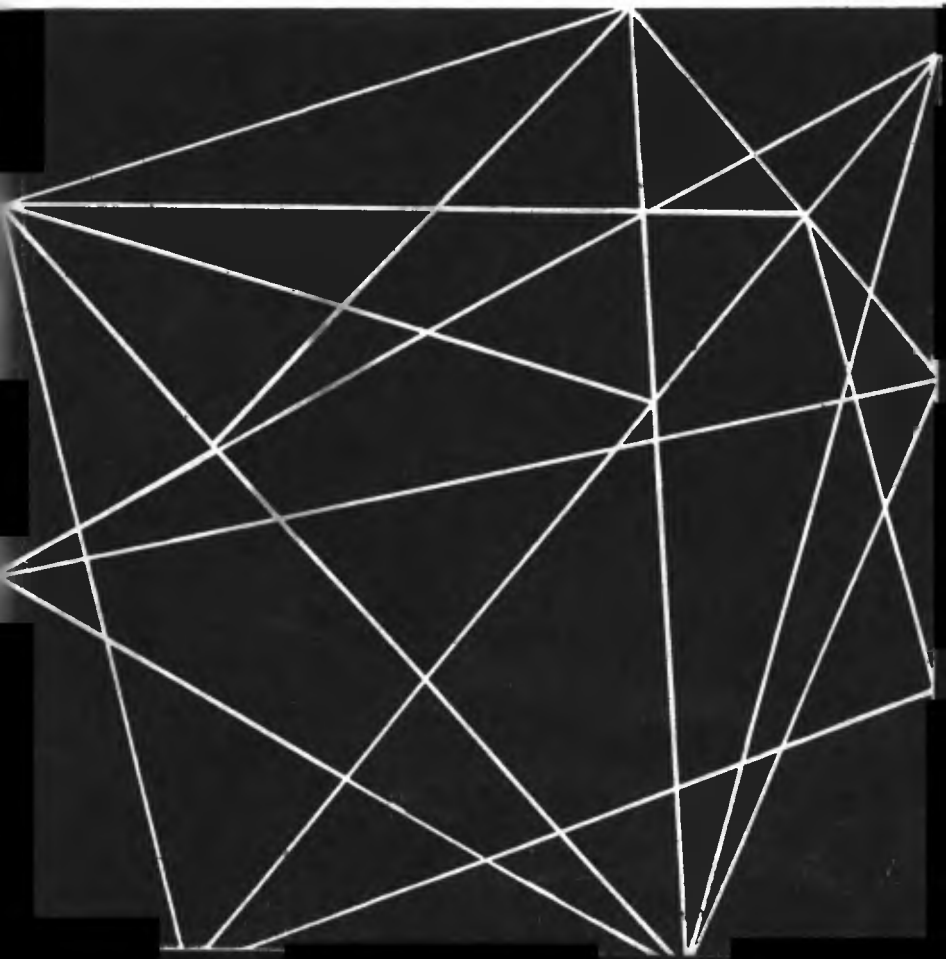
Р. ХАРТСХОРН

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА
ПОПУЛЯРНАЯ СЕРИЯ

ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ



FOUNDATIONS
OF
PROJECTIVE GEOMETRY

by

ROBIN HARTSHORNE

Harvard University

Lecture notes
Harvard University

W. A. BENJAMIN, INC.

New York

1967

«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
Популярная серия

Р. ХАРТСХОРН

Основы проективной геометрии

Перевод с английского
Е. Б. Шабат

Под редакцией
И. М. Яглома

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1970

УДК 515.0

Эта небольшая по объему книга содержит свежее и достаточно современное изложение начал проективной геометрии. На русском языке изданий такого рода нет, поэтому книга Р. Хартсхорна, бесспорно, заполнит ощутимый пробел в литературе по математике для начинающих. Она окажется неоценимой для всех, кто желает без больших затрат времени ознакомиться с основными идеями проективной геометрии.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
31-69

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Созданная в середине XIX столетия проективная геометрия и сегодня сохранила свое значение в качестве важной модели, используемой в самых разных разделах чистой и прикладной математики. Однако лицо этой дисциплины изменилось за последние десятилетия весьма значительно, так что старинные учебники проективной геометрии, использующие архаическую, почти недоступную современному читателю терминологию и зачастую акцентирующие внимание на несущественных деталях геометрического характера, практически уже не могут быть использованы. Советский читатель давно нуждался в компактном изложении идей проективной геометрии в современном ее аспекте, изложении, пригодном для первоначального ознакомления с предметом и рассчитанном не только на геометров, но на гораздо более широкий круг читателей-математиков.

Что же в настоящее время может быть нам особенно интересно в проективной геометрии? Мне кажется, что в первую очередь здесь следует говорить о тех ее сторонах, которые с наибольшей полнотой и даже с известным блеском отражены в лежащей перед вами небольшой книжке, — о глубоком примере чисто дедуктивной науки, развиваемой исходя из довольно скупого списка аксиом, анализирующих единственное понятие «точка принадлежит прямой»; о различных типах «проективных плоскостей», выделяемых теми или иными наборами аксиом (включая сюда и «конечные проективные плоскости» *), вызывающие сегодня

*) См. по этому поводу обстоятельный обзор [16]. [Номера в квадратных скобках отсылают читателя к списку литературы в конце книги.]

огромный интерес не только у «чистых» математиков, но и, скажем, у специалистов по математической теории связи); о связях проективной геометрии с современной алгеброй, громко заявившей о своих правах на эту ветвь математической науки, ранее всегда рассматривавшуюся геометрами как их полноправная вотчина. Все эти глубокие идеи если и не раскрыты до конца, то, во всяком случае, достаточно отчетливо намечены в книге Р. Хартсхорна, построенной весьма продуманно, предельно ясно и кратко, с большим числом выразительных примеров и с четким выделением всех «краеугольных камней» теории (чего стоит одно деление всех сообщаемых в книге фактов на «леммы», «предложения», «теоремы» и «основные теоремы»!). Следует только указать, что при всей ограниченности предполагаемых у читателя предварительных знаний эта книга рассчитана на достаточно внимательное чтение (с карандашом и бумагой) и на решение приложенных в конце книги задач. От начинающего она, бесспорно, потребует некоторого труда; однако можно не сомневаться, что его усилия будут достойно вознаграждены.

По инициативе редактора настоящего издания некоторые разделы, которые могут быть пропущены при первом чтении, напечатаны мелким шрифтом. Кроме того, прибавлены (отсутствующие в оригинале) список аксиом и список обозначений, составленные переводчицей. Немногочисленные подстрочные примечания редактора помечены звездочками в отличие от нумерованных сносок автора; звездочками же выделены в списке литературы те названия, которые отсутствовали в американском издании этой книги.

И. М. Яглом

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга излагает содержание семестрового лекционного курса с тем же названием, прочитанного в Гарварде в 1966/67 учебном году.

Мы параллельно используем два подхода к предмету. При чисто синтетическом подходе мы начинаем с аксиом и, исходя только из них, строим всю теорию чисто дедуктивным образом; так, например, мы даем здесь синтетическое доказательство основной теоремы о проективных преобразованиях прямой, базирующееся на аксиоме Паппа. С другой стороны, мы моделируем действительную проективную плоскость, исходя из ранее известных объектов, причем здесь мы для проверки того или иного утверждения используем методы евклидовой и аналитической геометрии. Эти два подхода излагаются независимо, причем первый из них постепенно обогащается новыми аксиомами, а второй обобщается на случай произвольного поля или тела. В гл. VII вводятся координаты на абстрактной проективной плоскости, что способствует слиянию этих двух подходов.

Особое внимание в этой книге уделяется различным группам преобразований, возникающим в проективной геометрии. Таким образом, читатель на практике овладевает нужными понятиями из теории групп. Никакие предварительные знания по алгебре у читателя не предполагаются, однако все же предварительное ознакомление с теорией групп в объеме, скажем, книги [17] *) окажется полезным.

---

*) Или, скажем, книги [19].

К книге приложен небольшой список задач, которые полезно решать параллельно с изучением теоретической части книги. В конце имеется также небольшой список литературы, в котором перечислено несколько источников, использованных мною при подготовке настоящего курса. Но больше всего я обязан Оскару Зарисскому, у которого одиннадцать лет назад прослушал курс проективной геометрии.

Март 1967 *Р. Хартсхорн*

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ: АФФИННАЯ И ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТИ

Проективная геометрия изучает свойства инцидентности, т. е. те свойства, которые сохраняются при растяжениях, переносах и вращениях плоскости. Поэтому при аксиоматическом построении теории мы вынуждены игнорировать понятия расстояния и угла.

Одним из самых важных примеров в этой книге является действительная проективная плоскость, и здесь мы займемся выяснением того, какие из знакомых нам фактов и методов (относящихся к евклидовой и аналитической геометрии) остаются справедливыми и для проективной плоскости, а какие теряют силу.

Аффинная геометрия

Начнем с некоторых наиболее простых фактов обычной плоской геометрии, которые мы примем в качестве аксиом при синтетическом построении теории.

Определение. *Аффинной плоскостью называют множество элементов, именуемых точками, и систему его подмножеств, именуемых прямыми, причем должны выполняться три формулируемые ниже аксиомы* $A_1 - A_3$.

Мы будем говорить, что «P лежит на l» или «l проходит через P», если точка P есть элемент подмножества (прямой) l.

A_1. *Для любых двух различных точек P и Q существует одна и только одна прямая, проходящая через них.*

Две прямые называются *параллельными*, если они совпадают или не имеют общих точек.

A_2. *Для любых заданных прямой l и точки P существует одна и только одна проходящая через P прямая m, параллельная l.*

A_3. *Существуют три неколлинеарные точки.* (Точки $P_1, \ldots, P_n$ называются *коллинеарными*, если существует такая прямая l, что все эти точки ей принадлежат.)

Обозначения

$P \neq Q$	P не совпадает с Q;
$P \in l$	P принадлежит l;
$l \cap m$	пересечение l и m;
$l \parallel m$	l параллельна m;
$\forall$	для каждого;
$\exists$	существует;
$\Rightarrow$	влечет за собой;
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда.

Пример. Обычная *евклидова плоскость* $\mathbb{R}^2$ удовлетворяет аксиомам $A_1 - A_3$, т. е. является аффинной плоскостью.

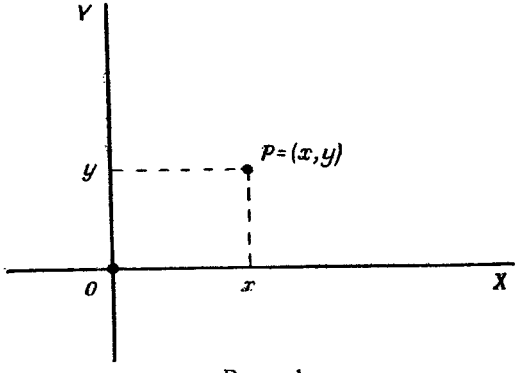


Рис. 1.

На этой плоскости удобно ввести декартовы координаты, как в аналитической геометрии (рис. 1). При этом точка P представится парой (x, y), где x и

y — действительные числа. (Мы будем писать $x, y \in \mathbb{R}$.)

Предложение 1.1. *Параллельность является отношением эквивалентности.*

Определение. *Отношение $\sim$ есть отношение эквивалентности, если имеют место следующие три свойства:*

1° *рефлексивность*: $a \sim a$,
2° *симметричность*: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$,
3° *транзитивность*: $a \sim b$ *и* $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

Доказательство. Нам надо проверить следующие три утверждения:

1° каждая прямая параллельна сама себе (по определению);

2° $l \parallel m \Rightarrow m \parallel l$ (по определению);

3° если $l \parallel m$ и $m \parallel n$, то $n \parallel l$.

Если $l = n$, то доказательства не требуется. Если $l \neq n$ и существует точка $P \in l \cap n$, то прямые l и n обе $\parallel m$ и проходят через P, что невозможно по аксиоме A_2. Отсюда мы заключаем, что $l \cap n = \varnothing$ (пустое множество), т. е. $l \parallel n$.

Предложение 1.2. *Две различные прямые имеют не более одной общей точки.*

Это следует из того, что если две прямые l и m имеют две общие точки P и Q, $P \neq Q$, то $l = m$ по аксиоме A_1.

Пример. Аффинная плоскость имеет по крайней мере четыре различные точки; плоскость, состоящая ровно из четырех точек, существует.

Действительно, в силу A_3 на плоскости есть три неколлинеарные точки; обозначим их через P, Q, R. Согласно A_2, существует прямая l, проходящая через P и параллельная прямой QR, соединяющей Q и R (эта прямая существует по A_1). Точно так же доказывается существование прямой $m \parallel PQ$, проходящей через R.

Покажем теперь, что l не параллельна m ($l \nparallel m$). Если бы это было не так, то мы бы имели

$$PQ \parallel m \parallel l \parallel QR,$$

откуда $PQ \parallel QR$ по предложению 1.1. Но это невозможно, так как $PQ \neq QR$, а Q принадлежит каждой из этих прямых.

Отсюда следует, что l и m пересекаются в некоторой точке S. Так как S принадлежит прямой m, параллельной PQ и не совпадающей с ней, то $S \neq P$ и $S \neq Q$. Точно так же $S \neq R$. Таким образом, четвертая точка S необходимо должна существовать, и наше первое утверждение доказано.

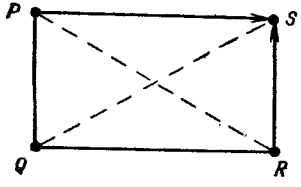


Рис. 2.

Теперь рассмотрим прямые PR и QS. Они могут пересекаться (докажите, например, что это так в случае действительной проективной плоскости). Но они могут и не пересекаться — это не противоречит аксиомам.

В этом случае мы получаем аффинную плоскость, содержащую ровно четыре точки P, Q, R, S и шесть прямых PQ, PR, PS, QR, QS, RS (см. рис. 2). Легко видеть, что аксиомы $A_1 - A_3$ здесь выполняются. Таким образом, мы получили аффинную плоскость, содержащую наименьшее возможное число точек, а именно четыре.

Определение. *Множество прямых образует* пучок, *если*

а) *все прямые этого множества проходят через некоторую точку* P,

б) *либо все прямые множества параллельны некоторой прямой l; в этом случае говорят, что задан пучок параллельных прямых.*

В дальнейшем нам понадобится также следующее

Определение. *Взаимно однозначным соответствием между двумя множествами X и Y называется такое отображение T: $X \to Y$* (т. е. правило T, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие элемент $T(x) = y \in Y$), *что*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow T(x_1) \neq T(x_2)$$

и

$$\forall y \in Y \ \exists x \in X: \ T(x) = y$$

(последнее читается: для каждого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, такой, что $T(x) = y$).

Идеальные точки и проективная плоскость

Теперь пополним аффинную плоскость некоторыми «бесконечными точками» и придем таким образом к понятию проективной плоскости.

Пусть задана аффинная плоскость A. Для каждой прямой $l \in A$ обозначим через $[l]$ пучок параллельных ей прямых и назовем $[l]$ *идеальной* или *бесконечной точкой* направления l. Мы будем записывать это так: $P^* = [l]$.

Определим пополнение S плоскости A следующим образом. *Точками* S являются все точки плоскости A и все идеальные точки A (направления). *Прямыми* S служат

а) обычные прямые l плоскости A, дополненные соответствующими бесконечными точками $P^* = [l]$;

б) «бесконечная прямая», состоящая из всех бесконечных точек плоскости A.

Мы сейчас убедимся, что S есть *проективная плоскость* в смысле следующего определения:

Определение. *Проективной плоскостью S называют множество, элементы которого именуются*

точками, и набор его подмножеств, именуемых прямыми, если при этом выполняются следующие четыре аксиомы.

Π_1. *Через две различные точки P и Q плоскости S можно провести одну и только одну прямую.*

Π_2. *Любые две прямые пересекаются по меньшей мере в одной точке.*

Π_3. *Существуют три неколлинеарные точки.*

Π_4. *Прямая содержит по меньшей мере три точки.*

Предложение 1.3. *Описанное выше пополнение S аффинной плоскости A является проективной плоскостью.*

Доказательство. Проверим выполнение четырех аксиом $\Pi_1 - \Pi_4$.

Π_1. Пусть $P, Q \in S$.

1° Если P и Q — обыкновенные точки плоскости A, то через них можно провести только одну прямую из A. Точки P и Q не принадлежат бесконечной прямой «плоскости» S; поэтому и на S через них можно провести единственную прямую.

2° Если P — обыкновенная точка A, а $Q = [l]$ — идеальная точка, то по аксиоме A_2 существует прямая m, такая, что $P \in m$ и $m \parallel l$, т. е. $m \in [l]$, так что Q принадлежит пополнению прямой m до прямой из S. Прямая m, очевидно, — единственная прямая «плоскости» S, проходящая через P и Q.

3° Если P и Q — идеальные точки, то через них проходит бесконечная прямая множества S и только эта прямая.

Π_2. Пусть заданы прямые l и m.

1°. Если l и m — обыкновенные прямые и $l \nparallel m$, то они пересекаются в некоторой точке из A. Если $l \parallel m$, то они пересекаются в идеальной точке $P^* = [l] = [m]$.

2° Если l — обыкновенная прямая, а m — бесконечная прямая, то они пересекаются в бесконечной точке $P^* = [l]$.

Π_3 непосредственно следует из A_3. Необходимо только проверить, что если P, Q, R неколлинеарны в A, то они не будут коллинеарными и в S. Действительно, в S существует только одна (бесконечная)

прямая, не принадлежащая A, но точки P, Q, R ей не принадлежат.

Π_4. Каждая прямая плоскости A содержит хотя бы две точки (см. задачу 1 в конце книги). Но в S каждая прямая содержит еще и бесконечную точку; поэтому она содержит не менее трех точек.

Примеры. 1. Пополняя аффинную плоскость евклидовой геометрии, мы получим *действительную проективную плоскость*.

2. Пополняя аффинную плоскость из четырех точек, мы получаем проективную плоскость из семи точек.

3. Построим еще один пример проективной плоскости. Пусть $\mathbb{R}^3$ — обыкновенное трехмерное евклидово пространство, и пусть O — некоторая точка из $\mathbb{R}^3$. Обозначим через L множество прямых, проходящих через O.

Точкой в L мы назовем прямую из $\mathbb{R}^3$, проходящую через O, а *прямой* — множество прямых, проходящих через O и лежащих в некоторой плоскости.

Множество L удовлетворяет аксиомам $\Pi_1 - \Pi_4$ (проверка этого предоставляется читателю) и, следовательно, является проективной плоскостью.

Однородные координаты на действительной проективной плоскости

Теперь мы дадим аналитическое определение действительной проективной плоскости. Вернемся к рассмотренному выше примеру с прямыми в $\mathbb{R}^3$. Мы будем представлять точку P из S, соответствующую прямой l, некоторой точкой (x_1, x_2, x_3) прямой l, не совпадающей с точкой O (0, 0, 0) (рис. 3). Числа x_1, x_2, x_3 являются *однородными координатами* точки P. Любая другая точка прямой l имеет координаты $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Таким образом, S есть множество троек (x_1, x_2, x_3) действительных чисел, не все из которых равны нулю, причем

тройки (x_1, x_2, x_3) и (x'_1, x'_2, x'_3) представляют одну и ту же точку из $S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, такое, что $x'_i = \lambda x_i$ при $i = 1, 2, 3$.

Поскольку уравнение плоскости из $\mathbb{R}^3$, проходящей через начало координат O, записывается в виде

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \text{ где не все } a_i = 0,$$

его можно рассматривать также как уравнение прямой из S в однородных координатах.

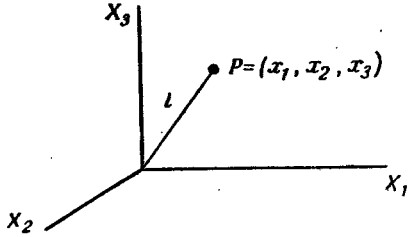


Рис. 3.

Определение. *Две проективные плоскости S и S' называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение T: $S \to S'$, которое переводит коллинеарные точки в коллинеарные.*

Предложение 1.4. *Проективная плоскость S, описанная выше с помощью однородных действительных координат, изоморфна проективной плоскости, полученной пополнением обычной аффинной плоскости евклидовой геометрии.*

Доказательство. Пусть, с одной стороны, дана плоскость S, точки которой задаются однородными координатами (x_1, x_2, x_3), $x_i \in \mathbb{R}$, не все $x_i = 0$. С другой стороны, мы имеем евклидову плоскость A с декартовыми координатами x, y. Обозначим ее пополнение через S'. Точками S' являются 1) точки (x, y), x, $y \in \mathbb{R}$, из A; 2) идеальные точки. Пучок параллельных прямых однозначно определяется угловым коэффициентом m соответствующей прямой, который может быть равен любому действительному числу или ∞. Таким образом, бесконечные точки описываются координатами m.

Теперь мы определим отображение T: $S \to S'$, которое установит изоморфизм S на S'. Пусть $(x_1, x_2, x_3) = P$ — некоторая точка из S.

1° Если $x_3 \neq 0$, то за $T(P)$ мы примем точку из A с координатами $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$. Отметим, что точка $T(P)$ определена однозначно, так как если мы заменим (x_1, x_2, x_3) на $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, то x и y не изменятся. При этом таким образом мы можем получить любую точку из A. Действительно, точка с координатами (x, y) является образом точки плоскости S с однородными координатами $(x, y, 1)$.

2° Если $x_3 = 0$, то за $T(P)$ мы примем идеальную точку из S' с угловым коэффициентом $m = x_2/x_1$. Заметим, что это отношение всегда имеет смысл, так как x_1 и x_2 оба равняться нулю не могут. При этом снова, если мы заменим $(x_1, x_2, 0)$ на $(\lambda x_1, \lambda x_2, 0)$, то m не изменится. С другой стороны, мы так можем получить любое значение m: если $m \neq \infty$, то мы выбираем точку $T(1, m, 0)$, а если $m = \infty$, то $T(0, 1, 0)$.

Таким образом, T устанавливает взаимно однозначное соответствие между S и S'. Нам остается проверить, что T переводит коллинеарные точки в коллинеарные. Прямая l из S задается уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$$

1° Предположим, что a_1 и a_2 не равны одновременно нулю. Тогда образом точки с координатами $x_1 = \lambda a_2$, $x_2 = -\lambda a_1$, $x_3 = 0$ будет идеальная точка, заданная угловым коэффициентом $m = -a_1/a_2$. Она, очевидно, принадлежит прямой из S', содержащей «конечные» точки — образы точек прямой l.

2° Если $a_1 = a_2 = 0$, то l имеет уравнение $x_3 = 0$. Любая точка из S, принадлежащая этой прямой, переходит в идеальную точку из S'; совокупность таких точек образует бесконечную прямую,

ч. т. д.

Замечание. С этого момента мы не будем различать изоморфные плоскости, рассмотренные в предложении 1.4, и будем называть любую из них *действительной проективной плоскостью*. Это самый важный

пример той аксиоматической теории, которую мы будем развивать в дальнейшем, и мы часто будем иллюстрировать получаемые результаты на этом примере. Более того, теоремы, доказанные для действительной проективной плоскости, будут иногда подсказывать результаты общей аксиоматической теории. Однако, доказывая какую-либо теорему в аксиоматической теории, *мы должны исходить только из аксиом и из ранее доказанных теорем*. Если мы обнаружим, что некое утверждение для действительной проективной плоскости справедливо, то это, несомненно, свидетельствует в пользу данного утверждения, но в принятой нами установке еще не составляет его доказательства.

Отметим также, что если из действительной проективной плоскости удалить произвольную прямую, то получится евклидова (точнее, аффинная) плоскость.

ГЛАВА II

ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

Одним из первых важных результатов проективной геометрии является теорема Дезарга, которая утверждает следующее:

Π_5. (Теорема Дезарга.) *Пусть заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, такие, что прямые AA', BB' и CC', соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в точке O.* (Мы говорим тогда, что эти два треугольника *перспективны с центром в O*.) *Тогда пары соответствующих сторон пересекаются в трех точках $P = AB \cdot A'B'$, $R = BC \cdot B'C'$, $Q = AC \cdot A'C'$, принадлежащих одной прямой* (рис. 4).

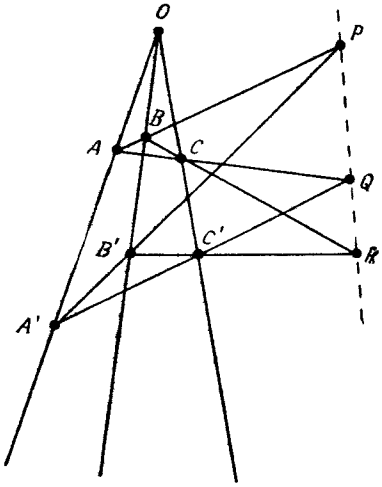


Рис. 4.

Не совсем правильно называть это утверждение «теоремой», потому что его нельзя доказать, исходя только из аксиом $\Pi_1 - \Pi_4$. Однако мы покажем, что оно справедливо на действительной проективной плоскости (и, более того, на любой проективной плоскости, которую можно вложить в *трехмерное проективное пространство*). Затем мы примем это утверждение за аксиому Π_5. Мы покажем на примере, что Π_5

не есть следствие $\Pi_1 - \Pi_4$, а именно, построим геометрию, удовлетворяющую аксиомам $\Pi_1 - \Pi_4$, но не удовлетворяющую Π_5 *).

Определение. *Проективным трехмерным пространством называется множество, элементы которого именуются точками, набор его подмножеств, именуемых прямыми, и некоторый другой набор подмножеств, именуемых плоскостями, если при этом выполняются следующие аксиомы.*

T_1. *Две различные точки принадлежат одной и только одной прямой.*

T_2. *Три неколлинеарные точки принадлежат одной и только одной плоскости.*

T_3. *Прямая и плоскость имеют по меньшей мере одну общую точку.*

T_4. *Две плоскости имеют по меньшей мере одну общую прямую.*

T_5. *Существуют четыре некомпланарные точки, любые три из которых неколлинеарны.*

T_6. *Прямая содержит по меньшей мере три точки.*

Пример. Дополним обычное трехмерное евклидово пространство до проективного трехмерного пространства, аналогично тому, как мы дополнили аффинную плоскость до проективной: каждую плоскость дополним до проективной; бесконечные прямые параллельных плоскостей отождествим (так что бесконечная прямая проективного пространства — это пучок параллельных плоскостей, а бесконечная точка — «связка» параллельных прямых); все бесконечные точки и все бесконечные прямые будем считать принадлежащими одной «бесконечной плоскости». Полученное таким путем пространство мы назовем *действительным проективным трехмерным пространством*. Это же проективное пространство можно описать с помощью однородных координат следующим

*) В связи с этим двойственным характером утверждения Π_5 в дальнейшем оно именуется как «теоремой Дезарга», так и «аксиомой Дезарга».

образом. *Точка* задается четверкой действительных чисел (x_1, x_2, x_3, x_4), не все из которых равны нулю; при этом мы будем считать, что (x_1, x_2, x_3, x_4) и $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \lambda x_4)$ при любом $\lambda \in \mathsf{R}$, $\lambda \neq 0$, задают одну и ту же точку. *Плоскость* определяется линейным уравнением

$$\sum_{i=1}^{4} a_i x_i = 0, \qquad a_i \in \mathsf{R}.$$

Прямая определяется как пересечение двух различных плоскостей. Подробная проверка аксиом предоставляется читателю.

Интересно, что хотя Π_5 и не является следствием $\Pi_1 - \Pi_4$ на проективной плоскости, она вытекает из на первый взгляд не более сложных аксиом трехмерного проективного пространства.

Теорема 2.1. *Теорема Дезарга справедлива в трехмерном проективном пространстве, причем в условии этой теоремы не требуется, чтобы все точки принадлежали одной плоскости. В частности, теорема Дезарга справедлива на любой плоскости, лежащей в трехмерном проективном пространстве.* (В силу задачи 8 такая плоскость является проективной плоскостью.)

Доказательство.

Случай 1. Предположим, что плоскость Σ, содержащая точки A, B, C, не совпадает с плоскостью Σ', содержащей точки A', B', C'. Прямые AB и $A'B'$ принадлежат плоскости, определенной точками O, A, B; следовательно, они пересекаются в некоторой точке P. Точно так же устанавливается, что AC пересекается с $A'C'$ и BC пересекается с $B'C'$. Точки P, Q, R принадлежат и плоскости Σ, и плоскости Σ'; следовательно, они принадлежат пересечению $\Sigma \cap \Sigma'$, т. е. *прямой* (см. задачу 7в).

Случай 2. Предположим, что $\Sigma = \Sigma'$, т. е. вся конфигурация принадлежит одной плоскости (назовем ее Σ). Выберем точку X, не принадлежащую Σ (она существует по T_5). Соединим точку X со всеми точками конфигурации прямыми. Выберем D на XB, отличную от B, и положим $D' = OD \cdot XB'$. (Почему они

пересекаются?) Тогда треугольники ADC и $A'D'C'$ перспективны с центром O и лежат в разных плоскостях. Мы свели случай 2 к случаю 1, откуда по доказанному следует, что точки

$$P' = AD \cdot A'D', \quad Q = AC \cdot A'C', \quad R' = DC \cdot D'C'$$

принадлежат одной прямой. Но эти точки проектируются из точки X в точки P, Q, R плоскости Σ; следовательно, точки P, Q, R коллинеарны.

Замечание. *Конфигурация* теоремы Дезарга, т. е. совокупность фигурирующих в этой теореме 10 точек и 10 прямых, в определенном смысле симметрична. Каждая точка принадлежит трем прямым, и каждая прямая содержит три точки. Поэтому эту конфигурацию можно обозначить символом (10_3). Кроме того, все точки играют одинаковую роль. Любая из десяти точек может быть выбрана в качестве центра перспективы двух треугольников. Группа автоморфизмов этой конфигурации является симметрической группой S_5, образованной подстановками 5 элементов. (Рассмотрите действие любого автоморфизма на пространственный вариант конфигурации. Он переводит пять плоскостей OAB, OBC, OAC, ABC, $A'B'C'$ одну в другую.)

По поводу деталей см. задачи 12—14.

Теперь мы построим пример ***недезарговой проективной плоскости***, т. е. плоскости, удовлетворяющей аксиомам $\Pi_1 - \Pi_4$, но не удовлетворяющей Π_5. Отсюда будет следовать, что Π_5 не вытекает из $\Pi_1 - \Pi_4$.

Определение. *Конфигурацией называют множество элементов, именуемых точками, и набор его подмножеств, именуемых прямыми, если при этом выполняется аксиома*

K_1. ***Две различные точки принадлежат не более чем одной прямой.***

Отсюда следует, что две различные прямые имеют не более одной общей точки.

Примеры. Любая аффинная и любая проективная плоскость являются конфигурациями. Любое множество «точек», не содержащее ни одной прямой, — конфигурация. Набор 10 точек и 10 прямых теоремы Дезарга — тоже конфигурация.

Пусть π_0 — некоторая конфигурация. Мы определим *свободную проективную плоскость* Π, *порожденную* π_0.

Пусть π_1 — новая конфигурация, определенная следующим образом. *Точками* π_1 являются точки π_0. *Прямыми* π_1 являются все прямые π_0; кроме того, каждая пара точек $P_1, P_2 \in \pi_0$, не принадлежащая прямой из π_0, задает новую прямую $\{P_1, P_2\}$ из π_1. Тогда π_1 обладает следующим свойством:

а) *любые две различные точки* π_1 *принадлежат одной прямой.*

Построим теперь π_2, исходя из π_1, следующим образом: *Точками* π_2 служат все точки π_1; кроме того, каждая пара непересекающихся прямых l_1, l_2 задает новую точку $l_1 \cdot l_2$. *Прямыми* π_2 служат прямые π_1, пополненные новыми точками; например, точка $l_1 \cdot l_2$ принадлежит пополненным прямым l_1 и l_2. Тогда π_2 обладает следующим свойством:

б) *любые две различные прямые* π_2 *имеют общую точку*;

однако на π_2 больше не выполняется свойство а).

Продолжим это построение. Для четных n мы построим π_{n+1} из π_n, добавляя к прямым π_n новые прямые; для нечетных n мы построим π_{n+1} из π_n, добавляя к точкам π_n новые точки.

Пусть теперь

$$\Pi = \bigcup_{n=0}^{\infty} \pi_n.$$

Элементы конфигураций π_n мы назовем *точками* Π; далее, *прямой* Π мы назовем подмножество $L \subseteq \Pi$, такое, что $L \cap \pi_n$ есть прямая из π_n для всех достаточно больших n.

Предложение 2.2. *Если* π_0 *содержит по меньшей мере четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой, то* Π — *проективная плоскость.*

Доказательство. Заметим, что π_n удовлетворяет б) для четных n и удовлетворяет а) для нечетных n. Следовательно, на Π выполняются оба свойства а) и б), т. е. Π удовлетворяет Π_1 и Π_2. Если P, Q, R неколлинеарны на π_0, то они также неколлинеарны на Π. Значит, Π_3 тоже выполняется. Читателю предоставляется проверить справедливость Π_4, т. е. показать, что в Π каждая прямая содержит хотя бы три точки.

Определение. *Ограниченной конфигурацией называется конфигурация, у которой каждая точка принадлежит не менее чем трем прямым, а каждая прямая содержит не менее трех различных точек.*

Пример. Конфигурация теоремы Дезарга ограничена.

Предложение 2.3. *Любая конечная ограниченная конфигурация из* Π *содержится в* π_0.

Доказательство. *Уровнем* точки $P \in \Pi$ мы назовем наименьшее $n \geqslant 0$, такое, что $P \in \pi_n$. *Уровнем* прямой $L \subseteq \Pi$ мы назовем наименьшее $n \geqslant 0$, такое, что $L \cap \pi_n$ — прямая.

Пусть Σ — ограниченная конечная конфигурация из Π, и пусть n — максимальный из уровней всех точек и всех прямых из Σ. Предположим, что n — уровень какой-то прямой $l \subseteq \Sigma$ (если максимальный уровень достигается для точки, то доказательство аналогично). Тогда $l \cap \pi_n$ — прямая, а $l \cap \pi_{n-1}$ не является прямой. Если $n = 0$, то все доказано, $\Sigma \subseteq \pi_0$. Предположим, что $n > 0$. Тогда l возникла как прямая, соединяющая две точки из π_{n-1}, не принадлежащие в π_{n-1} одной прямой. Но в Σ уровень всех точек $\leqslant n$, а значит, они принадлежат π_n, т. е. l содержит не более двух таких точек. Полученное противоречие и доказывает наше предложение.

Пример 2.4. Недезаргова проективная плоскость. Пусть π_0 состоит из четырех точек и не содержит ни одной прямой, Π — свободная проективная плоскость, порожденная π_0.

В качестве следствия из предыдущего предложения получаем, что Π бесконечно; следовательно, любая прямая содержит бесконечно много точек. Значит, можно выбрать четыре точки O, A, B, C, любые три из которых неколлинеарны, и затем A' на OA, B' на OB и C' на OC так, что они образуют семь различных точек, причем A', B', C' неколлинеарны. Тогда построим

$$P = AB \cdot A'B', \quad Q = AC \cdot A'C', \quad R = BC \cdot B'C'.$$

Проверьте, что все 10 точек различны. Если теорема Дезарга была бы верна на Π, то P, Q, R принадлежали бы одной прямой, следовательно, эти 10 точек и 10 прямых образовывали бы ограниченную конфигурацию; но тогда она должна была бы содержаться в π_0, а π_0 содержит всего лишь четыре точки.

ГЛАВА III

ОТСТУПЛЕНИЕ: О ГРУППАХ И АВТОМОРФИЗМАХ

Определение. *Группа — это множество G, в котором задана некоторая бинарная операция, называемая умножением и обозначаемая через ab, и выполняются следующие свойства (аксиомы группы).*

G_1. *Ассоциативность: для любых a, b, $c \in G$*

$$(ab)c = a(bc).$$

G_2. *Существует элемент $1 \in G$, такой, что*

$$a1 = 1a = a \quad \text{для всех} \quad a \in G.$$

G_3. *Для каждого $a \in G$ существует элемент $a^{-1} \in G$, такой, что*

$$aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$$

Элемент 1 называется *тождественным* или *единичным* элементом группы. Элемент a^{-1} называется *обратным* к a элементом.

