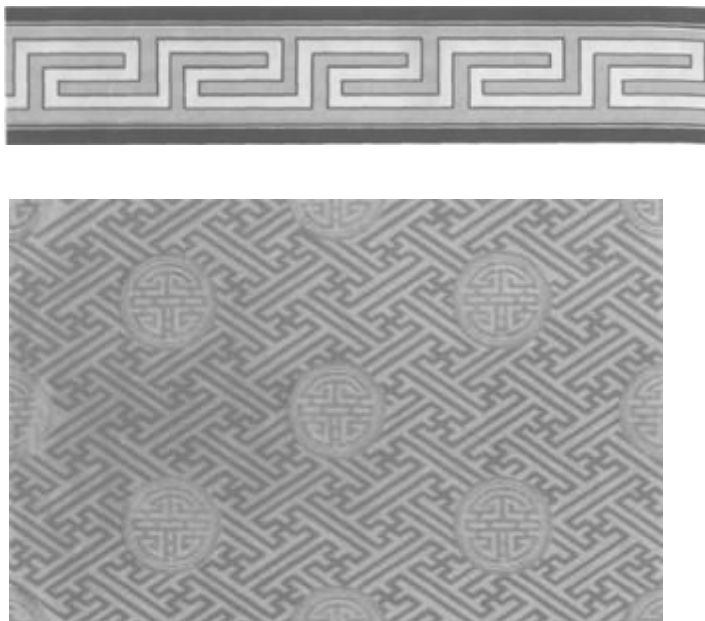
показано в таблице 1.3. Построенная по ним линия показана на рисунке 1.22. Из рисунка 1.22 следует, что  $D = 1.33$ .

Приведенные в параграфе измерения в качестве конкурсной работы проведены ученицей 9 класса Екатериной Буиновой (школа № 49, Улан-Удэ, 2004 г.).

**Задача 6.** Обоснуйте способ объединения, по которым из двух кривых 1 и 2 на рисунке 1.21 получили одну кривую на рисунке 1.22.

## **§ 12. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ УЗОРОВ И ОРНАМЕНТОВ**

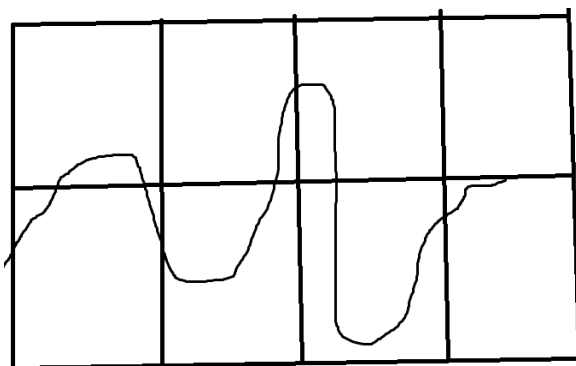
К культурным ценностям любого народа относятся узоры и орнаменты, которые широко распространены в быту, народном искусстве, архитектуре и т.д. Узоры и орнаменты мы видим везде. Они - одно из древнейших проявлений народного творчества.



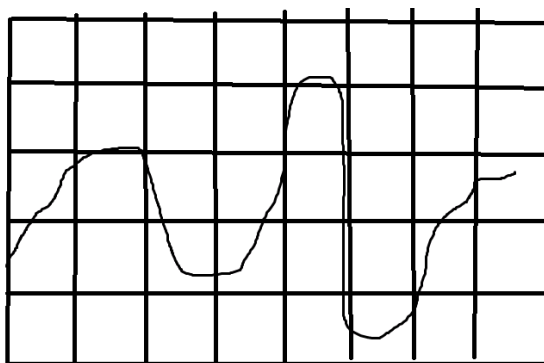
**Рис. 1.23.** Некоторые орнаменты. <http://orname.ru/>

Узоры и орнаменты относятся к осязательным и зрительным образам человеческого ощущения окружающего мира. Каждый узор несет в себе некоторую смысловую нагрузку, но эта интересная тема не является нашей темой. С ними легко можно познакомиться в ИНТЕРНЕТе. Их оказывается можно описывать и изучать математическими методами. Дело в том, что узоры и орнаменты обычно всегда располагаются на плоскости. И мы можем посмотреть, какую площадь рисунок узора занимает на плоскости. Для этого расчертим плоскость на ячейки, размер которых обозначим как  $a$ . Затем посчитаем, сколько ячеек пересекает рисунок узора. Причем  $N$  и  $a$  связаны формулой Мандельброта-Ричадсона:

$$N = C a^{-D}. \quad (1.30)$$



Размер ячейки  $a$  равна (условно) 3 см. Число ячеек  $N$ , через которые проходит линия узора, равно 7.



Размер ячейки  $a$  равна (условно) 1.5 см. Число ячеек, через которые проходит линия узора, равно 19.

**Рис. 1.24.** Примеры подсчета числа клеток, содержащих линию.

Здесь  $D$  – искомая фрактальная размерность,  $S$  – типичный во фрактальной геометрии неопределенный множитель. Фрактальная размерность у нас показывает степень заполнения узором плоской поверхности.



**Рис. 1.25.** Узоры 1-5, для которых измерялась фрактальная размерность.

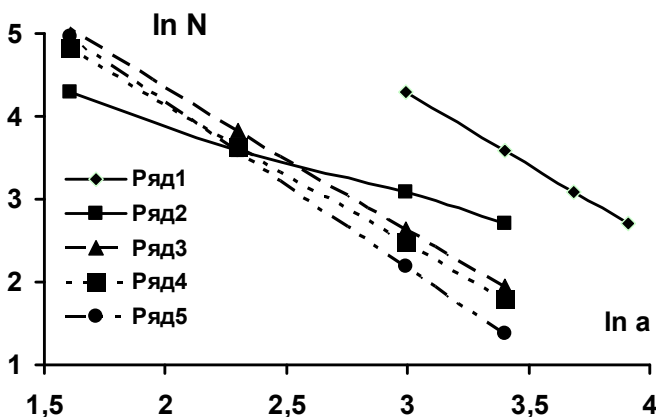


Рис. 1.26. Результаты измерений.

На рис. 1.25 показаны орнаменты, для которых измерялась фрактальная размерность. Метод расчета фрактальной размерности подробно рассмотрим на примере узора №1. Результаты измерений зависимости числа клеток, в которых располагаются линии узора, от размера сетки приведены в табл. Там же вычислены их логарифмы. На рис. 1.26 для линии 1 видно, что все точки располагаются вдоль прямой. Это означает, что зависимость  $y$  от  $x$  является линейной:

$$y = c - D x. \quad (1.31)$$

Причем, согласно формуле (1.30), коэффициент  $D$  является фрактальной размерностью.

Таблица 1.4

Размер сетки, $a$	20	30	40	50
Число клеток, $N$	73	36	22	15
$y = \ln N$	4.3	3.6	3.1	2.7
$x = \ln a$	3	3.4	3.7	3.9

Просуммируем все измеренные  $y$  и  $x$ :

$$\sum y = n c - D \sum x. \quad (1.32)$$

Здесь  $n$  – число измерений, у нас  $n = 4$ . Далее, умножим (2) на  $x$  и полученное выражение опять просуммируем:

$$\sum x y = c \sum x - D \sum x^2. \quad (1.33)$$

Теперь, (3) умножим на  $\sum x$ , а (4) на  $n$ . От полученных обоих выражений возьмем разность друг от друга, и разрешим относительно  $D$ . В итоге, находим:

$$D = \frac{\sum x \sum y - n \sum x y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}. \quad (1.34)$$

Используя табл. 1.4, находим

$$\sum x = 3 + 3.4 + 3.7 + 3.9 = 14,$$

$$\sum y = 4.3 + 3.6 + 3.1 + 2.7 = 13.7,$$

$$\sum x^2 = 9 + 11.56 + 13.69 + 15.21 = 49.46,$$

$$\sum x y = 12.9 + 12.24 + 11.47 + 10.53 = 47.14.$$

Подставляя все известные величины в (1.34), находим, что для узора 1

$$D = \frac{14 \cdot 13.7 - 4 \cdot 47.14}{4 \cdot 49.46 - 14^2} = 1.76.$$

Аналогичным образом находятся фрактальные размерности остальных узоров:

$$D(1) = 1.76, D(2) = 1.67, D(3) = 1.72, D(4) = 1.65, D(5) = 2.$$

Интересно, что для узора 5 фрактальная размерность равна 2. Это означает, что линия узора плотно заполняет всю плоскость. Это хорошо видно на рис. 1.25. С точки зрения фрактальной геометрии орнамент №5 на рис. 1.25 является фигурой Пиано.

## **ГЛАВА 2**

### **ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПРИРОДНЫХ ОБЪЕКТОВ**

В настоящей главе изложим новый метод измерения фрактальной размерности, который назовем канторовским. Новый метод измерения применим только к определенному классу фрактальных объектов – разветвленным структурам. На Земле таких структур достаточное количество, из них мы рассмотрим дельты рек, грозовые разряды и стримерные каналы. Для тундровых озер, тесно связанных с дельтой Лены, применим формулу Георга Пика. Эта формула также применима для оценки изменения со временем фрактальной размерности дельты Селенги.

#### **§ 1. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ**

Природа состоит буквально из нерегулярных, хаотических объектов. Нерегулярности земного ландшафта, впадины и холмы приводят к тому, что русла рек имеют искривленный, причудливый рисунок. Если устье реки пологое, то поток воды разольется по площади. Но всегда имеющиеся неоднородности земной поверхности поток воды разобьет на множество рукавов и притоков. В итоге пологое устье реки приобретает характерную форму треугольника (рис. 2.1). Древние греки называли такой рисунок дельтой реки. На Земле счетное количество дельт рек. Мы рассмотрим три из них – дельты рек Волги, Лены и Селенги.

Неоднородности земной поверхности приводят, помимо изгиба рек и образования их дельты, к появлению луж, болот и озер. Мы рассмотрим тундровые озера. Располагаясь на обширной площади, они играют важную роль в экосистеме Земли, реагируют на климатическую обстановку. Простое наблюдение за ними из космоса, мониторинг ареала их распределения делают тундровые озера одними из индикаторов глобального температурного режима планеты.



Рис. 2.1. Дельтообразное устье реки

Приложим к фотографической пластине металлическое острие и подадим на него высокое электрическое напряжение. После проявления на фотопластинке увидим расходящиеся во все стороны лучи, вдоль которых на всем их протяжении также расходились отростки. Такие фигуры Лихтенберга стали называть стримерными каналами. Аналогичную картину рисуют на небосклоне гроззовые разряды – молнии, проскакивающие между облаками, облаками и землей. Молнии – источник естественного электромагнитного поля Земли и играют важную роль в радиосвязи.

Дельты рек, стримерные каналы и разряды молнии относятся к определенному классу фрактальных объектов – разветвленным структурам. Прямой и трудоемкий способ измерения их фрактальной размерности состоит в использовании формулы Мандельброта – Ричардсона (1.4). При этом предполагается, что раствором циркуля необходимо обойти один раз все ветвления структуры. Более экономичный в вычислительном плане способ измерения состоит в использовании самоподобия (1.7). Для этого необходимо внутри разветвленной структуры провести замкнутую область линейного размера  $R$ . Масштабный мно-

житель  $\eta$  надо выбрать как  $1/R$ . Полагая в (1.7)  $\eta = 1/R$  и раскрывая скобки, после очевидных сокращений, получаем:

$$L \sim R^D. \quad (2.1)$$

Полученная формула относится к одномерному образованию, и в этом смысле в (2.1) под фрактальной размерностью  $D$  надо понимать величину  $D_1$ .

Если фрактальный объект представляет собой двухмерную структуру, то постулаты (1.4) и (1.7) для площади  $S$  примут следующий вид:

$$S = C \cdot \chi^{2-D_2}, \quad (2.2)$$

$$\eta^2 L = C \cdot (\eta \chi)^{2-D_2}. \quad (2.3)$$

Полагая  $\eta = 1/R$ , получаем:

$$S \sim R^{D_2}. \quad (2.4)$$

Аналогично для объемной фрактальной структуры измерение ее объема  $V$  подчиняется следующим постулатам:

$$V = C \cdot \chi^{3-D_3}, \quad (2.5)$$

$$\eta^3 L = C \cdot (\eta \chi)^{3-D_3}. \quad (2.6)$$

Полагая  $\eta = 1/R$ , получаем:

$$V \sim R^{D_3}. \quad (2.7)$$

Если фрактальное тело однородно, то его плотность постоянна, а масса  $M$  будет пропорциональна объему тела. В этом случае, согласно (11.7):

$$M \sim R^D. \quad (2.8)$$

Этим соотношением пользуются в кластерной физике, где оно служит определением для фрактальной размерности  $D$ . У нас результат (2.7) является следствием многомасштабности и самоподобия фрактальной геометрии. Метод измерения фрактальной размерности, основанный на формуле (2.8), естественно назвать кластерным.

Отличие использование результата (2.1) для измерения фрактальной размерности от применения формулы Мандельброта – Ричардсона



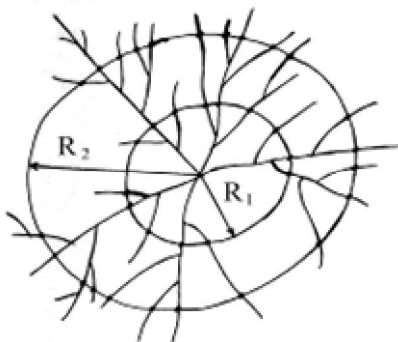
(1.4) в следующем. Использование (1.4) предполагает изменение масштаба после каждого измерения. Применение (2.1) заключается в изменении размера области при фиксированном масштабе. Подсчет упрощается, хотя и остается относительно трудоемким.

## § 2. КАНТОРОВСКИЙ МЕТОД ИЗМЕРЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Изложенные клеточный и кластерный методы измерения являются общеизвестными и их можно назвать классическими. Для разветвленных структур изложим новый метод измерения фрактальной размерности, который назовем канторовским.

Если посмотреть на границу замкнутой области внутри разветвленной структуры, то увидим точки пересечения. Так, на рисунке 2.2 разветвленная структура пересекает область линейного размера  $R_1$  в  $N_1 = 14$  точках. При размере  $R_2$  число пересечений будет в  $N_2 = 23$  точках. Эти точки образуют канторовское множество, поэтому и излагаемый метод мы назвали канторовским. Согласно идеологии фрактальной геометрии связь между  $N$  и  $R$  будет степенной. Эту связь запишем в следующем виде

$$N \sim R^h. \quad (2.9)$$



**Рис. 2.2.** Точками отмечены границы пересечений

Степенной показатель  $h$  обычно называют размерностью блуждания. Развиваемый далее математический аппарат новой геометрии – фрактальное исчисление – позволит установить для фрактальных объектов на плоскости связь между размерностью блуждания и фрактальной размерностью:

$$h = 2(D - 1). \quad (2.10)$$

Так, если  $h = 0.8$ , то  $D = 1.4$ .

Результат (2.10) можно обосновать следующим образом. Если ветвлений нет, то число  $N$  не зависит от размера  $R$ , т.е. в этом случае (рис. 2.3)

$$D = 1, N = \text{const} \text{ и } h = 0.$$

Если ветвления полностью заполняют плоскость, то их число  $N$  прямо пропорционально площади области, т.е. в этом случае (рис. 2.4)

$$D = 2, N = R^2 \text{ и } h = 2.$$

Предполагая, что размерность блуждания линейно связано с фрактальной размерностью, т.е.  $h = a + b D$ , из выше приведенных условий поручаем  $h = 2(D - 1)$ , т.е. формулу (2.10).

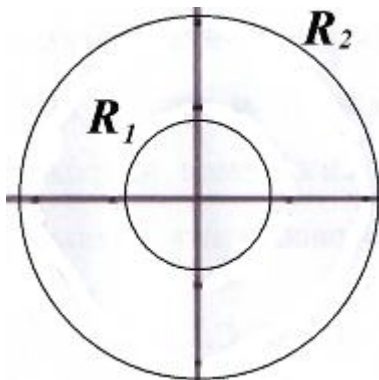


Рис. 2.3. Линии не раздваиваются, ветвлений нет, поэтому число ветвлений не зависит от размера области.

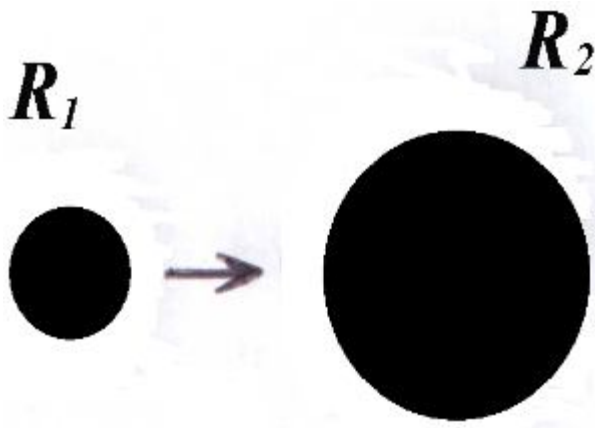


Рис. 2.4. Ветвления полностью занимают всю плоскость. Число ветвлений квадратично зависит от площади области.

### § 3. ИЗМЕРЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ГРОВОЗОВОГО РАЗРЯДА

Молнии в атмосфере Земли представляют собой грандиозное явление. Их электрическая природа приводит к тому, что молнии являются одним из источников естественного электромагнитного поля Земли. Это поле сказывается на работе радиоаппаратуры. В этом смысле молнии являются важным объектом изучения. На рисунке 2.3 (<http://thunder.nsstc.nasa.gov>) представлен разряд типичной молнии. Ее случайные ветвления, связанные с неоднородностью строения атмосферы, указывают на фрактальную геометрическую структуру молнии. Фрактальную размерность молнии на рисунке 2.3 определим по формуле Мандельброта:

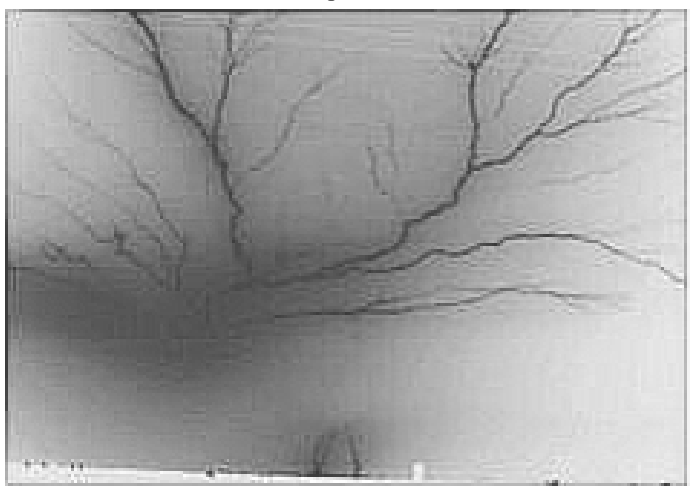
$$L = C \chi^{1-D}. \quad (2.11)$$

Если принять, что высота разряда молнии на рисунке 2.3 составляет 2 км, то при разделении всех ветвлений разряда на 200 равных отрезков длина масштаба  $\chi$  будет равна 10 м. Уменьшая число отрезков, будем увеличивать масштаб  $\chi$ . С новым масштабом один раз обойдем все видимые ветвления на рисунке 2.3. На графике с осями  $\ln L$  и

$\ln \chi$  все точки полученных значений  $L_i$  и  $\chi_i$  лягут на прямую, угловой коэффициент которой позволяет найти размерность молнии. Таким образом, для разряда на рисунке 2.5 было получено  $D = 1$ . Явно фрактальная структура молнии на рисунке 2.5 оказалась обычной одномерной конструкцией. Последнее связано с тем, что использовались масштабы измерений, начиная с 10 м. А длина в 10 м совпадает с видимым поперечным размером самой молнии. С другой стороны, при измерении длины предполагается, что поперечный размер заметно меньше масштаба измерения. В противном случае любая кривая будет выглядеть как гладкая линия с  $D = 1$ .



**Рис. 2.5.** Разряд обычной молнии



**Рис. 2.6.** Разряд разветвленной молнии [56]

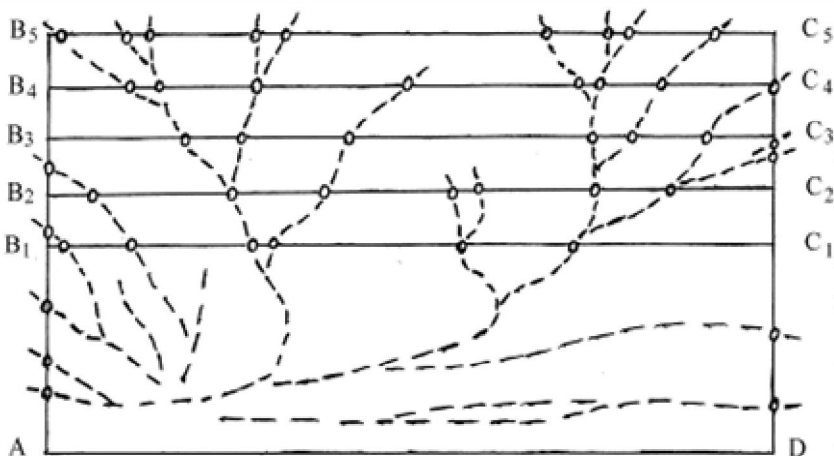


Рис. 2.7. Схема разряда разветвленной молнии

Более содержателен в этом отношении восходящий разряд молнии, представленный на рисунке 2.6. Для нее измерение фрактальной размерности по формуле (2.1) не представляется возможным. Мы размерность измерим изложенным в главе 2 § 2 канторовским методом.

Разряд молнии (см. рис. 2.6) нарисуем в виде схемы, которую расчерчиваем на прямоугольники с единичным основанием, как показано на рисунке 2.7. Площади прямоугольников в условных единицах следующие:

$$S_1(A B_1 C_1 D) = 2,$$

$$S_2(A B_2 C_2 D) = 2.5,$$

$$S_3(A B_3 C_3 D) = 3,$$

$$S_4(A B_4 C_4 D) = 3.5,$$

$$S_5(A B_5 C_5 D) = 4.$$

Причем длина  $AD = 1$ . Кружками (см. рис. 2.5) показаны пересечения ветвлениями разряда молнии с границами прямоугольников. Легко подсчитать, что

$$N_1(A B_1 C_1 D) = 11,$$

$$N_2(A B_2 C_2 D) = 13,$$

$$N_3(A B_3 C_3 D) = 15,$$

$$N_4(A B_4 C_4 D) = 17,$$

$$N_5(A B_5 C_5 D) = 19.$$

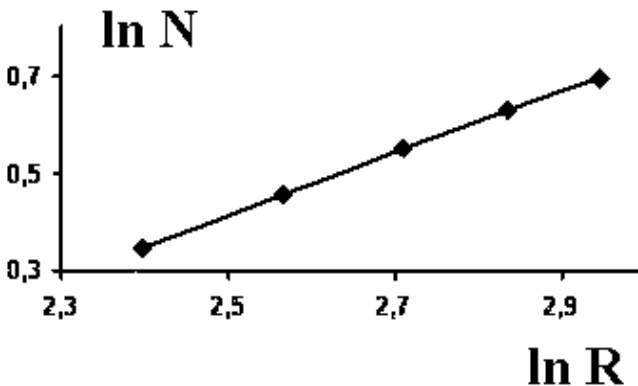
На графике с осями  $\ln N$  и  $\ln R$ , где  $R = \sqrt{S}$ , все точки располагаются возле прямой линии. Определяя угол наклона по методу линейной регрессии, сначала находим размерность блуждания  $h = 1,48$ , а затем

$$D = 1.74.$$

Полученное значение для плоскостной проекции относительно большое, но рассматриваемая нами разветвленная молния является трехмерным объектом, для которого размерность находится в пределах от 1 до 3. Так что полученная величина для трехмерного разряда молнии фактически небольшая, чему соответствует видимая разреженность ветвлений молнии.

**Задача 7.** Нанести на график точки  $\ln N_i$  и  $\ln R_i$ .

После нанесения точек, получаем график на рисунке 2.8.



**Рис. 2.8.** Билогарифмический график линейной зависимости  $\ln N$  и  $\ln R$ .

#### § 4. ДЕЛЬТА ЛЕНЫ

Дельты рек и придельтовые участки долины реки занимают особое место среди природных экосистем и играют важную роль в поддержании экологического равновесия в глобальном масштабе. На качественном уровне можно понять, какие процессы привели к возникновению, например, дельты реки. Основу этих процессов составляет комплекс гидрологических, гидрохимических, морфологических и тектонических процессов, происходящих в устьевой области реки в результате взаимодействия речных и морских вод.

Главной водной артерией Якутии является р. Лена, которая по водоносности занимает 2-е место среди рек России и 9-е – среди рек мира. В горной части она течет одним руслом шириной 2,5–3 км, а в так называемой Ленской устьевой трубе, сжатой отрогами гор, не более 1,5 км. При выходе в устьевую область основной поток реки разбивается на многочисленные рукава и протоки, образуя обширнейшую дельту. Наиболее крупные протоки, используемые для судоходства, имеют длину до 178 км.

Густота речной сети горного участка невелика и составляет 0,15–0,20 км/км<sup>2</sup>, увеличиваясь в дельте до 0,26 км/км<sup>2</sup>. Общая длина речных рукавов в дельте составляет 6500 км, из них свыше 1000 водотоков с суммарной длиной 2930 км находятся в северо-западной части дельты.

Дельта Лены изобилует мелкими озерами, общая площадь которых составляет более 253712 га. Озера дельты реки, в основном, термокарстового и пойменного происхождения. Большинство из них представляют собой заполненные водой полигоны, часто соединенные небольшими узкими речками, протоками и рукавами дельты.

На рисунке 2.9 представлена топографическая карта устья р. Лена. Рукава и протоки дельты образуют структуру, степень извилистости и разветвленности которой опишем фрактальной размерностью  $D$ . Для измерения  $D$  используем канторовский метод, для чего выделим прямоугольный участок дельты Лены, он представлен на рисунке 2.10а. На рисунке 2.10б представлен схематический план выделенного участка, который покрыли сеткой из 18 равновеликих прямоугольников. Точками обозначены пересечения руслами дельты периметра прямоугольников. Для использования формул (2.9) и (2.10), начнем подсчет пересе-

чений  $N$  с правого нижнего прямоугольника 1. В условных единицах его площадь  $S(1) = 1$ . Легко сосчитаем, что  $N(1) = 11$ . Далее рассматриваем фигуру, образованную прямоугольниками 1 и 2, их суммарная площадь  $S(1 + 2) = 2$ , количество пересечений по общему периметру  $N(1 + 2) = 18$ . Затем присоединяем последовательно по номерам прямоугольники, например,  $S(1 + 2 + 3 + 4) = 4$  и  $N(1 + 2 + 3 + 4) = 28$ . Итоговый результат представлен на рисунке 2.11 в виде билогарифмического графика. Методом линейной регрессии находим

$$\lg N = 1.04 + (1.12 \pm 0.02) \lg R.$$

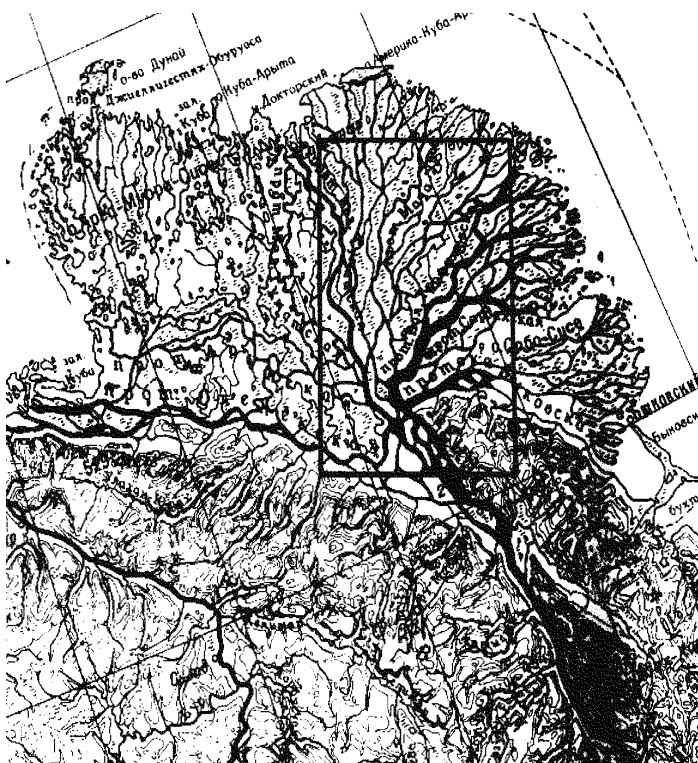
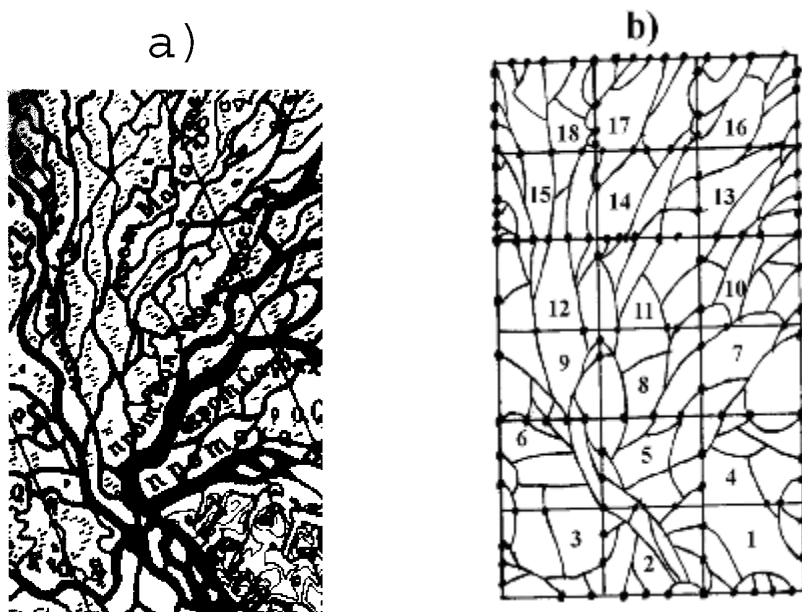


Рис. 2.9. Топографическая карта устья р. Лены,





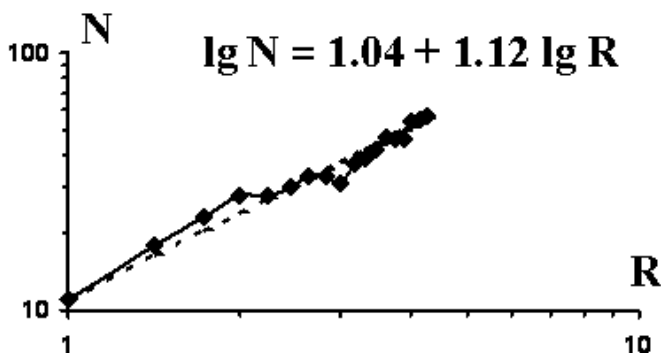
**Рис. 2.10.** Участок дельты Лены:  
а – схематический план; б – схематический план размечен  
на 18 равновеликих прямоугольников

Сравнивая (2.9) и (2.10), сначала находим размерность блуждания  $h = 1.12 \pm 0.02$ , а затем окончательно фрактальную размерность дельты Лены:

$$D = 1.56 \pm 0.03.$$

Применяемый нами канторовский метод измерения обладает существенной эффективностью по сравнению с другими методами. Если использовать клеточный метод, то размер клетки должен быть заметно больше толщины русла реки, при этом используемая карта дельты реки должна быть подробной, учитывать все извилины рукавов и протоков. Канторовский метод позволяет использовать схемы ветвлений с меньшей детализацией условных границ дельты. При клеточном методе интервал самоподобия обычно простирается в десятично-логарифмическом масштабе на несколько декад. Интервал масштабов на рисунке 2.9 не достигает даже декады. Однако используемые нами 18 значений масштабов

вполне достаточны для установления фрактальности дельты Лены и величины ее размерности. При этом для определения погрешности измерения величины  $D$  сама величина  $D$  сначала находилась по следующей формуле:  $D = (\ln N_i - \ln N_k) / (\ln R_i - \ln R_k)$ , где  $i \neq k$ , они пробегают значения от 1 до 18. Затем, усредняя полученные таким образом  $17 \cdot 18 / 2 = 153$  значения величины  $D$ , приходим к установленному выше результату с 3 % погрешностью.



**Рис. 2.11.** Зависимость линейного размера  $R$  от числа пересечений  $N$  замкнутой области; пунктир – линейная аппроксимация

## § 5. ДЕЛЬТА СЕЛЕНГИ И ВОЛГИ

Селенга – главная артерия оз. Байкал (53% водосбора озера), а ее дельта – уникальное природное образование (площадь 1120 км<sup>2</sup>), сформировавшееся в результате сложного взаимодействия природных факторов и гидродинамических процессов. Через дельту Селенги идет основной водный поток, пополняющий объем озера и являющийся источником поступления в него загрязняющих веществ. Поэтому актуально исследовать состояние и динамику развития экосистемы дельты Селенги как естественного биофильтра и индикатора современного состояния оз. Байкал в условиях интенсификации его антропогенного загрязнения.

В гидрологии для анализа структуры сети водотоков в русловых и дельтовых разветвлениях предложены свои подходы. Так, в работе

[Алексеевский Н.И., Соколова Ю.В.] для формализации структуры русловой сети порядок реки представлен как функция расхода воды. Для Оби в [Пискун А.А.] применяется гидравлический метод для многорукавных разветвлений. На примере р. По в [Михайлова М.В.] рассматриваются сток (поток) воды и его распределение по рукавам дельты как функция его водотоков. В данном случае для анализа разветвленной структуры русловых водотоков дельты Селенги применим фрактальный подход. В книге [Никора В.И.] на основе данных гидрологического справочника по речным бассейнам европейской части СССР (1975) отмечено, что длины рек степенным образом зависят от масштаба карт, т. е. плановые русловые кривые рек представляют собой фрактальные объекты. Измерением фрактальной размерности и отличием ее от единицы покажем, что дельта Селенги является фрактальной разветвленной структурой. Для определения ее фрактальной размерности используем три независимых метода, повышающих надежность и достоверность получаемых результатов. С помощью независимо полученных фрактальных размерностей можно строить модели процессов, приведших к рассматриваемым структурам.

На рисунках 2.12 и 2.13 представлены топографическая и цифровая электронная карты дельты [Атлас “Байкал”, Топографическая карта]. Сначала обратимся к карте, представленной на рисунке 2.12. Для использования формулы Мандельброта подсчет длины русел начинается вблизи угла А. Для примера, на рисунке 2.14а показано, как выбранный масштаб прикладывается вдоль одного из русел 5 раз. При конкретном подсчете выделенная область ABCD разбивалась на 4 квадрата. Для квадрата 1 на рисунке 2.14б получено, что масштаб в один сантиметр укладывается 34 раза. Линейный размер самого квадрата можно взять произвольным, мы для определенности положим его равным  $1/\chi$ . При последующем измерении рассматривается прямоугольник, состоящий из квадратов 1 и 2 и т. д. В итоге получаем:

$$L/\chi = 34...56...73...89;$$

$$R = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}.$$

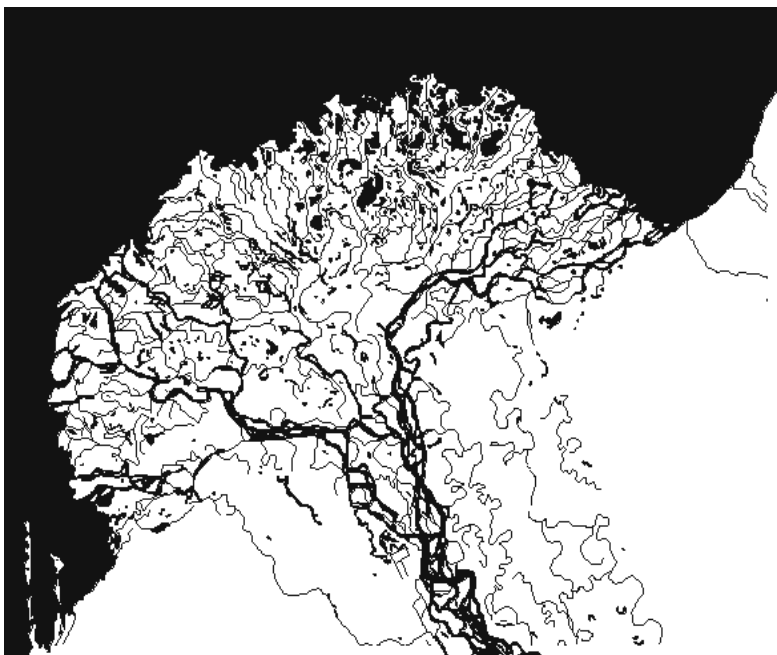
Здесь  $\sqrt{2}$  означает, что площадь квадратов 1 и 2 равна 2, так что линейный размер соответствующего прямоугольника как раз будет  $\sqrt{2}$ .



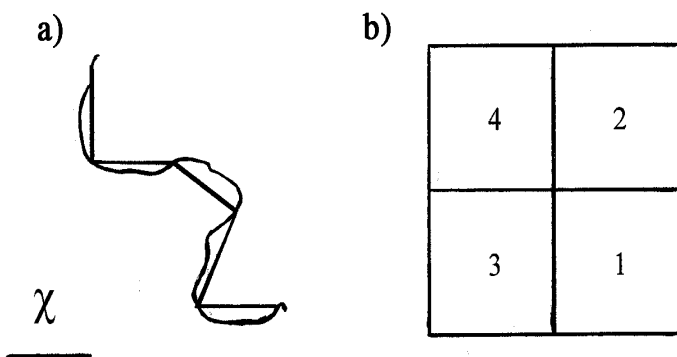
**Рис. 2.12.** Топографическая карта,  
масштаб 1:200000, лист N48-XXXV

По методу линейной регрессии по точкам  $\ln L$  и  $\ln R$  строим прямую, угловой коэффициент которой как раз дает размерность  $D$ . В данном случае он оказывается равным 1.39. Однако для оценки погрешности лучше исходить из следующей формулы:

$$D = \frac{\ln(L_2 / L_1)}{\ln(R_2 / R_1)}. \quad (2.12)$$



**Рис. 2.13.** Цифровая электронная карта дельты р. Селенга  
(CD-диск «ГИС района дельты реки Селенги в пакете Arc View 2.3»)



**Рис. 2.14.** Подсчет общей длины русел дельты р. Селенга

В этом случае по четырем измерениям можно найти шесть значений  $D$ , усредняя их, находим  $D = 1.38 \pm 0.02$ .

Для проверки рассматриваем те же квадраты на рисунке 2.14б, но измерения проведем с меньшим масштабом 0,5 см. Здесь получено

$$L / \chi = 62 \dots 102 \dots 133 \dots 164;$$

$$R = \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{6}, \sqrt{8}.$$

По методу линейной регрессии,  $D = 1,40$ , по формуле (2.12)  $D = 1.40 \pm 0,02$ . Объединяя оба измерения, что существенно повышает точность, находим

$$D = 1.38 \pm 0.01.$$

Далее использовалась карта, представленная на рисунке 2.12. Здесь для улучшения статистики выбирались разные формы области разбиения – от прямоугольных до полукруглых, с раствором угла до  $114^\circ$ , а также менялось и само число таких разбиений. В итоге приходим к результату  $D = 1.38 \pm 0.01$  для фрактальной размерности.

На рисунке 2.15а показано, что квадрат пересекается руслами дельты 7 раз. Для рассматриваемого (см. рис. 2.15а) квадрата ABCD строим четыре последовательных квадрата, как показано на рисунке 2.15б. Считая пересечения по проложенным маршрутам с выбираемым масштабом в 0.5 см, получаем:

$$N = 6, 12, 14, 17;$$

$$R = 1, 2, 3, 4,$$

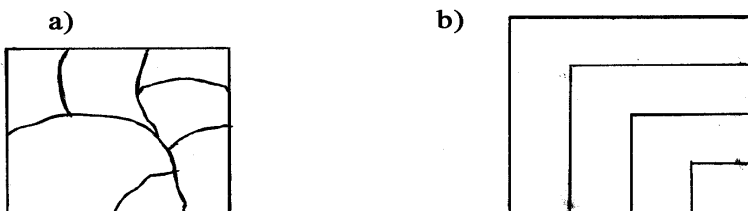
откуда по методу линейной регрессии находим  $h = 0.74$ , а затем

$$D = 1 + h / 2 = 1.37.$$

Если производить подсчет по маршрутам, составленным из масштабов в 1 см, то получим  $h = 0.84$  и  $D = 1.42$ , что в целом согласуется с предыдущими результатами. Для проверки полученных результатов (см. рис. 2.13) выделялся сектор с углом  $114^\circ$  и наносилось 8 дуг различного радиуса. Сначала подсчет пересечений дуг производился по ярко выраженным «толстым» руслам. Затем подсчет точек пересечения проводился по всем видимым линиям на карте. Проведя выше описанную процедуру, мы нашли  $h = 0.75$  и  $D = 1.38$ .