Отметим, что в общем случае произведение ab может отличаться от ba. Мы называем группу *абелевой* или *коммутативной*, если выполняется

G_4. *Для любых a, $b \in G$ имеем $ab = ba$.*

Примеры. 1. Пусть G — множество *подстановок* на произвольном множестве M, т. е. взаимно однозначных отображений M на M. Для любых двух подстановок g_1, $g_2 \in G$ определим произведение $g_1g_2 \in G$ как подстановку, полученную последовательным выполнением сначала g_2, а потом g_1 (т. е. если $x \in M$, то $(g_1 g_2)(x) = g_1(g_2(x))$). Тогда G — группа (проверьте!); мы ее будем обозначать через $\operatorname{Perm} M$.

2. Пусть C — конфигурация. Рассмотрим множество G *автоморфизмов* C, т. е. множество подстановок C, переводящих прямые снова в прямые. Произведением двух автоморфизмов g_1 и g_2 мы назовем автоморфизм g_1g_2, полученный выполнением сначала g_2, а потом g_1. Тогда G — группа; обозначим ее через $\operatorname{Aut} C$.

Определение. *Гомоморфизмом* φ: $G_1 \to G_2$ *называется отображение группы* G_1 *в группу* G_2, *такое, что для любых* $a, b \in G_1$

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b).$$

Гомоморфизм называется изоморфизмом, если это взаимно однозначное отображение G_1 *на* G_2 (т. е. образом $\varphi(G_1)$ группы G_1 служит вся группа G_2).

Определение. *Подгруппой группы* G *называется непустое подмножество* $H \subseteq G$, *такое, что* $ab \in H$ *и* $a^{-1} \in H$ *для любых* $a, b \in H$. (Заметим, что отсюда следует, что $1 \in H$.)

Пример. Пусть $G = \operatorname{Perm} M$ — группа подстановок множества M, и пусть $H = \{g \in G \mid g(x) = x\}$, где $x \in M$ фиксировано. Тогда H — подгруппа группы G.

Определение. *Пусть* G — *группа и* H — *ее подгруппа. Левым классом смежности* G *по* H, *порожденным элементом* $g \in G$, *называется множество*

$$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

Предложение 3.1. *Пусть* H — *подгруппа группы* G *и* gH — *левый класс смежности. Тогда между элементами* H *и* gH *можно установить взаимно однозначное соответствие.* (В частности, если H конечна, то H и gH состоят из одинакового числа элементов.)

Доказательство. Пусть отображение $H \to gH$ таково: $h \to gh$. По определению gH это есть «отображение на». Теперь предположим, что $h_1, h_2 \in H$ имеют один и тот же образ, т. е. что

$$gh_1 = gh_2.$$

Умножая последнее равенство слева на g^{-1}, мы получаем $h_1 = h_2$.

Следствие 3.2. *Пусть G — конечная группа и H — ее подгруппа. Тогда* *)

$\#(G) = \#(H) \cdot$ (число левых классов смежности G по H).

Доказательство. Действительно, по предложению 3.1 все левые классы смежности имеют такое же число элементов, что и H. Если $g \in G$, то $g \in gH$,

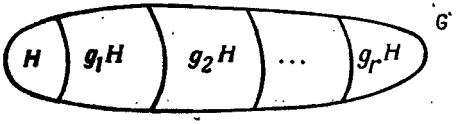


Рис. 5.

так как $g = g \cdot 1$, а $1 \in H$. Таким образом, G есть объединение левых классов смежности H. Наконец отметим, что два класса gH и $g'H$ или совпадают, или не пересекаются. Действительно, предположим, что gH и $g'H$ имеют общий элемент x:

$$x = gh = g'h'.$$

Умножая это равенство справа на h^{-1}, мы получаем

$$g = g'h'h^{-1} \in g'H.$$

Таким образом, для любого $y \in gH$

$$y = gh'' = g'h'h^{-1}h'' \in g'H,$$

откуда $gH \subseteq g'H$. Но, исходя из симметрии, мы заключаем также, что $g'H \subseteq gH$, поэтому gH и $g'H$ совпадают.

Из доказанного сразу же следует требуемое утверждение (см. рис. 5).

Пример. Пусть M — конечное множество, и пусть G — подгруппа группы $\mathrm{Perm}\, M$ подстановок множе-

*) Символ $\#(M)$ означает мощность множества M.

ства M. Пусть $x \in M$ и H — *стационарная подгруппа* элемента $x \in M$, т. е. подгруппа группы G, оставляющая x на месте:

$$H = \{g \in G \mid g(x) = x\}.$$

Для элемента $g \in G$ положим $g(x) = y$. Тогда $g'(x) = y$ для любого $g' \in gH$. Действительно, $g' = gh$ для некоторого $h \in H$, откуда

$$g'(x) = gh(x) = g(x) = y.$$

Обратно, пусть $g'' \in G$ таков, что $g''(x) = y$. Тогда

$$g^{-1}g''(x) = g^{-1}(y) = x,$$

откуда

$$g^{-1}g'' \in H \quad \text{и} \quad g'' = g\, g^{-1}g'' \in gH.$$

Таким образом,

$$gH = \{g' \in G \mid g'(x) = y\}.$$

Отсюда следует, что число левых классов смежности H равно числу точек орбиты x относительно G. (*Орбитой* x называется множество точек $y \in M$, таких, что $y = g(x)$ для некоторого $g \in G$.) Отсюда мы заключаем, что

$$\#(G) = \#(H) \cdot \#(\text{орбита } x).$$

Определение. *Группа* $G \subseteq \operatorname{Perm} M$ *подстановок множества* M *называется* **транзитивной**, *если существует элемент* $x \in M$, *орбита которого совпадает с* M. (При этом, очевидно, орбита **любого** элемента M совпадает с M.)

Таким образом, если G транзитивна, то в рассмотренном выше примере

$$\#(G) = \#(H) \cdot \#(M).$$

Следствие 3.3. *Пусть* M — *множество, состоящее из* n *элементов, и* $G = \operatorname{Perm} M$. *Тогда* $\#(G) = n!$.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по n. Если $n = 1$, то существует только тождественная подстановка и $\#(G) = 1$. Пусть M состоит из $n+1$ элемента и $x \in M$; далее, пусть H — стацио-

нарная подгруппа элемента x. Группа G транзитивна, поэтому найдется подстановка, переводящая x в любой элемент из M, и

$$\#(G) = \#(H) \cdot \#(M) = (n+1) \cdot \#(H).$$

Но H есть группа подстановок оставшихся n элементов множества M, т. е. по индукции $\#(H) = n!$. Таким образом,

$$\#(G) = (n+1)!,$$

ч. т. д.

В дальнейшем мы будем часто встречаться с группой автоморфизмов проективной плоскости и с некоторыми ее подгруппами. В частности, мы покажем, что аксиома Π_5 («теорема Дезарга») эквивалентна утверждению, что группа автоморфизмов «достаточно богата»; в дальнейшем мы уточним, что это значит. Для начала найдем группы автоморфизмов некоторых простых конфигураций.

Автоморфизмы проективной плоскости, состоящей из семи точек

Пусть мы имеем плоскость Π, состоящую из семи точек A, B, C, D, P, Q, R и семи прямых, изображенных на рис. 6. (На этом рисунке видно, как дополнить до плоскости Π аффинную плоскость, состоящую из четырех точек; см. рис. 2 на стр. 12.)

Предложение 3.4. *Группа* $G = \operatorname{Aut}\Pi$ *транзитивна.*

Доказательство. Мы будем записывать элементы G в явном виде; например, запись

$$a = (AC)(BD)$$

означает, что a переставляет A и C, B и D, т. е. что $a(A) = C$, $a(C) = A$; $a(B) = D$, $a(D) = B$. (Вообще, запись $(A_1A_2 \ldots A_r)$ означает, что A_1 переводится в A_2, A_2 в A_3, ..., A_{r-1} в A_r и A_r в A_1.) Умножение таких подстановок определяется как последовательное выполнение всех подстановок справа налево. Пусть

$$b = (AB)(CD).$$

Мы видим, что A можно перевести в B или в C. Теперь подсчитаем

$$ab = (AC)(BD)(AB)(CD) = (AD)(BC)$$

и

$$ba = (AB)(CD)(AC)(BD) = (AD)(BC) = ab.$$

Значит, мы можем перевести также и A в D, т. е. *орбита A содержит элементы B, C и D.*

Рассмотрим еще один автоморфизм

$$c = (BQ)(DR).$$

Мы видим, что орбита A содержит также элементы Q (так как $cb(A) = Q$) и R (так как $cab(A) = R$). Нако-

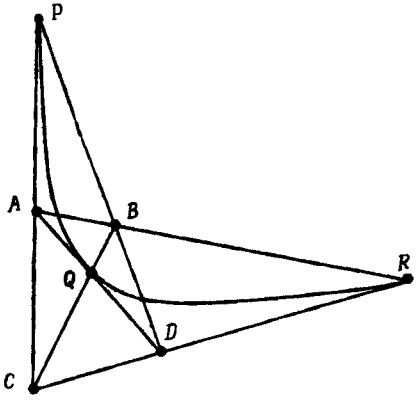


Рис. 6.

нец, из рассмотрения элемента $d = (PA)(BQ)$ группы G следует, что орбита A совпадает с Π, откуда и следует, что группа G транзитивна.

Предложение 3.5. *Пусть $H \subseteq G$ — стационарная подгруппа точки P группы автоморфизмов плоскости Π:*

$$H = \{g \in G \mid g(P) = P\}.$$

Тогда H транзитивна на множестве $\Pi \setminus \{P\}$.

Доказательство. Заметим, что элементы a, b, c, рассмотренные выше, принадлежат H, поэтому ор-

бита A относительно H есть $\{A, B, C, D, Q, R\} = \Pi \setminus \{P\}$.

Теорема 3.6. *Для любых двух заданных троек неколлинеарных точек A_1, A_2, A_3 и A_1', A_2', A_3' плоскости Π существует один и только один автоморфизм Π, переводящий A_1 в A_1', A_2 в A_2' и A_3 в A_3'. Группа G состоит из $7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$ элементов.*

Доказательство. Продолжим наши рассуждения следующим образом. Пусть $K \subseteq H$ — стационарная подгруппа точки Q в группе H:

$$K = \{h \in H \mid h(Q) = Q\}.$$

Но P — тоже неподвижная точка подгруппы K, поэтому и R преобразования из K оставляют на месте. Подгруппа K транзитивна на множестве $\{A, B, C, D\}$, так как $a, b \in K$. С другой стороны, легко видеть, что элемент из K однозначно определяется образом точки A при этом автоморфизме. Таким образом, K состоит из четырех элементов 1, a, b, ab. Из предыдущих рассуждений мы получаем, что

$$\#(G) = \#(H) \cdot \#(\Pi), \qquad \#(H) = \#(K) \cdot \#(\Pi \setminus \{P\}),$$

откуда $\#(G) = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$.

Доказательство первого утверждения мы проведем в три этапа.

1° G — транзитивная группа, поэтому мы можем найти такое $g \in G$, что

$$g(A_1) = A_1'.$$

2° В силу транзитивности G мы можем найти также такое $g_1 \in G$, что

$$g_1(P) = A_1.$$

Тогда

$$gg_1(P) = A_1'.$$

Мы предположили, что $A_1 \neq A_2$ и $A_1' \neq A_2'$. Поэтому точки

$$g_1^{-1}(A_2) \quad \text{и} \quad (gg_1)^{-1}(A_2')$$

не совпадают с P. Но H транзитивна на $\Pi \setminus \{P\}$. Поэтому существует такой элемент $h \in H$, что

$$h(g_1^{-1}(A_2)) = (gg_1)^{-1}(A_2').$$

Легко видеть, что для

$$g' = gg_1hg_1^{-1}$$

мы имеем

$$g'(A_1) = A_1', \quad g'(A_2) = A_2'.$$

3° В п. 2° мы показали, что любые две различные точки плоскости Π можно перевести в любые две различные точки. Мы будем писать g вместо g', т. е. положим

$$g(A_1) = A_1' \quad \text{и} \quad g(A_2) = A_2'.$$

Выберем $g_1 \in G$ так, что

$$g_1(P) = A_1, \quad g_1(Q) = A_2.$$

Это можно сделать, как в п.2°. Из того, что A_1, A_2, A_3 неколлинеарны и A_1', A_2', A_3' неколлинеарны, следует, что P, Q и любая из точек

$$g_1^{-1}(A_3), \quad (gg_1)^{-1}(A_3')$$

неколлинеарны. Последние две точки содержатся в множестве $\{A, B, C, D\}$. Таким образом, существует такой элемент $k \in K$, что

$$k(g_1^{-1}(A_3)) = (gg_1)^{-1}(A_3').$$

Легко видеть, что $g' = gg_1kg_1^{-1}$ и есть искомый элемент группы G:

$$g'(A_1) = A_1', \quad g'(A_2) = A_2', \quad g'(A_3) = A_3'.$$

Для доказательства единственности этого элемента мы сосчитаем количество троек неколлинеарных точек на Π. Первую точку можно выбрать семью, вторую — шестью, а третью — четырьмя способами. Таким образом, всего существует 168 таких троек. Но порядок группы G тоже равен 168; поэтому существует точно одно отображение, переводящее

заданную тройку точек в другую заданную тройку точек,

ч. т. д.

Автоморфизмы аффинной плоскости, состоящей из девяти точек

Аналогичный анализ аффинной плоскости, состоящей из девяти точек (рис. 7), показывает, что группа ее автоморфизмов

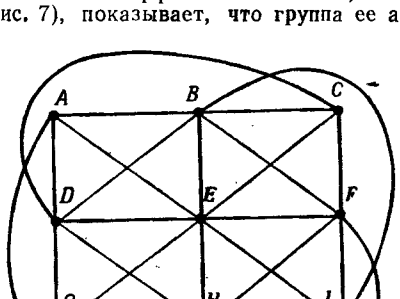


Рис. 7.

имеет порядок $9 \cdot 8 \cdot 6 = 432$, причем и здесь *любые три неколлинеарные точки с помощью элемента группы автоморфизмов можно единственным образом перевести в любые три другие неколлинеарные точки.*

Замечание. В доказательстве теоремы 3.6 достаточно показать, что существует единственный автоморфизм, переводящий P, Q, A в заданную тройку A_1, A_2, A_3 неколлинеарных точек: ведь в таком случае тройку точек A_1, A_2, A_3 можно заменить на A'_1, A'_2, A'_3, а потом рассмотреть композицию автоморфизма, обратного первому, и второго автоморфизма. Этот прием позволяет значительно упростить доказательство.

Автоморфизмы действительной проективной плоскости

Рассмотрим теперь еще один важный пример автоморфизмов проективной плоскости. Напомним определение действительной проективной плоскости: *точка* в однородных координатах (x_1, x_2, x_3) задается тройкой действительных чисел, не равных нулю одно-

временно, причем (x_1, x_2, x_3) и $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ задают одну и ту же точку при любом $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$. *Прямой* называется множество точек, удовлетворяющих уравнению вида (a_1, a_2, a_3 не обращаются в нуль одновременно)

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \qquad a_i \in \mathbb{R}.$$

Краткие сведения по теории матриц. *Действительной квадратной матрицей порядка n* или *$(n \times n)$-матрицей над* $\mathbb{R}$ называется набор n^2 действительных чисел, снабженных двумя индексами, например i, j, каждый из которых принимает значения от 1 до n, т. е. $A = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nn}\}$. Матрица обычно записывается в виде квадратной таблицы:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Здесь первый индекс показывает номер строки, а второй индекс — номер столбца.

Произведение двух матриц (порядка n) определяется так:

$$A \cdot B = C, \quad \text{где} \quad C = (c_{ij}) \quad \text{и} \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \begin{array}{cc} & j \\ & \begin{pmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \end{array} i$$

где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

Введем еще функцию det, отображающую множество $(n \times n)$-матриц на $\mathbb{R}$ и характеризующуюся следующими двумя свойствами *).

*) См. замечание в конце гл. VIII (стр. 143).

D_1. *Для любых двух матриц* A, B

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

D_2. *Для любого* $a \in \mathbb{R}$ *положим*

$$C(a) = \begin{pmatrix} a & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix};$$

тогда

$$\det C(a) = a.$$

Число $\det A$ называется *детерминантом* матрицы A.

Отметим, что единичная матрица $I = C(1)$ ведет себя как мультипликативная единица. Можно также доказать следующие утверждения.

1° $$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C),$$

т. е. умножение матриц ассоциативно (однако, вообще говоря, не коммутативно).

2° Матрица A имеет обратную A^{-1} тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0$.

Следовательно, множество $(n \times n)$-матриц A, таких, что $\det A \neq 0$, образует группу относительно операции умножения матриц; эту группу мы будем обозначать через $GL(n, \mathbb{R})$ (*полная линейная группа порядка* n).

3° Пусть задана матрица $A = (a_{ij})$. Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{gathered}$$

Если $\det A \neq 0$, то эта система уравнений имеет решение. Обратно, если наша система уравнений имеет решение при любом наборе $b_1, \ldots, b_n$, то $\det A \neq 0$.

Доказательства этих утверждений можно найти в любом учебнике алгебры; мы будем считать их известными и в дальнейшем будем пользоваться ими без пояснений.

Примечание. Легко показать, что 3° следует из 1° и 2°, так как если $x_1, \ldots, x_n$ — решение системы линейных уравнений, то

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & 0 \\ \cdot & & \\ x_n & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & 0 \\ \cdot & & \\ b_n & & \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь задана действительная (3×3)-матрица $A = (a_{ij})$, и пусть Π — действительная проективная плоскость с однородными координатами x_1, x_2, x_3. Определим преобразование T_A плоскости Π следующим образом: точка (x_1, x_2, x_3) переходит в точку

$$T_A(x_1, x_2, x_3) = (x_1', x_2', x_3'),$$

где

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3,$$
$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3,$$
$$x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

Предложение 3.7. *Если A есть действительная (3×3)-матрица и $\det A \neq 0$, то преобразование T_A — автоморфизм действительной проективной плоскости* Π.

Доказательство.

1° Если мы заменим (x_1, x_2, x_3) на $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, то (x_1', x_2', x_3') заменяется на $(\lambda x_1', \lambda x_2', \lambda x_3')$, т. е. отображение T_A корректно определено на Π. Мы еще должны проверить, что x_1', x_2', x_3' не равны нулю одновременно. Действительно, в матричных обозначениях мы имеем

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix},$$

где $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ обозначает матрицу $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Но $\det A \neq 0$; поэтому A имеет обратную матрицу A^{-1}. Умножая последнее равенство слева на A^{-1}, мы получаем

$$(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x}')$$

(где *вектор* $(\mathbf{x})$ обозначает вектор-столбец $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ и т. д.).

Если все $x_i' = 0$, то и все $x_i = 0$, что невозможно. Таким образом, T_A есть корректно определенное отображение плоскости П в П.

2° Равенство $(\mathbf{x}) = A^{-1}(\mathbf{x}')$ показывает, что $T_{A^{-1}}$ есть обратное к T_A отображение, поэтому T_A есть взаимно однозначное (сюръективное *)) отображение П на П.

3° Наконец, мы должны проверить, что T_A переводит прямые в прямые. Действительно, пусть задано уравнение прямой

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0. \qquad (*)$$

Мы должны найти другую прямую, такую, что образ любой точки (x_1, x_2, x_3), удовлетворяющей уравнению (*), принадлежит этой прямой. Пусть $A^{-1} = (b_{ij})$ и (x_1', x_2', x_3') — образ точки (x_1, x_2, x_3). Тогда

$$x_i = \sum b_{ij}x_j' \quad \text{для любого} \quad i.$$

Если (x_1, x_2, x_3) удовлетворяет уравнению (*), то (x_1', x_2', x_3') удовлетворяет уравнению

$$c_1\left(\sum b_{1j}x_j'\right) + c_2\left(\sum b_{2j}x_j'\right) + c_3\left(\sum b_{3j}x_j'\right) = 0,$$

или

$$\left(\sum c_ib_{i1}\right)x_1' + \left(\sum c_ib_{i2}\right)x_2' + \left(\sum c_ib_{i3}\right)x_3' = 0.$$

Это и есть уравнение искомой прямой.

Нам остается только проверить, что три коэффициента

$$c_j' = \sum c_ib_{ij}, \quad \text{где} \quad j = 1, 2, 3, \qquad (**)$$

---

*) Отображение φ: $M \to N$ называется *сюръективным*, если оно есть отображение «на», т. е. если совокупность $\varphi(M)$ образов элементов множества M совпадает со всем множеством N.

не равны нулю одновременно. Это доказывается так же, как и в п. 1°. Равенство (**) означает, что

$$(c_1, c_2, c_3) \cdot A^{-1} = (c_1', c_2', c_3'),$$

где

$$(c_1, c_2, c_3) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение на A справа покажет, что c_i можно выразить через c_i'. Поэтому, если бы все c_i' были равны нулю одновременно, то и все c_i были бы равны нулю одновременно, а это невозможно, так как (*) — уравнение прямой действительной проективной плоскости П.

Следовательно, T_A — автоморфизм плоскости П.

Предложение 3.8. *Пусть заданы две действительные* (3×3)*-матрицы* A *и* A', *причем* $\det A \neq 0$ *и* $\det A' \neq 0$. *Автоморфизмы* T_A *и* $T_{A'}$ *плоскости* П *совпадают тогда и только тогда, когда существует действительное число* $\lambda \neq 0$, *такое, что* $A' = \lambda A$, *т. е.* $a_{ij}' = \lambda a_{ij}$ *для всех* i, j.

Доказательство. Очевидно, что если такое λ существует, то $T_A = T_{A'}$, так как при замене T_A на $T_{A'}$ x_i' просто умножаются на λ.

Обратно, пусть $T_A = T_{A'}$. Мы изучим действие T_A и $T_{A'}$ на четыре специально выбранные точки П, а именно на (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) и (1, 1, 1); обозначим их через P_1, P_2, P_3 и Q. Очевидно,

$$T_A(P_1) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

и

$$T_{A'}(P_1) = A' \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}' \\ a_{21}' \\ a_{31}' \end{pmatrix}.$$

По условию эти два набора координат задают одну и ту же точку П, т. е. существует такое $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq 0$, что

$$a'_{11} = \lambda_1 a_{11}, \quad a'_{21} = \lambda_1 a_{21}, \quad a'_{31} = \lambda_1 a_{31}.$$

Аналогично, применяя T_A и $T_{A'}$ к точкам P_2 и P_3, мы найдем числа $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ и $\lambda_3 \in \mathbb{R}$, оба отличные от нуля и такие, что

$$\begin{aligned} a'_{12} &= \lambda_2 a_{12}, & a'_{13} &= \lambda_3 a_{13}, \\ a'_{22} &= \lambda_2 a_{22}, & a'_{23} &= \lambda_3 a_{23}, \\ a'_{32} &= \lambda_2 a_{32}, & a'_{33} &= \lambda_3 a_{33}. \end{aligned}$$

Применяя теперь T_A к точке Q, находим

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{pmatrix}$$

и аналогично для преобразования $T_{A'}$. Но

$$T_A(Q) = T_{A'}(Q),$$

поэтому существует такое действительное число $\mu \neq 0$, что

$$T_{A'}(Q) = \mu \cdot T_A(Q).$$

Используем, наконец, все полученные равенства:

$$\begin{aligned} a_{11}(\lambda_1 - \mu) + a_{12}(\lambda_2 - \mu) + a_{13}(\lambda_3 - \mu) &= 0, \\ a_{21}(\lambda_1 - \mu) + a_{22}(\lambda_2 - \mu) + a_{23}(\lambda_3 - \mu) &= 0, \\ a_{31}(\lambda_1 - \mu) + a_{32}(\lambda_2 - \mu) + a_{33}(\lambda_3 - \mu) &= 0. \end{aligned}$$

Это означает, что точка $(\lambda_1 - \mu, \lambda_2 - \mu, \lambda_3 - \mu)$ переходит в $(0, 0, 0)$, откуда следует, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu.$$

(Мы уже видели выше, что ненулевая тройка чисел не может с помощью преобразования T_A перейти в $(0, 0, 0)$; поэтому $\lambda_1 - \mu = 0$, $\lambda_2 - \mu = 0$, $\lambda_3 - \mu = 0$.) Таким образом, $A' = \lambda A$, где

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \mu,$$

ч. т. д.

Определение. *Проективной полной линейной группой порядка 2 над* $\mathbb{R}$, $PGL(2, \mathbb{R})$, *называется группа всех автоморфизмов* T_A *плоскости* Π, *где* A — *некоторая* (3×3)-*матрица и* $\det A \neq 0$.

Элемент группы $PGL(2, \mathbb{R})$ представляется (3×3)-матрицей $A = (a_{ij})$ действительных чисел, где $\det A \neq 0$, причем две матрицы A и A' задают один и тот же элемент группы тогда и только тогда, когда существует действительное число $\lambda \neq 0$, такое, что $A' = \lambda A$.

Теорема 3.9. *Пусть* A, B, C, D *и* A', B', C', D' — *две четверки точек действительной проективной плоскости* Π, *любые три из которых неколлинеарны. Тогда существует единственный автоморфизм* $T \in PGL(2, \mathbb{R})$, *такой, что*

$$T(A) = A', \quad T(B) = B', \quad T(C) = C', \quad T(D) = D'.$$

Доказательство. Пусть P_1, P_2, P_3, Q — четыре рассмотренные выше точки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 1)$. Ясно, что достаточно доказать теорему для случая $(A, B, C, D) = (P_1, P_2, P_3, Q)$. Действительно, предположим, что мы можем перевести четверку P_1, P_2, P_3, Q в любую другую. Пусть φ переводит P_1, P_2, P_3, Q в A, B, C, D, а ψ переводит P_1, P_2, P_3, Q в A', B', C', D'. Тогда отображение $\psi\varphi^{-1}$ переводит A, B, C, D в A', B', C', D'.

Зададим точки A, B, C, D их однородными координатами (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) и (d_1, d_2, d_3). Нам надо найти матрицу $T = (t_{ij})$, где $\det T \neq 0$, и действительные числа λ, μ, ν, ρ, такие, что

$$\begin{aligned}
&T(P_1) = A, \quad \text{т. е.} \quad \lambda a_i = t_{i1} && (i = 1, 2, 3),\\
&T(P_2) = B, \quad \text{т. е.} \quad \mu b_i = t_{i2} && (i = 1, 2, 3),\\
&T(P_3) = C, \quad \text{т. е.} \quad \nu c_i = t_{i3} && (i = 1, 2, 3),\\
&T(Q) = D, \quad \text{т. е.} \quad \rho d_i = t_{i1} + t_{i2} + t_{i3} && (i = 1, 2, 3).
\end{aligned}$$

Очевидно, достаточно положить $\rho = 1$ и найти $\lambda, \mu, \nu \neq 0$, такие, что

$$\begin{aligned}
\lambda a_1 + \mu b_1 + \nu c_1 &= d_1,\\
\lambda a_2 + \mu b_2 + \nu c_2 &= d_2,\\
\lambda a_3 + \mu b_3 + \nu c_3 &= d_3.
\end{aligned}$$

Далее нам понадобится следующая

Лемма 3.10. *Три точки A, B, C плоскости Π с координатами (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3) коллинеарны тогда и только тогда, когда*

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Доказательство леммы. Точки A, B, C коллинеарны тогда и только тогда, когда существует прямая, уравнению (h_1, h_2, h_3 не обращаются в нуль одновременно)

$$h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 = 0$$

которой удовлетворяют координаты точек A, B, C. Мы видели, что $\det(a_{ij}) \neq 0$ тогда и только тогда, когда для любого набора чисел (b_i) соответствующая система линейных уравнений имеет единственное решение (см. стр. 35). Отсюда следует, что $\det(a_{ij}) = 0$ тогда и только тогда, когда при $b_i = 0$ система уравнений имеет нетривиальное, т. е. ненулевое, решение. Пусть h_i — решение такой системы. Значит,

$\exists$ ненулевое решение $\Leftrightarrow$ рассмотренный выше детерминант равен нулю.

Доказательство теоремы (продолжение). В нашем случае точки A, B, C неколлинеарны, откуда по лемме

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0$$

(см. замечание ниже). Отсюда следует, что мы можем решить рассмотренную выше систему относительно λ, μ, ν. Мы утверждаем, что при этом ни одно из λ, μ, ν не равно нулю. В самом деле, предположим, что $\lambda = 0$. Тогда из наших уравнений следует, что

$$\mu b_1 + \nu c_1 - 1 \cdot d_1 = 0,$$
$$\mu b_2 + \nu c_2 - 1 \cdot d_2 = 0,$$
$$\mu b_3 + \nu c_3 - 1 \cdot d_3 = 0;$$

поэтому и

$$\det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix} = 0,$$

что невозможно по лемме, так как точки B, C, D неколлинеарны.

Замечание. Мы использовали тот факт, что детерминант транспонированной матрицы равен детерминанту исходной матрицы. *Транспонированной* к $A=(a_{ij})$ матрицей называется матрица $A^T=(a_{ji})$, которая получается из A симметрией относительно главной диагонали. Легко видеть, что

$$(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$A \to \det(A^T),$$

отображающую множество матриц на множество действительных чисел. Эта функция удовлетворяет условиям D_1, D_2 (см. стр. 35), поэтому она совпадает с детерминантом:

$$\det A = \det(A^T).$$

Таким образом, мы нашли λ, μ, ν, $\lambda\mu\nu \neq 0$, которые удовлетворяют указанным выше уравнениям. Определим теперь t_{ij} следующими равенствами:

$$\lambda a_i = t_{i1}, \quad \mu b_i = t_{i2}, \quad \nu c_i = t_{i3}.$$

Числа (t_{ij}) образуют матрицу T, причем $\det T \neq 0$ (здесь мы опять используем лемму, так как точки A, B, C неколлинеарны!); поэтому T есть элемент группы $PGL(2, \mathbb{R})$, который переводит P_1, P_2, P_3, Q в A, B, C, D.

Для доказательства единственности предположим, что существуют два элемента T и T' группы $PGL(2, \mathbb{R})$, которые удовлетворяют требуемому условию. В таком случае, согласно доказательству предложения 3.8, матрицы (t_{ij}) и (t'_{ij}), определяющие T и T', отличаются лишь на скалярный множитель, т. е. задают один и тот же элемент группы $PGL(2, \mathbb{R})$, ч. т. д.

Нам известно, что $PGL(2, \mathbb{R})$ — подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,\Pi$ автоморфизмов действительной проективной

плоскости. Следующая важная теорема заключается в том, что в действительности эти две группы совпадают:

$$PGL(2, \mathbb{R}) = \operatorname{Aut} \Pi.$$

Однако доказательство этой теоремы потребует некоторых предварительных соображений.

Определение. *Полем называется множество F с заданными в нем двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$, для которых выполняются следующие свойства* (аксиомы поля).

P_1. $a+b=b+a$, $\forall a, b \in F$.

P_2. $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a, b, c \in F$.

P_3. $\exists 0 \in F$, *такой, что* $a+0=0+a=a$, $\forall a \in F$.

P_4. $\forall a \in F$ $\exists(-a) \in F$, *такой, что* $a+(-a)=0$.

(Иными словами, F *образует коммутативную* (*абелеву*) *группу по сложению.*)

P_5. $ab=ba$, $\forall a, b \in F$.

P_6. $a(bc)=(ab)c$, $\forall a, b, c \in F$.

P_7. $\exists 1 \in F$, *такой, что* $a \cdot 1=a$, $\forall a \in F$.

P_8. $\forall a \neq 0$, $a \in F$, $\exists a^{-1}$, *такой, что* $aa^{-1}=1$.

(Таким образом, *ненулевые элементы поля образуют абелеву группу по умножению*[1].)

P_9. $a(b+c)=ab+ac$, $\forall a, b, c \in F$.

Определение. *Автоморфизмом поля F называется взаимно однозначное отображение σ поля F на F, $a \to a^\sigma$, такое, что при этом выполняются следующие условия:*

$$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma, \quad (ab)^\sigma = a^\sigma b^\sigma, \quad \forall a, b \in F.$$

(Отсюда следует, что $0^\sigma=0$, $1^\sigma=1$.)

Предложение 3.11. *Пусть φ — произвольный автоморфизм действительной проективной плоскости*

[1]) Естественно предположить, что $0 \neq 1$.

с неподвижными точками $P_1=(1, 0, 0)$, $P_2=(0, 1, 0)$, $P_3=(0, 0, 1)$, $Q=(1, 1, 1)$ (см. рис. 8). (Мы не требуем, чтобы φ можно было задать некоторой матрицей.) *Тогда существует такой автоморфизм* σ *поля действительных чисел, что*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3)=(x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$$

для каждой точки $(x_1, x_2, x_3)\in\Pi$.

Доказательство. Заметим, что φ переводит прямую $x_3=0$ в себя, так как эта прямая содержит точки P_1

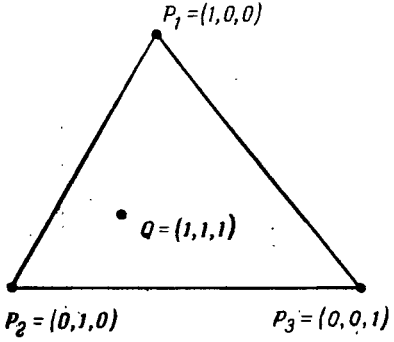


Рис. 8.

и P_2. Примем эту прямую за бесконечную и рассмотрим аффинную плоскость $x_3\neq 0$

$$A=\Pi\setminus\{x_3=0\}.$$

Автоморфизм φ переводит A в себя; значит, он является также автоморфизмом и аффинной плоскости A. Введем аффинные координаты $x=x_1/x_3$, $y=x_2/x_3$. Так как преобразование φ оставляет на месте точки P_1 и P_2, оно переводит горизонтальные прямые в горизонтальные, а вертикальные в вертикальные. (Здесь мы считаем координатные оси X и Y расположенными «как обычно», см. рис. 9.) Кроме того, φ оставляет неподвижными точки $P_3=(0, 0)$ и $Q=(1, 1)$, следовательно, оставляет неподвижными оси координат X и Y.

Рассмотрим точку $(a, 0)$, принадлежащую оси X. Точка $\varphi(a, 0)$ тоже принадлежит оси X; поэтому ее можно записать в виде $(a^\sigma, 0)$, где $a^\sigma \in \mathbb{R}$. Таким образом, мы определили отображение

$$\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

очевидно, такое, что $0^\sigma = 0$ и $1^\sigma = 1$.

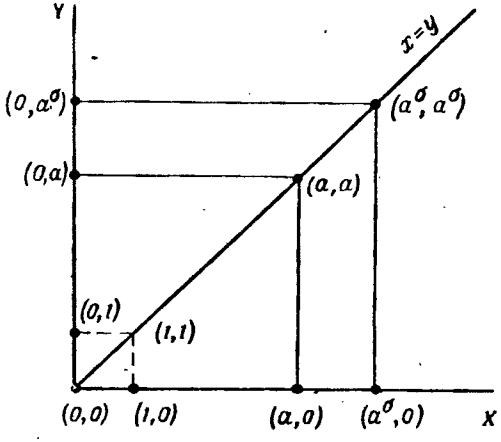


Рис. 9.

Прямая $x = y$ переходит в себя, так как точки P_3 и Q неподвижны; вертикальные прямые переходят в вертикальные. Следовательно, точка

$$(a, a) = (\text{прямая } x = y) \cdot (\text{прямая } x = a)$$

переходит в точку

$$(a^\sigma, a^\sigma) = (\text{прямая } x = y) \cdot (\text{прямая } x = a^\sigma)$$

(см. рис. 9). Точно так же, горизонтальные прямые переходят в горизонтальные, а ось Y переходит сама в себя, поэтому

$$\varphi(0, a) = (0, a^\sigma).$$

Наконец, рассмотрим произвольную точку (a, b). Изобразив прямые $x=a$ и $y=b$, мы увидим, что

$$\varphi(a, b)=(a^{\sigma}, b^{\sigma}).$$

Следовательно, отображение φ на всей аффинной плоскости вполне определяется уже построенным отображением σ: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

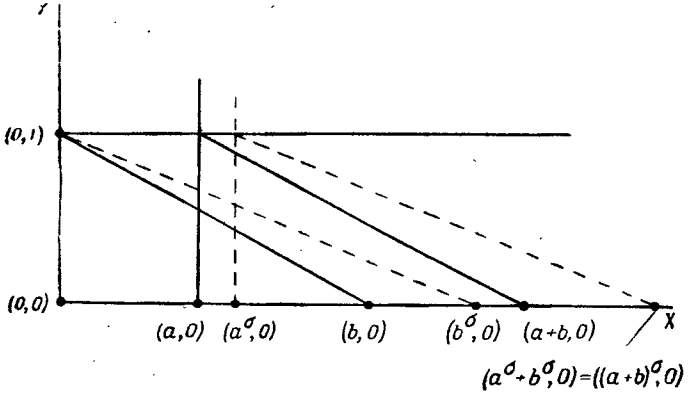


Рис. 10.

Заметим, что так как φ — автоморфизм плоскости A, он отображает ось X на ось X и притом взаимно однозначно; значит, и σ есть взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на себя.

Теперь мы покажем, что σ есть *автоморфизм* $\mathbb{R}$. Пусть $a, b\in\mathbb{R}$; рассмотрим еще точки $(a, 0)$, $(b, 0)$, принадлежащие оси X. Точку $(a+b, 0)$ мы можем построить следующим образом (см. рис. 10):

1° проведем прямую $y=1$;

2° проведем прямую $x=a$;

3° найдем $(a, 1)$ как пересечение прямых 1° и 2°;

4° проведем прямую через точки $(0, 1)$ и $(b, 0)$;

5° проведем через точку $(a, 1)$ прямую, параллельную 4°;

6° найдем пересечение прямой 5° с осью X.

Отображение φ переводит прямую $y=1$ в себя, $x=a$ в $x=a^\sigma$, а точку $(b, 0)$ — в $(b^\sigma, 0)$. Оно сохраняет пересечения и параллельность. Следовательно, φ переводит $(a+b, 0)$ в $(a^\sigma+b^\sigma, 0)$, т. е. $(a+b)^\sigma=a^\sigma+b^\sigma$.

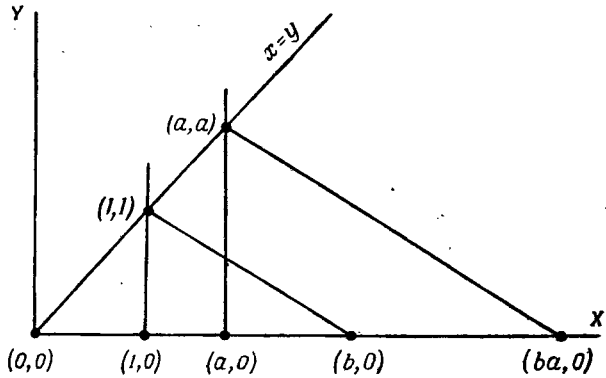


Рис. 11.

С помощью другой конструкции мы построим по точкам $(a, 0)$ и $(b, 0)$ точку $(ab, 0)$ (см. рис. 11):

1° проведем прямую $x=a$;

2° найдем точку пересечения прямой 1° с прямой $x=y$, получим точку (a, a);

3° проведем прямую через точки $(1, 1)$ и $(b, 0)$;

4° через точку (a, a) проведем прямую, параллельную прямой 3°;

5° найдем точку пересечения прямой 4° с осью X.

Так как φ оставляет точку $(1, 1)$ неподвижной, то из построения видно, что $(ab)^\sigma=a^\sigma b^\sigma$.

Следовательно, σ — автоморфизм поля действительных чисел.

Теперь мы вернемся на проективную плоскость Π и изучим действие φ на точку с однородными координатами (x_1, x_2, x_3).

Случай 1: $x_3=0$. Соответствующую точку мы будем представлять себе как пересечение прямой $x_3=0$

(которую φ оставляет на месте) с прямой, соединяющей точки $(0, 0, 1)$ и $(x_1, x_2, 1)$. Последняя точка принадлежит аффинной плоскости A и имеет аффинные координаты (x_1, x_2). Следовательно, при отображении φ ее образом будет точка (x_1^σ, x_2^σ) с однородными координатами $(x_1^\sigma, x_2^\sigma, 1)$. Таким образом, найдя точку пересечения образов рассматриваемых прямых, мы получим $\varphi(x_1, x_2, 0) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, 0)$.

Случай 2: $x_3 \neq 0$. В этом случае точка (x_1, x_2, x_3) принадлежит A и имеет аффинные координаты $x = x_1/x_3$, $y = x_2/x_3$. Значит,

$$\varphi(x, y) = (x^\sigma, y^\sigma) = (x_1^\sigma/x_3^\sigma, x_2^\sigma/x_3^\sigma).$$

Последнее равенство получается из того, что σ — автоморфизм поля действительных чисел и, следовательно, переводит частное двух чисел в частное их образов. Таким образом, $\varphi(x, y)$ имеет однородные координаты $(x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma)$, ч. т. д.

Предложение 3.12. *Единственный автоморфизм поля действительных чисел есть тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Пусть σ — автоморфизм поля действительных чисел. Мы проведем доказательство в несколько шагов.

1° $1^\sigma = 1$, $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$. Отсюда, используя метод математической индукции, легко доказать, что $n^\sigma = n$ для любого целого положительного n.

2° $n + (-n) = 0$; значит, $n^\sigma + (-n)^\sigma = 0$, т. е. $(-n)^\sigma = -n$. Следовательно, σ оставляет на месте все целые числа.

3° Если $b \neq 0$, то $(a/b)^\sigma = a^\sigma/b^\sigma$. Следовательно, σ переводит в себя все рациональные числа.

4° Если $x \in \mathbb{R}$, то

$$x > 0 \Leftrightarrow \text{существует такое } a \neq 0, \text{ что } x = a^2.$$

Но в этом случае $x^\sigma = (a^\sigma)^2$. Следовательно,

$$x > 0 \Rightarrow x^\sigma > 0.$$

Обратно, если $x^\sigma > 0$, то $x^\sigma = b^2$, значит,

$$x = \left(x^\sigma\right)^{\sigma^{-1}} = \left(b^{\sigma^{-1}}\right)^2,$$

так как отображение σ^{-1}, обратное к σ, также есть автоморфизм. Следовательно,

$$x > 0 \Leftrightarrow x^\sigma > 0.$$

Аналогично устанавливается, что

$$x < y \Leftrightarrow x^\sigma < y^\sigma$$

(ибо $x < y \Leftrightarrow x - y < 0$).

5° Пусть задана последовательность $\{a_n\}$ действительных чисел и некоторое действительное число a. Тогда

$$\text{последовательность } \{a_n\} \text{ сходится к } a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \{a_n^\sigma\} \text{ сходится к } a^\sigma.$$

Действительно,

$$\lim a_n = a \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N\colon\ n > N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Но в силу предшествующих результатов последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$\left|a_n^\sigma - a^\sigma\right| < \varepsilon^\sigma.$$

Далее, в определении предела можно ограничиться одними лишь рациональными значениями $\varepsilon > 0$, для которых (см. п. 3°) $\varepsilon^\sigma = \varepsilon$. Отсюда и вытекает наше утверждение.

6° Пусть $a \in \mathbb{R}$ — произвольное действительное число. Тогда можно найти последовательность рациональных чисел $q_n \in \mathbb{Q}$, сходящуюся к a. При этом $q_n^\sigma = q_n$, $\{q_n^\sigma\}$ сходится к a^σ, значит, в силу единственности предела последовательности

$$a = a^\sigma.$$

Следовательно, σ — тождественный автоморфизм, ч. т. д.

Теорема 3.13. $PGL(2, \mathbb{R}) = \operatorname{Aut} \Pi$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой $\varphi \in \operatorname{Aut} \Pi$ содержится в $PGL(2, \mathbb{R})$. Пусть

$$\varphi \in \operatorname{Aut} \Pi, \quad \varphi(P_1) = A, \quad \varphi(P_2) = B, \quad \varphi(P_3) = C, \quad \varphi(Q) = D.$$

Выберем $T \in PGL(2, \mathbb{R})$, такое, что

$$T(P_1) = A, \quad T(P_2) = B, \quad T(P_3) = C, \quad T(Q) = D$$

(это возможно по теореме 3.9). Тогда $T^{-1}\varphi$ — автоморфизм Π, который оставляет P_1, P_2, P_3, Q на месте. Следовательно, по предложению 3.10 его можно записать в виде

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma),$$

где σ — некоторый автоморфизм $\mathbb{R}$. Но по предложению 3.12 σ — тождественное отображение, значит, и $T^{-1}\varphi$ — тождественное отображение, и следовательно,

$$\varphi = T \in PGL(2, \mathbb{R}),$$

ч. т. д.

Отметим, что специфические свойства действительных чисел мы использовали только при доказательстве предложения 3.11. Все остальные рассуждения справедливы в случае произвольного поля; эту более общую ситуацию мы рассмотрим в гл. VI.

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СИНТЕТИЧЕСКАЯ ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теперь займемся изучением свойств проективной плоскости, вытекающих из аксиом $\Pi_1-\Pi_4$ (а иногда и Π_5, Π_6, Π_7, о которых речь пойдет впоследствии).

Предложение 4.1. *Пусть* Π — *проективная плоскость,* Π^* — *множество прямых плоскости* Π; *назовем еще пучок прямых плоскости* Π *прямой* из* Π^*. (Здесь Π^* — это множество элементов из Π, называемых *прямыми*; *пучком прямых* называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую фиксированную точку — *центр пучка.*) *Тогда* Π^* *тоже является проективной плоскостью* (мы назовем ее *двойственной к* Π проективной плоскостью); *при этом, если* Π *удовлетворяет аксиоме* Π_5, *то и* Π^* *ей удовлетворяет.*

Доказательство. Мы должны проверить справедливость для Π^* (элементы множества Π^* мы будем называть «точки*») аксиом $\Pi_1-\Pi_4$. Обозначим их через $\Pi_1^*, \ldots, \Pi_4^*$, чтобы отличать от $\Pi_1-\Pi_4$. Кроме того, требуется доказать, что $\Pi_5 \Rightarrow \Pi_5^*$.

Π_1^*. *Пусть* P^*, Q^* — *две различные точки** «плоскости» Π^*; *тогда существует единственная прямая* из* Π^*, *содержащая* P^* *и* Q^*.

В терминах плоскости Π утверждение Π_1^* означает, что для любых двух различных прямых l, m плоскости Π существует единственный пучок прямых, содержащий l и m, т. е. что l и m имеют единственную общую точку; это следует из Π_1 и Π_2.

Π_2^*. *Любые две прямые** l^*, m^* *«плоскости»* Π^* *имеют по меньшей мере одну общую точку.*

В терминах плоскости П это означает, что два пучка прямых имеют по крайней мере одну общую прямую, но последнее следует из $П_1$.

$П_3^*$. *Существуют три неколлинеарные точки* «плоскости» П*.*

Это означает, что существуют три *не сходящиеся* прямые плоскости П, т. е. прямые, не проходящие через одну точку. По $П_3$ на П существуют три неколлинеарные точки A, B, C. Легко установить, что прямые AB, AC, BC не принадлежат одному пучку.

$П_4^*$. *Любая прямая* «плоскости» П* содержит по меньшей мере три различные точки*.*

Это значит, что любой пучок прямых плоскости П содержит хотя бы три прямые. Рассмотрим пучок

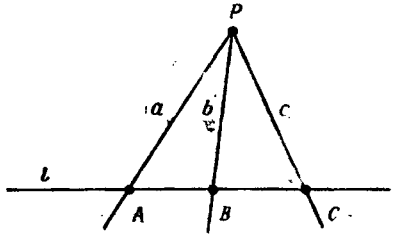


Рис. 12.

с центром P; пусть l — некоторая прямая, не проходящая через P. По $П_4$ прямая l содержит не менее трех разных точек A, B, C; поэтому пучок прямых с центром P содержит по меньшей мере три различные прямые $a = PA$, $b = PB$, $c = PC$ (рис. 12).

Теперь мы примем «аксиому Дезарга» $П_5$ и проверим справедливость следующей аксиомы

$П_5^*$. *Пусть O^*, A^*, B^*, C^*, $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, $C^{*\prime}$ — семь различных точек* «плоскости» П*, и пусть тройки точек* O^*, A^*, $A^{*\prime}$; O^*, B^*, $B^{*\prime}$; O^*, C^*, $C^{*\prime}$ коллинеарны, а тройки A^*, B^*, C^* и $A^{*\prime}$, $B^{*\prime}$, $C^{*\prime}$ неколлинеарны.*

Тогда точки

$$P^* = A^*B^* \cdot A^{*\prime}B^{*\prime}, \quad Q^* = A^*C^* \cdot A^{*\prime}C^{*\prime}, \quad R^* = B^*C^* \cdot B^{*\prime}C^{*\prime}$$

коллинеарны.

В терминах плоскости П это означает следующее. Рассмотрим семь прямых o, a, b, c, a', b', c', таких, что тройки o, a, a'; o, b, b'; o, c, c' — *сходящиеся*

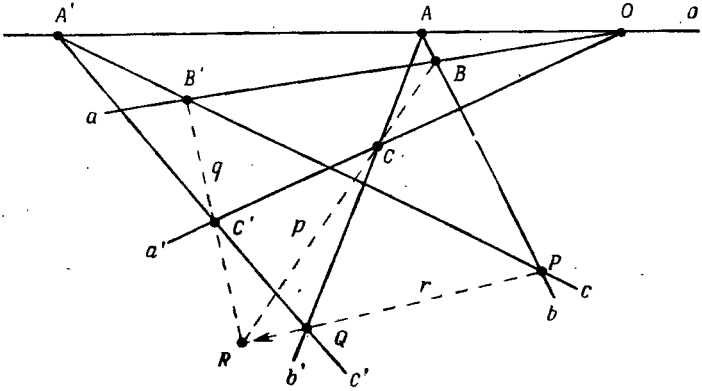


Рис. 13.

(т. е. проходят через одну точку), а тройки a, b, c и a', b', c' — не сходящиеся. Тогда прямые

$$p = (a \cdot b) \cdot (a' \cdot b'), \quad q = (a \cdot c) \cdot (a' \cdot c'), \quad r = (b \cdot c) \cdot (b' \cdot c')$$

(где $A \cdot B$ обозначает прямую, проходящую через точки A и B, а $a \cdot b$ — точку пересечения прямых a и b) являются сходящимися.

Для доказательства этого утверждения обозначим точки так, чтобы было удобно применять Π_5 (см. рис. 13). Пусть

$$O = o \cdot a \cdot a', \quad A = o \cdot b \cdot b', \quad A' = o \cdot c \cdot c',$$
$$B = a \cdot b, \quad B' = a \cdot c, \quad C = a' \cdot b', \quad C' = a' \cdot c'.$$

Тогда точки O, A, B, C, A', B', C' удовлетворяют условиям Π_5, откуда следует, что точки

$$P = AB \cdot A'B' = b \cdot c, \quad Q = AC \cdot A'C' = b' \cdot c',$$
$$R = BC \cdot B'C' = p \cdot q$$

коллинеарны. Но $PQ=r$, значит, прямые p, q, r — сходящиеся,

ч. т. д.

Следствие 4.2. (Принцип двойственности.) *Пусть S — некоторое утверждение, касающееся проективной плоскости Π, которое может быть выведено из аксиом $\Pi_1-\Pi_4$ (соответственно $\Pi_1-\Pi_5$). Тогда «двойственное» утверждение S^*, полученное из S заменой слов*

точка $\leftrightarrow$ *прямая*

лежит на $\leftrightarrow$ *проходит через*

коллинеарные $\leftrightarrow$ *сходящиеся*

$$\left.\begin{array}{l}\text{точка пересечения}\\ \text{двух прямых}\end{array}\right\}\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{прямая, соединяющая}\\ \text{две точки}\end{array}\right.$$

и т. д., тоже может быть выведено из аксиом $\Pi_1-\Pi_4$ (соответственно $\Pi_1-\Pi_5$):

Доказательство. Действительно, S^* есть то же самое утверждение S, только примененное не к Π, а к «двойственной плоскости» Π^*; следовательно, оно вытекает из $\Pi_1^*-\Pi_4^*$ (или $\Pi_1^*-\Pi_5^*$). Но последние «аксиомы», как было показано, в свою очередь следуют из $\Pi_1-\Pi_4$ (из $\Pi_1-\Pi_5$) *).

Замечание. 1° Существует естественное отображение $\Pi\to\Pi^{**}$, сопоставляющее точке $P\in\Pi$ пучок проходящих через P прямых, являющийся точкой плоскости Π^{**}. Легко видеть, что это отображение является изоморфизмом плоскостей Π и Π^{**}.

2° Однако плоскость Π^* не обязательно изоморфна плоскости Π. Примером тому может служить одна из недезарговых проективных плоскостей конечного порядка 9 (10 точек на прямой) **).

Определение. *Полным четырехугольником называется конфигурация, состоящая из семи*

---

*) Таким образом, на плоскости Π^* это не аксиомы, а теоремы!

**) Ср. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен [9], п. 17 третьей главы.

точек и шести прямых, полученных следующим образом (см. рис. 14): *рассмотрим четыре точки* A, B, C, D (*такие, что любые три из них неколлинеарны*), *шесть соединяющих их прямых и три новые точки*

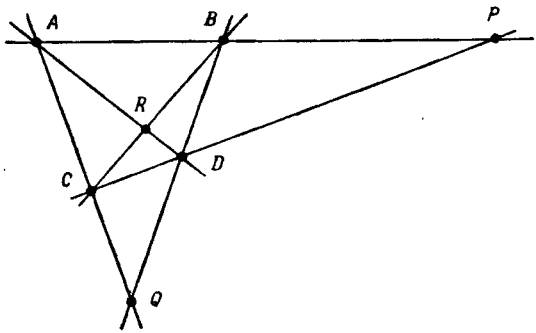


Рис. 14.

пересечения этих прямых («противоположных сторон» полного четырехугольника)

$$P = AB \cdot CD, \quad Q = AC \cdot BD, \quad R = AD \cdot BC.$$

Точки P, Q *и* R *называются* **диагональными точками** *полного четырехугольника.*

Диагональные точки P, Q, R полного четырехугольника могут оказаться коллинеарными (например, так обстоит дело на проективной плоскости, состоящей из семи точек — ср. выше рис. 6 на стр. 30). Однако на действительной проективной плоскости этого быть не может. Мы убедимся в этом впоследствии, а пока будем рассматривать случай коллинеарности диагональных точек как исключительное явление и поэтому введем следующую аксиому

Π_7. (Аксиома Фано.) *Диагональные точки полного четырехугольника неколлинеарны.*

Предложение 4.3. *Действительная проективная плоскость удовлетворяет аксиоме* Π_7.

Доказательство. Пусть A, B, C, D — вершины полного четырехугольника. Так как любые три из них неколлинеарны, в силу теоремы 3.9 существует автоморфизм T действительной проективной плоскости П, переводящий точки A, B, C, D в точки (0, 0, 1) (0, 1, 0) (1, 0, 0) (1, 1, 1) соответственно (рис. 15).

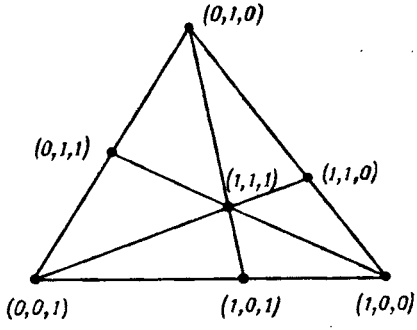


Рис. 15.

Таким образом, нам достаточно убедиться в том, что диагональные точки нового полного четырехугольника неколлинеарны. Но эти точки легко найти, вот они: (1, 0, 1), (1, 1, 0) и (0, 1, 1). Применим теперь лемму 3.10; так как

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0,$$

рассматриваемые точки неколлинеарны.

Предложение 4.4. *Из того, что* Π_7 *выполняется на* П, *следует, что* Π_7^* *выполняется на* Π^*; *поэтому принцип двойственности применим также и к следствиям из* Π_7.

Доказательство. Аксиома Π_7^* в терминах П означает следующее: диагонали полного четырехсторон-

ника не являются сходящимися (не принадлежат одному пучку). Это утверждение требует некоторых пояснений.

Определение. *Полным четырехсторонником называется конфигурация, состоящая из семи прямых и шести точек, полученных следующим образом: рассмотрим четыре прямые* a, b, c, d *(такие,*

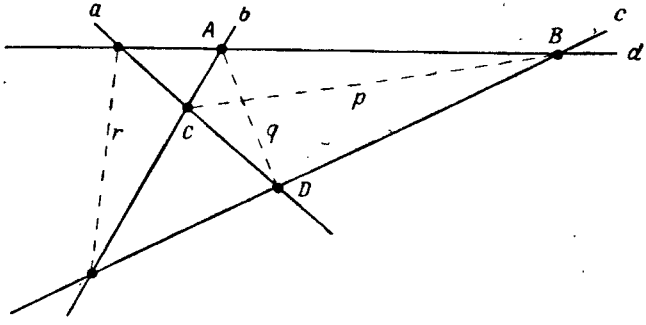


Рис. 16.

что никакие три из них не являются сходящимися), шесть точек их пересечения и три новые прямые

$$p = (a \cdot b) \cdot (c \cdot d), \quad q = (a \cdot c) \cdot (b \cdot d), \quad r = (a \cdot d) \cdot (b \cdot c),$$

соединяющие пары «противоположных вершин» полного четырехсторонника (рис. 16). *Прямые* p, q *и* r *называются диагоналями полного четырехсторонника.*

Докажем теперь Π_7^*. Пусть a, b, c, d — «стороны» полного четырехсторонника; предположим, что диагонали p, q, r — сходящиеся. Но в таком случае диагональные точки полного четырехугольника $ABCD$, где

$$A = b \cdot d, \quad B = c \cdot d, \quad C = a \cdot b, \quad D = a \cdot c$$

(см. тот же рис. 16) коллинеарны, что противоречит Π_7. Следовательно, утверждение Π_7^* справедливо.

Замечание. Проницательный читатель, наверное, заметил, что определение полного четырехсторонника двойственно определению полного четырехугольника. Вообще, я надеюсь, что с этого момента читатель будет самостоятельно конструировать «двойственные» к появляющимся ниже определения, теоремы и доказательства.

Гармонические четверки точек

Определение. *Упорядоченная четверка различных коллинеарных точек A, B, C, D называется* **гармонической четверкой**, *если существует полный четырехугольник $XYZW$* (см. рис. 17), *такой, что*

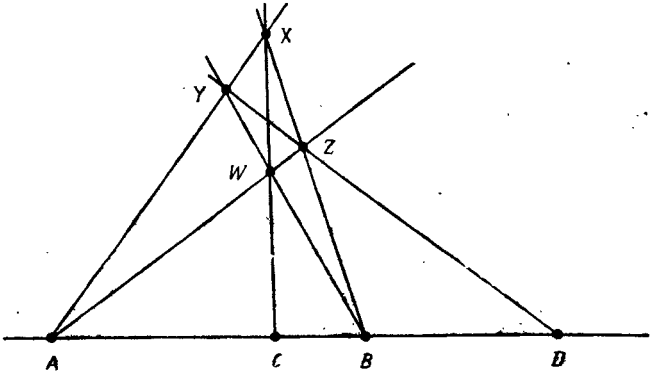


Рис. 17.

A и B являются его диагональными точками (например, $A = XY \cdot ZW$, $B = XZ \cdot YW$), *а C и D принадлежат двум другим сторонам четырехугольника* (например, $C \in XW$, $D \in YZ$).

Для гармонической четверки точек A, B, C, D мы введем обозначение $H(AB, CD)$.

Отметим, что из того, что точки A, B, C, D, образующие гармоническую четверку, различны, следует неколлинеарность диагональных точек опреде-

ляющего эту четверку четырехугольника $XYZW$. Вообще, понятие гармонической четверки точек в значительной мере теряет смысл, если аксиома Фано не выполняется; поэтому, говоря о гармонической четверке точек, мы всегда будем предполагать выполнимость Π_7.

Предложение 4.5.

$$H(AB, CD) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, DC).$$

Доказательство. Это утверждение немедленно следует из определения гармонической четверки, так как A и B, C и D играют одинаковую роль в построении полного четырехугольника. Действительно, можно переставить буквы X, Y, Z, W, так чтобы привести обозначения в соответствие с определением $H(BA, CD)$ и т. д.

Предложение 4.6. *Пусть A, B, C — три различные точки прямой. Тогда* (если выполняется Π_7) *существует точка D, такая, что $H(AB, CD)$. Более того* (если выполняется Π_5), *можно утверждать, что подобная точка D единственна.* (D называется *четвертой гармонической точкой для точек A, B, C* или точкой, *гармонически сопряженной к точке C* по отношению к точкам A и B.)

Доказательство. Проведем через точку A две прямые l и m, отличные от прямой ABC (рис. 18). Через точку C проведем прямую n, отличную от ABC. Соединим B и $l \cdot n$, B и $m \cdot n$ и обозначим полученные прямые через r и s. Соединив точки $r \cdot m$ и $s \cdot l$, получим прямую t. Пусть t пересекает ABC в точке D. Тогда из Π_7 следует, что точка D отлична от A, B, C, и следовательно, $H(AB, CD)$.

Теперь мы примем аксиому Π_5 и докажем единственность четвертой гармонической точки. По заданным A, B, C построим точку D указанным выше способом. Предположим, что D' — другая точка, такая, что $H(AB, CD')$. Тогда, по определению, существует полный четырехугольник $XYZW$, такой, что

$$A = XY \cdot ZW, \quad B = XZ \cdot YW, \quad C \in XW, \quad D' \in YZ.$$

Обозначим $l' = AX$, $m' = AZ$, $n' = CX$. Легко видеть, что описанное выше построение, примененное к l', m', n', даст точку D'.

Таким образом, достаточно показать, что точка D *не зависит от выбора прямых* l, m, n. Доказательство мы разобьем на три шага, заменяя каждый

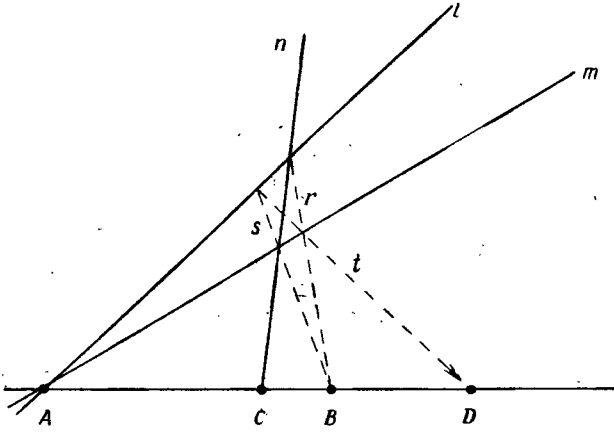


Рис. 18.

раз одну из трех прямых, причем точка D будет оставаться неизменной.

Шаг 1. *Если мы заменим l на l', то получим ту же самую точку D.*

Пусть D определяется с помощью l, m, n так, как это было описано выше (рис. 19). Обозначим полученный полный четырехугольник $XYZW$. Пусть теперь l' — другая прямая, проходящая через A и отличная от m; обозначим полный четырехугольник, полученный исходя из прямых l', m, n, через $X'Y'Z'W$. (Заметьте, что точка $W = m \cdot n$ принадлежит обоим четырехугольникам.) Мы должны показать, что прямая $Y'Z'$ проходит через точку D, т. е. что $(Y'Z') \cdot (ABC) = D$. Заметим, что два треугольника XYZ и $X'Y'Z'$ перспективны с центром перспективы W. Две

пары сторон этих треугольников пересекаются в точках A и B:

$$A = XY \cdot X'Y', \quad B = XZ \cdot X'Z'.$$

Следовательно, по Π_5 и точка пересечения третьей пары сторон YZ и $Y'Z'$ принадлежит AB,

ч. т. д.

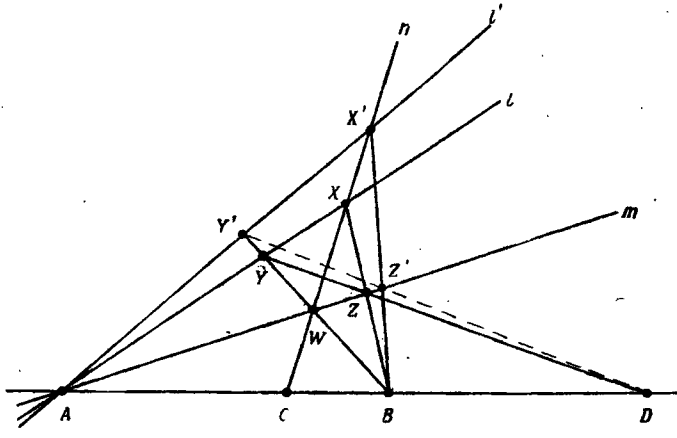


Рис. 19.

Шаг 2. *Если мы заменим m на m', то получим ту же самую точку D.*

Доказательство ничем не отличается от проведенного выше, ибо можно поменять ролями прямые l и m.

Шаг 3. *Если мы заменим n на n', то получим ту же самую точку D.*

Этот случай оказывается более сложным, чем предшествующие, так как здесь все четыре точки полного четырехугольника меняются. Пусть $XYZW$ — четырехугольник, полученный исходя из прямых l, m, n и определяющий D, а $X'Y'Z'W'$ — четырехугольник, полученный исходя из прямых l, m, n' (рис. 20). Нам надо показать, что $Y'Z'$ пересекается с ABC в той же точке D, в какой прямая YZ пересекает ABC.

Рассмотрим треугольники XYW и $W'Z'X'$ (вершины берутся именно в этом порядке). Пары сторон этих треугольников пересекаются в точках A, B, C соответственно. Но эти точки коллинеарны; следовательно, по Π_5^* наши два треугольника должны быть

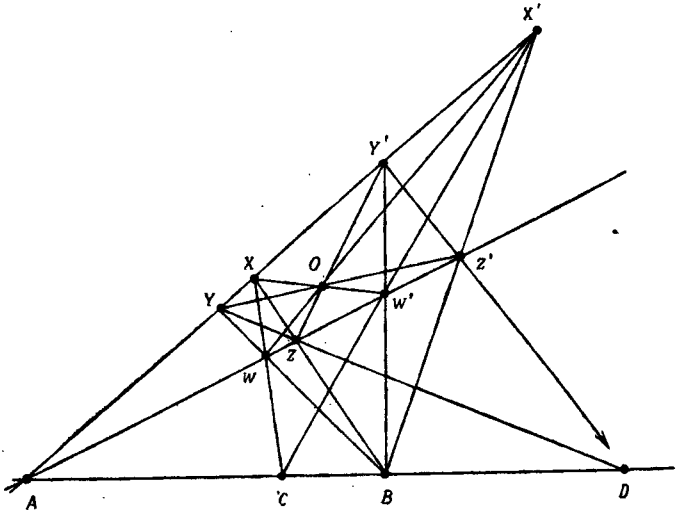


Рис. 20.

перспективны с центром в некоторой точке O. Иначе говоря, прямые XW', YZ' и WX' проходят через одну точку O.

Аналогично, рассматривая треугольники ZWX и $Y'X'W'$ (вершины берутся именно в этом порядке) и применяя Π_5^* еще раз, мы получаем, что прямые ZY', WX' и XW' являются сходящимися. Но две из этих прямых были среди трех прямых, рассмотренных выше, и $XW' \neq X'W$; поэтому точка их пересечения также есть O.

Другими словами, четырехугольники $XYZW$ и $W'Z'Y'X'$ (вершины берутся в указанном порядке) перспективны с центром в точке O. В частности, треугольники XYZ и $W'Z'Y'$ перспективны с цент-

ром O. Две пары соответственных сторон пересекаются в точках A и B; следовательно, точка пересечения третьей пары сторон YZ и $Z'Y'$ лежит на прямой AB, т. е. $D \in Z'Y'$,

ч. т. д.

Предложение 4.7. *Пусть A, B, C, D — гармоническая четверка точек. Тогда* (если выполняется Π_5) *C, D, A, B — тоже гармоническая четверка.*

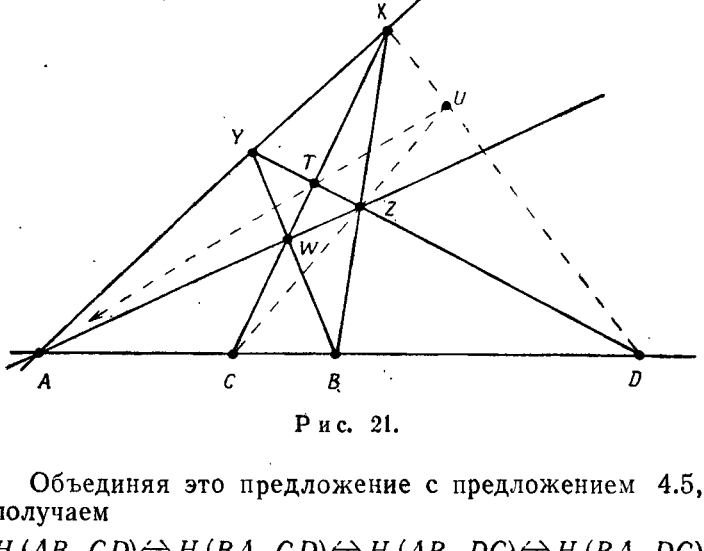


Рис. 21.

Объединяя это предложение с предложением 4.5, получаем

$$H(AB, CD) \Leftrightarrow H(BA, CD) \Leftrightarrow H(AB, DC) \Leftrightarrow H(BA, DC)$$
$$\Updownarrow$$
$$H(CD, AB) \Leftrightarrow H(DC, AB) \Leftrightarrow H(CD, BA) \Leftrightarrow H(DC, BA).$$

Доказательство. Пусть $H(AB, CD)$, и пусть $XYZW$ — полный четырехугольник, с которым связано определение этой гармонической четверки (см. рис. 21).

Проведем DX и CZ и обозначим точку пересечения этих прямых через U. Пусть, далее, $XW \cdot YZ = T$. Тогда $XTUZ$ — полный четырехугольник, а C и D — две из его диагональных точек. Точка B

принадлежит XZ, поэтому достаточно доказать, что TU проходит через A, так как в этом случае будем иметь $H(CD, AB)$.

Рассмотрим два треугольника XUZ и YTW. Пары их соответственных сторон пересекаются в точках D, B и C, но эти точки коллинеарны. Следовательно, по Π_5^*, прямые XY, TU, WZ, соединяющие соответственные вершины, принадлежат одному пучку, ч. т. д.

Примеры. 1° На проективной плоскости, состоящей из тринадцати точек, каждая прямая содержит четыре точки. Эти четыре точки, взятые в любом порядке, всегда образуют гармоническую четверку.

Для доказательства этого утверждения достаточно проверить, выполняется ли на этой плоскости Π_7, так как если Π_7 имеет место для любых трех точек одной прямой, то существует четвертая гармоническая, а ей как раз и будет (единственная) четвертая точка этой прямой. Мы докажем позже, что плоскость, состоящая из тринадцати точек, есть проективная плоскость под полем характеристики 3 (т. е. под полем, состоящим из трех элементов). Но Π_7 выполняется на проективной плоскости над полем любой характеристики $\neq 2$.

2° На действительной евклидовой плоскости четыре точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = -1$$

(см. задачу 20 в конце книги).

Перспективные и проективные отображения

Определение. *Перспективным отображением прямой l на прямую l'* (обе прямые рассматриваются как множества точек) *с центром O* (точка O не принадлежит ни l, ни l') *называется отображение $A \to A'$, где для произвольной точки $A \in l$ точка A' находится как $OA \cdot l'$* (см. рис. 22).

Это отображение обозначается так:

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l',$$

что читается «l переводится в l' перспективным отображением с центром O», или так:

$$ABC\ldots \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'\ldots,$$

т. е. «точки A, B, C, ... прямой l отображаются с помощью перспективного отображения с центром O в точки A', B', C', ... прямой l'».

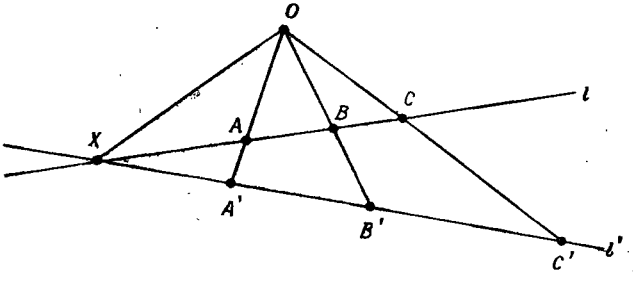


Рис. 22.