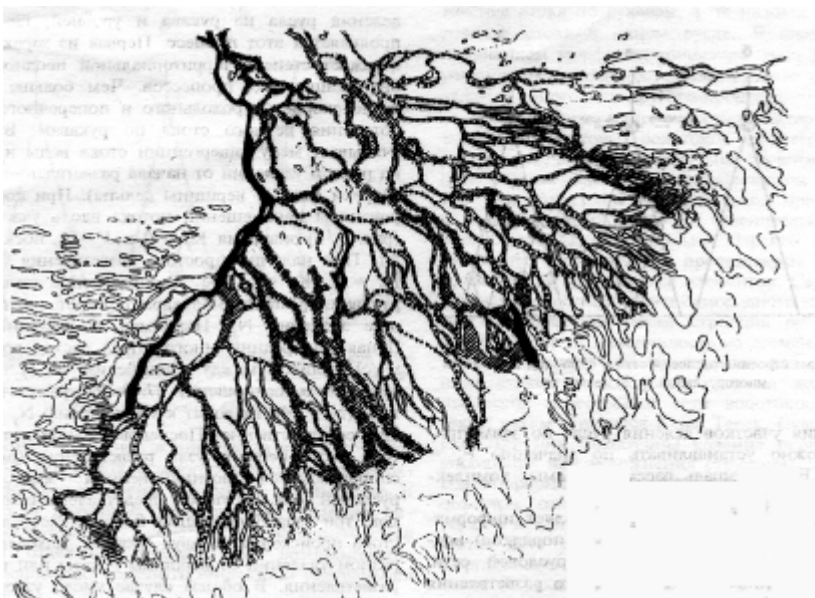
Обратим внимание, что с учетом погрешностей измерения фрактальная размерность дельты Селенги близка к значению фрактальной

размерности побережья оз. Байкал, для которого в главе 1 § 11 было установлено, что  $D = 1.33$ .



**Рис. 2.15.** Пример подсчета пересечений руслами реки периметра квадрата; квадрат  $a$  пересекается руслами дельты 7 раз

Структуру в виде веера имеет и дельта Волги (рис. 2.16). Для измерения ее фрактальной размерности используем канторовский метод. Используя примененную для дельты Лены и Селенги методику, сначала находим  $h = 1.44 \pm 0.01$ . Затем и фрактальную размерность:  $D = 1 + h / 2 = 1.72 \pm 0.01$ .



**Рис. 2.16.** Дельта Волги;  $D = 1.72$

## § 6. ФРАКТАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ ТЕЧЕНИЯ РЕКИ

Рассмотрим еще один метод определения фрактальной размерности дельты реки. Если исходное течение реки происходит через поперечное сечение  $S_0$ , то расход воды за единицу времени будет  $\rho V_0 S_0$ , где  $\rho$  – плотность воды,  $V_0$  – скорость течения. По формуле Пуазейля эта же величина пропорциональна  $h S_0^2$ , где  $h$  – перепад высот, который и вызывает само течение реки. Приравнявая  $\rho V_0 S_0$  и  $h S_0^2$ , находим скорость

$$V_0 = h S_0 / \rho. \quad (2.13)$$

Когда исходное русло разбивается на множество рукавов с меньшим сечением  $S$ , то скорость станет равной  $V = h S / \rho$ . Поскольку  $S < S_0$ , то течение замедляется. Очевидно, что  $S_0 = N S$ , где, согласно (2.9) и (2.10),  $N \sim R^{2(D-1)}$ , здесь  $R$  будет расстоянием от исходной точки до рассматриваемого русла. Подставляя все в (2.13), находим

$$V \sim V_0 R^{-2(D-1)}.$$

Таким образом, измеряя скорость на разных участках от некоторого исходного пункта, также возможно определить фрактальную размерность дельты. Полученный результат можно применять только на достаточно чистой воде. Дело в том, что с увеличением  $R$  русла мелеют и в поток воды начинают привноситься различные примеси – взвесь песка, тина и т. п. Все это ведет к изменению плотности воды, а также ее вязкости, что скажется на зависимости  $V$  от  $R$ .

## § 7. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПЛОСКОСТНОЙ ПРОЕКЦИИ СТРИМЕРНЫХ КАНАЛОВ

В последнее время активизировалось изучение стримерных разрядов – сети каналов, возникающих при электрическом пробое в диэлек-

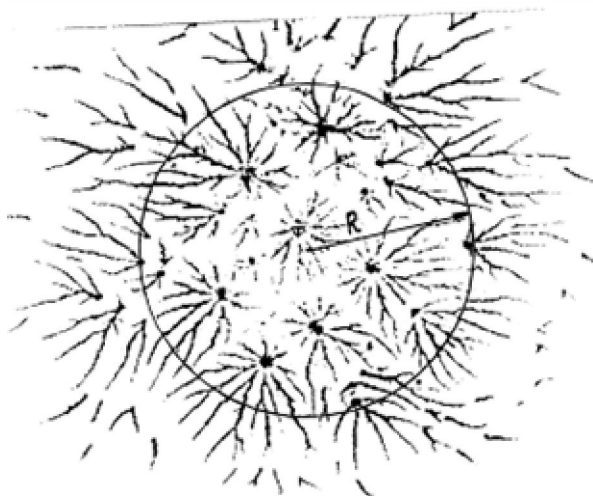


триках (воздухе, полимерных изоляторах, фотоэмульсии) [Попов Н.А., Носков М.Д. и др., Акишев Ю.С. и др.]. Изучение стало особенно актуальным в связи с использованием кабелей с полимерной изоляцией. Однако отмечается, что количественной теории, описывающей рост ветвления электрического пробоя, до сих пор нет. Мы геометрическую конфигурацию разрядных каналов, рост числа каналов и их ветвление рассмотрим как фрактальные разветвленные объекты и опишем их количественно с помощью понятия фрактальной размерности. Электрический пробой – видимый в оптическом диапазоне стримерный канал в диэлектриках, образованный локально растущим электрическим полем. Пробой возникает, когда на небольшой участок подложки подается такое высокое напряжение, что происходит собственно электрический пробой. Под такое определение подходят разряды молний в воздухе, частичные разряды в эпоксидной смоле, плазменные структуры в фотоэмульсии. В указанном смысле стримерные каналы относятся к классу универсальности, зависящие только от двух безразмерных величин: фрактальной размерности и размерности пространства, в котором происходит процесс. М. Д. Носковым и др. прямым измерением определено, что фрактальная размерность  $D$  частичных разрядов лежит в пределах  $1.45 \div 1.55$ . Н. А. Попов определил фрактальную размерность коронного разряда  $D = 2.16 \pm 0.05$ . Для обычного разряда молний в главе 2 § 2 мы измерили фрактальную размерность, при этом установили, что на масштабах от десятков метров и выше  $D = 1$ . Таким образом, видим существенное различие в значениях для размерности. В связи с этим имеет смысл тремя независимыми методами измерить фрактальную размерность планового рисунка системы стримерных каналов (рис. 2.17) [Попов Н.А.].

Сначала используем кластерный метод, основанный на формуле (2.9). Применение этой формулы к определению фрактальной размерности стримерных каналов состоит в следующем. На плановом рисунке стримерных каналов выделяется некоторая область (на рис. 2.17 это окружность радиусом  $R$ ) и подсчитывается общая длина всех каналов, попадающих в рассматриваемую область. Так мы получаем первые значения  $L_1$  и  $R_1$ . Далее выделяется другая область (чуть больше первоначальной), после подсчета получаются другие значения  $L_2$  и

$R_2$ , как на рисунке 2.2. Таким образом, в итоге мы получаем набор значений  $L$  и  $R$ , по которым методом линейной регрессии строим прямую на осях  $\ln L$  и  $\ln R$ . По угловому коэффициенту прямой вычислим фрактальную размерность  $D$ . Таким образом установлено, что для стримерных каналов

$$D = 1.52 \pm 0.03.$$



**Рис. 2.17.** Система микрозарядов, пересекающих диэлектрическую фотопластинку

Для улучшения статистики нами выбирались разные формы областей разбиения – от прямоугольных до круглых, а также менялось и само число таких разбиений.

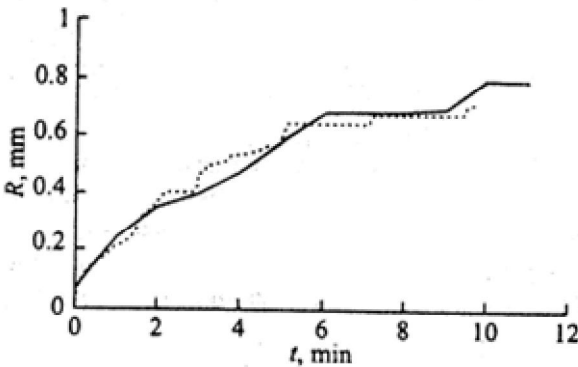
Мы изложили первый из используемых методов измерения фрактальной размерности. Второй метод измерения состоит в подсчете числа  $N$  пересечений ветвлениями стримерных каналов периметра области, т. е. используется канторовский метод. На рисунке 2.17 границей выделенной области является окружность радиусом  $R$ . Легко сосчитать, что для изображенного на рисунке случая  $N = 53$ . Варьируя радиус  $R$ , находим, что  $N$  и  $R$  связаны степенным (скейлинговым) законом  $N \sim R^h$  с показателем (размерностью блуждания)  $h = 1.01 \pm 0.05$ . Используя (2.10), находим

$$D = 1.506 \pm 0.005.$$

Приступим к третьему методу измерения величины  $D$ . Метод основан на анализе графика на рисунке 2.18 [30], где представлена зависимость роста границы канальных лучей от времени. Пропорционально со временем увеличивается и число ветвлений, т. е.  $N \sim t$  и из (2.9) следует, что

$$R \sim t^{1/h}. \quad (2.14)$$

На интервале времен от 1 до 6 мин (см. рис. 2.18) следует, что  $R \sim t^{0,943}$ , откуда  $h = 1.06$  и  $D = 1.53$ .



**Рис. 2.18.** Зависимость длины дендрита от времени роста; сплошная кривая – эксперимент, штриховая – моделирование

Тремя независимыми методами измерена фрактальная размерность плоскостной проекции стримерных каналов, представленных на рисунке 2.18. Полученные значения 1.50, 1.52 и 1.53 совпадают с данными работы [Носков М.Д. и др.]. Согласованность значений для размерности указывает на работоспособность предложенных выше аксиом фрактального исчисления. Подобной рисунок имеется в работе [Попов Н.А.], где получен следующий закон для числа ветвления:  $N \sim R^{1,18}$ . Из него следует, что  $D = 1.59$ , т. е. близкая к нашим значениям размерность.

Полученный в работах [Попов Н.А., Носков М.Д. и др., Акишев Ю.С. и др.] и нами усредненный результат  $D = 1.52$  указывает на выполнение закона класса универсальности для электрических разрядов в различных диэлектрических средах.

## § 8. ТУНДРОВЫЕ ОЗЕРА

Помимо дельты рек на поверхности Земли обширную площадь занимают тундровые озера. Широко распространены не только крупные, но мелководные старичные озера. Глубина озер незначительна: от 0,2 до 10–15 м, их берега либо крутые и высокие, либо низкие и заболоченные, их дно – гладкая ледяная поверхность, покрытая торфянистым илом. Именно поэтому в научной литературе равноправно употребляются оба термина: «тундровые озера» и «тундровые болота». На современном этапе развития спутниковых технологий, используя данные мониторинга Земли, изложенную и опробованную методику определения фрактальной размерности можно применить к оценке состояния тундровых озер и связать их изменчивость с изменением климата.

Для количественного описания тундровых озер необходимо ввести безразмерный количественный показатель фрактальности. Мы предлагаем в качестве такого показателя использовать фрактальную размерность  $D$ , которая будет характеризовать степень заполнения тундровыми озерами земной поверхности и принимать значения от 1 до 2. Значение  $D = 1$  означает, что болот совсем нет. Величина  $D = 2$  отвечает тому, что вся площадь рассматриваемого участка земной поверхности полностью заполнена озерами, т. е. участок представляет собой одно большое озеро. Измерение фрактальной размерности тундровых озер произведем следующим способом. Суммарный линейный размер  $R$  нескольких озер (например, сумма их поперечных размеров) связан с масштабом измерения  $\chi$  формулой Мандельброта – Ричардсона:  $R \sim \chi^{1-D}$ . С другой стороны, если  $S$  – суммарная площадь рассматриваемых озер, то  $R \sim \sqrt{S}$ . Если болота покрыть сеткой, то их площадь будет пропорциональна числу  $K$  узлов сетки, попавших внутрь границ озер. Поэтому устанавливаем связь между числом узлов  $K$  сетки и размером ячейки  $\chi$ :



Фрактальная размерность вычислялась по озерам 1–5, находящимся в двух прямоугольных центральных участках

Таблица 2.1

$\chi$	30	25	20	15	10	5
$K$	26	35	52	83	165	534

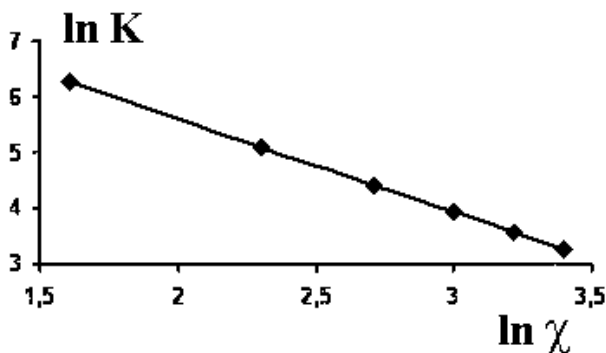


Рис. 2.20. Билогарифмический график зависимости числа узловых точек площади озер от длины масштаба

Для выявления дисперсии среднего значения фрактальной размерности используем следующую методику. По 6 измеренным точкам находим 14 значений показателя  $h = 2(D - 1)$ , вычисленных по формуле

$$h = \frac{\ln N_2 - \ln N_1}{\ln \chi_1 - \ln \chi_2} :$$

1.68, 1.73, 1.68, 1.68, 1.69, 1.77, 1.69, 1.68, 1.69, 1.62,  
1.66, 1.34, 1.68, 1.70.

Значение 1.34 отбрасываем. По остальным значениям находим  $h = 1.68 \pm 0.01$ . Отсюда следует, что фрактальная размерность тундровых болот

$$D = 1.84 \pm 0.01.$$

На современном этапе развития спутниковых технологий, используя данные мониторинга Земли, изложенную и опробованную методику определения фрактальной размерности, можно применить к оценке со-

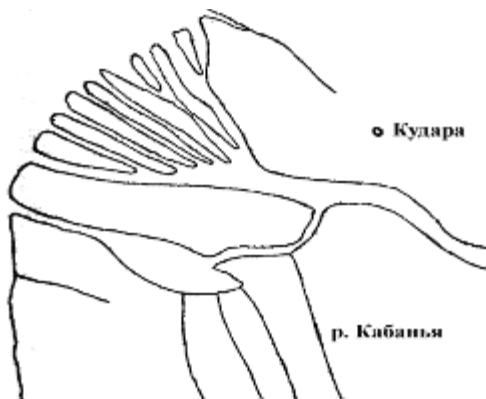
стояния тундровых озер и, вероятно, связать изменчивость их состояния с изменчивостью климата.

## **§ 9. ВРЕМЕННАЯ ДИНАМИКА ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ДЕЛЬТЫ СЕЛЕНГИ**

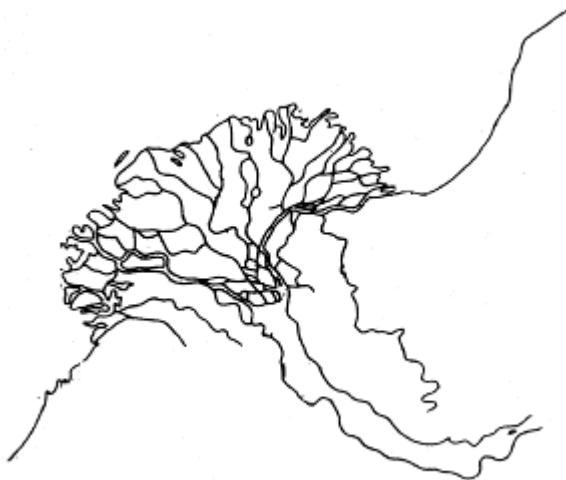
Дельты рек, как уникальные природные образования, всегда привлекают к себе повышенное внимание исследователей. Данное утверждение следует из анализа интенсивности и периодичности публикуемых научных работ, посвященных данной тематике [2, 29, 34, 49].

Атлас «Байкал» [3] содержит карты дельты Селенги, собранные за 300 лет. В данной работе представлены обзорные карты исследуемой дельты [3] за 1701 г. (рис. 2.21), 1950 г. (рис. 2.22) и электронная карта настоящего времени (см. рис. 2.4) [45]. Если для обработки современных карт, например, как карты 1950 г. (см. рис. 2.21) и определения фрактальной размерности можно применить подходы, описанные выше, то для более старых карт (см. рис. 2.21) необходима совершенно другая методика.

Чертежная карта С. Ремизова (фрагмент)



**Рис. 2.21.** Дельта р. Селенга в 1701 г.



**Рис. 2.22.** Дельта р. Селенга в 1950 г.

Как известно, классическим и универсальным является клеточный метод определения фрактальной размерности, когда рисунок разбивается на сетку и подсчитывается число клеток, содержащих рассматриваемый объект. Однако для объекта на рисунке 2.21, в силу упрощенности и схематичности объекта, клеточный метод дает слишком неопределенную величину и высокую погрешность измерения  $D$ . В таком случае нужна более точная методика, которая изложена в главе 1 § 8. Данный методический подход позволит проследить динамику изменения фрактальной размерности дельты р. Селенга во времени.

Для фрактального анализа карты 1950 г. (см. рис. 2.22) были использованы стандартные методы определения размерности – кластерный и канторовский, величина  $D_{1950}$  оказалась равной 1.38. Такая же величина  $D_{2000}$  получена в главе 2 § 5. Данный факт означает, что за более чем 50-летний период времени пространственная структура дельты Селенги не изменилась. На величину фрактальной размерности  $D_{2000}$  дельты не оказали влияния, произошедшие за сейсмостатистический период сильные и слабые землетрясения 60–70-х гг. XX в., которые не повлекли за собой таких существенных изменений дельты реки



как, например, образование сейсмостектонического грабена – залив Провал во время 10-балльного Цаганского землетрясения в январе 1862 г.

Для определения фрактальной размерности  $D_{1701}$  структуры дельты Селенги по карте 1701 г. (см. рис. 2.21) необходимо исходить из подхода, изложенного в главе 1 § 8. Использовать соотношения (1.21) и (1.22) нужно тогда, когда фрактальная структура «бедна» своими образованиями, т. е. является малоразветвленная. Если стандартный клеточный метод имеет первый порядок точности, то формулы главы 1 § 8 дают результаты второго порядка точности. Таким образом, для дельты Селенги нами установлено, что  $D_{1701} = 1.22$ .

Проведенное исследование пространственной структуры дельты Селенги обнаружило существенные изменения в величинах  $D_{1701}$  и  $D_{1950}$  сети водотоков дельты (соответственно 1.22 и 1.38), в то время как величина  $D_{2000}$  рассматриваемого объекта за 50-летний временной отрезок (с 1950 г. до настоящего времени) не изменилась и составляет 1.38 (по данным фрактального анализа).

Таким образом, на основании проведенного фрактального анализа и безразмерного показателя  $D$  становится очевидным, что за 250-летний период времени (1701–1950 гг.) произошли пространственные изменения в структуре сети дельты: увеличилась разветвленность ее водотоков, что и повлияло на величину размерности  $D_{1950}$ . Так как фрактальная размерность является и показателем извилистости линий, можно говорить и об увеличении за рассматриваемый период извилистости самих водотоков.

На возрастание показателя  $D_{1950}$  и, как следствие, усложнение пространственной структуры сети водотоков дельты, в первую очередь, оказали влияние сейсмические события прошлого. Как известно, дельта Селенги была и остается наиболее сейсмически и неотектонически активным звеном в рифтовой системе Прибайкалья. Данные о сильных землетрясениях прошлого свидетельствуют о высокой сейсмичности этого участка, где неоднократно происходили сильные землетрясения с параметром  $K \geq 14$ , а также в непосредственной близости расположены

и эпицентры сильных землетрясений, что подтверждают палеосейсмогенные структуры, возраст которых оценивается в последние сотни лет – первые тысячи.

Следует заметить, что при рассмотрении карты дельты Селенги 1701 г. рисунок сети кажется схематичным и упрощенным. Однако использование нескольких взаимодополняющих методов, наряду со специально разработанным, позволяет не брать во внимание субъективный взгляд картографа («человеческий фактор») и доверительно относиться к полученным результатам.

За второй рассматриваемый период (1950–2000 гг.) величина  $D_{2000}$  дельты не изменилась, несмотря на различия исходного фактического материала (бумажная и электронная топокарты). То есть пространственная структура дельты за последние 50 лет не претерпела никаких изменений. Кроме того, немаловажен и тот факт, что по материалам инструментальных сейсмических наблюдений последних десятилетий этот район испытывает лишь транзитное влияние сильных землетрясений, происходящих в окрестности.

## **ГЛАВА 3**

### **ФРАКТАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

Введены фрактальные интегралы и дифференциалы. Вычислены фрактальные интегралы и дифференциалы от степенных функций. Установлены математические правила фрактального исчисления. Рассмотрены физические задачи. Для разветвленных структур предложена геометрическая интерпретация фрактальной производной.

#### **§ 1. ФРАКТАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ**

Фрактальная геометрия устанавливает степенные характеристики между геометрическими и физическими величинами. Такую взаимосвязь обычно получают после натурных измерений. Однако для моделирования динамики процессов и явлений необходим соответствующий математический аппарат. Наиболее адекватным является язык дифференциальных уравнений и запись их решений в виде интегралов. Чтобы моделировать

динамику процессов и явлений, происходящих на фрактальных структурах, мы предложим фрактальные интегралы и дифференциалы, которые позволят естественным образом получать степенные характеристики. Совокупность фрактальных интегралов и дифференциалов и правила обращения с ними нами названы фрактальным исчислением.

Обычно за математический аппарат фрактальной геометрии принимают дробное интегриродифференцирование [Самко и др.]. Мы же считаем, что таким аппаратом должно быть развиваемое ниже фрактальное исчисление. Хотя фрактальное исчисление в некоторых местах очень похоже на дробное интегриродифференцирование, но есть и существенное отличие. Например, фрактальная геометрия неотъемлемым своим атрибутом содержит неопределенный множитель  $C$ , который отсутствует в дробном интегриродифференциальном математическом аппарате.

Фрактальные интегралы и дифференциалы можно ввести несколькими, математически эквивалентными схемами. Одна из возможных схем подобного введения следующая. При этом в основу предлагаемой схемы построения фрактального исчисления положена формула Мандельброта – Ричардсона. Это позволит сразу иметь дело со степенными закономерностями.

По определению, длина  $L$  есть сумма необходимо числа масштабов  $\chi$ , т.е.  $L = \sum \chi$ , где сумма берется от 1 до  $N(\chi)$ . Поскольку считаем, что  $N \gg 1$ , то сумму можно заменить некоторым интегралом, который назовем *фрактальным*, а способ его вычисления – *фрактальным исчислением*. Итак, определяем,

$$\sum \chi = \int \chi d_D \chi. \quad (3.1)$$

Этим самым, вместе с фрактальным интегралом мы вводим и фрактальный дифференциал  $d_D \chi$ . Обратим внимание, что значок  $D$ , указывающий на фрактальность, пишем *снизу* символа дифференциала  $d$ . Опуская слово фрактальный, часто будем говорить просто об интегралах и дифференциалах, где это не может вызвать недоразумения. Определение (3.1) можно сравнить со следующим известным выражением:  $\sum n \approx \int n dn$ , которое тем вернее, чем большее числа суммируется.

Поскольку длина фрактальной линии есть  $C \chi^{1-D}$  (это формула (1.4)), то приходим к следующему первому правилу фрактального исчисления – правилу интегрирования линейной функции:

$$\int \chi d_D \chi = C \chi^{1-D}. \quad (3.2)$$

Проведем в формуле (3.2) масштабное преобразование  $\chi \rightarrow \eta \chi$ , после чего она примет вид:

$$\int \eta \chi d_D \eta \chi = C (\eta \chi)^{1-D}. \quad (3.3)$$

Примем, что масштабный множитель  $\eta$  фиксирован, тогда выражение справа в (3.3) можно переписать как  $\eta^{1-D} C \chi^{1-D}$ , или, с учетом (3.2),  $\eta^{1-D} \int \chi d_D \chi = \int \eta \chi \eta^{-D} d_D \chi$ . Сравнивая здесь последний интеграл с интегралом (3.3), приходим к закону масштабного преобразования фрактального дифференциала:

$$d_D \eta \chi = \eta^{-D} d_D \chi. \quad (3.4)$$

Полученное соотношение является законом подобия фрактального дифференциала. Относительно степенной зависимости закон (3.4) имеет такой же вид, как и условие самоподобия (1.11). Формула (3.4) указывает на еще одно отличие фрактального исчисления от дробного интегродифференцирования. Именно, выражение (3.4) существенно отличается от масштабного преобразования для дробного дифференциала, для последнего [Самко и др.]  $d^\lambda \eta \chi = \eta^\lambda d^\lambda \chi$ , которое мы получим в следующей главе, посвященной дробному интегродифференцированию.

Рельеф земной поверхности обычно испещрен впадинами и горами разного размера. Такая поверхность представляет собой фрактальный двумерный объект. Для измерения площади фрактальной поверхности, на нее необходимо наложить  $N(\chi)$  квадратиков, каждый площадью  $\chi \times \chi = \chi^2$ . Тогда площадь фрактальной поверхности будет равна сумме  $\sum \chi^2$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  можно перейти к фрактальному интегралу:  $\sum \chi^2 = \int \chi^2 d_D \chi$ . Поскольку площадь, согласно (1.13), равна  $C \chi^{2-D}$ , то приходим к правилу фрактального интегрирования квадратичной функции:

$$\int \chi^2 d_D \chi = C \chi^{2-D}. \quad (3.5)$$

Рассматривая объем фрактальной фигуры, а также другие гипербъемные образования, с необходимостью приходим к правилу фрактального интегрирования степенной функции:

$$\int \chi^n d_D \chi = C \chi^{n-D}. \quad (3.6)$$

Здесь  $n$  – целое число. Однако полученный результат можно абстрагировать дальше, когда правило (3.6) будет справедливым и при произвольном числе  $n = \lambda$ , не обязательно целым.

Установим правило предельного перехода, когда фрактальная размерность стремится к целому числу. Если  $D = 0$ , то фрактальное интегрирование, очевидно, отсутствует, т.е.

$$\int \chi d_{D=0} \chi = \chi. \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.7) с выражением  $\int \chi d_D \chi = C \chi^{1-D}$  при  $D = 0$ , находим, что для неопределенного множителя:

$$\lim_{D \rightarrow 0} C = 1. \quad (3.8)$$

Для фрактальной геометрии главное – это степенная зависимость величин между собой. Неопределенный множитель, как коэффициент пропорциональности, зависит от единиц измерения и разрядов единиц измерения и ни как не влияет на фрактальную размерность. В этом отношении закон предельного перехода неопределенного множителя при стремлении фрактальной размерности к целому числу не имеет большого значения. Тем более, что для процессов на Евклидовой геометрии все величины обычно строго определены. Это обстоятельство позволяет не следить за неопределенным множителем при устремлении фрактальной размерности  $D$  к целому числу. Его всегда можно найти из сравнения с формулами в Евклидовой геометрии.

Далее в (3.6) положим  $D = 1$ , тогда

$$\int \chi d_1 \chi = C.$$

Здесь обращаем внимание на то, что для получения от переменной постоянной величины, необходимо от этой переменной взять обычную производную по ней самой, т.е.

$$\frac{d}{d\chi} \chi = 1.$$

Мы можем утверждать, что при пределе  $D \rightarrow 1$  фрактальному интегралу соответствует обычная производная:

$$\lim_{D \rightarrow 1} \int \chi d_D \chi = \frac{d}{d\chi} \chi. \quad (3.9)$$

Для произвольной функции  $u(\chi)$  обобщение очевидно, так что:

$$\lim_{D \rightarrow 1} \int u(\chi) d_D \chi = \frac{d}{d\chi} u(\chi). \quad (3.10)$$

Проверим соотношение (3.10) для степенной функции. Имеем

$$\int \chi^n d_D \chi = C \chi^{n-D}.$$

Здесь положим  $D = 1$  :

$$\int \chi^n d_1 \chi = C \chi^{n-1}.$$

В силу выше сказанного здесь можно положить  $C = n$ , а также использовать известное соотношение  $\chi^{n-1} = \frac{1}{n} \frac{d}{d\chi} \chi^n$ . В итоге получаем

$$\int \chi^n d_1 \chi = \frac{d}{d\chi} \chi^n,$$

т.е. соотношение (3.10) для степенной функции  $u(\chi) = \chi^n$ .

## § 2. ФРАКТАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Дальнейшее развитие фрактального исчисления требует установление правила фрактального интегрирования суммы функций. При этом исходим из того, что нам уже известно фрактальное интегрирование от степенной функции, оно дается выражением (3.6). Для этого рассмотрим сумму  $C \chi^{a-D} + C \chi^{b-D}$ , которую представить в виде суммы интегралов:

$$\int \chi^a d_D \chi + \int \chi^b d_D \chi.$$

Очевидно, что сумму интегралов можно представить в виде одного интеграла:

$$\int (\chi^a + \chi^b) d_D \chi.$$

Теперь степенные функции  $\chi^a$  и  $\chi^b$  обобщим на произвольные функции  $u$  и  $v$ . В итоге получаем правило фрактального интегрирования суммы функций:

$$\int (u + v) d_D \chi = \int u d_D \chi + \int v d_D \chi. \quad (3.11)$$

Видим, что фрактальное интегрирование является линейной операцией.

Во фрактальном исчислении возможно установить правило интегрирования произведения двух функций, хотя это и требует определенной абстракции, правильность которой будет обоснована предельным переходом при  $D \rightarrow 1$  к известному выражению. Рассмотрим следующий фрактальный интеграл:

$$\int \chi^{a+b} d_D \chi = C \chi^{a+b-D}.$$

Выражение справа перепишем как

$$C \chi^D \cdot \chi^{a-D} \cdot \chi^{b-D}.$$

Возьмем среднюю сумму от последних двух сомножителей:

$$\frac{1}{2} \chi^D \left( C \chi^{a-D} \chi^{b-D} + C \chi^{a-D} \chi^{b-D} \right).$$

Один из сомножителей в сумме в скобках представим в виде фрактального интеграла:

$$\frac{1}{2} \chi^D \left( C \chi^{a-D} C_1^{-1} \int \chi^{b-D} d_D \chi + C \chi^{a-D} C_2^{-1} \int \chi^{b-D} d_D \chi \right).$$

Теперь мы можем записать:

$$\begin{aligned} \int \chi^{a+b} d_D \chi &= \frac{1}{2} C C_1^{-1} \chi^a \int \chi^b d_D \chi + \\ &\quad \frac{1}{2} C C_2^{-1} \chi^b \int \chi^a d_D \chi. \end{aligned}$$

Здесь уже можно провести обобщение, заключающееся в замене  $\chi^a$  на  $u(\chi)$  и  $\chi^b$  на  $v(\chi)$ . Заменяв, также,  $\frac{1}{2} C C_1^{-1}$  на  $C_v$  и  $\frac{1}{2} C C_2^{-1}$  на  $C_u$ , окончательно получаем правило фрактального интегрирования произведения двух функций:

$$\int u v d_D \chi = C_v u \int v d_D \chi + C_u v \int u d_D \chi. \quad (3.12)$$

В математическом анализе этой формуле соответствует вторая теорема о средних. Обозначим, как это часто делается, производную  $\frac{d}{d\chi}$  на штрих.

Тогда при предельном переходе  $D \rightarrow 1$  из (3.11) и (3.12) следуют известные выражения:

$$(u + v)' = u' + v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

**Задачи.** Найти а)  $\int \sin \chi \, d_D \chi$ ; б)\*  $\int \operatorname{tg} \chi \, d_D \chi$ ; в)\*  $\int \ln \chi \, d_D \chi$ .

### § 3. ФРАКТАЛЬНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

В обычном и дробном исчислении дифференцирование является обратной операцией к интегрированию. Аналогично им примем, что фрактальное дифференцирование  $(d/d\chi)_D$  будет обратной операцией к фрактальному интегрированию. Таким образом, полагаем, что

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \int \varphi(\chi) \, d_D \chi = \varphi(\chi). \quad (3.13)$$

Для степенной функции из (3.6) имеем:

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \int \chi^n \, d_D \chi = \left( \frac{d}{d\chi} \right)_D C \chi^{n-D} \equiv \chi^n. \quad (3.14)$$

Интуитивно понятно, что неопределенный множитель  $C$  можно вынести из под операции взятия производной. Далее покажем, что наша интуиция здесь не подводит. Используя это обстоятельство, из (3.14) имеем:

$$C \left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \chi^{n-D} = \chi^n.$$

Здесь заменим  $n$  на  $n + D$ , после чего, в итоге получаем правило вычисления фрактальной производной от степенной функции:

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \chi^{n+D} = C^{-1} \chi^{n+D}. \quad (3.15)$$

Для краткости записи фрактальную производную иногда будем писать в виде  $(\chi^n)_D$ .

При решении физических задач пространство бывает удобно сложить из кубиков с линейным размером  $b$ , а время отсчитывать в единицах



$\tau$ . Например, закон Мандельброта – Ричардсона (1.4) можно записать в виде

$$L = L_0 \left( \frac{\chi}{b} \right)^{1-D}.$$

Этим самым, неопределенный множитель  $C$  “спрятали” в  $L_0$  и  $b$ . Определение (3.1) можно переписать как

$$\sum \chi = \int \chi d_D \frac{\chi}{b}.$$

Однако введение величин  $b$  и  $\tau$  приводит только к появлению лишних множителей, которые всегда можно “перепрятать” в величину  $C$ . Поэтому вместо  $b$  и  $\tau$  удобно ввести “единичным элементом”  $\hat{1}$ , определяемый как масштаб измерения в нулевой степени:

$$\hat{1} = \chi^0. \quad (3.16)$$

Из определения (3.16) следует, что “единичный элемент” при возведении в произвольную степень не меняется.

Положив в формуле (3.15) степень  $n = 0$ , получаем:

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \hat{1} = C^{-1} \chi^D. \quad (3.17)$$

Полученное соотношение (3.17) фактически и позволяет выносить неопределенный множитель из под операции взятия фрактальной производной. Например, если  $V = const$ , то

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D V = V \left( \frac{d}{d\chi} \right)_D \hat{1} = V C^{-1} \chi^D. \quad (3.18)$$

Понятие единичного элемента обнаруживает еще один аспект. Как известно из Главы 1, число масштабов измерения  $N_D(\chi)$  следующим образом зависит от масштаба измерения  $\chi$ :

$$N_D(\chi) = C \chi^{-D}. \quad (3.19)$$

Положив  $\chi = 1$ , получаем  $C = N_D(1)$ . Таким образом, неопределенный множитель фактически является суммой единичных элементов:

$$C = N_D(1) = \sum \hat{1}. \quad (3.20)$$

Поскольку, согласно нашему определению фрактального интеграла,

$$\sum \hat{1} = \int \hat{1} d_D \chi,$$

то отсюда сразу получаем:

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D N_D(\chi) = \hat{1}. \quad (3.21)$$

Полученное соотношение полезно сравнить с выражением, следующее из (3.19):

$$\left( \frac{d}{d\chi} \right)_D N_D(\hat{1}) = \chi^D. \quad (3.22)$$

Найдем, чему равно  $N_D(1)$  при целых значениях  $D$ . Для прямой линии величина  $D = 1$  и из соотношения (3.19) следует

$$N(\chi) = N_1(1) / \chi. \quad (3.23)$$

Если длина линии единичная, то измерение ее длины можно провести единичным масштабом, прикладывая масштаб один раз. Таким образом, здесь имеем

$$\chi = 1 \text{ и } N(\chi) = 1.$$

Тогда из соотношения (3.23) следует, что

$$N_1(1) = 1. \quad (3.24)$$

Для квадрата на плоскости  $D = 2$  и (3.19) примет следующий вид:  $N(\chi) = N_2(1) / \chi^2$ . Взяв сторону квадрата единичной длины, здесь также имеем  $\chi = 1$  и  $N(\chi) = 1$ , откуда

$$N_2(1) = 1.$$

Аналогичным образом можно доказать, что при любом целом  $D$  всегда будет

$$N_{D=n}(1) = 1. \quad (3.25)$$

Приведем еще один аргумент, что дробное интегродифференциальное исчисление не может адекватно описывать процессы и явления на фрактальных структурах.

Часто для описания процессов на фрактальных структурах привлекают интегралы и дифференциалы дробного порядка. Например, для дробного дифференциала известно, что

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)^D \chi = \frac{1}{\Gamma(2-D)} \chi^{1-D},$$

где  $\Gamma$  – гамма функция. Сравнивая его с законом Мандельброта – Ричардсона (1.4), можно было бы предложить следующую формулу:

$$L = N_D(1) \Gamma(2-D) \left(\frac{d}{d\chi}\right)^D \chi = N_D(1) \chi^{1-D}.$$

Для случая  $D = 2$  получаем

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)^2 \chi = N_2(1) \frac{1}{\chi}.$$

Но слева выражение тождественно равно нулю, и чтобы правая часть обратилась в нуль, необходимо положить  $N_2(1) = 0$ . Но это противоречит общей теореме (3.25). Поэтому, для фрактальной геометрии применение дробного дифференцирования неприемлемо.

#### § 4. УРАВНЕНИЯ ВО ФРАКТАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Приступим к решению некоторых уравнений во фрактальных производных. Простейшее из них следующее:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_D y = A. \quad (3.26)$$

Оно элементарно решается фрактальным интегрированием:

$$y = \int A d_D x = A C x^{-D}. \quad (3.27)$$

Аналогично выписываем следующее уравнение и, соответственно, его решение:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)_D y = x^n; \quad y = C x^{n-D}. \quad (3.28)$$

Для описания процессов на фрактальных структурах, необходимо установить правила перехода от обыкновенных дифференциальных уравнений к фрактальным уравнениям (уравнениях во фрактальных производных).

Более 30 лет назад Бенуа Мандельброт открыл фрактальную геометрию. С его легкой руки принято считать, что математическим аппаратом фрактальной геометрии является дробное интегриродифференцирование [37]. По-видимому, это было связано с тем, что в обоих случаях имеют дело с дробными степенями. Однако не было проведено обоснование многомасштабности, определяемой формулой Мандельброта – Ричардсона.

Сравним фрактальный интеграл и дробную производную от степенной функции:

$$\int \chi^E d_D \chi = C \chi^{E-D},$$

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)^D \chi^E = \frac{\Gamma(1+E)}{\Gamma(1+E-D)} \chi^{E-D}.$$

Отсюда следует, что дробную производную можно сравнить с результатом действия фрактального интеграла:

$$\int \chi^E d_D \chi = C \frac{\Gamma(1+E-D)}{\Gamma(1+E)} \left(\frac{d}{d\chi}\right)^D \chi^E. \quad (3.29)$$

Справедливость этого равенства ограничено условием  $D \leq E$ . В противном случае выражение (3.29) при некоторых  $D$  может обратиться в неопределенность, упоминаемую выше. Полезность соотношения (3.29) в том, что оно позволяет установить правило соответствия или перехода от обычного исчисления к фрактальному. Такой переход будет осуществляться следующими формулами:

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)^1 \varphi(\chi) \Rightarrow \Gamma(2) \int \varphi(\chi) d_D \chi. \quad (3.30)$$

$$\left(\frac{d}{d\chi}\right)^2 \varphi(\chi) \Rightarrow \Gamma(3) \int d_D \chi \int \varphi(\chi) d_D \chi. \quad (3.31)$$

Обобщение на высшие производные очевидно. Теперь от дифференциальных уравнений можно переходить сначала к фрактальным интегралам, а затем и к уравнениям во фрактальных производных.

Обратим внимание, что правило (3.30) фактически совпадает с законом предельного перехода (2.8) (с учетом того, что  $\Gamma(2) = 1$ ). Действительно, закон предельного перехода (2.8) можно было бы сразу предложить для обратного преобразования. Именно, для перехода от обычной производной к фрактальной производной. Для этого (2.8) необходимо было бы переписать в следующем виде:

$$\frac{d}{d\chi} u(\chi) \rightarrow \int u(\chi) d_D \chi. \quad (3.32)$$

Эта формула, естественно, совпадает с (3.30). Заметим также, что величина  $D$  в формулах (3.30) и (3.31) не обязательно является именно фрактальной размерностью.

## § 5. НЕКОТОРЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В качестве применения выше изложенного рассмотрим равномерное и равноускоренное движения тел. При этом будет виден смысл введения коэффициентов в (3.30) и (3.31). Получаемые траектории будут описывать движение на фрактальных структурах, иначе, получаем фрактальное блуждание. Поскольку фрактальные структуры вложены в евклидовое пространство, то естественно принять, что  $E$  в (3.29) является размерностью евклидового пространства.

Простейшее движение – это движение с постоянной скоростью:

$V = const$ . Сначала расписываем:  $\frac{dx}{dt} = V$ . Согласно правилу (3.30),

заменяем  $\frac{dx}{dt} \Rightarrow \int x d_D t$ , после чего получаем

$$\int x d_D t = V.$$

Возьмем от него фрактальную производную:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)_D \int x d_D t = \left( \frac{d}{dt} \right)_D V.$$

Слева получаем  $x$ , а справа, согласно (3.18),  $C^{-1} V t^D$ , т.е. движение на фрактальной структуре подчиняется следующему закону:

$$x = C^{-1} V t^D. \quad (3.33)$$

Наглядно можно сказать, что движение происходит по ухабам и колдобинам. Мы получили закон фрактального блуждания, который подробно рассмотрим в Главе 4. В пределе  $D = 1$  получаем известное решение для равномерного движения:  $x = V t$ .