Отметим, что перспективное отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками прямых l и l' и является отображением l на l' и что отображение, обратное перспективному отображению, также является перспективным отображением. Отметим еще, что если $X = l \cdot l'$, то X (как точка l) переходит в X (как точку l').

Легко видеть, что композиция двух или более перспективных отображений уже не обязательно будет перспективным отображением: так, на рис. 23 мы имеем

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l' \overset{O'}{\underset{\wedge}{=}} l''$$

и

$$ABCY \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'Y' \overset{O'}{\underset{\wedge}{=}} A''B''C''Y''.$$

Если бы полученное в результате композиции отображений $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$ и $l' \overset{O'}{\underset{\wedge}{=}} l''$ отображение l на l'' было перспективным, то точку $l \cdot l'' = Y$ оно должно было

бы переводить в себя. Однако Y переходит в точку Y'', которая не совпадает с Y. Поэтому мы введем следующее

Определение. *Проективным отображением называется отображение прямой l на прямую l'* (быть

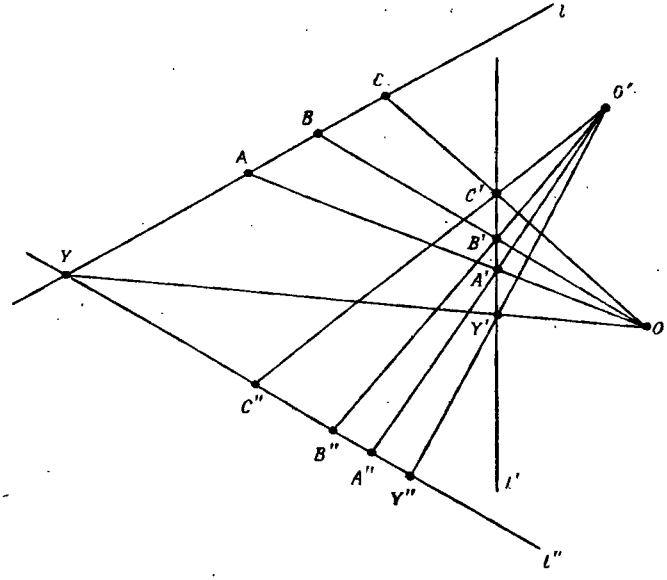


Рис. 23.

может, совпадающую с l), *которое может быть представлено как композиция перспективных отображений.*

В этом последнем случае мы условимся писать

$$l \underset{\wedge}{-} l'$$

или

$$ABC \ldots \underset{\wedge}{-} A'B'C' \ldots;$$

последняя запись означает, что проективное отображение переводит точки A, B, C, ... соответственно в A', B', C', ...

Отметим, что проективное отображение также устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками прямых l и l' и является отображением на l'.

Предложение 4.8. *Пусть задана прямая l. Тогда множество проективных преобразований*) l образует группу; мы ее обозначим $PJ(l)$.*

Доказательство. Заметим, что композиция двух проективных отображений снова есть проективное отображение, так как две цепи перспективных отображений, примененные подряд одна за другой, снова дадут цепь перспективных отображений. Тождественное отображение l на себя есть проективное отображение (точнее, перспективное преобразование l на себя с любым центром) и играет роль единичного элемента группы $PJ(l)$. Отображение, обратное к проективному отображению, снова есть проективное отображение, так как его можно получить, применяя цепь перспективных отображений в обратном порядке.

Представляет интерес изучение группы $PJ(l)$, в частности выяснение степени ее транзитивности. Следующие два предложения устанавливают, что эта группа трижды транзитивна, но не четырежды транзитивна.

Предложение 4.9. *Пусть задана прямая l, и пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки ее различных точек. Тогда существует проективное преобразование l, переводящее A, B, C в A', B', C'.*

Доказательство. Пусть l' — прямая, отличная от l и не проходящая через A и A', а O — произвольная точка, не принадлежащая ни l, ни l'. Спроектируем из O точки A', B', C' прямой l в точки A'', B'', C'' прямой l':

$$A'B'C' \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A''B''C'',$$

где $A \notin l'$, $A'' \notin l$ (рис. 24а). Ясно, что нам достаточно построить проективное отображение l на l',

*) Взаимно однозначное отображение множества M на себя называется *преобразованием* множества M.

переводящее A, B, C в A'', B'', C''. Заменим в обозначениях двойные штрихи одинарными и забудем про исходные точки A', B', $C' \in l$. Таким образом, наша задача свелась к следующей.

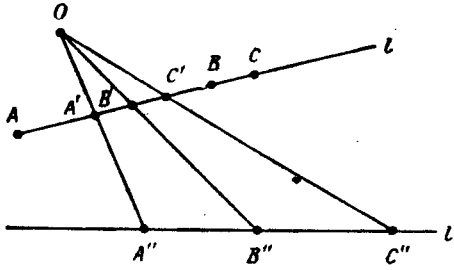


Рис. 24а.

Заданы две различные прямые l и l'. Пусть A, B, C — три различные точки прямой l, а A', B', C' — три различные точки прямой l'; предположим далее,

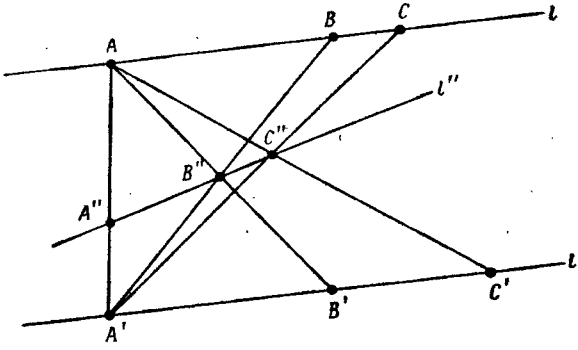


Рис. 24б.

что $A \notin l'$ и $A' \notin l$ (рис. 24б). Требуется построить проективное отображение l на l', переводящее точки A, B, C соответственно в A', B', C'.

Проведем прямые AA', AB', AC', $A'B$, $A'C$ и положим

$$AB' \cdot A'B = B'', \quad AC' \cdot A'C = C''.$$

Обозначим прямую $B''C''$ через l''; пусть она пересекает AA' в A''. Тогда

$$l \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} l'$$

переводит

$$ABC \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} A''B''C'' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'.$$

Таким образом, мы построили искомое проективное отображение l на l' как композицию двух перспективных отображений.

Предложение 4.10. *Проективное отображение переводит гармоническую четверку точек в гармоническую четверку.*

Доказательство. Проективное отображение есть композиция перспективных отображений; поэтому достаточно показать, что перспективное отображение переводит гармоническую четверку точек в гармоническую.

Пусть $H(AB, CD)$, где $A, B, C, D \in l$, и

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l' \quad \text{или} \quad ABCD \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'D'.$$

Пусть, далее, $l'' = AB'$. Тогда

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$$

дает то же самое отображение; поэтому достаточно рассмотреть отдельно отображения $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l''$ и $l'' \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$. Эти отображения удобны тем, что прямые пересекаются в одной из четырех рассматриваемых точек. Изменим обозначения так, чтобы в обоих случаях этой точкой была бы точка A. Таким образом мы приходим к следующей задаче.

Пусть $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$, и пусть $A = l \cdot l'$, B, C, D — четыре точки прямой l, такие, что $H(AB, CD)$. Требуется доказать, что $H(AB', C'D')$, где B', C', D' — образы точек B, C, D.

Проведем BC' и допустим, что эта прямая пересекает OA в точке X. Рассмотрим полный четырехуголь-

ник $OXB'C'$. Точки A и B — две его диагональные точки, C принадлежит стороне OC'. Следовательно, четвертой гармонической точкой для A, B, C будет точка пересечения XB' с l, т. е. точка $XB' \cdot l = D$ (здесь мы используем единственность четвертой гармонической точки).

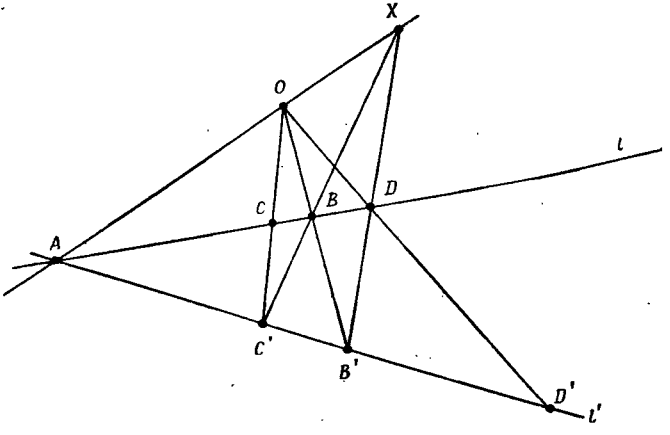


Рис. 25.

Теперь рассмотрим полный четырехугольник $OXBD$. Точки A и B' — две его диагональные точки. Две другие стороны пересекают l' в C' и D'; следовательно, $H(AB', C'D')$,

ч. т. д.

Мы видим, что группа $PJ(l)$ трижды транзитивна, но она не может быть четырежды транзитивной, так как гармоническую четверку точек она переводит не в произвольную четверку, а снова в гармоническую четверку точек.

ГЛАВА V

АКСИОМА ПАППА И ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА О ПРОЕКТИВНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРЯМОЙ

В этой главе мы докажем «основную теорему», которая утверждает, что *существует единственное проективное преобразование прямой, переводящее три заданные точки в любые другие три заданные точки*, т. е. что группа $PJ(l)$ точно трижды транзитивна. Оказывается, что эта теорема не следует из аксиом $\Pi_1 - \Pi_5$ и Π_7; поэтому нам придется дополнительно ввести аксиому Паппа Π_6. Тогда мы сможем доказать основную теорему; обратно, будет показано, что Π_6 следует из основной теоремы. Сначала мы сформулируем основную теорему и аксиому Паппа, а потом приведем доказательства.

Основная теорема (теорема о проективных преобразованиях прямой). *Пусть задана прямая l и A, B, C; A', B', C' — две тройки различных точек этой прямой. Тогда существует одно и только одно проективное преобразование l, такое, что*

$$ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'.$$

Π_6. (Аксиома Паппа.) *Пусть l и l' — две различные прямые, A, B, C — три различные точки прямой l, отличные от $X = l \cdot l'$, и A', B', C' — три различные точки прямой l', отличные от X. Тогда точки*

$$P = AB' \cdot A'B, \quad Q = AC' \cdot A'C, \quad R = BC' \cdot B'C$$

коллинеарны (рис. 26).

Предложение 5.1. *Аксиома Π_6 влечет за собой двойственную аксиому Паппа Π_6^*, т. е. принцип*

двойственности применим и ко всем выводам из Π_6. (См. задачу 21 в конце книги.)

Предложение 5.2. *На действительной проективной плоскости справедлива аксиома* Π_6.

Доказательство. Пусть l, l', A, B, C, A', B', C' — те точки и прямые, о которых говорится в Π_6; по-

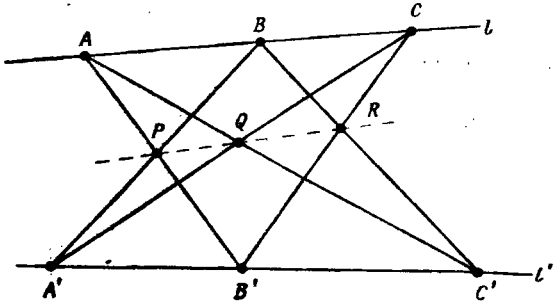


Рис. 26.

строим точки P, Q и R. Примем l за бесконечную прямую и сведем Π_6 к следующему утверждению евклидовой геометрии.

Пусть l' — прямая на аффинной евклидовой плоскости, A', B', C' — три различные точки прямой l' и A, B, C — три различных направления, отличных от направления прямой l'. Проведем из точки A' прямые, имеющие направления B, C, ..., и определим точки P, Q, R так, как показано на рис. 27. Тогда точки P, Q и R коллинеарны.

Рассмотрим несколько пропорций: пересекая две прямые параллельными прямыми направления C, находим

$$\frac{TR}{RC'} = \frac{A'B'}{B'C'},$$

а пересекая две прямые параллельными прямыми направления A, получаем

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{A'P}{PS}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{TR}{RC'} = \frac{A'P}{PS},$$

или

$$\frac{TR}{A'P} = \frac{RC'}{PS} = \frac{TR + RC'}{A'P + PS} = \frac{TC'}{A'S}.$$

Но $\triangle TQC' \sim \triangle A'QS$ (подобные треугольники); поэтому

$$\frac{TC'}{A'S} = \frac{QT}{A'Q}.$$

Отсюда следует, что $\triangle TQR \sim \triangle A'QP$. Значит, $\angle TRQ = \angle A'PQ$, т. е. прямые PQ и QR параллельны, и следовательно, они совпадают,

ч. т. д.

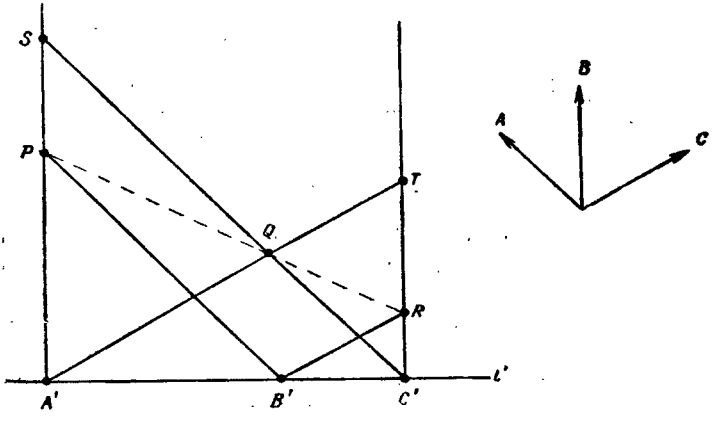


Рис. 27.

(В задаче 22 предполагается другое доказательство этого утверждения.)

Предложение 5.3. Π_6 *следует из основной теоремы* (конечно, при выполнении $\Pi_1 - \Pi_4$).

Доказательство. Пусть l, l', A, B, C, A', B', C' — те прямые и точки, о которых говорится в аксиоме Π_6. Предположим, что основная теорема выполняется, и докажем, что точки

$$P = AB' \cdot A'B, \quad Q = AC' \cdot A'C, \quad R = BC' \cdot B'C$$

(последняя точка не обозначена на рис. 28) коллинеарны.

Проведем прямые AB', $A'B$ и найдем точку P. Построим AC', $A'C$ и Q. Обозначим прямую PQ через l'', а точку пересечения l'' и AA' через A''.

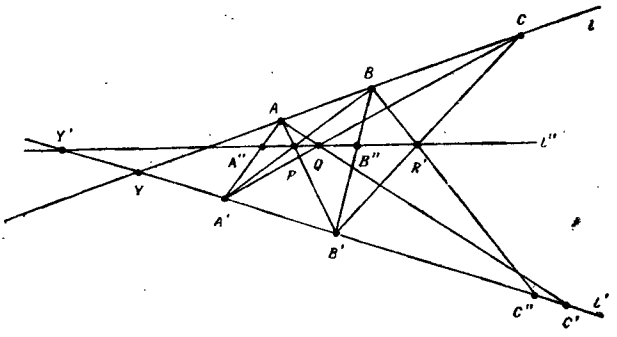


Рис. 28.

Тогда по предложению 4.9 можно следующим образом построить проективное отображение, переводящее A, B, C в A', B', C':

$$l \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} l'.$$

Пусть $Y = l \cdot l'$ и $Y' = l' \cdot l''$; тогда указанные перспективные отображения действуют так:

$$ABCY \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} A''PQY' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'Y'.$$

Пусть теперь $B'C$ пересекает l'' в R', а BR' пересекает l' в C''. Рассмотрим цепочку перспективных отображений

$$l \overset{B'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{B}{\underset{\wedge}{=}} l';$$

при этом

$$ABCY \overset{B'}{\underset{\wedge}{=}} PB''R'Y' \overset{B}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C''Y'.$$

Таким образом, мы получили два проективных отображения l на l', переводящих точки A, B, Y в A', B', Y'. Но из основной теоремы следует, что эти отображе-

ния совпадают. (Заметьте, что основная теорема формулировалась для двух троек точек, принадлежащих одной и той же прямой; но любые три коллинеарные точки можно с помощью перспективного отображения перевести в три коллинеарные точки, принадлежащие любой другой прямой, и следовательно, существует единственное проективное отображение, переводящее A, B, C в A', B', C' даже и в том случае, когда две тройки точек принадлежат разным прямым.)

Таким образом, точка C переходит в одну и ту же точку при двух проективных отображениях, т. е. $C' = C''$. Значит, $R' = R$, поэтому P, Q, R коллинеарны, ч. т. д.

Теперь мы подошли к доказательству основной теоремы, исходя из аксиом $\Pi_1 - \Pi_6$. Начнем с некоторых вспомогательных результатов.

Лемма 5.4. *Пусть* $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} m \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} n$, *где* $l \neq n$; *предположим еще, что или*

а) *прямые* l, m, n *принадлежат одному пучку, или*

б) *точки* O, P *и* $l \cdot n$ *коллинеарны.*

Тогда полученное проективное отображение $l \underset{\wedge}{-} n$ *является* **перспективным** (т. е. существует такая точка Q, что перспективное отображение

$$l \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} n$$

совпадает с нашим проективным отображением $l \underset{\wedge}{-} n$).

(По поводу доказательства см. задачи 23, 24 и 25 в конце книги.)

Лемма 5.5. *Пусть*

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} m \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} n,$$

где $l \neq n$; *предположим теперь, что не имеет места ни* а), *ни* б) *из условия леммы* 5.4. *Тогда существует прямая* m' *и точки* $O' \in n$ *и* $P' \in l$, *такие, что*

$$l \overset{O'}{\underset{\wedge}{=}} m \overset{P'}{\underset{\wedge}{=}} n$$

есть рассматриваемое проективное отображение l на n (см. рис. 29).

Доказательство. Пусть заданы l, m, n, O, P; пусть, далее, A, A' — две точки на l и

$$AA' \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} BB' \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} CC'.$$

Точку пересечения OP и n обозначим через O'. Так как мы предположили, что точки O, P, $l \cdot n = X$ не-

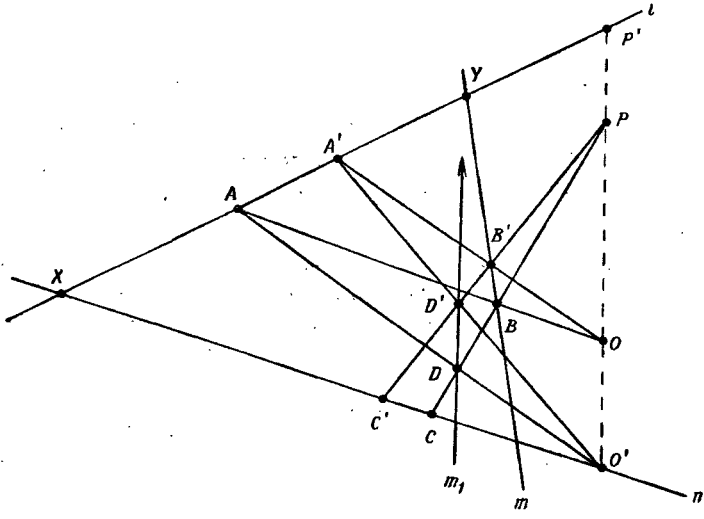


Рис. 29.

коллинеарны, то $O' \neq X$, т. е. $O' \notin l$. Проведем $O'A$ и $O'A'$; пусть они пересекают PC и PC' соответственно в D и D'.

Соответствующие стороны треугольников ABD и $A'B'D'$ пересекаются в коллинеарных точках O, P, O'; значит, по Π_5^*, прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, принадлежат одному пучку. Таким образом, прямая m_1, соединяющая D и D', проходит через точку $Y = l \cdot m$.

Следовательно, прямая m_1 определена точками D и Y, и если точка A' меняется, то D' меняется, оставаясь на прямой m_1. Поэтому исходное проективное отображение совпадает с отображением

$$l \underset{\wedge}{\overset{O'}{=}} m_1 \underset{\wedge}{\overset{P}{=}} n.$$

Повторяя то же самое рассуждение еще раз, мы можем переместить P в положение $P' = OP \cdot l$ и найти новую прямую m', такую, что

$$l \underset{\wedge}{\overset{O'}{=}} m' \underset{\wedge}{\overset{P'}{=}} n$$

дает исходное проективное отображение.

Лемма 5.6. *Пусть l и l' — две различные прямые. Тогда любое проективное отображение $l \underset{\wedge}{=} l'$ может быть получено как композиция двух перспективных отображений.*

Доказательство. Проективное отображение было определено как композиция цепочки перспективных отображений произвольной длины. Поэтому достаточно доказать по индукции, что цепочка длины $n > 2$ может быть сведена к цепочке длины $n - 1$. Для этого достаточно установить, что цепочку из трех перспективных отображений можно свести к композиции двух перспективных отображений.

Из доказательства предыдущей леммы видно, что прямую m можно свободно двигать, не задевая лишь заданных точек. Легко видеть, что достаточно показать следующее (детали доказательства предоставляются читателю): пусть

$$l \underset{\wedge}{\overset{P}{=}} m \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} n \underset{\wedge}{\overset{R}{=}} o$$

— цепочка трех перспективных отображений, где $l \neq o$; тогда проективное отображение $l \underset{\wedge}{=} o$ может быть сведено к композиции не более чем двух перспективных отображений.

Во-первых, если $m = l$ или $m = n$, или $m = o$, или $n = l$, или $n = o$, то мы тривиальным образом

переходим к двум перспективным отображениям, используя лемму 5.4а. Значит, мы можем предположить, что прямые l, m, n, o различны. Во-вторых, используя леммы 5.4б и 5.5, мы получаем, что либо $m \underset{\wedge}{=} o$ — и в этом случае все доказано, — либо прямая n может

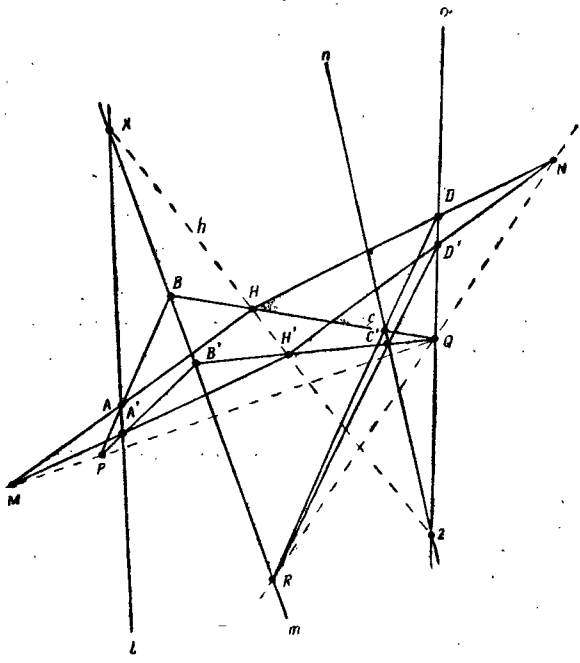


Рис. 30.

быть сдвинута так, что центры перспективных отображений $m \underset{\wedge}{=} n$ и $n \underset{\wedge}{=} o$ попадут соответственно на o и m.

Итак, мы имеем

$$l \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} m \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} n \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} o,$$

где l, m, n, o все различны, $Q \in o$ и $R \in m$ (рис. 30). Пусть $X = l \cdot m$, $Z = n \cdot o$; проведем еще $h = XZ$. Пред-

положим, что $X \notin o$ (по лемме 5.5 мы можем сдвинуть m так, чтобы $X \notin o$). Поэтому $Q \in XZ = h$. Отобразим $m \underset{\wedge}{\overset{Q}{=}} h$ и положим $BB' = HH'$.

Заметим теперь, что треугольники CDH и $C'D'H'$ перспективны с центром Z. Соответствующие стороны этих треугольников пересекаются в точках Q, R; следовательно, по Π_5 оставшиеся две стороны пересекаются в точке $N \in QR$. Значит, N определяется только прямой DH, и мы видим, что как бы прямая $D'H'$ ни менялась, она все равно проходит через точку N. Иначе говоря, $h \underset{\wedge}{\overset{N}{=}} o$.

Аналогично, треугольники ABH и $A'B'H'$ перспективны с центром X; используя Π_5 еще раз, мы получаем, что AH и $A'H'$ пересекаются в точке $M \in PQ$, и следовательно, $l \underset{\wedge}{\overset{M}{=}} h$.

Таким образом мы получили исходное проективное отображение как композицию двух перспективных отображений

$$l \underset{\wedge}{\overset{M}{=}} h \underset{\wedge}{\overset{N}{=}} o.$$

Теорема 5.6. *Основная теорема вытекает из аксиом* $\Pi_1 - \Pi_6$.

Доказательство. Для заданной прямой l и двух троек различных точек A, B, C и A', B', C' этой прямой мы должны найти проективное преобразование, переводящее одну тройку в другую, и доказать, что оно единственно. Выберем прямую l', не проходящую через заданные точки (разбор некоторых частных случаев мы предоставляем читателю), и спроектируем A', B', C' на l'. Обозначим образы этих точек теми же буквами A', B', C'. Таким образом мы свели теорему к следующей: имеем

$$\begin{array}{l} A,\ B,\ C \text{ на } l \\ \\ A',\ B',\ C' \text{ на } l' \end{array} \qquad (\text{все точки отличны от } l \cdot l');$$

требуется показать, что существует единственное проективное отображение, такое, что

$$ABC \underset{\wedge}{-} A'B'C'.$$

Одно такое проективное отображение мы уже получили в предложении 4.9; следовательно, достаточно показать, что любое другое проективное отображение совпадает с этим.

Случай 1. Предположим, что второе проективное отображение есть просто перспективное отображение (рис. 31).

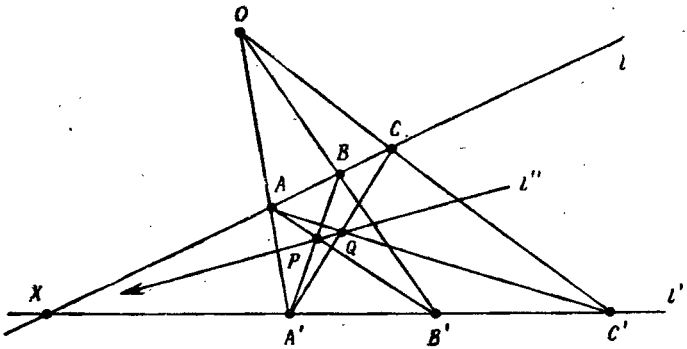


Рис. 31.

Пусть $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$ переводит $ABC \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'$. Рассмотрим

$$P = AB' \cdot A'B, \quad Q = AC' \cdot A'C;$$

пусть прямая l'' соединяет P с Q.

Мы утверждаем, что l'' проходит через точку $X = l \cdot l'$. Действительно, применим Π_5 к треугольникам $AB'C'$ и $A'BC$, которые перспективны с центром O. Их стороны пересекаются в точках P, Q, X соответственно.

Следовательно, l'' определяется точками P и X. Но так как C может меняться, перспективное отображение

$$l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} l'$$

совпадает с проективным отображением

$$l \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} l'.$$

Случай 2. Предположим, что второе проективное отображение не является перспективным. Тогда в силу леммы 5.6 оно может быть представлено в виде композиции двух перспективных отображений

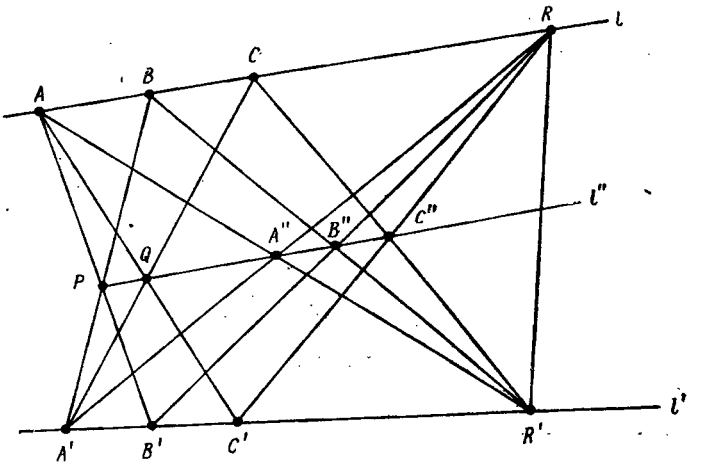


Рис. 32.

а в силу леммы 5.5 можно предположить, что центры этих отображений принадлежат соответственно l' и l. Таким образом, мы приходим к конфигурации рис. 32:

$$l \overset{R'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} l' \quad \text{и} \quad ABC \overset{R'}{\underset{\wedge}{=}} A''B''C'' \overset{R}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'.$$

Применяя Π_6 к треугольникам ABR и $A'B'R'$, мы получаем, что $P = AB' \cdot A'B$ принадлежит l''. Аналогично, применяя Π_6 к ACR и $A'C'R'$, мы получаем, что $Q = AC' \cdot A'C$ принадлежит l''. Таким образом, l'' есть прямая, которая была использована в предложении 4.9 для построения второго проективного отображения

$$l \overset{A'}{\underset{\wedge}{=}} l'' \overset{A}{\underset{\wedge}{=}} l'.$$

Пусть теперь $D \in l$ — произвольная точка; определим

$$D'' = R'D \cdot l'' \quad \text{и} \quad D' = RD'' \cdot l'.$$

Из Π_6, примененной к треугольникам ADR и $A'D'R'$, следует, что

$$AD' \cdot A'D,\ A'',\ D''$$

коллинеарны, т. е. $AD' \cdot A'D \in l''$. Но это означает, что также и проективное отображение предложения 4.9 переводит D в D'. Следовательно, эти проективные отображения совпадают, ч. т. д.

Теорема 5.7. Π_5 *следует из* Π_6.

Доказательство. Пусть O, A, B, C, A', B', C' (см. рис. 31) удовлетворяют предположениям теоремы Дезарга (Π_5); построим P, Q, R. Для доказательства их коллинеарности нам придется трижды применить Π_6.

Шаг 1. Пусть $A'C'$ пересекает AB в точке S. Затем применим Π_6 к прямым

$$\begin{pmatrix} O & C & C' \\ B & S & A \end{pmatrix}$$

и заключим отсюда, что точки

$$T = OS \cdot BC,\quad U = OA \cdot BC',\ Q$$

коллинеарны (рис. 33). (Отметим, что, для того чтобы применить Π_6, мы должны проверить, что точки B, S, A различны и что ни одна из точек O, C, C', B, S, A не совпадает с точкой пересечения двух этих прямых. Но Π_6 тривиальна, если эти условия не выполняются.)

Шаг 2. Применим теперь Π_6 к тройкам

$$\begin{pmatrix} O & B & B' \\ C' & A' & S \end{pmatrix}$$

и заключим отсюда, что точки

$$U,\ V = OS \cdot B'C',\ P$$

коллинеарны.

Шаг 3. Применим, наконец, Π_6 к тройкам

$$\begin{pmatrix} B & C' & U \\ V & T & S \end{pmatrix}$$

и заключим отсюда, что точки

R, $P = BS \cdot UV$ (шаг 2), $Q = C'S \cdot TU$ (шаг 1)

коллинеарны, ч. т. д.

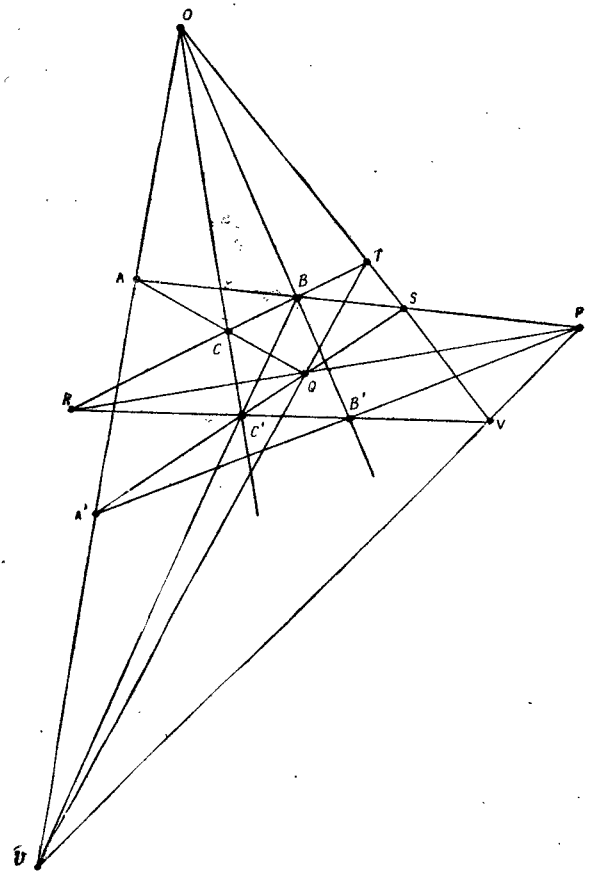


Рис. 33. Аксиома Паппа $\Rightarrow$ Аксиома Дезарга.

Следствие 5.8 (из основной теоремы). *Проективное отображение* $l \underset{\wedge}{-} l'$, *где* $l \neq l'$, *есть перспективное отображение* $\Leftrightarrow$ *точка пересечения* $X = l \cdot l'$ *переходит в себя.*

ГЛАВА VI

ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ НАД ТЕЛАМИ

В этой главе мы введем понятие *тела*, которое несколько шире понятия поля, и рассмотрим проективную плоскость над телом. Это понятие доставит нам много новых примеров проективных плоскостей. Затем мы рассмотрим различные свойства проективных плоскостей, соответствующие некоторым свойствам поля. Мы также изучим группы автоморфизмов этих плоскостей.

Определение. *Телом (или кольцом с делением, или некоммутативным полем) называется множество F с двумя бинарными операциями $+$ и $\cdot$ на нем, такими, что*

1° *F есть абелева группа по $+$;*

2° *ненулевые элементы F образуют группу по $\cdot$* (не обязательно коммутативную);

3° *умножение и сложение связаны двухсторонней дистрибутивностью, т. е.*

$$a(b+c)=ab+ac, \quad (b+c)a=ba+ca$$

для любых $a, b, c \in F$.

Сравнивая определение тела с определением поля на стр. 43, мы получаем, что

тело F есть поле $\Leftrightarrow$ умножение коммутативно.

Пример (показывающий, что существуют тела, не являющиеся полями). *Определим тело кватернионов следующим образом. Пусть e, i, j, k — четыре символа и*

$$F=\{ae+bi+cj+dk \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}\}.$$

Сложение на F определим так:

$$(ae+bi+cj+dk)+(a'e+b'i+c'j+d'k)=$$
$$=(a+a')e+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$$

(покоординатное сложение); *умножение введем,*

а) *используя дистрибутивные законы,*

б) *полагая, что действительные числа коммутируют со всеми остальными элементами,*

в) *задавая следующую «таблицу умножения» базисных элементов e, i, j, k:*

$\cdot$	e	i	j	k
e	e	i	j	k
i	i	$-e$	k	$-j$
j	j	$-k$	$-e$	i
k	k	j	$-i$	$-e$,

т. е. полагая

$$e^2=e,\quad i^2=j^2=k^2=-e;$$
$$ei=ie=i,\quad ej=je=j,\quad ek=ke=k;$$
$$ij=k,\quad jk=i,\quad ki=j;$$
$$ji=-k,\quad kj=-i,\quad ik=-j.$$

Теперь можно проверить (это достаточно трудоемкое дело), что F есть тело (но, разумеется, не поле, так как здесь умножение некоммутативно — например $ij\neq ji$).

Определение. *Автоморфизмом тела называется взаимно однозначное отображение F на F*

$$\sigma\colon F\to F$$

(мы будем писать $a\to a^\sigma$), *такое, что*

$$(a+b)^\sigma=a^\sigma+b^\sigma,\quad (ab)^\sigma=a^\sigma b^\sigma.$$

Определение. *Пусть F — тело. Характеристикой тела F называется наименьшее целое $p\geqslant 2$, такое, что*

$$\underbrace{1+1+\ldots+1}_{p\text{ раз}}=0;$$

если же такого целого числа не существует, то характеристика тела F считается равной 0.

Предложение. *Характеристика p тела F всегда является простым числом* (или числом 0).

Доказательство. Пусть $p = m \cdot n$, $m, n > 1$. Тогда

$$\underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{(1+1+\ldots 1)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{1+1+1+\ldots+1+1}_{mn \text{ раз}} = 0.$$

Следовательно, один из сомножителей равен 0, что противоречит определению p.

Пример. Для любого простого p существует состоящее из p элементов поле F_p, характеристика которого равна p. Действительно, пусть F_p — множество p элементов

$$F_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$$

(не путать символы 0, 1, 2, ... с обычными числами!). Определим сложение и умножение элементов F_p, считая, что символом k обозначается *вычет* *) числа k по модулю p. (При этом условии, например, $2(p-1) = p-2$, ибо $2(p-1) = 2p-2 \equiv -2 \equiv p-2 \pmod p$.) Тогда легко видеть, что F — поле и характеристика этого поля равна p.

Определение. *Пусть F — тело, и пусть $F_0 \subseteq F$ — множество таких $a \in F$, что $ab = ba$ для любого $b \in F$. Тогда F_0 — поле, называемое центром тела F и обозначаемое через $Z(F)$.*

Для того чтобы доказать, что F_0 — поле, мы должны проверить, что оно замкнуто относительно сложения и умножения, что каждый элемент имеет обратный и что умножение коммутативно. Все это легко сделать. Например, пусть $a, b \in F_0$. Тогда для любого $c \in F$

$$(a+b)c = ac + bc = ca + cb = c(a+b)$$

и, значит, $a + b \in F_0$.

---

*) См. любой учебник абстрактной алгебры или теории чисел.

Пример. Центр тела кватернионов — это множество кватернионов вида

$$ae + 0i + 0j + 0k, \quad \text{где} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, в этом случае

$$Z(F) \simeq \mathbb{R}.$$

Теперь мы можем определить проективную плоскость над телом, вспомнив аналитическое определение действительной проективной плоскости (стр. 15—16).

Определение. *Пусть F — тело. Проективную плоскость $\mathbb{P}_F^2$ над F определим следующим образом. Точкой проективной плоскости назовем класс эквивалентности троек $P = (x_1, x_2, x_3)$, где $x_1, x_2, x_3 \in F$ не все нули и эквивалентность*

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1', x_2', x_3')$$

означает существование такого $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, что $x_i' = x_i\lambda$ при $i = 1, 2, 3$. (Заметьте, что мы умножаем на λ справа. Об этом важно не забывать, так как умножение в теле не всегда коммутативно.)

Прямой плоскости $\mathbb{P}_F^2$ назовем множество точек, удовлетворяющее линейному уравнению вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0,$$

где $c_1, c_2, c_3 \in F$ не равны нулю одновременно. (Заметьте, что здесь мы умножаем на c_i слева и что это уравнение в действительности определяет множество классов эквивалентности троек (c_1, c_2, c_3).)

Легко проверить, что на $\mathbb{P}_F^2$ выполняются аксиомы Π_1, Π_2, Π_3, Π_4, и значит, $\mathbb{P}_F^2$ — проективная плоскость.

Примеры. 1° Если $F = F_2$ — поле характеристики 2 из двух элементов ($F_2 = \{0, 1\}$), то $\mathbb{P}_F^2$ — проективиая плоскость, содержащая семь точек (проверьте!).

2° В общем случае, если $F = F_p$ — поле характеристики p (где p — простое число), то $\mathbb{P}_F^2$ — проективная плоскость, содержащая $p^2 + p + 1$ точек.

Действительно, любая прямая содержит $p+1$ точек. (См. задачу 5 в конце книги.)

3° Если $F=\mathbb{R}$, то $\mathbb{P}_F^2$ — действительная проективная плоскость.

Теорема 6.1. *В плоскости $\mathbb{P}_F^2$ выполняется аксиома Дезарга Π_5.*

Доказательство. Определим трехмерное проективное пространство $\mathbb{P}_F^3$, приняв за точки классы эквивалентности (x_1, x_2, x_3, x_4), где не все $x_i \in F$ равны нулю и $(x_1, x_2, x_3, x_4) \sim (x_1\lambda, x_2\lambda, x_3\lambda, x_4\lambda)$. *Плоскости* в $\mathbb{P}_F^3$ определяются (левыми) линейными уравнениями, а *прямые* — как пересечения несовпадающих плоскостей.

Тогда $\mathbb{P}_F^2$ вкладывается в проективное трехмерное пространство $\mathbb{P}_F^3$ как плоскость $x_4=0$, а следовательно, на этой плоскости выполняется аксиома Π_5 (по теореме 2.1).

Теперь мы изучим группу $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_F^2)$ *автоморфизмов* проективной плоскости $\mathbb{P}_F^2$.

Определение. *Матрица $A=(a_{ij})$, где $a_{ij} \in F$ (матрица над телом F) называется обратимой, если существует такая матрица A^{-1}, что*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I,$$

где I — единичная матрица. (Заметьте, что понятие детерминанта матрицы с элементами из некоторого тела, вообще говоря, не имеет смысла. Однако, если мы имеем дело с обратимыми матрицами над полем F, то это суть именно те матрицы A, для которых $\det A \neq 0$.)

Предложение 6.2. *Пусть $A=(a_{ij})$ — обратимая (3×3)-матрица над телом F. Тогда равенства*

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad i=1, 2, 3,$$

задают автоморфизм T_A плоскости $\mathbb{P}_F^2$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 3.7.

Предложение 6.3. *Пусть A, A' — две обратимые матрицы. Тогда*

T_A и $T_{A'}$ одинаково действуют на четыре точки $P_1 = (1, 0, 0)$, $P_2 = (0, 1, 0)$, $P_3 = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 1, 1) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$ существует $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, такое, что $A' = A\lambda$.

Доказательство предложения 6.3 аналогично доказательству предложения 3.8.

Предложение 6.4. *Пусть $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$; рассмотрим матрицу λI $(= I\lambda)$. Тогда*

$T_{\lambda I}$ — тождественное отображение $\mathbb{P}_F^2 \Leftrightarrow \lambda \in Z(F)$.

Если же λ не принадлежит $Z(F)$, то $T_{\lambda I}$ — автоморфизм

$$(x_1, x_2, x_3) \to (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma),$$

где σ есть следующий автоморфизм тела F:

$$x \to \lambda x \lambda^{-1}.$$

(Такой автоморфизм называется *внутренним автоморфизмом* тела F, порожденным элементом λ.)

Доказательство. Автоморфизм $T_{\lambda I}$ переводит точку (x_1, x_2, x_3) в точку $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$, которая имеет также однородные координаты

$$(\lambda x_1 \lambda^{-1}, \lambda x_2 \lambda^{-1}, \lambda x_3 \lambda^{-1}),$$

что и доказывает второе из наших утверждений. А так как

$$\sigma\colon x \to \lambda x \lambda^{-1} \text{ — тождественный автоморфизм } F \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda x = x\lambda \text{ для всех } x \in F,$$

справедливо и первое утверждение.

Следствие 6.5. *Пусть A и A' — обратимые матрицы. Тогда*

$$T_A = T_{A'} \Leftrightarrow \exists \lambda \in Z(F), \quad \lambda \neq 0, \quad \text{такое, что} \quad A' = A\lambda.$$

Доказательство. Утверждение $\Leftarrow$ очевидно. Обратно, если $T_A = T_{A'}$, то в силу предложения 6.3

$$A' = A\lambda = A \cdot (\lambda I).$$

Поэтому

$$T_{A'} = T_A T_{\lambda I},$$

т. е. $T_{\lambda I}$ — тождественный автоморфизм, откуда следует, что $\lambda \in Z(F)$.

Определение. *Обозначим группу автоморфизмов плоскости P^2_F, имеющих вид T_A, где A — некоторая обратимая матрица, через $PGL(2, F)$.* (Таким образом, $PGL(2, F)$ есть факторгруппа группы $GL(3, F)$ обратимых матриц по подгруппе матриц вида λI, где λ принадлежит центру F.)

Предложение 6.6. *Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' — две четверки точек, любые три из которых неколлинеарны. Тогда существует элемент $T \in PGL(2, F)$, такой, что*

$$T(A) = A', \quad T(B) = B', \quad T(C) = C', \quad T(D) = D'.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.9.

Заметьте, что, вообще говоря, отображение T не единственно. Однако если F — поле, то это отображение единственно по предложению 6.3 и следствию 6.5, так как в этом случае $F \equiv Z(F)$.

Предложение 6.7. *Пусть φ — произвольный автоморфизм плоскости P^2_F, оставляющий на месте четыре точки P_1, P_2, P_3, Q, фигурировавшие выше* (см. стр. 89). *Тогда существует автоморфизм $\sigma \in \mathrm{Aut}\, F$, такой, что*

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^\sigma, x_2^\sigma, x_3^\sigma).$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.11. (Здесь надо только показать, что в аналитической геометрии над произвольным телом F сохраняют силу построения, при помощи которых выше были найдены $a + b$ и ab.)

Предложение 6.8. *Отображение*

$$\operatorname{Aut} F \to \operatorname{Aut} \mathbb{P}_F^2,$$

задаваемое так:

$$\sigma \to \textit{отображение } \varphi \textit{ предложения } 6.7,$$

устанавливает изоморфизм группы $\operatorname{Aut} F$ *и подгруппы* $H \subset \operatorname{Aut} \mathbb{P}_F^2$, *состоящей из автоморфизмов с неподвижными точками* P_1, P_2, P_3, Q.

Доказательство. В силу предложения 6.7 рассматриваемое отображение есть отображение группы $\operatorname{Aut} F$ на группу H. Для того чтобы показать, что это отображение устанавливает взаимно однозначное соответствие между элементами рассматриваемых двух групп, применим σ и $\sigma' \in \operatorname{Aut} F$ к $(x, 1, 0)$. Тогда, если $(x^\sigma, 1, 0)$ и $(x^{\sigma'}, 1, 0)$ есть одна и та же точка плоскости $\mathbb{P}_F^2$, то

$$x^\sigma = x^{\sigma'} \quad \text{и} \quad \sigma = \sigma'.$$

Очевидно также, что наше отображение переносит групповую операцию с $\operatorname{Aut} F$ на H.

Соберем все, что мы знаем о группе $\operatorname{Aut} F$, в следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \operatorname{Aut} \mathbb{P}_F^2 \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
PGL(2, F) \arrow[dr, dash] & & H \simeq \operatorname{Aut} F \arrow[dl, dash] \\
 & K \simeq \operatorname{Inaut} F &
\end{tikzcd}$$

Две подгруппы $PGL(2, F)$ и H порождают $\operatorname{Aut} \mathbb{P}_F^2$, так как любой элемент последней группы может быть представлен в виде композиции элементов этих двух групп. (Последнее утверждение вытекает из предложений 6.6 и 6.7.) Пересечение K этих двух подгрупп изоморфно группе $\operatorname{Inaut} F$ внутренних автоморфизмов тела F. (См. предложения 6.3 и 6.4.)

Теперь мы выясним, в каких случаях на проективной плоскости $\mathbb{P}_F^2$ выполняются аксиомы Π_6 и Π_7.

Теорема 6.9.

На проективной плоскости P_F^2 выполняется аксиома Паппа $\Pi_6 \Leftrightarrow F$ — поле.

Доказательство. Во-первых, предположим, что аксиома Π_6 имеет место. Примем прямую $x_3 = 0$ за бесконечную прямую и условимся изображать элемент $a \in F$ точкой $(a, 0)$ оси x. Для двух точек $(a, 0)$,

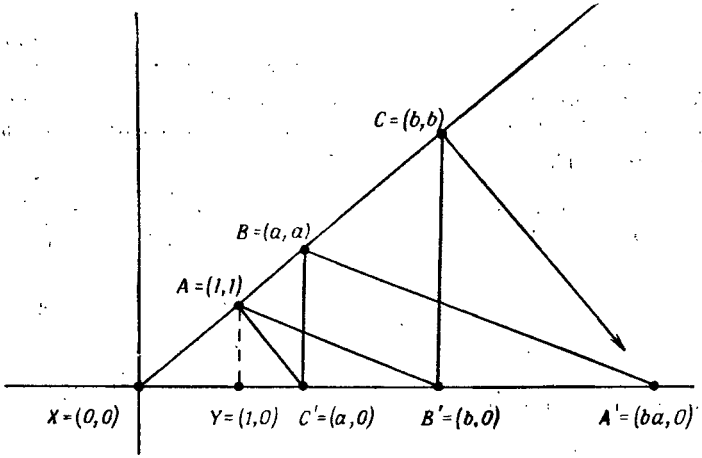


Рис. 34.

$(b, 0)$ мы можем с помощью рис. 11 построить произведение ab. Однако так как теперь мы имеем дело с телом F, а не с полем действительных чисел, мы должны доказать аналитически, что изображенные на рис. 11 построения здесь сохраняют силу.

Легко видеть, что уравнение прямой, проходящей через точки $(1, 1)$ и $(b, 0)$, имеет вид

$$x + (b - 1)\,y = b.$$

Следовательно, уравнение прямой, параллельной данной и проходящей через точку (a, a), имеет вид

$$x + (b - 1)\,y = ba.$$

Поэтому построенная точка есть точка $(ba, 0)$, см. рис. 34.

Для того чтобы получить произведение ab, мы обратим наш процесс, проведя прямую через точки $(1, 1)$ и $(a, 0)$, а затем параллельную ей прямую через точку (b, b). Но из аффинной формулировки аксиомы Π_6 следует, что мы получили ту же самую точку. Следовательно, $ab = ba$ и F коммутативно.

Прежде чем перейти к доказательству обратного утверждения, докажем, что справедлива

Лемма 6.10. *Пусть l, A, B, C и l', A', B', C' — два множества, состоящие из одной прямой и трех неколлинеарных точек плоскости P_F^2, не принадлежащих этой прямой. Тогда существует автоморфизм φ плоскости P_F^2, такой, что*

$$\varphi(l) = l', \quad \varphi(A) = A',$$
$$\varphi(B) = B', \quad \varphi(C) = C'.$$

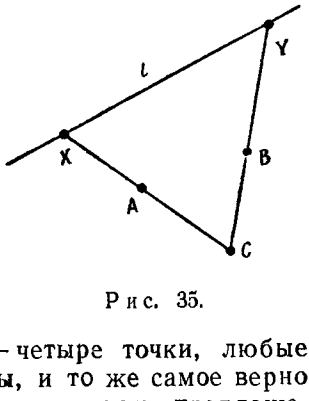


Рис. 35.

Доказательство леммы. Пусть

$$X = l \cdot AC \quad \text{и} \quad Y = l \cdot BC;$$

аналогично определим

$$X' = l' \cdot A'C', \quad Y' = l' \cdot B'C'$$

(рис. 35). Тогда A, B, X, Y — четыре точки, любые три из которых неколлинеарны, и то же самое верно для точек A', B', X', Y'. Поэтому в силу предложения 6.6 существует автоморфизм φ плоскости P_F^2, переводящий A, B, X, Y в A', B', X', Y'. Но тогда ясно, что φ переводит l в l' и C в C'.

Доказательство теоремы 6.9 (продолжение). Предположим теперь, что F есть поле, и докажем, что Π_6 выполняется.

Используем наши обычные обозначения: пусть $P = AB' \cdot A'B$, $R = BC' \cdot B'C$ и l'' — прямая PR (рис. 36). Предположим, что $X = l \cdot l'$ не принадлежит l''. (Если это не так, то мы можем заменить пару точек P, R парой P, Q или парой Q, R; если же все три пары точек принадлежат прямым, проходящим через X, то

P, Q, R коллинеарны и все доказано.) Пусть $Y = AR \cdot l'$. Тогда Y не принадлежит l'' и A, X, Y неколлинеарны. Следовательно, по лемме, мы можем найти автоморфизм φ плоскости P_F^2, переводящий l'' в прямую $x_3 = 0$, а A, X, Y — соответственно в точки (1, 1), (0, 0),

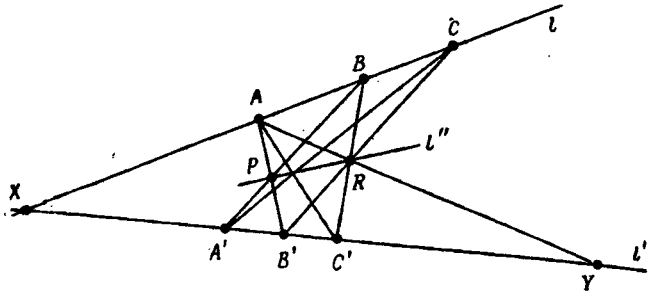


Рис. 36.

(1, 0). Но теперь мы вернулись к условиям рис. 34 и хотим доказать, что $AC' \parallel A'C$, а это следует из коммутативности тела F.

Теорема 6.11.

На проективной плоскости P_F^2 выполняется аксиома Фано $\Pi_7 \Leftrightarrow$ характеристика $F \neq 2$.

Доказательство. Используя автоморфизм плоскости P_F^2, мы сведем вопрос к следующему: в каком случае точки (1, 1, 0) (1, 0, 1) и (0, 1, 1), фигурирующие в доказательстве предложения 4.3, будут коллинеарными. Так как тело F может быть некоммутативным, то мы не можем использовать матрицы, а вынуждены искать непосредственное доказательство. Предположим, что эти три точки коллинеарны. В этом случае они удовлетворяют уравнению

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0,$$

где не все c_i равны нулю. Следовательно,

$$c_1 + c_2 = 0, \quad c_1 + c_3 = 0, \quad c_2 + c_3 = 0,$$

откуда вытекает, что $c_1 = -c_2$, $c_1 = -c_3$, $c_2 = -c_3$, и, значит, $2c_2 = 0$. Таким образом, в этом случае

$$\text{или} \quad c_2 = 0, \quad c_3 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \text{или} \quad 2 = 0,$$

т. е. характеристика тела F равна 2.

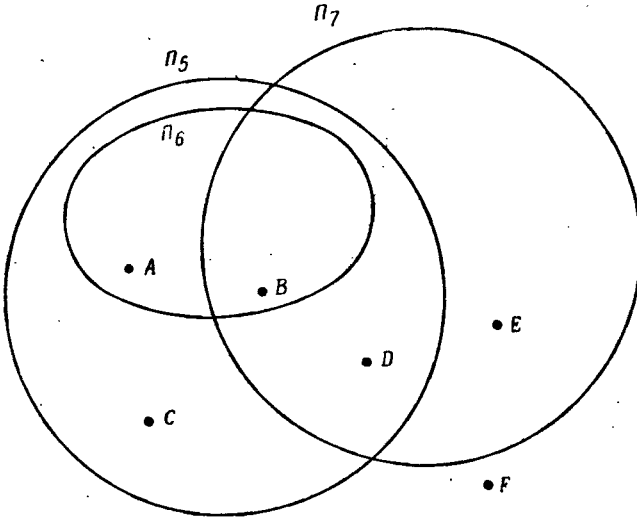


Рис. 37.

A — проективная плоскость, состоящая из семи точек; B — действительная проективная плоскость P^2_R; C — проективная плоскость P^2_K, построенная над телом K; D — проективная плоскость P^2_Q, построенная над телом кватернионов; E — свободная проективная плоскость, построенная для плоскости из четырех точек; F — свободная проективная плоскость, построенная для плоскости π_0 [π_0 = (проективная плоскость, состоящая из семи точек) $\cup$ $\cup$ (одна точка)].

Заметим, наконец, что для аксиом Π_5, Π_6, Π_7 справедлива единственная импликация

$$\Pi_6 \Rightarrow \Pi_5 \text{ (теорема 5.7).}$$

Для того чтобы убедиться в этом, мы укажем примеры различных проективных плоскостей, на которых выполняются или соответственно не выполняются те или другие аксиомы (см. рис. 37).

Примеры.

1° На проективной плоскости, состоящей из семи точек, выполняются Π_5 и Π_6, но не Π_7.

2° На действительной проективной плоскости $\mathbf{P}^2_{\mathbf{R}}$ выполняются Π_5, Π_6 и Π_7.

3° На свободной проективной плоскости, построенной для плоскости из 4 точек, выполняется Π_7, но не Π_5 и не Π_6.

4° Пусть Q — тело кватернионов. Тогда на $\mathbf{P}^2_Q$ выполняется Π_5 и Π_7 (так как $\operatorname{char} Q = 0$), но не Π_6.

5° Пусть K — некоммутативное тело характеристики 2. (Его можно получить следующим способом: пусть $k = \{0, 1\}$ — поле вычетов по модулю 2 и $k[t]$ — кольцо многочленов от t с коэффициентами из поля k; пусть, далее, α — эндоморфизм *) кольца $k[t]$, определенный условием $t \to t^2$, и

$$A = \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i(t) X^i \right\},$$

где X — (новое) неизвестное. Введем на A структуру кольца, полагая

$$Xp(t) = \alpha(p(t))\, X.$$

Можно показать, что A вкладывается в тело K, которое обязательно будет некоммутативным.) Тогда на $\mathbf{P}^2_K$ выполняется Π_5, но не Π_6 и не Π_7.

6° Пусть π_0 — проективная плоскость, состоящая из семи точек и одной добавочной точки, через которую не проходит ни одна прямая. Тогда свободная проективная плоскость, построенная для π_0, не удовлетворяет ни Π_5, ни Π_6, ни Π_7.

---

*) *Эндоморфизм* кольца K — это отображение φ: $K \to K$, переводящее кольцо K в себя и сохраняющее операции сложения и умножения элементов, т. е. удовлетворяющее условиям

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

ГЛАВА VII

КООРДИНАТЫ НА ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы ответим на вопрос, в каком случае проективная плоскость П изоморфна проективной плоскости типа P_F^2 для некоторого тела F. Или — в другой постановке — можно ли для заданной проективной плоскости П найти такое тело F и сопоставить точкам плоскости П однородные координаты (x_1, x_2, x_3), $x_i \in F$, так, чтобы прямые задавались линейными уравнениями.

Необходимым условием для этого является *выполнение на* П *аксиомы Дезарга* $П_5$, ибо, как мы видели, на плоскости P_F^2 эта аксиома всегда выполняется (теорема 6.1). Мы убедимся в том, что это условие является и достаточным.

Начнем с решения более простой задачи, с введения координат на аффинной плоскости A. Первым напрашивается такое решение: выберем три неколлинеарные точки плоскости A и обозначим их $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$. Пусть l — прямая, проходящая через $(0, 0)$ и $(1, 0)$ (рис. 38). Обозначим множество точек прямой l через F и определим сложение и умножение на F с помощью геометрического построения, рассмотренного в предложении 3.11. Теперь нужно проверить, что F — тело, т. е. доказать, что сложение коммутативно и ассоциативно, умножение ассоциативно и дистрибутивно и т. д. В доказательствах придется использовать довольно запутанные построения. Потом надо будет задать координаты на всей плоскости, используя координаты на l, и доказать, что прямые задаются линейными уравнениями[1]).

---

[1]) Ср. Зайденберг [13], гл. 3.

Однако мы используем другой метод, основанный на известном принципе: «передовая техника облегчает всякий труд». Поэтому мы сначала займемся изучением некоторых автоморфизмов аффинной плоскости.

Определение. *Пусть A — аффинная плоскость. Растяжением называется такой автоморфизм φ плоскости A, что для любых различных точек P, Q*

$$PQ \parallel P'Q', \quad \text{где} \quad \varphi(P) = P', \quad \varphi(Q) = Q'.$$

Другими словами, растяжение φ переводит параллельные прямые в параллельные прямые. Дополнив A

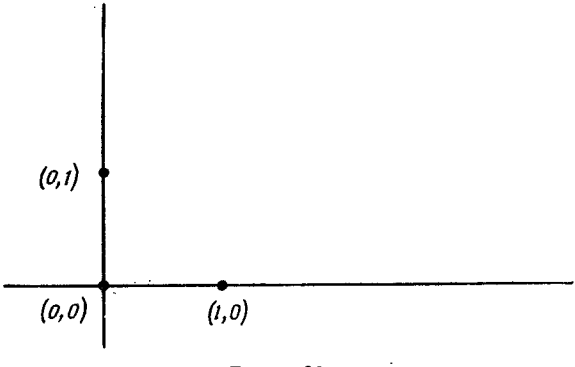


Рис. 38.

до проективной плоскости $\Pi = A \cup l_\infty$, можно сказать, что φ — автоморфизм плоскости Π, оставляющий на месте все точки бесконечной прямой l_∞.

Примеры. На действительной аффинной плоскости $\mathbf{A}^2_{\mathbb{R}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ *гомотетия* с центром O и коэффициентом k, определяемая равенствами

$$x' = kx, \quad y' = ky$$

(рис. 39а), есть растяжение. Действительно, пусть O — точка $(0, 0)$. Тогда если P и Q — произвольные точки, то $P' = \varphi(P)$ и $Q' = \varphi(Q)$ таковы, что OP'

и OQ' получаются из OP и OQ растяжением в k раз. Из подобия треугольников следует, что $PQ \parallel P'Q'$.

Другим примером растяжения на плоскости $\mathbf{A}^2_{\mathbf{R}}$ является *параллельный перенос*

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

(рис. 39б). В этом случае каждая точка P сдвигается на вектор (a, b), и снова $PQ \parallel P'Q'$ для любых P и Q.

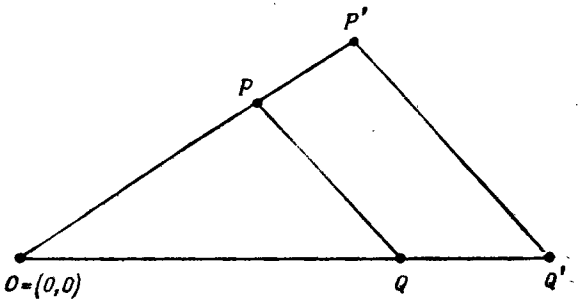


Рис. 39а.

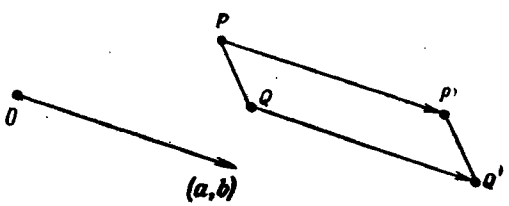


Рис. 39б.

Сейчас нас не будет интересовать вопрос о том, когда на аффинной плоскости A существуют нетривиальные растяжения. Мы пока займемся изучением некоторых свойств растяжений.

Предложение 7.1. *Пусть A — аффинная плоскость. Множество* $\mathrm{Dil}(A)$ *всех ее растяжений образует подгруппу группы* $\mathrm{Aut}\, A$ *всех ее автоморфизмов.*

Доказательство. Мы должны проверить, что композиция двух растяжений есть растяжение и что

отображение, обратное к растяжению, снова есть растяжение. Но это сразу же следует из того, что параллельность есть отношение эквивалентности.

Предложение 7.2. *Растяжение, имеющее две различные неподвижные точки, есть тождественное отображение.*

Доказательство. Пусть φ — растяжение, и пусть P, Q — две его различные неподвижные точки. Рассмотрим точку R, не принадлежащую прямой PQ (рис. 40), и положим $\varphi(R) = R'$. Тогда

$$PR \parallel PR' \quad \text{и} \quad QR \parallel QR',$$

так как φ — растяжение. Следовательно, $R' \in PR$ и $R' \in QR$. Но $PR \neq QR$, так как $R \notin PQ$. Значит, $PR \cdot QR = \{R'\}$, т. е. $R = R'$, а следовательно, R — тоже неподвижная точка.

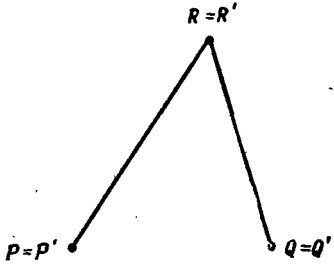


Рис. 40.

Но R — произвольная точка, не принадлежащая PQ. Применив те же рассуждения к точкам P и R, мы получим, что любая точка прямой PQ тоже неподвижна, т. е. что φ — тождественное отображение.

Следствие 7.3. *Растяжение определяется образами двух точек* (т. е. любые два растяжения φ и ψ, одинаково действующие на две различные точки P и Q, совпадают).

Доказательство. В силу наших условий, P и Q суть неподвижные точки отображения (растяжения!) $\psi^{-1}\varphi$, поэтому $\psi^{-1}\varphi$ — тождественное отображение.

Таким образом, растяжение, отличное от тождественного отображения, имеет не более одной неподвижной точки. Введем специальное название для растяжения без неподвижных точек.

Определение. *Параллельным переносом называется растяжение, вовсе не имеющее неподвиж-*

ных точек или оставляющее все точки на месте (т. е. тождественное отображение).

Предложение 7.4. *Если* φ — *параллельный перенос, отличный от тождественного отображения, то для любых двух точек* P, Q *мы имеем* $PP' \parallel QQ'$, *где* $\varphi(P) = P'$, $\varphi(Q) = Q'$ (см. рис. 41).

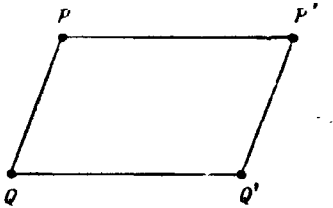


Рис. 41.

Доказательство. Пусть $PP' \nparallel QQ'$. Тогда эти прямые пересекаются в точке O. Но φ — растяжение, поэтому φ переводит PP' в себя и QQ' в себя. (Пусть, например, $R \in PP'$; тогда $PR \parallel P'R'$, но $PR = PP'$, а значит, $R' \in PP'$.) Следовательно, $\varphi(O) = O$, т. е. O — неподвижная точка, что по условию невозможно.

Предложение 7.5. *Множество параллельных переносов аффинной плоскости* A *образует подгруппу* $\mathrm{Tran}(A)$ *группы растяжений* $\mathrm{Dil}(A)$. *Более того,* $\mathrm{Tran}(A)$ — *нормальный делитель группы* $\mathrm{Dil}(A)$, *т. е. для любого* $\tau \in \mathrm{Tran}(A)$ *и* $\sigma \in \mathrm{Dil}(A)$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} \in \mathrm{Tran}(A).$$

Доказательство. Сначала мы должны проверить, что обратное отображение и композиция двух параллельных переносов тоже представляет собой параллельный перенос. Пусть τ_1, τ_2 — два параллельных переноса; тогда $\tau_1\tau_2$ — растяжение. Предположим, что оно имеет неподвижную точку P. Тогда $\tau_2(P) = P'$, $\tau_1(P') = P$. Пусть Q — любая точка, не принадлежащая PP', и пусть $Q' = \tau_2(Q)$ (рис. 42). Из предложения 7.4 следует, что

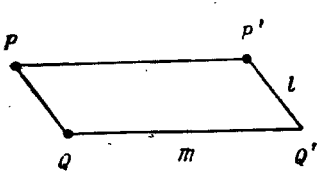


Рис. 42.

$$PQ \parallel P'Q' \text{ и } PP' \parallel QQ'.$$

Значит, точка Q' принадлежит пересечению прямой $l \parallel PQ$, проходящей через P', и прямой $m \parallel PP'$, проходящей через Q.

По той же причине $\tau_1(Q') = Q$. Следовательно, Q — тоже неподвижная точка растяжения $\tau_1\tau_2$. Применяя это же рассуждение к Q, мы получим, что также и любая точка прямой PP' неподвижна, т. е. что $\tau_1\tau_2 = \mathrm{id}$ — тождественное отображение, а значит, $\tau_1\tau_2$ — параллельный перенос. Ясно, что обратное к параллельному переносу отображение тоже есть параллельный перенос, т. е. множество параллельных переносов образует подгруппу $\mathrm{Tran}(A)$ группы $\mathrm{Dil}(A)$.

Пусть теперь

$$\tau \in \mathrm{Tran}(A), \quad \sigma \in \mathrm{Dil}(A).$$

Тогда очевидно, что $\sigma\tau\sigma^{-1}$ — растяжение. Если оно не имеет неподвижных точек, то все доказано; если же $\sigma\tau\sigma^{-1}$ имеет неподвижную точку P, то из того, что

$$\sigma\tau\sigma^{-1}(P) = P,$$

следует, что

$$\tau\sigma^{-1}(P) = \sigma^{-1}(P).$$

Таким образом, τ имеет неподвижную точку $\sigma^{-1}(P)$, а значит,

$$\tau = \mathrm{id} \text{ и } \sigma\tau\sigma^{-1} = \mathrm{id},$$

т. е. снова все доказано.

Определение. *Пусть G — группа, а H — ее подгруппа; тогда H — нормальный делитель группы G, если*

$$\forall h \in H \text{ и } \forall g \in G\colon\ ghg^{-1} \in H.$$

(Например, любая подгруппа абелевой группы — нормальный делитель.)

Мы подошли к вопросу существования параллельных переносов и растяжений. Для этого нам понадобится аксиома Дезарга. Мы увидим, что наши два вопроса существования эквивалентны двум аффинным вариантам аксиомы Дезарга. Это один из тех случаев, когда некоторая конфигурационная аксиома (аксиома, заключающаяся в «замкнутости» некоторой конфигурации *)) эквивалентна некоторому геометри-

*) Ср. Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен [9].

ческому свойству изучаемого пространства. Здесь аксиома Дезарга эквивалентна тому, что пространство имеет „достаточно много“ автоморфизмов (смысл этого высказывания станет ясным из дальнейшего).

A_5а. (Малая аксиома Дезарга.) *Пусть l, m, n — три (различные) параллельные прямые, A, $A' \in l$, B, $B' \in m$, C, $C' \in n$ — различные точки. Предположим, что $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$; тогда $BC \parallel B'C'$* (рис. 43).

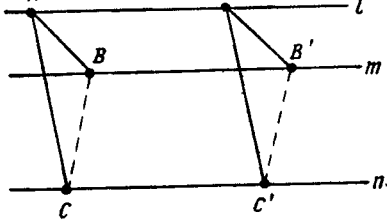


Рис. 43.

Заметим, что если наша аффинная плоскость содержится в проективной плоскости П, то A_5а следует из $П_5$. Действительно, прямые l, m, n пересекаются в точке O бесконечной прямой l_∞. По нашим предположениям

$$P = AB \cdot A'B' \in l_\infty, \quad Q = AC \cdot A'C' \in l_\infty;$$

$П_5$ утверждает, что $R = BC \cdot B'C' \in l_\infty$, т. е. что $BC \parallel B'C'$.

Теорема 7.6. *На аффинной плоскости A два следующих утверждения эквивалентны:*

1° *имеет место аксиома* A_5а;

2° *для любых двух заданных точек P, $P' \in A$ существует единственный параллельный перенос τ, такой, что $\tau(P) = P'$.*

Доказательство. а) $1° \Rightarrow 2°$. Предположим, что A_5а имеет место. Если $P = P'$, то параллельный перенос, переводящий P в P', — это тождественное отображение и оно единственно, т. е. все доказано.

Предположим теперь, что $P \neq P'$, и построим параллельный перенос τ, переводящий P в P'.

Шаг 1. Определим на $A \setminus l$, где l — прямая PP', отображение $\tau_{PP'}$ следующим образом: если $Q \notin l$ и Q' — четвертая вершина параллелограмма с тремя вершинами P, P' и Q (рис. 44), то положим $\tau_{PP'}(Q) = Q'$.

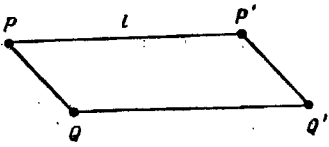


Рис. 44.

Шаг 2. Если $\tau_{PP'}(Q) = Q'$, то для любого R, $R \notin PP'$, $R \notin QQ'$, имеем

$$\tau_{PP'}(R) = \tau_{QQ'}(R).$$

Действительно, положим $R' = \tau_{PP'}(R)$. Тогда по A_5а $QR \parallel Q'R'$ (рис. 45) и поэтому $R' = \tau_{QQ'}(R)$.

Шаг 3. Теперь для всех точек $S \in A$ можно определить $\tau(S)$ как $\tau_{PP'}(S)$ или $\tau_{QQ'}(S)$: ведь для

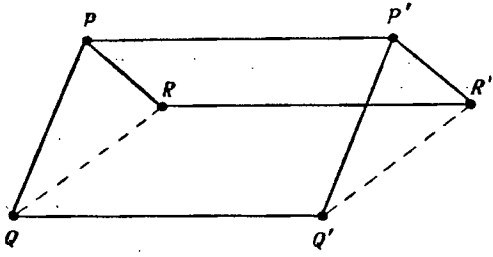


Рис. 45.