Равноускоренное движение описывается уравнением:  
 $\frac{dV}{dt} = a = \text{const}$ . Отсюда сразу получаем

$$V = C^{-1} a t^D. \quad (3.34)$$

Далее имеем  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ . Здесь используем соответствие (3.31):

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^2 x \Rightarrow 2 \int d_D t \int x d_D t, \text{ т.е. } 2 \int d_D t \int x d_D t = a.$$

Беря последовательно два раза фрактальную производную, находим

$$x = \frac{1}{2} C^{-2} a t^{2D}. \quad (2.35)$$

В пределе  $D = 1$  получаем известное решение:  $x = a t^2 / 2$ .

Природные среды неоднородны и многофазны. Такое строение сред сказывается и на их электрических свойствах. Здесь мы забегаем вперед, поскольку многие результаты независимым образом будут получены в следующих главах. Изложение материала в данном разделе связано именно только с применением фрактального исчисления. Для однородной и проводящей среды скин-слой  $H \sim \omega^{-1/2}$ , где  $\omega$  - круговая частота. Для фрактальной по электрическим параметрам среды в [Балханов В.К. 2006] показано, что частотная характеристика скин-слоя имеет также степенную зависимость, но с отличным от  $-1/2$  показателем  $D$ :

$$H \sim \omega^{-D}. \quad (3.36)$$

Распространение электромагнитного поля в неоднородной среде можно рассматривать как блуждание по проводящим и диэлектрическим участкам, которые описываются размерностью блуждания  $h$ . Для задачи радиофизики известно, что  $D$  и  $h$  связаны соотношением:

$$D = 1/h. \quad (3.37)$$

Наличие двух величин  $D$  и  $h$  означает, что при переходе к фрактальным производным согласно формулам (3.30) и (3.31), величина  $D$  в этих формулах не обязательно является фрактальной размерностью. Например, вместо (3.30) можно записать

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^1 \varphi(z) \Rightarrow \int \varphi(z) d_{h/2} z, \quad (3.38)$$

а затем уже, исходя из многомасштабности и самоподобия, устанавливать связь величины  $h$  с фрактальной размерностью.

Для монохроматической волны, падающей на проводящую среду с плоской поверхностью, уравнения Максвелла сводятся к следующим:

$$i \omega B = \frac{\partial E}{\partial z}, \quad \mu_0 \sigma E = -\frac{\partial B}{\partial z}. \quad (3.39)$$

Здесь  $\sigma$  - проводимость,  $\mu_0$  - магнитная постоянная,  $E$  (электрическое поле) и  $B$  (магнитная индукция) – тангенциальные компоненты электромагнитного поля, координата  $z$  направлена вглубь среды. Если среда неоднородна, то переходим, согласно (3.38), сначала к фрактальным интегралам:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)E \Rightarrow \int E d_{h/2} z, \quad \left(\frac{d}{dz}\right)B \Rightarrow \int B d_{h/2} z.$$

Взяв от получаемых уравнений фрактальные производные, для  $B$  окончательно находим:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)_h B + \frac{B}{i \mu_0 \omega \sigma} = 0. \quad (3.40)$$

Здесь использовали легко доказываемое правило

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^2_{h/2} = \left(\frac{d}{dz}\right)_{h/2} \left(\frac{d}{dz}\right)_{h/2} = \left(\frac{d}{dz}\right)_h.$$

Хотя в настоящее время неизвестно, как решать подобные (3.40) уравнения, но сразу можно установить, что скин - слой, как единственная величина с размерностью длины, должна иметь следующий вид:

$$H = C \left( \frac{1}{i \mu_0 \omega \sigma} \right)^{\frac{1}{h}}, \quad (3.41)$$

где  $C$  – неопределенный множитель. Отсюда, с учетом (3.37) находим закон (3.36).

## § 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФРАКТАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Одно из свойств фрактальных линий – их изломанность в каждой точке. Это означает, что самоподобные кривые не имеют обычных производных. Если нарисовать галочку, то она в точке излома будет иметь две касательные. А поскольку касательная и есть геометрическая интерпретация производной, то получается, что галочка в точке излома имеет две производные. По – существу, у галочки имеется одна точка, в месте которой неизвестно, какую надо взять производную. Понятно, что для фрактальных объектов, имеющих нерегулярность в каждой точке, надо ввести свою особую – фрактальную производную, и так, чтобы она была естественным обобщением обычной производной. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим окружность радиусом  $R$ . Взяв производную от площади круга, получаем длину окружности (рис. 3.1 а). Видим, что фактически вырезали внутреннюю часть, оставив только границу самой окружности. Аналогично примем, что действие фрактальной производной сводится к удалению внутренней части замкнутой области (рис. 3.1 б).

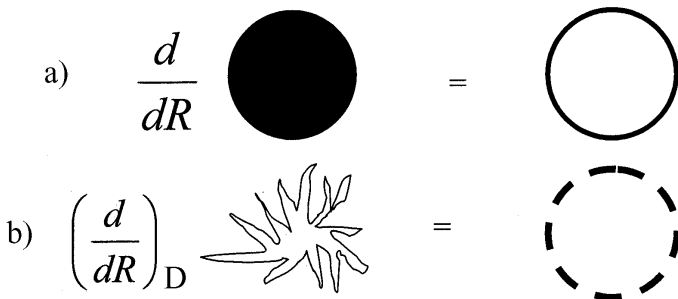


Рис. 3.1. Геометрический смысл обычной а) и фрактальной б) производных.

В главе 2 § 2 было установлено, что длина всех ветвлений внутри области линейного размера  $R$  пропорциональна  $R^D$ . Взяв фрактальную производную, мы вырезаем внутреннюю часть, оставляя только соприкос-



новения границы области с ветвлениями. Разделив получаемой выражение на площадь области, получаем число пересечений. Используя правило взятия фрактальной производной от степенной функции (3.15), для числа ветвлений плоскостной проекции будем иметь

$$N = \frac{1}{R^2} \left( \frac{d}{dR} \right)^D R^D = C \cdot R^{2D-2}. \quad (3.42)$$

Сравнивая полученное выражение с (2.9), приходим к результату (2.10), которое надо переписать в следующем виде:

$$h_2 = 2(D_2 - 1). \quad (3.43)$$

В трехмерном случае, чтобы получить число ветвлений, фрактальную производную от длины всех ветвлений необходимо разделить на объемом  $R^3$ , т.е. для пространственной структуры:

$$N = \frac{1}{R^3} \left( \frac{d}{dR} \right)^D R^D = C R^{2D-3}. \quad (3.44)$$

Отсюда следует, что для пространственного ветвления

$$h_3 = 2D_3 - 3. \quad (3.45)$$

Для разнообразных природных фрактальных объектов должна отдельно устанавливаться связь между  $D_2$  и  $D_3$ , и их отношение с размерностями блуждания. Формулы (3.43) и (3.45) дают пример связи  $h$  и  $D$  для разветвленных структур. Еще необходимо установить зависимость  $D_2$  и  $D_3$  между собой.

## ГЛАВА 4

### ИНТЕГРАЛЫ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

#### § 1. ФАКТОРИАЛ И СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Основную роль во фрактальной геометрии играют дробные степени. Такую же роль дробные степени играют и в математическом аппарате дробных интегралов и дифференциалов. Поэтому желательно провести сравнение между фрактальными и дробными интегралами. Хотя мы увидим, что дробные интегралы, вообще говоря, не способны описать формулу Мандельброта – Ричардсона, но они позволяют получить эвристическое правило перехода от обыкновенных дифференциальных уравнений к фрактальным уравнениям. Переход от целых чисел к дробным удобно провести, отталкиваясь от факториалов.

Часто встречающееся произведение целых чисел  $1 \cdot 2 \dots n$  обозначает как число  $n$  с восклицательным знаком:

$$n! = 1 \cdot 2 \dots n,$$

его называют *факториалом*. При  $n = 0$  полагают  $0! = 1$ . Факториал, например, возникает при вычислении следующего определенного инте-

грала:  $\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$ . Интегрируя по частям, легко получаем

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n(n-1)(n-2) \dots 1 = n!.$$

Но этот интеграл имеет конечное значение и при произвольном  $n$ , не обязательно целом. Для этого общего случая Эйлер ввел свою знаменитую *гамма-функцию*:

$$\Gamma(1 + \lambda) = \int_0^{\infty} x^{\lambda} e^{-x} dx. \quad (4.1)$$

Для целых  $\lambda = n$  будет  $\Gamma(1 + n) = n!$ . Теперь можно определить факториал и от дробного числа, заменяя его сначала  $\Gamma$ -функцией:

$$\lambda! \Rightarrow \Gamma(1 + \lambda),$$

а затем численно находя интеграл (4.1). При этом фактически достаточно знать интеграл (4.1) для значений  $\lambda$ , лежащих в интервале от 0 до 1/2. Остальные значения находятся из двух важных свойств, которым удовлетворяет  $\Gamma$ -функция:

$$\Gamma(1 + \lambda) = \lambda \Gamma(\lambda), \quad \Gamma(\lambda) \Gamma(1 - \lambda) = \frac{\pi}{\sin \pi \lambda}. \quad (4.2)$$

Перемножим две  $\Gamma$ -функции:

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{b-1} e^{-y} dy.$$

Заменим верхний предел интегрирования по  $x$  на конечное число  $R$ , которое после вычислений устремляется в бесконечность. Тогда

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = \int_0^R x^{a-1} \int_0^\infty y^{b-1} e^{-(x+y)} dx dy. \quad (4.3)$$

Проведем замену переменных  $x + y = u$ ,  $y = u v$ , при этом видно, что нижние пределы интегрирования по  $u$  и  $v$  остаются равными нулю. Для определения верхних пределов интегрирования сначала найдем  $u = x + y$ ,  $v = y/(x + y)$ . Отсюда, после подстановок  $x = R$  и  $y = \infty$ , находим  $u = \infty$  и  $v = \infty/(R + \infty) = 1$ . Площадь в старых координатах была равна  $v = \infty/(R + \infty) = 1$ , в новых —  $du dv$ , причем

$$dx dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv = u du dv.$$

Произведение двух  $\Gamma$ -функций (4.3) принимает следующий вид

$$\Gamma(a) \Gamma(b) = \left( \int_0^\infty u^{a+b-1} e^{-u} du \right) \int_0^1 v^{a-1} (1-v)^{b-1} dv.$$

Заметим, что вспомогательный параметр  $R$  выпал. Интеграл в скобках есть  $\Gamma(a + b)$ , и мы приходим к еще одной полезной специальной функции, которую Эйлер назвал *бета-функцией*:

$$\int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (4.4)$$

Подобным образом можно прийти к наиболее общей специальной функции – *гипергеометрической функции Гаусса*:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(1-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt. \quad (4.5)$$

Через гипергеометрическую функцию могут быть выражены элементарные и специальные функции, например, обобщенный полином Лежандра:

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^{\mu/2} F(-\nu, 1+\nu; 1-\mu; \frac{1-x}{2}),$$

причем  $|1-x| < 2$ .

## § 2. ДРОБНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Рассмотрим  $n$ -кратный интеграл  $\int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) dx = \int_a^x \varphi(x) d^n x$ , если ввести оператор интегрирования  $J \dots = \int_a^x \dots dx$ , то  $n$ -кратный интеграл примет вид  $J^n \varphi(x)$ . Итак, имеем

$$J^n \varphi(x) = \int_a^x dx \int_a^x dx \dots \int_a^x \varphi(x) dx = \int_a^x \varphi(x) d^n x. \quad (4.6)$$

По индукции можно доказать, что рассматриваемый  $n$ -кратный интеграл равен

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt. \quad (4.7)$$

Аналогично тому, что интеграл (4.1) определен и для нецелых  $\lambda$ , притом, что оба интеграла, именно (4.6) и (4.7), существуют и в общем случае, когда  $n$  – не обязательно целое число. Заменяя  $n$  произвольным

числом  $\lambda$  и учитывая правило  $(n-1)! = \Gamma(n) \Rightarrow \Gamma(\lambda)$ , в итоге приходим к интегралу Римана – Лиувилля:

$$J^\lambda \varphi(x) = \int_a^x \varphi(x) d^\lambda x = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\lambda}} dt. \quad (4.8)$$

Для наших целей строгое ограничение пределов интегрирования не нужно. Мы будем придерживаться простого правила: вычисляем интеграл

$$J^\lambda \varphi(x) = \int \varphi(x) d^\lambda x = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\lambda}} dt \quad (4.9)$$

так, как если бы он имел удобные для нас пределы интегрирования, чтобы результат интегрирования выражался через элементарные или специальные функции. Если заменить переменную интегрирования  $x-t$  на  $t$ , то получим более удобную форму представления дробного интеграла:

$$J^\lambda \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int t^{\lambda-1} \varphi(x-t) dt. \quad (4.10)$$

Из определения (4.6) очевидным образом следует, что  $n$ -кратное интегрирование подчиняется мультипликативному свойству:

$$J^k J^m = J^{k+m}. \quad (4.11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int dx \dots \int \varphi(x) dx &= \left( \int dx \dots \int dx \right) \left( \int dx \dots \int \varphi(x) dx \right) \\ &\quad k + m \text{ интегралов} \quad k \text{ инт.} \quad m \text{ интегралов} \\ &= \int d^k x \int \varphi(x) d^m x. \end{aligned}$$

Понятно, что свойство (4.11) будет верно и при произвольных  $k$  и  $m$ . Это позволяет рассматривать значения  $\lambda$ , заключенные только между 0 и 1. Если, например,  $\lambda$  больше единицы (но меньше 2), то, заменяя его на  $1 + \lambda$ , всегда можно расписать

$$J^{1+\lambda} \varphi(x) = \int \varphi(x) d^{1+\lambda} x = \int dx \int \varphi(x) d^{\lambda} x, \quad (4.12)$$

имея после дробного интегрирования уже обычный интеграл. Очевидно, что (4.12) можно переписать и как  $\int d^{\lambda} x \int \varphi(x) dx$ .

**Задача 10.** Проверить, что три интеграла  $\int_0^x x d^{1,5} x$ ,  $\int_0^x dx \int_0^x x d^{0,5} x$  и  $\int_0^x d^{0,5} x \int_0^x x dx$  равны  $\frac{8}{15} \frac{x^{5/2}}{\Gamma(0,5)}$ .

**Решение.** Рассмотрим третий интеграл. Первое интегрирование является табличным и равно  $x^2/2$ . Для последующего уже дробного интеграла имеем  $\frac{1}{2} \int_0^x x^2 d^{0,5} x = \frac{1}{2} \frac{1}{\Gamma(0,5)} \int_0^x \frac{y^2 dy}{\sqrt{x-y}}$ . Заменой переменной  $x-y=z^2$  получаем  $\frac{1}{\Gamma(0,5)} \int_0^{\sqrt{x}} (x-z^2)^2 dz$ . Полученный интеграл элементарный, в итоге приходим к выше написанному результату.

### § 3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

Для степенной функции  $\varphi = x^n$  дробный интеграл (4.10) примет вид

$$J^{\lambda} x^n = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int t^{\lambda-1} (x-t)^n dt.$$

После замены переменной интегрирования  $t \rightarrow xt$ , получим

$$J^{\lambda} x^n = \frac{x^{\lambda+n}}{\Gamma(\lambda)} \int t^{\lambda-1} (1-t)^n dt.$$

Но интеграл здесь есть  $B$ -функция (4.4), поэтому

$$J^{\lambda} x^n = \int x^n d^{\lambda} x = \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n+\lambda)} x^{n+\lambda}. \quad (4.13)$$

Если отвлечься от множителя, то результат вполне очевиден.

Рассмотрим экспоненциальную функцию  $\varphi = e^x$ , для этого случая

$$J^{\lambda} e^x = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int t^{\lambda-1} e^{x-t} dt = \frac{e^x}{\Gamma(\lambda)} \int t^{\lambda-1} e^{-t} dt,$$

но интеграл есть  $\Gamma$ -функция (26.1), так что

$$J^{\lambda} e^x = \int e^x d^{\lambda} x = e^x. \quad (4.14)$$

Экспонента не меняется при дробном интегрировании. Для случая  $\varphi = e^{ax}$  без труда находим

$$J^{\lambda} e^{ax} = a^{-\lambda} e^{ax}. \quad (4.15)$$

Этот результат можно получить, не проводя фактически интегрирования, а используя только (4.14). Для этого проведем масштабное преобразование, т. е. заменим  $x$  на  $ax$ . Тогда (4.14) примет вид

$\int e^{ax} d^{\lambda} ax = e^{ax}$ . Но из определения кратного интеграла (4.6) следует, что для кратного дифференциала

$$d^{\lambda} ax = a^{\lambda} d^{\lambda} x. \quad (4.16)$$

Поэтому  $a^{\lambda} \int e^{ax} d^{\lambda} x = e^{ax}$ , откуда и следует (4.15).

Рассмотрим тригонометрическую функцию, например,  $\varphi = \sin x$ . В этом случае

$$J^{\lambda} \sin x = \frac{1}{2i} (J^{\lambda} e^{ix} - J^{\lambda} e^{-ix}).$$

Здесь пригодится (4.15), получаем

$$\frac{1}{2i} (i^{-\lambda} e^{ix} - (-i)^{-\lambda} e^{-ix}) =$$

$$= \frac{1}{2i} (e^{i(x-\lambda\pi/2)} - e^{-i(x-\lambda\pi/2)}) = \sin\left(x - \frac{\pi\lambda}{2}\right).$$

Таким образом,

$$J^\lambda \sin x = \int \sin x d^\lambda x = \sin\left(x - \frac{\pi\lambda}{2}\right). \quad (4.17)$$

Результат (4.17) можно получить, вычисляя последовательно:

$$\begin{aligned} \int \sin x dx &= \cos x = \sin(x - \pi/2), \\ \int dx \int \sin x dx &= -\sin x = \sin(x - 2\pi/2), \\ \int dx \int dx \int \sin x dx &= -\cos x = \sin(x - 3\pi/2), \\ &\dots \\ \int \sin x d^n x &= \sin(x - n\pi/2). \end{aligned}$$

Обобщая  $n$  на нецелые  $\lambda$ , приходим к (4.17).

Аналогично находим и в более сложном случае:

$$J^\lambda e^{ax} \sin bx = \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^{\lambda/2}} \sin(x - \lambda\phi),$$

где угол  $\phi = \arg(a + ib) \in [0, \pi/2]$ .

Если ввести *пси*-функцию  $\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$ , то можно найти дробный интеграл и от логарифма:

$$J^\lambda \ln x = \frac{x^\lambda}{\Gamma(1+\lambda)} \left[ \ln x + \psi(1) - \psi(1+\lambda) \right], \quad (4.18)$$

где  $\psi(1+\lambda) - \psi(1) = -\lambda \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} \ln t \cdot dt$ .

В конце укажем на две трудности, возникающие при вычислении интеграла (4.14). Если разложить экспоненту в ряд, то получим следующее:



$$\int e^x d^\lambda x = \int \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots \right) d^\lambda x =$$

$$= x^\lambda \left[ \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\lambda)} + \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2+\lambda)} x + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3+\lambda)} \frac{x^2}{2} + \dots \right].$$

В итоге мы не получаем  $e^x$ . Вторая трудность в том, что если определить пределы интегрирования, например, интегрировать от 0 до  $x$ , то в итоге получаем

$$\int_0^x e^x d^\lambda x = e^x - \frac{1 - x^\lambda}{1 - x}.$$

«Постоянная» интегрирования на самом деле является функцией переменной.

#### § 4. ДРОБНОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Интегрирование и дифференцирование являются обратными по отношению друг к другу операциями. Это означает, что если продифференцировать интеграл от некоторой функции, то получим саму функцию:

$$\left( \frac{d}{dx} \right) \int \varphi(x) d x = \varphi(x).$$

Для интеграла  $n$ -го порядка, очевидно, надо провести  $n$  дифференцирований:

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^n \int \varphi(x) d^n x = \varphi(x).$$

Мы распространим эту операцию и на произвольное число  $n = \lambda$ , т. е. будем считать, что

$$\left( \frac{d}{dx} \right)^\lambda \int \varphi(x) d^\lambda x = \varphi(x). \quad (4.19)$$

Обозначим оператор дифференцирования  $\frac{d}{dx}$  как  $D$ , тогда (4.19) примет вид  $D^\lambda J^\lambda \varphi = \varphi$  или  $D^\lambda J^\lambda = 1$  – единичный оператор. Отсюда ясно, что

$$D^\lambda = J^{-\lambda}. \quad (4.20)$$

Заменяя в формулах интегрирования  $\lambda$  на  $-\lambda$ , получаем дробное дифференцирование. Например, для элементарных функций получаем

$$\begin{aligned} D^\lambda x^n &= \frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+n-\lambda)} x^{n-\lambda}, \\ D^\lambda e^x &= e^x, \\ D^\lambda \sin x &= \sin(x + \lambda \pi / 2), \\ D^\lambda \ln x &= \frac{\ln x + \psi(1) - \psi(1-\lambda)}{x^\lambda \Gamma(1-\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Дробный дифференциал  $D^\lambda$  можно выразить через интеграл, для этого в (4.9) заменим  $\lambda$  на  $-\lambda$ :

$$J^{-\lambda} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1+\lambda}} dt.$$

Так как  $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$ , то, заменив  $n-1$  на  $-\lambda$ , получим  $\Gamma(-\lambda) = \Gamma(1-\lambda)/(-\lambda)$ .

Далее, заменив  $\frac{1}{(x-t)^{1+\lambda}} = \frac{1}{(-\lambda)} \frac{d}{dx} \frac{1}{(x-t)^\lambda}$ , окончательно приходим к формуле

$$D^\lambda \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dx} \int \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\lambda} dt, \quad (4.22)$$

впервые предложенной Лиувиллем.

Пределы интегрирования у нас в некотором роде произвольные, фиксируя их в (4.27), можно получать различные формы интегрального

представления оператора дробного дифференциала. Например, считая пределы интегрирования от 0 до  $x$ , выражение (4.22) можно преобразовать в производную Маршо:

$$D^{\lambda} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(-\lambda)} \int \frac{\varphi(t) - \varphi(x+t)}{(x-t)^{1+\lambda}} dt.$$

Однако лучше сначала использовать интеграл (4.10), который во всех отношениях более удобен, а затем просто поменять  $\lambda$  на  $-\lambda$ .

Оба интеграла (4.9) и (4.22) удивительным образом проявляются в интегральном уравнении Абеля:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_a^x \frac{\varphi(t) dt}{(x-t)^{1-\lambda}} = f(x), \quad x > a. \quad (4.23)$$

Решим его, считая  $\varphi(x)$  – неизвестной. Обычно используемая при этом процедура заключается в следующем. Сначала заменим переменные и перепишем (4.23) в виде

$$\int_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\lambda}} = \Gamma(\lambda) f(t).$$

Умножим его на  $\frac{1}{(x-t)^{\lambda}}$  и проинтегрируем по  $t$  от  $a$  до  $x$ :

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{\lambda}} \int_a^t \frac{\varphi(s) ds}{(t-s)^{1-\lambda}} = \Gamma(\lambda) \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\lambda}}.$$

Используя интеграл Дирихле

$$\int_a^x dt \int_a^t \dots ds = \int_a^x ds \int_s^x \dots dt,$$

получаем

$$\int_a^x \varphi(s) ds \int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{\lambda} (t-s)^{1-\lambda}} = \Gamma(\lambda) \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^{\lambda}}.$$

Для внутреннего интеграла заменим переменную  $t$  на  $\tau$  согласно формуле

$$t = s + \tau (x - s),$$

тогда

$$\tau^{\lambda-1} (1-\tau)^{-\lambda} d\tau = B(\lambda, 1-\lambda) = \Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda),$$

поэтому

$$\int_a^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\lambda}.$$

Дифференцируя по  $x$ , окончательно получим:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\lambda)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\lambda}. \quad (4.24)$$

Производную от интеграла здесь можно переписать в следующем эквивалентном виде:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t) dt}{(x-t)^\lambda} = \frac{f(a)}{(x-a)^\lambda} + \int_a^x \frac{f'(t) dt}{(x-t)^\lambda}.$$

Легко видеть, что выражение (4.23) есть определение дробного интеграла (4.9), а (4.24) – определение дробного дифференциала (4.22).

**Задача 11.** Доказать, что  $d^\lambda a x = a^\lambda d^\lambda x$ , где  $a$  – постоянная.

## ГЛАВА 5

### ФРАКТАЛЬНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

В главе рассматриваются некоторые физические задачи, для которых фрактальной геометрией установим степенные закономерности. Исторически первыми из таких задач были теория броуновского движения, теория полимеров и теория перколяции, поэтому уместно рассмотрение их в данной книге. Замечательно, что для электромагнитных процессов устанавливается связь между размерностью блуждания и фрактальной размерностью, для стримерных каналов степенные показатели удается вычислить. Для ветвлений дельты рек также установлены степенные закономерности, хотя здесь еще и остаются нерешенные вопросы.

#### § 1. БРОУНОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

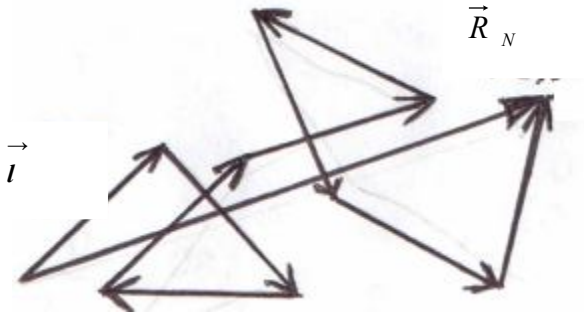
Если в одном углу комнаты пролить духи, то спустя некоторое время их можно почувствовать и в другом углу. Распространение молекул, ответственных за запах, происходит в окружение молекул воздуха, поэтому существенно отличается от движения в безвоздушном пространстве. Молекула запаха (далее – частица), двигаясь сначала по прямой, сталкивается с молекулой воздуха и, как бильярдный шар, меняет свое направление. Такое движение открыл Роберт Броун (Robert Brown, 1826), поэтому его называют броуновским движением. Задачей здесь является получение информации о том, на какое расстояние за время  $t$  удалится частица от некоторого первоначального местоположения, какую она будет иметь скорость. Впервые эта задача была решена А. Эйнштейном (1905) и приводится практически во всех учебниках, посвященных кинетической теории вещества. Ввиду важности как самой задачи, так и возможного применения к другим задачам, приведем решение, следуя изложению в Фейнмановских лекциях по физике.

Частица в среде испытывает порядка  $10^{14}$  столкновений в секунду, поэтому спустя, скажем, одной сотой доли секунды, уже не «пом-

нит», что с ней было раньше. Значит все столкновения случайны, каждый следующий «шаг» частицы совершенно не зависит от предыдущего. Если  $R$  – расстояние частицы от начального положения, то в среднем  $\langle R \rangle = 0$ , но, как и для всякого флуктуационного явления,  $\langle R^2 \rangle \neq 0$ .

Пусть  $l$  – среднее расстояние между двумя последовательными столкновениями, тогда (рис. 5.1):

$$\vec{R}_N = \vec{R}_{N-1} + \vec{l}.$$



**Рис. 5.1.** Блуждание молекулы. В результате хаотического движения из  $N$  сегментов длиной  $l$  молекула смещается на расстояние  $\vec{R}_N$

Возведем его в квадрат:  $R_N^2 = R_{N-1}^2 + 2 \vec{R}_{N-1} \cdot \vec{l} + l^2$  и усредним. Так как, очевидно,  $\langle \vec{R}_{N-1} \cdot \vec{l} \rangle = 0$  – все направления равновероятны, то

$$\langle R_N^2 \rangle = \langle R_{N-1}^2 \rangle + l^2.$$

Это уравнение легко решается по индукции:

$$\langle R_1^2 \rangle = l^2; \quad \langle R_2^2 \rangle = \langle R_1^2 \rangle + l^2 = 2 l^2;$$

$$\langle R_3^2 \rangle = \langle R_2^2 \rangle + l^2 = 3 l^2 \dots$$

Так, что

$$\langle R_N^2 \rangle = N l^2. \quad (5.1)$$

Если ввести среднее время  $\tau$  между двумя столкновениями, то за время  $t$  произойдет всего  $N = t / \tau$  столкновений и (5.1) примет вид

$$\langle R^2 \rangle = \frac{l^2}{\tau} t. \quad (5.2)$$

Отношение  $l / \tau$  определяет какую-то скорость  $v$ . Поскольку среднее  $\langle v \rangle = 0$ , то надо находить среднее от квадрата  $\langle v^2 \rangle$ . По определению среднего

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} (v_{нач}^2 + v_{кон}^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{l}{\tau} \right)^2,$$

а по кинетической теории  $\langle v^2 \rangle = 3kT / m$ , следовательно,

$$\frac{l^2}{\tau^2} = \frac{6 k_B T}{m}, \quad (5.3)$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана,  $T$  – абсолютная температура,  $m$  – масса броуновской молекулы. Длина свободного пробега и время между двумя столкновениями строго связаны между собой.

Шагая по дороге со скоростью  $v = l / \tau$ , путник за время  $t$  преодолет расстояние  $L = v t$  (рис. 5.2). Например, имея скорость 3 км/ч, путник за 1 час может удалиться на 3 км. Однако, шагая в лесу, путник постоянно будет менять направление, обходя деревья. В этом случае, меняя время  $t$  на  $\tau L / l$ , из (5.2) находим среднеквадратичное расстояние  $R$ :

$$R = \sqrt{\langle R^2 \rangle} = \sqrt{L l}. \quad (5.4)$$

Для путника в лесу длина  $l$  будет определяться пределом прямой видимости, скажем, в 30 м. Тогда, согласно (5.3), путник за 1 час уда-

лится на  $\sqrt{3 \text{ км} \cdot 30 \text{ м}} = 300 \text{ м}$ , а не на 3 км, как это было бы на прямой дороге.

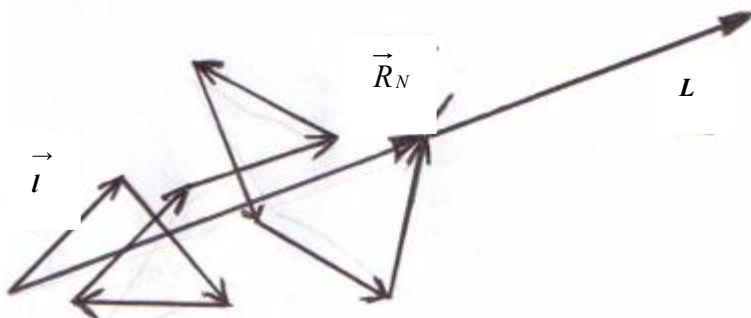


Рис. 5.2. Движение по прямой и хаотическое блуждание

## § 2. ТЕОРИЯ ПЕРКОЛЯЦИИ

Пусть путник находится не в лесу, а на краю болота. Перепрыгивая с кочки на кочку, это болото можно легко преодолеть, но это возможно, если кочки находятся достаточно близко друг от друга. Может случиться так, что кочки окажутся на далеком расстоянии и путник не сможет по ним прыгать, застрянет где-нибудь посередине болота. Очевидно, что существует критическая плотность  $n_c$  расположения кочек, при котором становится возможным преодолеть болото. Такую ситуацию называют *порогом протекания*. Теория, основанная на существовании порога протекания, называется теорией перколяции. Ее основное положение заключается в предположении, что вблизи порога протекания все величины в задаче степенным образом зависят от разности  $\Delta n = n - n_c$ . Согласно формуле (5.1), в задаче броуновского движения основными величинами являются среднеквадратичное расстояние  $R$ , число прыжков  $N$  и среднее расстояние между кочками  $l$ . Когда  $n \gg n_c$ , кочки расположены достаточно плотно, и путник в конце концов преодолет болото. Если  $n < n_c$ , то кочки расположены да-



леко друг от друга, и турист не сможет прыгать по ним. Вблизи  $n \sim n_c$ , согласно теории перколяции, мы должны принять, что

$$l \sim \Delta n^{-\alpha}, \quad (5.5)$$

$$N \sim \Delta n^{\beta}, \quad (5.6)$$

$$R^2 \sim \Delta n^{\gamma}. \quad (5.7)$$

Чтобы турист застрял в болоте, расстояние между кочками  $l$  надо устремить в бесконечность:  $l \rightarrow \infty$  при  $\Delta n \rightarrow 0$ , поэтому в (5.5) показатель степени входит с отрицательным знаком. Знаки в степенях в (5.6) и (5.7) положительны, это необходимо для того, чтобы при  $\Delta n \rightarrow 0$  было  $N \rightarrow 0$  и  $R^2 \rightarrow 0$ , – турист остается на месте.

По существу законы (5.5) – (5.7) означают многомасштабность процесса протекания.

В теории перколяции остается справедливой формула (5.1):

$$R^2 = N l^2. \quad (5.8)$$

Кроме того, согласно определению понятия плотности, имеем:

$$\Delta n \sim \frac{N}{R^2}. \quad (5.9)$$

По существу, это условие самоподобия процесса протекания.

Подставляя (5.5)–(5.7) в (5.8)–(5.9), получаем два уравнения для трех показателей:

$$\gamma = \beta - 2\alpha, \quad 1 = \beta - \gamma.$$

Отсюда сразу находим  $\alpha = 1/2$ , т. е.

$$l \sim \frac{1}{\sqrt{\Delta n}} = \frac{1}{\sqrt{n - n_c}}. \quad (5.10)$$

Полученное соотношение указывает, что средняя длина свободного пробега представляет собой корреляционную длину. Далее

$$N \sim \Delta n^{\beta}, \quad R^2 \sim \Delta n^{\beta-1}. \quad (5.11)$$

Если мы хотим найти зависимость  $R$  от  $N$ , то сначала выражаем  $\Delta n \sim N^{1/\beta}$ , далее

$$R \sim N^{\frac{\beta-1}{2\beta}}.$$

Поскольку число прыжков от кочки к кочке пропорционально времени  $t$  передвижения через болото, то получаем, что

$$R \sim t^{\frac{\beta-1}{2\beta}}. \quad (5.12)$$

Получили степенной закон блуждания путника через болото.

Обратим внимание на существенный недостаток перколяционного подхода. Во-первых, необходимо сразу предполагать степенные зависимости, во-вторых, он характеризуется обилием степенных показателей. Хотя нам и удалось для блуждания по болоту все степенные показатели выразить через одну величину, но в общем случае этого не всегда удается сделать.

### § 3. ФРАКТАЛЬНОЕ БЛУЖДЕНИЕ

Неоднородность реальных сред приводит к тому, что траектория путника представляет собой сильно изломанную, причудливую линию. Перепрыгивая с кочки на кочку при пересечении болота, путник описывает не только извилистую линию, но и линию, состоящую из отрезков. Это означает, что в общем случае линия еще и фрагментарна. Такие извилистые и иногда фрагментарные линии обладают важными свойствами многомасштабности и самоподобия, т. е. описываются фрактальной геометрией, их длина  $L$  описывается формулой Мандельброта – Ричардсона:

$$L = C \chi^{1-D}. \quad (5.13)$$

Здесь  $\chi$  – масштаб измерения,  $D$  – фрактальная размерность линии. Если линия непрерывна, то для путника на плоской поверхности Земли  $1 < D < 2$ . Для путника на болоте линия фрагментарна и  $0 < D < 1$ .

Если линия в неоднородной, неупорядоченной среде является фрактальной, то и среда является фрактальной. Тогда движение путни-

ка во фрактальной среде будет являться блужданием по или вокруг неоднородностей.

Траектория движения частицы описывается заданием зависимости местоположения частиц от времени  $t$ . При движении во фрактальной среде траектория будет фрактальной, т. е. многомасштабной и самоподобной. Это означает, что все траектории геометрически подобны друг другу. Геометрическое подобие математически описывается следующими преобразованиями:

$$L' = \eta L, \quad t' = \eta^h t. \quad (5.14)$$

Здесь траектория  $(L', t')$  подобна траектории  $(L, t)$ ,  $\eta$  – масштабный множитель. Степенной показатель  $h$  говорит о том, что происходит именно блуждание и соотносится с размерностью фрактальной среды. Поэтому естественно  $h$  назвать размерностью блуждания. Мы с ней уже встречались в главе 2 (формула 2.9). Исключим масштабный множитель следующим приемом:

$$\eta = \frac{L'}{L} = \left( \frac{t'}{t} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

Отсюда следует, что  $L$  и  $t^{1/h}$  пропорциональны друг другу:

$$L \sim t^{1/h}. \quad (5.15)$$

Мы получили фундаментальный для фрактальной геометрии закон фрактального блуждания. Он описывает степенной рост со временем линейного размера области блуждания объекта во фрактальной среде.

Закон (5.15) мы получили, перенося фрактальность объекта на среду. Но рассуждения можно обратить, тогда (5.15) будет описывать рост фрактальных объектов со временем. Если объект состоит из отдельных структур (стримерные каналы, дельты рек), то при росте структуры происходит их бурное разветвление и запутывание. Природные объекты стремятся захватить как можно больший объем и плотнее его заполнить.

Одна из задач фрактальной геометрии и фрактального исчисления – это установление связи размерности блуждания  $h$  и фрактальной размерности  $D$  среды, в котором происходит блуждание. В главе 3 мы уже установили, что для разветвленных структур на плоскости

$$h_2 = 2 D_2 - 2.$$

Если ветвление происходит в объеме, то из геометрического смысла фрактальной производной следует, что

$$h_3 = 2 D_3 - 3.$$

Для блуждания через болото мы установили закон (5.12), откуда следует, что

$$h = \frac{2 \beta}{\beta - 1}.$$

Поскольку одновременно  $h > 0$  и  $\beta > 0$ , то отсюда следует, что фактически  $\beta > 1$ . Впрочем, неравенства следуют и из (5.11).

Сравнение формулы  $R \sim t^{1/2}$ , относящейся к броуновскому блужданию, и результата  $R \sim t^{1/h}$ , относящегося к фрактальному блужданию, позволяет выдвинуть следующий *эвристический принцип*. Если для какого-то процесса, происходящего в однородной среде, для величин  $y$  и  $x$ , описывающих этот процесс, известен следующий степенной закон:

$$y \sim x^{1/2}, \quad (5.16)$$

то для этого же процесса, но происходящего в неоднородной, неупорядоченной среде, закон (32.4) заменяется на следующий:

$$y \sim x^{1/h}. \quad (5.17)$$

В качестве примера рассмотрим затухание электромагнитного поля в однородной среде. Величина, описывающая это затухание, является скин-слоем  $H_C$ , который зависит от частоты  $f$  электромагнитного поля:

$$H_C \sim f^{-1/2}. \quad (5.18)$$

Согласно эвристическому принципу, если среда неоднородная, когда проводящие и диэлектрические свойства в среде распределены хаотично, то скин-слой будет следующим образом зависеть от частоты:

$$H_C \sim f^{-1/h}. \quad (5.19)$$

Остается только определить фрактальную размерность среды, т. е. что она описывает, и установить ее связь с величиной  $h$  в (5.19). Эту задачу решим в следующем параграфе.

Если известна скорость движения  $v$ , то пройденное расстояние  $r$  будет находиться как  $r = \int v \, d t$ . Однако при броуновском движении средние значения  $\langle r \rangle$  и  $\langle v \rangle$  равны нулю. Отличные от нуля только средние значения квадратов этих величин:  $\langle r^2 \rangle$  и  $\langle v^2 \rangle$ , и нужно говорить о зависимости  $r = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$  от времени. Для броуновского движения  $r \sim \sqrt{t}$ . Такую зависимость можно получить, используя разработанное в главе 3 фрактальное исчисление. Необходимо использовать правило перехода:

$$\int v \, d t \Rightarrow \left( \frac{d}{d t} \right)_{1/2} v.$$

При этом приобретает смысл и величина  $r$ , она является средне-квадратичным значением. Таким образом, находим, что соотношение

$$r = \int v \, d t$$

переходит в

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \left( \frac{d}{d t} \right)_{1/2} \sqrt{\langle v^2 \rangle}.$$

Поскольку  $v = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \text{const}$ , то получаем

$$r = C v t^{1/2}. \quad (5.20)$$

Такой степенной закон был получен ранее в главе 1 § 1.

Если ввести среднюю длину свободного пробега  $l$  и среднее время  $\tau$ , то в (5.20) можно избавиться от множителя  $C$ :

$$r = l \sqrt{\frac{t}{\tau}}.$$

Для описания фрактального блуждания необходимо использовать следующее правило перехода:

$$\int v \, d t \Rightarrow \left( \frac{d}{d t} \right)_{1/h} v. \quad (5.21)$$

Теперь, используя правило взятия фрактальной производной от постоянной величины, находим

$$r = \left( \frac{d}{d t} \right)_{1/h} v = C v t^{1/h},$$

т. е. получили степенной закон (5.20), где согласно эвристическому принципу степенной показатель  $1/2$  заменен на  $1/h$ .

#### **§ 4. СВЯЗЬ МЕЖДУ $h$ И $D$ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ**

Пусть на частоте  $f$  проводящая среда зондируется внешним электромагнитным полем на глубине скин-слоя  $H_c(f)$ . Глубину зондирования скин-слоя разделим на три равные части, среднюю проводящую часть заменим диэлектрической прослойкой. Для оставшихся двух проводящих слоев повторим операцию замены средней части диэлектрической прослойкой (рис. 5.3). С геометрической точки зрения получаем канторовское множество с размерностью  $D = \ln 2 / \ln 3$ .