каждой точки одно из этих двух отображений определено, а там, где определены оба эти отображения, они совпадают.

Шаг 4. Заметим, что если R — произвольная точка и $\tau(R) = R'$, то τ совпадает с $\tau_{RR'}$ во всех тех точках, где определены оба эти отображения. Это следует из тех же рассуждений, что и выше.

Шаг 5. Ясно, что τ есть отображение A на A и что оно устанавливает взаимно однозначное соот-

ветствие между парами точек A. Пусть теперь точки X, Y, Z коллинеарны и X', Y', Z' — их образы. Тогда

$$\tau(Y) = \tau_{XX'}(Y) \text{ и } \tau(Z) = \tau_{XX'}(Z).$$

Из определения $\tau_{XX'}$ сразу же следует, что точки X', Y', Z' коллинеарны. Следовательно, τ — автоморфизм плоскости A. Легко видеть, что это есть растяжение без неподвижных точек, т. е. параллельный перенос, переводящий P в P'.

Наконец, единственность τ следует из того, что параллельный перенос с неподвижной точкой есть тождественное отображение.

б) $2° \Rightarrow 1°$. Предположим, что существование параллельных переносов имеет место, и выведем отсюда A_5а. Пусть даны l, m, n, A, A', B, B', C, C' аксиомы A_5а, и пусть τ — параллельный перенос, переводящий A в A'. Тогда по предположению $\tau(B) = B'$ и $\tau(C) = C'$. Следовательно, $BC \parallel B'C'$, так как τ — растяжение,

ч. т. д.

Предложение 7.7. *Если выполняется* A_5а, *то группа* Tran (A) *коммутативна.*

Доказательство. Пусть τ, τ' — два параллельных переноса. Мы должны показать, что $\tau\tau' = \tau'\tau$.

Случай 1. Пусть τ и τ' — параллельные переносы в разных направлениях. Пусть задана точка P и $\tau(P) = P'$, $\tau'(P) = Q$. Тогда

$$\tau\tau'(P) = \tau(Q) \text{ и } \tau'\tau(P) = \tau'(P').$$

Так как обе эти точки находятся как четвертая вершина параллелограмма с вершинами P, P', Q, то они совпадают, и, следовательно, $\tau\tau' = \tau'\tau$. (Заметьте, что пока мы не использовали A_5а.)

Случай 2. Пусть τ и τ' — параллельные переносы в одном и том же направлении, а τ^* — параллельный перенос в другом направлении (здесь мы используем теорему 7.6 и аксиому A_3 для того, чтобы убедиться, что существуют это «другое»

направление и перенос в этом направлении). Тогда

$$\tau\tau' = \tau\tau'\tau^*\tau^{*-1} = (\tau'\tau^*)\tau\tau^{*-1},$$

поскольку τ и $\tau'\tau^*$ — параллельные переносы в разных направлениях. Отсюда

$$\tau'\tau\tau^*\tau^{*-1} = \tau'\tau,$$

так как τ и τ^* — параллельные переносы в разных направлениях,

ч. т. д.

Определение. *Пусть G — группа, а H, K — ее подгруппы. Группа G есть полупрямое произведение H и K, если:*

1° *H — нормальный делитель группы G;*

2° *$H \cap K = \{1\}$;*

3° *H и K вместе порождают G.*

Из определения следует, что каждый элемент $g \in G$ может быть представлен единственным образом в виде произведения $g = hk$, где $h \in H$, $k \in K$.

Определение. *Пусть O — точка плоскости A; обозначим через $\mathrm{Dil}_O(A)$ подгруппу группы $\mathrm{Dil}(A)$, состоящую из таких растяжений φ, что $\varphi(O) = O$.*

Предложение 7.8. *Группа $\mathrm{Dil}(A)$ есть полупрямое произведение групп $\mathrm{Tran}(A)$ и $\mathrm{Dil}_O(A)$.*

Доказательство. 1° Мы уже видели, что $\mathrm{Tran}(A)$ — нормальный делитель группы $\mathrm{Dil}(A)$.

2° Если $\varphi \in \mathrm{Tran}(A) \cap \mathrm{Dil}_O(A)$, то φ имеет неподвижную точку; но φ — параллельный перенос и, следовательно, φ — тождественное отображение.

3° Пусть $\varphi \in \mathrm{Dil}(A)$ и $\varphi(O) = Q$. Обозначим через τ такой параллельный перенос, что $\tau(O) = Q$. Тогда

$$\tau^{-1}\varphi \in \mathrm{Dil}_O(A) \text{ и } \varphi = \tau\tau^{-1}\varphi,$$

откуда следует, что $\mathrm{Tran}(A)$ и $\mathrm{Dil}_O(A)$ порождают всю группу $\mathrm{Dil}(A)$. (Заметьте, что здесь мы использовали существование параллельных переносов!)

A_5б. (Большая аксиома Дезарга.) *Пусть O, A, B, C, A', B', C' — различные точки аффинной плоскости, причем*

$$O,\ A,\ A' \text{ коллинеарны,}$$
$$O,\ B,\ B' \text{ коллинеарны,}$$
$$O,\ C,\ C' \text{ коллинеарны}$$

и

$$AB \parallel A'B',\ AC \parallel A'C';$$

тогда $BC \parallel B'C'$ (см. рис. 46).

Заметим, что если аффинная плоскость вложена в проективную плоскость П, то это утверждение следует из $П_5$.

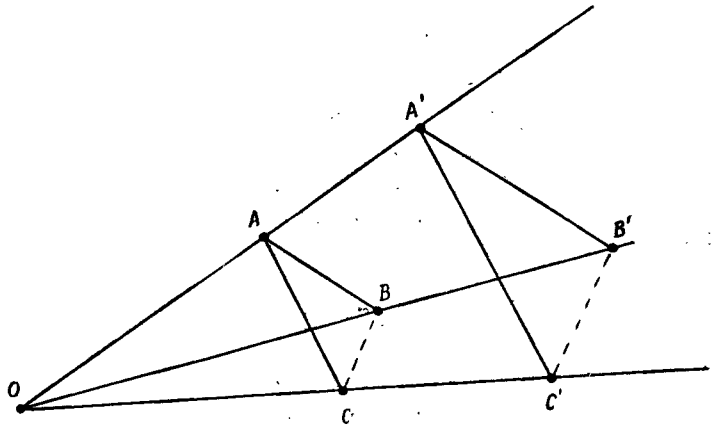


Рис. 46.

Теорема 7.9. *На аффинной плоскости A два следующих утверждения эквивалентны:*

1° *имеет место аксиома* A_5б;

2° *для любых трех заданных точек O, P, P' плоскости A, где $P \neq O$, $P' \neq O$ и O, P, P' коллинеарны, существует единственное растяжение σ, такое, что $\sigma(O) = O$ и $\sigma(P) = P'$.*

Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 7.6, поэтому его детали предоставляются читателю. Вот план доказательства.

а) $1° \Rightarrow 2°$. При заданных коллинеарных точках O, P, P' определим отображение $\varphi_{O,P,P'}$ для точек Q, не принадлежащих содержащей P, P', O прямой l, следующим образом: $\varphi_{O,P,P'}(Q) = Q'$, где Q' — точка пересечения прямой OQ с прямой, проходящей через P' и параллельной PQ (рис. 47).

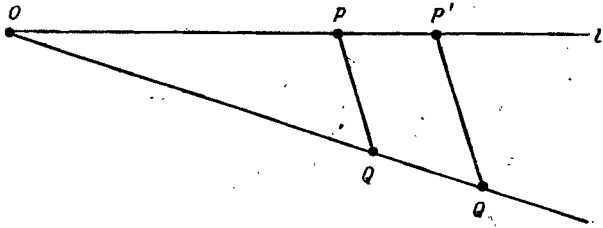


Рис. 47.

Далее, если $\varphi_{O,P,P'}(Q) = Q'$, то надо доказать согласованность $\varphi_{O,P,P'}$ с (аналогично определенным) отображением $\varphi_{O,Q,Q'}$ на пересечении тех областей, где эти отображения определены. (Вот здесь и используется A_5б!)

Теперь мы можем определить σ как одно из двух этих отображений, причем $\sigma(O) = O$ и σ определено на всей плоскости A. Далее, надо показать, что если

$$\sigma(R) = R', \quad R \neq O,$$

то σ совпадает с $\varphi_{O,R,R'}$ всюду, где $\varphi_{O,R,R'}$ определено. Ясно, что σ есть отображение A на A и что оно устанавливает взаимно однозначное соответствие между парами точек A. Используя предыдущие результаты, можно показать, что σ переводит прямые в прямые, т. е. является автоморфизмом аффинной плоскости A, и что $PQ \parallel \sigma(P)\sigma(Q)$ для любых P, Q, т. е. σ — растяжение. Единственность σ вытекает из следствия 7.3.

б) $2° \Rightarrow 1°$. Пусть O, A, B, C, A', B', C' удовлетворяют предположениям A_5б, и пусть σ — растяже-

ние с неподвижной точкой O, переводящее A в A'. Тогда по предположению $\sigma(B)=B'$ и $\sigma(C)=C'$. Из того, что σ — растяжение, следует, что $BC \parallel B'C'$.

Замечание. Используя теоремы 7.6 и 7.9, можно показать, что

$$A_5б \Rightarrow A_5а,$$

хотя геометрически это и не очевидно.

Действительно, пусть имеет место $A_5б$, и пусть P и P' — две произвольные точки. Мы построим параллельный перенос, переводящий P в P'; так как точки P и P' произвольны, отсюда будет следовать, что имеет место и $A_5а$.

Пусть Q — точка, не принадлежащая PP', и Q' — четвертая вершина параллелограмма с тремя

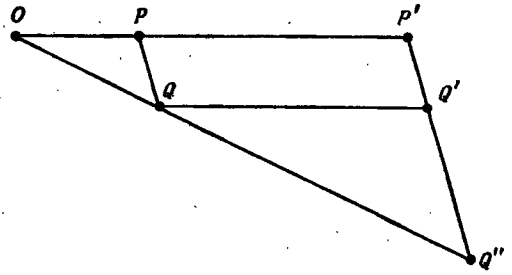


Рис. 48.

вершинами P, P', Q (рис. 48). Пусть O — точка прямой PP', $O \neq P$ и $O \neq P'$; через σ_1 обозначим растяжение с неподвижной точкой O, переводящее P в P' (оно существует по теореме 7.9). Пусть $\sigma_1(Q)=Q''$. Тогда точки P', Q', Q'' коллинеарны, а значит, существует растяжение σ_2 с неподвижной точкой P', переводящее Q'' в Q'.

Рассмотрим преобразование $\tau=\sigma_2\sigma_1$.

Это произведение растяжений, а следовательно, растяжение. Легко видеть, что $\tau(P)=P'$ и $\tau(Q)=Q'$. Любая неподвижная точка преобразования τ должна

принадлежать и PP', и QQ' (ибо если X — неподвижная точка, то $XP \parallel XP' \Rightarrow X$, P, P' коллинеарны; то же имеет место и для Q). Но $PP' \parallel QQ'$, т. е. у τ нет неподвижных точек. (Здесь мы считаем, что $P \neq P'$, но если $P = P'$, то мы рассмотрели бы тождественное отображение, переводящее P в P.) Следовательно, τ — параллельный перенос, переводящий P в P', и в силу теоремы 7.6 аксиома A_5а имеет место.

Теперь мы уже владеем той «передовой техникой», о которой говорили на стр. 98, и можем приступить к введению на аффинной плоскости координат. Однако до этого мы построим еще несколько новых объектов. Наша программа такова.

1° Построим некоторое тело F.

2° Зададим координаты каждой точки плоскости A так, что они будут находиться во взаимно однозначном соответствии с упорядоченными парами элементов тела F.

3° Найдем формулы, выражающие в этих координатах произвольный параллельный перенос плоскости A.

4° Найдем формулы, выражающие произвольное растяжение.

5° Наконец, покажем, что прямые на A задаются линейными уравнениями, откуда будет следовать, что A изоморфна A_F^2.

В процессе этого построения нам придется проверить очень много простых фактов, но мы и не будем пытаться доводить все рассуждения до конца. В некоторых местах мы ограничимся указаниями и предоставим тривиальные рассуждения читателю.

1° Определение тела F. Выберем прямую l плоскости A и две точки этой прямой, которые мы обозначим символами 0 и 1 (рис. 49). Пусть теперь F — множество точек прямой l.

Пусть $a \in F$ (т. е. пусть a есть точка l); обозначим через τ_a единственный параллельный перенос, переводящий 0 в a (здесь мы используем аксиому A_5а),

а через σ_a — единственное растяжение с неподвижной точкой 0, переводящее 1 в a (при определении σ_a мы предполагаем, что $a \neq 0$).

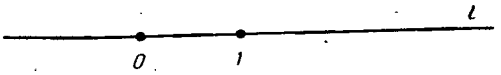


Рис. 49.

Определим *сложение* на F следующим образом. Если a, $b \in F$, то

$$a + b = \tau_a \tau_b (0) = \tau_a (b).$$

Так как множество переносов образует абелеву группу, то отсюда сразу следует, что сложение ассоциативно и коммутативно:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a + b = b + a$$

и что 0 — нейтральный элемент этой бинарной операции (т. е. что $a + 0 = a$), а $\tau_a^{-1}(0) = -a$ — элемент, обратный a относительно сложения (т. е. $a + (-a) = 0$). Таким образом, мы доказали, что F по сложению образует коммутативную группу. (Обратите внимание на то, насколько здесь все получается проще, чем при реализации программы, предложенной в начале этой главы!)

Из определения сложения следует, что

$$\tau_{a+b} = \tau_a \tau_b \quad \text{для любых} \quad a, b \in F.$$

Умножение мы определим следующим образом:

$$\forall a \in F \quad \text{имеем} \quad 0 \cdot a = 0.$$

Пусть, далее, a, $b \in F$, $b \neq 0$; тогда положим

$$ab = \sigma_b(a) = \sigma_b \sigma_a (1).$$

Так как растяжения образуют группу, то

$$(ab)c = a(bc);$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad \text{для любого} \quad a \in F;$$

$\sigma_a^{-1}(1) = a^{-1}$ есть элемент, обратный a относительно умножения (т. е. $a \cdot a^{-1} = 1$).

Поэтому ненулевые элементы F образуют группу по умножению. Более того, мы имеем (при $b \neq 0$)

$$\tau_{ab} = \sigma_b \tau_a \sigma_b^{-1}, \quad \sigma_{ab} = \sigma_b \sigma_a.$$

Нам осталось установить справедливость для F дистрибутивных законов. Оказывается, доказательство одного из них гораздо сложнее, чем доказательство другого, — может быть, потому, что наше определение операции умножения несимметрично. Сначала рассмотрим выражение $(a+b)c$. Если $c=0$, то

$$(a+b)c = 0 = ac + bc,$$

и все доказано. Если же $c \neq 0$, то мы используем приведенную выше формулу и найдем

$$\tau_{(a+b)c} = \sigma_c \tau_{a+b} \sigma_c^{-1} = \sigma_c \tau_a \tau_b \sigma_c^{-1} =$$
$$= \sigma_c \tau_a \sigma_c^{-1} \sigma_c \tau_b \sigma_c^{-1} = \tau_{ac} \tau_{bc} = \tau_{ac+bc}.$$

Теперь, применяя правую и левую части равенства к точке 0, получаем

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Для доказательства второго дистрибутивного закона нам понадобятся некоторые предварительные сведения. Для любой прямой m плоскости A рассмотрим группу $\mathrm{Tran}_m(A)$ параллельных переносов в направлении m, т. е. таких параллельных переносов $\tau \in \mathrm{Tran}(A)$, что либо $\tau = \mathrm{id}$, либо $PP' \parallel m$ для любой точки $P \in A$ (где, как обычно, $\tau(P) = P'$).

Лемма 7.10. *Пусть m и n — прямые плоскости A* (они могут и совпадать), $\tau' \in \mathrm{Tran}_m(A)$ и $\tau'' \in \mathrm{Tran}_n(A)$ — *некоторые параллельные переносы, отличные от тождественного отображения, и O — какая-то фиксированная точка плоскости A. Определим отображение*

$$\varphi\colon \mathrm{Tran}_m(A) \to \mathrm{Tran}_n(A)$$

следующим образом: для каждого $\tau \in \mathrm{Tran}_m(A)$, $\tau \neq \mathrm{id}$, существует единственное растяжение $\sigma \in \mathrm{Dil}_O(A)$ с неподвижной точкой O, такое, что $\tau = \sigma\tau'\sigma^{-1}$. (Действительно, выберем σ так, что $\sigma(\tau'(O)) = \tau(O)$.)

Положим

$$\varphi(\tau) = \sigma\tau''\sigma^{-1}$$

(с тем же самым σ). *Тогда* φ — *гомоморфизм групп* $\mathrm{Tran}_m(A)$ *и* $\mathrm{Tran}_n(A)$, *т. е. для любых* $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Tran}_m(A)$

$$\varphi(\tau_1\tau_2) = \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2).$$

Доказательство. Случай 1. Пусть $m \nparallel n$. Предположим, что m, n проходят через O (этого всегда можно добиться, сдвигая m и n параллельно самим

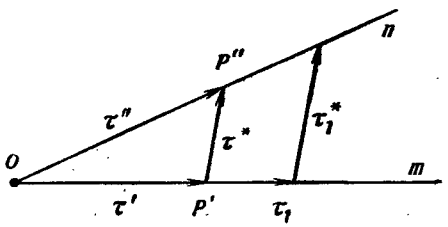


Рис. 50.

себе), и положим $\tau'(O) = P'$, $\tau''(O) = P''$. Обозначим через τ^* единственный параллельный перенос, переводящий P' в P'' (см. рис. 50). Тогда

$$\tau'' = \tau'\tau^*.$$

Пусть $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{Tran}_m(A)$, а σ_1, σ_2 — соответствующие τ_1 и τ_2 растяжения. Тогда

$$\varphi(\tau_1) = \sigma_1\tau''\sigma_1^{-1} = \sigma_1\tau'\tau^*\sigma_1^{-1} = \sigma_1\tau'\sigma_1^{-1}\sigma_1\tau^*\sigma_1^{-1} =$$
$$= \tau_1\sigma_1\tau^*\sigma_1^{-1} = \tau_1\tau_1^*,$$

где мы положили $\tau_1^* = \sigma_1\tau^*\sigma_1^{-1}$, и аналогично

$$\varphi(\tau_2) = \tau_2\tau_2^*,$$

где $\tau_2^* = \sigma_2\tau^*\sigma_2^{-1}$. Наконец,

$$\varphi(\tau_1\tau_2) = \tau_1\tau_2\tau_3^*,$$

где $\tau_3^* = \sigma_3\tau^*\sigma_3^{-1}$, а σ_3 соответствует $\tau_1\tau_2$.

Таким образом, получаем

$$\varphi(\tau_1\tau_2)=\tau_1\tau_2\tau_3^*,\quad \varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)=\tau_1\tau_2\tau_1^*\tau_2^*.$$

Но $\varphi(\tau_1\tau_2)$ и $\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2)$ — параллельные переносы в одном и том же направлении m, а τ_3^* и $\tau_1^*\tau_2^*$ — переносы в том же направлении, что и τ^*. А это возможно лишь в том случае, когда

$$\tau_3^*=\tau_1^*\tau_2^* \quad \text{и} \quad \varphi(\tau_1\tau_2)=\varphi(\tau_1)\varphi(\tau_2),$$

что мы как раз и хотели доказать. (Для того чтобы сделать эти рассуждения более наглядными, рассмотрите точки Q и R — образы точки O при рассматриваемых параллельных переносах. Мы получаем, что точки O, Q, R коллинеарны и что точки $\tau_1\tau_2(O)$, Q, R также коллинеарны, откуда следует, что $Q=R$.)

Случай 2. Пусть $m \parallel n$, и пусть $\tau', \tau'' \in \mathrm{Tran}_m(A)$. Выберем некоторую прямую o, не параллельную m, и рассмотрим параллельный перенос $\tau''' \in \mathrm{Tran}_o(A)$. Определим ψ_1: $\mathrm{Tran}_m(A) \to \mathrm{Tran}_o(A)$, используя τ' и τ''', и ψ_2: $\mathrm{Tran}_o(A) \to \mathrm{Tran}_m(A)$, используя τ''' и τ''.

Из рассуждений случая 1 следует, что ψ_1 и ψ_2 — гомоморфизмы, следовательно, $\varphi=\psi_2\psi_1$ — тоже гомоморфизм,

ч. т. д.

(Обратите внимание на то, насколько похоже это доказательство на доказательство предложения 7.7!)

Теперь мы можем доказать второй дистрибутивный закон. Рассмотрим выражение $c(a+b)$. В условиях леммы 7.10 примем $m=n=l$, $O=0$, $\tau'=\tau_l$ и $\tau''=\tau_c$. Тогда φ — отображение

$$\mathrm{Tran}_l(A) \to \mathrm{Tran}_l(A),$$

при любом a переводящее τ_a в τ_{ca}; действительно, если $\tau_a=\sigma_a\tau_l\sigma_a^{-1}$, то $\sigma=\sigma_a$ и $\sigma_a\tau_c\sigma_a^{-1}=\tau_{ca}$. Но лемма 7.10 утверждает, что φ — гомоморфизм, т. е. что для любых a, $b \in F$

$$\varphi(\tau_a\tau_b)=\varphi(\tau_a)\varphi(\tau_b) \quad \text{или} \quad \varphi(\tau_{a+b})=\varphi(\tau_a)\varphi(\tau_b).$$

Следовательно,

$$\tau_{c(a+b)}=\tau_{ca}\tau_{cb}=\tau_{ca+cb};$$

применяя стоящие с обеих сторон последнего равенства отображения к точке O, получаем

$$c(a+b)=ca+cb,$$

ч. т. д.

Таким образом, мы доказали, что справедлива

Теорема 7.11. *Пусть A — аффинная плоскость, на которой выполняются аксиомы A_5а и A_5б, и пусть l — прямая плоскости A, а 0 и 1 — две точки прямой l. Обозначим множество всех точек прямой l через F и определим сложение и умножение точек l так, как это было описано выше. Тогда F — тело.*

Теперь на плоскости A можно ввести координаты. Мы уже выбрали на плоскости A прямую l и две точки 0 и 1, что нам было нужно для построения тела F. Теперь выберем другую прямую m, проходящую через 0, и зафиксируем на ней точку $1'$

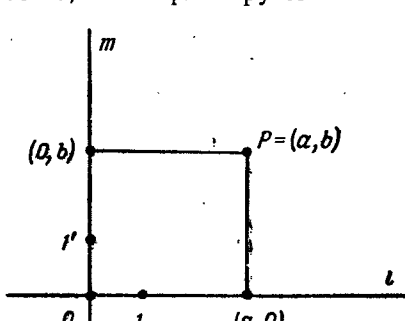


Рис. 51.

(рис. 51). Каждой точке $P\in l$, соответствующей элементу $a\in F$, припишем координаты $(a, 0)$. Таким образом, координаты точек 0 и 1 будут $(0, 0)$ и $(1, 0)$ соответственно.

Если $P\in m$, $P\neq 0$, то существует единственное растяжение σ с неподвижной точкой 0, переводящее $1'$ в P. Растяжение σ должно иметь вид σ_a, где $a\in F$. Припишем точке P координаты $(0, a)$. Наконец,

если P не принадлежит ни l, ни m, то проведем через P прямые, параллельные l и m. Пусть они пересекают m и l соответственно в точках $(0, b)$ и $(a, 0)$. Тогда точке P мы припишем координаты (a, b).

Легко видеть, что таким образом мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости A и упорядоченными парами элементов тела F. Осталось доказать, что прямые в этой системе координат задаются линейными уравнениями. Но это будет сделано после того, как мы найдем уравнения параллельного переноса и растяжения (гомотетии).

Займемся изучением уравнений параллельных переносов и растяжений в нашей системе координат. Сначала введем некоторые обозначения. Для произвольного $a \in F$ обозначим через τ'_a перенос, переводящий 0 в $(0, a)$. Таким образом, τ'_1 — перенос, переводящий 0 в $1'$, и для любого $a \in F$, $a \neq 0$,

$$\tau'_a = \sigma_a \tau'_1 \sigma_a^{-1}$$

(это следует из определения точки $(0, a)$). Из леммы 7.10 вытекает, далее, что отображение $\tau_a \to \tau'_a$ группы $\mathrm{Tran}_l(A)$ в группу $\mathrm{Tran}_m(A)$ — гомоморфизм, и, следовательно, для любых $a, b \in F$ справедливы формулы

$$\tau'_{a+b} = \tau'_a \tau'_b, \quad \tau'_{ab} = \sigma_b \tau'_a \sigma_b^{-1}.$$

Предложение 7.12. *Пусть τ — параллельный перенос на плоскости A, причем $\tau(0) = (a, b)$. Тогда τ переводит произвольную точку $Q = (x, y)$ в такую точку $Q' = (x', y')$, что*

$$x' = x + a, \quad y' = y + b.$$

Доказательство. Действительно, пусть τ_{0Q} — параллельный перенос, переводящий 0 в Q. Тогда $\tau_{0Q} = \tau_x \tau'_y$; в частности, $\tau = \tau_a \tau'_b$. Поэтому

$$\tau(Q) = \tau\tau_{0Q}(0) = \tau_a \tau'_b \tau_x \tau'_y(0) = \tau_a \tau_x \tau'_b \tau'_y(0) = \\ = \tau_{a+x} \tau'_{b+y}(0) = (x + a, \ y + b).$$

Предложение 7.13. *Пусть* σ — *растяжение плоскости* A *с неподвижной точкой* 0. *Тогда* $\sigma = \sigma_a$, *где* $a \in F$, *причем* σ *переводит точку* $Q = (x, y)$ *в такую точку* $Q' = (x', y')$, *что*

$$x' = xa, \quad y' = ya.$$

[Если $a \neq 1$, то σ есть *гомотетия с центром* 0 и (правым) *коэффициентом* a.]

Доказательство. Еще раз выпишем равенство $\tau_{0Q} = \tau_x \tau'_y$. Из него следует, что

$$\sigma(Q) = \sigma_a \tau_x \tau'_y (0) = \sigma_a \tau_x \tau'_y \sigma_a^{-1}(0) = \sigma_a \tau_x \sigma_a^{-1} \sigma_a \tau'_y \sigma_a^{-1}(0) =$$
$$= \tau_{xa} \tau'_{ya}(0) = (xa, \ ya).$$

Теорема 7.14. *Пусть* A — *аффинная плоскость, на которой выполняются аксиомы* A_5а *и* A_5б. *Зафиксируем на* A *две прямые* l *и* m *и две точки* $1 \in l$, $1' \in m$, *отличные от* $0 = l \cdot m$. *Описанным выше способом введем на* A *координаты. В этих координатах прямые плоскости* A *задаются линейными уравнениями вида*

$$y = kx + b, \quad k, b \in F,$$

или

$$x = a, \quad a \in F$$

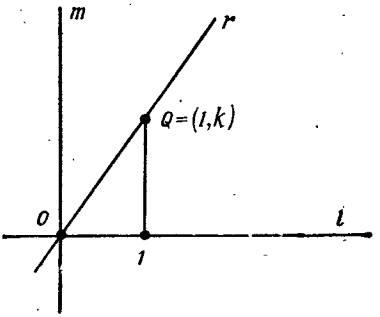


Рис. 52.

(таким образом, *плоскость* A *изоморфна аффинной плоскости* A_F^2).

Доказательство. Из построения координат видно, что прямая, параллельная l, описывается уравнением вида $y = b$, а прямая, параллельная m, — уравнением вида $x = a$. Пусть теперь r — произвольная прямая, проходящая через 0 и не совпадающая ни с l, ни с m (рис. 52). Тогда r пересекает прямую $x = 1$ в некоторой точке $Q = (1, k)$, $k \in F$. Если R —

какая угодно другая точка прямой r, отличная от 0, то существует единственная гомотетия σ_λ с центром 0, переводящая Q в R. Следовательно, точка R имеет координаты

$$x = 1 \cdot \lambda, \quad y = k \cdot \lambda.$$

Исключая отсюда λ, мы найдем, что уравнение прямой r имеет вид $y = kx$.

Наконец, пусть s — прямая, не проходящая через 0 и не параллельная ни m, ни l, а r — прямая, параллельная s и проходящая через точку 0 (рис. 53).

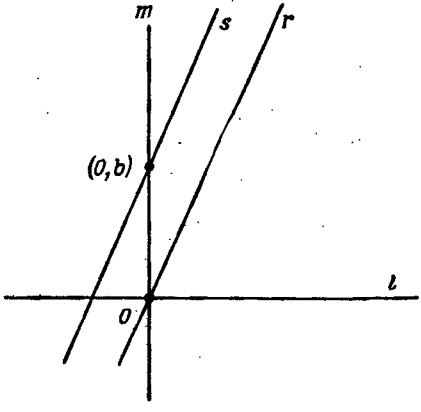


Рис. 53.

Пусть s пересекает m в точке $(0, b)$. Ясно, что точки прямой s получаются из точек прямой r при помощи параллельного переноса τ'_b. Значит, если точка $(\lambda, k\lambda)$ принадлежит r (для этой точки $x = \lambda$), то соответствующая ей точка прямой s имеет координаты

$$x = \lambda + 0, \quad y = k\lambda + b.$$

Таким образом, уравнение прямой s имеет вид

$$y = kx + b,$$

ч. т. д.

Замечание. Произвольное растяжение σ плоскости A можно запнсать в внде $\tau\sigma'$, где τ — парал-

лельный перенос, а σ' — растяжение с неподвижной точкой 0 (см. предложение 7.8). Зная уравнение τ

$$x' = x + c, \quad y' = y + d$$

и уравнение σ'

$$x' = xa, \quad y' = ya,$$

мы можем найти также и уравнение σ

$$x' = xa + c, \quad y' = ya + d.$$

Теорема 7.15. *Пусть* Π — *проективная плоскость, удовлетворяющая аксиомам* $\Pi_1 - \Pi_5$. *Тогда существует такое тело* F, *что* Π *изоморфна проективной плоскости* $\mathbb{P}_F^2$ *над телом* F.

Доказательство. Пусть l_0 — произвольная прямая плоскости Π. Рассмотрим аффинную плоскость

$$A = \Pi \setminus l_0.$$

Плоскость A удовлетворяет аксиомам A_5а и A_5б, следовательно, по теореме 7.14 $A \simeq \mathbb{A}_F^2$; но Π есть проективная плоскость, полученная пополнением аффинной плоскости A, а $\mathbb{P}_F^2$ — проективная плоскость, полученная пополнением аффинной плоскости $\mathbb{A}_F^2$; значит, изоморфизм этих аффинных плоскостей можно продолжить до изоморфизма $\Pi \simeq \mathbb{P}_F^2$.

Замечание. Сейчас как раз пришло время ответить на поставленный в первой главе вопрос о соответствии между аффинной и проективной плоскостями. Мы видели, что аффинную плоскость A можно дополнить до проективной плоскости $S(A)$, добавляя бесконечные точки и бесконечную прямую. Обратно, если Π — проективная плоскость и l_0 — некоторая прямая плоскости Π, то $\Pi \setminus l_0$ — аффинная плоскость.

Что получится, если мы выполним эти две операции подряд? Получим ли мы при этом исходную аффинную плоскость? Здесь надо отдельно рассмотреть два случая.

1° Пусть задана проективная плоскость Π, l_0 — прямая плоскости Π, а $\Pi \setminus l_0$ — соответствующая Π аффинная плоскость. Легко видеть, что $S(\Pi \setminus l_0)$ естественным образом изоморфна Π.

2° Пусть A — аффинная плоскость, и пусть $S(A) = A \cup l_\infty$ — соответствующая проективная плоскость. Тогда ясно, что $S(A) \setminus l_\infty \simeq A$. Можно, однако, предположить, что из $S(A)$

исключается прямая l_0, не совпадающая с l_∞. Тогда, вообще говоря, можно ожидать, что $S(A) \setminus l_0$ не будет изоморфна A.

Действительно, пусть, например, Π — свободная проективная плоскость, построенная над конфигурацией π_0 — проективной плоскостью из семи точек, дополненной еще одной точкой (см. выше, стр. 96). Пусть $A = \Pi \setminus l_\infty$, где l_∞ — одна из прямых плоскости π_0; тогда $S(A) = \Pi$. Однако если l_1 — прямая плоскости Π, не содержащая ни одной точки плоскости π_0, то $\Pi \setminus l_1$ не будет изоморфна A, поскольку $\Pi \setminus l_1$ содержит ограниченную конфигурацию, а A не содержит ни одной ограниченной конфигурации.

Однако если мы предположим, что A удовлетворяет A_5а и A_5б, то $S(A) \setminus l_1 \simeq A$. Действительно, в этом случае $S(A) \simeq \mathsf{P}^2_F$ для некоторого тела F и всегда можно найти автоморфизм $\varphi \in \operatorname{Aut} \mathsf{P}^2_F$, переводящий l_1 в l_∞ (см. предложение 6.6); при этом φ будет задавать изоморфизм между плоскостями $S(A) \setminus l_1$ и A.

ГЛАВА VIII

КОЛЛИНЕАЦИИ

Подведем краткий итог предшествующему. Мы рассмотрели два подхода к предмету проективной геометрии: синтетический и аналитический.

При синтетическом подходе (см. гл. IV) отправным пунктом служат аксиомы $\Pi_1 - \Pi_4$; затем постепенно вводятся и начинают играть важную роль аксиомы Π_5, Π_6 и Π_7. Все остальные результаты выводятся из этих аксиом по строгим правилам логических построений. Так мы вводим понятия гармонических четверок точек, перспективных и проективных соответствий между двумя прямыми и доказываем основную теорему, утверждающую, что существует единственное проективное преобразование прямой l, переводящее три ее заданные точки A, B, C в любые другие три заданные точки A', B', C' той же прямой.

При аналитическом подходе отправным пунктом служит некоторый алгебраический объект, например тело или поле F, или множество (поле) действительных чисел $\mathbb{R}$. Потом мы определяем $\mathbb{P}_F^2$ как множество троек элементов поля с введенным на этом множестве некоторым отношением эквивалентности, причем прямые плоскости $\mathbb{P}_F^2$ задаются линейными уравнениями. Мы определяем некоторые автоморфизмы $\mathbb{P}_F^2$, используя матрицы, и другие автоморфизмы, используя автоморфизмы F; затем доказываем основную теорему, утверждающую, что эти два типа автоморфизмов порождают всю группу автоморфизмов плоскости $\mathbb{P}_F^2$.

В двух предыдущих главах мы связали эти два подхода, показав, что (синтетическая) проективная

плоскость П может быть описана как плоскость P_F^2, где F — некоторое тело, тогда и только тогда, когда на П выполняется аксиома Дезарга $П_5$. Далее мы показали, что аксиомы $П_6$ и $П_7$ (а это синтетические утверждения) эквивалентны некоторым алгебраическим утверждениям относительно тела F.

В этой главе мы продолжим изучение связи между синтетическим и аналитическим подходами в двух важных ситуациях. А именно, мы дадим аналитическую интерпретацию группы $PJ(l)$ проективных преобразований прямой, которую до сих пор мы изучали только с синтетической точки зрения. Мы также дадим синтетическое описание группы $PGL(2)$ задаваемых матрицами автоморфизмов плоскости P_F^2, которые ранее мы изучали только с аналитической точки зрения.

Проективные преобразования прямой

Пусть F — поле (для простоты мы рассмотрим здесь лишь коммутативный случай), и пусть $П = P_F^2$ — проективная плоскость над F. Тогда П удовлетворяет аксиомам $П_5$ и $П_6$. Обозначим через l прямую $x_3 = 0$; тогда x_1, x_2 — однородные координаты точки прямой l. Мы уже изучали группу $PJ(l)$ проективных преобразований l (см. гл. V); теперь мы определим группу $PGL(l)$ некоторых других преобразований прямой l и докажем, что она совпадает с группой $PJ(l)$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

есть (2×2)-матрица с коэффициентами из F, и пусть $\det A \equiv ad - bc \neq 0$. Преобразование T_A прямой l зададим уравнениями

$$x_1' = ax_1 + bx_2, \quad x_2' = cx_1 + dx_2.$$

Аналогично тому, как это делалось в гл. III, можно показать, что T_A есть взаимно однозначное преобразование прямой l, а T_A^{-1} есть преобразование, обрат-

ное к T_A. Если A и B — две (2×2)-матрицы, то $T_A T_B = T_{AB}$, т. е. множество всех таких преобразований T_A образует группу. Две матрицы A и A' определяют одно и то же преобразование (т. е. $T_A = T_{A'}$) тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, что $A' = \lambda A$.

Определение. *Определенная выше группа преобразований T_A прямой l, где*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

есть произвольная матрица над F и $\det A = ab - cd \neq 0$, *обозначается через $PGL(l, F)$ или, короче, $PGL(l)$.*

Для удобства введем на l неоднородные координаты $x = x_1/x_2$. Таким образом, x пробегает все значения F плюс значение ∞ (где $a/0 = \infty$ для любого $a \in F$, $a \neq 0$). Тем самым точки прямой l приводятся во взаимно однозначное соответствие с элементами множества $F \cup \{\infty\}$. Группа $PGL(l)$ может быть теперь описана как *группа дробно-линейных преобразований l*, а именно преобразований, заданных равенствами вида

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad a,\ b,\ c,\ d \in F.$$

Здесь для $x = \infty$ мы полагаем $x' = a/c$ при $c \neq 0$ и $x' = \infty$ при $c = 0$ (оба равенства $a = 0$ и $c = 0$ не могут иметь места одновременно в силу условия $ad - bc \neq 0$).

Предложение 8.1. *Пусть A, B, C и A', B', C' — две тройки различных точек прямой l. Тогда существует единственный элемент группы $PGL(l)$, переводящий точки A, B, C соответственно в точки A', B', C'.*

Доказательство аналогично тому, которое было проведено в гл. III для группы $PGL(2)$; однако, так как оно достаточно просто, его стоит провести здесь по-новому. Для доказательства существования искомого преобразования достаточно рассмотреть случай, когда $(A, B, C) = (0, 1, \infty)$, а A', B', C' — точки, координаты которых равны соответственно α,

β и γ. Таким образом, нам надо найти такие a, b, c, d, что преобразование

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

переводит 0, 1, ∞ в α, β, γ, т. е. решить уравнения

$$\alpha = \frac{b}{d}, \quad \beta = \frac{a+b}{c+d}, \quad \gamma = \frac{a}{c}.$$

Предположим, что α, β, γ не равны ∞. (Частный случай, когда одна из этих величин обращается в ∞, мы предоставим читателю!). Тогда положим $d=1$ и, решив систему уравнений, найдем

$$b = \alpha, \quad c = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}, \quad a = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}\gamma.$$

При этом

$$ad - bc = \frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}(\gamma-\alpha) \neq 0,$$

так как α, β, γ различны. Таким образом, мы получили преобразование нужного вида, действующее как раз так, как нам требовалось.

Для доказательства единственности достаточно проверить, что если точки 0, 1, ∞ являются неподвижными точками преобразования

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d},$$

то это преобразование тождественное. Действительно, в этом случае

$$0 = \frac{b}{d}, \quad 1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad \infty = \frac{a}{c},$$

откуда следует, что $b=0$, $c=0$, $a=d$, и поэтому $x'=x$.

Предложение 8.2. *Группа $PGL(l)$ дробно-линейных преобразований порождается преобразованиями следующих трех видов*:

(i) $x' = x + a$, $a \in F$;

(ii) $x' = ax$, $a \in F$, $a \neq 0$;

(iii) $x' = 1/x$

(каждое из которых, конечно, является дробно-линейным преобразованием).

Доказательство. Прежде всего, очевидно, что если мы сперва выполним преобразование вида (ii), а потом преобразование вида (i), то получим произвольное преобразование вида:

$$x' = ax + b, \quad a,\ b \in F, \quad a \neq 0. \qquad (*)$$

Пусть теперь

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad ad - bc \neq 0, \qquad (**)$$

— произвольное дробно-линейное преобразование. Если $c = 0$, то

$$x' = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}, \quad \frac{a}{d} \neq 0,$$

т. е. оно имеет вид (*). Поэтому можно предположить, что $c \neq 0$. Положим теперь $x_1 = cx + d$, откуда $x = (x_1 - d)/c$ и

$$x' = \frac{(a/c)(x_1 - d) + b}{x_1} = \frac{b - ad/c}{x_1} + \frac{a}{c}.$$

Но $b - ad/c \neq 0$ по предположению; следовательно, x' получается из x_1 применением преобразования (*) вслед за (iii).

В конечном итоге оказывается, что x' получается из x применением сначала (iii), а потом (ii) и (i).

Предложение 8.3. *Каждое из трех преобразований* (i), (ii), (iii) *предложения* 8.2 *есть проективное преобразование прямой* l.

Доказательство. Мы должны представить каждое из рассматриваемых трех преобразований как композицию перспективных преобразований.

(i) $x' = x + a$. Примем прямую $x_2 = 0$ за бесконечную прямую и введем на плоскости аффинные координаты $x = x_1/x_2$, $y = x_3/x_2$. Тогда прямая l становится осью x и мы можем геометрически построить $x + a$ следующим образом (см. рис. 54а):

1° спроектируем $(x, 0)$ из точки $(0, 1)$ на прямую l_∞; пусть W — образ точки $(x, 0)$;

2° спроектируем W обратно на l из точки $(a, 1)$; мы получим точку $x + a$.

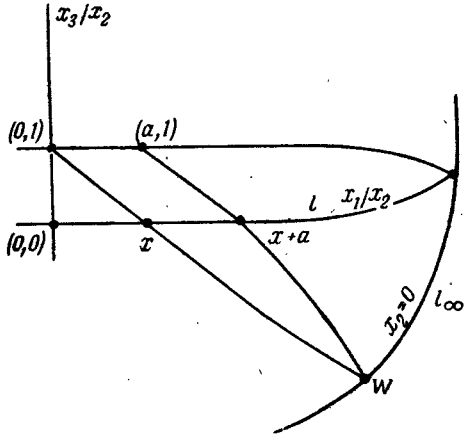


Рис. 54а.

Значит, преобразование $x' = x + a$ — композиция двух перспективных преобразований, т. е. проективное преобразование.

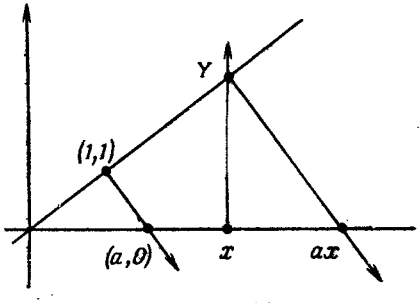


Рис. 54б.

(ii) $x' = ax$, $a \neq 0$. Это преобразование также является композицией двух перспективных преобразований (см. рис. 54б):

1° спроектируем $(x, 0)$ в вертикальном направлении на прямую $x = y$; образ этой точки обозначим через Y;

2° спроектируем Y обратно на l в направлении прямой, соединяющей точки $(1, 1)$ и $(a, 0)$; тогда Y перейдет в точку $(ax, 0)$.

(iii) $x' = 1/x$. Это преобразование — композиция трех перспективных преобразований (см. рис. 54в):

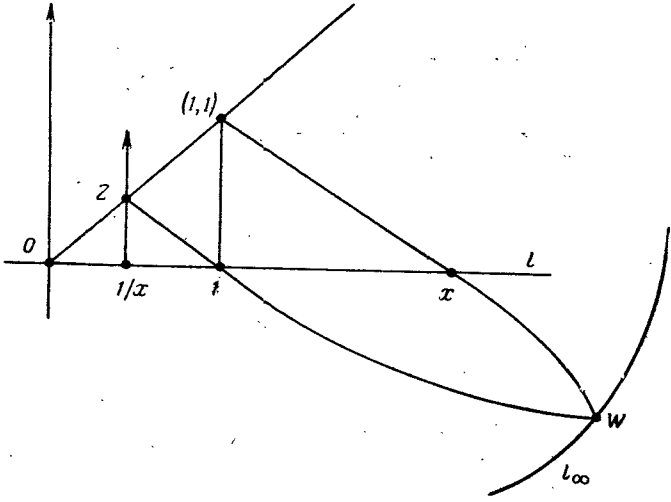


Рис. 54в.

1° спроектируем $(x, 0)$ из точки $(1, 1)$ на бесконечную прямую l_∞; ее образом будет точка W;

2° спроектируем W из точки $(1, 0)$ на прямую $y = x$; ее образом будет точка Z;

3° спроектируем Z в вертикальном направлении обратно на l; ее образом будет точка $(1/x, 0)$,

ч. т. д.

Теорема 8.4. *Пусть F — поле и $\Pi = \mathbb{P}^2_F$; через l обозначим прямую $x_3 = 0$ плоскости Π. Тогда группа $PJ(l)$ проективных преобразований прямой l совпадает с группой $PGL(l)$ дробно-линейных преобразований на l.*

Доказательство. Мы уже видели, что $PGL(l)$ порождается преобразованиями трех специальных

видов, каждый из которых является проективным преобразованием. Отсюда следует, что *каждое дробно-линейное преобразование есть проективное преобразование*, т. е.

$$PGL(l) \subseteq PJ(l).$$

Пусть теперь $\varphi \in PJ(l)$ — произвольное проективное преобразование прямой l, которое переводит точки 0, 1, ∞ в A, B, C соответственно. В силу предложения 8.1 существует дробно-линейное преобразование (**), которое переводит 0, 1, ∞ в A, B, C и, конечно, тоже является проективным преобразованием. Но из основной теоремы о проективных преобразованиях прямой (теорема 5.6) следует, что существует только одно проективное преобразование, переводящее точки 0, 1, ∞ в точки A, B, C. Значит, наше проективное преобразование φ совпадает с дробно-линейным преобразованием (**), и поэтому $PGL(l) \supseteq PJ(l)$,

ч. т. д.

Замечания. 1° Обратите внимание на то, что при доказательстве этого утверждения мы в полную силу использовали синтетическую теорию (мы использовали основную теорему о проективных преобразованиях прямой — достаточно сильную теорему). Но это и не удивительно, потому что мы получили действительно интересный результат. Он показывает, что два абсолютно разных подхода в конце концов привели нас к одной и той же группе преобразований прямой.

2° Можно задать вопрос, почему в доказательстве фигурирует именно прямая $x_3 = 0$. На самом деле она ничем не отличается от любой другой прямой. Точнее говоря, если l' — любая другая прямая, то группы $PJ(l)$ и $PJ(l')$, рассматриваемые как абстрактные группы, изоморфны. Для того чтобы установить этот изоморфизм, рассмотрим произвольную точку P, не принадлежащую ни l, ни l', и допустим, что

$$\psi\colon l \to l'$$

есть перспективное отображение $l \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} l'$. Тогда для каждого $\alpha \in PJ(l)$ мы имеем

$$\psi\alpha\psi^{-1} \in PJ(l'),$$

и отображение

$$\alpha \to \psi\alpha\psi^{-1}$$

устанавливает изоморфизм групп $PJ(l)$ и $PJ(l')$. (Детали доказательства предоставляются читателю!) Однако сразу бросается в глаза, что этот изоморфизм зависит от выбора точки P. На

самом деле лучшего способа установить изоморфизм групп $PJ(l)$ и $PJ(l')$ не существует; поэтому мы говорим, что эти группы *не канонически изоморфны.*

Итак, мы изучили некоторую группу преобразований прямой, а именно группу

$$PJ(l) = PGL(l),$$

и обнаружили, что ее можно описать двумя различными способами. Один из них состоит в том, что мы рассматриваем l как прямую плоскости $\mathbb{P}_F^2$ и пользуемся свойствами инцидентности проективной плоскости. Второй способ состоит в том, что мы используем алгебраическую структуру на l, заданную координатами. Теперь мы опишем третий способ, а именно рассмотрим группу всех подстановок l, сохраняющих *двойное отношение* (мы скоро введем это понятие), и покажем, что она совпадает с $PJ(l) = PGL(l)$. Наконец, если $F = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел, то мы дадим четвертую интерпретацию этой группы как группы всех конформных отображений первого рода римановой сферы на себя (конформных отображений, сохраняющих ориентацию).

Определение. *Пусть задано поле F и четыре различные точки a, b, c, d прямой l:*

$$a,\ b,\ c,\ d \in F \cup \{\infty\}.$$

Двойным отношением a, b, c, d называется выражение

$$R_x(a, b, c, d) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

[Если одна из точек a, b, c, $d = \infty$, то определение R_x нуждается в очевидном уточнении; так, например, если $a = \infty$, то $R_x = (b-d)/(b-c)$.]

Теорема 8.5. *Пусть F — поле, и пусть l, как и ранее, проективная прямая над F с неоднородной координатой x, принимающей значения из множества $F \cup \{\infty\}$. Тогда группа $PGL(l)$ дробно-линейных преобразований прямой l совпадает с группой всех подстановок точек прямой l, сохраняющих двойное отношение, т. е. таких взаимно однозначных преобразований l,*

что если A, B, C, D — любые четыре различные точки прямой l и $\varphi(A) = A'$, ..., то

$$R_x(A, B, C, D) = R_x(A', B', C', D').$$

Доказательство. Проверим, прежде всего, что *любое дробно-линейное преобразование сохраняет двойное отношение точек.* Мы уже знаем, что группа $PGL(l)$ порождается преобразованиями трех специальных видов (i), (ii) и (iii) (см. выше предложение 8.2), поэтому достаточно показать, что каждое из этих преобразований сохраняет двойное отношение. Итак, пусть A, B, C, D — четыре точки прямой l с координатами a, b, c, d; тогда

$$R_x(A, B, C, D) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}.$$

(i) Если мы применим преобразование вида $x' = x + \lambda$, $\lambda \in F$, то новые точки A', B', C', D' будут иметь координаты $a+\lambda$, $b+\lambda$, $c+\lambda$, $d+\lambda$, и следовательно,

$$R_x(A', B', C', D') = \frac{(a+\lambda)-(c+\lambda)}{(a+\lambda)-(d+\lambda)} \cdot \frac{(b+\lambda)-(d+\lambda)}{(b+\lambda)-(c+\lambda)}.$$

Легко видеть, что это двойное отношение совпадает с исходным.

(ii) Применяя преобразование вида $x' = \lambda x$, $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, получаем

$$R_x(A', B', C', D') = \frac{\lambda a - \lambda c}{\lambda a - \lambda d} \cdot \frac{\lambda b - \lambda d}{\lambda b - \lambda c}.$$

Ясно, что и это выражение совпадает с исходным двойным отношением.

(iii) Применим преобразование вида $x' = 1/x$; тогда

$$R_x(A', B', C', D') = \frac{1/a - 1/c}{1/a - 1/d} \cdot \frac{1/b - 1/d}{1/b - 1/c}.$$

Умножая числитель и знаменатель на $abcd$, получаем исходное двойное отношение. (Нам осталось разобрать случаи, когда одна из точек a, b, c, d равна нулю или бесконечности; это предоставляется читателю.)

Таким образом, мы показали, что каждое дробно-линейное преобразование сохраняет двойное отношение. Обратно, предположим, что φ — преобразование, сохраняющее двойное отношение. Пусть φ переводит $0, 1, \infty$ соответственно в a, b, c, и пусть $\varphi(x) = x'$. Тогда

$$R_x(0, 1, \infty, x) = R_x(a, b, c, x'),$$

или

$$\frac{0-\infty}{0-x} \cdot \frac{1-x}{1-\infty} = \frac{a-c}{a-x'} \cdot \frac{b-x'}{b-c},$$

или, наконец,

$$\frac{x-1}{x} = \frac{a-c}{a-x'} \cdot \frac{b-x'}{b-c}.$$

Решив это уравнение относительно x', получим, что φ задается уравнением

$$x' = \frac{[(a-b)/(b-c)]\, cx + a}{[(a-b)/(b-c)]\, x + 1},$$

т. е. является дробно-линейным преобразованием,

ч. т. д.

Пример. Пусть $F = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел. Тогда l — *проективная прямая над полем* $\mathbb{C}$, т. е.

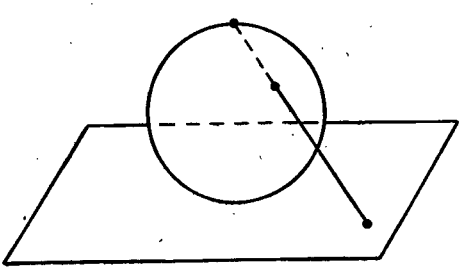


Рис. 55.

комплексная плоскость с одной бесконечной точкой. Легче всего представить себе l в виде так называемой *римановой сферы*, точки которой сопоставляются точкам комплексной плоскости с помощью *стереографической проекции*, определяемой следующим образом. Единичная сфера располагается так, что начало координат комплексной плоскости (которая ка-

сается сферы) совпадает с южным полюсом сферы. Затем мы проектируем сферу на плоскость из северного полюса, полагая при этом, что бесконечная точка соответствует северному полюсу (рис. 55). В курсах теории функций комплексного переменного доказывается, что дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости в точности совпадают с конформными (т. е. сохраняющими углы между двумя пересекающимися кривыми), взаимно однозначными отображениями римановой сферы на себя, *сохраняющими ориентацию* *).

Коллинеации

Мы подошли к изучению проективных преобразований проективной плоскости (*коллинеаций*). Вообще говоря, любой автоморфизм проективной плоскости можно было бы назвать *коллинеацией*, так как он переводит прямые линии в прямые, т. е. сохраняет коллинеарность точек.

Определение. *Коллинеацией называется такой автоморфизм* φ *проективной плоскости* Π, *что для любой прямой* $l \in \Pi$ *сужение* φ *на* l

$$\varphi|_l\colon\ l \to l', \quad \text{где} \quad l' = \varphi(l),$$

отображающее прямую l *на прямую* l', *есть проективное отображение.*

Ясно, например, что тождественное отображение проективной плоскости на себя является коллинеацией. Мы увидим, что их на самом деле существует гораздо больше. Будет показано, что если проективная плоскость Π удовлетворяет аксиомам Π_5 и Π_6, то коллинеации удовлетворяют основной теореме: среди них существует единственная, переводящая любые четыре точки плоскости, каждые три из которых неколлинеарны, в любые другие подобные четыре точки. Мы изучим также структуру группы колли-

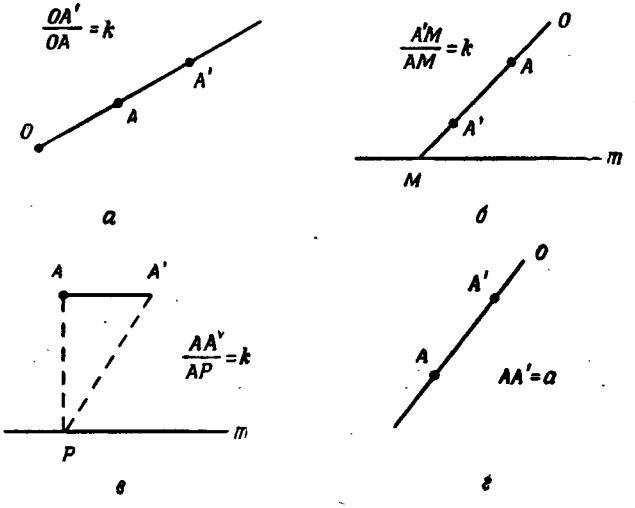
*) Относительно (изобилующей яркими геометрическими деталями) проективной геометрии комплексной прямой l см. классическую книгу [21].

неаций и покажем, что она порождается коллинеациями специального вида, а именно (*проективными*) *сдвигами* и *гомологиями* *).

---

*) Преобразование (проективного) сдвига (далее мы его будем называть просто «сдвигом») в русской литературе имело различные названия: *элация* (термин О. Веблена, сохраненный в русском переводе книг [4] и [5]), *особая гомология* (см. [4] и [6]), *особенная гомология* (см. [3]), *параболическая гомология* (см. [7]).

Выяснению структуры гомологии и (проективного) сдвига действительной проективной плоскости П может способствовать разбор смысла «аффинных вариантов» этих преобразований. Гомология с центром O и осью l_∞ есть *гомотетия* с центром O аффинной плоскости $A = \Pi \setminus l_\infty$ (ср. выше, стр. 98). Гомология с центром $O \in l_\infty$ и осью m есть так называемое *косое сжатие* к оси m в направлении O аффинной плоскости $A = \Pi \setminus l_\infty$. Проективный сдвиг с осью m и центром $O = l_\infty \cdot m$ есть так называемый *аффинный сдвиг* с осью m плоскости $A = \Pi \setminus l_\infty$. Проективный сдвиг с осью l_∞ и центром $O \in l_\infty$ есть *параллельный перенос* в направлении O плоскости $A = \Pi \setminus l_\infty$.



а — гомотетия φ: $A \to A'$ с центром O и коэффициентом k; *б* — косое сжатие φ: $A \to A'$ к оси m в направлении O с коэффициентом k; *в* — сдвиг φ: $A \to A'$ с осью m и коэффициентом k; *г* — параллельный перенос φ: $A \to A'$ в направлении Q на расстояние a.

Наконец, мы покажем, что если $\Pi \simeq P_F^2$, где F — поле, то группа коллинеаций в точности совпадает с группой $PGL(l, F)$.

Предложение 8.6. *Автоморфизм φ плоскости Π тогда и только тогда является коллинеацией, когда существует такая прямая l_0, что $\varphi|_{l_0}$ — проективное отображение.*

Доказательство. Если φ — коллинеация, то любая прямая l_0 удовлетворяет условию предложения. Для

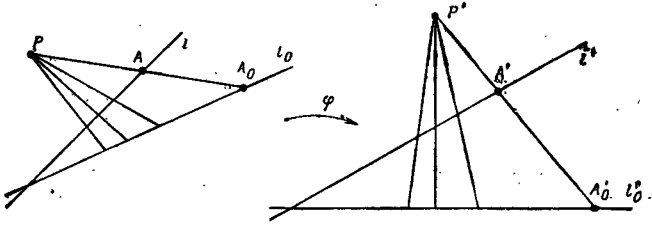


Рис. 56.

доказательства обратного предположим, что сужение автоморфизма φ на l_0 есть проективное отображение. Пусть $\varphi(l_0) = l'_0$. Рассмотрим теперь любую другую прямую l и точку P, не принадлежащую ни l, ни l_0 (рис. 56). Пусть ψ: $l \to l_0$ — перспективное отображение $l \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} l_0$. Тогда, если $A \in l$ и $A_0 \in l_0$, то $\psi(A) = A_0$ эквивалентно коллинеарности точек P, A, A_0. Так как φ — автоморфизм, то последнее эквивалентно тому, что P', A', A'_0 коллинеарны (здесь штрихом обозначены образы точек при автоморфизме φ). Другими словами, если $l' = \varphi(l)$, то отображение

$$\varphi\psi\varphi^{-1}\colon\ l' \to l'_0$$

совпадает с перспективным отображением $l' \overset{P'}{\underset{\wedge}{=}} l'_0$. Обозначим его через ψ'. Таким образом,

$$\psi' = \varphi\psi\varphi^{-1},$$

а значит,

$$\varphi|_l = \psi^{-1}\varphi|_{l_0}\psi.$$

Но ψ, $\varphi|_{l_0}$ и ψ^{-1} — проективные отображения; следовательно, $\varphi|_l$ тоже проективное отображение, и поэтому φ — коллинеация, так как l — произвольная прямая, ч. т. д.

Перед тем как изучать общие коллинеации, рассмотрим некоторые специальные типы коллинеаций — так называемые *гомологии* и *сдвиги* *).

Определение. *Сдвигом называется автоморфизм проективной плоскости* П, *переводящий каждую точку некоторой прямой* l_0 *в себя и не имеющий больше ни одной неподвижной точки. Прямая* l_0 *называется осью сдвига.*

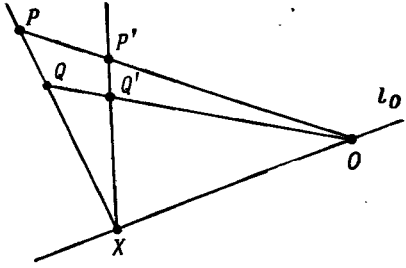


Рис. 57.

Пусть α — сдвиг плоскости П с осью l_0, и пусть A — аффинная плоскость $\Pi \setminus l_0$. Пусть для каких-то $P, Q \in A$ прямая PQ пересекает l_0 в точке X (рис. 57). Тогда X — неподвижная точка преобразования α; следовательно, $P'Q'$ (точки P' и Q' — образы точек P и Q при преобразовании α) также пересекает l_0 в точке X. Поэтому $PQ \parallel P'Q'$ на плоскости A, т. е. сужение α на A есть растяжение. Но α не имеет больше ни одной неподвижной точки, поэтому сужение α на A — параллельный перенос. Обратно, любой

*) См. примечание на стр. 133.

параллельный перенос аффинной плоскости A есть сдвиг проективной плоскости П с осью l_0.

Предложение 8.7. *Множество сдвигов плоскости* П *с осью* l_0 *соответствует при сужении множеству параллельных переносов аффинной плоскости* $\Pi \setminus l_0$. (Поэтому, если включить в это множество тождественное преобразование, то сдвиги с осью l_0 образуют группу E_{l_0}.)

Доказательство. Достаточно сослаться на то, что множество параллельных переносов аффинной плоскости образует группу.

Если α — сдвиг с осью l_0, то отвечающий α параллельный перенос $\alpha|_A$ имеет определенное направление, ибо для любых $P, Q \in A$ имеем $PP' \| QQ'$. Предположим, что прямые $PP' \| QQ' \| \ldots$ пересекают l_0 в точке O. Тогда O называется *центром сдвига* α.

Не надо думать, что множество всех сдвигов образует группу. Так, если α_1 и α_2 — сдвиги с разными осями l_1 и l_2, то $\alpha_1\alpha_2$ совсем не обязательно также будет сдвигом. Однако кое-что все же можно сказать о множестве всех сдвигов. Во-первых, мы уже показали, что *множество* E_{l_0} *сдвигов с фиксированной осью* l_0 (включающее тождественное отображение) *образует группу*. Если l_1 — другая прямая, то обе группы E_{l_0} и E_{l_1} суть подгруппы группы $\operatorname{Aut}\Pi$. Пусть φ — автоморфизм плоскости П, переводящий l_0 в l_1 (такой автоморфизм существует, так как П удовлетворяет Π_5). Тогда легко видеть, что *отображение*

$$\alpha \to \varphi\alpha\varphi^{-1},$$

где $\alpha \in E_{l_0}$, *устанавливает изоморфизм групп* E_{l_0} *и* E_{l_1}. В самом деле, если φ^{-1} переводит l_1 в l_0, α переводит все точки прямой l_0 в себя, а φ переводит l_0 в l_1, то и $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ переводит все точки прямой l_1 в себя. Можно также показать, что $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ не имеет других неподвижных точек, т. е. является сдвигом. (Подробное доказательство предоставляется читателю.)

Подобная ситуация встречается довольно часто в теории групп. В связи с этим введем следующее определение.

Определение. *Пусть задана группа G и ее подгруппы H_0 и H_1. Мы называем H_0 и H_1 сопряженными подгруппами группы G, если существует такой элемент $g \in G$, что отображение*

$$h_0 \to g h_0 g^{-1}$$

устанавливает изоморфизм между подгруппами H_0 и H_1.

Таким образом, мы доказали

Предложение 8.8. *Пусть Π — проективная плоскость, удовлетворяющая аксиоме Π_5, а E_{l_0} и E_{l_1} — группы сдвигов плоскости Π с осями l_0 и l_1. Тогда E_{l_1} и E_{l_0} — сопряженные подгруппы группы* $\operatorname{Aut}\Pi$.

Обратно, легко видеть, что любая подгруппа, сопряженная к E_{l_0}, имеет вид E_l, где l — какая-либо прямая плоскости Π. Таким образом, *множество всех сдвигов плоскости Π представляет собой объединение подгруппы E_{l_0} и всех сопряженных к ней подгрупп.*

Определение. *Гомологией проективной плоскости Π называется автоморфизм плоскости Π, переводящий все точки некоторой прямой l_0 в себя и имеющий, кроме того, точно одну неподвижную точку O. Прямая l_0 называется осью гомологии, а точка O — ее центром.*

Как и выше, отметим, что гомологии с осью l_0 соответствуют растяжениям аффинной плоскости $\Pi \setminus l_0$. Следовательно, если присоединить к множеству гомологий с осью l_0 сдвиги с осью l_0 и тождественное отображение, то мы получим некоторую группу, которую будем обозначать через H_{l_0}. Для любой другой прямой l_1 группа H_{l_1} будет сопряженной к H_{l_0} подгруппой группы $\operatorname{Aut}\Pi$. Говоря точнее, для любых прямой l_0 и точки O, не принадлежащей l_0, гомологии с осью l_0 и центром O образуют группу $H_{l_0, O}$. А так как на дезарговой проективной плоскости мы можем перевести прямую l_0 и не принадлежащую ей точку O в любую другую прямую l_1 и не принадлежащую ей точку P, то отсюда следует, что $H_{l_1, P}$ есть сопряженная подгруппа к $H_{l_0, O}$. Следовательно, множество всех гомологий плоскости Π представляет собой

объединение подгруппы $H_{l_0, O}$ со всеми сопряженными к ней подгруппами группы $\operatorname{Aut}\Pi$.

Предложение 8.9. *Сдвиги и гомологии являются коллинеациями проективной плоскости.*

Доказательство. В силу предложения 8.6 достаточно показать, что сужение этих отображений на какую-нибудь прямую является проективным отображением. Но сужение любого сдвига или любой гомологии на ее ось есть тождественное отображение, которое, конечно, является проективным преобразованием прямой.

Предложение 8.10. *Пусть* Π — *проективная плоскость, удовлетворяющая аксиоме* Π_5, A, B, C, D *и* A', B', C', D' — *две четверки точек этой плоскости, каждые три из которых неколлинеарны. Тогда можно найти такую композицию* φ *сдвигов и гомологий, что*

$$\varphi(A) = A', \quad \varphi(B) = B', \quad \varphi(C) = C', \quad \varphi(D) = D'.$$

Доказательство. Шаг 1. Выберем прямую l_0, такую, что ни A, ни A' не принадлежат l_0. Тогда, поскольку Π — дезаргова плоскость (см. гл. VII), существует параллельный перенос аффинной плоскости $\Pi \setminus l_0$, переводящий A в A', т. е. существует такой сдвиг α_1 плоскости Π, что $\alpha_1(A) = A'$. Пусть α_1 переводит B, C, D в B'', C'', D''. Теперь мы свели нашу задачу к следующей: найти композицию сдвигов и гомологий с неподвижной точкой A', переводящую B'', C'', D'' в B', C', D'. Так как α_1 — автоморфизм, A', B'', C'', D'' — четыре точки, каждые три из которых неколлинеарны. Поэтому, меняя обозначения A', B'', C'', D'' на A, B, C, D, мы приходим к исходной задаче с дополнительным условием $A = A'$.

Шаг 2. Выберем другую прямую l_1, такую, что $A \in l_1$, но B, $B' \notin l_1$. Найдем такой сдвиг α_2 с осью l_1, что $\alpha_2(B) = B'$. Тогда, применяя автоморфизм α_2 и изменяя обозначения еще раз, мы приходим к исходной задаче с двумя дополнительными условиями $A = A'$, $B = B'$.

Шаг 3. Пусть $l_2 = AB$. Тогда C и C' не принадлежат l_2, так как A, B, C неколлинеарны и A', B', C' неколлинеарны. Поэтому мы можем снова найти такой сдвиг α_3 с осью l_2, что $\alpha_3(C) = C'$, и тем самым прийти к исходной задаче с ограничениями

$$A = A', \quad B = B', \quad C = C'.$$

Шаг 4. Пусть AD и BD' пересекаются в точке E (рис. 58). Так как A, D, E коллинеарны и точки D, E

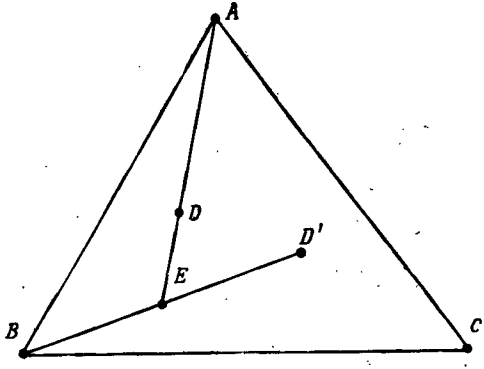


Рис. 58.

не совпадают с A, то на аффинной плоскости $\Pi \setminus BC$ существует растяжение с неподвижной точкой A, которое переводит D в E. Иными словами, существует гомология β_1 проективной плоскости Π с осью BC и центром A, которая переводит D в E.

Шаг 5. Аналогично, существует гомология β_2 плоскости Π с осью AC и центром B, переводящая E в D'. Поэтому преобразование $\beta_2\beta_1$ оставляет точки A, B, C на месте и переводит D в D'.

Шаг 5 завершает доказательство предложения 8.10. (Заметьте, что в общем случае мы используем три сдвига и две гомологии.)

Предложение 8.11. *Пусть Π — проективная плоскость, удовлетворяющая аксиомам Π_5 и Π_6, и пусть*

φ — коллинеация плоскости Π с четырьмя неподвижными точками A, B, C, D, каждые три из которых неколлинеарны. Тогда φ — тождественное отображение.

Доказательство. Обозначим прямую BC через l. Так как точки B и C коллинеация φ переводит в себя, то и l переходит в себя. Сужение φ на l есть проективное преобразование прямой l, так как φ — коллинеация. А так как A и D — тоже неподвижные точки преобразования φ, точка $F = AD \cdot l$ — неподвижная точка проективного преобразования $\varphi|_l$ прямой l. Таким образом, последнее проективное преобразование прямой l имеет три неподвижные точки B, C, F. Следовательно, φ — тождественное отображение прямой l на себя (см. основную теорему о проективных преобразованиях прямой, гл V). Сужение φ на $\Pi \setminus l$ есть растяжение с двумя неподвижными точками A и D, т. е. тождественное отображение. Поэтому φ — тождественное отображение.

Теорема 8.12. (Основная теорема о коллинеациях проективной плоскости.) *Пусть Π — проективная плоскость, удовлетворяющая аксиомам Π_5 и Π_6, а $PC(\Pi)$ — группа коллинеаций плоскости Π. Пусть A, B, C, D и A', B', C', D' — две четверки точек плоскости Π, каждые три из которых неколлинеарны. Тогда существует единственный элемент $\varphi \in PC(\Pi)$, такой, что*

$$\varphi(A) = A', \quad \varphi(B) = B', \quad \varphi(C) = C', \quad \varphi(D) = D'.$$

Доказательство. Так как гомологии и сдвиги являются коллинеациями (предложение 8.9) и так как среди них найдутся такие, композиция которых переводит A, B, C, D в A', B', C', D' (предложение 8.10), то удовлетворяющее условиям теоремы φ существует. С другой стороны, пусть ψ — какая-то другая коллинеация, удовлетворяющая тем же условиям; тогда $\psi^{-1}\varphi$ — коллинеация с четырьмя неподвижными точками A, B, C, D, т. е. тождественное отображение (предложение 8.11). Следовательно, $\varphi = \psi$ и φ единственно.

Следствие 8.13. *Группа коллинеаций $PC(\Pi)$ проективной плоскости Π порождается сдвигами и гомологиями.*

Доказательство. Пусть $\psi \in PC(\Pi)$, и пусть A, B, C, D — четыре точки, каждые три из которых неколлинеарны; коллинеация ψ переводит A, B, C, D в A', B', C', D'. Согласно предложению 8.10, существует композиция φ сдвигов и гомологий, которая также переводит A, B, C, D в A', B', C', D'. Тогда по теореме единственности $\psi = \varphi$, т. е. ψ представляет собой композицию сдвигов и гомологий.

Теперь мы подошли к аналитической интерпретации проективных преобразований.

Теорема 8.14. *Пусть F — поле, а $\Pi = \mathbb{P}^2_F$ — проективная плоскость над F. Тогда*

$$PC(\Pi) = PGL(2, F).$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что некоторые специальные виды сдвигов и гомологий представляются матрицами.

Рассмотрим сдвиг α с осью $x_3 = 0$ и центром $(1, 0, 0)$. Если A — аффинная плоскость $x_3 \neq 0$ с аффинными координатами

$$x = x_1/x_3, \quad y = x_2/x_3,$$

то α — параллельный перенос плоскости A в направлении оси X, т. е. α задается уравнениями

$$x' = x + a, \quad a \in F, \quad y' = y.$$

Поэтому в однородных координатах уравнения преобразования α имеют вид

$$x_1' = x_1 + ax_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3,$$

т. е. α представляется матрицей

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $a \in F$.