Чтобы прозондировать получаемый участок, достаточно частоты  $3f$ . Поскольку таких участков 2, то отсюда следует функциональное уравнение

$$H_c(f) = 2 H_c(3f). \quad (5.22)$$

Согласно методу решения таких уравнений, решение ищем в виде степенной функции:

$$H_c(f) = A f^x, \quad (5.23)$$

с неизвестным степенным показателем  $x$ , где  $A$  – некоторая постоянная. Подставляя (5.22) в (5.23), получаем

$$f^x = 2 (3f)^x.$$

Отсюда находим  $2 = 3^{-x}$  и

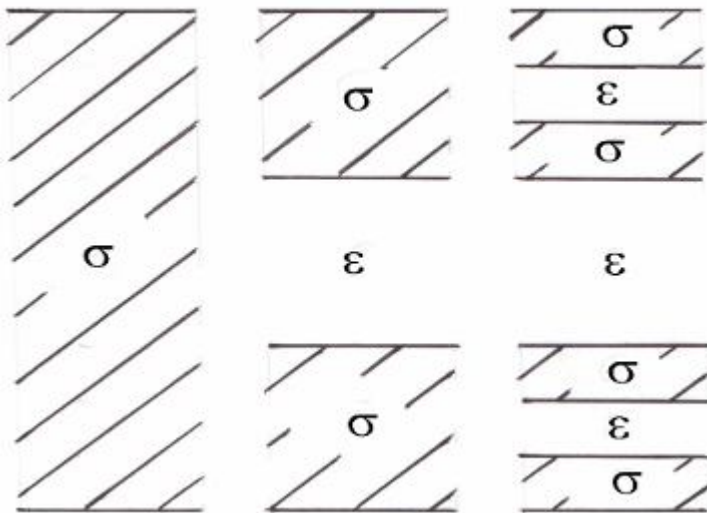
$$x = -\ln 2 / \ln 3 .$$

Сравнивая с величиной  $D = \ln 2 / \ln 3$ , заключаем, что  $x = -D$  и

$$H_c(f) = A f^{-D} . \quad (5.24)$$

Теперь уже можно сравнить формулы (5.24) и (5.19), из сравнения которых следует, что

$$h = \frac{1}{D} . \quad (5.25)$$



**Рис. 5.3.** Канторовское множество, образованное проводящими участками с проводимостью  $\sigma$ , разделенные диэлектрическими участками с проницаемостью  $\varepsilon$ . Все значения  $\sigma$  и  $\varepsilon$  в общем случае неоднородной среды

Таким образом, для электромагнитных процессов во фрактальных средах размерность блуждания электромагнитного поля обратно пропорциональна фрактальной размерности распределения проводящих участков.

## § 5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

Для физико-математической науки свойственно, что только небольшое число задач поддается точному решению. Зачастую приходится использовать приближенные методы. Фрактальная геометрия не является исключением, здесь только для иерархических структур возможно точное вычисление фрактальной размерности. Для реальных природных объектов фрактальную размерность можно найти только после тщательных измерений. Однако в природе есть объекты, для которых фрактальная размерность вычисляется. К таким объектам относятся полимерные цепи, стримерные каналы и дельты рек. Сначала рассмотрим полимерные цепи.

Полимерная цепь представляет собой клубок, состоящий из  $N$  звеньев, каждое длиной  $l$ . Поскольку число звеньев цепи огромно, то для их описания можно применить методы статистической физики, как это впервые сделал Флори (P. Flory, 1949). Согласно распределению Гаусса, вероятность  $P$  того, что размер клубка, состоящего из полимерной цепи, будет равен  $R$ , есть

$$P = \text{const} \cdot \exp\left(-3R^2 / 2Nl^2\right). \quad (5.26)$$

Это ведет к появлению эффективного потенциала  $U_{\text{eff}} = -TS$ , где  $T$  – температура, энтропия  $S = \ln P$ , т. е.

$$U_{\text{eff}} = \text{const} + T \frac{3R^2}{2Nl^2}. \quad (5.27)$$

Для идеального газа внутренняя энергия  $U = VnT$ , где  $V$  – объем газа,  $n$  – плотность частиц. Для реальных газов внутреннюю энергию разлагают в ряд по плотности  $n$ :

$$U = VT \left( n + n^2 B + n^3 C + \dots \right),$$

где  $B$ ,  $C$  – вариальные коэффициенты. Исключая идеальный газ, примем, что энергия клубка равна



$$U = B V T n^2, \quad (5.28)$$

где под  $n$  понимаем концентрацию звеньев в клубке ( $n \sim N / R^3$ ). Теперь можно составить функционал  $F$ , называемый свободной энергией:

$$F = U - T S = c T B \frac{N^2}{R^3} + \frac{3 T}{2 l^2} \frac{R^2}{N}, \quad (5.29)$$

где постоянная  $c \sim 1$ . В состоянии равновесия  $F(R) = \min$ , поэтому  $dF / dR = 0$ , откуда

$$R = (c B l^2 N^3)^{1/5} \sim N^{3/5}. \quad (5.30)$$

Поскольку для фрактального объекта

$$R \sim N^{1/D}, \quad (5.31)$$

то из (5.30) следует, что размерность блуждания звеньев полимерной цепи равна

$$D = \frac{5}{3}. \quad (5.32)$$

Поскольку звенья расположены в объеме, то под  $D$  в (5.32) надо понимать  $D_3$ .

Полимерную цепь можно растянуть в линию или расплющить на плоскости. Поэтому, в общем случае, вместо (5.26) будет

$$P = \text{const} \cdot \exp(-E R^2 / 2 N l^2),$$

где  $E$  – размерность евклидова пространства;  $E = 1$  – линия,  $E = 2$  – плоскость,  $E = 3$  – объем. Плотность звеньев  $n_E \sim N / R^E$  и объем  $V \sim R^E$ . В итоге, свободная энергия будет

$$F = \frac{N^2}{R^E} + \frac{R^2}{N}.$$

Здесь мы все величины, не относящиеся к  $N$  и  $R$ , не стали выписывать. Из условия  $F(R) = \min$ , находим

$$R \sim N^{\frac{3}{2+h}}.$$

Таким образом, в общем случае фрактальная размерность звеньев полимерной цепи

$$D_E = \frac{2+E}{3}. \quad (5.33)$$

Пьетронеро (L. Pietronero, 1982) установил, что для полимерных цепей размерность блуждания  $h$  связана с фрактальной размерностью  $D$  трехмерного пространства, образуемой самой полимерной цепью, следующим соотношением:

$$h_3 = 1 + \frac{D^3}{2}. \quad (5.34)$$

Теперь из (5.33) находим

$$h_3 = \frac{11}{6}. \quad (5.35)$$

Отметим еще один аспект, следующий из (5.33). Поскольку  $D_2 = 4/3$  и  $D_3 = 5/3$ , то

$$D_3 = D_2 + \frac{1}{3}. \quad (5.36)$$

Этим самым устанавливается связь между фрактальными размерностями полимерной цепи в пространстве и на плоскости.

## § 6. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРИМЕРНЫХ КАНАЛОВ

В природе и технических устройствах в результате пробоя высоким напряжением диэлектрического материала часто возникают стримерные каналы (см. рис. 2.15). В главе 2 § 3 в результате измерений мы установили, что для планового рисунка стримерного канала размерность блуждания

$$h_2 = 1.04 \pm 0.02$$

и фрактальная размерность

$$D_2 = 1.52 \pm 0.03,$$

причем эти обе величины связаны следующим соотношением:

$$h_2 = 2 (D_2 - 1). \quad (5.37)$$

С другой стороны, из литературных источников (см. глава 2 § 3) известно, что

$$D_2(\text{литер}) = 1.45 \pm 1.55, \quad D_3(\text{литер}) = 2.16 \pm 0.05.$$

Видим, что  $D_2(\text{измер})$  и  $D_2(\text{литер})$  в пределах ошибок измерения совпадают друг с другом. Было бы желательно вычислить установленные в результате измерений фрактальные размерности стримерных каналов. Эту задачу можно решить, если предположить, что ветвления, образующие рисунок стримерных каналов, состоят из сегментов эффективной длиной  $l$ . Огромное число сегментов, как и для полимерных цепей, позволяет использовать методы статистической физики. Вероятность того, что ветвления стримерного канала распространятся на расстояние  $R$ , пропорциональна

$$\exp(-3 R^2 / 2 N l^2). \quad (5.38)$$

Нормировочный множитель не выписан, поскольку в решение рассматриваемой задачи он не войдет. Взяв от вероятности (5.38) логарифм, находим энтропию  $S$  данной конфигурации:

$$S = S_0 - \frac{3}{2} \frac{k R^2}{N l^2}, \quad (5.39)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана,  $S_0$  – энтропия среды, в которой происходит развитие стримерных каналов.

Примем, что стримерные каналы представляют собой низкотемпературное плазменное образование. Тогда внутренняя энергия  $U$  представляет в основном корреляционную энергию, которая относительно ионов вычисляется методом Дебая – Хюккеля. Применительно к электронам внутренняя энергия будет

$$U = \frac{q^2}{\varepsilon_0 r_D} N, \quad (5.40)$$

где  $q$  – заряд электрона. Здесь радиус Дебая

$$r_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k T}{q^2} \frac{V}{N}}, \quad (5.41)$$

где  $T$  – абсолютная температура,  $V$  – объем конфигурации. Зная внутреннюю энергию и энтропию, находим свободную энергию конфигурации:

$$F = U - T S = F_0 + \frac{k T}{2} \left( \frac{q^2}{\varepsilon_0 k T} \right)^{3/2} N \sqrt{\frac{N}{V}} + \frac{3}{2} k T \frac{R^2}{N l^2}. \quad (5.42)$$

Здесь объем  $V = \frac{3}{4} \pi R^3$ . В состоянии равновесия  $F(R) = \min$

или  $\frac{\partial F}{\partial R} = 0$ . Отсюда окончательно находим:

$$N(R) = A R^{7/5}, \quad (5.43)$$

где

$$A = \left( \frac{1}{18 \pi^2} \right)^{1/5} \left( \frac{k T}{q^2 / 4 \pi \varepsilon_0 l} \right)^{3/5} l^{-7/5}. \quad (5.44)$$

Мы получили степенной, или скейлинговый, закон роста стримерных каналов. Теперь осталось связать степенной показатель с фрактальной размерностью. К сожалению, имеющиеся в литературе данные не позволяют по формулам (5.42) и (5.44) определить эффективную длину сегмента  $l$ .

Из сравнения (5.43) и (5.31) следует, что

$$h_3 = \frac{7}{5}.$$

Стримерные каналы представляют собой разветвленную структуру и для объемного его образования из главы 3 § 5 (3.38) известно, что

$$h_3 = 2 D_3 - 3.$$

Теперь можно найти фрактальную размерность объемной структуры стримерного канала:

$$D_3 = \frac{11}{5} = 2.2.$$

По известной величине  $D_3$  теперь надо найти значение  $D_2$ . Это можно сделать, если предположить справедливость следующего равенства:

$$D_3 = D_2 + \frac{2}{3}, \quad (5.45)$$

Одно из обоснований этого соотношения в § 7 Главы 6. Тогда легко можно найти, что

$$D_2 = D_3 - \frac{2}{3} = \frac{23}{15} = 1.53$$

и

$$h_2 = 2 D_2 - 2 = \frac{16}{15} = 1.07.$$

Все вычисленные величины согласуются с измеренными значениями, приведенными в начале параграфа. Хотя и не удалось пока строго доказать соотношение (5.45), но совпадение численных результатов внушают оптимизм, что такое доказательство существует.

## § 7. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЕТВЛЕНИЙ ДЕЛЬТЫ РЕК

Образование дельтообразного устья реки связано с неоднородным строением земной поверхности. Последовательный учет всех неоднородностей вряд ли представляется возможным. Но можно предложить качественную статистическую теорию, связанную с тем, что количество рукавов дельты достаточно большое, и их можно описывать статистически.

Исходным пунктом предлагаемой теории является предположение, что дельту можно рассматривать как статистическую систему, обладающую вероятностью ветвлений, энтропией и величиной, аналогичной свободной энергии в статистической физике. Вероятность  $P$  того, что на расстоянии  $R$  образуется  $N$  рукавов, пропорциональна распределению Гаусса:

$$P = \exp \left( - \frac{2 R^2}{2 N l^2} \right). \quad (5.46)$$

Множитель 2 в знаменателе экспоненты связан с тем, что система двухмерна. Величина  $l$  – это некоторая эффективная длина. Логарифмируя, находим энтропию  $S$  системы рукавов:

$$S = \ln P = - \frac{2 R^2}{2 N l^2}. \quad (5.47)$$

Введем величину  $U$ , аналогичную внутренней энергии в статистической физике. Если внешней границы нет, то  $U$  пропорциональна числу рукавов. Однако дельта реки всегда упирается в водоем сбора своих вод, где испытывает сильнейший гидроудар. Поэтому для дельты рек

величина  $U$  будет пропорциональна квадрату числа рукавов. Кроме этого,  $U$  должна быть пропорциональна плотности рукавов  $n$ , где

$$n \sim \frac{N}{R^2}. \quad (5.48)$$

Здесь  $R$  – линейный размер области, содержащий  $N$  рукавов. Однако из-за сложной структуры дельты величина  $U$  будет пропорциональна плотности  $n$  в некоторой степени  $k$ . Таким образом, собирая все, получаем:

$$U = \text{const } N^2 n^k. \quad (5.49)$$

Система рукавов описывается функционалом  $F$ , аналогичной свободной энергии в статистической физике, т. е.

$$F = U - S$$

или

$$F = \frac{N^{2+k}}{R^{2k}} + \frac{R^2}{N}. \quad (5.50)$$

В состоянии равновесия  $F = \min$ , или  $\frac{dF}{dR} = 0$ . Отсюда находим:

$$N \sim R^{2 \frac{k+1}{k+3}}. \quad (5.51)$$

Мы получили скейлинговый закон роста количества рукавов с линейным размером дельты.

Предложенная теория ветвлений позволила описать установленный для дельты рек Селенги, Лены и Волги степенной закон (5.51). С другой стороны, согласно фрактальной геометрии

$$N \sim R^{2(D-1)}. \quad (5.52)$$

Приравнивая степенные показатели в (5.51) и (5.52), находим связь между степенным показателем в (5.49) с фрактальной размерностью:

$$k = \frac{3D-4}{2-D}. \quad (5.53)$$

Отсюда следуют два вывода, связанные с тем, что мы полагаем  $k > 0$ . Во-первых,  $2-D < 0$ , или  $D < 2$ , как и должно быть для фрактального объекта на плоскости. Во-вторых,  $3D-4 > 0$ , откуда

$$D > \frac{4}{3} = 1.33. \quad (5.54)$$

Неравенство означает, что дельты рек с фрактальной размерностью, меньшей 1,33, в природе существовать не могут. Результат верен, по крайней мере, для дельты рек Селенги, Лены и Волги. Обратим внимание на то, что критическая фрактальная размерность близка к фрактальной размерности побережья оз. Байкал (см. глава 1 § 11).

Выше предположено, что из-за гидроудара величина  $U$  пропорциональна  $N^2$ . Однако возможно и другое рассмотрение, когда из-за разветвления рукавов величина  $U$  будет пропорциональна  $n^2$  (как и для полимерных цепей). Тогда вместо (5.49) будем иметь

$$U = \text{const } n^2 N^k. \quad (5.55)$$

Функционал  $F$  изменится и примет следующий вид:

$$F = \frac{N^{2+k}}{R^4} + \frac{R^2}{N}.$$

Откуда из условия  $F = \min$  находим

$$N \sim R^{\frac{6}{k+2}}.$$

Сравнивая с (5.52), получаем

$$k = 3 \frac{2-D}{D-1}.$$

Поскольку  $k > 0$ , то  $1 < D < 2$ , как и должно быть для фрактального объекта на плоскости. В настоящее время чисто логическим путем невозможно указать, какой из полученных результатов оказывается верным. Здесь необходимо дальнейшее исследование.



## ГЛАВА 6

### ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА, ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ВРЕМЕНИ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Оригинальным методом получена формула Пьетронеро. Предложена фрактальная размерность времени. Это позволяет установить взаимосвязь фрактальной размерности времени с коэффициентом затухания периодических процессов и подойти к вопросу о турбулентности. Предложен математический метод получения степенных законов.

Здесь мы вторгаемся в обширную область науки, которую называют физикой.

#### § 1. ФУНКЦИЯ ЛАГРАНЖА

В физике наиболее общее описание движение частицы производится функцией Лагранжа  $L$ , зависящей от положения частицы  $\vec{R}$  и его скорости  $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$ :

$$L = L(R, \dot{R}). \quad (6.1)$$

Для свободного движения частицы массой  $m$  функция Лагранжа есть

$$L = \frac{m \dot{R}^2}{2}, \quad (6.2)$$

Перейдем на геометрически подобную траекторию:

$$R \rightarrow \eta R, \quad t \rightarrow \eta^h t. \quad (6.3)$$

Функция Лагранжа изменится и примет следующий вид:

$$L \rightarrow \eta^{2-2h} \frac{m \dot{R}^2}{2} = \eta^{2-2h} L. \quad (6.4)$$

Чтобы преобразование (6.3) не коснулось самого движения, необходимо положить

$$2 - 2h = 0.$$

Откуда

$$h = 1. \quad (6.5)$$

Таким образом, для свободного движения размерность блуждания  $h$  равна 1. При этом

$$R' / R = t' / t,$$

что означает движение по инерции.

Если на частицу наложены внешние условия, которые изменяют характер движения частицы, то говорят, что частица находится во внешнем потенциальном поле  $U(R)$ . Функция Лагранжа во внешнем поле изменяется, и вместо (6.2) принимает следующий вид:

$$\frac{m \dot{R}^2}{2} - U(R). \quad (6.6)$$

Применим функцию к полимерной цепи. Полимерная цепь представляет собой клубок, состоящий из  $N$  звеньев, каждое длиной  $l$ . Образование клубка можно рассматривать как движение частицы без самопересечения в некотором эффективном поле  $U(R)$ , на которое наложено условие масштабной инвариантности:

$$U(\eta R) = \eta^{-D} U(R). \quad (6.7)$$

Функция Лагранжа (6.6) после масштабного преобразования (6.3) примет вид:

$$L = \eta^{2-2h} \frac{m \dot{R}^2}{2} - \eta^{-D} U(R)$$

или

$$L = \eta^{-D} \left[ \eta^{2-2h+D} \frac{m \dot{R}^2}{2} - U(R) \right].$$

Чтобы новая функция Лагранжа была пропорциональна исходной функции Лагранжа, необходимо положить

$$2 - 2h + D = 0,$$

откуда получаем соотношение Пьетронеро:

$$h = 1 + \frac{D}{2}. \quad (6.8)$$

Этим самым мы установили связь между размерностью блуждания и фрактальной размерностью для полимерной цепи, которая старается заполнить как можно больший объем и не пересекаться сама с собой. Поскольку клубок заполняет некоторый объем, то (6.5) необходимо уточнить, именно

$$h_3 = 1 + \frac{D}{2},$$

где индекс 3 указывает, что полимерная цепь располагается в трехмерном пространстве.

Одна из альтернативных формулировок аксиомы самоподобия (глава 1 § 3) является замена  $\eta \leftrightarrow R$ . Тогда потенциальная энергия (6.7) примет вид

$$U(\eta R) = R^{-D} U(\eta).$$

Положив здесь  $\eta = 1$ , получаем

$$U(R) = R^{-D} U(1).$$

Функция Лагранжа примет вид

$$L = \frac{m \dot{R}^2}{2} - U(1) R^{-D}.$$

Теперь можно составить уравнения Лагранжа, которые имеют следующее точное решение:

$$t = \sqrt{\frac{2 \pi m}{U(1)}} \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{2}\right)\right) \Gamma\left(\frac{1}{D} + \frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{D}\right) \Gamma\left(\frac{1}{D} + 1\right)} R^{1+D/2}. \quad (6.9)$$

Отсюда опять следует соотношение (6.8).

## § 2. ФРАКТАЛЬНАЯ ПРИРОДА ВРЕМЕНИ

Время измеряют, наблюдая какой-либо периодический процесс. Например, если стрелка часов сделала полный оборот, то мы говорим, что прошел 1 час. Однако, если периметр окружности часов представляет собой извилистую линию, то стрелка часов будет пробегать большую длину и затратит на это больше, чем 1 час.

Аналогично тому, что длину измеряют с помощью масштаба  $\chi$ , для измерения времени выберем эталон  $\tau$ . Тогда соотношение

$$L \sim t^{1/h}$$

можно переписать как

$$\frac{t}{\tau} = \left(\frac{L}{\chi}\right)^h.$$

Считая  $\chi/\tau = \text{const}$  и подставляя  $L = C \chi^{1-D}$ , находим

$$t = K \tau^{1-hD}, \quad (6.10)$$

где в множитель  $K$  спрятали все неопределенные множители. Если записать

$$t = K \tau^{1-\psi}, \quad (6.11)$$

где  $\psi$  – фрактальная размерность времени, то из (6.10) следует

$$\psi = h D. \quad (6.12)$$

Например, для полимерных цепей

$$\psi = D \left( 1 + \frac{D}{2} \right),$$

для разветвленных структур

$$\psi = D (2D - 3),$$

для электромагнитных процессов

$$\psi = 1.$$

Для решения физических задач предположим, что время обладает фрактальной размерностью, равной  $1 + \lambda$ . Для наших целей удобно считать число  $\lambda$  небольшим; в рассматриваемых ниже задачах малость  $\lambda$  будет подтверждена расчетом. Кроме того, для удобства записи формул примем, что для учета фрактальной природы времени (если таковая имеет место в природе) достаточно поменять обычную производную на дробную.

Эволюция физической системы со временем описывается оператором Гамильтона. Будем считать, что этот оператор имеет дискретный спектр  $E_0, E_1, E_2 \dots$ , разность между ними  $\omega_{nm} = E_n - E_m$  называется *частотой*. Зависимость от времени какой-либо физической величины  $x$  дается экспоненциальным множителем  $\exp(i \omega_{nm} t)$ . По

собственным функциям оператора Гамильтона строим матричные элементы  $x_{nm}$  физической величины  $x$ . Матричный элемент от скорости

изменения  $x$  будет  $\left( \dot{x} \right)_{nm} = i \omega_{nm} x_{nm}$  (точка сверху означает производную по времени).

Фрактальная природа времени ведет к изменению характера производной по времени, предположим, что она становится дробной. При

этом скорость изменения величины  $x$  заменится:  $\dot{x} \longrightarrow \left( \frac{d}{dx} \right)^{1+\lambda} x$ .

Соответственно изменятся и матричные элементы:

$$\left(\dot{x}\right)_{nm} \longrightarrow \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^{1+\lambda} x\right]_{nm}.$$

Поскольку  $\left(\frac{d}{dx}\right)^D e^{ax} = a^D e^{ax}$ , то

$$\left(\dot{x}\right)_{nm} \longrightarrow i\omega_{nm} \left(i\omega_{nm}\right)^\lambda x_{nm}.$$

Дальнейшее уже требует конкретного рассмотрения физической системы.

### § 3. СВЯЗЬ КОЭФФИЦИЕНТА ЗАТУХАНИЯ С ФРАКТАЛОМ

Рассмотрим матричный элемент от ускорения:

$$\left(\ddot{x}\right)_{nm} \longrightarrow -\omega_{nm}^2 \cdot \left(i\omega_{nm}\right)^{2\lambda} x_{nm}.$$

Используя малость  $\lambda$ , будем иметь  $i^{2\lambda} = e^{i\pi\lambda} \approx 1 + i\pi\lambda$ ,  $\omega_{nm}^{2\lambda} \approx 1$ . Для ускорения получаем

$$\left(\ddot{x}\right)_{nm} \longrightarrow -\omega_{nm}^2 x_{nm} - i\pi\lambda\omega_{nm}^2 x_{nm}.$$

В последнем слагаемом заменим  $i\omega_{nm} x_{nm}$  обратно на  $\left(\dot{x}\right)_{nm}$ , тогда окончательно находим

$$\left(\ddot{x}\right)_{nm} \longrightarrow -\omega_{nm}^2 x_{nm} - \pi\lambda\omega_{nm} \left(\dot{x}\right)_{nm}.$$

Множитель при скорости является коэффициентом затухания  $\alpha$ , его матричный элемент  $\alpha_{nm} = \pi\lambda\omega_{nm}$ . В силу малости  $\lambda$  будет малым и коэффициент затухания, что обычно и полагается для затухающих колебаний.

Полученный результат может быть применен для одного частного случая. Рассмотрим макроскопическое количество частиц, находящихся в термодинамическом равновесии. Перейдем к квазиклассическому пределу, заменив равенство для матричных элементов на равенство для физических величин:

$$\alpha = \pi \lambda \omega . \quad (6.13)$$

Движение частиц происходит в узком слое шириной  $\Delta E$  между двумя близкорасположенными энергетическими поверхностями. Частота  $\omega$  будет связана с переходами частиц между этими поверхностями:  $\Delta E = \omega$ . Сами переходы происходят из-за столкновений между частицами, при этом коэффициент затухания просто связан со средним временем свободного пробега  $\tau$   $\alpha = 1/\tau$ . Но с этим же временем в силу принципа неопределенности связана и ширина размытия энергии:  $\Delta E \cdot \tau = 2 \pi$ . Отсюда следует, что частота  $\omega = 2\pi / \tau$ . Подставляя в (6.13), получаем

$$\frac{1}{\tau} = \pi \lambda \frac{2 \pi}{\tau} , \quad (6.14)$$

откуда

$$\lambda = 1/2 \pi^2 = 0.05 . \quad (6.15)$$

Этим самым оправдывается сделанное выше предположение о малости параметра  $\lambda$ . Обратим внимание на то, что результат (6.15) устанавливает связь между фрактальной размерностью времени и трансцендентным числом  $\pi$ . В такой связи нет ничего удивительного, если вспомнить, что как  $\lambda$ , так и  $\pi$  связаны с длиной окружности.

#### § 4. ФРАКТАЛ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Пусть на стационарное движение жидкости накладываются малые возмущения, происходящие с частотой  $\omega - i\gamma$ . Амплитуда возмущений скорости будет

$$A \sim \exp(i \omega t) \cdot \exp(\gamma t) ,$$

т. е. начинает расти со временем. Это, как считается по Ландау, и является условием появления турбулентности. Мы выразим параметр  $\gamma$  через фрактал времени.

Для малых времен производную по времени от квадрата амплитуды  $|A|^2$  можно разложить в ряд по ней самой:

$$\frac{d}{dt} |A|^2 = 2 \gamma |A|^2.$$

Чтобы правая часть была заведомо первым членом некоторого ряда, необходимо считать, что  $\gamma \ll \omega$ . В случае фрактальности времени надо заменить

$$\frac{d}{dt} |A|^2 \longrightarrow \left( \frac{d}{dt} \right)^{1+\lambda} |A|^2.$$

Здесь обратим внимание на то, что все частоты  $\omega$  образуют дискретный спектр. Это необходимо для того, чтобы на бесконечности поток был ламинарным. Дискретный спектр находят, решая задачу на собственные значения для некоторого оператора. Причем нам не важен вид этого оператора, мы должны быть уверены только в том, что такой оператор существует. По собственным функциям этого оператора составим матричные элементы:

$$\left\{ \frac{d}{dt} |A|^2 \right\}_{nm} \longrightarrow \left( \frac{d}{dt} \right)^{1+\lambda} |A|^2_{nm} = i \omega_{nm} \left( i \omega_{nm} \right)^{\lambda} |A|^2_{nm}.$$

Для учета малости  $\lambda$  надо принять  $i = \exp(-3 i \pi / 2)$ , чтобы появилась первая, нужная для возникновения турбулентности, частота  $\gamma$ . В этом случае

$$\left[ \frac{d}{dt} |A|^2 \right]_{nm} \longrightarrow i \omega_{nm} |A|^2_{nm} + \frac{3}{2} \pi \lambda \omega_{nm} |A|^2_{nm},$$

учтено, что  $\omega_{nm}^{2\lambda} \approx 1$ . Сравнивая последнее слагаемое с  $\left[ 2\gamma |A|^2 \right]_{nm}$ , находим



$$\gamma_{nm} = \frac{3}{4} \pi \lambda \omega_{nm}. \quad (6.16)$$

Этим самым устанавливается связь между  $\gamma$  и  $\lambda$ , т. е. турбулентностью и фракталом. Поскольку  $\gamma \ll \omega$ , то  $\lambda \ll 1$ , что выше и предполагалось.

Если перейти к некоторому «квазиклассическому» пределу, то можно переписать (6.16) непосредственно для физических величин:

$$\gamma = \frac{3}{4} \pi \lambda \omega. \quad (6.17)$$

Действительно, явление турбулентности явно не квантовое, поэтому необходимо пользоваться формулой (6.14). Аналогично формуле (6.11) можно предположить, что

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3}{4} \pi \gamma \frac{2 \pi}{\tau},$$

откуда

$$\lambda = \frac{2}{3 \pi^2}.$$

Здесь также  $\lambda \ll 1$ .

При выводе (6.13) и (6.17) мы полагали  $\omega^\lambda \approx 1$ . От этого произвольного условия можно избавиться, если провести процедуру, аналогичную операции «перенормировки». Это означает, что сначала задается затравочная частота  $\omega_0$ , затем по ходу вычислений выражения вида  $\omega_0 (1 + \lambda \ln \omega_0 + \dots)$  переобозначают на  $\omega$  и считается, что новое значение  $\omega$  и есть физическая частота, которая поддается измерению.

Результаты §§ 3 и 4 настоящей главы получены в предположении, что мы имеем дело с производными дробного порядка. Если все вычисления проводить во фрактальных производных (попробуйте это сделать), то это повлечет только изменение численных коэффициентов в формулах (6.13) и (6.17).

## § 5. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ. ЗАКОН КОЛМОГОРОВА

Широкий класс внешних потенциальных полей составляют поля, являющиеся однородными функциями координат. При этом поле  $U$  зависит от  $R$  степенным образом, скажем, как

$$U \sim R^k. \quad (6.18)$$

Поскольку, согласно (6.6), функция Лагранжа зависит от скорости как  $\dot{R}^2$ , то в поле от однородной функции координат функция Лагранжа имеет следующую функциональную зависимость:

$$L = L(R^k, \dot{R}^2).$$

Перейдем от одной траектории к другой, геометрически подобной, отличающейся от первоначальной траектории линейным размером. То есть проведем масштабное преобразование. Функция Лагранжа после чего примет следующий вид:

$$L = L(\eta^k R^k, \eta^{2-2h} \dot{R}^2),$$

или,

$$L = L[\eta^k (R^k, \eta^{2-2h-k} \dot{R}^2)]. \quad (6.19)$$

Чтобы новая функция Лагранжа не отличалась от исходной  $L = L(R^k, \dot{R}^2)$ , необходимо положить

$$2 - 2h - k = 0,$$

или,

$$h = 1 - \frac{k}{2}. \quad (6.20)$$

Для математического маятника поле квадратично зависит от координат, т.е. в этом случае  $k = 2$ . Из (6.20) находим  $h = 0$ . Откуда

$$R' = \eta R, \quad t' = t,$$

т.е. период колебаний не зависит от амплитуды колебаний.

При движении в гравитационном поле  $U \sim 1/R$ , т.е.  $k = -1$ . Из (6.20) получаем  $h = 3/2$ . Тогда

$$R' = \eta R, \quad t' = \eta^{2/3} t.$$

Исключая масштабный множитель  $\eta$  следующим приемом:

$$\eta = \frac{R'}{R} = \left( \frac{t'}{t} \right)^{2/3},$$

находим:

$$R^3 \sim t^2.$$

Мы получили закон Кеплера – куб размера орбиты планеты пропорционален квадрату периода движения по орбите.

Законы подобия сыграли выдающуюся роль при установлении некоторых закономерностей сложного природного явления – развитой турбулентности. Медленное течение жидкости со скоростью  $V$  происходит слоями. Трение слоев друг с другом и внешними поверхностями называется вязким трением, которое пропорционально градиенту скорости  $\nabla V$ . Таким образом, для описания состояния жидкости требуется знание скорости и градиента скорости, т.е.

$$\dot{V} = F(V, \nabla V). \quad (6.21)$$

Этот закон называется уравнением Навье-Стокса.

При увеличении скорости течения слои начинают разрываться. В силу потенциальности течения концы разорванных слоев смыкаются, образуя завихрения. Разрыв слоев происходит в разных местах, поэтому и размеры вихрей будут различными. К таким вихрям можно применить законы подобия (6.3). Уравнение (6.21) примет вид:

$$\dot{V}' = F(V', \nabla' V'),$$

или,

$$\eta^{1-2h} \dot{V} = F(\eta^{1-h} V, \eta^{-h} \nabla V).$$

Перепишем:

$$\dot{V} = \eta^{2h-1} F(\eta^{-h} [\eta V, \nabla V]). \quad (6.22)$$

Отсюда следует, что для геометрически подобных завихрений существует функция от градиента скоростей, которая остается инвариантным при преобразовании подобия. Колмогоров принял, что такой функцией является диссипативная энергия:

$$\nu (\nabla \cdot \vec{V})^2 = inv. \quad (6.23)$$

Здесь  $\nu$  - кинематическая вязкость, имеющая размерность  $R^2 / t$ .

Применим преобразование (6.3) к инварианту (6.23):

$$\nu' (\nabla' V')^2 = \nu (\nabla V)^2,$$

или,

$$\frac{\eta^2}{\eta^h} \nu \left( \frac{1}{\eta} \nabla \cdot \frac{\eta}{\eta^h} V \right)^2 = \nu (\nabla V)^2.$$

Отсюда, после сокращений:

$$h = \frac{2}{3}. \quad (6.24)$$

Исключая в (6.3) масштабный множитель  $\eta$  известным приемом:

$$\eta = \frac{R'}{R} = \left( \frac{t'}{t} \right)^{1/h},$$

находим зависимость линейного размера траектории от времени:

$$R \sim t^{1/h}. \quad (6.25)$$

Напомним, что по своему смыслу под величиной  $R$  надо понимать среднеквадратичный размер области линейного размера  $R$ , т.е.  $\sqrt{\langle R \rangle^2}$ .

Подставляя в (6.25) показатель (6.24), находим закон Колмогорова-Обухова:

$$R \sim t^{3/2}. \quad (6.25)$$

Как следует из (6.3) и (6.24), скорость подчиняется следующему закону подобия:

$$V' = \eta^{1/3} V.$$

Отсюда следует, что значение среднеквадратичной скорости диффундирует во времени как

$$V \sim \sqrt{t},$$

а в пространстве как

$$V \sim R^{1/3}.$$

Приняв следующие законы подобия для давления  $P$ :  $P' = \eta^a P$ , и для плотности  $\rho$ :  $\rho' = \eta^b \rho$ , из уравнения Навье-Стокса находим, что степенные показатели  $a$  и  $b$  связаны соотношением:

$$a - b = 2 - 2h = 2/3. \quad (6.26)$$

## § 6. ОДИН ИЗ СПОСОБОВ ПОЛУЧЕНИЯ СТЕПЕННЫХ ЗАКОНОВ

Степенные законы между величинами, помимо теории перколяции и фрактального блуждания, можно получить следующим образом. Для выяснения такой возможности рассмотрим квадратное уравнение:

$$x^2 + a x - b = 0. \quad (6.27)$$

Если  $x \ll 1$ , то  $x^2$  можно пренебречь, и остается  $a x - b = 0$ , откуда приближенное решение:

$$x \ll 1 \quad x = \frac{b}{a}. \quad (6.28)$$

Случай  $x \gg 1$  требует анализа относительности величин  $a$  и  $b$ . Мы будем предполагать, что в этом случае можно отбросить в уравнении (6.27) слагаемое  $a x$ . Тогда остается  $x^2 - b = 0$ , откуда

$$x \gg 1 \quad x = \sqrt{b}. \quad (6.29)$$

Пусть в задаче существует критическая точка  $x_c$ , в которой решения (6.28) и (6.29) «сшиваются», т. е.

$$x_c = \frac{b}{a} = \sqrt{b}.$$

Отсюда получаем следующие степенные законы:

$$a = \sqrt{b}, \quad x_c = \sqrt{b}. \quad (6.30)$$

Чтобы выяснить условие применимости решения (6.30), необходимо посмотреть, как оно изменится в следующем приближении. Для этого в случае  $x \ll 1$  положим

$$x = \frac{b}{a} + \varepsilon, \quad (6.31)$$

где  $\varepsilon$  – малая величина, т. е.  $\varepsilon \ll \frac{b}{a} = \sqrt{b}$ . Подставляя (6.31) в (6.30)

и оставляя только линейные по  $\varepsilon$  слагаемые, получаем

$$\frac{b^2}{a^2} + \left( 2 \frac{b}{a} + a \right) \varepsilon = 0.$$

Положим здесь  $a = \sqrt{b}$ , находим

$$\varepsilon = -\frac{1}{3\sqrt{b}}.$$

Поскольку должно быть  $\sqrt{b} \gg \frac{1}{3\sqrt{b}}$ , то решение (6.30) справедливо, пока

$$b \gg \frac{1}{3}. \quad (6.32)$$

Можно проверить, что условие (6.32) сохраняется и в случае  $x \gg 1$ .

Перейдем к кубическому уравнению:

$$x^3 + a x^2 - b = 0. \quad (6.33)$$

В случае  $x \ll 1$  его приближенное решение:

$$x = \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (6.34)$$

В случае  $x \gg 1$ , пренебрегая слагаемым  $a x^2$ , получаем

$$x = b^{1/3}. \quad (6.35)$$

В критической точке оба решения (6.34) и (6.35) “сшиваются”:

$$a = b^{1/3}, \quad x_c = b^{1/3}. \quad (6.36)$$

Его применимость:

$$a \gg \frac{1}{4}. \quad (6.37)$$

Таким образом, можно получать в принципе степенной закон с любым степенным показателем.

## § 7. ДУАЛЬНОСТЬ ПОЛИМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ И СТРИМЕРНЫХ КАНАЛОВ

Выпишем еще раз соотношение (Глава 5, § 5; 5.36):

$$D_3 = D_2 + \frac{1}{3}. \quad (7.36)$$

Оно устанавливает связь между фрактальными размерностями полимерной цепи в пространстве и на плоскости.

Наша задача проводимого здесь исследования, это доказательства соотношения (5.45) из предыдущего раздела. Решение этой задачи можно добиться, если предположить, что полимерные цепи и стримерные каналы *дуальны* друг другу. Дуальность здесь понимается в том смысле, что разность трехмерных и двумерных фрактальных размерностей полимерных цепей можно поменять на разность трехмерных и двумерных размерностей блуждания стримерных каналов. Символически это можно записать следующим образом:

$$D_3 - D_2 \text{ (полимерные цепи)} \Leftrightarrow h_3 - h_2 \text{ (стримерные каналы)}. \quad (7.37)$$

Теперь соотношение (7.36), верное для полимерных цепей, для стримерных каналов запишется в виде:

$$h_3 = h_2 + \frac{1}{3}. \quad (7.38)$$

Но для стримерных каналов известно, что

$$h_2 = 2 D_2 - 2, \text{ и } h_3 = 2 D_3 - 3.$$

Тогда

$$2 D_3 - 3 = 2 D_2 - 2 + \frac{1}{3}.$$

После простых сокращений, получаем искомое соотношение:

$$D_3 = D_2 + \frac{2}{3}. \quad (7.39)$$

Фактически, центр доказательства соотношения (5.45) мы перенесли на доказательство дуальности (7.37). Совпадение вычисленных значений для двумерных и трехмерных фрактальных размерностей и измеренных экспериментально этих же величин внушает оптимизм, что такое доказательство может быть получено.



## ГЛАВА 7.

### **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРИРОДНЫХ СРЕД И ИСКУССТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Широкий круг вопросов и задач, решаемые разработанной теорией математического моделирования фрактальной геометрией, являются электромагнитные процессы в неоднородных природных средах и искусственных материалов. Такие процессы, как правило, описываются степенными характеристиками. Обычно эти закономерности моделируют теорией перколяции. Однако при этом вводится набор степенных показателей. Необходимо развить метод математического моделирования, сводящий набор степенных показателей к одной величине. Для этого развиваются следующие два метода решения подобных задач:

- 1 метод – моделированием фрактальной модели среды;
- 2 метод – моделированием инвариантности уравнений Максвелла относительно геометрического подобия.

Моделирование развиваемыми методами должно позволить выразить все степенные показатели через фрактальную размерность пространственного распределения проводящих участков.

В главе рассматриваются некоторые радиофизические задачи, для которых моделированием фрактальной геометрией установим степенные закономерности между электрическими параметрами и геометрическими величинами. Для электромагнитных процессов установим связь между размерностью блуждания и фрактальной размерностью. Предложим фрактальную модель среды, в которой распределение проводящих участков описываются канторовским множеством. В этой модели среда моделируется из чередующихся проводящих и диэлектрических участков. Привлечем законы геометрического подобия и инвариантность уравнений Максвелла относительно этих законов геометрического подобия. Покажем, что теоретически установленные результаты удовлетворительно описывают в широком частотном диапазоне как известные из литературы экспериментальные результаты, так и новые натурные измерения, проведенные автором в лаборатории электромагнитной диагностики Института физического материаловедения СО РАН.

## § 1. ОБОСНОВАНИЕ ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРИМЕНЕНИЮ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ К ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ ПРИРОДНЫХ СРЕД И ИСКУССТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Одним из методов исследования электрических свойств физико-технических сред является электромагнитное зондирование. Оно основано на том, что внешнее электромагнитное поле, в силу скин-эффекта, проникает в среду на конечную глубину скин-слоя  $H$ . Для проводящей среды [Балханов В.К. 2005; Башкуев Ю.Б. 1993]

$$H = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}, \quad (7.1)$$

где  $\omega$  - круговая частота,  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума (размерная единица). Приведенная формула означает, что скин-слой  $H$  имеет следующую частотную характеристику:

$$H \sim \omega^{-1/2}. \quad (7.2)$$

Если среда неоднородная и обладает фрактальными свойствами, то степенная характеристика сохраняется, но меняется степенной показатель. Необходимо этот показатель выразить через фрактальную размерность.

В 1950 г. А.Н. Тихоновым и в 1953 г. Л. Каньяром был предложен магнитотеллурический метод зондирования верхних слоев земной коры. Величину, характеризующую электрические свойства среды, называют **поверхностным импедансом**  $\delta$  и определяют как отношение горизонтальной компоненты электрического поля  $E_x$  к магнитной индукции  $B_y$ :

$$\delta = \frac{1}{c} \left( \frac{E_x}{B_y} \right)_{z=0}. \quad (7.3)$$

Ось  $x$  направлена вдоль направления распространения электромагнитной волны. Ось  $z$  направлена по нормали вглубь земли. Множитель  $1/c$ , где  $c$  - скорость света, введен для того, чтобы импеданс был безразмерной величиной.

Если принять, что поверхность является плоской, а среда однородной, то [Балханов В.К. 2005]:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega}}}. \quad (7.4)$$

Отсюда следует, что поверхностный импеданс в общем случае является комплексной величиной, его можно представить в виде  $\delta = |\delta| e^{i\varphi}$ , где  $|\delta|$  - модуль, а  $\varphi$  - фаза импеданса. При натурных измерениях модуля и фазы импеданса часто используют прибор “Измеритель поверхностного импеданса”, например, ИПИ-300.

В зависимости от диапазона частот, среды различают на проводящие и диэлектрические. В зависимости от величины фазы поверхностного импеданса, среды разделяют на слабоиндуктивные, когда  $\varphi > -45^\circ$ , и сильноиндуктивные, когда  $\varphi < -45^\circ$ . Если диапазон частот таков, что выполняется неравенство

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \gg 1 + \varepsilon, \quad (7.5)$$

то среда является проводящей и слабоиндуктивной. Для однородной среды в этом случае из (7.4) следует

$$|\delta| = \sqrt{\varepsilon_0 \omega \rho}, \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}. \quad (7.6)$$

Здесь введено часто используемое в геоэлектрике удельное сопротивление  $\rho = 1/\sigma$ . Отсюда следует, что импеданс имеет корень квадратичную характеристику от частоты:

$$|\delta| \sim \omega^{1/2}. \quad (7.7)$$

Согласно методу фрактальной геометрии для неоднородных сред корень квадратичная зависимость поверхностного импеданса от частоты (3.7) меняется на степенную зависимость. Такая зависимость ранее предлагалась Уайтом [Уайт Дж. Р.], он записывал ее в следующем виде:

$$\delta(\omega) \sim (i\omega)^{-b}. \quad (7.8)$$

Было отмечено, что эта зависимость оказалась очень подходящей для описания системы пирит – электролит, по крайней мере, в ограниченном частотном диапазоне. Аналогичную степенную характеристику импеданса использовали и [Старостин и Колмаков]. У них степенной показатель характеризует нелинейность емкостного элемента. Наличие нелинейного емкостного элемента свидетельствует о существовании набора времен релаксации. В монографии необходимо установить, как показатель  $b$  связан с фрактальной размерностью.

Электрические характеристики среды описываются проводимостью  $\sigma$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ . Поскольку проникнове-

ние электромагнитного поля в среде зависит от частоты, а ток в среде течет по извилистым путям, то проводимостью и диэлектрической проницаемостью также должны иметь пространственную и частотную степенные характеристики. Здесь часто использую формулу Коула-Коула для степенной частотной характеристики комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\infty} + \frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_{\infty}}{1 + i \left( \omega \tau \right)^{\alpha}}. \quad (7.9)$$

Если среда емкостная, когда выполняется неравенство

$$\omega \tau \gg 1, \quad (7.10)$$

то из (3.9) следует, что среда обладает дополнительной диэлектрической проницаемостью  $\Delta\varepsilon$ , степенным образом зависящей от частоты:

$$\Delta\varepsilon \sim \omega^{-\alpha}. \quad (7.11)$$

Необходимо степенной проказатель здесь выразить через фрактальную размерность.

При решении радиофизических задач с применением методов фрактальной геометрии, в качестве степенных показателей можно использовать как размерность блуждания, так и фрактальную размерность. В диссертации на примере разработанного фрактального метода решения физико-технических задач покажем, как эти степенные показатели связаны между собой.

На работу многих электромагнитных приборов существенное влияние оказывает естественный электромагнитный фон, которым пронизана вся атмосфера Земли. Одним из источников естественного электромагнитного поля Земли являются грозовые разряды. Они представляют собой фрактальные антенны [Потапов А.А. 2005].

При проектировании СВЧ приборов широко применяется электродинамическое подобие [Неганов В.А.]. Законы физических процессов в большинстве случаев описываются дифференциальными уравнениями. Оказывается, простым преобразованием геометрического подобия координат  $r$  и времени  $t$  [Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика]:

$$r \rightarrow \alpha r, \quad t \rightarrow \beta t, \quad (7.12)$$

число коэффициентов, описывающие физические свойства, можно существенно уменьшить. Это свойство зачастую позволяет анализировать физические процессы, фактически не решая сами дифференциальные уравнения. Так, геометрическое подобие, примененное академиком А.Н. Колмогоровым к гидродинамике, позволило установить некоторые закономерности, описывающие развитую турбулентность [Колмогоров А.Н.]. Как впер-

вые было замечено Ричардсоном в 1926 г. [Richardson L.F.], турбулентность в широком диапазоне масштабов разбита на самоподобные завихрения. Каждое из таких завихрений описывается уравнениями гидродинамики, и переход от одних завихрений к другим осуществляется геометрическим подобием (7.12).

Геометрическое подобие оказывается важным и в моделировании, когда установленные законы для физической системы одного размера удается перенести на такую же систему, но в другом пространственно - временном масштабе. Применим геометрическое подобие к уравнениям Максвелла, которые перепишем с учетом магнитной проницаемости  $\mu$  материала:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (7.13)$$

$$c^2 \nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \frac{\partial \varepsilon \vec{E}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{E}. \quad (7.14)$$

Изменим масштаб физических величин:

$$E = e E', B = b B', \sigma = s \sigma', \varepsilon = g \varepsilon', \mu = q \mu'. \quad (7.15)$$

Уравнения (7.13) и (7.14) примут вид:

$$\nabla' \times \vec{E}' = -\left( \frac{\alpha b}{e \beta} \right) \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}, \quad (7.16)$$

$$c^2 \nabla' \times \frac{1}{\mu'} \vec{B}' = \left( \frac{\alpha e q g}{\beta b} \right) \frac{\partial \varepsilon' \vec{E}'}{\partial t'} + \left( \frac{\alpha e s q}{b} \right) \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \vec{E}'. \quad (7.17)$$

Новые уравнения (7.16) и (7.17) не будут отличаться от исходных уравнений (7.13) и (7.14), если все скобки в уравнениях (7.16) и (7.17) приравнять единице. Таким образом,

$$\frac{e}{b} = \frac{\alpha}{\beta}, \quad q g = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2, \quad s q = \frac{\beta}{\alpha^2}. \quad (7.18)$$

Или:

$$\frac{E}{E'} \frac{H'}{H} = \frac{\alpha}{\beta}; \quad \frac{\mu}{\mu'} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2; \quad \frac{\mu}{\mu'} \frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Эти выражения и представляют собой условия электродинамического подобия, которые нашли широкое применение при проектировании СВЧ приборов [Неганов В.А.]. При этом используют набор масштабных множителей. Применение методов фрактальной геометрии должно позволить вместо набора масштабных множителей использовать один масштабный множитель и один степенной показатель.

## § 2. ФРАКТАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ СРЕДЫ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ

Неоднородное строение среды мы будем моделировать фрактальной геометрией. В настоящее время в литературе само понятие фрактальной среды еще не обрело четкого определения. Для решения нашей задачи мы дадим следующее определение фрактальной среды.

Земная кора – сложное геологическое образование, состоящая из твердого минерализованного скелета с низкой проводимостью и порового пространства (трещины, щели, каверны, каналы и т.п.), заполненного флюидами с высокой проводимостью [Ржевский В.В.]. Проводимость такой земной коры имеет неоднородное распределение. Один из способов аппроксимации среды состоит в моделировании ее слоисто-однородной моделью, когда каждый слой обладает однородными значениями электропроводности и диэлектрической проницаемости. Такие среды можно создать напылением молекулярных пучков на подложку, выращиванием химическими методами, а также сборкой тонких пластин в стопку, где каждая пластина имеет свои, отличные от других, значения проводимости и диэлектрической проницаемости [Гаврилин В.В., Григулис Ю.И., Пориньш В.М.]. Для подобной модели сохраняется линейная связь между компонентами электромагнитного поля. Моделированием неоднородного строения среды однородными слоями, сохраняется линейность уравнений Максвелла, что в свою очередь означает, что можно ввести понятие эффективного скин-слоя. В случае однородной проводящей среды скин-слой

дается выражением 
$$H = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}},$$
 или, ее частотная характеристика,

выражением (7.2).

Следующим шагом после моделирования среды однородными слоями будет также однородные слои, но **каждый слой обладает только либо проводящими, либо диэлектрическими свойствами, причем эти свойства чередуются**. На разных частотах разбиение на слои меняется, как показано на рис. 7.1. Фигуры на рис. 7.1

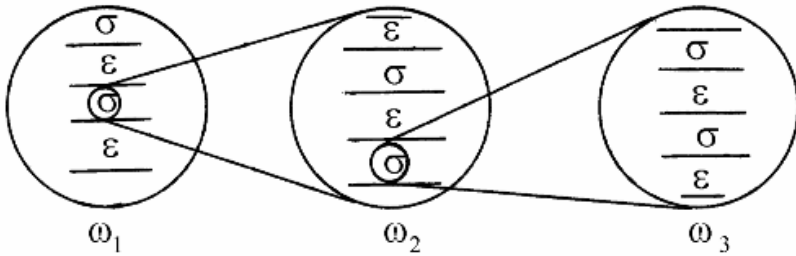


Рис. 7.1. Фрактальное распределение электрических параметров неоднородной среды. Под разным увеличением, т.е. на разных частотах, каждый слой подобен любому другому слою;  $\omega$  - круговая частота.

самоподобны – под различным увеличением (т.е. на разных частотах) распределение проводящих и емкостных участков подобны друг другу. Если смотреть сквозь слои, то увидим чередование проводящих участков, разделенных емкостными участками. С точки зрения фрактальной геометрии, проводящие участки образуют канторовское множество с фрактальной размерностью  $D$ , меньшей единицы. Многомасштабность и самоподобие означает, что проводящие участки на всех трех фигурах рис. 7.1 обладают одной и той же фрактальной размерностью.

Электромагнитное поле в проводящей однородной среде описывается следующими уравнениями Максвелла:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad c^2 \nabla \times \vec{B} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{E}.$$

Отсюда следует, что одна из компонент магнитной индукции  $B$  в рассматриваемой проводящей среде подчиняется следующему уравнению:

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}. \quad (7.19)$$

По форме оно является уравнением диффузии с коэффициентом диффузии:

$$K = \frac{1}{\mu_0 \sigma}. \quad (7.20)$$

Уравнение (7.19) имеет следующее решение:

$$B(t) = \frac{1}{t^{1/2}} \exp\left(-\frac{z^2}{2K t}\right). \quad (7.21)$$

Постоянный множитель, который здесь не выписываем, определяется условием, что поле начинает формироваться из начальной точки при  $z = 0$ . Решение (7.21) означает, что магнитное поле в проводящей среде за время  $t$  формируется в объеме с линейным размером [Базелян Э.М.; Ржевский В.В.]

$$r = \sqrt{2 K t}. \quad (7.22)$$

С другой стороны, электромагнитное поле представляет собой плоскую волну, описываемую как

$$B = B_0 \exp(-i\omega t + i k z). \quad (7.23)$$

Подставляя (7.23) в (7.19), находим

$$k = \sqrt{i \mu_0 \omega \sigma}.$$

Отсюда следует, что амплитуда магнитного поля убывает как

$$|B| = B_0 e^{-z/H_c},$$

где глубина затухания

$$H = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \sigma}}. \quad (7.24)$$

Мы получили результат (7.1).

Поскольку величины  $r$  в (7.22) и  $H$  в (7.24) описывают одну и ту же физическую ситуацию, то находим, что время становления поля связано простым соотношением с частотой поля:

$$t = \frac{1}{\omega}. \quad (7.25)$$

Соотношение (7.25) получено для проводящей среды. Но оно не содержит никаких электрических параметров, поэтому должно быть верным и для сред с диэлектрическими свойствами.

Заменяя  $t$  в (7.22) на  $1/\omega$ , находим, что область формирования электромагнитного поля зависит от частоты следующим образом:

$$r \sim \omega^{-1/2}. \quad (7.26)$$

Полупроводящие среды в реальном случае состоят из чередующихся неоднородных проводящих и диэлектрических участков. Электромагнитное поле свободно пронизывает диэлектрические включения и за-



тухает на проводящих участках. Проникновение поля приобретает характер диффузионного блуждания. Пространственное распределение электромагнитного поля эволюционирует с частотой, и это позволяет полю “прошупывать” распределение неоднородностей. Глубина “прошупывания” дается выражением (7.24) и называется скин-слоем. Согласно эвристическому принципу, частотную зависимость  $H \sim \omega^{-1/2}$ , в случае фрактального распределения электрических параметров необходимо заменить на следующее выражение:

$$H \sim \omega^{-1/h}. \quad (7.27)$$

Множитель, здесь не выписанный, зависит от проводимости и диэлектрической проницаемости, и излагаемым подходом определить невозможно. Но можно предложить, с учетом размерностей, следующее выражение:

$$H = C \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{\varepsilon}{\sigma} \frac{1}{\omega} \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \right)^{\frac{1}{h}}. \quad (7.28)$$

Здесь  $C$  – типичный для фрактальной геометрии неопределенный множитель. Наличие величин  $\sigma$  и  $\varepsilon$  отражает положение, что диффузия электромагнитных полей происходит в полупроводящей среде. Они имеют смысл эффективных параметров, отражающих иерархическое распределение проводимости и диэлектрической проницаемости. В асимптотическом пределе однородной среды, когда  $h = 2$  и  $C = \sqrt{2}$ , из (7.28) следует известный классический результат (7.1). При этом  $\sigma$  и  $\varepsilon$  приобретают свой обычный строгий смысл проводимости и диэлектрической проницаемости однородной среды.

Предложенная фрактальная модель среды дает метод получения частотной характеристики скин-слоя. Этот разработанный метод отличен от метода с использованием эвристического принципа и от метода, основанного на самоподобии (о котором ниже). Сущность предлагаемого метода основана на следующем.

Пусть мы выбрали какую-либо фрактальную структуру с известной фрактальной размерностью. Рассмотрим какой-либо процесс на этой структуре, для которого можно установить степенную закономерность между некоторыми величинами. С определенным степенным показателем. Затем сравниваем степенной показатель с фрактальной размерностью. Их отождествление в итоге позволяет выявить степенную закономерность с некоторой фрактальной размерностью. Применим разработанный метод к следующей задаче. (Ввиду важности задачи здесь мы повторяем § 4 Главы 5).

На частоте  $f$  проводящая среда зондируется внешним электромагнитным полем на глубине скин-слоя  $H(f)$ . Глубину зондирования скин-слой разделим на три равные части, среднюю проводящую часть заменим диэлектрической прослойкой. Для оставшихся двух проводящих слоев повторим операцию замены средней части диэлектрической прослойкой (рис. 7.2).

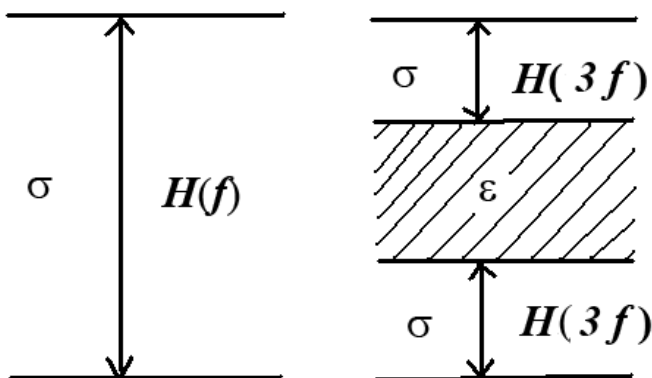


Рис. 7.2. Канторовское множество, образованное проводящими участками с проводимостью  $\sigma$ , разделенные диэлектрическими участками с проницаемостью  $\epsilon$ . Все значения  $\sigma$  и  $\epsilon$  в общем случае неоднородной среды различны.

С геометрической точки зрения, в итоге получаем канторовское множество с размерностью  $D = \ln 2 / \ln 3$ . Чтобы прозондировать каждый из двух новых участков, достаточно частоты  $3f$ . Отсюда следует функциональное уравнение

$$H(f) = 2 H(3f). \quad (7.29)$$

Согласно методу решения таких уравнений, решение ищем в виде степенной функции:

$$H(f) = A f^x, \quad (7.30)$$

с неизвестным степенным показателем  $x$ , величина  $A$  – некоторая постоянная. Подставляя (7.30) в (7.29), получаем

$$f^x = 2 (3f)^x.$$

Отсюда находим  $1 = 2 \cdot 3^{-x}$ , и

$$x = -\ln 2 / \ln 3.$$

Сравнивая с величиной  $D = \ln 2 / \ln 3$ , заключаем, что  $x = -D$  и

$$H(f) = A f^{-D}. \quad (7.31)$$

Теперь уже можно сравнить формулы (3.31) и (3.27), из сравнения которых следует, что

$$h = \frac{1}{D}. \quad (7.32)$$

Таким образом, предложенный метод позволил не только установить частотную характеристику, но и установить, что для электромагнитных процессов во фрактальных средах размерность блуждания электромагнитного поля обратно пропорциональна фрактальной размерности распределения проводящих участков.

### § 3. ЗАКОНЫ ПОДОБИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Законы физических процессов в большинстве случаев описываются дифференциальными уравнениями. Анализ этих уравнений – это искусство, особенно в плане получения точных решений. Однако многие процессы и явления обнаруживают определенную закономерность, связанную с тем, что физические законы содержат, как правило, определенное число коэффициентов. Некоторые из этих коэффициентов являются просто размерными величинами, ответственные за выбор системы единиц измерения. Другие же коэффициенты описывают физические свойства рассматриваемой системы. Оказывается, простым преобразованием геометрического подобия координат  $R$  и времени  $t$  [Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика]:

$$R \rightarrow \alpha R, \quad t \rightarrow \beta t, \quad (7.33)$$

число коэффициентов, описывающие физические свойства, можно существенно уменьшить.

Геометрическое подобие оказывается важным и в моделировании, когда установленные законы для физической системы одного размера удастся перенести на такую же систему, но в другом пространственно - временном масштабе. Как это сделано при выводе соотношения (7.18).

Другой аспект вопроса о геометрическом подобии наиболее адекватен к задачам, рассматриваемых в монографии, заключается в следующем. Как известно из Главы 1, для измерения длины в общем случае требуется набор масштабов. Многомасштабностью обладают многие процессы и явления как в природе, так и в технических устройствах. Например, кеплеровские орбиты планет, которые геометрическим подобием переходят друг в друга. Процессы и явления, происходящие с физическими объектами, всегда происходят в пространстве и времени. Поэтому, геометрии

ческое подобие описываются следующими формулами [Фракталы в физике]:

$$r' = \eta \, r, \quad t' = \eta^h \, t. \quad (7.34)$$

Здесь  $\eta$  - масштабный множитель,  $h$  – степенной показатель. Формула (7.34) существенно отличается от аналогичной формулы (7.33). Вместо набора масштабных множителей в (7.33), в формуле (7.34) вводится один масштабный множитель и один степенной показатель.

В радиофизике принято рассматривать процессы не во времени, а в зависимости от (круговой) частоты  $\omega$  электромагнитного поля. Чтобы выяснить, как геометрическое подобие (7.34) будет выглядеть в частотной области, перепишем частотную характеристику скин-слоя (7.31) в следующем виде:

$$H \sim \omega^{-1/h}. \quad (7.35)$$

С другой стороны, исключая в (7.34) масштабный множитель  $\eta$ , получаем:

$$r \sim t^{1/h}. \quad (7.36)$$

Выражение (7.36) означает, что во фрактальной среде за время  $t$  электромагнитное поле проникает на глубину  $r$ . Выражение (7.35) говорит, что электромагнитная волна с частотой  $\omega$  проникает во фрактальную среду на глубину скин-слоя  $H$ . Видим, что фактически  $r$  и  $H$  описывают одну и ту же ситуацию – глубину проникновения электромагнитного поля в среду. Приравнявая (7.35) и (7.36), получаем

$$t^{1/h} \sim \omega^{-1/h}.$$

А это означает, что время проникновения поля в среду обратно пропорционально частоте этого поля:

$$t \sim \frac{1}{\omega}. \quad (7.37)$$

Мы еще раз получили выражение (7.25).

С учетом соотношения (7.37) законы геометрического подобия (7.34) приобретают следующий вид:

$$r' = \eta \, r, \quad \omega' = \eta^{-h} \, \omega. \quad (7.38)$$

Аналогично преобразованиям (7.38) должны меняться и другие физические величины. Так, для компонент электромагнитного поля имеем:

$$\vec{E}' = \eta^e \vec{E}, \quad \vec{B}' = \eta^b \vec{B}. \quad (7.39)$$

Аналогичным образом масштабируются и электрические параметры:

$$\varepsilon' = \eta^\xi \varepsilon, \quad \sigma' = \eta^\eta \sigma. \quad (7.40)$$

Законы подобия (7.38)-(7.40) необходимо применить к уравнениям Максвелла. Уравнения

$$\nabla \cdot \vec{\varepsilon} \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

можно умножить на любой постоянный множитель, поэтому применение к ним преобразований (7.38)-(7.40) для степенных показателей  $h, e, b, \xi$  и  $\eta$  никакой информации не дает. Из уравнения

$$\nabla \times \vec{E} = i \omega \vec{B}$$

имеем:

$$\eta^{e-1} \nabla \times \vec{E} = \eta^{b-h} i \omega \vec{B}.$$

Чтобы это выражение не зависело от  $\eta$ , необходимо положить:

$$e - b = 1 - h. \quad (7.41)$$

Осталось еще одно уравнение:

$$c^2 \nabla \times \vec{B} = -i \omega \varepsilon \vec{E} + \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{E}.$$

Здесь постоянные  $\varepsilon_0$  и  $c$  выбором единиц измерения всегда можно обратить в единицу. Поэтому к ним нельзя применять преобразования подобия. С учетом сказанного, после масштабного преобразования, получаем:

$$\eta^{b-1} c^2 \nabla \times \vec{B} = -\eta^{e+\xi-h} i \omega \varepsilon \vec{E} + \eta^{e+\eta} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{E}.$$

Чтобы множитель  $\eta$  сократился, необходимо выполнение двух соотношений:

$$e - b = h - 1 - \xi, \quad (7.42)$$

$$e - b = -1 - \eta. \quad (7.43)$$

Мы получили 3 уравнения (7.41) – (7.43) для 5 неизвестных  $h, e, b, \xi$  и  $\eta$ . Решая их относительно  $h$  и  $e$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= h - 2 \\ b &= e + h - 1 \\ \xi &= 2(h - 1) \end{aligned} \right\}. \quad (7.44)$$

Подставляя показатели (7.44) в систему уравнений (7.41) – (7.43), находим законы масштабного подобия, которым удовлетворяют уравнения Максвелла:

$$r' = \eta \, r, \quad \omega' = \eta^{-h} \, \omega. \quad (7.45)$$

$$\vec{E}' = \eta^e \vec{E}, \quad \vec{B}' = \eta^{e-1+h} \vec{B}, \quad (7.46)$$

$$\varepsilon' = \eta^{2(h-1)} \varepsilon, \quad \sigma' = \eta^{h-2} \sigma. \quad (7.47)$$

Преобразования (7.45)-(7.47) позволяют переходить от решений уравнений Максвелла для электромагнитной волны определенной частоты к полям другой частоты, распространяющимся во фрактальной среде. Фактически, соотношениями (7.45)-(7.47) создана теория математического моделирования электромагнитных процессов во фрактальных средах и материалах. Далее в монографии дадим описание богатого экспериментального материала, накопленного за десятки лет в литературе, и полученные в ходе натурных измерений, в которых непосредственное участие принимал автор.

Из формул  $r' = \eta \, r$  и  $\varepsilon' = \eta^{2(h-1)} \varepsilon$ , исключая масштабный множитель, находим

$$\varepsilon \sim r^{2(h-1)}. \quad (7.48)$$

В работе [Бацанов] установлено, что по мере перехода от объемных кристаллов к дисперсным порошкам наблюдается размерный эффект – резкое увеличение диэлектрической проницаемости. Из установленной нами формулы  $\varepsilon \sim r^{2(h-1)}$ , где  $r$  означает размер крупинок дисперсного порошка, следует, что для исследуемого в [Бацанов] материала размерность блуждания  $h < 1$ . Только в этом случае величина  $\varepsilon$  растет по мере уменьшения размера  $r$ .

#### § 4. ФРАКТАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ЕМКОСТИ

Развитая в монографии теория, основанная на фрактальной модели среды и инвариантности уравнений Максвелла относительно геометрического подобия, позволяет рассмотреть широкий круг технических материалов и природных объектов.

Обычно для определения пространственного и частотного поведения электрических параметров неоднородных сред используют перколяционный подход [Божокин С.В.; Морозовский А.Е.; Тарасевич Ю.Ю.; Laugier J.M.]. Такой подход приводит к следующему пространственному

поведению проводимости и диэлектрической проницаемости вещества соответственно:

$$\sigma \sim L^{-\tau/\nu}, \quad \varepsilon \sim L^{s/\nu}. \quad (7.49)$$

В [Уайт Дж.] установлено и частотное поведение проводимости:

$$\sigma \sim \omega^\beta. \quad (7.50)$$

Здесь  $\tau$ ,  $s$ ,  $\nu$  и  $\beta$  - критические индексы, ответственные за перколяционный переход системы из одного состояния в другое. Видим, что перколяционный подход характеризуется обилием степенных показателей. Однако, используя инвариантность уравнения Максвелла относительно преобразований геометрического подобия, и представление о блуждании электромагнитного поля по проводящим и диэлектрическим участкам, мы получили законы (7.45)-(7.47) для электромагнитных процессов, в которых все степенные показатели выражены через одну величину - размерность блуждания  $h$ .

Чтобы из законов (7.45)-(7.47) получить, например, пространственную характеристику проводимости, необходимо из них исключить масштабный множитель  $\eta$ . Для этого используем следующий прием:

$$\eta = \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{\frac{1}{h-2}} = \frac{L'}{L}.$$

Отсюда уже следует, что  $\sigma \sim L^{-2+h}$ . Поступая аналогичным образом для диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$ , в итоге находим пространственные и частотные характеристики проводимости и диэлектрической проницаемости:

$$\sigma \sim L^{-2+h}, \quad \sigma \sim \omega^{-1+2/h}, \quad (7.51)$$

$$\varepsilon \sim L^{2h-2}, \quad \varepsilon \sim \omega^{-2+2/h}. \quad (7.52)$$

Замечательно, что здесь все степенные показатели выражены через одну величину – размерность блуждания  $h$ . Ранее мы установили, что для электромагнитных процессов  $h = 1/D$  (формула (7.32)). Поэтому (7.51)-(7.52) можно переписать в следующем виде:

$$\sigma \sim L^{-2+1/D}, \quad \sigma \sim \omega^{-1+2D}, \quad (7.53)$$

$$\varepsilon \sim L^{2/D-2}, \quad \varepsilon \sim \omega^{-2+2/D}. \quad (7.54)$$

Если сравнить (7.49) с полученными характеристиками, то можно найти соотношение, в котором присутствуют только перколяционные показатели:

$$\frac{S}{2} + \tau = \nu.$$

Интересно было бы сравнить это равенство с измеренными значениями.

Перколяционный подход был использован в работе Крылова С.С. и Любича В.А. [Крылов С.С., 2002], где была установлена пространственная характеристика кажущегося сопротивления железистых кварцитов. При этом они использовали метод ВЭЗ (вертикальное электрическое зондирование [Жданов М.С.]), в дальнейшем с методом ВЭЗ мы еще раз встретимся. В случайно неоднородной среде электрический ток течет по извилистым путям. Расстояние  $L$  же измеряется по прямой линии. Это приводит к увеличению значения сопротивления  $R$ . Из-за самоподобия это увеличение подчиняется степенному закону:

$$R \sim L^{\beta}. \quad (7.55)$$

Чтобы получить закон (7.55) и установить связь показателя  $\beta$  с фрактальной размерностью  $D$ , будем моделировать извилистый путь течения электрического тока триадной кривой Коха [Крылов С.С., 2002]. Он аналогичен методу, который привел к формуле (3.31). На рис. 3.3 участок прямой длиной  $L$  обладает сопротивлением  $R(L)$ . Если длина участка прямой равна  $L/3$ , то ее сопротивление, очевидно, будет  $R(L/3)$ . Триадная кривая Коха состоит из 4 участков, поэтому ее общее сопротивление будет равно  $4 R(L/3)$ . Составляя равенство

$$R(L) = 4 R(L/3),$$

находим его решение:

$$R(L) = L^{\ln 4 / \ln 3}.$$



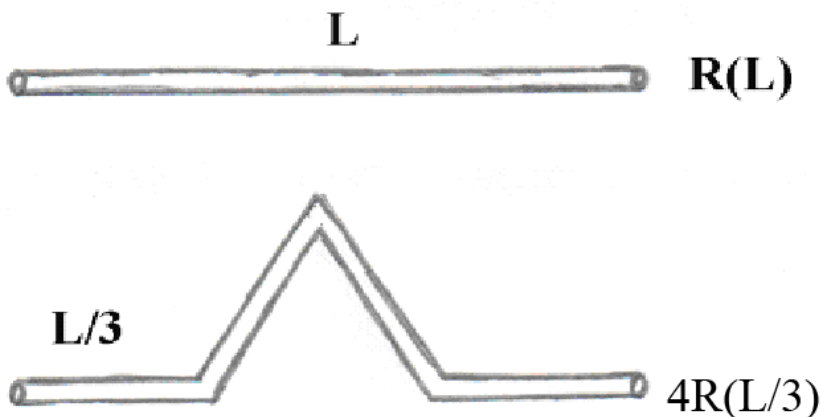


Рис. 7.3. Течение тока по триадной кривой Коха.

Здесь  $A$  – постоянная. Далее, для триадной кривой Коха известно, что ее фрактальная размерность  $D = \ln 4 / \ln 3$ . Мы заключаем, что

$$R \sim L^D. \quad (7.56)$$

Этим самым, доказана формула (7.55) и установлено, что  $\beta = D$ . В другой работе Крыловым С.С. и Любичем В.А. [Крылов С.С., 1998] было установлено, что

$$\sigma \sim L^{-0.97}.$$

Этой закономерности соответствует размерность блуждания  $h = 1.03$ . Они также рассмотрели кажущееся сопротивление на примере рифтогенной структуры Мончегорского рудного района и установили, что [Крылов С.С. 2006]

$$\sigma \sim L^{-0.71}.$$

Отсюда следует, что размерность блуждания  $h = 1.29$ . Это значение довольно существенно отличается от приведенных выше значений размерности блуждания. Однако в обоих случаях фрактальная размерность оказывается меньше единицы, что указывает, что пространственные участки пространственно разделены и образуют канторовское множество.

Применим нашу теорию к одному эксперименту, проведенному более 40 лет назад В.И. Кругловым и Л.П. Страховым, которыми были измерены температурные зависимости электропроводности  $R$  и емкости  $C$  стеклообразного селенида мышьяка ( $\text{As}_2\text{Se}_3$ ) на низкочастотном переменном токе [Круглов В.И.]. На рис. 7.4 воспроизведен результат измерений

электропроводности, где мы добавили 4 вертикальные линии, по которым определялись частотные характеристики электропроводности при фиксированной температуре. Для дальнейшего изложения нам удобно ввести сопротивление  $R$ , как обратную величину электропроводности, использованной в [Круглов В.И.]. На рис. 7.5 каждой вертикальной линии соответствуют четыре пунктирные линии, сплошная линия рядом – линейная аппроксимация с угловым коэффициентом, равным  $-0.8$ . Примерно одинаковый наклон всех четырех пунктирных линий означает, что угловой коэффициент не зависит от температуры. Смещением координат все четыре пунктирные линии на рис. 7.5 располагались последовательно в ряд. Результат показан пунктирной линией на вставке рис. 7.5, там же сплошная линия – линейная аппроксимация. Рисунок на вставке собственно и позволяет, с ошибкой чуть больше 1 %, установить следующую степенную частотную характеристику сопротивления:

$$R \sim \omega^{-0.8 \pm 0.01}, \quad (7.57)$$

где  $\omega$  – круговая частота. Результат (7.57) в [Круглов В.И.] был интерпретирован известной моделью прыжкового механизма протекания электрического тока в неоднородных по электрическим свойствам материалах [Блейкмор Дж.].

На рис. 7.6 воспроизведен результат измерений зависимости емкости от температуры, где добавлены четыре вертикальные линии при тех же температурах, что и на рис. 7.4. Хотя в [Круглов В.И.] и не было этого отмечено, но из рис. 7.6 следует степенная частотная характеристика величины  $\Delta C$ , а именно:

$$\Delta C \sim \omega^{-0.12 \pm 0.006}. \quad (7.58)$$

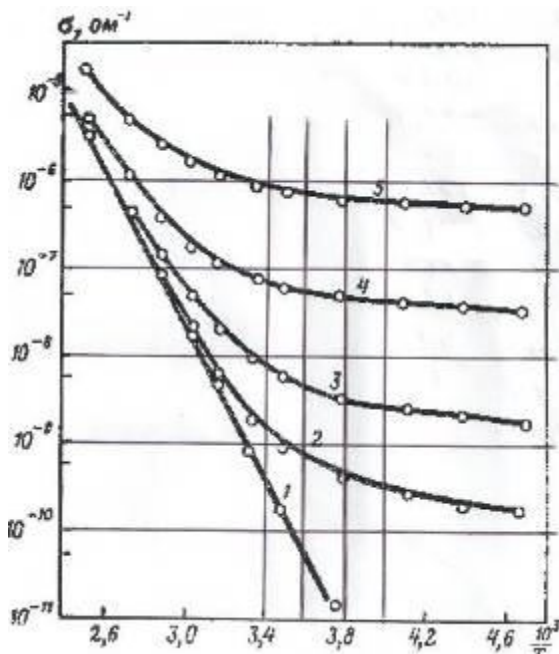


Рис. 7.4. Температурная зависимость электропроводности  $\text{As}_2\text{Se}_3$  на переменном токе. 1 – 50 Гц; 2 –  $f = 10^2$  Гц; 3 –  $f = 10^3$  Гц; 4 –  $f = 5 \cdot 10^4$  Гц; 5 –  $f = 6 \cdot 10^5$  Гц [Круглов В.И.].

Как следует из рис. 7.6, линии 2 – 4 при низких температурах асимптотически стремятся к постоянному значению  $C_0 = 162$  пФ. Линия 1, по-видимому, также стремится к постоянной величине, но отличному значению от случаев для линий 2 – 4. Поэтому, во-первых, частотную характеристику находим для величины  $\Delta C$ , отсчитываемой от не зависящего от температуры значения  $C_0$ . Во-вторых, исключили линию 1 на рис. 3.6, т.к. ее асимптотическое значение отлично от  $C_0$ . Во всем остальном поведение всех линий на рис. 3.7 и на вставке аналогичны поведению линий на рис. 3.4. Только погрешность измерения порядка 5 %.

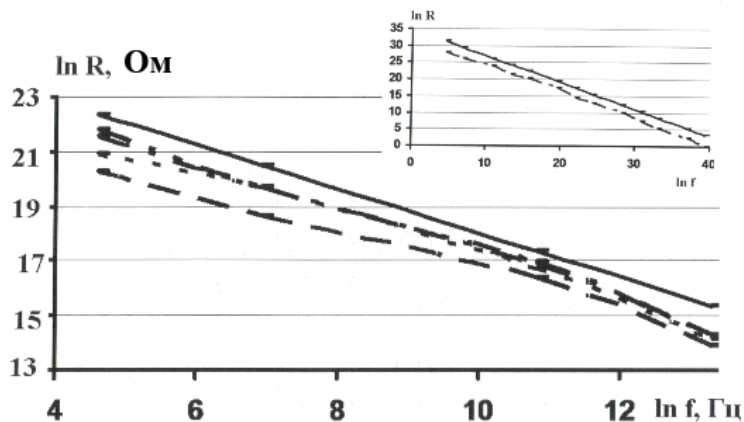


Рис. 7.5. Линейная аппроксимация (сплошная линия) частотных характеристик (пунктирные линии) в билогарифмическом масштабе. На вставке пунктирные линии смещением координат расположены в одну пунктирную линию, там же показана в виде сплошной линии линейная аппроксимация. По оси  $\ln R$  значения “приподняты”.

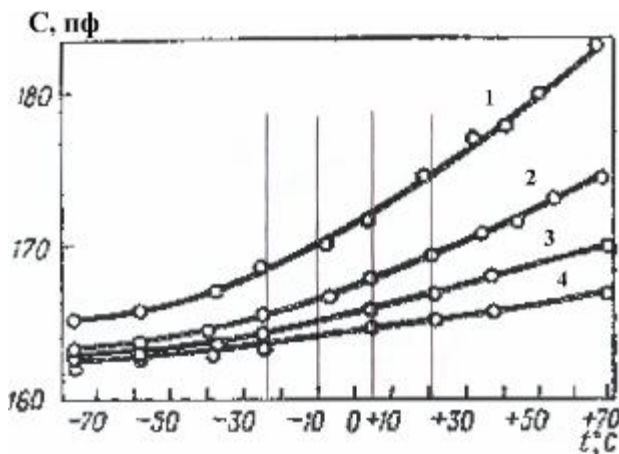


Рис. 7.6. Температурное изменение емкости  $\text{As}_2\text{Se}_3$  на переменном токе. 1 –  $f = 10^2$  Гц; 2 –  $f = 10^3$  Гц; 3 –  $f = 5 \cdot 10^4$  Гц; 4 –  $f = 6 \cdot 10^5$  Гц [Круглов В.И.].

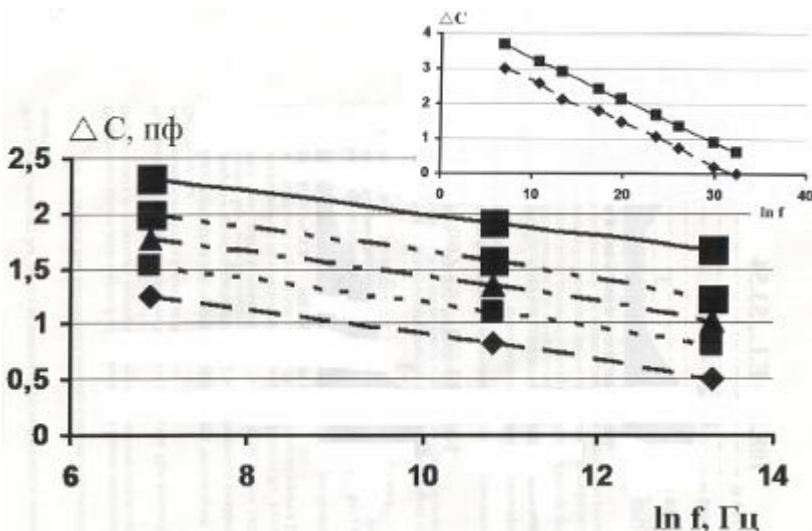


Рис. 7.7. То же, что и на рис. 4.6, только значения  $\ln R$  заменены на значения  $\ln \Delta C$ .

Из уравнений (7.45) и (7.47) выпишем необходимые нам равенства:

$$\sigma \sim L^{-2+h}, L \sim \omega^{-1/h}. \quad (7.59)$$

С другой стороны, сопротивление

$$R = \rho \frac{L}{S},$$

где  $S$  – поперечное сечение измеряемого образца. Поскольку  $S$  не меняется, то

$$R \sim L / \sigma.$$

Подставляя сюда равенства (7.59), находим частотную характеристику сопротивления:

$$R \sim \omega^{1-3/h}. \quad (7.60)$$

Сравнивая (7.60) с экспериментальным результатом (7.57), находим размерность блуждания, вычисленную по частотной характеристике сопротивления:

$$h_R = 1.67 \pm 0.02.$$

Аналогичным образом можно найти частотную характеристику емкости. При этом понадобятся равенства, которые также следуют из (7.45) и (7.47):

$$\varepsilon \sim L^{2h-2}, L \sim \omega^{-1/h}.$$

По определению

$$\Delta C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{L}.$$

Поскольку поперечное сечение не меняется, то  $\Delta C \sim \varepsilon/L$ , и, окончательно,

$$\Delta C \sim \omega^{-2+3/h}. \quad (7.61)$$

Сравнивая (7.61) с экспериментальным результатом (7.58), находим размерность блуждания, вычисленную по частотной характеристике емкости:

$$h_C = 1.6 \pm 0.08.$$

В пределах ошибки измерения оба значения  $h_R$  и  $h_C$  совпадают. Используя связь (7.32), находим фрактальную размерность

$$D = 1/h_R = 0.6.$$

Поскольку  $D < 1$ , то проводящие участки стеклообразного селенида мышьяка пространственно разделены и образуют канторовское множество.

## § 5. ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ ИМПЕДАНСА

Импеданс, по определению, есть отношение электрического и магнитного компонент поля на границе раздела различных сред (формула (7.3)). Используя формулу (7.46), находим закон подобия, которому удовлетворяет импеданс:

$$\delta' = \mu^{1-h} \delta. \quad (7.62)$$

Объединяя установленный закон (3.62) с соотношением (3.45):  $\omega' = \eta^{-h} \omega$ , находим частотную характеристику импеданса фрактальной по электрическим параметрам сплошной среды:

$$\delta \sim \omega^{1-\frac{1}{h}}. \quad (7.63)$$

Соотношение (7.63) можно получить еще одним независимым способом. Выпишем известные соотношения для скин-слоя и импеданса для проводящей среды:

$$H = \sqrt{\frac{2 \rho}{\mu_0 \omega}}, \quad \delta = \sqrt{-i \varepsilon_0 \omega \rho}.$$

Исключая отсюда удельное сопротивление, получаем:

$$H = \frac{\sqrt{2} c}{2 \pi f} |\delta(f)|. \quad (7.64)$$

Здесь  $f$  – частота ( $= \omega / 2\pi$ ). Полученная формула (7.64) не содержит параметров подстилающего разреза, поэтому верна и для неоднородных сред. Для таких сред скин-слой зависит от частоты, согласно (7.38), следующим образом:  $H \sim f^{-\frac{1}{h}}$ . Объединяя это соотношение с (7.63), получаем степенную частотную характеристику для модуля поверхностного импеданса (7.63).

Отметим, что развитый подход, основанный на положениях фрактальной геометрии, не позволяет определить фазу поверхностного импеданса фрактальной среды. Поэтому результат (7.63) относится к частотной характеристике модуля поверхностного импеданса. Ниже продемонстрируем, что закон (7.63) соблюдается в широком частотном интервале для различных горных и осадочных пород.

В табл. 7.1 представлены частотные зависимости  $|\delta|$  для различных кристаллических горных пород, полученные радиоимпендансным методом в диапазоне частот 3 – 300 Гц [Башкуев Ю.Б. 1996]. Видим, что у каждой породы для среднего значения  $|\delta|$  соблюдается степенной частотный тренд.

Статистические характеристики модуля поверхностного импеданса некоторых горных пород в диапазоне 3-300 Гц.

Таблица 7.1.

	Субвулканические образования и габброиды	Метаморфические породы	Гранитоиды	Щелочные гранитоиды
$f, \text{Гц}$	$ \delta  \cdot 10^{-3}$	$ \delta  \cdot 10^{-3}$	$ \delta  \cdot 10^{-3}$	$ \delta  \cdot 10^{-3}$
3	$1.01 \pm 0.17$	$0.72 \pm 0.17$	$0.54 \pm 0.16$	$0.44 \pm 0.10$
8	$1.65 \pm 0.28$	$1.17 \pm 0.27$	$0.87 \pm 0.26$	$0.70 \pm 0.15$
14	$2.18 \pm 0.37$	$1.55 \pm 0.36$	$1.14 \pm 0.34$	$0.90 \pm 0.20$
20	$2.61 \pm 0.44$	$1.85 \pm 0.43$	$1.35 \pm 0.40$	$1.06 \pm 0.24$
40	$3.70 \pm 0.62$	$2.61 \pm 0.61$	$1.87 \pm 0.56$	$1.42 \pm 0.33$
80	$5.23 \pm 0.88$	$3.68 \pm 0.86$	$2.59 \pm 0.76$	$1.90 \pm 0.47$
120	$6.40 \pm 1.08$	$4.50 \pm 1.04$	$3.12 \pm 0.92$	$2.22 \pm 0.58$
180	$7.84 \pm 1.33$	$5.48 \pm 1.27$	$3.75 \pm 1.11$	$2.62 \pm 0.69$
300	$10.10 \pm 1.71$	$7.03 \pm 1.63$	$4.71 \pm 1.42$	$3.20 \pm 0.87$
$\delta$	$\omega^{0.5}$	$\omega^{0.48}$	$\omega^{0.45}$	$\omega^{0.4}$
$h$	2	1.92	1.85	1.67

На рис. 7.8 а представлены результаты, полученные в диапазоне частот 10 – 1000 кГц, в Иволгинской впадине радиоимпедансным методом на профиле длиной 180 м. Результаты измерений модуля и фазы поверхностного импеданса были проинтерпретированы методом регуляризации А.Н. Тихонова, конкретная компьютерная реализация которого изложена в [Ангархаева Л.Х.; Башкуев Ю.Б. 2006]. На рис. 7.8 б представлен результат интерпретации для одного из пикетов. Для модуля импеданса хорошо наблюдается степенной частотный тренд:  $|\delta| \sim \omega^{0.54}$ . Сравнивая с (7.63), находим размерность блуждания  $h = 2.17$ . Совместное рассмотрение табл. 7.1 и рис. 7.8 б показывает, что в широком частотном диапазоне от 1 Гц до 1 МГц, природные неоднородные среды представляют собой фрактальные объекты.

В работе [Ангархаева Л.Х.] приведены результаты измерения и моделирования частотной зависимости модуля импеданса для некоторых пород в различных регионах. Используя передвижной излучатель для электромагнитной волны заданной частоты, в различных регионах Сибири степенной закон (7.63) был проверен для разных комплексов осадочных горных пород в диапазоне 0.18-10 МГц. Результаты представлены на рис. 7.9, где для разных пунктов измерения приведены размерность блуждания  $h$ . Таким образом, фрактальное строение электрических свойств подстилающей среды удовлетворительно описывается в широком частотном диапазоне от 0.01 Гц до 10 МГц.



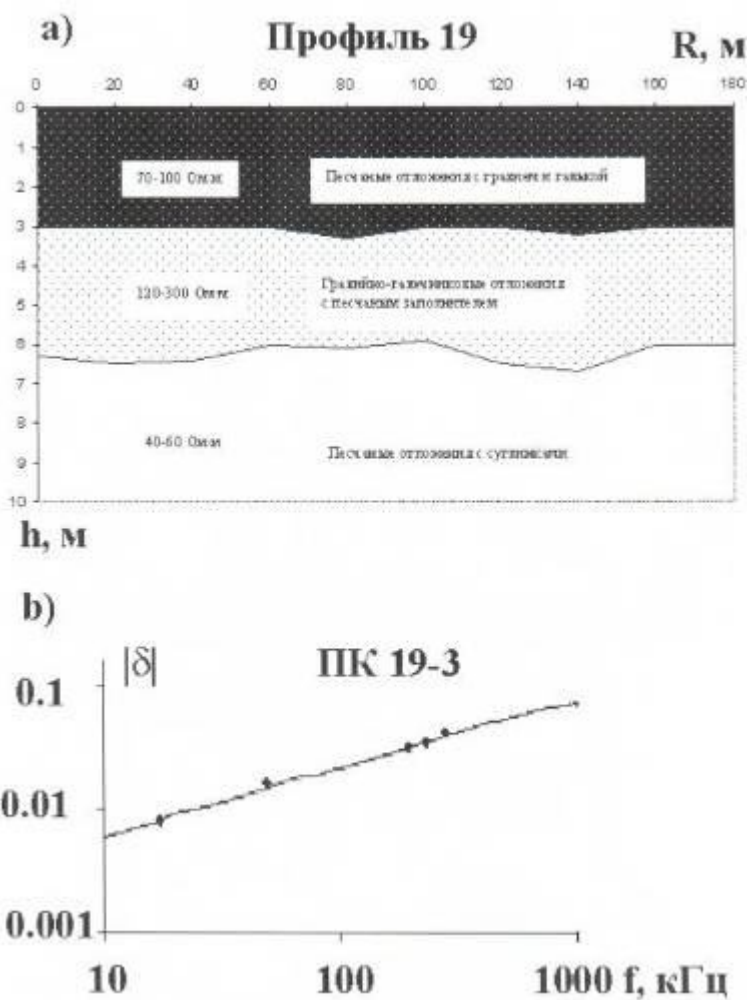


Рис. 7.8. Результат интерпретации профиля Иволгинской впадины а) и модуль поверхностного импеданса для одного из пикетов б);  $h = 2.17$ ,  $D = 0.46$ . Точки – измеренные значения.

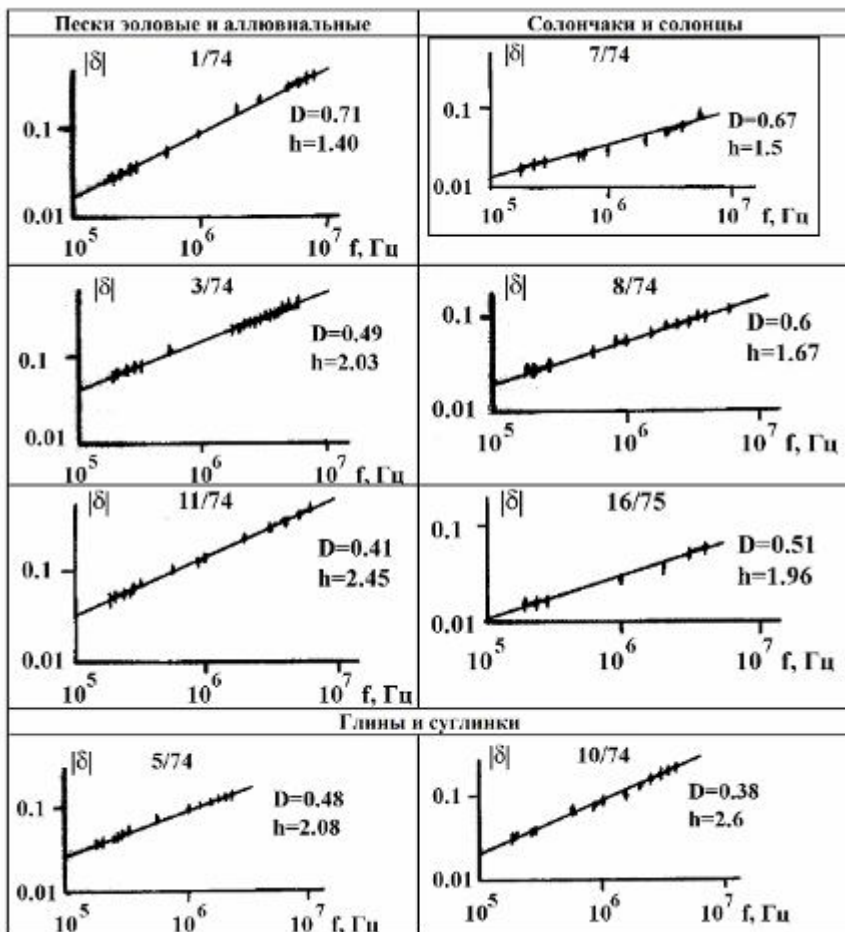
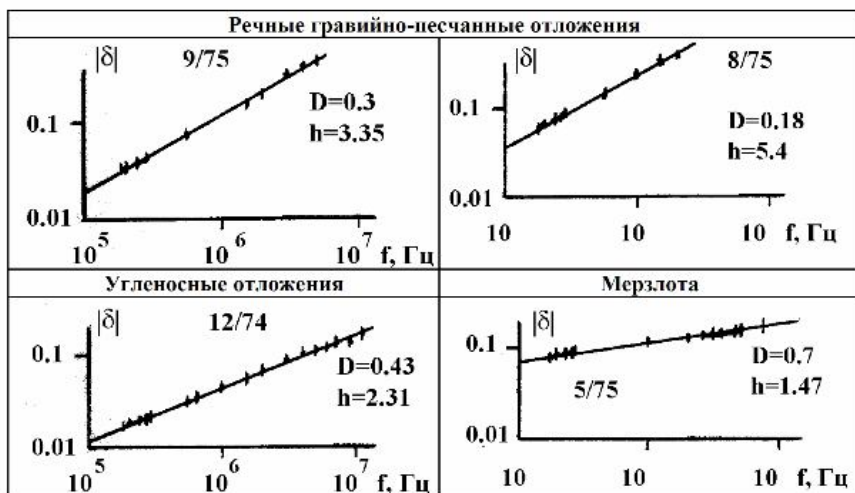


Рис. 7.9. Фрактальная интерпретация результатов измерения модуля поверхностного импеданса для различных осадочных комплексов горных пород в диапазоне 0.18-10 МГц. Вертикальные штрихи – результаты измерений.

Рис. 7.9. Продолжение.



## § 6. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ ФРАКТАЛЬНОЙ ЛИНИИ

Ранее в этой главе использовались два метода решения радиофизических задач. Первый метод основывается на моделировании физических процессов фрактальной моделью среды. Второй метод исходит из инвариантности уравнений Максвелла относительно геометрического подобия. Разумеется, применение обоих методов приводит к одинаковым результатам. Можно развить еще один метод решения, который назовем методом аналогий, и который позволит получать некоторые фрактальные степенные характеристики, можно сказать, “моментально”.

При исследовании физических процессов широко используется метод аналогий. Например, колебание груза на пружине математически эквивалентно электрическому колебательному контуру, состоящему из параллельно соединенных в электрическую цепь индуктивности и емкости. Метод аналогий основан на том, что с точностью до обозначений в обоих случаях имеют дело с одинаковыми уравнениями, которые при соответствующих граничных и начальных условиях, имеют одинаковые решения. Метод аналогий можно применить к еще одному обоснованию применения фрактальной геометрии к решению физических задач.

Масштаб измерения  $\chi$  - это раствор циркуля, которым обходят фрактальную линию. Чтобы обойти линию один раз, требуется  $N$  число раз приложить раствор циркуля. Тогда длина  $L$  фрактальной линии будет равна произведению  $N \cdot \chi$ , или

$$L(\chi) = N(\chi) \chi. \quad (7.65)$$

После многочисленных измерений, Мандельброт и Ричардсон для широко класса условных линий на земной поверхности (береговые линии, границы государств) установили следующий степенной закон:

$$L = A \chi^{1-D}. \quad (7.66)$$

Здесь  $A$  – типичный для фрактальной геометрии неопределенный множитель,  $D$  – фрактальная размерность линии. Сравнивая формулы (7.65) и (7.66), находим степенной закон для числа  $N$ :

$$N = A \chi^{-D}. \quad (7.67)$$

Для исследования электрических свойств технических материалов и земной среды анализируют частотные характеристики поверхностного импеданса  $\delta(\omega)$  и скин-слоя  $H(\omega)$ , где  $\omega$  - круговая частота электромагнитного поля. Для однородной проводящей среды модуль  $|\delta(\omega)|$  и величина  $H(\omega)$  связаны следующим соотношением (7.64) [Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. 2005]:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{2} c}{\omega} |\delta(\omega)|, \quad (7.68)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Поскольку формула (7.68) не содержит параметров подстилающей среды, примем, что она верна и для неоднородной среды. В этом случае можем записать следующую формулу:

$$|\delta(\omega)| \sim H(\omega) \omega. \quad (7.69)$$

Если отвлечься от несущественных постоянных множителей, а такое положение является типичным для фрактальной геометрии, то можно сравнить формулы (7.65) и (7.69). Действительно, во фрактальной геометрии измерительной линейкой является набор масштабов измерения  $\chi$ . При зондировании сред электромагнитным полем измерительной линейкой является набор частот. Следовательно, масштаб  $\chi$  является вполне аналогичным круговой частоте  $\omega$ . Сравнивая остальные величины в формулах (7.65) и (7.69), находим следующие правила соответствия:

$$\omega \leftrightarrow \chi, \quad H(\omega) \leftrightarrow N(\chi), \quad |\delta(\omega)| \leftrightarrow L(\chi). \quad (7.70)$$

Формулами (7.70) установлены правила аналогии между геометрическими величинами фрактальной геометрии и величинами, характеризующие взаимодействие электромагнитного поля с неоднородной средой. Сравнивая формулы (7.70) с законами (7.66) и (7.67), находим частотные характеристики скин – слоя:

$$H(\omega) = B \omega^{-D}, \quad (7.71)$$

и модуля поверхностного импеданса:

$$|\delta(\omega)| = U \omega^{1-D}. \quad (7.72)$$

Здесь  $B$  и  $U$  – типичные при фрактальном описании множители.

Мы еще раз получили степенные характеристики для скин-слоя и модуля поверхностного импеданса.

## § 7. СКИН-СЛОЙ ПУНКТА ИЗМЕРЕНИЯ “ОЗЕРНЫЙ”

Природные среды хаотичны, неоднородны и гетерофазны. Такое положение вещей отражается и на электрическом строение вещества. Разработанный в монографии фрактальный подход позволяет получить весьма общее выражение для частотной зависимости скин-слоя:

$$H \sim f^{-D}. \quad (7.73)$$

Здесь степенной показатель  $D$  является фрактальной размерностью,  $f$  – частота.

Частотная характеристика скин-слоя (7.73) для неоднородных сред было получено четырьмя способами:

- 1. из математической формулировки самоподобия для скин-слоя

$$H(\eta\omega) = \eta^{-D} H(\omega)$$

следует

$$H \sim f^{-D},$$

т.е. результат (7.73).

- 2. применяя эвристический принцип, согласно которому, если для однородной среды известно, что

$$H \sim f^{-1/2},$$

то для неоднородной среды должно быть

$$H \sim f^{-1/h},$$

где  $h$  – размерность блуждания. В частности, из сравнения с  $H \sim f^{-D}$  следует, что  $h = 1/D$ .

- 3. из размерных соображений, учитывая, что неоднородные среды обладают как проводящими, так и диэлектрическими свойствами, скин-слой должен иметь следующий вид

$$H = C_{\mu} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0}} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \right)^{\frac{1}{h}}.$$

- 4. из фрактальной модели среды следует, что

$$H \sim f^{-D},$$

где  $D$  – фрактальная размерность распределения проводящих участков в неоднородной среде.

Электрическое строение земной среды можно представить состоящими из чередующихся проводящих и диэлектрических участков. В этом смысле величина  $D$  описывает геометрию положения проводящих участков. Поскольку проводимость различается по значению в пространстве и, кроме того, разделена диэлектрическими прослойками, то  $D$  описывает размерность канторовского множества и может принимать значения от 0 до 1.

Разработанный фрактальный подход позволяет также получить скейлинговую частотную характеристику и для модуля поверхностного импеданса:

$$|\delta| \sim f^{1-D}. \quad (7.74)$$

Показатель  $D$  здесь тот же, что и в (7.73). В настоящем разделе покажем, что 15–слойный разрез пункта “Озерный” удовлетворительно описывается законами (7.73) и (7.74) в широком частотном диапазоне.

## сопротивление $\rho$ , Ом.м

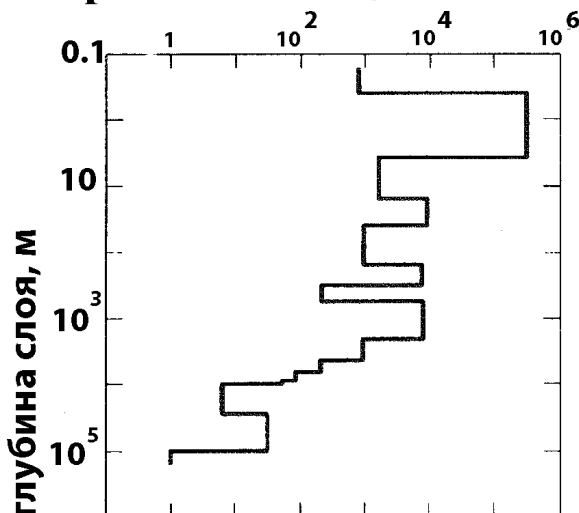


Рис. 7.10. Геоэлектрический разрез пункта измерения “Озерный”.

Рассматриваемый пункт измерения находится в районе Байкало-Амурской железнодорожной магистрали недалеко от Северомуйского тоннеля и Конкудеро-Мамаканского гранитоидного массива [Мельчинов В.П.]. Для пункта измерения “Озерный” импедансными методами и решением обратной задачи регуляризацией Тихонова был восстановлен 15-слойный геоэлектрический разрез (табл. 7.2, рис. 7.10); последний 15 слой не обозначен, он имеет бесконечную глубину и для него  $\rho = 1$  Ом.м [Молочнов Г.В.; Башкуев Ю.Б. 1996]. По этим данным сначала рассчитывается скин-слой. Методика расчета заключается в следующем. Сначала задается частота электромагнитной волны с единичным уровнем электрического поля, падающей вертикально на геоэлектрический разрез. Затем для первого слоя по формуле  $\exp(-kz)$  вычисляется амплитуда прошедшей волны; здесь  $z$  – вертикальная вглубь разреза координата,  $k = \sqrt{\mu_0 \omega / 2 \rho}$ ,  $\rho$  – удельное сопротивление первого слоя,  $\omega = 2 \pi f$ . Аналогично рассматриваются второй и нижеследующие слои.

Геоэлектрический разрез пункта  
измерения “Озерный”. Таблица 7.2.

<b>N слоя</b>	<b>Толщина слоя, м</b>	<b><math>\rho</math>, Ом·м</b>
<b>1</b>	<b>0.3</b>	<b>780</b>
<b>2</b>	<b>3.15</b>	<b>306000</b>
<b>3</b>	<b>11.5</b>	<b>1600</b>
<b>4</b>	<b>22.5</b>	<b>8900</b>
<b>5</b>	<b>110</b>	<b>920</b>
<b>6</b>	<b>144</b>	<b>7330</b>
<b>7</b>	<b>225</b>	<b>205</b>
<b>8</b>	<b>1400</b>	<b>7600</b>
<b>9</b>	<b>2020</b>	<b>900</b>
<b>10</b>	<b>2020</b>	<b>200</b>
<b>11</b>	<b>2020</b>	<b>80</b>
<b>12</b>	<b>1020</b>	<b>50</b>
<b>13</b>	<b>16000</b>	<b>6.1</b>
<b>14</b>	<b>62000</b>	<b>30</b>

Расчет прекращается, когда амплитуда поля становится меньше падающего в  $e$  раз. Изложенный метод расчета повторяется для другой частоты и т.д. Результат расчета в диапазоне частот от  $10^{-2}$  Гц до  $10^9$  Гц представлен на рис. 7.11. Из рис. 7.11 следует, что  $\ln H$  и  $\ln f$  удовлетворительно описываются линейной зависимостью между собой, т.е.

$$H(m) = 13800 \cdot f(\Gamma u)^{-0.48 \pm 0.01}. \quad (7.76)$$

По известной частотной зависимости скин-слоя теперь можно рассчитать модуль поверхностного импеданса. Метод расчета заключается в



следующем. Рассмотрим частоту 1 кГц, согласно (7.75), на этой частоте скин-слой  $H_c (м) = 500$  м. Такая глубина охватывает полностью верхние 7 слоев и частично 8 слой. Для полученной 8-слойной среды на частоте 1 кГц прямой задачей рассчитываем модуль поверхностного импеданса, который оказывается равным 0.007. Далее, частота меняется и расчет модуля поверхностного импеданса повторяется. Результаты расчета в диапазоне от 1 Гц до 1 МГц представлены в табл. 7.3 и на рис. 7.12, где также приведено сравнение с формулой (7.74), причем установлено

$$|\delta| = 1.6 \cdot 10^{-4} \cdot f^{0.53 \pm 0.01}. \quad (7.77)$$

Из сравнений формул (7.75) и (7.76) следует, что фрактальные размерности

$$D(\text{скин-слой, 11 декад}) = 0.48 \pm 0.01;$$

$$D(\text{импеданс, 6 декад}) = 0.47 \pm 0.01.$$

Значения удовлетворительно согласуются друг с другом. В диапазоне от 1 Гц до 1 МГц результаты двух методов расчета хорошо согласуются друг с другом. Теперь, зная фрактальную размерность  $D = 1/h$ , можно судить о глубине затухании электромагнитного поля в широком диапазоне частот.

Частотная зависимость скин – слоя, вычисленная по модели слоистой среды и по фрактальной модели. Таблица 7.3.

$f$ , Гц	$H_c$ (фракт. модель), м	$H_c$ (слоистая модель), м
$10^{-2}$	150800	22064
$10^{-1}$	47700	14870
1	11100	10553
10	4770	5245
$10^2$	1510	1405
$10^3$	550	480
$10^4$	152	195
$10^5$	48	77
$10^6$	20.11	14.5
$10^7$	6.36	1.88
$10^8$	2	0.203
$10^9$	0.636	0.02

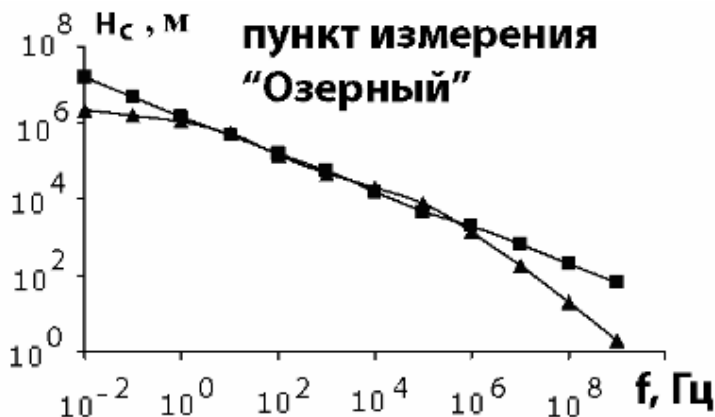


Рис. 7.11. Частотная зависимость скин-слоя в диапазоне от  $10^{-2}$  до  $10^9$  Гц;

- – вычисление фрактальным методом,
- ▲ - вычисление для слоистой среды.

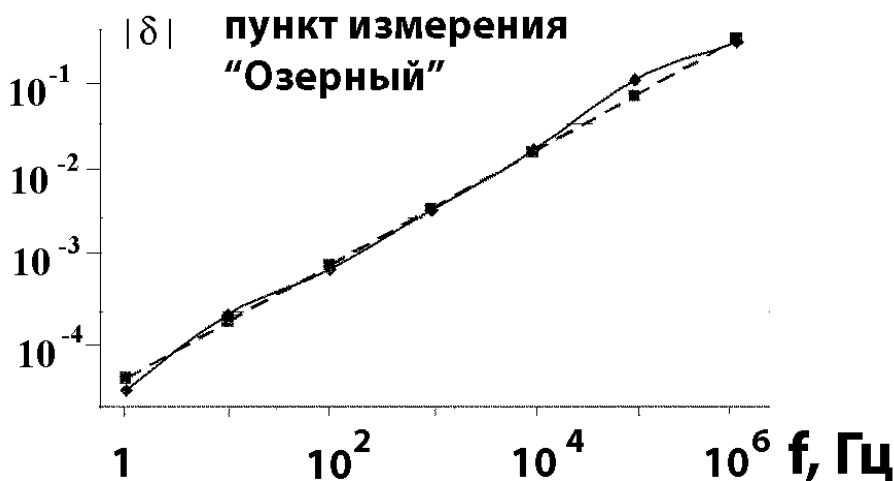


Рис. 7.12. Сравнение вычисленного модуля поверхностного импеданса (сплошная кривая) по  $N$  слойной задаче и (пунктирная линия) по фрактальной модели.

## § 8. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТАЛОЙ ВОДЫ

Продолжим описание измерений на реальных природных объектах. Представим результаты измерений удельного электрического сопротивления (УЭС) талой воды, полученные из льда соленого оз. Киран, расположенного на юге Бурятии и являющегося источником лечебной грязи.

Известно, что при последовательном соединении двух проводников их сопротивления  $R_1$  и  $R_2$  складываются, т. е. общее сопротивление  $R$  будет равна сумме  $R_1 + R_2$ . Выберем весь проводник в виде цилиндра поперечного сечения  $S$ . Пусть он состоит из двух проводников с длинами  $z_1$  и  $z_2$ . Поскольку удельное сопротивление  $\rho = R S / z$ , то для двух последовательно расположенных проводников 1 и 2 общее удельное сопротивление будет

$$\rho(1+2) = (\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2) / (z_1 + z_2). \quad (7.78)$$

Нашу операцию можно назвать “суммированием”. При “суммировании” трех последовательно расположенных проводников общее удельное сопротивление будет

$$\rho(1+2+3) = (\rho_1 z_1 + \rho_2 z_2 + \rho_3 z_3) / (z_1 + z_2 + z_3). \quad (7.79)$$

Такую операцию “суммирования” можно проводить для любого числа последовательно расположенных проводников. Этим самым, зная удельное сопротивление каждого проводника, можно найти их общее удельное сопротивление. Например, пусть среда состоит из 4 однородных материалов единичной длины. Их удельные сопротивления имеют последовательно значения 4 Ом·м, 3 Ом·м, 2 Ом·м и 1 Ом·м. Проведя формулами (7.78), (7.79) и т.д. “суммирование”, т.е. находя последовательно  $\rho(1+2)$ ,  $\rho(1+2+3)$  и  $\rho(1+2+3+4)$ , в итоге получаем кривую 1 на рис. 7.13. Обратим внимание, что значения величин по осям отложены в логарифмическом масштабе. Однако, суммирование можно начинать не с проводников 1 и 2, а в обратном порядке, начиная с проводников 4 и 3. Определяя, этим самым, удельные сопротивления  $\rho(4+3)$ ,  $\rho(4+3+2)$  и  $\rho(4+3+2+1)$ . Для наших значений в итоге получаем кривую 2 на рис. 7.13.

Видим, что результат суммирования зависит от исходного порядка начала суммирования. Причем, если удельные сопротивления последовательно уменьшаются, то зависимость общего удельного сопротивления от

размера всего материала будет ниспадающей. Отметим также нелинейный характер кривых на рис 7.13. Реальные материалы, имеющиеся в природной среде, характеризуются неоднородным строением, т.е. имеют неоднородное распределение проводящих участков. Целью является решение вопроса о том, каким является общее удельное сопротивление какого-либо реального материала.

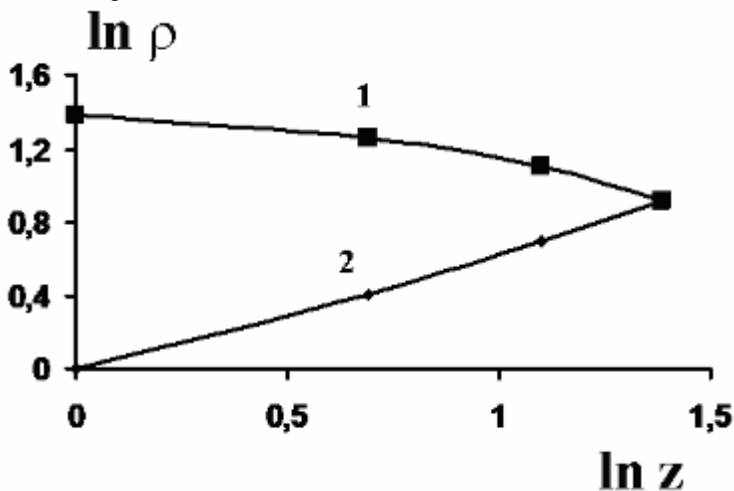


Рис. 7.13. Результат суммирования однородных сопротивлений.

В качестве реального материала выберем талую воду из озерного льда. В весенний период из льда соленого озера Киран, расположенного на юге Бурятии и являющегося источником лечебной грязи (рис. 7.14), выпиливался цилиндрический керн диаметром 10 см и длиной 120 см, равной толщине льда. Керн распиливался на 12 цилиндров длиной по 10 см. После таяния цилиндров, в лабораторных условиях, у образовавшейся минерализованной талой воды при температуре  $16^{\circ}\text{C}$  кондуктометром УК-0.2/1 измерялось удельное электрическое сопротивление. При этом кондуктометр позволяет проводить измерения на переменном токе, на частотах 120 Гц, 1 кГц и 10 кГц. На этих частотах, собственно, и проводились измерения. Кондуктометр еще позволяет проводить измерения на частоте 100 Гц, но оно близко к частоте 120 Гц, поэтому мы проводили измерения на трех указанных частотах. В табл. 7.4 приведены результаты измерения на указанных частотах.



Рис. 3.14. Юг Бурятии. Звездочка \* в рамке  
- местоположение озера Киран.

Удельное сопротивление талой воды  
при температуре 16 °С. Таблица. 7.4.

см	120 Гц	1 кГц	10 кГц
10	4.25	4.21	4.2
20	4.3	4.25	4.23
30	3.71	3.67	3.66
40	2.88	2.85	2.84
50	2.6	2.57	2.55
60	2.5	2.47	2.46
70	2.5	2.47	2.46
80	2.33	2.30	2.29
90	1.89	1.86	1.85
100	1.92	1.9	1.89
120	1.39	1.37	1.36

Отсчет в см начинается с верхней кромки льда. Величина  $z$ , например 50 см, указывает, что растаявший цилиндр ледяного керна имеет номер 5, отсчет ведется от верхней кромки льда. Обратим внимание, что цилиндр под номером 11 в измерениях не участвовал. Дело в том, что верхний слой озерного льда толщиной 20 см постоянно подвергается физико-химическим воздействиям, связанным с ежедневным перепадом температуры и привнесением извне аммиачных веществ. Нижний слой толщиной 30 см постоянно взаимодействует с высокоминерализованной водой и не характеризует свойства самого льда. Поэтому в дальнейшей обработке результатов измерений верхний слой толщиной 20 см и нижний слой толщиной 30 см не учитывались. Для наглядности, на рис. 7.15 показаны результаты измерений для каждого цилиндра на частоте 120 кГц.

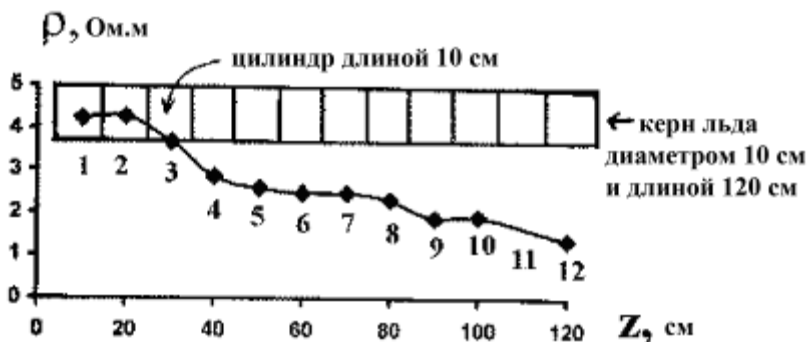


Рис. 7.15. Удельное электрическое сопротивление талой воды на частоте 120 Гц при  $16^{\circ}\text{C}$ , полученная из растаявших цилиндров льда длиной 10 см и диаметром 10 см.

Далее проведем “суммирование” удельных сопротивлений из табл. 7.4. Особенность “суммирования” заключается в том, что верхний слой толщиной 20 см и нижний слой толщиной 30 см не учитывались. Этим самым рассматривались только удельные сопротивления  $\rho(3+4)$ ,  $\rho(3+4+5)$ , ... и  $\rho(3+4+5+6+7+8+9)$ . Соответственно, при “суммировании” в обратном порядке учитывались только  $\rho(9+8)$ , ... и  $\rho(9+8+7+6+5+4+3)$ . В ходе “суммирования” установлено, что на частоте 120 Гц пространственная характеристика удельного сопротивления является степенной и зависит от того, откуда начинается само “суммирование” (рис. 7.16). Именно:

$$\rho_1 \sim z^{-0.17}, \quad \rho_2 \sim z^{0.15}. \quad (7.80)$$

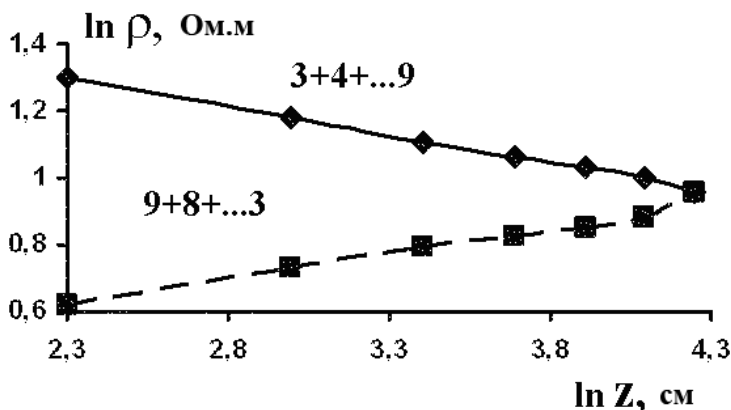


Рис. 7.16. Пространственная характеристика удельного сопротивления та-лой воды на частоте 120 Hz;  $\diamond$  -  $\rho_1(z)$  - “суммирование” начинается с кубика та-лой воды, взятой с верхней кромки льда;  $\blacksquare$  -  $\rho_2(z)$  - “суммиро-вание” начинается с кубика та-лой воды, взятого с нижней кромки льда.

Здесь  $\rho_1(z)$  - получено, когда “суммирование” начинается с кубика та-лой воды под № 3, а  $\rho_2(z)$  - “суммирование” начинается с кубика та-лой воды под № 9.

В табл. 7.5 представлены результаты “суммирования” на всех измеряемых частотах. Видим, что степенной показатель с точностью  $< 1\%$  одинаков на всех измеряемых частотах, но зависит от направления “суммирования”. Степенной характер закономерностей (3) позволяет предположить, что их можно описать методами фрактальной геометрии.

Согласно нашей теории, имеем закон подобия для проводимости:

$$\sigma' = \eta^{-2 + 1/D} \sigma. \quad (7.81)$$

Исключая масштабный множитель  $\eta$  следующим приемом:

$$\eta = \frac{z'}{z} = \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \right)^{1/(-2+1/D)},$$

находим пространственную характеристику удельного электрического сопротивления  $\rho = 1/\sigma$  :

$$\rho \sim z^{2-1/D}, \quad (7.82)$$

где  $D$  – фрактальная размерность распределения проводящих участков. Сравнивая (3.82) с результатами табл. 7.5, находим, что на всех частотах с точностью до двух значащих чисел фрактальные размерности

$$D_1 = 0.46, \quad D_2 = 0.54. \quad (7.83)$$

Пространственная характеристика удельного электрического сопротивления талой воды на разных частотах при температуре 16 °С.

Таблица 7.5.

<b>частота</b>	<b>3+4+5+6+7+8+9</b>
<b>120 Hz:</b>	$\ln \rho_1 = 1.705 - 0.1712 \ln z$
<b>1 kHz</b>	$\ln \rho_1 = 1.696 - 0.1717 \ln z$
<b>10 kHz</b>	$\ln \rho_1 = 1.696 - 0.1727 \ln z$
<b>частота</b>	<b>9+8+7+6+5+4+3</b>
<b>120 Hz:</b>	$\ln \rho_2 = 0.28 + 0.1537 \ln z$
<b>1 kHz</b>	$\ln \rho_2 = 0.26 + 0.1557 \ln z$
<b>10 kHz</b>	$\ln \rho_2 = 0.254 + 0.156 \ln z$

Понятно, что удельные сопротивления льда и талой воды отличаются друг от друга. Но можно предположить, что их пространственное распределение не меняется. Этому способствовало то, что распиленные цилиндры льда сразу изолировались друг от друга. Тогда полученные фрактальные размерности (7.83) отражают пространственное расположение проводящих участков и самого льда.

Численные значения результатов измерений указывают, что фрактальные размерности  $D_1$  и  $D_2$  удовлетворяют соотношению:

$$D_1 + D_2 = 1. \quad (7.84)$$



Оно выполняется с точностью  $< 1 \%$ . Можно предположить, что в ходе измерений установлена теорема, согласно которой для некоторых природных материалов фрактальная размерность канторовского множества, описывающая неоднородное распределение проводимости, зависит от направления, причем сумма их фрактальных размерностей равна 1.

Сравнивая рис. 7.14 и 7.16, можно заключить, что проводимость льда на оз. Киран уменьшается с верхней кромки льда к нижней кромке. Наличие двух фрактальных размерностей  $D_1$  и  $D_2$  означает следующее. Электромагнитная волна, падая сверху, извне на верхнюю кромку льда, будет “видеть” перед собой неоднородный материал, пространственное распределение проводимости которого будет описываться канторовским множеством с фрактальной размерностью  $D_1$ . Такую волну можно измерить прибором ИПИ (измерителем поверхностного импеданса), располагая прибор с антеннами, раскинутыми на поверхности льда. Если электромагнитная волна проникает из-под земной поверхности, то она “увидит” перед собой неоднородный материал, пространственное распределение проводимости которого будет описываться канторовским множеством с фрактальной размерностью  $D_2$ .

## **§ 9. ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ СТВОЛА ЖИВОГО ДЕРЕВА**

Древесина живого дерева представляет собой физический объект, состоящий из чередующихся колец с постоянно текущими в них физико-химическими и биологическими процессами. В первом приближении можно принять, что ствол древесины состоит из концентрических диэлектрических цилиндров, между которыми в обоих направлениях течет проводящая минерализованная жидкость. При увеличении масштаба разрешения, как диэлектрические, так и проводящие слои разделяются на такие же, но более тонкие, диэлектрические и проводящие прослойки. Можно принять, что разделение древесины на диэлектрические и проводящие слои носит масштабный характер – при разных увеличениях характер распределения слоев в статистическом смысле самоподобен. Такое рассмотрение позволяет для описания электрических характеристик древесины – диэлектрической проницаемости и проводимости – привлечь методы фрактальной геометрии. Это возможно в силу того, что фрактальная геометрия как раз и определяется масштабностью и самоподобием. Поскольку различные проводящие слои пространственно разделены, то они образуют канторов-

ское множество, которое описывается фрактальной размерностью  $D$ , причем  $D < 1$ .

Ствол живого дерева, как мы видим, представляет собой яркий пример реальной реализацией природой фрактальной модели среды.

Многомасштабность и самоподобие проводящих участков древесины, согласно методологии фрактальной геометрии, приводят к тому, что как удельное сопротивление  $\rho$ , так и сопротивление  $R$ , должны степенным образом зависеть от частоты  $f$  внешнего электрического тока, и длины пути  $L$  распространения этого тока в древесине. В настоящем параграфе опишем результаты измерения зависимости  $\rho$  от  $L$ , и  $R$  от  $f$ , которые как раз и оказываются степенными. Далее проведем моделирование результатов измерения фрактальной геометрией, причем появляющиеся в ходе измерения степенные показатели выразим через одну величину – фрактальную размерность  $D$ . Все измерения проводились на одном стволе живого соснового дерева радиусом 11.7 см в летнее время. Схема измерения приведена на рис. 7.18.

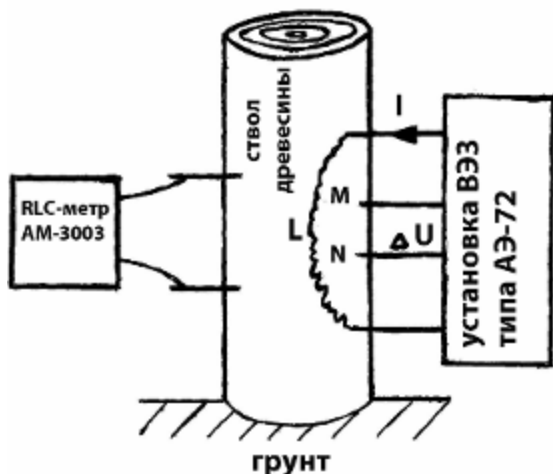


Рис. 7.18. Схема измерения методом ВЭЗ удельного сопротивления и на переменном токе сопротивления ствола живого дерева.

**ИЗМЕРЕНИЕ МЕТОДОМ ВЭЗ.** Метод вертикально электрического зондирования (ВЭЗ) широко используется в электроразведке для определения пространственного распределения удельного сопротивления исследуемой геологической среды [Жданов М.С.] Применительно к древесине этот метод описан в [Шауб Ю.Б., Шауб С.К.] которому мы и следовали при обработке результатов измерения.

На уровне человеческого роста в ствол сосны по высоте вводились два электрода, находящиеся на расстоянии  $L$  друг от друга, по которым в древесину подавался постоянный ток  $I$ . Симметрично от питающих электродов с двух других электродов, находящихся на расстоянии  $MN = 2.5$  см и 10 см друг от друга, снималось напряжение  $\Delta U$ . Зная питающий ток  $I$ , снимаемое напряжение  $\Delta U$ , а также радиус ствола древесины  $r$ , можно рассчитать удельное сопротивление  $\rho$  (согласно формуле [Шауб Ю.Б.,

Шауб С.К.]):  $\rho = \frac{\pi r^2}{MN} \frac{\Delta U}{I}$ . В ходе измерений установлено, что значение  $\rho$  зависит от разноса  $L$  электродов. Результаты измерений представлены на рис. 7.19 в билигарифмическом масштабе. Линии 1 и 2 на рис. 7.19 практически

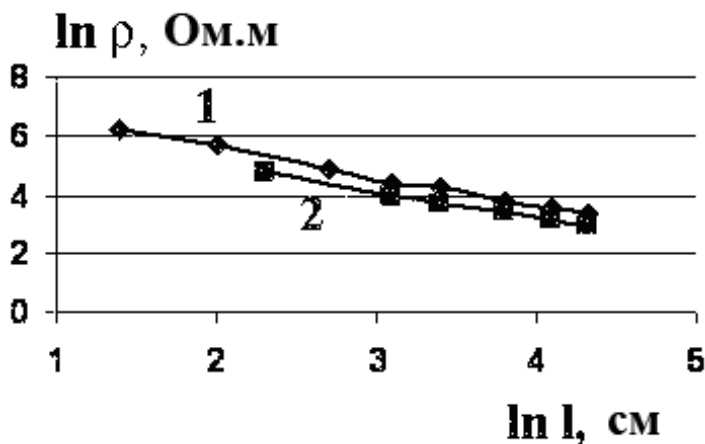


Рис. 7.19. Пространственная характеристика удельного сопротивления  $\rho$  ствола живой сосны, радиусом 11.7 см, измеренная методом ВЭЗ:  $\rho \sim L^{-0.85}$ . Линия 1 – разнос приемных электродов  $MN = 2.5$  см, линия 2 – разнос приемных электродов  $MN = 10$  см.

параллельны друг другу и удовлетворительно аппроксимируются прямыми линиями с одинаковым угловым наклоном. Таким образом, из измерений следует, что пространственная характеристика удельного сопротивления описывается следующим степенным законом:

$$\rho \sim L^{-0.85 \pm 0.03}. \quad (7.85)$$

Не выписываемый здесь множитель имеет разные значения для различных разностей питающих электродов, а также зависит от масштабов единиц измерения.

**ИЗМЕРЕНИЕ НА ПЕРЕМЕННОМ ТОКЕ.** Следующий цикл измерений состоял в том, что в ствол живой сосны вводились два электрода, расположенные по высоте, к которым подавалось переменное напряжение с частотами 100, 120, 1000 и 10000 Гц. Измерение сопротивления проводилось прибором АМ-3003. В ходе измерений изменялся разнос электродов. Результаты измерений представлены на рис. 7.20. Примерно одинаковый наклон полученных линий свидетельствует об универсальности фрактальной размерности, которая одинакова для всего ствола сосны и не зависит от частоты. Усредняя все линии 1 - 4, получаем прямую 5 на рис. 7.20. Хотя каждая линия строилась всего по 4 точкам, но усредненная прямая 5 проведена как бы по  $4 \cdot 4 - 3 = 13$  точкам, что повышает достоверность получаемой частотной характеристики сопротивления древесины данной сосны:

$$R \sim f^{-0.053 \pm 0.002} \quad (7.86)$$

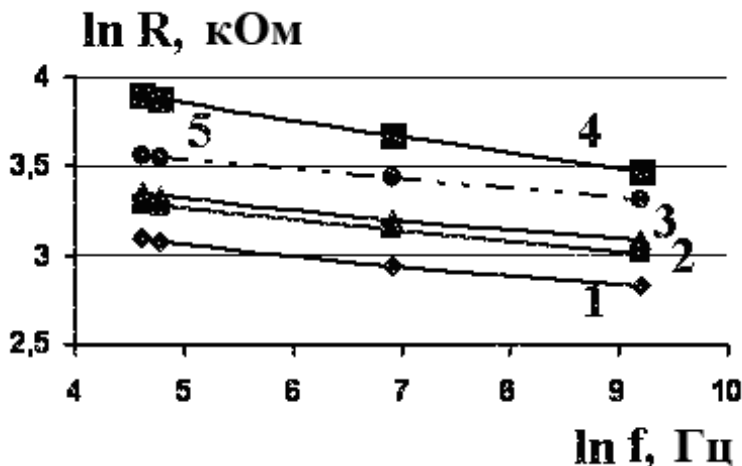


Рис. 7.20. Частотные зависимости сопротивления  $R$  ствола живой сосны, радиусом 11.7 см, измеренные на переменном токе:  $R \sim f^{-0.053}$ . В силу универсальности фрактальной размерности наклон всех линий одинаков. Разнос электродов: 1 – 2.5 см, 2 – 8 см, 3 – 15 см, 4 – 22 см. Пунктирная прямая 5 – усредненная по четырем кривым.

Погрешность численных показателей в формулах (7.85) и (7.86) составляет 2 %.

Степенные характеристики (7.85) и (7.86) указывают, что их можно описать методами фрактальной геометрии. Многомасштабное и самоподобное распределение проводящих и диэлектрических слоев древесины приводит к тому, что ток в стволе дерева будет распространяться вдоль фрактальной линии. Можно сказать, что ток блуждает в древесине. Если  $L$  – траектория блуждания переменного тока,  $f$  – его частота,  $\rho$  – удельное сопротивление древесины, то уравнения Максвелла инвариантны относительно законов геометрического подобия:

$$L' = \eta L, \quad f' = \eta^{-1/D} f, \quad (7.87)$$

откуда

$$\rho' = \eta^{1/D - 2} \rho. \quad (7.88)$$

Здесь  $\eta$  – масштабный множитель,  $D$  – фрактальная размерность. Из (7.87) и (7.88) сразу находим пространственную характеристику удельного сопротивления:

$$\rho \sim L^{-1/D + 2}. \quad (7.89)$$

Сравнивая (7.89) с экспериментальным результатом (7.97), получаем фрактальную размерность:

$$D = 0.35 \pm 0.01. \quad (7.90)$$

Для установления частотной характеристики сопротивления  $R$  поступим следующим образом. Согласно определению,  $\rho$  и  $R$  связаны следующим соотношением:

$\rho = R \frac{S}{L}$ , где  $S$  – поперечное сечение. Геометрическое подобие не меняет  $S$ , поэтому, с учетом (3.89), будем иметь:

$$L^{-1/D + 2} \sim \frac{R}{L}. \quad (7.91)$$

Из (7.87) следует, что

$$L \sim f^{-D}.$$

Подставляя его в (7.91), в итоге находим частотную характеристику сопротивления:

$$R \sim f^{-3D + 1}. \quad (7.92)$$

Сравнивая (7.92) с экспериментальным результатом (7.98), с учетом погрешности измерения в 2 %, получаем  $D$  значение, близкое к (7.90).

Таким образом, для данного ствола живой сосны радиусом 11.7 см установлено, что удельное сопротивление проводящих чередующихся колец образует канторовское множество с фрактальной размерностью  $D = 0.35$ . Укажем также, что это значение фрактальной размерности установлено двумя независимыми измерениями.

## § 10. ПРЕДЕЛЬНЫЙ СТЕПЕННОЙ ЗАКОН

Измерение сопротивления ствола живого дерева обнаруживает еще один аспект. Электромагнитные поля на разных частотах охватывают разные объемы ствола живого дерева, это известный скин-эффект. Поскольку объем древесины ограничен, то и степенной закон зависимости сопротивления от частоты будет имеет предельный вид.

Как указывалось в предыдущем разделе, измерение сопротивления проводилось RLC-методом прибором АМ-3003. Согласно RLC-методу, в ствол живой сосны вводились два электрода, расположенные по высоте, к которым подавалось переменное напряжение на частотах 100, 120, 1000 и 10000 Гц (рис. 7.21). В ходе измерений изменялся разнос электродов  $AB = b$ .

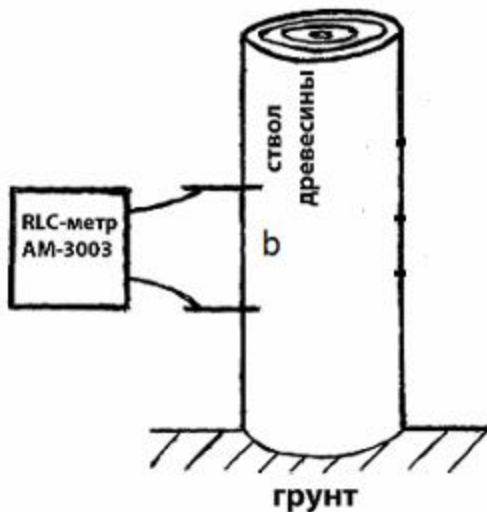


Рис. 7.21. Схема измерения на переменном токе сопротивления ствола живого дерева;  $b$  – разнос между электродами. Сосна радиусом 11.7 см.

Таблица. 7.5.

разнос электродов	AB = 2.5 см	AB = 8 см	AB = 15 см	AB = 22 см
$f$ , Гц	$R$ , кОм	$R$ , кОм	$R$ , кОм	$R$ , кОм
100	22.01	26.9	28.58	49.5
120	21.57	26.52	28.1	48.5
1000	18.88	23.22	24.56	38.5
10000	16.9	20.25	21.83	27.3
Частотная характеристика сопротивления	$R = \frac{1}{f^{0.057}}$	$R = \frac{1}{f^{0.062}}$	$R = \frac{1}{f^{0.058}}$	$R = \frac{1}{f^{0.128}}$

Результаты измерений представлены в табл. 7.5. Приведенный экспериментальный материал ограничен 4 частотами и разнос между электродами менялся тоже только 4 раза. Делать однозначные выводы на таком ограниченном материале сложно. Но мы считаем древесину фрактальным объектом, и это позволяет сделать заключение о степенном характере зависимости сопротивления от частоты. Таким образом, о ходе натурных измерений установлено, что интервале двух декад по частоте электрическое сопротивление имеет степенную частотную характеристику. Разброс степенных показателей ставит следующий вопрос – в каких интервалах может меняться степенной показатель в частотной характеристике сопротивления?

Распространение электромагнитного поля можно описывать с помощью первой зоны Френеля [Жданов М.С.]. На разных частотах первая зона Френеля имеет разные размеры. В свободном пространстве первая зона Френеля имеет вид эллипсоида вращения, в фокусах которого находятся электроды. В стволе живого дерева фигура вращения первой зоны Френеля исказится, не теряя, однако, основного своего положения: если  $b$  – длина между электродами,  $\lambda$  – длина электромагнитной волны в веществе, то поперечный размер первой зоны Френеля будет пропорционален  $\sqrt{b \lambda}$ . Если  $\rho$  – удельное сопротивление ствола дерева,  $\omega$  – круговая частота, то длина волны  $\lambda$  в материале будет [Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Основы теории метода поверхностного импеданса]:

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{2 \rho}{\mu_0 \omega}}, \quad (7.93)$$

где  $\eta_0$  - магнитная постоянная, все величины написаны в международной системе единиц СИ; далее численные множители, наподобие  $2\pi\sqrt{2}$  в (7.93) не выписываем.

В ходе измерений на электроды на рис. 3.21 подавался переменный электрический ток определенной частоты. Вызываемое этим током движение зарядов в древесине происходит не по прямой между электродами, а по границе первой зоны Френеля, длина которой пропорциональна поперечному размеру зоны. Поэтому в формуле

$$R = \rho \frac{\text{длина}}{\text{поперечное сечение}} \quad (7.94)$$

в качестве длины необходимо подставлять величину  $\sqrt{b\lambda}$ . Поперечное сечение ствола дерева пропорционально  $D^2$ , где  $D$  – диаметр ствола дерева. Таким образом,

$$R = \rho \frac{\sqrt{b\lambda}}{D^2}.$$

Подставляя вместо длины волны ее значение из (7.94), находим:

$$R = \frac{\sqrt{b}}{D^2} \rho \left( \frac{\rho}{\mu_0 \omega} \right)^{1/4}. \quad (7.95)$$

Перепишем результат в следующем виде:

$$R(\omega) \sim \frac{1}{\omega^{0.25}}. \quad (7.96)$$

Такая запись принята во фрактальной геометрии, где множитель при степенном законе для некоторой величины обычно не выписывается. Поскольку объем древесины ограничен, то следует ожидать, что степенной показатель, равный 0.25 в (7.96), является предельным для частотной характеристики электрического сопротивления древесины. Действительно, как видно из таблицы 7.5, реально степенной показатель простирается от 0.06 до 0.13.



## § 11. ФРАКТАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РАЗРЯДОВ МОЛНИИ И СТРИМЕРНЫХ КАНАЛОВ

Изучение физики молниевых разрядов имеет давнюю славную и трагическую историю. О физике молнии можно ознакомиться в [Базелян Э.М.; Пустовойт В.И.; Юман М.]. Их видимая извилистость предполагает, что можно для их изучения применить методы фрактальной геометрии.

Рассматриваемые ниже картины разрядов молний на рис. 7.22 и 7.23 взяты с сайта [<http://thunder.nsstc.nasa.gov/primer/primer2.html>]. Размерность молнии на рис. 7.22 определяется по зависимости длины  $L$  всех ветвлений от масштаба измерения  $\chi$ , даваемой формулой Мандельброта – Ричардсона (1.1). Если принять, что высота молнии на рис. 7.22 составляет 2 км, то при разбиении всех ветвлений разряда на 200 равных отрезков длина масштаба будет равна 10 м. Затем масштаб увеличивается и производится новый подсчет длины всех ветвлений молнии. В билогарифмическом масштабе с осями  $\ln L$  и  $\ln \chi$  все точки полученных значений  $L_i$  и  $\chi_i$  лягут на прямую линию, угловой коэффициент которой равняется размерности молнии. Таким образом, для разряда на рис. 7.22 получено  $D = 1$ . Явно фрактальная структура молнии на рис. 7.22 оказалась обычной одномерной конструкцией. Последнее связано с тем, что использовались масштабы измерений, начиная с 10 м. А длина в 10 м совпадает с видимым поперечным размером самой молнии [Юман]. При измерении длины предполагается, что поперечный размер заметно меньше мерного масштаба, в противном случае любая кривая будет выглядеть как гладкая линия с  $D = 1$ . Такое обстоятельство собственно и позволило ограничить масштаб измерения “снизу” видимой толщиной фрактальной линии. Более содержателен в этом отношении разряд ветвистой молнии, названный нами разветвленной, представленный на рис. 7.23. По классификации книги [Юман М.] рассматриваемая разветвленная молния относится к классу  $\beta_2$ . Для нее измерение фрактальной размерности по формуле Мандельброта – Ричардсона не представляется возможным, в этом случае размерность можно определить новым канторовским методом.

Фрактальную размерность молнии, представленной на рис. 7.2, эффективнее всего определять канторовским методом, подсчитывая число ветвлений  $N$  внутри выделенной области. Для удобства подсчета разряд молнии представим в виде схемы, как показано на рис. 7.24. Схему расчерчиваем на прямоугольники с единичным основанием, т.е. полагаем  $AD = 1$ . Далее примем, что  $AB_1 = 2$ ,  $AB_2 = 2.5$ ,  $AB_3 = 3$ ,  $AB_4 = 3.5$ ,  $AB_5 = 4$ . Тогда площади прямоугольников  $AB_iC_iD$  будут равны соответственно  $S_i = 2$ ; 2.5; 3; 3.5; 4.



Рис. 7.22. Разряд обыкновенной молнии.



Рис. 7.23. Разряд разветвленной молнии; фотоснимок [<http://thunder.nsstc.nasa.gov/primer/primer2.html>].

Кружочками на схеме рис. 7.24 показаны участки пересечения ветвлениями разряда молнии с границами прямоугольников. Легко подсчитать, что

$$N_i = 11; 13; 15; 17; 19.$$

На графике с осями  $\ln N$  и  $\ln R$ , где  $R = \sqrt{S}$ , все точки располагаются вдоль прямой. Так, для площади  $S_1 = AD \cdot AB_1 = 2$ ,  $N_1 = 11$ . Определяя угол наклона по методу линейной регрессии, сначала находим по формуле  $N \sim R^h$  размерность блуждания

$$h = 1.48 \pm 0.02.$$

Поскольку для разветвленных структур на плоскости размерность  $D = 1 + h/2$ , то для ветвистой молнии на рис. 3.23 размерность

$$D = 1.74 \pm 0.02.$$

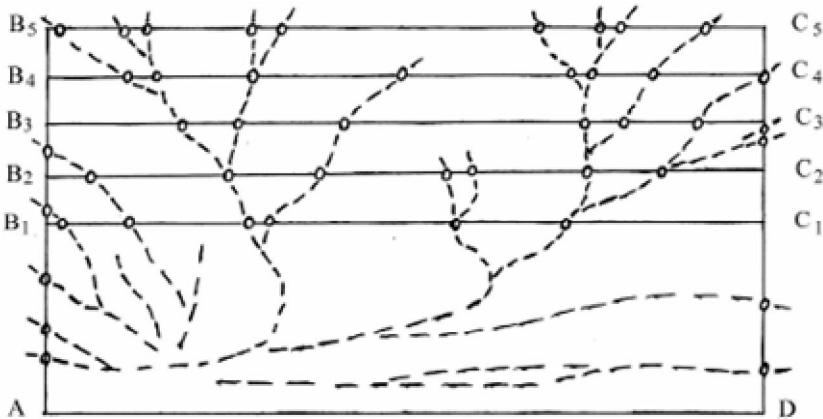


Рис. 7.24. Разряд разветвленной молнии (схема).

## § 12. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗРЯДОВ МОЛНИИ

Для измерения уровней электрического и магнитного полей излучения разрядов молнии было использовано устройство для регистрации излучения разрядов молнии, в котором одновременно измеряются две ортогональные горизонтальные компоненты магнитного поля и вертикальная компонента электрического поля [Козлов, Муллаяров], рис. 7.25. Такое устройство позволяет измерять

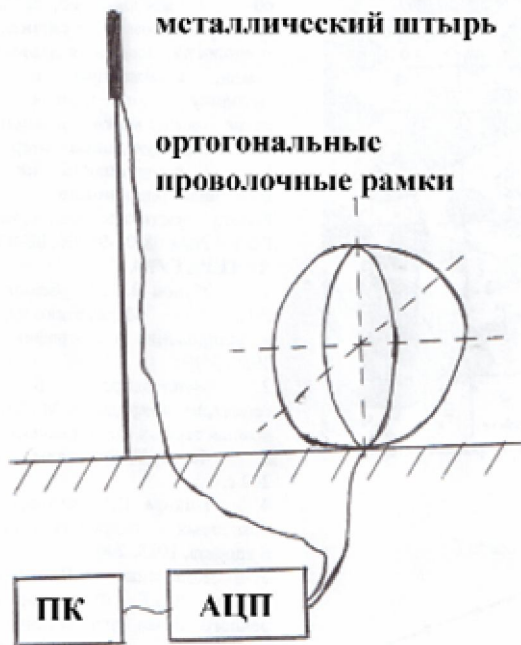


Рис. 7.25. Устройство для измерения вертикальной компоненты электрического поля и горизонтальных компонент магнитного поля разрядов молнии.

относительную (ненормированную) амплитуду полей и направление на источник. В принятом излучении от удаленного разряда молнии обычно имеются два последовательно идущих импульса (широкополосных сигналов), связанных с прямой волной, и волной, отраженной от ионосферы. Устройство регистрирует оба импульса и это позволяет по разности их прихода по времени определять расстояние до источника. На рис. 7.26 показан типичный широкополосный сигнал от разряда молнии. Отмечены  $\Delta t$  - разность времени прихода обоих импульсов и маркер - 1000 мкс.

На рис. 7.27 показаны оба канала распространения, по которым электромагнитные импульсы от разряда молнии приходят к измерительному устройству. Если обозначить через  $h$  – высоту ионосферы, которая полагается известной, то расстояние  $R$  до разряда молнии можно найти из следующего выражения:

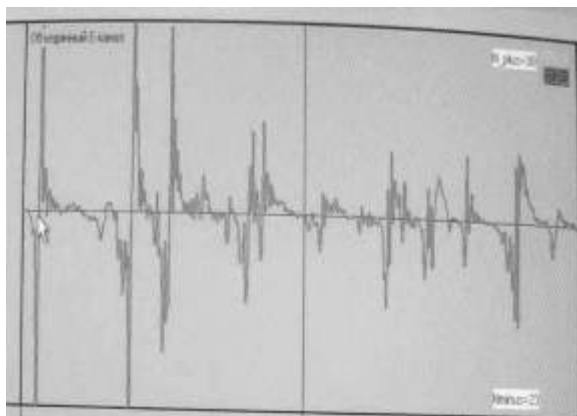
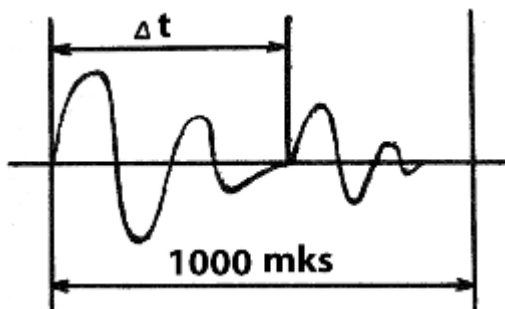


Рис. 7.26. Широкополосный сигнал от разряда молнии (ниже - кадр с экрана компьютера). Отмечены  $\Delta t$  - разность времени прихода обоих импульсов и маркер - 1000 мкс.

$$R = \frac{c^2 \Delta t^2 - 4 h^2}{2 c \Delta t}, \quad (7.97)$$

где  $c$  – скорость света. Мы не учитываем высоту подъема разряда молнии и кривизну поверхности Земли. Их учет привел бы только к несущественным поправкам к измеряемым величинам.

В середине июля в течение 1 часа с 14-34<sup>00</sup> LT по 15-34<sup>00</sup> LT было зарегистрировано 34 разряда молнии. Все разряды происходили из сектора раствором  $\sim 90^\circ$  и ограниченного радиусами  $\sim 30 \div 300$  км между г. Улан-Удэ и оз. Байкал (рис. 7.28).

Результаты измерений представлены в табл. 7.6. Измеренные значения относительных значений уровней электрического и магнитного полей, угол азимута отсчитывается от направления Север - Восток, номер отсчета начинается от первого сигнала к последнему.

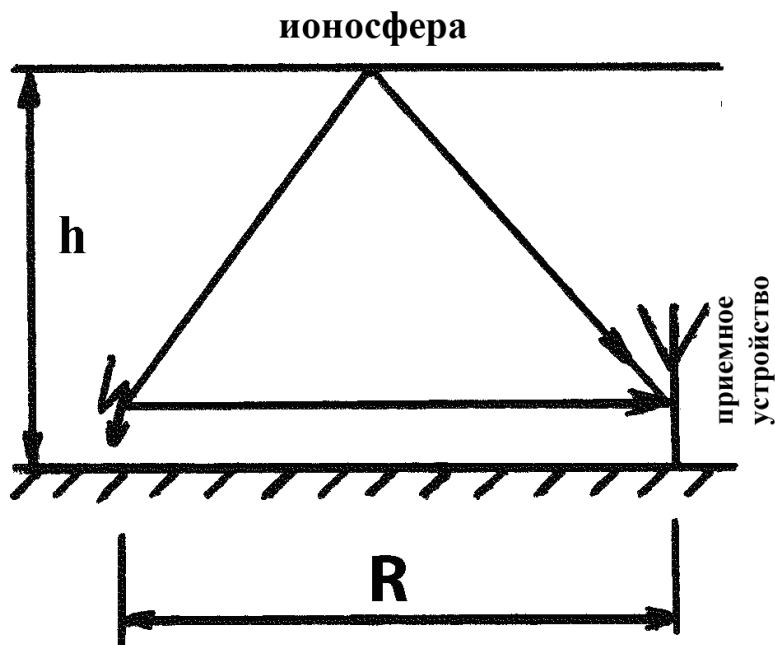


Рис. 7.27. Геометрия каналов распространения разряда молнии.

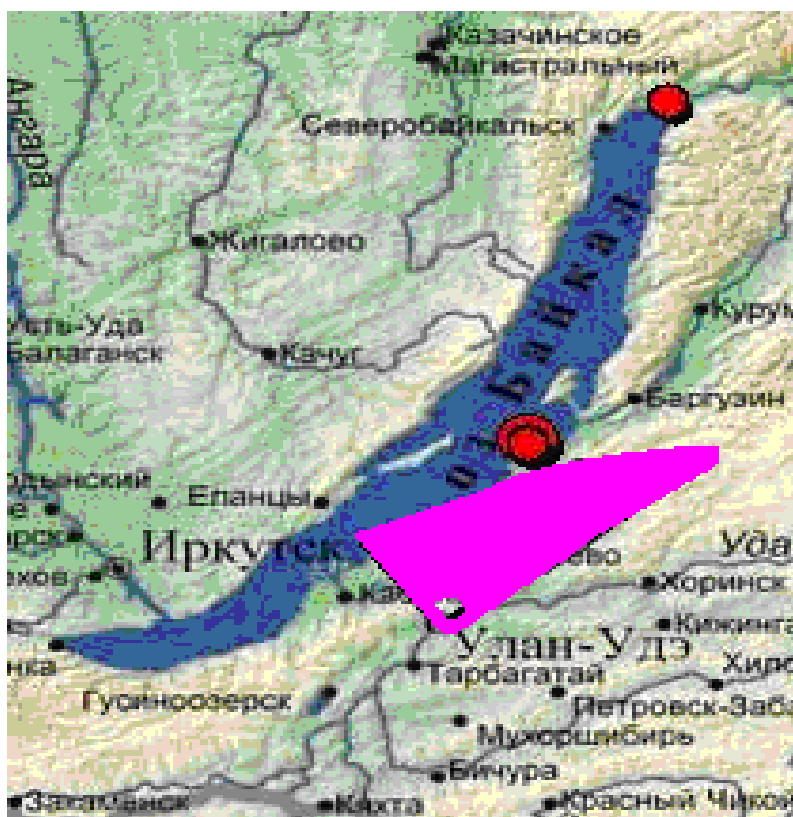


Рис. 7.28. Сектор (закрашенный участок) между г. Улан-Удэ и оз. Байкал, ограничивающий область разрядов молнии.

Таблица 7.6.

<i>N</i>	<i>R</i> , км	азимут, град.	<i>E</i> ,отн.	<i>H</i> ,отн.
1	45.7	63.7	1741	2144
2	160.7	4.9	345	255
3	229.4	59.6	159	185
4	79.2	-8	1145	866

5	30.4	4.3	3432	2517
6	137.8	10.2	454	349
7	115	20.1	521	403
8	190.8	-19.6	334	193
9	248.3	59.7	144.8	168.6
10	168.9	9.7	379	290
11	124	10.7	518	400
12	35.3	-6.4	3564	2659
13	79	11.8	942	731.8
14	182.8	4.1	392	287
15	148.7	11.6	439	341
16	136.1	2.8	444	321
17	121.8	14.3	572	453
18	62.7	4.6	1137	835.5
19	125.3	12.8	436	341.5
20	78.3	11.2	748.8	579.6
21	53.2	30.8	1308	1168
22	289	59.8	153	178.5
23	124.8	13.2	423.6	332.8
24	143.2	-20.3	349	289
25	140.3	3.6	588	429
26	88	4	1018.8	745.4
27	112	-16.7	531.4	428.6
28	311	58.6	174	200
29	179.5	-4	391.7	286.4



30	311	58.4	138.3	158.6
31	108.4	41.7	625.2	613.2
32	101.1	2.6	672.4	486.2
33	209	15.6	236.8	189.4
34	200	13.7	255.7	170

В более наглядном виде результаты измерений удобно представлять на рисунке, как это представлено на рис. 7.29. Там же показаны линейные аппроксимации, удовлетворительно описывающие экспериментальные точки.

Таким образом, в результате измерений установлены следующие пространственные характеристики электромагнитного поля излучения разрядов молнии:

$$E \sim 1/R^{1.5 \pm 0.07}, \quad H \sim 1/R^{1.27 \pm 0.06}. \quad (7.98)$$

Здесь  $E$  – вертикальная электрическая,  $H$  – горизонтальная магнитная компоненты электромагнитного поля,  $R$  – расстояние от разряда молнии до пункта измерения. Известно, что компоненты  $E$  и  $H$  удовлетворяют следующим законам подобия:

$$E' = \eta^{-\Delta} E, \quad H' = \eta^{-1-\Delta+1/D} H. \quad (7.99)$$

Разумеется, мы получили соотношения (7.46), только переписанные с другими степенными показателями. Поскольку  $R' = \eta R$ , то мы можем исключить масштабный множитель  $\eta$  следующим приемом:

$$\eta = \frac{R'}{R} = \left( \frac{E'}{E} \right)^{-1/\Delta}.$$

Отсюда находим пространственную характеристику электрического поля:

$$E \sim 1/R^{\Delta}. \quad (7.100)$$

Совершенно аналогично находим:

$$H \sim 1/R^{1+\Delta-1/D}. \quad (7.101)$$

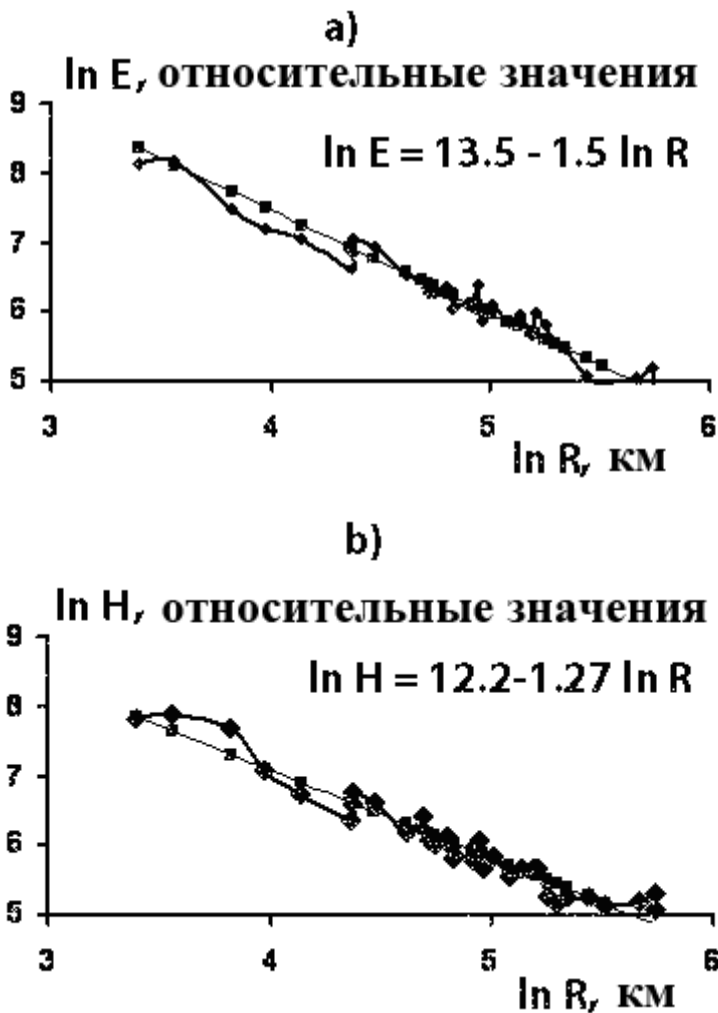


Рис. 7.29. Результаты измерений и их линейная регрессия.

Формулами (7.100) и (7.101) решена задача теоретического обоснования экспериментальных результатов (7.98). Здесь  $D$  является фрактальной размерностью канторовского множества, описывающего распределение проводимости на поверхности Земли. О физическом смысле показателя  $\Delta$  можно предложить следующее объяснение. Электрическое поле

точечного излучателя в свободном пространстве удовлетворяет закономерности  $E \sim 1/R^2$ . Поле бесконечного по длине линейного излучателя описывается зависимостью  $E \sim 1/R$ . Очевидно, что для излучателя, ограниченного по длине и зигзагообразного по форме, степенной показатель  $\Delta$  должен быть заключен в пределах от 1 до 2.

Сравнивая (7.100) и (7.101) с (7.98), находим:

$$\Delta = 1.5 \text{ и } D = 0.82.$$

Полученные значения удовлетворяют тому, что  $1 < \Delta < 2$ , и  $D < 1$ .

### § 13. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИНЫ РАЗРЯДОВ МОЛНИИ ФРАКТАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ

В предыдущем § 7.12 была установлена пространственная характеристика излучения разрядов молнии. Здесь мы рассмотрим другой аспект данной проблемы. Дело в том, что изучение разрядов молнии является широкополосным. Измеренные разряды молнии состоят из 3÷4 импульсов (рис. 7.30).

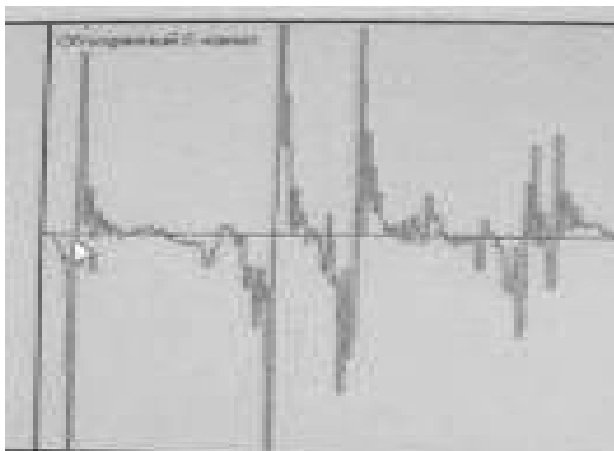


Рис. 7.30. Реальная картина разряда молнии (кадр с экрана компьютера); показана прямая волна, волна, отраженная от ионосферы, опущена. Продолжительность разряда (ширина кадра) 500 мкс.

Мы предлагаем в первом приближении кривую на рис. 7.30 аппроксимировать затухающим периодическим колебанием, описываемой функцией (рис. 7.31)

$$E(t) = \exp(-t/\tau) \sin(\omega_0 t). \quad (7.102)$$

Этим самым вводится основная частота  $\omega_0$  и время релаксации  $\tau$ . Сравнение рис. 7.31 и формулы 7.102 позволяет установить, что время релаксации

$$\tau \sim 200 \text{ мкс},$$

и основная частота излучаемой волны:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \sim 4.8 \text{ кГц}.$$

Таким образом:

$$E(t) = \exp(-t/200) \sin(0.03 t). \quad (7.103)$$

Отсюда следует, что рассматриваемое излучение формируется на эффективной длине источника

$$L \sim \frac{c}{f_0} = 60 \text{ км}.$$

Здесь  $c$  – скорость света.

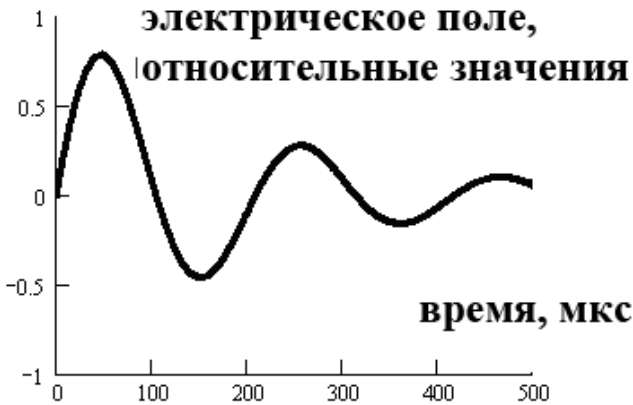


Рис. 7.31. Аппроксимация затухающей прямой волны рис. 3.30, длина излучателя  $\sim 60$  км; электрическое поле  $E(t) = \exp(-t/200) \sin(0.03 t)$ .

Непосредственное наблюдение показывает, что высота  $H$  между облаком и поверхностью земли составляет несколько км. Для определенности примем, что

$$H = 2 \text{ км}.$$

При этом основная частота излучения была бы

$$f \sim \frac{c}{H} = 150 \text{ кГц.}$$

Если оставить выше приведенное значение для времени релаксации, то затухающее излучение, формируемое на длине  $h$ , будет описываться функцией

$$E(t) = \exp(-t/200) \sin(0.94 t). \quad (7.104)$$

Его график представлен на рис. 7.32. Видим, что между рис. 7.31 и рис. 7.32 нет ничего общего. Таким образом, можно заключить, что широкополосный разряд молнии формируется от источника, имеющий длину несколько десятков км.

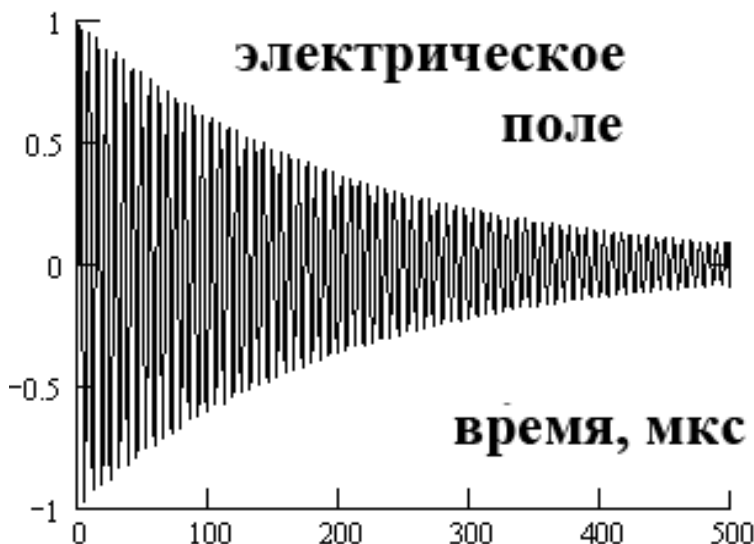


Рис. 7.32. Излучение электромагнитной волны от источника длиной  $\sim 2$  км; электрическое поле  $E(t) = \exp(-t/200) \sin(0.94 t)$ .

Различие между видимой высотой, скажем, в 2 км и эффективной длиной в 60 км, можно объяснить следующим образом. С точки зрения фрактальной геометрии, разряды молнии настолько извилисты, что на длине 2 км укладывается извилистая линия общей длиной в 60 км. Действительно, для известной кривой Коха [Федер] ее длина  $L$  определяется как

$$L = h \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n. \quad (7.105)$$

Здесь  $n$  – число итераций при построении кривой Коха,  $D = \ln 4 / \ln 3$  – фрактальная размерность кривой Коха,  $h$  – расстояние по прямой от одного конца линии к другому. Подставляя  $L = 60$  км и  $h = 2$  км, находим

$$n = 12. \quad (7.106)$$

Мы получили необходимое число итераций, чтобы моделировать геометрию разрядов молнии кривой Коха. Поскольку продолжительность разряда на рис. 1 есть 500 mks, то из полученного результата следует, что при формировании разрядов молнии на одну итерацию требуется  $500/12 \approx 40$  mks. Если вместо кривой Коха взять кривую Гивена [Федер], то вместо (3.16) будем иметь

$$L = h \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Отсюда число итераций  $n = 7$ . Рассмотренные примеры показывают, что моделирование геометрии разрядов молнии существенно зависит от выбора фрактальной линии.

Таким образом, мы установили, дополнительно к разделу 3.12, что разряды молнии можно моделировать методами фрактальной геометрии. Теория, которой пока нет, должна установить закономерности разрядов молнии от фрактальной размерности. Однако остался еще открытым вопрос о числе итераций. Реальные разряды молнии, очевидно, должны зависеть только от фрактальной размерности, и ни как от числа итераций.

## **§ 14. ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ПЛОСКОСТНОЙ ПРОЕКЦИИ СТРИМЕРНЫХ КАНАЛОВ**

В настоящее время активизировалось изучение стримерных разрядов - сети каналов, возникающих при электрическом пробое в диэлектриках (воздухе, полимерных изоляторах, фотоэмульсии, изоляторах высокого напряжения) [Носков М.Д.; Попов Н.А.]. Сами стримеры имеют давнюю историю, и впервые их наблюдал на фотопластинках Лихтенберг. Изучение стримеров стало особенно актуальным в связи с пробоем космическими лучами обшивки спутников Земли и с использованием кабелей с полимерной изоляцией [Носков М.Д.]. Однако отмечается, что количественной теории, описывающей рост ветвления электрического пробоя, до сих пор нет. Мы геометрическую конфигурацию разрядных каналов, рост числа каналов и их ветвление рассмотрим как фрактальные разветвленные объекты и опи-

шем их количественно с помощью понятия фрактальной размерности. Электрический пробой – видимый в оптическом диапазоне стримерный канал в диэлектриках, образованный локально растущим электрическим полем. Пробой возникает, когда на небольшой участок удаленной от заряженной подложки подается такое высокое напряжение, что происходит собственно электрический пробой. Под такое определение подходят разряды молний в воздухе, частичные разряды в эпоксидной смоле, плазменные структуры в фотоэмульсии. В указанном смысле стримерные каналы относятся к классу универсальности [Мандельброт Б.; Федер Е.], зависящие только от двух безразмерных величин: фрактальной размерности и размерности пространства, в котором происходит процесс. М.Д. Носковым и др. [Носков М.Д.] прямым измерением определено, что фрактальная размерность  $D$  частичных разрядов лежит в пределах  $1.45 \div 1.55$ . Н.А. Попов [Попов Н.А.] из энергетических соображений определил фрактальную размерность коронного разряда  $D = 2.16 \pm 0.05$ . Для обычного разряда молний также измерялась фрактальная размерность, при этом установлено, что на масштабах от десятков метров и выше  $D = 1$ . Таким образом, мы видим существенное различие в значениях для размерности. В связи с этим тремя независимыми методами измерим фрактальную размерность планового рисунка системы стримерных каналов (рис. 7.31) [Попов Н.А.].

Первый метод измерения размерности будет заключаться в использовании формулы  $L \sim R^D$ . На плановом рисунке стримерных каналов выделяется некоторая область (на рис. 7.31 это окружность радиусом  $R$ ), и подсчитывается общая длина всех каналов, попадающих в рассматриваемую область. Так мы получаем первые значения  $L_1$  и  $R_1$ . Далее выделяется другая область (чуть больше первоначальной), и после подсчета получают другие значения  $L_2$  и  $R_2$ . Таким образом, в итоге мы получаем набор значений  $L_i$  и  $R_i$ , по которым методом линейной регрессии строим прямую линию на осях  $\ln L$  и  $\ln R$ . Угловой коэффициент будет равняться фрактальной размерности  $D$ . Таким образом, было установлено, что для стримерных каналов

$$D = 1.52 \pm 0.03.$$

Для увеличения статистики нами выбирались разные формы областей разбиения - от прямоугольных до круглых.

Второй метод измерения состоит в подсчете числа  $N$  пересечений ветвлениями стримерных каналов периметра области. На рис. 7.31 границей выделенной области является окружность радиусом  $R$ . Легко подсчитать, что для изображенного на рисунке случая  $N = 53$ . Варьируя радиус  $R$ , находим, что  $N$  и  $R$  связаны степенным (скейлинговым) законом  $N \sim R^h$  с показателем  $h = 1.01 \pm 0.05$  и фрактальной размерностью

$$D = 1 + h / 2 = 1.51 \pm 0.01.$$

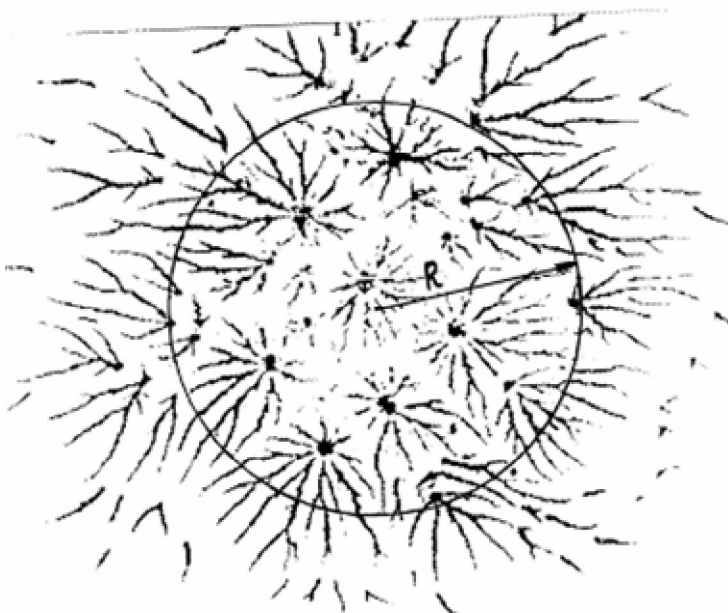


Рис. 7.31. Система микроразрядов, пересекающих диэлектрическую фотопластинку [Попов Н.А.].

Приступим к третьему методу измерения величины  $D$ . Метод основан на анализе графика рис. 7.32 [Носков М.Д.], где представлена зависимость роста границы каналных лучей от времени. Зависимость роста стримеров от времени дается формулой  $R \sim t^{1/h}$ . На интервале времен от 1 мин до 6 мин из рис. 7.32 следует, что  $R \sim t^{0.94}$ , откуда  $h = 1.06$  и  $D = 1.53$ .

Тремя независимыми методами установлена фрактальная размерность плоскостной проекции стримерных каналов, представленных на рис. 3.31. Полученные значения 1.50, 1.52 и 1.53 совпадают с данными работы [Носков]. Объединяя эти три значения фрактальной размерности, находим

$$D(\text{стримерные каналы}) = 1.52 \pm 0.02. \quad (7.107)$$

Подобный рис. 7.32 результат имеется в работе [Попов Н.А.], где получен следующий закон для числа ветвления:  $N \sim R^{1.18}$ . Из него следует, что  $D = 1.59$ , т.е. близкая к нашим значениям размерность.



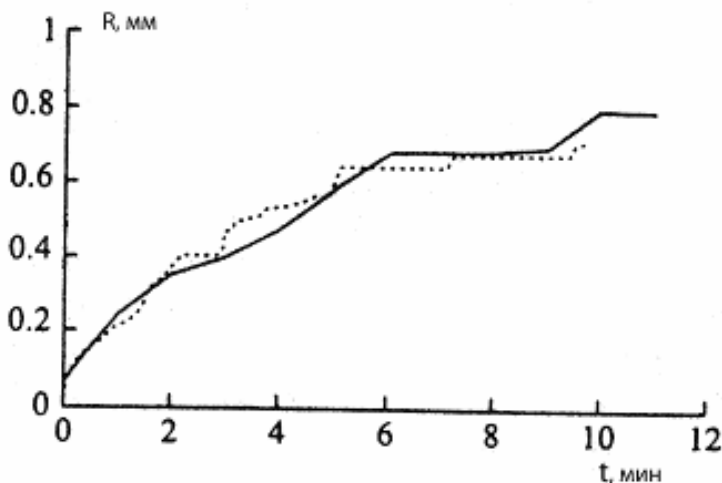


Рис. 7.32. Зависимость длины дендрита от времени роста. Сплошная кривая – эксперимент, штриховая – моделирование.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вы закрыли последнюю страницу монографии, где даны начальные сведения, необходимые для дальнейшего самостоятельного исследования. Только общение с многочисленными примерами и задачами могут дать понимание предмета. Все рисунки в книге сделаны автором, хотя и было соблазн простого копирования красивых и профессионально сделанных рисунков из многочисленных книг и Интернет-сайтов. Это сделано сознательно. Теперь Вы также можете самостоятельно рисовать и изучать фрактальные фигуры, вычислять или измерять их фрактальную размерность. При этом автор считает, что не надо скрывать от читателей трудностей, стоящих на таком новом пути, как изучение и применение фрактальной геометрии. Многие важные вопросы могут быть еще только поставлены.

К списку литературы, которая регулярно увеличивается, добавлены некоторые работы автора, на основе которых и была написана данная монография. Свои замечания читатели могут сообщить по адресу: [ballar@yandex.ru](mailto:ballar@yandex.ru).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Акимов О.Е. Дискретная математика. Логика, группы, графы, фракталы - М.: Издатель АКИМОВА, 2005. 656 с.
2. Акишев Ю. С., Апонин Г. И., Каральник В. Б., Мониц А. Е., Трушкин Н. И. Структура поверхностных стримеров барьерной короны переменного тока в аргоне // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 12. С. 1088–1104.
3. Алексеевский Н.И., Соколова Ю.В. Структура сети водотоков в русловых и дельтовых разветвлениях и способы ее формализации // Вестн. МГУ, 1999. Сер. 5, География. № 3. С. 13 - 19.
4. Ангархаева Л.Х., Башкуев Ю.Б. Численные методы решения прямых и обратных задач радиоволновой электроразведки криогенных геоэлектрических сред // Труды Межд. Конф. "Математические методы в геофизике". – Новосибирск, 2003. Ч. 1. С. 252-256.
5. Антипов О.И., Неганов В.А., Потапов А.А. Детерминированный хаос и фракталы в дискретно-нелинейных системах // Под ред. и с предисловием акад. Ю.В. Гуляева и чл.-корр. РАН С.А. Никитова.- М.: Радиотехника, 2009. - 235 с.
6. Архинчеев В.Е. Кинетические явления в неоднородных средах. – Автореф. дисс. доктора физ. – мат. наук. Иркутск. ИГУ, 2002. 31 с.
7. Атлас «Байкал». – М.: ГУК, 1993. 160 с.
8. Ашуров Х.Б., Максимов С.Е., Оксенгендлер Б.Л., Сидоренко О.Е., Гусева М.Б. Моделирование роста фрактального кластера на подложке при ионном облучении // Поверхность. 2011. № 6. С. 89-92.
9. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 320 с.
10. Барри Дж. Шаровая молния и четочная молния. – М.: Мир, 1983. 288 с.
11. Батчаев И.З. Многокритериальная задача покрытия предфрактальных графов звездами ранговых типов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: Карачаево-Черкесская гос.технолог.академия. – Таганрог, 2004. 119 с.
12. Бацанов С.С., Поярков К.Б., Гаврилкин С.М. Влияние атомной структуры на диэлектрические свойства наноматериалов // Доклады академии наук, 2009. Т. 428. № 3. С. 322-324.
13. Башкуев Ю.Б. Электрические свойства природных слоистых сред. –Новосибирск: Изд. СО РАН. 1996. 320 с.
14. Башкуев Ю.Б., Адвокатов В.Р., Ангархаева Л.Х. Карты геоэлектрических разрезов восточного полушария // Физика земли. 2003. № 9. 87-94.

15. Башкуев Ю.Б., Адвокатов В.Р., Хаптанов В.Б., Буянова Д.Г., Анггархаева Л.Х. Электромагнитные характеристики акватории озера Байкал // Геология и геофизика. № 9. 1993. С. 118-126.
16. Башкуев Ю.Б., Мельчинов В.П., Дембелов М.Г., Анггархаева Л.Х., Буянова Д.Г., Борсоев В.А. Влияние электрических свойств криолитозоны на распространение земной волны в высоких широтах // Геомагнетизм и аэрномия, 2006. Т.46. № 4. С. 536-546.
17. Башкуев Ю.Б., Хаптанов В.Б., Цыдыпов Ч.Ц., Буянова Д.Г. Естественное электромагнитное поле Забайкалья. – М.: Наука, 1989. С. 112 с.
18. Блейкмор Дж. Физика твердого тела. – М.: Мир, 1988. 608 с.
19. Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 128 с.
20. Болотов В.Н. Переходное фрактальное излучение // Электромагнитные явления. 1998. Т. 1. № 1. С. 74-77.
21. Вишик М. И. Фрактальная размерность множеств // Соросовский образовательный журнал. 1998. № 1. С. 122–127.
22. Гаврилин В.В., Григулис Ю.И., Пориныш В.М. Электромагнитные радиоволновые приборы для контроля слоев полупроводниковых и металлических структур. – Рига: Зинатие, 1982.
23. Гейликман М.Б., Голубева Т.В., Писаренко В.Ф. Самоподобная иерархическая структура поля эпицентров землетрясений // Вычисл. Сейсмология; Вып. 23. – М.: Наука, 1990. с. 123-139.
24. Гейликман М.Б., Писаренко В.Ф. О самоподобии в геофизических явлениях // Дискретные свойства геофизической среды. – М.: Наука, 1989. с. 109-131.
25. Геология и сейсмичность зоны БАМ (от Байкала до Тынды). Глубинное строение. – Новосибирск: Наука, 1984. 173 с.
26. Гийон Э., Митеску К.Д., Юлен Ж.-П., Ру С. Фракталы и перколяция в пористой среде // УФН, 1991. Т. 161. № 10. С. 121-128.
27. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Иерархия структур при разрушении // Докл. РАН, 1992. Т. 325. № 4. С. 735-739.
28. Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М. Разрушение и формирование структуры // Докл. АН СССР, 1978. Т. 240. № 4. С. 735-739.
29. Гринченко В.Т., Мацыпура В.Т., Снарский А.А. Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. – М.: Изд-во ЛКИ, 2007. 264 с.
30. Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Физика в мире полимеров. М.: Наука, 1989.
31. Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р. Статистическая физика макромолекул. – М.: Наука. 1989. 342 с.
32. Гуляев Ю.В., Никитов С.А., Потапов А.А., Герман В.А. Идеи скейлинга и дробной размерности в схеме фрактального обнаружения радиосигналов // Радиотехника и электроника, 2006. Т. 51. № 8, С. 968-975.

33. Деменок С.Л. Фрактал: между мифом и ремеслом. – СПб.: ООО “Ринвал”, 2011. 296 с.
34. Долбилин Н. Игра «Хаос» и фракталы // Квант. 1997. № 4. С. 3–6.
35. Долбилин Р. Самоподобие мозаики // Квант. 1998. № 2. С. 7–11.
36. Долуханов М.П. Распространение радиоволн. – М.: Советское “Радио”. 1972. 152 с.
37. Егорова Г. Н. Природные условия дельты реки Лены и севера Хараулахских гор в пределах проектируемого заповедника // Природа Якутии и ее охрана. Якутск, 1965. С. 174–189.
38. Еремин Н.С., Пертель М.И., Тищенко А.С. Определение параметров геоэлектрических разрезов по импедансным измерениям на двух частотах // Распространение радиоволн километрового диапазона. Апатиты, 1987. С. 84–85.
39. Ерофеев В.Т., Кравченко В.Ф. Об импедансных граничных условиях, учитывающих кривизну поверхности // Радиотехника и электроника, 2000. Т. 45. № 11. С. 1300–1306.
40. Жданов М.С. Электроразведка. – М: Недра, 1986. 316 с.
41. Жиков В. В. Фракталы // Соросовский образовательный журнал. 1996. № 12. С. 109–117.
42. Захаров К.А., Мейланов Р.П. О дискретизации сигнала с фрактальной структурой // Известия вузов. Радиофизика. Т.XLIV, № 8, 2001, С.709–711.
43. Зельдович Я. Б., Соколов Д. Д. Фракталы, подобие, промежуточная асимптотика // УФН, 1985. № 14. Вып. 3. С.493–506.
44. Иванов С.С. Оценка фрактальной размерности самоафинных множеств: метод встречного масштабирования дисперсий // ДАН, 1993, № 1, Т.332. С. 89–92.
45. Иванюк Г.Ю. Фрактальные геологические среды: размерность, основные типы, генетические следствия // Физика Земли, 1997, № 3. С.21–31.
46. Кириллов А.А. Повесть о двух фракталах. - М: МНЦМО, 2009. 180 с.
47. Киселев Б.В. Статистический R/S – анализ DST – индекса // Вопросы геофизики. Выпуск 38. СПб, 2005 – (Ученые записки СПбГУ; № 438). С. 194–202.
48. Клеман М., Лаврентович О.Д. Основы физики частично упорядоченных сред: жидкие кристаллы, коллоиды, фрактальные структуры, полимеры и биологические объекты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 680 с.
49. Козлов В.И., Муллаяров В.А. Грозовая активность в Якутии. – Изд-во Якутского научного центра СО РАН, 2003. 97 с.

50. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при больших числах Рейнольдса // ДАН СССР **30**, 301 (1941). Р.299-303.
51. Круглов В.И., Страхов Л.П. Низкочастотная электропроводность стеклообразного селенида мышьяка // Вопросы электроники твердого тела. Вып. 2. Изд-во Ленинградского ун-та, 1968. С. 80-86.
52. Крылов С.С., Бобров Н.Ю. Аномальная поляризуемость гетерогенных сред при электромагнитных зондированиях // Вопросы геофизики. Вып. 36. Изд-во С-Пб. унив-та, 1998. С. 148-161.
53. Крылов С.С., Любич В.А. Масштабная зависимость кажущегося сопротивления и фрактальная структура железистых кварцитов // Физика Земли, 2002. № 12. С. 14-21.
54. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. – М.: Наука, 1973. 208 с.
55. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. 620 с.
56. Леви П. Стохастические процессы и броуновское движение. М.: Наука, 1972.
57. Лисовский Ф.Л. Новый англо-русский словарь по радиоэлектронике. – М. РУССО: Лаборатория Базовых Знаний, 2005. 656 с.
58. Лиу С., Каплан Т., Грэй П. Отклик шероховатых поверхностей на переменном токе // Сб. Фракталы в физике. – М.: Мир. 1988. С. 543-552.
59. Лукк А. А., Дещеревский А. В., Сидорин А. Я., Сидорин И. А. Вариации геофизических полей как проявление детерминированного хаоса во фрактальной среде. М.: ОИФЗ РАН, 1996. 210 с.
60. Лухнева О.Ф. Геоинформационные исследования закономерностей структуры рельефа, новейшей тектоники и сейсмичности Прибайкалья: Дис... канд. г.-м.н. Институт земной коры – Иркутск, 2004. 201 с.
61. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики - М.: URSS, 2004. Твердый переплет. 320 с.
62. Макаров Г.И., Новиков В.В., Рыбачек С.Т. Распространение радиоволн в волноводном канале Земля – ионосфера и в ионосфере. – М.: Наука, 1993. 150 с.
63. Малыгин Я.В. Сжатие изображений с помощью фракталов и всплесков: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ин-т математики и механики УрО РАН. - Екатеринбург, 2004. 73 с.
64. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. – М.: Изд-во Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
65. Марголина А. Фрактальная размерность периметра роста // Сб. Фракталы в физике. – М.: Мир. 1988. С. 507-512.
66. Матвеев Б.К. Электроразведка. – М.: Недра, 1990. 368 с.

67. Мельчинов В.П., Башкуев Ю.Б., Ангархаева Л.Х., Буянова Д.Г. Электрические свойства криолитозоны Востока России в радиодиапазоне. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2006. 258 с.
68. Михайлов В.Н. Устья рек России и сопредельных стран: прошлое, настоящее и будущее. – М.: ГЕОС, 1997. 413 с.
69. Михайлова М.В. Гидрологический режим и особенности формирования дельты р. По // Водные ресурсы, 2002. Т. 29. № 4. С. 405–415.
70. Могилевский Э.И. Фракталы на Солнце – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 152 с.
71. Моисеенко А.В. Корреляции и фрактальные свойства стохастических процессов в ядерной физике и физике частиц: Диссертация... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18, 01.04.16 Москва, 2007. 135 с.
72. Молочнов Г.В., Секриеру В.Г. Исследование эффективной глубины проникновения электромагнитного поля в слоистой среде и возможности приближенной интерпретации магнитотеллурического зондирования. – Ученые записки ЛГУ. Серия физ. и геол. наук, 1974. Вып. 24. С. 234–266.
73. Морозов А.Д. Введение в теорию фракталов – М.: URSS, 2002. 160 с.
74. Морозовский А.Е., Снарский С.С. Конечный скейлинг эффективной проводимости в перколяционных системах с ненулевым отношением проводимостей фаз // ЖЭТФ, 1996. Т. 109. Вып. 2. С. 669–675.
75. Найденов В. И., Кожевникова И. А. Эффект Херста в геофизике // Природа. 2000. № 1. С. 30–40.
76. Неганов В.А., Осипов О.В., Раевский С.Б., Яровой Г.П. Электродинамика и распространение радиоволн – М.: Радио и связь, 2005. 648 с.
77. Нигматуллин Р.Р., Потапов А.А. Фракталы, дробные операторы и дробная кинетика в диэлектрической спектроскопии и волновых процессах // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2007. Т. 10. № 3. С. 30–49
78. Никора В.И. Фрактальные свойства некоторых гидрологических объектов. Кишинев, 1988. 200 с.
79. Носков М.Д., Малиновский А.С., Закк М., Шваб А.Й. Моделирование роста дендритов и частичных разрядов в эпоксидной смоле // Журнал технической физики, 2002. Т. 72, вып. 2. С. 121–128.
80. Олемский А. И., Флат А. Я. Использование концепции фрактала в физике конденсированной среды // УФН. 1993. Вып. 12. С. 153 – 203.
81. Паладин Дж., Вульпиани А. Фрактальные модели двух- и трехмерной турбулентности // Фракталы в физике. М.: Мир. 1988. С. 624–631.
82. Палымский Б. Ф. Иерархическая система картографируемых геологических тел // Тихоокеанская геология, 2006. Т. 25. № 1. С. 55 – 61.
83. Пелити Л. Случайные блуждания с памятью // Сб. Фракталы в физике. – М.: Мир. 1988. С. 106–116.

84. Петров Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Горячая линия – Телеком, 2003. 558 с.
85. Петров А.С., Иванов С.А., Королев С.А., Фастович С.В. Метод матриц линий передачи в вычислительной электродинамике // Успехи современной радиоэлектроники, 2002. № 1. С. 3-38.
86. Петровский А.Д. Радиоволновые методы в подземной геофизике. – М.: Недра. 1971. 224с.
87. Пидоу Д. Геометрия и искусство. – М.: Мир, 1979. 332 с.
88. Пискун А.А. Анализ водного и руслового режима дельты Оби // Водные ресурсы, 2002. Т. 29, № 4. С. 395-404.
89. Пономарев А.В. Электрические явления при деформации и разрушении горных пород // Прогноз землетрясений. Москва; Душанбе, 1984. № 4. С. 244-256.
90. Попов Н.А. Исследование пространственной структуры ветвящихся стримерных каналов коронного разряда // Физика плазмы, 2002. Т.28, № 7. С.664-672.
91. Потапов А.А. Фракталы в дистанционном зондировании // Успехи современной радиоэлектроники, 2000. № 6. С.3-65.
92. Потапов А.А., Герман В.А. Применение фрактальных методов для обработки оптических и радиолокационных изображений земной поверхности // Радиотехника и электроника, 2000. Т. 45. № 8. С. 946-953.
93. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Основы теории рассеяния волн фрактальной поверхностью // Радиотехника и электроника, 2002. Т. 47. № 5. С. 517-544.
94. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Фрактальный анализ сигналов // Радиотехника и электроника, 2001. Т. 46. № 3. С. 261-270.
95. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Топология выборки. – М.: Университетская книга, 2005. 848 с.
96. А.А. Потапов, А.Х. Гильмутдинов, П.А. Ушаков. Фрактальные элементы и радиосистемы: Физические аспекты. Издательство – М.: Радиотехника, 2009. - 200 с.
97. Потапов А.А. Фракталы в радиофизике и радиолокации. Элементы теории фракталов // Радиотехника и электроника, 2000. Т. 45. № 11. С. 1285-1292.
98. Пьетронеро Л., Пелити Л. Вероятность выживания и фактор усиления в статистике полимеров // Сб. Фракталы в физике. – М.: Мир. 1988. С. 117-121.
99. Пустовойт В.И. О механизме возникновения молнии // Радиотехника и электроника, 2006. Т. 51. № 8. С. 996-1002.

100. Реутов А.П., Потапов А.А., Герман В.А. Странные аттракторы и фракталы как основа новой динамической модели радиолокационных сигналов, рассеянных растительным покровом // Нелинейный мир, 2003. Т1. № 1-2. С. 12-27.
101. Ржевский В.В., Коренберг Е.Б. Рудничная радиоинтроскопия и радиосвязь. – М.: Недра. 1978. 189 с.
102. Рыбаков Д. А. Геометрическое моделирование перколяционных процессов в объектах с бинарными характеристиками: Дис. ... канд. тех. наук: Государственный самарский аэрокосмический университет имени академика С.П. Королева. – Самара, 2011. 176 с.
103. Садовский М.А. О естественной кусковатости горных пород // Докл. АН СССР. Т. 247. № 4. С. 829-831.
104. Садовский М.А. О значении и смысле дискретности в геофизике // Дискретные свойства геофизической среды. – М.: Наука, 1989. С. 5-14.
105. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
106. CD – диск “ГИС района дельты реки Селенги в пакете Arc View 2.3”.
107. Смирнов Б.М. Физика фрактальных кластеров. - М.: Наука, 1991. 197 с.
108. Смирнов И.М. Размерности и другие геометрические критические показатели в теории протекания // УФН, 1985. **150** (2). С. 221-255.
109. Старостин Е.Е., Колмаков А.Г. Физика и химия обработки материалов, 5, 38 (1998).
110. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. – М.: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.
111. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. Изд.4, испр. - М.: URSS, 2004. 152 с.
112. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. М.: Мир, 1985. 272 с.
113. Тинин М.В. Рассеяние радиоволн в многомасштабной случайно неоднородной среде // Труды XX Всерос. Конф. по распространению радиоволн. Нижний Новгород, 2-4 июля, 2002. С. 466-467.
114. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН, 1963. Т. 153. № 1. С. 49-52.
115. Топографическая карта, масштаб 1:200 000, лист № 48-XXXV.
116. Торхов Н. А., Новиков В. А. Фрактальная геометрия поверхностного потенциала электрохимически осажденных пленок платины и палладия // Физика и техника полупроводников. - 2009. - Т. 43, вып. 8. - С. 1109-1116.



117. Торхов Н. А., Божков В. Г. Фрактальный характер распределения неоднородностей потенциала поверхности n-GaAs (100) // Физика и техника полупроводников. - 2009. - Т. 43, вып. 5. - С. 577-583.
118. Трубецкой К.Н., Рубан А.Д. Викторов С.Д. и др. Фрактальная структура нарушенности каменных углей и их предрасположенность к газодинамическому разрушению // ДАН, 2010. Т. 431. № 6. С. 818-821.
119. Уайт Дж. Р. Геоэлектромагнетизм. – М: Недра, 1987. 235 с.
120. Фадеев В.М., Поспеев В.И. Геоэлектрическая модель Бодайбинского рудного района // Ускорение НТП при геофизических исследованиях в Восточной Сибири. ВС НИИГГиМС. – Иркутск, 1989. С. 73-75.
121. Федер Е. Фракталы. – М.: Мир, 1991. 262 с.
122. Федотов Г.Н., Третьяков Ю.Д., Иванов В.К. и др. Фрактальные коллоидные структуры в почвах различной зональности // ДАН, 2005. Т. 405. № 3. С. 351-354.
123. Фракталы в физике // Труды VI международного симпозиума по фракталам в физике (МЦТФ, Триест, Италия, 9-12 июля, 1985) – М.: Мир, 1988. 672 с.
124. Френкель Я.И. Теория явлений атмосферного электричества. – М., Ленинград: Гос. изд. технико-теор. литер., 1949. 155 с.
125. Цыдыпов Ч.Ц., Цыденов В.Д., Башкуев Ю.Б. Исследование электрических свойств подстилающей среды. – Новосибирск: Наука, 1979. 176 с.
126. Цифровая карта дельты Селенги в пакете Arc View 2.3.
127. Черкашин А.К., Истомина Е.А., Владимиров И.Н. и др. Гомология и гомотопия географических систем. – Новосибирск: Академическое издательство “Гео”, 2009. 351 с.
128. Чухланцев А.А., Маречек С.В., Новичихин Е.П., Тищенко Ю.Г., Шутко А.М., Головачев С.П. Лабораторные измерения ослабления электромагнитных волн фрагментами растительности // Радиотехника и электроника, 2004. Т. 49. № 6. С. 677-682.
129. Шауб Ю.Б., Шауб С.К. Электрометрия для экологических и биофизических исследований – М.: Наука, 1992. 192 с.
130. Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М. Самоподобие и фракталы. Телекоммуникационные приложения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. 368 с.
131. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. – М.: Ижевск, 2001. 528 с.
132. Шугуров А.Р., Панин А.В., Лязгин А.О., Шестериков Е.В. Фрактальный анализ эволюции поверхности трения гальванических покрытий AuNi // Письма в ЖТФ, 2012. Т. 38. Т 10. С. 70-78.

133. Электромагнитные исследования земных недр. Под редакцией докт. физ.-мат. наук В.В. Спичака. – М.: Научный мир, 2005. 245 с.
134. Юман М. Молния. – М.: Мир, 1972. 328 с.
135. Alansonati E., Comino E., Ianoz M., Korovkin N., Rachhidi F. Saidi Y., Zryd J.P., Zwejacker P. Fractal dimension: A method for the analysis of the biological effects of electromagnetic field // P. 405 – 407.
136. Babalievski F. Commen in “Universal formulas for percolation thresholds” // Phys. Rev., 1997. E **55**(1). P. 1228-1229.
137. Barnsley M.F. Fractals everywhere. New York: Academic press, 1988.
138. Bashkuev Yu.B. and Khaptanov V.B. Results on “Zeus” station application for electromagnetic sounding of seismoactive area // Seismo Electromagnetics: Litosphere-Atmosphere- Ionosphere, Eds. M. Hayakawa and O.A. Molchanov, 2002 by TERRAPUT, Tokyo. p.p. 239-247.
139. Bjorken J.D. Fractal phase space as a diagnostic tool for high-energy multijet processes. Physical Review, 1992. V. 45, № 11, p. 4077-4087.
140. Y.M. Balagula, N.V. Korovkin, M. Sakulin, H. Renner. The use fractal analysis for quantifying the dynamic arc characteristics // Сб. Статей ЭМС-2003. С.-Петербург, 2003.С. 39-43.
141. G.G. Chavka, N. Litwinczuk. Radiation of multiband fractal antennas radiocommunication systems // Сб. Статей ЭМС-2003. С.-Петербург, 2003. С. 172-175.
142. Cherman S.I., Gladkov A.S. Fractal in studies of faulting end seismicity in the Baikal rift zone // Tectonophysics, 1999. V. 308. P. 133-142.
143. D.G. Crossley. The theory of EM surface wave impedance measurements // Geologocal Survey of Canada. Paper 81-15. 1981. P. 1-17.
144. [Электрон. ресурс] <http://thunder.nsstc.nasa.gov/primer/primer2.html>
145. Iudin D.I. and Kas'yanov D.A. Percolation Model of Seismic Activity // Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Associated with Earthquakes, Ed. M. Hayakawa, Tokyo, TERRAPUB. 1999. № 3. P. 911-917.
146. Hurst H. Long-term storage capacity of reservoirs // Amer. Soc. Civil Eng. 1951. V.116. P.770-898. Hurst H. Methods of long-term storage in reservoirs // Proc. Inst. Civil Eng. 1956. V.5. P.519-543;
147. Hurst H.E., Black R.P. Simaika Y.M. Long-Term Storage: An Experimental Study (Constable, London), 1965.
148. Hirata T. Fractal dimension of fault systems in Japan // Pure and Appl. Geophys. 1989. V. 131. P.157-170.
149. Hirata T. A correlation between the b value and the fractal dimension of earthquakes // Gourn. Geophys. Res. 1989. V. 94. N B6. P. 7507-7514.
150. Hirata T., Imoto M. Multifractal analysis of spatial distribution on microearthquakes in the Kanto region // Geophys. J. Int. 1991. V. 107. P. 155-162.

151. Hirata T., Saton T., Oto K. Fractal structure of spatial distribution of micro fracturing in rock // *Geophys. J. Roy Astron. Soc.* 1987. V. 90. N 2B. P. 296-377.
152. Laugier J.M., Clerc J.P., Giraud D., Luck J.M. AC properties of 2D percolation networks: a transfer matrix approach // *J. Phys. A.* 1986. V. 19. P. 3153-3164.
153. Mandelbrot B.B. *Les objets fractals: forme, hazard et dimension.* - Paris: Flammarion, 1975.
154. Mandelbrot B.B. *The Fractal Geometry of Nature.* New York: W.H. Freeman, 1982.
155. Mandelbrot B.B. *Fractals: Form, Chance, and Dimension.* San Francisco, W.H. Freeman, 1977.
156. Mandelbrot B.B. // *J. Stat. Phys.* 1983. V.34. P.895.
157. Mandelbrot B.B. *Fractals and multifractals: noise, turbulence and galaxies.* New York, Springer, 1988.
158. Mandelbrot B.B. *Fractals and Scaling in Finance.* New York, Springer, 1997.
159. Mandelbrot B.B., Van Ness J.W. Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SI AM Rev.* 1968. № 10, p. 422-437.
160. Miliareisis G.Ch, Argialas D.P. Segmentation of physiographic features from the global digital elevation model / *GTOPO30 // Computers & Geosciences*, 25 (1999). P.P. 715-728.
161. Niemeyer I., Pietronero L., Wiesmann H.J. Fractal dimension of dielectric breakdown // *Phys. Rev. Lett.* 1984. V.52. P. 1033-1040.
162. Podlubny, in: *Fractional differentiation and its applications.* // J. Sabatier, 2005. Springer. Germany. PP.3-18.
163. Sprott J.C. *Chaos and Time-Series Analysis.* Oxford: University Press, 2003.
164. Turcotte D.L. Fractals and fragmentation // *J. Geophys. Res.* 1986. V. 91. P. 1921-1926.
165. Turcotte D.L. Crustal deformation and fractals, a review // *Fractals and dynamic systems an geoscience* / Ed. J.H. Kruhl, 1994. P. 7-23.
166. Richardson L.F. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. - *General Systems Yearbook*, 1961. P. 139-187.
167. Richardson L.F. // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1926. V. 110. P. 709.
168. J.R. Wait and K.P. Spies. Radio propagation over of a surmounted obstacle // *IEEE Transactions on antennas and propagation.* November, 1968. P. 700-705.

169. J.R. Wait and D.A. Hill. Excitation of the HF surface wave by vertical and horizontal antennas // Radio Science. V 14. № 5. Sep.-Oct., 1979. P.775-788.
170. J.R. Wait. VLF radio wave mode conversion for ionosphere depressions // Radio Science. V 26. № 5. Sep.-Oct., 1991. P. 1261-1265.
171. J.R. Wait. Impedance characteristics of electric field the over a conducting half-space // Radio Science. V 4. № 10. July, 1969. P. 971-975.
172. Wu R.S., Aki K. The fractal nature of the inhomogeneities in the lithosphere evidenced from seismic wave scattering // Pure and Appl. Geophys., 1985. V. 123. № 6. P. 805-815.

### СПИСОК ТРУДОВ АВТОРА

1. Адвокатов В.Р., Башкуев Ю.Б., Балханов В.К. Электрические характеристики разных типов лесной среды // Электромагнитные волны и электронные системы, 2012. № 1. С. 47-50.
2. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Дембелов М.Г., Хаптанов В.Б. Пространственная фрактальная характеристика природного материала на примере талой воды из озерного льда // Журнал технической физики, 2012. Т. 82. № 12. С. 112-115.
3. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Моделирование разрядов молнии фрактальной геометрией // Журнал технической физики, 2012. Т. 82. № 12. С. 126-127.
4. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Аналогия между электрическими параметрами неоднородных сред и геометрическими характеристиками фрактальной линии // Журнал технической физики, 2011. № 5. С. 149-152.
5. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Дембелов М.Г., Хаптанов В.Б. Электрические характеристики талой воды из озерного льда // Электромагнитные волны и электронные системы. 2011. № 10. С. 52-54.
6. Балханов В.К., Адвокатов В.Р., Башкуев Ю.Б. Предельный степенной закон частотной характеристики сопротивления ствола живого дерева // Нелинейный мир. 2011. № 5.
7. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Моделирование сопротивления и емкости селенида мышьяка фрактальным методом // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2010. Т. 137. № 3. С. 1-5.
8. Балханов В.К., Адвокатов В.Р., Башкуев Ю.Б. Частотные и пространственные характеристики электрофизических параметров ствола живого дерева // Журнал технической физики, 2010. № 2. С. 146-148.
9. Лухнева О.Ф., Зуев Ф.Л., Балханов В.К. Построение карт неоднородностей топографии на основании фрактальной размерности (на примере Прибайкалья) // Тихоокеанская геология, 2010. № 1. С. 97-102.

10. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Ангараева Л.Х. Фрактальные спектральные характеристики скин-слоя и модуля поверхностного импеданса // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009. № 4. С. 45-48.
11. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Козлов В.И., Муллаяров В.А. Пространственные характеристики излучения разрядов молнии // Журнал технической физики, 2009. Т. 79. № 1. С. 152-155.
12. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальные свойства коэффициента передачи электрически неоднородной радиотрассы // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009. № 1. С. 50-53.
13. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Моделирование фрактальной среды канторовского типа иерархической эквивалентной электрической схемой // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2008. Т.11. №2. 26-30.
14. Балханов В.К. Теорема о мультифрактальной размерности // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2008. № 11. С. 392-394.
15. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Козлов В.И., Муллаяров В.А. Излучение разрядов молнии // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2008. № 11. С. 386-388.
16. Балханов В.К. Фрактальная размерность фрагментов растительности // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2008. № 11. С. 389-392.
17. Балханов В.К., Лухнева О.Ф., Куснер Ю.С., Башкуев Ю.Б. Фрактальная размерность дельты реки Лены и тундровых озер Якутии // География и природные ресурсы, 2008. № 2. С. 153-157.
18. Балханов В.К., Лухнева О.Ф. Временная динамика фрактальной размерности дельты реки Селенги // Нелинейный Мир, 2007. № 10-11. С. 712-715.
19. Балханов В.К. Математические основы фрактального исчисления // Электромагнитные волны и электронные системы, 2007. № 11. С. 21-27.
20. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б., Дембелов М.Г. Частотные зависимости скин-слоя и импеданса фрактальной среды // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2007. № 10. С. 97-100.
21. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальный метод решения задачи распространения земных радиоволн // Электромагнитные волны и электронные системы, 2006. № 6. С. 39-45.
22. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Статистическая теория ветвлений стримерных каналов // Электромагнитные волны и электронные системы, 2005. № 9. С. 35-39.
23. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальная модель частотной зависимости ослабления электромагнитных волн фрагментами растительности // Журнал технической физики, 2005. Т.75. Вып.9. С. 132-135.

24. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Методы измерения фрактальной размерности разветвленных структур // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2005. № 6. С. 342-345.
25. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальный подход к определению ослабления электромагнитных волн фрагментами растительности // Электромагнитные волны и электронные системы, 2005. № 6. С. 29-33.
26. Лухнева О.Ф., Куснер Ю.С., Лухнев А.В., Балханов В.К. Фрактальная характеристика береговой линии озера Байкал и сети водотоков дельты реки Селенги // География и природные ресурсы, 2005. № 4. С. 60-63.
27. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Электрические свойства подстилающей среды с учетом фрактального распределения проводимости // Электромагнитные волны и электронные системы, 2004. № 7. С. 34-38.
28. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальная размерность структуры русловой сети дельты Селенги // Водные ресурсы, 2004. Т.31. № 2. С.165-169.
29. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальная размерность стримерных каналов // Горный информационно – аналитический бюллетень, 2004. № 7. С. 11-13.

#### **ПАТЕНТЫ**

30. Ангархаева Л.Х., Балханов В.К. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2012610143 “Расчет поверхностного импеданса градиентной среды с учетом магнитной проницаемости”– М.: РОСПАТЕНТ, 11.01.2012.
31. Башкуев Ю.Б., Адвокатов В.Р., Балханов В.К. Способ измерения эффективных электрических свойств лесной среды в длинноволновом диапазоне радиоволн и устройство для его осуществления - ПАТЕНТ на изобретение № 2336520 С1 G 01N 22/00, G 01R 27/00. Бюллетень № 29 от 20 октября 2008 г.
32. Ангархаева Л.Х., Балханов В.К. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2008610235 “Импеданс градиентных полупроводящих сред”– М.: РОСПАТЕНТ, 09.01.2008.

#### **МОНОГРАФИИ**

33. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Фрактальные характеристики электромагнитных процессов. – LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. Saarbrücken, Germany, 2011. 203 с. ISBN: 978-3-8443-5827-8
34. Балханов В.К., Башкуев Ю.Б. Основы теории метода поверхностного импеданса. – Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. 100 с.
35. Балханов В.К. Введение в теорию фрактального исчисления. – Улан-Удэ.: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2001. 58 с.

Balkhanov V.K. Bases of fractal geometry and fractal calculation / sci. ed.  
Yu.B. Bashkuev. – Buryat State University Publishing Department,  
2013. – 224 p. ISBN 978-5-9793-0549-3

The monograph is devoted to the mathematical formulation of bases of fractal geometry and mathematical apparatus of fractal calculation. The Cantor's method of measurement of fractal dimension of branched structures is stated. Together with a traditional material some objects widely presented in the nature are considered. The essential attention is paid to electromagnetic processes in fractal environments.

It is intended to experts in the field of mathematics and physics, and also to students of natural-science specialties of higher educational institutions, graduate students and scientists.

Researches are partially supported by the Russian Federal Property Fund a grant No. 12-01-98006 and the integration project of the Siberian Branch of the Russian Academy of Science No. 11

Научное издание

**В. К. БАЛХАНОВ**

**Основы фрактальной геометрии  
и фрактального исчисления**

*В авторской редакции*

Св-во о государственной аккредитации  
№ 1289 от 23 декабря 2011 г.

Подписано в печать 04.03.2013. Формат 60×84 1/16.  
Усл. печ. л. 13,02. Уч.-изд. л. 10,5. Тираж 500. Заказ № 395.

Издательство Бурятского госуниверситета  
670000 г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а  
E-mail: riobsu@gmail.com