Пусть теперь α' — произвольный сдвиг с осью l_0 и центром O. Мы можем найти такую матрицу A, что T_A переводит прямую $x_3=0$ в l_0 и точку $(1, 0, 0)$ в O. В силу этого α' имеет вид

$$\alpha' = T_A \alpha T_A^{-1},$$

где α — сдвиг рассмотренного выше специального вида. Иначе говоря, α' представляется матрицей AE_aA^{-1}, где $a \in F$.

Теперь рассмотрим гомологию β с осью $x_1=0$ и центром $(1, 0, 0)$. Переходя к аффинной плоскости $x_1 \neq 0$, мы видим, что это есть растяжение с центром $(0, 0)$, следовательно, гомотетия с коэффициентом $k \neq 0$, уравнение которой в однородных координатах записывается так:

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = kx_2, \quad x_3' = kx_3.$$

Поэтому она представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}.$$

Умножив эту матрицу на скаляр $b=k^{-1}$, мы получим другую матрицу, также задающую преобразование β,

$$H_b = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \in F, \quad b \neq 0.$$

Как и в случае сдвигов, любая другая гомология β' представится матрицей вида BH_bB^{-1}, где $b \in F$, $b \neq 0$.

Таким образом, мы показали, что любой сдвиг и любая гомология представимы матрицами, т. е. являются элементами группы $PGL(2, F)$. Но группа проективных преобразований (следствие 8.13) порождается сдвигами и гомологиями; поэтому

$$PC(\Pi) \subseteq PGL(2, F).$$

А выше мы видели (см. гл. VI), что над полем F существует единственный элемент группы $PGL(2, F)$, переводящий четыре точки, любые три из которых неколлинеарны, в любые другие такие четыре точки. Но подгруппа $PC(\Pi)$ группы $PGL(2, F)$ как раз обладает этим свойством; поэтому из основной теоремы следует, что эта подгруппа совпадает со всей группой,

ч. т. д.

Следствие 8.15. *Пусть задано поле F. Тогда любую обратимую (3×3)-матрицу M с коэффициентами из F можно записать в виде произведения матриц*

$$M = \lambda B_2 H_{b_2} B_2^{-1} B_1 H_{b_1} B_1^{-1} A_3 E_{a_3} A_3^{-1} A_2 E_{a_2} A_2^{-1} A_1 E_{a_1} A_1^{-1},$$

где a_1, a_2, $a_3 \in F$, b_1, b_2, $\lambda \in F$; b_1, b_2, $\lambda \neq 0$, а A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 — обратимые матрицы.

Замечание. Из этого результата сравнительно легко получить единственность функции $\det A$, определенной свойствами D_1 и D_2 в гл. III. (По этому поводу см. также задачу 19.)

СПИСОК АКСИОМ

Аксиомы аффинной плоскости

A_1. *Для любых двух различных точек P и Q существует одна и только одна прямая, проходящая через них.*

A_2. *Для любых заданных прямой l и точки P существует одна и только одна проходящая через P прямая m, параллельная l.*

A_3. *Существуют три неколлинеарные точки.*

A_5а. (Малая аксиома Дезарга.) *Пусть l, m, n — три (различные) параллельные прямые, A, $A' \in l$, B, $B' \in m$, C, $C' \in n$ — различные точки. Предположим, что $AB \parallel A'B'$ и $AC \parallel A'C'$; тогда $BC \parallel B'C'$.*

A_5б. (Большая аксиома Дезарга.) *Пусть O, A, B, C, A', B', C' — различные точки аффинной плоскости, причем O, A, A' коллинеарны, O, B, B' коллинеарны, O, C, C' коллинеарны и $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$; тогда $BC \parallel B'C'$.*

Примечание: $A_5б \Rightarrow A_5а$.

Аксиомы проективной плоскости

$П_1$. *Через две различные точки P и Q плоскости S можно провести одну и только одну прямую.*

$П_2$. *Любые две прямые пересекаются по меньшей мере в одной точке.*

$П_3$. *Существуют три неколлинеарные точки.*

$П_4$. *Прямая содержит по меньшей мере три точки.*

$П_5$. (Аксиома Дезарга.) *Пусть заданы два треугольника ABC и $A'B'C'$, такие, что прямые AA',*

BB' и CC', соединяющие соответственные вершины треугольников, пересекаются в точке O. Тогда пары соответствующих сторон пересекаются в трех точках

$$P = AB \cdot A'B', \quad R = BC \cdot B'C', \quad Q = AC \cdot A'C',$$

принадлежащих одной прямой.

Π_6. (Аксиома Паппа.) *Пусть l и l' — две различные прямые, A, B, C — три различные точки прямой l', отличные от $X = l \cdot l'$, и A', B', C' — три различные точки прямой l', отличные от X. Тогда точки*

$$P = AB' \cdot A'B, \quad Q = AC' \cdot A'C, \quad R = BC' \cdot B'C$$

коллинеарны.

Π_7. (Аксиома Фано.) *Диагональные точки полного четырехугольника неколлинеарны.*

Примечание: $\Pi_6 \Rightarrow \Pi_5$.

Аксиомы проективного трехмерного пространства

T_1. *Две различные точки принадлежат одной и только одной прямой.*

T_2. *Три неколлинеарные точки принадлежат одной и только одной плоскости.*

T_3. *Прямая и плоскость имеют по меньшей мере одну общую точку.*

T_4. *Две плоскости имеют по меньшей мере одну общую прямую.*

T_5. *Существуют четыре некомпланарные точки, любые три из которых неколлинеарны.*

T_6. *Прямая содержит по меньшей мере три точки.*

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что любые два пучка параллельных прямых на аффинной плоскости имеют одну и ту же мощность (т. е. что между элементами этих пучков можно установить взаимно однозначное соответствие). Покажите также, что множество точек на прямой имеет ту же самую мощность.

2. Докажите, что если существует прямая, содержащая ровно n точек, то вся аффинная плоскость содержит n^2 точек.

3. Рассмотрите возможные системы точек и прямых, удовлетворяющие Π_1, Π_2, Π_3 и не удовлетворяющие Π_4.

4. Докажите, что проективная плоскость, состоящая из семи точек, которую мы получили пополнением аффинной плоскости, состоящей из четырех точек, есть проективная плоскость с наименьшим возможным числом точек.

5. Пусть прямая на проективной плоскости содержит n точек. Найдите число точек проективной плоскости.

6. Пусть S — проективная плоскость, а l — прямая на ней. Определим S_0 как множество точек S, не принадлежащих l, а прямые на S_0 определим как сужение прямых из S. Докажите (используя $\Pi_1 - \Pi_4$), что S_0 — аффинная плоскость. Докажите также, что S изоморфна пополнению аффинной плоскости S_0.

7. Используя аксиомы $T_1 - T_6$ трехмерного проективного пространства, докажите следующие утверждения [1]).

а) Если две различные точки P и Q принадлежат плоскости Σ, то прямая, соединяющая их, тоже принадлежит плоскости Σ.

б) Плоскость и не принадлежащая ей прямая имеют одну и только одну общую точку.

в) Две различные плоскости имеют одну и только одну общую прямую.

г) Через прямую и не принадлежащую ей точку проходит в точности одна плоскость.

8. Докажите, что любая плоскость Σ в трехмерном проективном пространстве является проективной плоскостью, т. е. удовлетворяет аксиомам $\Pi_1 - \Pi_4$. (Можно использовать результаты, полученные при решении предыдущей задачи.)

---

[1]) Самым внимательным образом следите за тем, чтобы при доказательствах не использовать никаких предположений, кроме тех, которые содержатся в утверждениях этих аксиом.

Конечные аффинные плоскости

9. Докажите, что любые две аффинные плоскости, состоящие из девяти точек, изоморфны. (Две плоскости A и A' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $T: A \to A'$, переводящее прямые в прямые.)

10. Постройте аффинную плоскость, состоящую из шестнадцати точек. (Указание. Мы знаем из задачи 1, что любой пучок параллельных прямых содержит четыре прямые. Пусть прямые a, b, c, d образуют один пучок, а прямые 1, 2, 3, 4 — другой пучок. Обозначим пересечения этих прямых через $A_1 = a \cap 1$ и т. д. Для того чтобы закончить это построение, примите за прямые трех других пучков другие подмножества из четырех точек. Выпишите каждую прямую явно, указав ее четыре точки, например: прямая $2 = \{A_2, B_2, C_2, D_2\}$.)

11. Эйлер в 1779 году поставил следующую задачу: «построить в каре (в виде квадрата) 36 офицеров шести разных чинов из шести различных полков так, чтобы каждый ряд и каждая шеренга состояла из шести офицеров разных чинов из разных полков». Было доказано, что эта задача не имеет решения. Выведите из этого факта, что не существует аффинной плоскости, состоящей из 36 точек.

Далее мы рассмотрим дезаргову конфигурацию, состоящую из 10 элементов, $\Sigma = \{O, A, B, C, A', B', C', P, Q, R\}$, и 10 прямых, являющихся подмножествами Σ:

$$OAA',\ OBB',\ OCC',\ ABP,\ A'B'P,\ ACQ,\ A'C'Q,\ BCR,\ B'C'R,\ PQR.$$

Пусть $G = \operatorname{Aut}\Sigma$ — группа автоморфизмов плоскости Σ.

12. Докажите, что группа G транзитивна на Σ.

13. а) Докажите, что подгруппа G, состоящая из отображений, имеющих неподвижную точку, транзитивна на множестве из шести элементов.

б) Докажите, что порядок подгруппы G, состоящей из элементов, имеющих две неподвижные точки, равен 2.

в) Используя ранее полученные результаты, найдите порядок группы G.

Назовем плоскостями следующие подмножества:

$$1 = \{O, A, B, A', B', P\},$$
$$2 = \{O, A, C, A', C', Q\},$$
$$3 = \{O, B, C, B', C', R\},$$
$$4 = \{A, B, C, P, Q, R\},$$
$$5 = \{A', B', C', P, Q, R\}.$$

14. Покажите, что каждый элемент группы G индуцирует подстановку множества пяти плоскостей $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и что отображение

$$\varphi : G \to \mathrm{Perm}\,\{1, 2, 3, 4, 5\}$$

устанавливает изоморфизм групп. Таким образом, группа G изоморфна группе подстановок пяти элементов.

15. а) Пусть π_0 — множество, состоящее из четырех точек A, B, C, D и не содержащее ни одной прямой, а Π — свободная проективная плоскость, порожденная конфигурацией π_0. Докажите, что любая подстановка множества $\{A, B, C, D\}$ может быть расширена до автоморфизма проективной плоскости Π.

б) Докажите, что не любой автоморфизм Π представляется в таком виде.

16. (Задача Сильвестра о точках.) Докажите, что на действительной проективной плоскости не существует такой конечной конфигурации, что каждая прямая содержит по крайней мере три точки, любая пара несовпадающих точек принадлежит одной прямой и не все точки коллинеарны. (Указание. Перейдите к евклидовой плоскости и найдите треугольник с минимальной высотой.)

17. Пусть Π — проективная плоскость, а T — *инволюция* Π, т. е. такой автоморфизм Π, что

$$T^2 = T \cdot T = \text{тождественное отображение } \Pi,$$

и пусть Σ — множество неподвижных точек инволюции T. Докажите, что справедливо одно (и только одно) из следующих утверждений.

Случай 1. Существует такая прямая l_0 плоскости Π, что $\Sigma = l_0$.

Случай 2. Существует такая прямая l_0 и такая точка $P_0 \notin l_0$, что $\Sigma = l_0 \cup \{P_0\}$.

Случай 3. Σ — проективная плоскость, на которой «прямая» определяется как произвольное подмножество Σ вида

$$(\text{прямая на } \Pi) \cap \Sigma,$$

содержащее по крайней мере две точки.

Докажите также, что случай 1 возможен только тогда, когда не выполняется аксиома Π_7.

18. Для каждого случая 1, 2, 3 задачи 17 укажите пример проективной плоскости Π и инволюции T, не являющейся тождественным отображением, для которых выполняется соответствующее свойство. Никакие доказательства здесь не требуются.

19. Пусть φ — функция, отображающая множество действительных (2×2)-матриц

$$\left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\}$$

в множество действительных чисел и такая, что

D_1. $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$,

D_2. $\varphi\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

Докажите, что $\varphi(A) = \det A$, т. е. что

$$\varphi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc,$$

для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. (Несколько более сложное доказательство проходит и для $(n \times n)$-матриц.)

20. Пусть Π — действительная проективная плоскость и $A = (a, 0, 1)$, $B = (b, 0, 1)$, $C = (c, 0, 1)$, $D = (d, 0, 1)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ — четыре точки «оси x_1». Докажите, что A, B, C, D образуют гармоническую четверку тогда и только тогда, когда

$$R_x(A, B, C, D) = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c} = -1.$$

(Величина $R_x(a, b, c, d)$ называется *двойным отношением* четырех точек.) Для доказательства используйте методы евклидовой геометрии на аффинной плоскости $x_3 \neq 0$.

21. Меняя местами слова «точка» и «прямая» и т. д., дайте точную формулировку двойственной аксиомы Паппа Π_6^*. Затем, используя $\Pi_1 - \Pi_4$ и Π_6, докажите Π_6^*.

22. Рассмотрите конфигурацию, о которой идет речь в аксиоме Паппа, на действительной проективной плоскости и примите прямую PQ за бесконечную. Аксиома Паппа превращается тогда в некое утверждение на евклидовой плоскости. Сформулируйте это утверждение и докажите его с помощью методов евклидовой геометрии. (Этот подход дает новое доказательство Π_6 на действительной проективной плоскости.)

В трех следующих задачах мы рассмотрим такую ситуацию: пусть $l \overset{O}{\underset{\wedge}{=}} m \overset{P}{\underset{\wedge}{=}} n$ — цепь двух перспективных отображений (предполагается, что $l \neq n$), а $\varphi: l \to n$ — результирующее проективное отображение l на n; пусть, далее, $X = l \cdot n$.

23. 1° Докажите, что если φ — перспективное отображение, то $\varphi(X) = X$.

2° Предположим, что $\varphi(X) = X$. Докажите, что справедливо одно из следующих утверждений:

а) l, m, n принадлежит одному пучку;

б) O, P, X коллинеарны.

24. В той же ситуации предположим, что l, m, n принадлежат одному пучку. Докажите, что тогда существует такая точка

Q, что O, P, Q коллинеарны и φ есть перспективное отображение $l \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} n$. (Указание. Используйте Π_5 или Π_5^*.)

25. В той же ситуации введем еще одно предположение: пусть O, P, X коллинеарны, но l, m, n не принадлежат одному пучку. Пусть $Y = l \cdot m$, $Z = m \cdot n$, $Q = OZ \cdot PY$.

Докажите, что φ — перспективное отображение $l \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} n$. (Указание. Используйте Π_6 или Π_6^*.)

Замечание. Задачи 23—25 содержат доказательство леммы 5.4. В действительности в них заключен даже более сильный результат, утверждающий, что в описанной ситуации эквивалентны следующие три условия:

1° φ — перспективное отображение;

2° $\varphi(X) = X$;

3° выполняется или условие а), или условие б) задачи 23.

26. Пусть $k = \{0, 1, 2\}$ — поле, состоящее из трех элементов (поле вычетов по модулю 3), а

$$F = \{a + bj | a, b \in k\},$$

где j — некоторый новый символ.

а) Приняв $j^2 = 2$, введите на F сложение и умножение и докажите, что F — поле.

б) Докажите, что мультипликативная группа F^* ненулевых элементов поля F является циклической группой порядка 8.

27. Пусть $A = F$ как множество, элементы A обозначим через (x), где $x \in F$. Определим сложение и умножение на A следующим образом:

$(x) + (y) = (x + y)$ (здесь $+$ в левой части равенства означает сложение в A, а $+$ справа — сложение в F);

$$(x)(y) = \begin{cases} (xy), \text{ если } y \text{ является квадратом в } F, \\ (x^3y), \text{ если } y \text{ не является квадратом в } F. \end{cases}$$

(Мы говорим, что y является квадратом в F, если $\exists z \in F$, такой, что $y = z^2$.)

Докажите, что

а) A — коммутативная группа по сложению;

б) ненулевые элементы A^* из A образуют группу по умножению;

в) $(0)(x) = (x)(0) = 0$ для всех $(x) \in A$;

г) $((x) + (y))(z) = (x)(z) + (y)(z)$ для всех (x), (y), $(z) \in A$.

28. Пусть A — конечная алгебра, удовлетворяющая условиям предыдущей задачи (т. е. A — конечное множество с двумя операциями, удовлетворяющими а), б), в), г)). Заметьте, что в отличие от определения тела здесь не требуется выполнения левого дистрибутивного закона. Докажите, что можно построить проективную плоскость P_A^2 над A следующим образом.

(i). *Точкой* называется класс эквивалентности троек (x_1, x_2, x_3), где $x_i \in A$ и $(x_1, x_2, x_3) \sim (x_1\lambda, x_2\lambda, x_3\lambda)$ для любого $\lambda \in A$, $\lambda \neq 0$. (Проверьте, что $\sim$ есть отношение эквивалентности!)

(ii). *Прямой* называется множество точек, удовлетворяющее уравнению вида

$$x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \quad b, c \in A,$$

или

$$x_2 + cx_3 = 0, \qquad c \in A,$$

или

$$x_3 = 0.$$

(Докажите, что эти уравнения действительно определяют множества точек.)

(iii). Проверьте аксиомы $\Pi_1 - \Pi_4$.

[Два предупреждения:

1° Не все линейные уравнения определяют прямые!

2° В доказательстве обязательно должна использоваться конечность A.]

29. Пусть A — алгебра задачи 27. Докажите, что $\mathbb{P}_A^2$ не удовлетворяет аксиоме Дезарга Π_5. Таким образом, $\mathbb{P}_A^2$ — пример конечной недезарговой проективной плоскости.

30. Аксиомы действительной аффинной плоскости.

Пусть отношение $\langle ABC \rangle$ точек обычной евклидовой плоскости означает, что A, B, C коллинеарны и что B лежит между A и C. Какие свойства имеет это отношение?

Пусть теперь Σ — абстрактная аффинная плоскость, удовлетворяющая аксиомам A_1, A_2, A_3, A_5а, A_5б и A_6 (так мы обозначаем «аффинную аксиому Паппа»). Предположим, что на Σ введено отношение «между», т. е. для некоторых троек точек $A, B, C \in \Sigma$ мы имеем $\langle ABC \rangle$, и предположим, что $\langle\ \rangle$ удовлетворяет некоторым аксиомам, описывающим те свойства, которые вы перечислили ранее. (Убедитесь, что вы ничего не забыли.) Добавьте еще следующую аксиому полноты.

Д. (Аксиома Дедекинда о сечениях.) *Если прямая l разбита на два непустых подмножества l' и l'' так, что ни один элемент одного подмножества не лежит между элементами другого подмножества, то существует единственная точка $A \in l$, такая, что*

$$\forall B \in l', \ \forall C \in l'', \ B \neq A, \ C \neq A, \text{ имеем } \langle BAC \rangle.$$

Теперь попытайтесь доказать, что эта плоскость Σ с введенным в ней понятием «между» есть аффинная плоскость над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. (Используйте теорему о том, что $\mathbb{R}$ — единственное вполне упорядоченное поле.)

Указание. За одну из аксиом примите следующее утверждение.

Аксиома Паша. *Если A, B, C — три неколлинеарные точки и если $\langle BCD\rangle$ и $\langle AEC\rangle$, то существует точка F прямой DE, такая, что $\langle BFA\rangle$* (рис. 59).

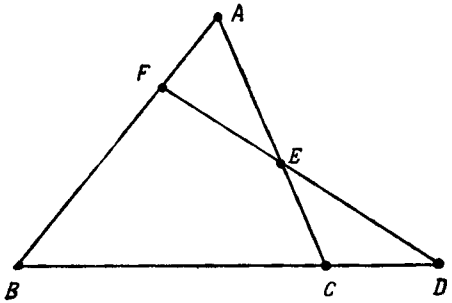


Рис. 59.

31. Пусть S_4 — группа подстановок четырех элементов 1, 2, 3, 4.

а) Пусть $G \subseteq S_4$ — подгруппа, порожденная подстановкой (1, 2, 3, 4). Каков порядок G? (*Порядком* группы называется число ее элементов.)

б) Пусть $H \subseteq S_4$ — подгруппа, порожденная подстановками (1, 2) и (3, 4). Каков порядок H?

в) Существует ли изоморфизм (абстрактных групп) $\varphi: G \to H$? Если да, то запишите его в явном виде. Если нет, то почему?

32. *Конфигурацией Паппа* называется изображенная на рис. 60 конфигурация Σ, состоящая из 9 точек и 9 прямых.

а) Каков порядок группы автоморфизмов конфигурации Σ?

б) Как вы получили этот результат?

33. а) Напишите уравнение прямой, соединяющей точки (1, 0, 1) и (1, 2, 3) действительной проективной плоскости.

б) Найдите точку пересечения прямых

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$
$$3x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

34. Мы знаем, что на действительной проективной плоскости существует автоморфизм, переводящий любые четыре точки, каждые три из которых неколлинеарны, в любые другие четыре такие точки. Найдите коэффициенты a_{ij} автоморфизма, заданного формулами

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3,$$

и переводящего точки

$$A = (0, 0, 1),\ B = (0, 1, 0),\ C = (1, 0, 0),\ D = (1, 1, 1)$$

соответственно в точки

$$A' = (1, 0, 0),\ B' = (0, 1, 1),\ C' = (0, 0, 1),\ D' = (1, 2, 3).$$

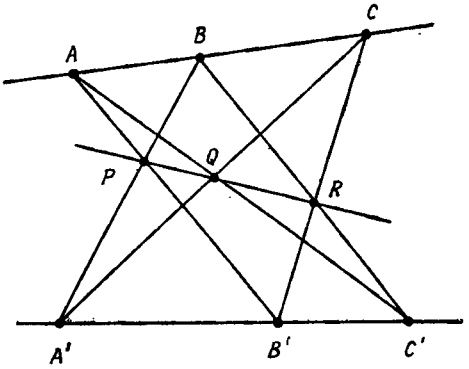


Рис. 60.

35. а) Исходя из аксиом $\Pi_1 - \Pi_4$, докажите следующее утверждение:

Q. «существуют четыре точки, любые три из которых неколлинеарны».

б) Докажите, что из Π_1, Π_2 и Q следуют Π_3 и Π_4.

36. Проверьте, какие из аксиом Π_5, Π_6 и Π_7 выполняются (и объясните, почему выполняется или не выполняется каждая из них) для следующих проективных плоскостей:

а) проективная плоскость, состоящая из 7 точек;

б) действительная проективная плоскость;

в) свободная проективная плоскость, порожденная четырьмя точками.

37. а) Изобразите на чертеже проективную плоскость Π, состоящую из 7 точек.

б) Существует ли такой нетождественный автоморфизм T плоскости Π, что T^7 — тождественное отображение.

Если T существует, то выпишите его в явном виде; если не существует, то объясните причину этого.

38. Пусть l, l' — две различные прямые проективной плоскости Π и $X = l \cdot l'$. Пусть, далее, A, B — две различные точки l, отличные от X, а C, D — две различные точки l', не совпадающие с X. Постройте проективное отображение $\varphi : l \to l'$, переводящее A, X, B соответственно в X, C, D.

39. Пусть l — прямая проективной плоскости Π, удовлетворяющей аксиомам $\Pi_1 - \Pi_6$, а φ — такая подстановка точек l

что для любых четырех точек A, B, C, D на l

A, B, C, D — гармоническая четверка точек $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow A'$, B', C', D' — гармоническая четверка точек

(где, как всегда, $A' = \varphi(A)$ и т. д.). Обязательно ли φ должно быть проективным преобразованием l? Докажите или постройте контрпример.

40. Найдите диагональные точки полного четырехугольника с вершинами в точках $(\pm 1, \pm 1, 1)$.

41. Пусть Π — проективная плоскость, состоящая из семи точек, а A и B — две различные точки плоскости Π. Сколько существует автоморфизмов, переводящих A в B? Почему?

42. а) Пусть F — тело и λ — фиксированный ненулевой элемент F. Докажите, что отображение $\varphi : F \to F$, определенное следующим образом: $\varphi(x) = \lambda x \lambda^{-1}$ для всех $x \in F$, является автоморфизмом F.

б) Пусть p — простое число. Докажите, что поле F, состоящее из p элементов, не имеет никаких автоморфизмов, кроме тождественного. (Указание. Вспомните, что $F = \{0, 1, \ldots, p-1\}$, где сложение и умножение определены по модулю p.)

43. Пусть F — поле, состоящее из трех элементов, $\Pi = \mathbb{P}^2_F$ и l — некоторая прямая плоскости Π. Докажите, что l содержит ровно четыре точки A, B, C, D и что рассматриваемые в любом порядке, они образуют гармоническую четверку.

44. На обычной евклидовой плоскости (вложенной в действительную проективную плоскость) рассмотрите окружность C с центром O; пусть точка P лежит вне C, а t_1 и t_2 — касательные к C, проведенные из точки P, причем A_1 и A_2 — точки касания (рис. 61). Пусть A_1A_2 пересекает OP в точке B, а OP пересекает C в точках X и Y. Докажите, что X, Y, B, P — гармоническая четверка точек.

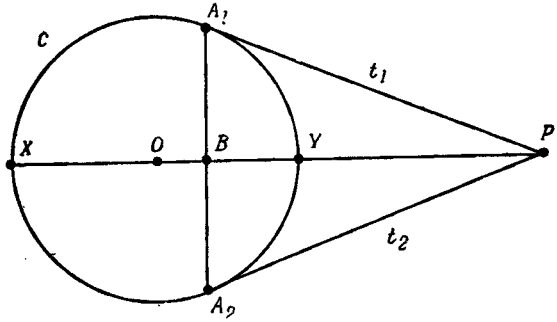


Рис. 61.

45. Пусть F — поле, и пусть

$$X = (x_1, x_2, x_3),\ Y = (y_1, y_2, y_3),\ Z = (z_1, z_2, z_3)$$

— три точки на проективной плоскости $\Pi = \mathbb{P}^2_F$. Если $X \neq Y$ и Y, Z коллинеарны, то докажите, что существуют такие элементы $\lambda, \mu \in F$, что

$$z_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

46. Пусть проективная плоскость Π удовлетворяет Π_5, Π_6 и Π_7, и пусть l — прямая плоскости Π. Докажите, что если φ —

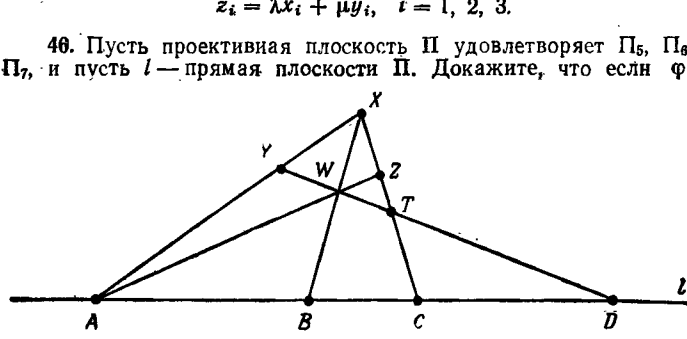


Рис. 62.

проективное преобразование l, переставляющее две различные точки $A, B \in l$ (т. е. $\varphi(A) = B$ и $\varphi(B) = A$), то φ^2 — тождественное отображение. (Указание. Пусть C — отличная от A и B точка прямой l, и пусть $\varphi(C) = D$. Используя рис. 62, постройте проективное преобразование $\psi: l \to l$, переставляющее точки A и B и точки C и D. Затем примените основную теорему.)

47. Пусть p — простое число, поле F состоит из p элементов и $\Pi = \mathbb{P}^2_F$, а $G = \mathrm{Aut}\,\Pi$. Докажите, что порядок группы G равен

$$p^3(p^3 - 1)(p^2 - 1).$$

(Указание. Сначала докажите, что $G = PGL(2, F)$. Затем вспомните, что для матрицы над F

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

$\det A \neq 0$ тогда и только тогда, когда нет строки, состоящей из одних нулей, и точки $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$ плоскости Π неколлинеарны. Другой путь: используйте основную теорему о коллинеациях плоскости Π.)

ЛИТЕРАТУРА

1*. Вольберг О. А., Основные идеи проективной геометрии, М., Учпедгиз, 1949.

Хорошее введение в проективную геометрию, рассчитанное на начинающих, в первую очередь на учащихся средней школы.

2*. Coxeter H. S. M., Projective Geometry, Waltham, 1964.

Элементарный учебник проективной геометрии.

3*. Юнг Дж., Проективная геометрия, М., ИЛ, 1949.

Небольшой, но достаточно содержательный учебник проективной геометрии.

4. Кокстер Г. С. М., Введение в геометрию, М., «Наука», 1966.

В гл. 14 содержится хорошее краткое изложение основ проективной геометрии.

5. Кокстер Г. С. М., Действительная проективная плоскость, М., Физматгиз, 1959.

Хорошее изложение основ синтетической проективной геометрии.

6*. Буземан Г., Келли Дж., Проективная геометрия и проективные метрики, М., ИЛ, 1957.

Хороший учебник проективной геометрии в аналитическом изложении.

7*. Гуревич Г. Б., Проективная геометрия, М., Физматгиз, 1960.

Учебник проективной геометрии, рассчитанный на студентов педагогических институтов.

8. Fishback W. T., Projective and Euclidean Geometry, New York — London, 1962.

Хорошее общее изложение теории, близкое к принятому в этой книге.

9. Гильберт Д., Кон-Фоссен С., Наглядная геометрия, М. — Л., Гостехиздат, 1951.

Глава III, посвященная проективным конфигурациям, имеет непосредственное отношение к материалу нашей книги и читается с большим удовольствием.

10. Артин Э., Геометрическая алгебра, М., «Наука», 1969.

В главе 2 вводятся координаты на аффинной плоскости с помощью несколько более абстрактного подхода, чем принятый нами.

11. Artzy R., Linear Geometry, Reading, 1965.

Книга содержит главу, посвященную различным системам аксиом плоской геометрии; особое внимание уделяется недезарговым плоскостям.

12. Baker H. F., Principles of Geometry, Cambridge, 1929—40.

В главе 1 тома 1 приводится доказательство утверждения: «цепочка произвольной длины перспективных ото-

бражений, отображающая друг на друга различные прямые, может быть сведена к композиции двух перспективных отображений».

13. Seidenberg A., Lectures in Projective Geometry, London, 1963.

Хорошее общее изложение теории с упором на аксиоматику.

14*. Ходж В., Пидо Д., Методы алгебраической геометрии, т. I, М., ИЛ, 1954.

Хорошее изложение трехмерной и n-мерной проективной геометрии.

15*. Бэр Р., Линейная алгебра и проективная геометрия, М., ИЛ, 1955.

Хорошее (отнюдь не устаревшее) руководство по проективной геометрии.

16*. Dembowski P., Finite Geometries, Berlin — Heidelberg — New York, 1968.

Обстоятельный обзор учения об аффинных, проективных и конформных геометриях с конечным числом точек. Библиография — около 1500 названий.

17. Birkhoff G., MacLane S., A Survey of Modern Algebra, New York — London, 1941.

Книга содержит главу, посвященную теории групп.

18. Carmichael R. D., Introduction to the Theory of Groups of Finite Order, New York, 1956.

В § 108 приводятся примеры конечных недезарговых проективных плоскостей, частично воспроизведенные нами в задачах 26—29.

19*. Курош А. Г., Лекции по общей алгебре, М., Физматгиз, 1962.

Учебное пособие для студентов университетов.

20*. Ленг С., Алгебра, М., «Мир», 1968.

Хороший современный учебник алгебры.

21*. Cartan E., Leçon sur la géométrie projective complexe, Paris, 1931.

Обстоятельное изложение проективной геометрии комплексной прямой.

22*. Яглом И. М., Ашкинузе В. Г., Введение в идеи и методы аффинной и проективной геометрии, ч. I. Аффинная геометрия, М., Учпедгиз, 1962.

Рассчитанное на студентов педагогических институтов пособие по аффинной геометрии, подчеркивающее, в частности, роль в этой геометрии аксиомы A_5а.

23. Kraitchik M., Mathematical Recreations, New York, 1953.

В разделе 12 главы VII дается интерпретация магических квадратов как конечных аффинных плоскостей и приводится задача Эйлера об офицерах.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$P = Q$	P совпадает с Q
$P \neq Q$	P не совпадает с Q
$P \in l$	P принадлежит l
$P \notin l$	P не принадлежит l
$l \cdot m$	точка пересечения l и m
$A \cdot B$	прямая, соединяющая точки A и B
$l \parallel m$	l параллельна m
$l \nparallel m$	l не параллельна m
$\forall$	для каждого
$\exists$	существует
$\Rightarrow$	влечет за собой
$\Leftrightarrow$	тогда и только тогда
$a \sim b$	a эквивалентно b
$\varnothing$	пустое множество
$M \cap N$	пересечение множеств M и N
$M \cup N$	объединение множеств M и N
$M \subset N$	множество M принадлежит множеству N
$M \subseteq N$	множество M принадлежит множеству N или совпадает с ним
$M \setminus N$	теоретико-множественная разность множеств M и N
$\# (M)$	мощность множества M
$\mathbb{R}$	поле действительных чисел
$\mathbb{Q}$	поле рациональных чисел
$\mathbb{C}$	поле комплексных чисел
$[l]$	пучок прямых, параллельных l; бесконечная точка направления l
l_∞	бесконечная прямая
A	аффинная плоскость
Π	проективная плоскость

$\mathbb{A}_F^2$	аффинная плоскость над телом F
$\mathbb{A}_R^2$	действительная аффинная плоскость
$\mathbb{P}_F^2$	проективная плоскость над телом F
$\mathbb{P}_R^2$	действительная проективная плоскость
$\mathbb{P}_F^3$	проективное трехмерное пространство над телом F
$\mathbb{R}^3$	трехмерное евклидово пространство
$S(A)$	пополнение аффинной плоскости A до проективной плоскости
$H(AB, CD)$	точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку
$l \underset{\wedge}{\overset{O}{=}} l'$	перспективное отображение прямой l на l' с центром в точке O
$l \underset{\wedge}{\overline{\ }} l'$	проективное отображение прямой l на l'
id	тождественное отображение
$Z(F)$	центр тела F
char Q	характеристика Q
S_n	симметрическая группа, образованная n элементами
Perm M	группа подстановок множества M
$M \simeq N$	M изоморфно N
Aut C	группа автоморфизмов C
Inaut C	группа внутренних автоморфизмов C
det A	детерминант матрицы A
$GL(n, \mathbb{R})$	полная линейная группа порядка n
$PJ(l)$	группа проективных преобразований прямой l
$PGL(2, F)$	проективная линейная группа порядка 2 над телом F
$PGL(2, \mathbb{R})$	проективная полная линейная группа порядка 2 над полем действительных чисел
Dil (A)	группа растяжений плоскости A
$\mathrm{Dil}_O(A)$	группа растяжений плоскости A с неподвижной точкой O
Tran (A)	группа параллельных переносов плоскости A
$\mathrm{Tran}_m(A)$	группа переносов плоскости A в направлении m
$PC(\Pi)$	группа коллинеаций проективной плоскости Π

ОГЛАВЛЕНИЕ

Р. Хартсхорн

ОСНОВЫ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Редакторы *Г. М. Ильичева, Н. И. Плужникова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Г. В. Алюлина*
Корректор *И. С. Соколова*

Сдано в производство 18/XI 1969 г. Подписано к печати 12/V 1970 г. Бумага № 2 $84\times108^1/_{32}$ = 2,50 бум. л. 8,40 усл. печ. л., 6,58 уч.-изд. л. Изд. № 1/5569. Цена 45 к. Зак. 407.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29.

45 коп.

Книга Р. Хартсхорна заполняет ощутимый пробел в нашей математической литературе — советский читатель давно нуждался в компактном изложении идей современной проективной геометрии, пригодном для первоначального ознакомления с предметом и рассчитанном не только на геометров, но и на гораздо более широкий круг начинающих математиков.

Автор излагает проективную геометрию как чисто дедуктивную науку, развиваемую на основе немногочисленных аксиом, и отмечает глубокие связи этой науки с другими разделами математики.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР