ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга охватывает вопросы, касающиеся основ математического анализа, которые изучаются в рамках курса «Высшая математика» для различных специальностей высших учебных заведений.

При написании книги автор стремился соблюдать ставший традиционным порядок изложения курса лекций по высшей математике, а также старался излагать материал на доступном и строгом математическом языке.

Книга включает следующие основные разделы математического анализа: пределы и непрерывность функций (главы 2–5); дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной (главы 6, 8, 9); дифференциальное исчисление функций многих переменных (глава 10). В главе 1 приводятся некоторые предварительные сведения из теории множеств, а также вводится понятие действительного числа. Глава 7 посвящена основным понятиям теории комплексных чисел.

Данная книга адресована в первую очередь студентам инженерно-технических и экономических специальностей вузов. Однако она, безусловно, может быть полезной также для студентов, которые в том или ином объеме изучают высшую математику.

Автор выражает глубокую благодарность редактору данной книги Елене Юрьевне Ходан за тщательное прочтение и подробную проверку текста рукописи. Были устранены замеченные недостатки и учтены все ценные замечания, которые, несомненно, способствовали улучшению содержания учебника.

Москва, сентябрь, 2004 г. *П.С. Геворкян*

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ

§ 1.1. Множества. Операции над множествами

Понятие *множества* является одним из *основных понятий математики*. Это первичное понятие, которое не нуждается в строгом математическом определении с помощью более простых понятий.

Множество — это совокупность (собрание, семейство, класс и т. д.) каких-либо объектов произвольной природы. Например, можно говорить о множестве студентов данного курса, о множестве всех целых чисел, о множестве всех компьютеров института и т. д.

Объекты, из которых состоит данное множество, называются *элементами* этого множества.

Множества, как правило, обозначают большими буквами латинского алфавита: A, $B, \ldots, X$, $Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами: a, $b, \ldots, x$, $y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то этот факт записывают так: $x \in X$. Запись $x \notin X$ или $x \overline{\in} X$ означает, что элемент x *не принадлежит* множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

При описании элементов множества часто употребляют фигурные скобки. Например, запись $X = \{1, 2, 3\}$ означает, что множество X состоит из трех чисел: 1, 2, 3. Через $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ обозначают множество натуральных чисел.

Множество A называется *подмножеством* множества B, если любой элемент множества A также принадлежит множеству B; иначе говоря, если из $x \in A$ следует $x \in B$. Если A является подмножеством B, то пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Символы $\subset$ и $\supset$ называются *символами включения*.

Говорят, что множества A и B равны, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$; иначе говоря, если они состоят из одних и тех же элементов.

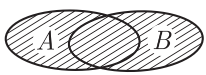
Объединением (или *суммой*) множеств A и B называется множество, состоящее из всех элементов множеств A и B (рис. 1.1). Объединение (сумма) множеств A и B обозначается $A \cup B$ $(A + B)$. Итак, по определению

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением (или *произведением*) множеств A и B называется множество, состоящее из тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1.2). Пересечение (произведение) множеств A и B обозначается $A \cap B$ $(A \cdot B)$. Итак,

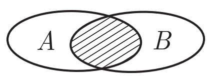
$$A \cap B = \{x\colon x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат множеству A, но не принадлежат



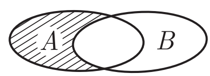
$A \cup B$

Рис. 1.1



$A \cap B$

Рис. 1.2



$A \setminus B$

Рис. 1.3

множеству B (рис. 1.3). Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$.

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать следующие *логические символы*:

$\alpha \Rightarrow \beta$ (означает, что «из предложения α *следует* предложение β»);

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ (означает, что «предложения α и β *равносильны*»);

$\forall$ (означает «для любого», «для произвольного», «для всякого»);

: (означает «такое, что», «имеет место»);

$\exists$ (означает «существует», «найдется»);

$\overline{\alpha}$ (означает отрицание предложения α).

Например, запись «$\forall x \in A : \overline{\alpha}$» следует читать «для любого x, принадлежащего A, имеет место отрицание предложения α».

§ 1.2. Действительные числа

Понятие «число» прошло длительный путь исторического развития. Множество *натуральных чисел*

$$\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$$

возникло в связи со счетом предметов. Затем появились множество *целых чисел*

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

и множество *рациональных чисел*

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n}, \text{ где } m, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}.$$

Введение рациональных чисел, однако, полностью не решило много задач об измерении геометрических и физических величин.

Рассмотрим, например, отрезок, представляющий собой диагональ квадрата, сторона которого равна единице. Допустим, что эта диагональ выражается рациональной дробью $\frac{m}{n}$, которую будем считать несократимой. Заметим, что площадь квадрата, построенного на этой диагонали, равна 2: $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, т. е. $m^2 = 2n^2$. Отсюда следует, что m^2, а значит, и m — четные числа: $m = 2k$. Подставив это значение в равенство $m^2 = 2n^2$, получим $4k^2 = 2n^2$, т. е. $2k^2 = n^2$. А из этого следует, что n^2, а значит, и n — четные числа: $n = 2l$. Но тогда $\frac{m}{n} = \frac{2k}{2l}$, что противоречит предположению о том, что дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Таким образом, существуют отрезки, длины которых не выражаются рациональными числами. Чтобы измерять длины таких отрезков, были введены новые числа, названные *иррациональными*. Так возникло число $\sqrt{2}$, выражающее диагональ рассмотренного выше квадрата.

Существуют различные способы введения иррациональных чисел. Мы это сделаем с помощью бесконечных десятичных дробей.

Пусть $\frac{m}{n}$ — произвольное положительное рациональное число. Если произвести процесс деления m на n по известному из школьного курса способу:

$$\begin{array}{r|l} m & n \\ \cline{2-2} & a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots \end{array}, \tag{1.1}$$

то для числа $\dfrac{m}{n}$ получим представление

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \tag{1.2}$$

где a_0 — целое неотрицательное число, $a_k = 0, 1, 2, \ldots, 9$ — десятичные цифры для любого $k = 1, 2, \ldots$

Представление (1.2) называется *десятичным разложением* числа $\dfrac{m}{n}$.

Хорошо известно, что в результате процесса (1.1) деления числа m на n мы можем получить десятичное разложение только одного из двух следующих типов:

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k = a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_k 00 \ldots, \tag{1.3}$$

если процесс деления заканчивается после конечного числа шагов и получается *конечная десятичная дробь*, или

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k b_1 \ldots b_l b_1 \ldots b_l \ldots = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k (b_1 \ldots b_l), \tag{1.4}$$

если начиная с некоторого места возникает некоторый период $(b_1 \ldots b_l)$, где не все цифры b_i, $i = 1, \ldots l$, равны нулю, и в результате получается *бесконечная десятичная периодическая дробь*.

Случай (1.3) можно свести к случаю (1.4), полагая

$$\frac{m}{n} = a_0, a_1 a_2 \ldots a_k = a_0, a_1 a_2 \ldots \{a_k - 1\} 99 \ldots = \\ = a_0, a_1 a_2 \ldots \{a_k - 1\}(9). \tag{1.5}$$

Таким образом, произвольному рациональному числу $\dfrac{m}{n}$ соответствует некоторая бесконечная десятичная периодическая дробь $\Bigl($отрицательному рациональному числу $-\dfrac{m}{n}$ приводим в соответствие бесконечное десятичное разложение числа $\dfrac{m}{n}$, взятое со знаком минус$\Bigr)$. Верно и обратное.

Однако кроме бесконечных десятичных периодических дробей существуют и бесконечные непериодические дроби. Теперь мы можем дать определение иррационального числа.

Произвольная бесконечная десятичная непериодическая дробь

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots, \tag{1.6}$$

где a_0 — целое неотрицательное число, a_k $(k = 1, 2, \ldots)$ — десятичные цифры $0, 1, \ldots, 9$, называется *иррациональным числом*. Знак равенства в (1.6) означает, что правую часть мы просто обозначили через a.

Числа $\sqrt{2} = 1,4142356\ldots$ и $\pi = 3,1415926\ldots$ являются примерами иррациональных чисел.

Рациональные и иррациональные числа называются *действительными* (или *вещественными*) числами.

Множество всех действительных чисел обозначается буквой $\mathbf{R}$.

Из вышеизложенного следует, что *всякое не равное нулю действительное число представляется в виде бесконечной десятичной дроби* (1.6). *Причем если это число рациональное, то соответствующее ему десятичное разложение есть бесконечная десятичная периодическая дробь. В противном случае выражение* (1.6) *само определяет иррациональное число согласно данному выше определению.*

Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является *всюду плотным* в множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел, т. е. между двумя произвольными действительными числами a и b $(a < b)$ содержится бесконечное множество рациональных чисел x, т. е. рациональных чисел, удовлетворяющих условию $a < x < b$.

Теперь установим взаимно однозначное соответствие между действительными числами и множеством всех точек прямой. Для этого возьмем произвольную точку O на прямой и зададим единицу измерения длины на этой прямой (т. е. зафиксируем отрезок, длина которого принимается за единицу). Числу 0 сопоставим точку O, а произвольному действительному числу a — точку прямой, расстояние которой от точки O равно a, причем расположенную справа от точки O, если a — положительное число, и слева от точки O, если a — отрицательное число (рис. 1.4).

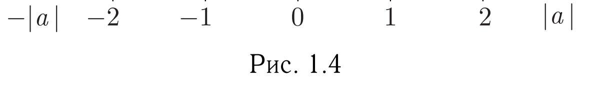


Рис. 1.4

Наоборот, если A — произвольная точка прямой, находящаяся справа на расстоянии a от точки O, то будем считать, что она соответствует действительному числу a. Если же точка A находится слева от точки O, то она соответствует действительному числу $-a$.

Рассматриваемую прямую будем называть *числовой прямой* или *действительной осью*.

§ 1.3. Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть a и b — произвольные действительные числа, причем $a < b$.

1. Множество всех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается (a, b).

2. Множество всех действительных чисел x, которые удовлетворяют неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* (*сегментом*, *замкнутым интервалом*) и обозначается $[a, b]$. Числа a и b называются *граничными точками* или *концами отрезка* $[a, b]$. Любое число $x \in (a, b)$ называется *внутренней точкой* отрезка $[a, b]$.

3. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ (или $a < x \leqslant b$), называется *полуинтервалом* или *полуотрезком* и обозначается $[a, b)$ (или $(a, b]$).

4. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$ (или $x \leqslant b$), называется *замкнутой полупрямой* и обозначается $[a, +\infty)$ (или $(-\infty, b]$).

5. Множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенству $x > a$ (или $x < b$), называется *открытой полупрямой* и обозначается $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, b)$).

6. Множество всех действительных чисел называется *числовой* (*бесконечной*) *прямой* и обозначается $(-\infty, +\infty)$.

Подмножества действительных чисел вида 1–6 называются *числовыми промежутками (интервалами)*.

Любой интервал (a, b), содержащий точку x_0, называется *окрестностью* точки x_0. Интервал $(x_0 - \varepsilon,\, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется *ε-окрестностью точки* x_0.

Пусть $x_0 \in (a, b)$. Интервал (a, b) с удаленной точкой x_0: $(a, b) \setminus \{x_0\} = (a, x_0) \cup (x_0, b)$ называется *проколотой* (или *выколотой*) окрестностью точки x_0.

Глава 2

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 2.1. Понятие предела последовательности

Понятие предела является одним из важных понятий математики. В математическом анализе широко используется простейшая форма операции предельного перехода, основанная на понятии предела числовой последовательности.

Если каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное действительное число x_n, то говорят, что задана *числовая последовательность* или просто *последовательность*

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots \tag{2.1}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots$ называются *элементами* или *членами* последовательности, а число x_n называется *общим членом* последовательности (2.1). Последовательность (2.1) кратко обозначается через $\{x_n\}$.

Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена.

Приведем примеры последовательностей:

1) $\{n\} = 1, 2, 3, \ldots;$

2) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \ldots;$

3) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots;$

4) $\left\{\dfrac{1}{n^2}\right\} = 1, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{9}, \ldots$

Последовательность, все элементы которой равны одному и тому же числу c, называется *постоянной*.

Определение 2.1. Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого (сколь угодно малого)

положительного числа ε существует такое натуральное число N, зависящее от ε, что для всех натуральных чисел $n > N$ выполняется неравенство
$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{2.2}$$

При этом пишут
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{2.3}$$
или
$$x_n \to a$$
и говорят, что *последовательность* x_n *стремится* (или *сходится*) *к* a.

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то такая последовательность называется *сходящейся*. В противном случае последовательность называется *расходящейся*.

Покажем, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет предел, равный нулю:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

В самом деле, зададим $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$
Оно верно для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$ и тем более для всех $n > N$, где $N > \frac{1}{\varepsilon}$ — какое-либо натуральное число. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Выясним геометрический смысл определения предела последовательности.

Заметим, что неравенство (2.2) равносильно двойному нера-

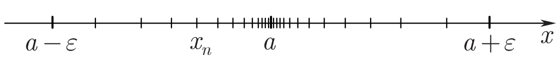


Рис. 2.1

венству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. А это означает, что элемент x_n принадлежит ε-окрестности точки a (рис. 2.1).

Учитывая последнее замечание можно дать следующее геометрическое определение предела последовательности.

Число a называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любой ε-окрестности точки a существует такое натуральное число N, что все члены x_n, для которых $n > N$, лежат в этой ε-окрестности точки a.

§ 2.2. Свойства сходящихся последовательностей

Теорема 2.1. *Если последовательность имеет предел, то он единственный.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет два различных предела, a и b. Поло-

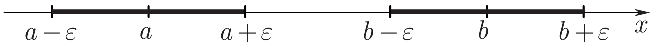


Рис. 2.2

жим $\varepsilon = \dfrac{|b-a|}{3}$ и рассмотрим ε-окрестности точек a и b. Эти окрестности, очевидно, не пересекаются (рис. 2.2).

Так как $x_n \to a$, то в ε-окрестности точки a находятся все элементы последовательности $\{x_n\}$, за исключением конечного их числа. Но тогда ε-окрестность точки b не может содержать в себе бесконечное число элементов этой последовательности, а, значит, последовательность $\{x_n\}$ не может стремиться к b. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Определение 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху* (*соответственно снизу*), если существует такое действительное число M (соответственно число m), что для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$x_n \leqslant M \quad (\text{соответственно } x_n \geqslant m).$$

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют такие действительные числа m и M, что для любого $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства

$$m \leqslant x_n \leqslant M.$$

Заметим, что последние неравенства можно заменить неравенством

$$|x_n| \leqslant A,$$

где A — максимальное из двух чисел $|m|$ и $|M|$.

Теорема 2.2. *Любая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу a. Зададим $\varepsilon = 1$ и подберем такое натуральное

число N, что
$$a - 1 < x_n < a + 1$$
для всех $n > N$. Пусть M — наибольшее из следующих чисел:
$$|a| + 1,\ |x_1|,\ |x_2|,\ \ldots,\ |x_N|.$$

Тогда, очевидно, что $|x_n| \leqslant M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ А это означает ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

Теорема доказана.

Замечание 2.1. Обратное утверждение последней теоремы не верно, т. е. ограниченная последовательность может и не быть сходящейся. Например, последовательность
$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \ldots$$
ограничена, но не является сходящейся.

§ 2.3. Предельный переход в неравенствах

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\{z_n\}$.

Теорема 2.3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ *и* $x_n \leqslant y_n$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$

Тогда $a \leqslant b$.

Доказательство. Допустим, что $a > b$. Зададим $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$ и подберем числа N_1 и N_2 так, чтобы выполнялись неравенства
$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n > N_1$$
и
$$|y_n - b| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad n > N_2.$$

Обозначим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для всех $n > N$, в частности, имеем
$$x_n > a - \varepsilon = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$
$$y_n < b + \varepsilon = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Из последних двух неравенств следует, что $x_n > y_n$ для всех $n > N$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $a \leqslant b$.

Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ *и* $x_n \leqslant z_n \leqslant \leqslant y_n$ *для всех* $n = 1, 2, \ldots$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, то существует такое натуральное число N, что для всех $n > N$ одновременно выполняются неравенства

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - a| < \varepsilon.$$

Учитывая эти неравенства, получим

$$a - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < a + \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы нашли натуральное число N такое, что для всех $n > N$ справедливо неравенство

$$|z_n - a| < \varepsilon.$$

А это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, что и требовалось доказать.

§ 2.4. Арифметические действия с пределами

Введем понятие арифметических действий над последовательностями.

Пусть даны произвольные последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. *Суммой* этих последовательностей называется последовательность $\{x_n + y_n\}$, *разностью* — последовательность $\{x_n - y_n\}$, *произведением* — последовательность $\{x_n \cdot y_n\}$, *частным* — последовательность $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$. В случае частного предполагается, что $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Теорема 2.5. *Пусть* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$ *— сходящиеся последовательности.*

Тогда сумма, разность, произведение и частное этих последовательностей также являются сходящимися, причем справедливы равенства

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n, \tag{2.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n},\tag{2.6}$$

где в случае частного $y_n \neq 0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Докажем равенство (2.4).

Зададим $\varepsilon > 0$ и подберем число N так, чтобы

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $n > N$. Тогда

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n > N$. А это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Докажем равенство (2.5). Последовательность $\{y_n\}$, будучи сходящейся, является ограниченной (теорема 2.2). Значит, существует такое положительное число M, что

$$|y_n| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

При этом можно считать, что M выбрано так, что выполняется также неравенство

$$|a| \leqslant M. \tag{2.8}$$

Теперь подберем число N так, чтобы для всех $n > N$ одновременно выполнялись неравенства

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M}. \tag{2.9}$$

Тогда с учетом неравенств (2.7), (2.8) и (2.9) получим

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leqslant$$
$$\leqslant |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab| \leqslant |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| <$$
$$< M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

для всех $n > N$. А это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Равенство (2.6) доказывается аналогичными рассуждениями. Теорема доказана.

§ 2.5. Монотонные последовательности

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$x_n \leqslant x_{n+1} \quad (x_n \geqslant x_{n+1}).$$

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любого $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство

$$x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1}).$$

Убывающие и возрастающие, неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Рассмотрим примеры монотонных последовательностей.

1. Последовательность

$$\{2n-1, 2n-1\} = 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ \ldots$$

является неубывающей.

2. Последовательность

$$\left\{\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right\} = \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \ldots$$

является невозрастающей.

Справедлива следующая известная теорема Вейерштрасса о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности.

Теорема 2.6 (Вейерштрасс). *Если неубывающая* (*невозрастающая*) *последовательность ограничена сверху* (*снизу*), *то она сходится.*

Замечание 2.2. Из этой теоремы и из теоремы 2.2 следует, что для монотонной последовательности ограниченность является необходимым и достаточным условием ее сходимости.

§ 2.6. Число e

Рассмотрим последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{2.10}$$

Докажем, что эта последовательность возрастающая и ограничена сверху.

На основании формулы *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\,2}\,a^{n-2}b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\,\ldots\,(n-(n-1))}{1\,2\,\ldots\,n}\,b^n$$

имеем

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= 1 + n\,\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\,\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\,\frac{1}{n^3} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\,\ldots\,(n-(n-1))}{n!}\,\frac{1}{n^n} =$$
$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\,\ldots\,\left(1-\frac{n-1}{n}\right). \qquad (2.11)$$

Из полученного равенства следует, что $x_n \geqslant 2$ для любого $n \in \mathbf{N}$. Кроме того, нетрудно заметить, что при переходе от n к $n+1$ каждое слагаемое в правой части равенства (2.11) увеличивается и, помимо того, добавляется новое положительное слагаемое. Итак, $x_n < x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{N}$, т. е. последовательность (2.10) возрастающая.

Применяя равенство (2.11), оценим x_n:

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) <$$
$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots\right) = 1 + \frac{1}{1-\dfrac{1}{2}} = 3.$$

Итак, последовательность (2.10) ограничена, причем для любого $n \in \mathbf{N}$ выполняются неравенства

$$2 < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Следовательно, на основании теоремы 2.6 последовательность (2.10) сходится. Обозначим ее предел буквой e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{2.12}$$

Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 $\quad (e = 2{,}718281\ldots)$.

Число e называется *неперовым* числом.

Глава 3

ФУНКЦИИ

§ 3.1. Понятие функции и способы ее задания

Пусть X и Y — произвольные непустые множества. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется *функцией* и записывается $y = f(x)$ или $f\colon X \to Y$. Говорят также, что функция f *отображает* множество X в множество Y. Множество X называется *областью определения функции* f и обозначается $D(f)$. Множество $E(f) = \{f(x)\colon x \in X\}$, называется *множеством значений функции* f.

Пусть задана функция $f\colon X \to Y$. Если X и Y являются подмножествами множества всех действительных чисел: $X \subset \subset \mathbf{R}$ и $Y \subset \mathbf{R}$, то функция f называется *числовой функцией* или *функцией одной действительной переменной* или просто *функцией* и обозначается $y = f(x)$. Переменная x называется *аргументом* или *независимой переменной* функции $y = f(x)$, а y — *функцией* или *зависимой переменной*.

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. *Графиком функции* $y = f(x)$ называется множество

$$\Gamma = \{(x, y)\colon x \in D(f),\ y = f(x)\}, \tag{3.1}$$

где $D(f)$ — область определения данной функции.

Приведем примеры функций и их графиков.

1. $y = x^2$. Эта функция определена на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$. Множество значений этой функции совпадает с полупрямой $[0, +\infty)$. График этой функции изображен на рис. 3.1.

2. $y = \sqrt{1 - x^2}$. Нетрудно заметить, что область определения этой функции есть отрезок $[-1, 1]$, а множество значений — отрезок $[0, 1]$. График этой функции изображен на рис. 3.2.

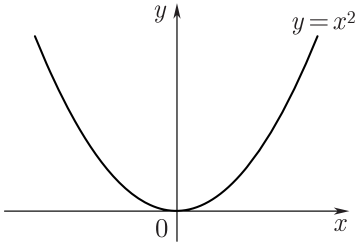


Рис. 3.1

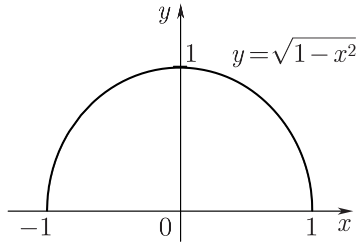


Рис. 3.2

Чтобы задать функцию $y = f(x)$, необходимо указать правило, позволяющее, зная x, находить соответствующее значение y.

Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, графический, табличный.

Если функция задана посредством одной или нескольких формул, то такой способ задания функции называется *аналитическим*. Например,

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \end{cases}$$

— аналитическим способом заданная функция. Она называется *функцией Дирихле*.

Способ, при котором соответствие между аргументом и функцией задается посредством графика, называется *графическим*. Значения функции, соответствующие тем или иным значениям аргумента, непосредственно находятся из этого графика.

Функция может быть задана с помощью таблицы ряда значений аргумента и соответствующих значений функций. Такой способ задания функции называется *табличным*. Известные таблицы значений тригонометрических функций, а также логарифмические таблицы являются примерами функций, заданных табличным способом.

§ 3.2. Арифметические действия над функциями. Сложная и обратная функции

Пусть функции f и g определены на одном и том же множестве $D \subset \mathbf{R}$. Тогда естественным образом определяются *сумма* $f + g$, *разность* $f - g$, *произведение* fg и *частное* $\dfrac{f}{g}$ этих функций. Эти новые функции определяются формулами

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f-g)(x) = f(x) - g(x),$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

где $x \in D$ и, в случае частного, $g(x) \neq 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$, а функция $x = \varphi(t)$ — на множестве $D_1 \in \mathbf{R}$, причем предполагаем, что для произвольного $t \in D_1$ соответствующее значение $x = \varphi(t)$ принадлежит D. Тогда на множестве D_1 определена функция $y = f(\varphi(t))$, которая называется *сложной функцией* или *суперпозицией двух функций* или *функцией от функции*. Например, функция $y = \sin(t^2+1)$ является суперпозицией двух функций, $y = \sin x$ и $x = t^2 + 1$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$. Множество значений функции $f(x)$ обозначим через $E \subset \mathbf{R}$. Предположим, что каждому значению $y \in E$ соответствует единственное значение $x \in D$, для которого $f(x) = y$. Тогда можно определить функцию $x = f^{-1}(y)$ с областью определения E и множеством значений D такую, что

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Такая функция $f^{-1}(y)$ называется *обратной* для функции $f(x)$.

Отметим, что если $x = f^{-1}(y)$ — обратная функция для $y = f(x)$, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = f^{-1}(y)$:

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются также *взаимно обратными*.

Рассмотрим примеры взаимно обратных функций.

1. Функции $y = 2x$ и $x = \dfrac{1}{2}y$ являются взаимно обратными на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

2. Функции $y = x^2$ и $x = \sqrt{y}$ являются взаимно обратными на отрезке $[0, 1]$. Однако заметим, что на отрезке $[-1, 1]$ функция $y = x^2$ не имеет обратной, поскольку одному значению y соответствуют два значения x. Например, значению $y = \dfrac{1}{4}$ соответствуют значения $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{1}{2}$.

§ 3.3. Основные элементарные функции и их графики

Основными элементарными функциями называются следующие функции.

1. *Постоянная функция* $y = C$, где $C \in \mathbf{R}$ — постоянное число. График этой функции есть прямая, параллельная оси Ox, находящаяся на расстоянии $|C|$ от оси Ox и расположенная выше оси Ox, если $C > 0$, и ниже оси Ox, если $C < 0$.

2. *Степенная функция* $y = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{R}$ — постоянное число. При $\alpha > 0$ эта функция определена на всей действительной прямой. При $\alpha < 0$ она определена на всей действительной прямой, за исключением точки $x = 0$. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным целым показателям степени, приведены на рис. 3.3.

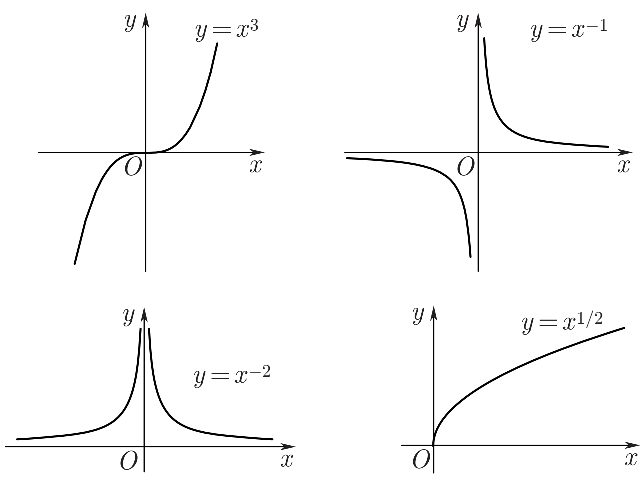


Рис. 3.3

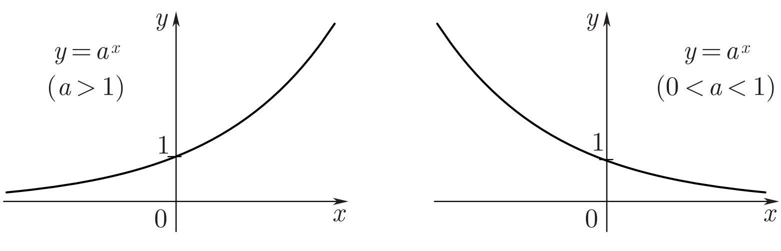


Рис. 3.4

3. *Показательная функция* $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. На рис. 3.4 изображены графики показательных функций, соответствующие основаниям $a > 1$ и $0 < a < 1$.

4. *Логарифмическая функция* $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$. Эта функция является обратной для показательной функции $y = a^x$.

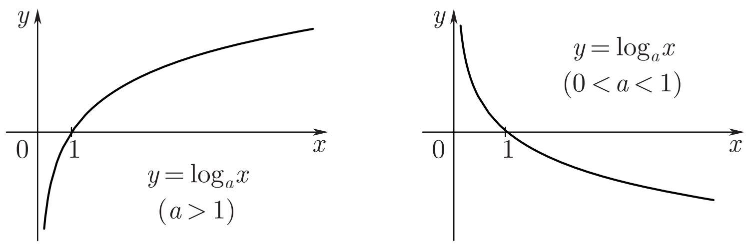


Рис. 3.5

Графики логарифмических функций, соответствующие основаниям $0 < a < 1$ и $a > 1$, изображены на рис. 3.5.

5. *Тригонометрические функции* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Графики этих функций изображены на рис. 3.6.

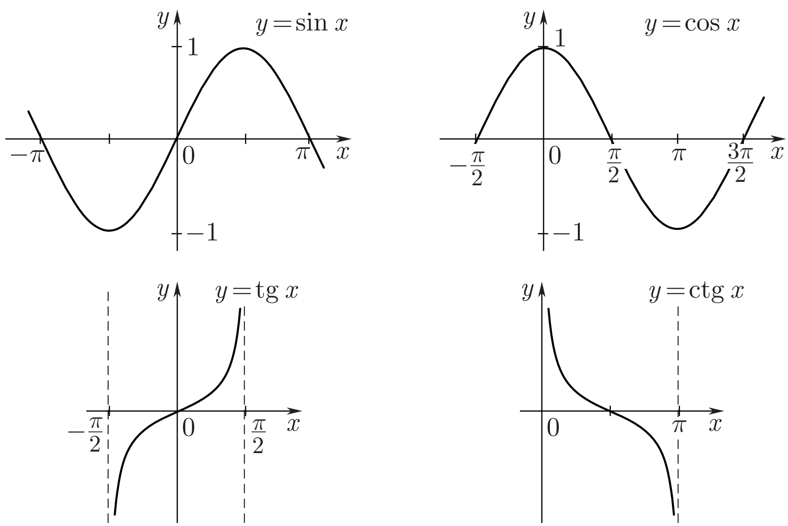


Рис. 3.6

6. *Обратные тригонометрические функции* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. На рис. 3.7 показаны графики обратных тригонометрических функций.

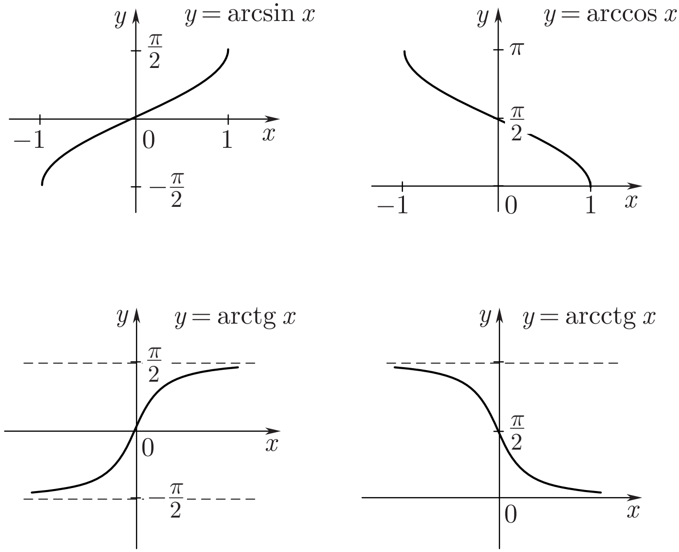


Рис. 3.7

Всякая функция, составленная из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и операций взятия функции от функции, называется *элементарной функцией*.

Примерами элементарных функций могут служить следующие функции: $y = \sin x^2$, $y = 2^{\cos x}$, $y = \ln(1 + 2\,\mathrm{tg}\, x)$.

Функция

$$\mathrm{sign}\ x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

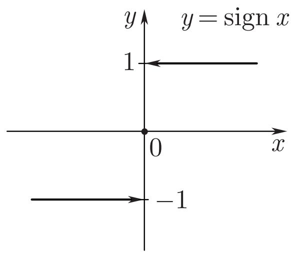


Рис. 3.8

является примером *неэлементарной* функции; она изображена на рис. 3.8.

Глава 4

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

§ 4.1. Понятие предела функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Сформулируем два эквивалентных определения предела функции в точке x_0.

Определение 4.1 (Гейне, на «языке последовательностей»). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$), сходящейся к x_0: $x_n \to x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A: $f(x_n) \to A$.

Здесь, конечно, предполагается, что сходящаяся к x_0 последовательность $\{x_n\}$ пробегает значения, для которых функция $f(x)$ определена.

Определение 4.2 (Коши, на «языке $\varepsilon - \delta$»). Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Тот факт, что A есть предел функции $f(x)$ в точке x_0, принято записывать следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Геометрический смысл предела функции $f(x)$ в точке x_0 заключается в следующем: число A называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если для произвольной ε-окрестности точки A существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой δ-окрестности соответствующее значение функции $f(x)$

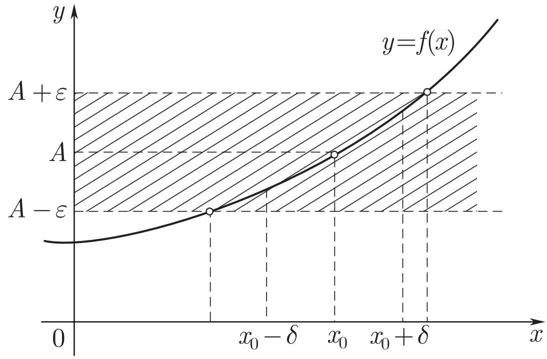


Рис. 4.1

лежит в ε-окрестности точки A. Иными словами, точки графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$ (рис. 4.1).

Пример 4.1. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(2x - 1) = 1$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Нужно доказать, что существует такое зависящее от ε число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - 1| < \delta$, выполняется неравенство $|(2x - 1) - 1| < \varepsilon$ или $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Теперь очевидно, что следует взять $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Пример 4.2. Доказать, что не существует предел

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}.$$

Это следует из того, что последовательность

$$\{x_n\} = \left\{ \frac{2}{\pi(2n - 1)} \right\}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

стремится к нулю при $n \to \infty$, однако последовательность $f(x_n) = (-1)^{n-1}$ не стремится ни к какому пределу при $n \to \infty$.

Теперь определим понятие предела функции $f(x)$ в бесконечности.

Определение 4.3. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$* и обозначается

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A,$$

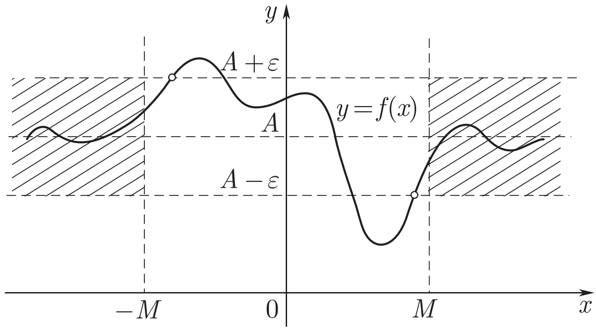


Рис. 4.2

если функция $f(x)$ определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > K$, при некотором $K > 0$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > K$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 4.2).

Аналогично можно определить предел функции $f(x)$ при $x \to \to +\infty$ или $x \to -\infty$.

Определение 4.4. Число A называется *пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$* и обозначается

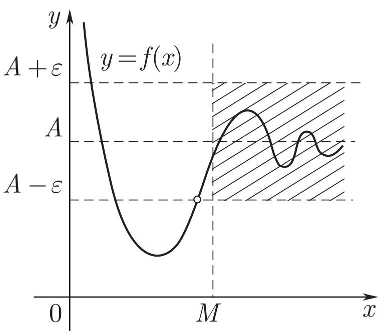


Рис. 4.3

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$
$$\Big(\lim_{x\to-\infty} f(x) = A\Big),$$

если функция $f(x)$ определена для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > K$ $(x < K)$, при некотором $K \in \mathbf{R}$ и для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > K$ $(M < < K)$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $x > M$ $(x < M)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ (рис. 4.3).

Пример 4.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ определена для всех действительных $x \neq 0$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Мы должны найти такое число $M > 0$, чтобы для всех $|x| > M$ выполнялось неравенство $\left|\frac{1}{x} - 0\right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$. Поскольку это неравенство эквивалентно неравенству $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$, то очевидно, что число $M = \frac{1}{\varepsilon}$ является искомым.

§ 4.2. Односторонние пределы

В определении предела функции $f(x)$ в точке x_0 мы допускали, что x стремится к x_0 произвольным образом: как слева, так и справа (т. е. оставаясь как меньшим, так и большим, чем x_0). Однако, как видно из рис. 4.4, значение предела функции зависит от того, с какой стороны (слева или справа) x стремится к x_0.

Определение 4.5. Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева* (*справа*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, зависящее от ε, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ $(x \in (x_0, x_0 + \delta))$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Предел функции $f(x)$ в точке x_0 слева (справа) принято обозначать так:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$\left(f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A\right)$$

(рис. 4.4).

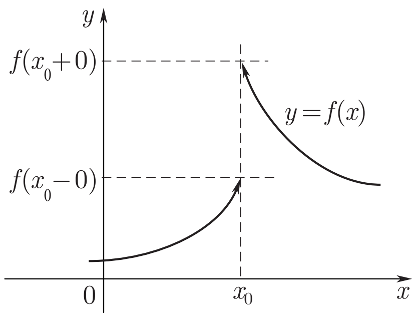


Рис. 4.4

Пределы функции слева и справа называются *односторонними*.

Очевидно, если существует предел функции $f(x)$ в точке x_0, то существуют также односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке, причем справедливы равенства

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Верно и обратное утверждение.

Теорема 4.1. *Если существуют и равны между собой односторонние пределы функции $f(x)$ в точке x_0, то сущест-*

вует также предел функции $f(x)$ в точке x_0, равный указанным односторонним пределам.

Доказательство. Пусть

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A. \tag{4.1}$$

Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу равенств (4.1), существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ (в случае равенства $f(x_0 - 0) = A$) и $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ (в случае равенства $f(x_0 + 0) = A$) выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. А это то же самое, что и: для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$; последнее по определению означает равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A,$$

что и требовалось доказать.

§ 4.3. Основные теоремы о пределах функций

Теорема 4.2. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел в точке x_0.*

Тогда функции $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ также имеют пределы в точке x_0, причем справедливы равенства

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{4.2}$$

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x), \tag{4.3}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \tag{4.4}$$

где в случае частного предполагается, что $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Доказательство. Докажем для примера равенство (4.3). Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$, сходящуюся к x_0: $x_n \to x_0$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда согласно теореме 2.5 имеем

$$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x_n \to x_0} (f(x_n)g(x_n)) =$$
$$= \lim_{x_n \to x_0} f(x_n) \cdot \lim_{x_n \to x_0} g(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

Тем самым равенство (4.3) доказано.

Равенства (4.2) и (4.4) доказываются так же.

Теорема доказана.

Применяя многократно равенства (4.2) и (4.3), мы приходим к заключению: *предел суммы* (*разности*, *произведения*) *любого конечного числа функций равен сумме* (*разности*, *произведению*) *их пределов.*

Следствие 4.1. *Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0.*

Тогда для произвольного постоянного числа $a \in \mathbf{R}$ функция $a \cdot f(x)$ также имеет предел в точке x_0, причем справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \to x_0} f(x). \tag{4.5}$$

Доказательство. Согласно последней теореме

$$\lim_{x \to x_0} (a \cdot f(x)) = \lim_{x \to x_0} a \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = a \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Следствие доказано.

Доказанное следствие означает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела, а также вносить под знак предела.

Теорема 4.3 (о единственности предела функции). *Если функция $f(x)$ имеет предел в точке x_0, то этот предел единственный.*

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ в точке x_0 имеет два предела:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) = B.$$

Тогда в силу последней теоремы

$$0 = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - \lim_{x \to x_0} f(x) = A - B.$$

Итак, $A - B = 0$, т. е. $A = B$.

Теорема доказана.

Пример 4.4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 2} (2x^2 - 3x + 5)$.

Согласно последней теореме имеем

$$\lim_{x\to 2}(2x^2-3x+5) = 2\cdot\lim_{x\to 2}x\cdot\lim_{x\to 2}x - 3\cdot\lim_{x\to 2}x + \lim_{x\to 2}5 = \\ = 2\cdot 4 - 3\cdot 2 + 5 = 7.$$

Пример 4.5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+2}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. на x^2 и вычислим данный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-5}{3x^2-x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-5\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2+3\cdot 0-5\cdot 0}{3-0+2\cdot 0} = \frac{2}{3}.$$

Здесь мы применили последнюю теорему и пример 4.3.

§ 4.4. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$.

Определение 4.6. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной снизу на множестве* D, если существует такое действительное число m, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant m$, и называется *ограниченной сверху на множестве* D, если существует такое действительное число M, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant M$.

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* D, если она на этом множестве ограничена как снизу, так и сверху.

Заметим, что определение ограниченной функции можно дать в следующей эквивалентной форме: функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* D, если существует такое действительное число $M > 0$, что для всех $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant M$.

Теорема 4.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). *Пусть функция $f(x)$ имеет конечный предел в точке x_0.*

Тогда на некоторой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$, в частности, для $\varepsilon = 1$, существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < 1.$$

Учитывая неравенство

$$|f(x)| - |A| \leqslant |f(x) - A|,$$

получим $|f(x)| < 1 + |A|$. Положим $1 + |A| = M$.

Итак, для любого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x)| < M$.

Теорема доказана.

Обратное утверждение последней теоремы, вообще говоря, неверно. Например, функция $y = \sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет, хотя она ограничена.

§ 4.5. Монотонные функции. Теорема о пределе монотонной функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве $D \subset \mathbf{R}$.

Определение 4.7. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) *на множестве* $D \in \mathbf{R}$, если из того, что $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) \geqslant f(x_2)$).

Если из того, что $x_1, x_2 \in D$ и $x_1 < x_2$, следует, что $f(x_1) < < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$), то тогда функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) *на множестве* D.

Неубывающие и невозрастающие функции называются *монотонными*.

Убывающие и возрастающие функции часто называются также *строго монотонными*.

Приведем теоремы о пределах монотонных функций.

Теорема 4.5. *Пусть функция $f(x)$ не убывает на интервале (a, b) (где, в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$) и ограничена сверху на этом интервале числом M.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to b-0} f(x) \leqslant M.$$

Теорема 4.6. *Пусть функция $f(x)$ не возрастает на интервале (a, b) (где, в частности, может быть $a = -\infty$, $b = +\infty$) и ограничена снизу на этом интервале числом m.*

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to a+0} f(x) \geqslant m.$$

Доказательства этих теорем достаточно сложны. Они основываются на довольно тонких свойствах действительных чи-

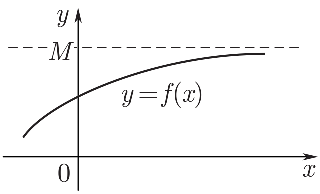


Рис. 4.5

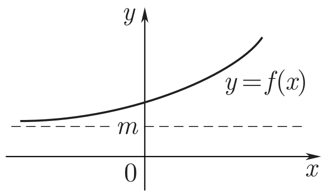


Рис. 4.6

сел. Мы ограничимся здесь пояснениями с помощью рис. 4.5 и рис. 4.6, а за подробными доказательствами отошлем читателя к любому полному курсу математического анализа.

§ 4.6. Теоремы о предельных переходах в неравенствах

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ определены на одном и том же множестве D числовой прямой $\mathbf{R}$.

Теорема 4.7. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

для всех $x \in D$ и существуют пределы $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$ в точке $x_0 \in D$, то

$$A \leqslant B.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$) — произвольная последовательность, сходящаяся к x_0: $x_n \to x_0$. Согласно определению предела функции $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = B$. По условию теоремы

$$f(x_n) \leqslant g(x_n)$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$ Если применить теорему 2.3 к последовательностям $\{f(x_n)\}$ и $\{g(x_n)\}$, получим $A \leqslant B$, что и требовалось доказать.

Из последней теоремы непосредственно получаются два следствия.

Следствие 4.2. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in D$ и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в точке $x_0 \in D$.*

Тогда $A \geqslant 0$.

Следствие 4.3. *Пусть $f(x) \leqslant 0$ для всех $x \in D$ и существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ в точке $x_0 \in D$.*

Тогда $A \leqslant 0$.

Иными словами, при переходе к пределу знак нестрогого неравенства сохраняется.

Теорема 4.8 (о пределе промежуточной функции). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x_0 \in D$ имеют один и тот же предел A:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A,$$

и для всех $x \in D$ функции $f(x)$, $g(x)$ и $\varphi(x)$ связаны неравенствами

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g(x).$$

Тогда функция $\varphi(x)$ также имеет предел в точке $x_0 \in D$, равный тому же числу A:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ($x_n \neq x_0$, $n = 1, 2, \ldots$) — произвольная последовательность, сходящаяся к x_0: $x_n \to x_0$. Рассмотрим соответствующие последовательности $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ и $\{\varphi(x_n)\}$. По условию теоремы

$$f(x_n) \leqslant \varphi(x_n) \leqslant g(x_n)$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = A$. Теперь осталось применить теорему 2.4 к последовательностям $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$ и $\{\varphi(x_n)\}$, откуда и получим $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = A$. А это, согласно определению предела функции, означает, что

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A.$$

Теорема доказана.

§ 4.7. Первый замечательный предел

Теорема 4.9. *Предел функции* $\dfrac{\sin x}{x}$ *в точке* $x = 0$ *существует и равен единице*:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{4.6}$$

Доказательство. Сначала посредством геометрических рассуждений докажем, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x, \tag{4.7}$$

если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Для этого рассмотрим единичную окружность с центром в точке O (рис. 4.7). Пусть $B = (1, 0)$, а M — точка окружности, находящаяся в первой четверти. Обозначим радианную меру угла MOB через x (x — длина дуги BM), $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

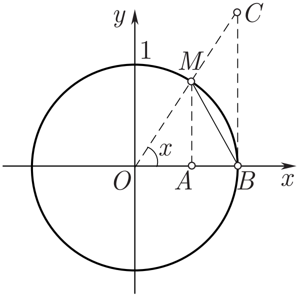


Рис. 4.7

Пусть A — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на OB, а C — точка пересечения перпендикуляра к OB, восставленного из точки B, с продолжением отрезка OM. Тогда

$$AM = \sin x, \quad OA = \cos x, \quad BC = \operatorname{tg} x.$$

Очевидно, имеем

$$S_{\triangle MOB} < S_{\text{сектор} MOB} < S_{\triangle COB},$$

т. е.

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}\, x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x.$$

Итак, справедливость неравенств (4.7) доказана. Теперь разделим эти неравенства на $\sin x > 0$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 < \frac{\sin x}{x} < \cos x. \tag{4.8}$$

Последние неравенства верны также и для значений x, удовлетворяющих условиям $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, поскольку

$$\cos x = \cos(-x), \qquad \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ (см. далее (5.5)) и $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то по теореме 4.8 о пределе промежуточной функции и из неравенств (4.8) имеем

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

Теорема доказана.

Предел (4.6) называется *первым замечательным пределом.*

Пример 4.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{3x}$.

Обозначим $2x = t$. Тогда $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{3\frac{t}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

§ 4.8. Второй замечательный предел

Как известно, числовая последовательность

$$\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}, \quad n \in \mathbf{N},$$

имеет предел, равный e (см. 2.12):

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Докажем, что к числу e стремится и функция $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \tag{4.9}$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $x \to +\infty$. В силу определения предела функции мы должны доказать, что для любой последовательности $\{x_n\}$, стремящейся к $+\infty$: $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e. \tag{4.10}$$

Пусть $[x_n] = k_n$ — целая часть числа x_n. Тогда

$$k_n \leqslant x_n < k_n + 1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{k_n+1} < \frac{1}{x_n} \leqslant \frac{1}{k_n}$$

или

$$1+\frac{1}{k_n+1} < 1+\frac{1}{x_n} \leqslant 1+\frac{1}{k_n},$$

а значит,

$$\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} < \left(1+\frac{1}{x_n}\right)^{x} \leqslant \left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}. \tag{4.11}$$

Теперь заметим, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{k_n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

А значит, в силу теоремы 4.8, выполняется равенство (4.10).

Случай 2. Пусть $x \to -\infty$. Тогда $t = -x \to +\infty$, следовательно,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t-1}\right)^t =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Итак, равенство (4.9) доказано.

Если в равенстве (4.9) положить $\frac{1}{x} = \alpha$ и заметить, что $\alpha \to 0$ при $x \to \infty$, то оно запишется в виде

$$\lim_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{1/\alpha} = e. \tag{4.12}$$

Равенства (4.9) и (4.12) называются *вторым замечательным пределом.*

Пример 4.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Обозначим $x = 2t$. Очевидно, что $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

§ 4.9. Бесконечно малые функции. Основные свойства

Пусть функция $f(x)$ определена на некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение 4.8. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой при* $x \to x_0$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0.$$

На «языке $\varepsilon - \delta$» это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

Аналогично определяется понятие бесконечно малой функции при $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Бесконечно малые функции называют также *бесконечно малыми величинами* или *бесконечно малыми* и обозначают греческими буквами α, β и т. д.

Пример 4.8. Функции $y = x^2$ и $y = \sin x$ являются бесконечно малыми при $x \to 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ и $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$.

Функция $y = \cos x$ является бесконечно малой при $x \to \dfrac{\pi}{2}$, поскольку $\lim\limits_{x\to\pi/2} \cos x = 0$. Однако эта функция не является бесконечно малой при $x \to 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$.

Как видно из последнего примера, одна и та же функция при стремлении ее аргумента к различным значениям может быть бесконечно малой, а может и не быть таковой.

Теорема 4.10. *Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$.*

Тогда функции $\alpha(x) \pm \beta(x)$ и $\alpha(x)\beta(x)$ также являются бесконечно малыми при $x \to x_0$.

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы 4.2. Действительно, по условию теоремы

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0.$$

Вычисляя, получаем

$$\lim_{x\to x_0} (\alpha(x) \pm \beta(x)) = \lim_{x\to x_0} \alpha(x) \pm \lim_{x\to x_0} \beta(x) = 0.$$

А это и значит, что функция $\alpha(x) \pm \beta(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Случай функции $\alpha(x)\beta(x)$ доказывается аналогично.

Теорема доказана.

Итак, сумма, разность и произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция (при $x \to \to x_0$).

Теорема 4.11. *Пусть $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, а $f(x)$ — ограниченная функция при $x \to x_0$.*

Тогда функция $f(x)\alpha(x)$ является бесконечно малой величиной при $x \to x_0$.

Доказательство. Из ограниченности функции $f(x)$ при $x \to x_0$ следует, что существуют такие числа $\delta_1 > 0$ и $M > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant M \tag{4.13}$$

для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta_1$.

Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, то для числа $\dfrac{\varepsilon}{M}$ найдется та-

кое $\delta_2 > 0$, что
$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \tag{4.14}$$
для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta_2$.

Обозначим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Очевидно, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, одновременно выполняются неравенства (4.13) и (4.14). Теперь оценим $|f(x)\alpha(x)|$:
$$|f(x)\alpha(x)| \leqslant |f(x)||\alpha(x)| < M\,\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$
А это и означает, что функция $f(x)\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Теорема доказана.

Пример 4.9. Функция $x\sin\dfrac{1}{x}$ является бесконечно малой при $x \to 0$, т. е.
$$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$$

Действительно, это следует из последней теоремы, так как при $x \to 0$ функция $\sin\dfrac{1}{x}$ ограничена $\left(\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \leqslant 1\right)$, а функция x бесконечно малая.

Теорема 4.12. *Для того чтобы существовал предел*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \tag{4.15}$$
необходимо и достаточно, чтобы функцию $f(x)$ можно было представить в виде
$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{4.16}$$
где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при при $x \to x_0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть существует предел (4.15). Рассмотрим функцию
$$\alpha(x) = f(x) - A. \tag{4.17}$$

Поскольку
$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = \lim_{x\to x_0} (f(x) - A) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} A = A - A = 0,$$
значит, $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Представление (4.16) получается из равенства (4.17).

Достаточность. Пусть справедливо представление (4.16), где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$. Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} (A + \alpha(x)) = A + \lim_{x \to x_0} \alpha(x) = A + 0 = A.$$

Теорема доказана.

§ 4.10. Бесконечно большие функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение 4.9. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой при* $x \to x_0$, если для произвольного числа $M > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$.

В этом случае принято говорить, что функции $f(x)$ *стремится к бесконечности при* $x \to x_0$, или что *предел функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *бесконечный*:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Если функция $f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, принимая только положительные (соответственно отрицательные) значения, то пишут

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{соответственно} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty).$$

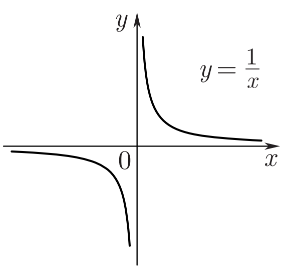


Рис. 4.8

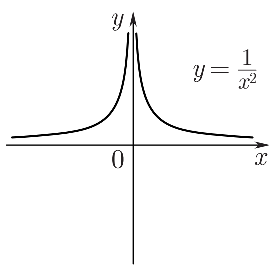


Рис. 4.9

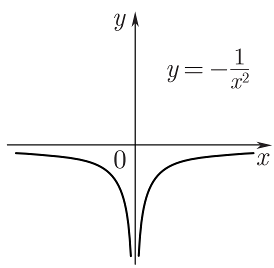


Рис. 4.10

Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$ (рис. 4.8):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ и $y = -\dfrac{1}{x^2}$ также являются бесконечно большими при $x \to 0$ (рис. 4.9 и рис. 4.10):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x^2} = +\infty, \qquad \lim_{x \to x_0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty.$$

§ 4.11. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями

Теорема 4.13. *Если функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$ и $f(x) \neq 0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$.*

Доказательство. Зададим произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то для числа $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенствам $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, или, что то же самое, неравенство $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right| < \varepsilon$. А это означает, что $\dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция при $x \to x_0$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 4.14. *Если функция $\alpha(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\alpha(x) \neq 0$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая функция при $x \to x_0$.*

Доказательство. Аналогично доказательству последней теоремы.

При вычислении пределов для выявления бесконечно больших и бесконечно малых функций удобно использовать следующие теоремы.

Теорема 4.15. *Если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \neq 0, \quad \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0 \qquad (\alpha(x) \neq 0),$$

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = \infty.$$

Доказательство. Заметим, что функция $\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{f(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \alpha(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \frac{0}{A} = 0.$$

Значит, согласно теореме 4.14 функция $\dfrac{1}{\dfrac{\alpha(x)}{f(x)}} = \dfrac{f(x)}{\alpha(x)}$ бесконечно большая при $x \to x_0$.

Теорема доказана.

Теорема 4.16. *Если*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A, \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \infty,$$

то

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме 4.4 функция $f(x)$ ограничена при $x \to x_0$. Функция $\dfrac{1}{\varphi(x)}$ бесконечно малая при $x \to x_0$ согласно теореме 4.13. Значит, произведение $f(x)\dfrac{1}{\varphi(x)}$ также является бесконечно малой функцией при $x \to x_0$ согласно теореме 4.11, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

§ 4.12. Сравнение бесконечно малых функций

Как уже было доказано, сумма, разность и произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая (при $x \to x_0$). Отношение же двух бесконечно малых функций может вести себя по-разному. Две бесконечно малые функции сравниваются между собой с помощью их отношения.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

Определение 4.10. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то говорят, что $\alpha(x)$ — *бесконечно малая более высокого порядка, чем* $\beta(x)$ или $\beta(x)$ — *бесконечно малая более низкого порядка, чем* $\alpha(x)$. В этом случае пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Пример 4.10. Функции $\alpha(x) = x^2$ и $\beta(x) = x$ бесконечно малые при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0,$$

то x^2 — бесконечно малая более высокого порядка, чем x.

Замечание 4.1. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty,$$

то согласно теореме 4.13

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 0,$$

а значит, $\beta(x)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем $\alpha(x)$.

Определение 4.11. Если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A,$$

где $A \neq 0$ — конечное число, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка*.

Пример 4.11. Функции $\alpha(x) = 2x^2$ и $\beta(x) = 3x^2$ бесконечно малые при $x \to 0$. Так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \neq 0,$$

то, значит, $2x^2$ и $3x^2$ — бесконечно малые одного порядка.

Если не существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми функциями*.

Пример 4.12. Бесконечно малые функции (при $x \to 0$) $\alpha(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ (см. пример 4.9) и $\beta(x) = x$ несравнимы, так как предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\dfrac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

не существует (см. пример 4.2).

§ 4.13. Эквивалентные бесконечно малые функции

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые функции.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

Определение 4.12. Если

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1, \tag{4.18}$$

то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется *эквивалентной бесконечно малой* $\beta(x)$ (при $x \to x_0$).

Это обозначается следующим образом:

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \to x_0.$$

Замечание 4.2. Если при $x \to x_0$ бесконечно малая $\alpha(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\beta(x)$, то и $\beta(x)$ эквивалентна $\alpha(x)$: т. е. из условия

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad x \to x_0$$

следует условие

$$\beta(x) \sim \alpha(x), \quad x \to x_0.$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Итак, если справедливо равенство (4.18), то естественно называть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ *эквивалентными бесконечно малыми при* $x \to x_0$.

Замечание 4.3. Если при $x \to x_0$ бесконечно малая $\alpha(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\beta(x)$, а $\beta(x)$ эквивалентна бесконечно малой $\gamma(x)$, то $\alpha(x)$ эквивалентна $\gamma(x)$. Иначе говоря, если при $x \to x_0$

$$\alpha(x) \sim \beta(x), \quad \beta(x) \sim \gamma(x),$$

то

$$\alpha(x) \sim \gamma(x).$$

Действительно,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\gamma(x)}\right] = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 4.13. Согласно первому замечательному пределу

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

бесконечно малые функции $\sin x$ и x эквивалентны: $\sin x \sim x$ при $x \to 0$.

Пример 4.14. $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, так как

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\sin x}{x}}{\cos x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0} \cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

Следующая теорема имеет практическое значение при вычислении пределов.

Теорема 4.17 (о замене функций на эквивалентные при вычислении пределов). *Пусть существует предел*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$. Пусть также $\varphi(x) \sim \varphi_1(x)$ и $\psi(x) \sim \psi_1(x)$.

Тогда существует предел

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)},$$

причем справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Иначе говоря, предел при $x \to x_0$ отношения двух функций не изменится, если каждую функцию (или только одну из них) заменить на эквивалентную при $x \to x_0$.

Доказательство. Проведем непосредственное вычисление:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)} = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}\cdot\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)}\right] = \\ = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi_1(x)}{\varphi(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\psi(x)}{\psi_1(x)} = \\ = 1\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\cdot 1 = \lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Теорема доказана.

Для применения последней теоремы можно использовать следующую таблицу бесконечно малых функций, эквивалентных при $x \to 0$.

1°. $\sin x \sim x$.

2°. $\operatorname{tg} x \sim x$.

3°. $\arcsin x \sim x$.

4°. $\operatorname{arctg} x \sim x$.

5°. $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$.

6°. $e^x - 1 \sim x$.

7°. $a^x - 1 \sim x\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)$,

8°. $\ln(1+x) \sim x$.

9°. $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1)$.

10°. $(1+x)^m - 1 \sim mx \quad (m>0)$.

Эквивалентности 1° и 2° были установлены в примерах 4.13 и 4.14.

Докажем 3°. Обозначим $y = \arcsin x$. Тогда $x = \sin y$. Так как $y \to 0$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{y} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

Аналогично доказывается 4°.

Докажем 5°:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\dfrac{x^2}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\,\dfrac{x}{2}\,\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Докажем 10°. Обозначим $y=(1+x)^m-1$. Тогда $1+y=(1+x)^m$, откуда $\ln(1+y)=m\ln(1+x)$. Учитывая, что $y\to 0$ при $x\to 0$, имеем

$$(1+x)^m-1=y\sim\ln(1+y)=m\ln(1+x)\sim mx.$$

Здесь мы воспользовались замечанием 4.3 и эквивалентностью 8°, доказательство которой следует из второго замечательного предела и основывается на теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции (эту теорему мы докажем позже).

Глава 5

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 5.1. Понятие непрерывности функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку x_0.

Определение 5.1. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если существует предел этой функции в точке x_0 и равен $f(x_0)$, т. е. значению функции $f(x)$ в этой точке.

Таким образом, условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 можно выразить следующим образом:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{5.1}$$

Так как $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то последнему равенству можно придать форму

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x). \tag{5.2}$$

Это означает, что *для вычисления предела непрерывной функции можно перейти к пределу под знаком функции*.

Непрерывность функции в точке можно определить и с помощью понятий приращения аргумента и функции.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется *приращением аргумента* x *в точке* x_0. А разность $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ называется *приращением функции* $f(x)$ *в точке* x_0.

Так как условия $x \to x_0$ и $\Delta x \to 0$ равносильны, то равенство (5.1) примет вид $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0$, или

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{5.3}$$

Итак, функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняется равенство (5.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента x соответствует бесконечно малое приращение функции $f(x)$.

Условие (5.3) называется *разностной формой условия непрерывности функции* $f(x)$ *в точке* x_0. В дальнейшем это условие мы будем использовать неоднократно.

Определение 5.2. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *справа* (*слева*), если существует предел этой функции в точке x_0 справа (слева), равный $f(x_0)$, т. е.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0) \qquad \Big(\lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0)\Big). \tag{5.4}$$

Замечание 5.1. Из теоремы 4.1 следует, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева, то она непрерывна в этой точке.

Определение 5.3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

В частности, если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке интервале (a, b), то говорят, что она *непрерывна на интервале* (a, b). А если функция $f(x)$ непрерывна в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$ и, кроме того, непрерывна справа в точке a и слева в точке b, то говорят, что она *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Доказывается, что *все основные элементарные функции непрерывны в каждой точке их области определения.*

Из равенства (5.2), учитывая непрерывность функции $\cos x$, получим

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos\big(\lim_{x \to 0} x\big) = \cos 0 = 1. \tag{5.5}$$

Этот предел был использован при выводе первого замечательного предела (см. (4.6)).

Равенство (5.2) позволяет также вычислить следующие два предела, которые тоже относятся к числу замечательных пределов.

Пример 5.1. Доказать равенство

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \tag{5.6}$$

Действительно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1.$$

Пример 5.2. Доказать равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \tag{5.7}$$

Обозначим $t=e^x-1$. Тогда $x=\ln(1+t)$. Учитывая, что $t\to\to 0$ при $x\to 0$ получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}}=\frac{1}{1}=1.$$

§ 5.2. Арифметические операции над непрерывными функциями

Теорема 5.1. *Пусть заданные на одном и том же множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, а C — постоянное число.*

Тогда функции $Cf(x)$, $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\frac{f(x)}{g(x)}$ также непрерывны в точке x_0 (в случае частного при $g(x_0)\neq 0$).

Доказательство. Докажем, например, непрерывность функции $F(x)=f(x)g(x)$ в точке x_0 (нерерывность остальных функций доказывается аналогично). В силу теоремы 4.2 имеем

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x)=$$
$$=f(\lim_{x\to x_0}x)\cdot g(\lim_{x\to x_0}x)=f(x_0)g(x_0)=F(x_0).$$

А это и означает непрерывность функции $F(x)=f(x)g(x)$ в точке x_0 согласно определению 5.1.

Теорема доказана.

§ 5.3. Непрерывность сложной функции

Теорема 5.2. *Если функция $x=\varphi(t)$ непрерывна в точке t_0, а функция $y=f(x)$ непрерывна в соответствующей точке $x_0=\varphi(t_0)$, то сложная функция $F(t)=f(\varphi(t))$ непрерывна в точке t_0.*

Доказательство. В силу равенства (5.2) имеем

$$\lim_{t\to t_0} F(t) = \lim_{t\to t_0} f(\varphi(t)) = f(\lim_{t\to t_0} \varphi(t)) = f(\varphi(t_0)) = F(t_0).$$

А это, согласно определению 5.1, означает непрерывность функции $F(t) = f(\varphi(t))$ в точке t_0.

Теорема доказана.

§ 5.4. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

Рассмотрим всевозможные типы точек разрыва функции.

1°. *Устранимый разрыв*. Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $y = f(x)$, если в этой точке существует предел функции, однако в точке x_0 функция $y = f(x)$ либо не определена, либо ее частное значение $f(x_0)$ не равно пределу функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ имеет устранимый разрыв, поскольку

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

а частное значение $f(x_0) = f(0) = 0 \neq 1$.

Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет разрыв указанного типа, то этот разрыв можно устранить, определив значение функции в точке x_0 равным пределу функции $y = f(x)$ в точке x_0. Так, если в рассмотренном примере положить $f(0) = 1$, то получим функцию, непрерывную в точке $x_0 = 0$.

2°. *Разрыв первого рода*. Точка x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа, которые, однако, не равны друг другу:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) \neq \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

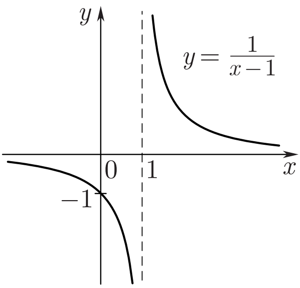


Рис. 5.1

Для функции

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$$

точка $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода, поскольку

$$\lim_{x\to 0+0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\to 0-0} \operatorname{sign} x = -1$$

(см. рис. 3.8).

3°. *Разрыв второго рода.* Точка x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) функции не существует или равен бесконечности.

Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва второго рода (рис. 5.1).

§ 5.5. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функции, непрерывные на отрезке, обладают рядом замечательных свойств. Сформулируем их в виде теорем, не приводя доказательств.

Определение 5.4. Число M называется *наибольшим значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для произвольного $x \in [a, b]$ $f(x) \leqslant M$ и существует $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = M$ (рис. 5.2).

Обозначение: $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

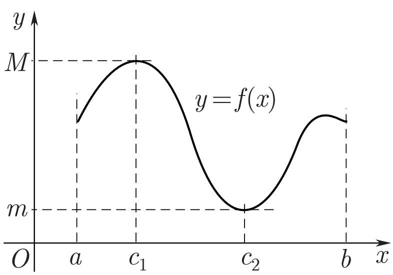


Рис. 5.2

Определение 5.5. Число m называется *наименьшим значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если для произвольного $x \in [a, b]$ $f(x) \geqslant m$ и существует $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = m$ (рис. 5.2).

Обозначение: $m = \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Теорема 5.3 (Вейерштрасс). *Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена и имеет наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке.*

Замечание 5.2. Утверждение теоремы может быть неверным для функции, непрерывной не на отрезке, а на интервале или на полуинтервале. Например, функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0, 1]$, но не ограничена на нем, имеет наименьшее значение, но не имеет наибольшего значения на этом полуинтервале (рис. 4.8).

Теорема 5.4 (Больцано–Коши). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке она принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$.*

Геометрически теорема очевидна (рис. 5.3): для любого чис-

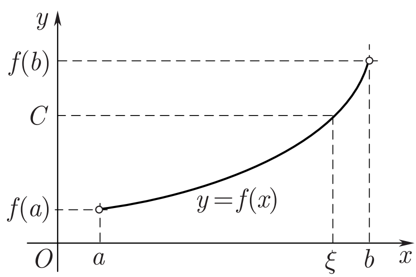


Рис. 5.3

ла C между $f(a)$ и $f(b)$ существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что $f(\xi) = C$.

Из последней теоремы в качестве следствия получается

Теорема 5.5 (о существовании нуля функции). *Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то существует хотя бы одна точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f(\xi) = 0$.*

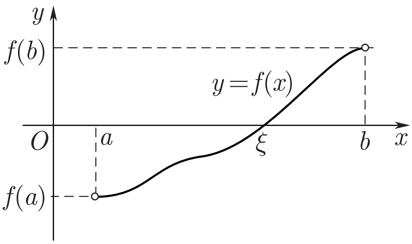


Рис. 5.4

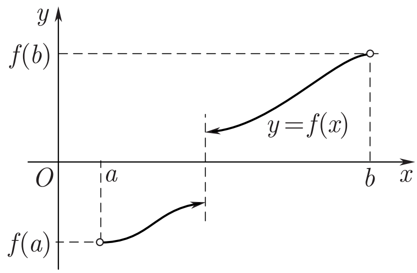


Рис. 5.5

Геометрический смысл этой теоремы заключается в том, что график функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы, обязательно пересечет ось Ox (рис. 5.4).

Утверждение последней теоремы, вообще говоря, не верно, если функция $y = f(x)$ имеет разрыв на отрезке $[a, b]$ (рис. 5.5).

Глава 6

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 6.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Дадим аргументу в точке x_0 произвольное приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Рассмотрим отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.1)$$

Определение 6.1. *Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения (6.1) при $\Delta x \to 0$ (при условии, что этот предел существует).

Производную функции $y = f(x)$ в точке x обозначают одним из символов $f'(x)$, y'_x или $\dfrac{dy}{dx}$.

Итак, по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (6.2)$$

Отметим, что формулу (6.2) можно записать в виде

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \qquad (6.3)$$

Операцию нахождения производной принято называть *дифференцированием*.

§ 6.2. Геометрическая интерпретация производной. Касательная к графику функции

Выясним геометрический смысл производной. Для этого рассмотрим график функции $y = f(x)$ (рис. 6.1). Пусть точка M_0 на этом графике соответствует аргументу x_0, а точка M —

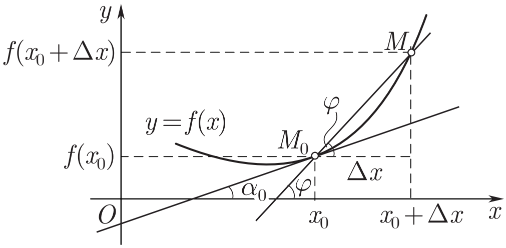


Рис. 6.1

аргументу $x_0 + \Delta x$, где Δx — некоторое приращение аргумента. Прямая M_0M называется *секущей*. Угол, который образует эта секущая с осью абсцисс Ox, обозначим через $\varphi(\Delta x)$ (очевидно, что этот угол зависит от Δx).

Определение 6.2. Если при стремлении точки M к точке M_0 по графику секущая M_0M стремится к некоторому предельному положению, то это предельное положение секущей называется *касательной к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* M_0.

Угол, который образует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 с осью Ox, обозначим через α_0. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_0$ — угловой коэффициент этой касательной.

Теорема 6.1. *Пусть существует касательная к графику функции* $y = f(x)$ *в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$.

Тогда существует производная функции $y = f(x)$ *в точке* x_0, *которая равна угловому коэффициенту этой касательной*:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha_0.$$

Доказательство. Как видно из рис. 6.1,

$$\operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Так как при $\Delta x \to 0$ секущая M_0M переходит в касательную, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi(\Delta x) = \operatorname{tg}\alpha_0. \tag{6.4}$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0). \tag{6.5}$$

Итак, $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha_0$.
Теорема доказана.

Верно и обратное утверждение.

Теорема 6.2. *Пусть существует производная функции $y = f(x)$ в точке x_0.*

Тогда существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен этой производной:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = f'(x_0).$$

Доказательство следует из равенств (6.4) и (6.5).

Последние две теоремы выражают геометрический смысл производной.

Геометрическая интерпретация производной позволяет записать уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.6}$$

§ 6.3. Физическая интерпретация производной

Предположим, что функция $S = S(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т. е. зависимость пути S (пройденного материальной точкой от начала отсчета) от времени t.

Рассмотрим момент времени t_0 и составим разность $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$; ΔS — это *пройденный путь* материальной точки за время Δt.

Отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения материальной точки за время Δt.

Предел отношения $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной скоростью* движения материальной точки в момент времени t_0 и обозначается через $V(t_0)$:

$$V(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=S'(t_0),$$

то, *производная функции* $S(t)$ *в* t_0 есть мгновенная скорость движения материальной точки в момент времени t_0, т. е.

$$S'(t_0)=V(t_0).$$

Это и есть *физический смысл производной*.

§ 6.4. Необходимое условие существования производной

Теорема 6.3. *Если функция* $y=f(x)$ *имеет производную в точке* x_0*, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Пусть существует производная функции $y=f(x)$ в точке x_0, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Тогда согласно теореме 4.12 имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x),$$

или

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Теперь вычислим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x)=$$

$$=f'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)\Delta x=0.$$

А это и означает непрерывность функции $y=f(x)$ в точке x_0 (см. (5.3)).

Теорема доказана.

Замечание 6.1. Обратное утверждение последней теоремы не верно, т. е. из непрерывности функции $y=f(x)$ в точке x_0, вообще говоря, не следует существование производной функции $y=f(x)$ в этой точке.

Пример 6.1. Функция

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0, \end{cases}$$

непрерывна в точке $x = 0$, но в этой точке не имеет производной.

Действительно, для функции $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет место

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \Delta x \geqslant 0, \\ -1, & \text{если} \quad \Delta x < 0. \end{cases}$$

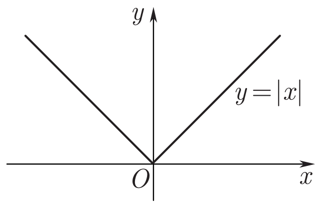


Рис. 6.2

А из этого следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, т. е. функция $f(x) = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, или график этой функции не имеет касательной в точке $O(0, 0)$ (рис. 6.2).

Непрерывность функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ очевидна.

§ 6.5. Дифференцирование суммы, разности, произведения и частного функций

Теорема 6.4. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x.*

Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций:

$$u(x) + v(x), \quad u(x) - v(x), \quad u(x)v(x), \quad \frac{u(x)}{v(x)},$$

также имеют производные в этой точке, причем справедливы равенства

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x), \tag{6.7}$$

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \tag{6.8}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \tag{6.9}$$

В случае частного предполагается, что $v(x) \neq 0$.

Доказательство. Пусть существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Обозначим $f(x)=u(x)\pm v(x)$. Тогда

$$[u(x)\pm v(x)]'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=$$

$$=u'(x)\pm v'(x).$$

Тем самым равенство (6.7) доказано.

Докажем (6.8):

$$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta[u(x)v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)]+[u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)]}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}u(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x).$$

Наконец докажем формулу (6.9):

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-v(x+\Delta x)u(x)}{v(x+\Delta x)v(x)}}{\Delta x}=$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{v(x+\Delta x)v(x)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x)v(x) - v(x+\Delta x)u(x)}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[u(x+\Delta x)v(x) - u(x)v(x)] - [v(x+\Delta x)u(x) - u(x)v(x)]}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{v^2(x)} \left\{ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} v(x) - \right.$$

$$\left. - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \right\} = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Теорема полностью доказана.

§ 6.6. Дифференцирование сложной функции

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ — такие числовые функции, что определена сложная функция $f(\varphi(t))$.

Теорема 6.5 (о производной сложной функции). *Пусть функция $x = \varphi(t)$ имеет производную в точке t, а функция $y = f(x)$ — в соответствующей точке x ($x = \varphi(t)$).*

Тогда сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t, которая вычисляется по формуле

$$(f[\varphi(t)])' = f'(x)\varphi'(t). \tag{6.10}$$

Доказательство. Пусть существует производная функции $y = f(x)$ в точке x, т. е. существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Тогда согласно теореме 4.12 имеем

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x, \tag{6.11}$$

где

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Поделив равенство (6.11) на Δt, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha \frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{6.12}$$

Поскольку $\Delta x \to 0$ при $\Delta t \to 0$, то, следовательно,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \alpha = 0.$$

Теперь перейдем к пределу в равенстве (6.12), когда $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = f'(x) \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Как видно из этого равенства, существование производной $\varphi'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ обеспечивает существование производной $(f[\varphi(t)])' = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta t}$, причем $(f[\varphi(t)])' = f'(x)\varphi'(t)$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

§ 6.7. Теорема о существовании обратной функции. Дифференцирование обратной функции

Теорема 6.6 (о существовании обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и строго монотонна на отрезке $[a, b]$, и пусть $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$.*

Тогда эта функция на отрезке $[\alpha, \beta]$ (или $[\beta, \alpha]$, если $\beta < \alpha$) имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y) = g(y)$, которая также непрерывна и строго монотонна.

Здесь мы не приводим доказательство этой теоремы. Его можно найти в учебниках по математическому анализу.

Теорема 6.7 (о производной обратной функции). *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна, строго монотонна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную не равную нулю производную $f'(x)$ в некоторой точке $x \in (a, b)$.*

Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$ также имеет производную в соответствующей точке y, определяемую равенством

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{6.13}$$

Доказательство. Значению y придадим произвольное приращение Δy. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y) = g(y)$ получит приращение Δx. Заметим, что если $\Delta y \neq 0$, то и $\Delta x \neq$

$\neq 0$, так как обратная функция $x = g(y)$ строго монотонна (см. теорему 6.6). Поэтому

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Если теперь $\Delta y \to 0$, то в силу непрерывности обратной функции $x = g(y)$ (см. теорему 6.6) имеем $\Delta x \to 0$. Значит,

$$g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.$$

Тем самым формула (6.13) доказана.

Теорема доказана.

§ 6.8. Производные основных элементарных функций

1. *Производная постоянной функции* $f(x) = C$. Постоянная функция $f(x) = C = \mathrm{const}$ каждому значению аргумента x сопоставляет одно и то же значение C. Значит,

$$C' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C - C}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Итак, *производная постоянной функции равняется нулю:* $C' = 0$.

2. *Производная степенной функции.* Сначала вычислим производную степенной функции $y = x^n$, показатель n которой является целым положительным числом: $n = 1, 2, \ldots$

Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = x^n$ получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$. По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n =$$
$$= \left(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n\right) - x^n =$$
$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^{n-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^n.$$

Следовательно, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}\, x^{n-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{n-1},$$

а значит,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} nx^{n-1}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(n-1)}{2!}\,x^{n-2}\Delta x+\ldots$$
$$\ldots+\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x)^{n-1}=nx^{n-1}.$$

Итак, мы доказали формулу

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

3. *Производная логарифмической функции* $y=\log_a x$ $(0<a\neq 1)$. Дадим аргументу $x>0$ приращение Δx такое, что $|\Delta x|<x$ или $x+\Delta x>0$. Тогда

$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Значит, при $\Delta x\neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}.$$

Используя второй замечательный предел (4.9) и учитывая непрерывность функции $y=\log_a x$, перейдем к пределу в последнем равенстве при $\Delta x\to 0$. Получим

$$(\log_a x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

Итак, мы доказали формулу

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e.$$

В частности, для $a=e$ получим

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Теперь вычислим производную степенной функции $y=x^\alpha$, $(x>0)$ с произвольным действительным показателем $\alpha\in\mathbf{R}$. Используя теорему 6.5 о производной сложной функции, имеем

$$(x^\alpha)'=\left(e^{\ln x^\alpha}\right)'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}(\alpha\ln x)'=x^\alpha\,\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Тем самым мы доказали формулу

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

4. *Производная показательной функции* $y=a^x$ $(0<a\neq 1)$. Показательная функция $y=a^x$ является обратной для

логарифмической функции $x = \log_a y$. Согласно теореме 6.7 о производной обратной функции имеем

$$(a^x)' = \frac{1}{(\log_a y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}\log_a e} = y \ln a = a^x \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

В частности,

$$(e^x)' = e^x.$$

5. *Производная функции* $y = \sin x$. Пользуясь первым замечательным пределом (4.6), вычислим

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

6. *Производная функции* $y = \cos x$. Найдем производную функции $y = \cos x$, воспользовавшись формулой $(\sin x)' = \cos x$ и теоремой 6.5 о производной сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' =$$

$$= \sin x \cdot (-1) = -\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

7. *Производная функций* $y = \operatorname{tg} x$ *и* $y = \operatorname{ctg} x$. Для нахождения производных функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ воспользуемся формулой (6.9) производной частного:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

т. е.

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Аналогично доказывается формула

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

8. *Производные обратных тригонометрических функций $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$.* Вычислим производную функции $y = \arcsin x$. Эта функция определена на интервале $(-1, 1)$ и является обратной для функции $x = \sin y$, определенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Согласно теореме 6.7 о производной обратной функции имеем

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, поскольку $\cos y > 0$ при $y \in \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Точно так же доказывается формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Теперь вычислим производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. Эта функция определена на бесконечной прямой $(-\infty, +\infty)$ и является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, определенной на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. По теореме 6.7 о производной обратной функции имеем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Итак,

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Аналогично доказывается формула

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

§ 6.9. Гиперболические функции и их производные

Следующие функции называются *гиперболическими функциями*.

1. Гиперболический синус: $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

2. Гиперболический косинус: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

3. Гиперболический тангенс: $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

4. Гиперболический котангенс: $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.

На рис. 6.3 показаны графики гиперболических функций.

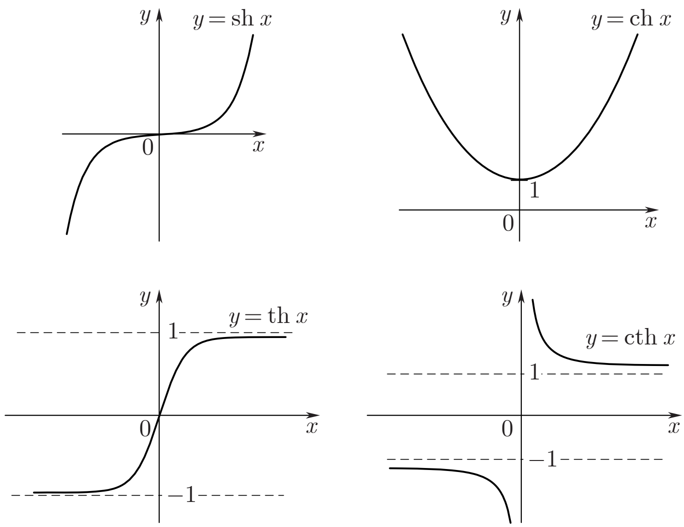


Рис. 6.3

Из определения гиперболических функций следует, что область определения функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$ есть множество R всех действительных чисел. Функция $\operatorname{cth} x$ определена всюду на числовой прямой, за исключением точки $x = 0$.

Из непрерывности показательной функции следует, что гиперболические функции непрерывны в каждой точке области определения.

Для гиперболических функций справедливы формулы

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$
$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y},$$
$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x,$$
$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$$

Все эти формулы непосредственно следуют из определения гиперболических функций. Докажем, например, первую формулу:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Итак, гиперболические функции обладают рядом свойств, аналогичных свойствам тригонометрических функций. Геометрические интерпретации гиперболических и тригонометрических функций тоже аналогичны.

В самом деле, параметрическими уравнениями $x = \cos t$ и $y = \sin t$ определяется окружность $x^2 + y^2 = 1$, причем $OA = \cos t$, $AM = \sin t$ (рис. 6.4). Параметрическими же уравнениями $x = \operatorname{ch} t$ и $y = \operatorname{sh} t$ определяется гипербола $x^2 - y^2 = 1$, причем $OA = \operatorname{ch} t$, $AM = \operatorname{sh} t$ (рис. 6.5).

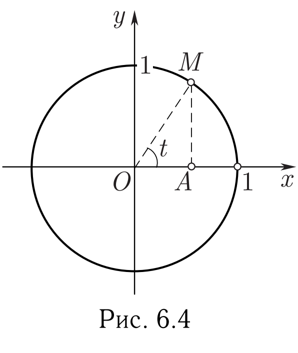


Рис. 6.4

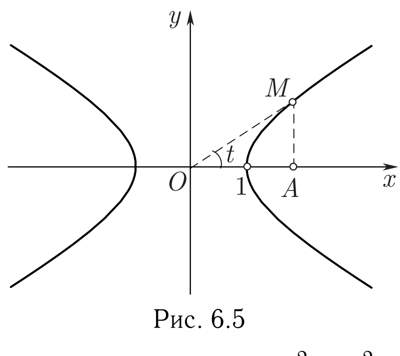


Рис. 6.5

Иначе говоря, гиперболические функции $y = \operatorname{ch} x$ и $y = \operatorname{sh} x$ могут быть определены из рассмотрения равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ по тем же правилам, по которым функции $y =$

$= \cos x$ и $y = \sin x$ определяются из рассмотрения единичной окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Теперь вычислим производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x;$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x;$$

$$(\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$$

$$(\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

§ 6.10. Таблица производных

Собирая воедино все вычисленные выше производные, мы получим следующую таблицу производных основных элементарных функций.

1°. $(C)' = 0, \quad C = \mathrm{const}.$

2°. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R.$

3°. $(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1).$

4°. $(e^x)' = e^x.$

5°. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (x > 0, \;\; 0 < a \neq 1).$

6°. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x} \quad (x > 0).$

7°. $(\sin x)' = \cos x.$

8°. $(\cos x)' = -\sin x.$

9°. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \;\; \text{где} \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right).$

10°. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} \quad (x \neq \pi n, \;\; \text{где} \;\; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$

11°. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

12°. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1).$

13°. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

14°. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

15°. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

16°. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

17°. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

18°. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

Указанная таблица вместе с правилами дифференцирования суммы, разности, произведения и частного и правилом дифференцирования сложной функции составляет основу дифференциального исчисления.

§ 6.11. Дифференцирование параметрически заданных функций

Пусть функция y от x задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{6.14}$$

где параметр $t \in [a, b]$. Предположим, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$.

Тогда можно написать явную форму зависимости y от x:

$$y = y[t(x)].$$

Она является сложной функцией и естественно поставить вопрос о ее производной y'_x.

Согласно правилу дифференцирования обратной функции

$$t'_x = \frac{1}{x'_t}.$$

Следовательно,

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Итак, мы получили правило дифференцирования функции, заданной параметрическими уравнениями (6.14):

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{6.15}$$

§ 6.12. Логарифмическое дифференцирование. Производная степенно-показательной функции

В ряде случаев для дифференцирования функции целесообразно сначала прологарифмировать ее, а затем полученный результат продифференцировать. Этот способ вычисления производной называется *логарифмическим дифференцированием*.

Пример 6.2. Вычислить производную функции

$$y = \frac{(x^2+1)\sqrt{(x-1)^3}}{x+2}.$$

Производную этой функции можно найти с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий.

Применим логарифмическое дифференцирование. Прологарифмируем данную функцию:

$$\ln y = \ln(x^2+1) + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \ln(x+2).$$

Теперь продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{x+2}.$$

Отсюда

$$y' = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{x+2}\right),$$

или

$$y' = \frac{(x^2+1)\sqrt{(x-1)^3}}{x+2}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{3}{2(x-1)} - \frac{1}{x+2}\right).$$

Рассмотрим функцию $y = u^v$, где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — некоторые функции от переменной x. Функция $y = u^v$ называется *степенно-показательной функцией*.

Для нахождения производной степенно-показательной функции $y = u^v$ применим логарифмическое дифференцирование:

$$\ln y = v \ln u.$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\,\frac{u'}{u},$$

т. е.

$$y' = y\left(v' \ln u + v\,\frac{u'}{u}\right) = u^v\left(v' \ln u + v\,\frac{u'}{u}\right) = \\ = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'.$$

Итак, мы получили формулу дифференцирования степенно-показательной функции $y = u^v$:

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \qquad (6.16)$$

Сформулируем правило запоминания последней формулы: *производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции* u^v (*при условии* $u = \mathrm{const}$) *и производной степенной функции* u^v (*при условии* $v = \mathrm{const}$).

§ 6.13. Понятие дифференцируемости функции

Определение 6.3. Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в данной точке x, если приращение Δy этой функции в точке x, соответствующее приращению Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x, \qquad (6.17)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx, а α — функция от Δx, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \to 0$.

Так как произведение $\alpha\Delta x$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx: $\alpha\Delta x = o(\Delta x)$, то формулу (6.17) можно переписать в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \qquad (6.18)$$

Теорема 6.8. *Функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке.*

Доказательство. Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой в точке x, т. е. ее приращение можно представить в виде (6.17). Разделим обе части этого равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha.$$

Из последнего равенства следует, что существует производная функции $y = f(x)$ в точке x. В самом деле,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = \lim_{\Delta x \to 0} A + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = A.$$

Пусть теперь функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Тогда из теоремы 4.12 следует, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

или

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x, \tag{6.19}$$

где

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Представление (6.19) совпадает с представлением (6.17), если обозначить $f'(x) = A$.

Теорема полностью доказана.

Доказанная теорема позволяет отождествлять понятие дифференцируемости функции с понятием существования производной этой функции.

§ 6.14. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. приращение Δy этой функции можно представить в виде (6.17).

Определение 6.4. Первое слагаемое $A\Delta x$ представления (6.17) называется *главной линейной частью* приращения Δy.

Это определение оправдано тем, что при $A \neq 0$ второе слагаемое $\alpha \Delta x$ представления (6.17) является бесконечно малой более высокого порядка, чем первое слагаемое $A\Delta x$ (при $\Delta x \to 0$). Действительно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{A \Delta x} = \frac{1}{A} \lim_{\Delta x \to 0} \alpha = 0.$$

Определение 6.5. Главная линейная часть $A\Delta x$ приращения Δy называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается символом dy:

$$dy = A\Delta x.$$

Поскольку в теореме 6.8 было доказано равенство $A = f'(x)$, то последнюю формулу дифференциала dy можно переписать в виде

$$dy = f'(x)\Delta x. \tag{6.20}$$

Дифференциалом dx независимой переменной x условимся считать приращение Δx:

$$dx = \Delta x.$$

Это соглашение оправдывается тем, что для дифференциала функции $y = x$ имеем $dy = dx = (x)'\Delta x = \Delta x$.

Итак, для дифференциала функции $y = f(x)$ окончательно получаем формулу

$$dy = f'(x)dx. \tag{6.21}$$

Из последней формулы следует равенство

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

т. е. производная функции $y = f(x)$ равна отношению дифференциала функции dy к дифференциалу аргумента dx. Этим и объясняется ранее введенное обозначение производной символом $\dfrac{dy}{dx}$.

§ 6.15. Геометрический смысл дифференциала функции

Геометрический смысл дифференциала мы выясним, исходя из найденного ранее геометрического смысла производной.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Рассмотрим график этой функции и проведем касательную MK к нему в точке $M(x, y)$ (рис. 6.6). Придадим аргументу приращение Δx. Значению $x + \Delta x$ соответствует точка P на графике функции $y = f(x)$ и точка Q на касательной MK.

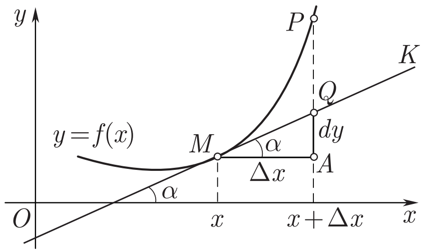


Рис. 6.6

Поскольку производная $f'(x)$ — это угловой коэффициент касательной MK к графику функции $y = f(x)$ в точке x, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, то из прямоугольного треугольника MAQ имеем

$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = \frac{AQ}{\Delta x}.$$

Отсюда

$$AQ = f'(x)\Delta x.$$

Сравнивая полученный результат с формулой (6.20), получаем $dy = AQ$.

Итак, *дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке*, *когда аргумент принимает приращение Δx*.

Это и есть геометрический смысл дифференциала функции.

Заметим, что дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x, вообще говоря, не равен приращению функции Δy в этой точке.

§ 6.16. Инвариантность формы первого дифференциала

Как было установлено выше (см. (6.21)), дифференциал функции $y = f(x)$, когда x является независимой переменной, вычисляется формулой

$$dy = f'(x)dx. \tag{6.22}$$

Докажем, что эта формула справедлива и в случае, когда аргумент x сам является дифференцируемой функцией некоторой новой переменной t.

Пусть $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$ — две дифференцируемые функции, образующие сложную функцию $y = f[\varphi(t)]$. Тогда, по теореме 6.5 о производной сложной функции имеем

$$dy = df[\varphi(t)] = (f[\varphi(t)])'dt = f'(x)\cdot\varphi'(t)dt = f'(x)dx.$$

Итак, *дифференциал функции* $y = f(x)$ *определяется одной и той же формулой* (6.22) *независимо от того, является ее аргумент независимой переменной или функцией другого аргумента.*

Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала.*

§ 6.17. Дифференциал суммы, разности, произведения и частного функций

Теорема 6.9. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы в точке* x.

Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций:

$$u(x)+v(x), \quad u(x)-v(x), \quad u(x)v(x), \quad \frac{u(x)}{v(x)},$$

также дифференцируемы в этой точке, причем для дифференциалов этих функций справедливы формулы

$$d(u \pm v) = du \pm dv, \tag{6.23}$$

$$d(uv) = vdu + udv, \tag{6.24}$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}. \tag{6.25}$$

В случае частного предполагается, что $v(x) \neq 0$.

Доказательство. Результат непосредственно следует из определения дифференциала и теоремы 6.4 о производной суммы, разности, произведения и частного функций.

Докажем, например, формулу (6.24). По определению дифференциала и согласно теореме 6.4 имеем

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')\,dx = vu'\,dx + uv'\,dx = v\,du + u\,dv.$$

§ 6.18. Таблица дифференциалов

Таблица производных основных элементарных функций приводит к соответствующей таблице дифференциалов:

1°. $dC = 0, \quad C = \mathrm{const}.$

2°. $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}dx, \quad \alpha \in R.$

3°. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx \quad (0 < a \neq 1)$.

4°. $d(e^x) = e^x\, dx$.

5°. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a}\, dx \quad (x > 0,\ \ 0 < a \neq 1)$.

6°. $d(\ln x) = \dfrac{1}{x}\, dx \quad (x > 0)$.

7°. $d(\sin x) = \cos x\, dx$.

8°. $d(\cos x) = -\sin x\, dx$.

9°. $d(\operatorname{tg} x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}\, dx \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \text{ где }\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right)$.

10°. $d(\operatorname{ctg} x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}\, dx \quad (x \neq \pi n,\ \text{ где }\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

11°. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \quad (-1 < x < 1)$.

12°. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx \quad (-1 < x < 1)$.

13°. $d(\operatorname{arctg} x) = \dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$.

14°. $d(\operatorname{arcctg} x) = -\dfrac{1}{1 + x^2}\, dx$.

15°. $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x\, dx$.

16°. $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x\, dx$.

17°. $d(\operatorname{th} x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}\, dx$.

18°. $d(\operatorname{cth} x) = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}\, dx \quad (x \neq 0)$.

§ 6.19. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда первая производная $f'(x)$ также является функцией, определенной на интервале (a, b).

Определение 6.6. Если функция $f'(x)$ имеет производную в точке $x \in (a, b)$, то эта производная называется *второй* *производной* или *производной второго порядка* функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ и обозначается через $f''(x)$ или $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$.

Теперь предположим, что определено понятие производной $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$.

Определение 6.7. Если производная $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$ имеет производную в точке $x \in (a, b)$, то эта производная называется *n-й производной* или *производной n-го порядка* функции $y = f(x)$ в точке $x \in (a, b)$ и обозначается через $f^{(n)}(x)$ или $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

Итак,

$$f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'.$$

Таким образом, мы ввели понятие производной n-го порядка индуктивно, переходя от первой производной к последующим.

Производные порядка выше первого называются *производными высших порядков*.

Производные высших порядков находят многочисленные применения в физике. Например, укажем механический смысл второй производной. Как мы уже знаем, если функция $S = S(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой, то первая производная $S'(t)$ равна мгновенной скорости материальной точки в момент времени t. Следовательно, вторая производная $S''(t)$ равна *скорости изменения скорости*, т. е. равна *ускорению* движущейся материальной точки в момент времени t.

Пример 6.3. Вычислить производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

Первую производную этой функции можно записать в виде

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, *дифференцирование функции $y = \sin x$ прибавляет к аргументу этой функции величину $\dfrac{\pi}{2}$*. Следовательно, справедлива формула

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Совершенно аналогично устанавливается формула

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример 6.4. Вычислить производную n-го порядка показательной функции $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$.

Дифференцируя последовательно, получим

$$y' = a^x \ln a, \quad y'' = a^x \ln^2 a, \quad y''' = a^x \ln^3 a, \quad \ldots$$

Методом индукции нетрудно доказать общую формулу

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a.$$

В частности,

$$(e^x)^{(n)} = e^x.$$

Пример 6.5. Вычислить вторую производную функции, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in [a, b]. \tag{6.26}$$

Предположим, что функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют вторые производные и что функция $x = x(t)$ имеет обратную функцию $t = t(x)$.

Как известно (см. (6.15)), первая производная y'_x вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{6.27}$$

Учитывая эту формулу, вычислим вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^2} \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}.$$

Итак, мы получили формулу второй производной функции, заданной параметрически

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (y'_x)'_x = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3}. \tag{6.28}$$

§ 6.20. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема на интервале (a, b). Тогда дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ также является функцией от переменной x, определенной на интервале (a, b).

Определение 6.8. Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ (если, конечно, он существует) называется *вторым дифференциалом* или *дифференциалом второго порядка* этой функции (в точке $x \in (a,b)$) и обозначается символом d^2y или $d^2f(x)$.

Итак,
$$d^2y = d(dy).$$

Теперь предположим, что определено понятие дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$.

Определение 6.9. Дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка функции $y = f(x)$ (если, конечно, он существует) называется *n-м дифференциалом* или *дифференциалом n-го порядка* этой функции (в точке $x \in (a,b)$) и обозначается символом d^ny или $d^nf(x)$:
$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Теперь предположим, что x является *независимой переменной*, и получим формулу вычисления дифференциала n-го порядка.

Найдем выражение второго дифференциала:
$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = (f'(x)\,dx)'dx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)\,dx^2.$$
Здесь мы обозначили $dx^2 = (dx)^2$.

Методом математической индукции нетрудно доказать общую формулу вычисления дифференциала n-го порядка
$$d^ny = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{6.29}$$

Отметим еще раз, что последняя формула справедлива только тогда, когда x является независимой переменной. В случае, когда x в свою очередь является функцией некоторой новой переменной t: $x = \varphi(t)$, дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности формы, т. е. вычисляются по формуле, отличной от (6.29).

Покажем это на примере второго дифференциала. Применяя формулу дифференциала производной (6.24), получаем
$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx + f'(x)\,d(dx) =$$
$$= f''(x)\,dx \cdot dx + f'(x)\,d^2x = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x.$$

Итак,
$$d^2y = f''(x)\,dx^2 + f'(x)\,d^2x, \tag{6.30}$$
где d^2x, вообще говоря, отличен от нуля, поскольку $d^2x = \varphi''(t)\,dt^2$.

§ 6.21. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 6.10 (Ролль). *Пусть функция* $y = f(x)$ *определена и непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *дифференцируема на интервале* (a, b) *и на концах отрезка принимает равные значения*: $f(a) = f(b)$.

Тогда на интервале (a, b) *существует хотя бы одна точка* c, *в которой производная* $f'(x)$ *обращается в нуль*, *т. е.*

$$f'(c) = 0.$$

Доказательство. Так как при наших предположениях функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то в силу теоремы Вейерштрасса 5.3 она принимает свое максимальное значение M и минимальное значение m в некоторых точках x_1 и x_2 этого отрезка:

$$f(x_1) = M = \max_{x \in [a,b]} f(x), \quad f(x_2) = m = \min_{x \in [a,b]} f(x).$$

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $M = m$, то функция $y = f(x)$ постоянна на отрезке $[a, b]$: $f(x) = \mathrm{const} = m = M$ для всех $x \in [a, b]$. Значит, $f'(x) = 0$ при всех $x \in [a, b]$, и в качестве c в этом случае можно взять любую точку интервала (a, b).

Случай 2. Пусть $M \neq m$. Тогда либо точка x_1, либо точка x_2 не совпадает с концом отрезка $[a, b]$, т. е. одна из этих точек лежит внутри интервала (a, b).

Пусть для определенности $x_1 \in (a, b)$. Так как $f(x) \leqslant f(x_1)$ для всех $x \in [a, b]$, то при любом (достаточно малом) приращении Δx соответствующее приращение функции удовлетворяет неравенству

$$\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) \leqslant 0.$$

Из этого неравенства следует, что если $\Delta x > 0$, то

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leqslant 0$$

и, следовательно,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

А если $\Delta x < 0$, то

$$\frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geqslant 0$$

и, следовательно,

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Значит, $f'(x_1) = 0$, и в качестве точки c можно взять точку x_1.

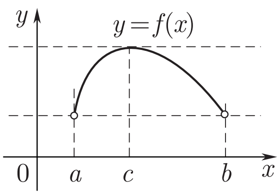


Рис. 6.7

В случае, когда $x_2 \in (a, b)$, доказательство аналогичное.

Теорема доказана.

Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции $y = f(x)$ существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ox (рис. 6.7).

Теорема 6.11 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.*

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.31}$$

Доказательство. Докажем сначала, что $g(b) - g(a) \neq 0$, т. е. что дробь в левой части формулы (6.31) имеет смысл. Действительно, в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно, она непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как на этом отрезке непрерывны $f(x)$ и $g(x)$.

Функция $F(x)$, очевидно, является дифференцируемой при всех $x \in (a, b)$, причем

$$F'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x). \tag{6.32}$$

И наконец, $F(x)$ принимает равные значения на концах отрезка $[a, b]$:

$$F(a) = [f(b) - f(a)]g(a) - [g(b) - g(a)]f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

$$F(b) = [f(b) - f(a)]g(b) - [g(b) - g(a)]f(b) = f(b)g(a) - g(b)f(a).$$

Следовательно, в силу теоремы Ролля существует точка $c \in$ $\in (a, b)$ такая, что $F'(c) = 0$, или, в силу (6.32),

$$[f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0.$$

Из последнего равенства и следует формула (6.31).
Теорема доказана.

Теорема 6.12 (о среднем Лагранжа). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b).*

Тогда существует такая точка $c \in (a, b)$, что выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{6.33}$$

Доказательство. Непосредственно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$.

Формула (6.33) называется *формулой Лагранжа* или *формулой конечных приращений.*

Теорема Лагранжа имеет простой геометрический смысл. Заметим, что отношение $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ есть угловой коэффициент секущей AB (рис. 6.8), а $f'(c)$ — угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(c, f(c))$.

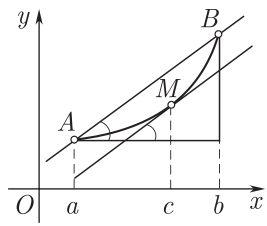


Рис. 6.8

Следовательно, геометрический смысл теоремы Лагранжа заключается в следующем: *существует такая точка M на графике функции $y = f(x)$, в которой касательная к графику функции параллельна секущей AB.*

Следствие 6.1. *Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и всюду на этом интервале $f'(x) = 0$.*

Тогда функция $f(x)$ является постоянной на интервале (a, b).

Доказательство. Действительно, по теореме Лагранжа имеет место равенство

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

где x_0 — фиксированная точка интервала (a, b), x — произвольная точка этого же интервала, а c — некоторая точка, находящаяся между точками x_0 и x. Поскольку по условию $f'(x) = 0$

для всех $x \in (a, b)$ и, в частности, $f'(c) = 0$, то из последнего равенства получим $f(x) - f(x_0) = 0$ или $f(x) = f(x_0) = C = \text{const}$ для всех $x \in (a, b)$.

Следствие доказано.

§ 6.22. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to x_0$ *неопределенность вида* $\dfrac{0}{0}$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Раскрыть эту неопределенность — это значит вычислить предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, если, конечно, этот предел существует.

Следующая теорема дает правило для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 6.13 $\left(\text{правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида } \dfrac{0}{0}\right)$. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $g'(x) \neq 0$.*

Если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

и существует предел

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.34}$$

то существует также предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.35}$$

Доказательство. Доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0, полагая $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Тогда эти функции будут непрерывны в точке x_0. Рассмотрим произвольную точку $x > x_0$ из указанной окрестности точки x_0. Тогда на отрезке $[x_0, x]$ (или на отрезке $[x, x_0]$, если $x < x_0$), функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. В силу этой теоремы существует такая точка $c \in (x_0, x)$, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

или

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Заметим, что $c \to x_0$, когда $x \to x_0$. Теперь, перейдя к пределу в последнем равенстве при $x \to x_0$, получим

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

П р и м е р 6.6. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}.$$

З а м е ч а н и е 6.2. Доказанное правило Лопиталя не означает, что если предел отношения производных $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то не существует и исходный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Этот исходный предел вполне может существовать, только его нельзя найти при помощи правила Лопиталя.

Например, для функций $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ и $g(x) = x$ имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

(см. пример 4.9). Однако

$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)'}{x'} = \lim_{x \to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}\right)$$

не существует.

З а м е ч а н и е 6.3. Если условиям последней теоремы удовлетворяют не только функции $f(x)$ и $g(x)$, но и их производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то, применяя два раза правило Лопиталя, вычисление предела $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ можно свести к вычислению $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$.

Пример 6.7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

Применяя дважды правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2} = \\ = \lim_{x\to 0}\frac{(\cos x - 1)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x} = -\frac{1}{6}.$$

Будем говорить, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to x_0$ *неопределенность вида* $\dfrac{\infty}{\infty}$, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty.$$

Следующая теорема дает правило для раскрытия неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 6.14 $\Big($правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\dfrac{\infty}{\infty}\Big)$. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0, причем в этой окрестности $g'(x) \neq 0$.*

Если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$$

и существует предел

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{6.36}$$

то существует также предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{6.37}$$

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Замечание 6.4. Правило Лопиталя легко распространяется на случай, когда $x \to \infty$. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{\left[f\left(\frac{1}{t}\right)\right]'}{\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]'} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)} = \lim_{t\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя может быть использовано для раскрытия неопределенностей вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, ∞^0, 0^0. Перечисленные неопределенности сводятся к неопределенностям видов $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем алгебраических преобразований.

1. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Тогда $f(x)g(x)$ — *неопределенность вида* $0\cdot\infty$ при $x \to x_0$. Эта неопределенность легко сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$:

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Пример 6.8. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$.

Имеем

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Тогда $f(x)-g(x)$ — *неопределенность вида* $\infty-\infty$ при $x\to x_0$, что легко сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ путем преобразования

$$f(x)-g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}.$$

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, а $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$. Тогда $f(x)^{g(x)}$ — *неопределенность вида* 1^∞ при $x \to x_0$. Для раскрытия этой неопределенности следует воспользоваться представлением

$$f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}, \tag{6.38}$$

где $g(x)\ln f(x)$ при $x \to x_0$ уже неопределенность вида $\infty \cdot 0$.

Представлением (6.38) следует воспользоваться и в случаях раскрытия неопределенностей вида ∞^0, 0^0.

Пример 6.9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2}$.

Имеем

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{(1/x^2)\ln\cos x} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right) =$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\right).$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2}$. (Для удобства записи мы воспользовались обозначением $e^{f(x)} = \exp(f(x))$.)

§ 6.23. Формула Тейлора

Теорема 6.15 (Тейлор). *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в ней производные до $(n+1)$-го порядка включительно.*

Тогда для любого x из этой окрестности найдется точка ξ, лежащая между точками x_0 и x, что справедлива формула

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \tag{6.39}$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен

$$\varphi(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \tag{6.40}$$

Обозначим

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x). \tag{6.41}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x - x_0)^{n+1}. \tag{6.42}$$

Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}\,(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}\,(x-t)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,(x-t)^n - M(x-t)^{n+1}, \tag{6.43}$$

где

$$M = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}, \tag{6.44}$$

а аргумент t меняется на отрезке $[x_0, x]$ (для определенности мы предположили, что $x > x_0$).

Очевидно, что функция $\psi(t)$ непрерывна на отрезке $[x_0, x]$ и существует $\psi'(t)$, по крайней мере на интервале (x_0, x), причем

$$\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f''(t)}{1!}\,(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}\,2(x-t) - \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\,n(x-t)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n + M(n+1)(x-t)^n =$$
$$= -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\,(x-t)^n + M(n+1)(x-t)^n. \tag{6.45}$$

Теперь убедимся в том, что на концах отрезка $[x_0, x]$ функция $\psi(t)$ принимает равные значения. В самом деле, из формулы (6.43) сразу вытекает, что $\psi(x) = 0$. Теперь вычислим $\psi(x_0)$, учитывая формулы (6.40), (6.41), (6.43) и (6.44):

$$\psi(x_0) = f(x) - f(x_0) - \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) - \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 - \ldots$$
$$\ldots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n - M(x-x_0)^{n+1} =$$
$$= f(x) - \varphi(x) - R_{n+1}(x) = 0.$$

Итак, функция $\psi(t)$ на отрезке $[x_0, x]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. На основании этой теоремы существует такая точка $\xi \in (x_0, x)$, что

$$\psi'(\xi) = 0,$$

или, в силу (6.45),

$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n + M(n+1)(x-\xi)^n = 0.$$

Сокращая это равенство на $(n+1)(x-\xi)^n \neq 0$, получим

$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}. \tag{6.46}$$

Сопоставляя (6.46) и (6.44), окончательно получим (6.42).

Теорема доказана.

Формула (6.39) называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0, а выражение

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{6.47}$$

где $\xi \in (x_0, x)$, называется ее *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Замечание 6.5. При $n = 0$ формула Тейлора (6.39) принимает вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0),$$

или

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x-x_0),$$

т. е. совпадает с формулой Лагранжа. Это означает, что теорема Тейлора является обобщением теоремы Лагранжа 6.12.

§ 6.24. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

Формула Тейлора является одной из основных формул математического анализа и имеет многочисленные приложения как в анализе, так и в смежных дисциплинах.

Формула Тейлора (6.39) позволяет при определенных условиях функцию $f(x)$ приближенно представить в виде многочлена (6.40), при этом допуская погрешность, равную $R_{n+1}(x)$. Очень часто встречаются задачи, в которых важно знать не численное значение указанной ошибки, а лишь порядок ее малости при $x \to x_0$. Для этой цели удобна другая форма записи остаточного члена.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно.

По теореме Тейлора справедлива следующая формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (6.48)$$

Так как функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{\xi \to x_0} f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0)$, то справедливо представление

$$f^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(x_0) + \alpha, \quad (6.49)$$

где $\lim\limits_{\xi \to x_0} \alpha = 0$. Поскольку точка ξ лежит между точками x_0 и x, то из $x \to x_0$ следует $\xi \to x_0$. Значит, $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$.

Учитывая (6.49), формулу (6.48) можно переписать в виде

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{\alpha}{n!}(x - x_0)^n.$$

Но поскольку $\frac{\alpha}{n!}(x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$, то окончательно получаем

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n). \quad (6.50)$$

Формула (6.50) называется *формулой Тейлора* для функции $f(x)$ в точке x_0 *с остаточным членом в форме Пеано*.

Формула Тейлора функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$ принято называть *формулой Маклорена*. В силу (6.39) и (6.50) имеем

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}. \quad (6.51)$$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + o((x)^n). \qquad (6.52)$$

Формула (6.51) называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа*, а формула (6.52) называется *формулой Маклорена с остаточным членом в форме Пеано*.

§ 6.25. Формула Маклорена некоторых элементарных функций

1. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = e^x$, то $f^{(n)}(0) = 1$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, по формуле (6.51) имеем

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x). \qquad (6.53)$$

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}\,x^{n+1}, \qquad (6.54)$$

где $0 < \vartheta < 1$.

2. Рассмотрим функцию $f(x) = \sin x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$f^{(n)}(0) = \sin n\,\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при четном } n, \\ (-1)^{(n-1)/2} & \text{при нечетном } n, \end{cases}$$

и, следовательно, по формуле (6.51) получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{(n-1)/2}\,\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \qquad (6.55)$$

где n — нечетное число, а остаточный член $R_{n+2}(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\,\sin\left(\vartheta x + (n+2)\,\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < \vartheta < 1. \qquad (6.56)$$

3. Рассмотрим функцию $f(x) = \cos x$. Поскольку $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{при нечетном } n, \\ (-1)^{n/2} & \text{при четном } n, \end{cases}$$

и, следовательно, по формуле (6.51) получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n/2}\frac{x^n}{n!} + R_{n+2}(x), \qquad (6.57)$$

где n — четное число, а остаточный член $R_{n+2}(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+2}(x) = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\cos\left(\vartheta x + (n+2)\frac{\pi}{2}\right), \qquad 0 < \vartheta < 1. \quad (6.58)$$

4. Рассмотрим функцию $f(x) = \ln(1+x)$. Так как

$$f^{(n)}(x) = (\ln(1+x))^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}, \quad n \geqslant 1,$$

$f(0) = 0$ и $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$, то по формуле Маклорена (6.51) имеем

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x). \qquad (6.59)$$

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ в форме Лагранжа имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\vartheta x)^{n+1}}, \qquad (6.60)$$

где $0 < \vartheta < 1$.

§ 6.26. Условия возрастания и убывания функций

Монотонные функции нами уже были рассмотрены в § 4.5. Здесь мы установим необходимые и достаточные условия монотонности функций.

Теорема 6.16. *Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a, b) функция $f(x)$ была неубывающей (невозрастающей) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) для всех $x \in (a, b)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $f'(x) \geqslant 0$ (случай $f'(x) \leqslant 0$ доказывается аналогично) для всех $x \in (a, b)$. Докажем, что функция $f(x)$ является неубывающей на интервале (a, b).

Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Функция $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Лагранжа 6.12. В силу этой теоремы существует такая точка $c \in (x_1, x_2)$, что выполняется равенство

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Так как по условию $f'(c) \geqslant 0$ и $x_2 - x_1 > 0$, то из последнего равенства следует, что $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$ или $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. Это и значит, что функция $f(x)$ является неубывающей на интервале (a, b).

Необходимость. Пусть функция $f(x)$ является неубывающей на интервале (a, b). Докажем, что $f'(x) \geqslant 0$ для всех $x \in \in (a, b)$.

Возьмем произвольную точку $x \in (a, b)$ и рассмотрим произвольное приращение Δx такое, что $x + \Delta x \in (a, b)$. Так как функция $f(x)$ является неубывающей на интервале (a, b), то нетрудно заметить, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Действительно, если $\Delta x > 0$, то $f(x + \Delta x) - f(x) \geqslant 0$, а если $\Delta x < 0$, то $f(x + \Delta x) - f(x) \leqslant 0$, и, значит, в обоих случаях $\dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0$. Следовательно,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

Когда функция $f(x)$ является невозрастающей, доказательство проводится аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 6.17. *Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a, b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a, b).*

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ (случай $f'(x) < 0$ доказывается аналогично). Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in \in (a, b)$, удовлетворяющие условию $x_1 < x_2$. Применим теорему Лагранжа 6.12 к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1, x_2)$. Так как по условию $f'(c) > 0$ и $x_2 - x_1 > > 0$, то из последнего равенства следует, что $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$. Это и значит, что функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, b).

Теорема доказана.

Замечание 6.6. Условие $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in$ $\in (a, b)$ не является необходимым условием возрастания (убывания) функции $f(x)$ на интервале (a, b).

Например, функция $f(x) = x^3$ (см. далее рис. 6.10) возрастает на интервале $(-1, 1)$, в то время как производная $f'(x) = 3x^2$ не является всюду положительной на этом интервале (она обращается в нуль в точке 0).

§ 6.27. Экстремумы функций

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 6.10. Точка x_0 называется *точкой локального максимума* (*локального минимума*) функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq$

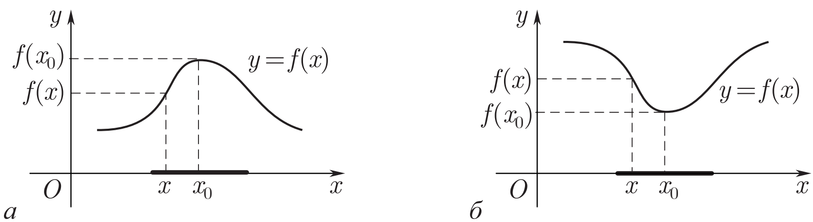


Рис. 6.9. Локальный максимум (*а*) и локальный минимум (*б*)

$\neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$) (рис. 6.9).

В этом случае говорят также, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум (локальный минимум) в точке x_0.

Определение 6.11. Точки локального максимума и локального минимума называются *точками экстремума* или *экстремумами* данной функции.

Теорема 6.18 (необходимое условие экстремума). *Пусть x_0 — точка локального экстремума функции $f(x)$. Если существует производная этой функции в точке x_0, то она равна нулю*: $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть для определенности x_0 — точка максимума и существует производная $f'(x_0)$.

По определению 6.10 существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Рассмотрим произвольное приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Так как $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, то при $\Delta x > 0$, справедливо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$$

и, следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0. \tag{6.61}$$

А при $\Delta x < 0$ справедливо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$$

и, следовательно,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geqslant 0. \tag{6.62}$$

Из неравенств (6.61) и (6.62) следует, что $f'(x_0) = 0$.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 6.7. Равенство $f'(x_0) = 0$ не является достаточным условием экстремума. Например, функция $f(x) = x^3$

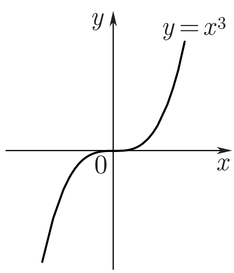


Рис. 6.10

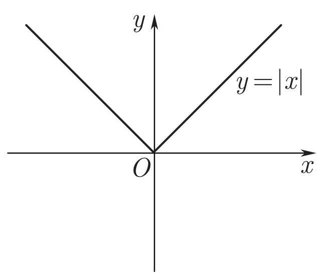


Рис. 6.11

(рис. 6.10) не имеет экстремума в точке $x_0 = 0$, однако производная $f'(x) = 3x^2$ обращается в нуль в этой точке.

З а м е ч а н и е 6.8. Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, для функции $f(x) = |x|$ (рис. 6.11) точка $x_0 = 0$ является точкой минимума, однако в этой точке функция $f(x) = |x|$ не имеет производной (см. пример 6.1).

Точки, которые удовлетворяют равенству $f'(x_0) = 0$, называются *точками возможного экстремума* функции $f(x)$. Их также называют *стационарными точками* или *критическими точками* функции $f(x)$.

Теорема 6.19 (первое достаточное условие экстремума). *Пусть точка x_0, является точкой возможного экстремума функции $f(x)$, которая дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.*

Тогда если в пределах указанной окрестности производная $f'(x)$ положительна (отрицательна) слева от точки x_0 и отрицательна (положительна) справа от точки x_0, то функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке x_0.

Если же производная $f'(x)$ справа и слева от точки x_0 имеет один и тот же знак, то экстремума в точке x_0 нет.

Доказательство. Не теряя общности предположим, что функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой δ-окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 $(\delta > 0)$.

Пусть

$$f'(x) > 0(f'(x) < 0) \quad \text{для всех} \quad x \in (x_0 - \delta, x_0) \tag{6.63}$$

и

$$f'(x) < 0(f'(x) > 0) \quad \text{для всех} \quad x \in (x_0, x_0 + \delta). \tag{6.64}$$

В силу теоремы 6.17 из (6.63) следует, что функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(x_0 - \delta, x_0)$, а из (6.64) следует, что функция $f(x)$ убывает (возрастает) на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$. Значит, для всех точек $x \neq x_0$ окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. Это и означает, что функция $f(x)$ имеет локальный максимум (минимум) в точке x_0.

Пусть теперь производные $f'(x)$ справа и слева от точки x_0 имеют один и тот же знак, скажем, $f'(x) > 0$ (случай $f'(x) < 0$ доказывается аналогично) на интервалах $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$. Из этого в силу теоремы 6.17 следует, что функция $f(x)$ возрастает на указанных интервалах. Следовательно, $f(x) < f(x_0)$, если $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, и $f(x) > f(x_0)$, если $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. А это значит, что точка x_0 не является точкой экстремума для функции $f(x)$.

Теорема доказана.

Последнюю теорему можно кратко сформулировать следующим образом. *Если при переходе через точку возможного экст-*

ремума x_0 *производная* $f'(x)$ *меняет свой знак с плюса на минус* (*с минуса на плюс*), *то функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *локальный максимум* (*локальный минимум*). *А если* $f'(x)$ *не меняет свой знак при переходе через данную точку* x_0, *то экстремума в точке* x_0 *нет*.

Теорема 6.20 (второе достаточное условие экстремума). *Пусть функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *имеет производные* $f'(x_0)$ *и* $f''(x_0)$. *Если* $f'(x_0) = 0$, *а* $f''(x_0) \neq 0$, *то точка* x_0 *является точкой экстремума. Причем точкой локального максимума, если* $f''(x_0) < 0$, *и точкой локального минимума, если* $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Пусть $f''(x_0) < 0$. Поскольку

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0,$$

то согласно определению предела функции существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек x этой окрестности $\dfrac{f'(x)}{x - x_0} < 0$. А это значит, что $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$. Откуда по теореме 6.19 следует, что x_0 — точка локального максимума функции $f(x)$.

Случай $f''(x_0) > 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

§ 6.28. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$. Поставим задачу об отыскании наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. В силу теоремы Вейерштрасса 5.3 функция $f(x)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Для определенности остановимся на отыскании наибольшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

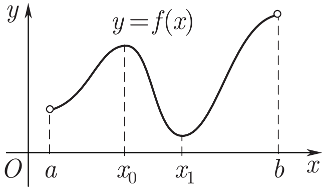


Рис. 6.12

Наибольшее значение функции $f(x)$ может достигаться либо внутри интервала (a, b), либо на одном из концов отрезка $[a, b]$. Заметим, что если наибольшее значение $f(x)$ достигается в некоторой точке внутри интервала (a, b), то эта точка совпадает с одним из локальных максимумов функции $f(x)$ (рис. 6.12).

Итак, для нахождения наибольшего значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ следует сравнить между собой значения функции $f(x)$ во всех точках локального максимума и в граничных точках a и b данного отрезка. Наибольшее из этих значений и будет наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ находится аналогичным образом.

Замечание 6.9. Наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно найти без нахождения локальных экстремумов данной функции. Достаточно лишь сравнить между собой значения функции $f(x)$ во всех точках возможного экстремума и в граничных точках a и b данного отрезка.

Таким образом, мы получаем следующей алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

1) найти стационарные точки функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$;

2) вычислить значения функции $f(x)$ в найденных стационарных точках;

3) вычислить значения функции $f(x)$ в граничных точках a и b отрезка $[a, b]$;

4) среди всех вычисленных значений функции $f(x)$ выбрать наибольшее и наименьшее.

Пример 6.10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-4, 1]$.

Находим стационарные точки данной функции:

$$f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x+3) = 0,$$

откуда получаем стационарные точки $x = 0$ и $x = -3$, которые лежат на отрезке $[-4, 1]$. Теперь вычислим:

$$f(-3) = 81 - 108 + 1 = -26, \quad f(0) = 1,$$

$$f(-4) = 256 - 256 + 1 = 1, \quad f(1) = 1 + 4 + 1 = 6.$$

Итак, $\max\limits_{x\in[-4,1]} f(x) = f(1) = 6$, а $\min\limits_{x\in[-4,1]} f(x) = f(-3) = -26$.

§ 6.29. Направление выпуклости графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда в силу теоремы 6.2 существует касательная к графику функции $f(x)$, проходящая через любую точку $M(x, f(x))$ $(x \in \in (a, b))$ этого графика, причем эта касательная не параллельна оси Oy, поскольку угловой коэффициент этой касательной равен производной $f'(x)$, которая конечна.

Определение 6.12. Говорят, что график дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет *выпуклость, направленную вверх* (*вниз*), если график этой функции расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале (рис. 6.13).

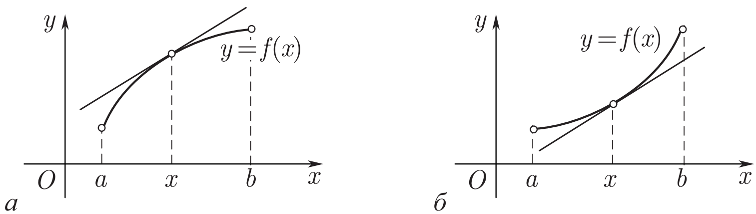


Рис. 6.13. Выпуклость, направленная вверх (a), выпуклость, направленная вниз ($б$)

График функции, имеющий выпуклость, направленную вверх (вниз), называется также *выпуклым* (*вогнутым*).

Теорема 6.21. *Пусть функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* (a, b). *Если* $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$ *для всех* $x \in (a, b)$, *то график этой функции имеет выпуклость, направленную вверх* (*вниз*) *на интервале* (a, b).

Доказательство. Пусть $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in (a, b)$ и докажем, что график функции $f(x)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M(x_0, f(x_0)$.

Уравнение этой касательной имеет вид (см. (6.6))

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{6.65}$$

Разложим функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2, \tag{6.66}$$

где ξ заключен между x_0 и x.

Вычитая (6.65) из (6.66), получим следующее равенство:

$$y - Y = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2.$$

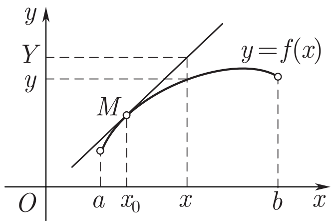


Рис. 6.14

Так как по условию $f''(x) < 0$, следовательно, $y - Y < 0$ для всех $x \in \in (a, b)$. А это и означает, что график функции $f(x)$ расположен ниже касательной, проведенной к графику этой функции в точке $M(x_0, f(x_0))$ (рис. 6.14). То есть график функции $f(x)$ имеет выпуклость, направленную вверх.

Случай $f''(x) > 0$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

§ 6.30. Точки перегиба графика функции

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b).

Определение 6.13. Точка $M(x_0, f(x_0))$ $(x_0 \in (a, b))$ графика функции $f(x)$ называется *точкой перегиба* этого графика, если существует окрестность точки x_0, в пределах которой график функции $f(x)$ слева и справа от x_0 имеет разные направленности выпуклости (рис. 6.15).

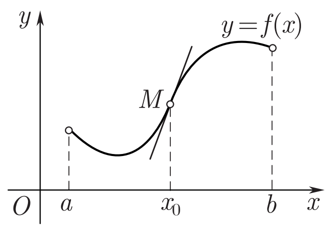


Рис. 6.15

Теорема 6.22 (необходимое условие точки перегиба). *Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ есть точка перегиба графика функции $y = f(x)$.*

Тогда если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет непрерывную вторую производную, то она равна нулю: $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Предположим обратное: пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет непрерывную вторую производную и $f''(x_0) \neq 0$. Не теряя общности, предположим, что $f''(x_0) > 0$. Тогда существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x) > 0$.

Но это в силу теоремы 6.21 означает, что график функции $f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз в указанной окрестности точки x_0. Следовательно, точка $M(x_0, f(x_0))$ не может быть точкой перегиба графика функции $f(x)$, согласно определению 6.13.

Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Замечание 6.10. Обращение в нуль второй производной не является достаточным условием перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

Например, вторая производная функции $f(x) = x^4$: $f''(x) = 12x^2$ обращается в нуль в точке $x_0 = 0$. Однако, точка $M(0,0)$ не является точкой перегиба графика функции $f(x) = x^4$.

Теорема 6.23 (достаточное условие точки перегиба). *Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, причем $f''(x_0) = 0$. Если в пределах этой окрестности вторая производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0, то точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.*

Доказательство. Результат непосредственно следует из теоремы 6.21 и определения 6.13. Действительно, из того, что производная $f''(x)$ имеет разные знаки слева и справа от точки x_0 в силу теоремы 6.21 следует, что график функции $f(x)$ слева и справа от x_0 имеет разные направления выпуклости. А это, согласно определению 6.13, означает, что точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$.

Теорема доказана.

§ 6.31. Асимптоты графика функции

Определение 6.14. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов

$$\lim_{x\to a+0} f(x), \qquad \lim_{x\to a-0} f(x)$$

равен ∞.

Пример 6.11. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 6.16), так как

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

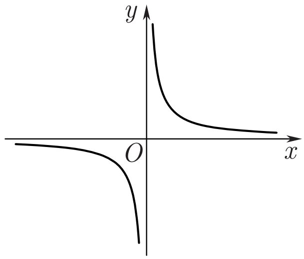


Рис. 6.16

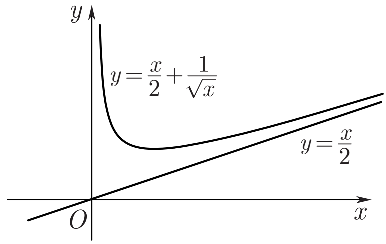


Рис. 6.17

Определение 6.15. Пусть функция $y = f(x)$ определена для всех $x > a$ $(x < a)$. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если эту функцию можно представить в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0 \qquad \Big(\lim_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0\Big).$$

Пример 6.12. Для графика функции $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ прямая $y = \dfrac{x}{2}$ является наклонной асимптотой при $x \to +\infty$ (рис. 6.17), так как $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Теорема 6.24. *Для того чтобы графика функции $f(x)$ имел наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b, \tag{6.67}$$

причем тогда прямая $y = kx + b$ и будет наклонной асимптотой.

Доказательство. Необходимость. Пусть существуют конечные пределы (6.67). Докажем, что прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Из второго равенства (6.67) и теоремы 4.12 следует, что $f(x) - kx = b + \alpha(x)$, т. е.

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$. А это и значит, что прямая $y = kx + b$ есть наклонная асимптота графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Достаточность. Пусть прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, т. е. $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Докажем, что существуют пределы (6.67). Действительно,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx + b + \alpha(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k,$$

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty} [b + \alpha(x)] = b.$$

Теорема доказана.

Замечание 6.11. Последнюю теорему аналогично можно доказать и для случая $x \to -\infty$.

Пример 6.13. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$.

Вычислим пределы:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^2}}{1 - \dfrac{1}{x}} = 2,$$

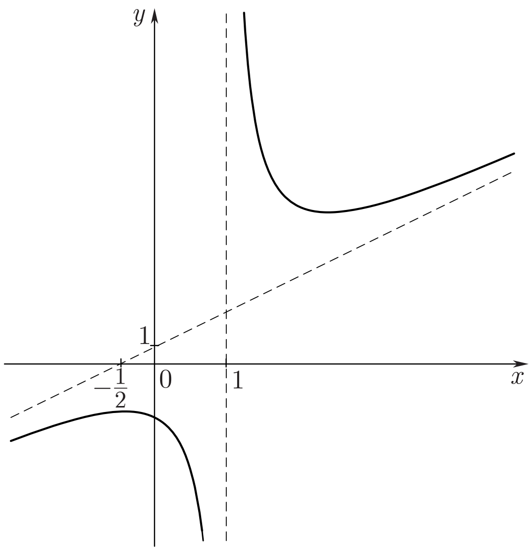


Рис. 6.18

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 - x + 3}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2 - x + 3 - 2x^2 + 2x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x+3}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = 1.$$

Значит, прямая $y = 2x + 1$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x-1}$ как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ (рис. 6.18).

§ 6.32. Общая схема исследования функций и построение графиков

После того как мы обсудили многие аспекты поведения функции, сформулируем общую схему исследования функции. Эта схема даст нам практический способ построения графика функции, отражающего основные черты ее поведения.

Пусть дана функция $f(x)$. Для ее исследования нужно сделать следующее.

1. Найти область определения данной функции. Если это не слишком сложно, то полезно найти также ее область значений.

2. Выяснить вопрос о существовании асимптот (вертикальных и наклонных).

3. Найти интервалы монотонности функции (т. е. интервалы возрастания и убывания) и точки экстремума.

4. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции.

5. Найти точку пересечения графика с осью Ox.

После выяснения свойств функции, упомянутых в п. 1–5, легко строится эскиз графика функции.

Пример 6.14. Исследовать функцию $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ и построить ее график.

1. Заметим, что области определения функции не принадлежит только точка -1: $D(f) = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

2. Выясним вопрос о существовании асимптот. Прямая $x = -1$ является вертикальной асимптотой. Для нахождения на-

клонных асимптот вычислим:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x(1+x)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2}{1+x} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1+x} = -1.$$

Значит, прямая $y = x - 1$ является наклонной асимптотой графика данной функции.

3. Для нахождения интервалов монотонности вычислим первую производную нашей функции:

$$f'(x) = \frac{x(x+2)}{(1+x)^2}.$$

Учитывая, что $f'(x) = 0$ в точках -2 и 0, мы получим следующие области сохранения знака производной $f'(x)$:

x	$(-\infty, -2)$	$(-2, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
Знак y'	$+$	$-$	$-$	$+$
Поведение функции	Возрастает	Убывает	Убывает	Возрастает

Из этой таблицы следует, что функция имеет:
1) локальный максимум при $x = -2$, причем $f(-2) = -4$;
2) локальный минимум при $x = 0$, причем $f(0) = 0$.

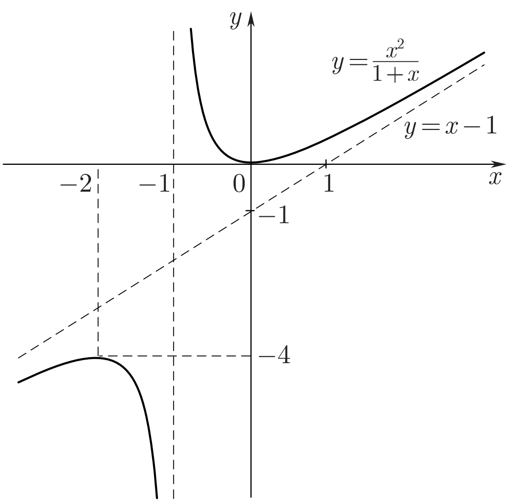


Рис. 6.19

4. Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции вычислим вторую производную:

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Теперь заметим, что уравнение $f''(x) = 0$ не имеет решений, $f''(x) < 0$, когда $x \in (-\infty, -1)$, и $f''(x) > 0$, когда $x \in (-1, +\infty)$.

Следовательно, график нашей функции:

1) не имеет точек перегиба;

2) на интервале $(-\infty, -1)$ имеет выпуклость, направленную вверх;

3) на интервале $(-1, +\infty)$ имеет выпуклость, направленную вниз.

5. Остается найти точки пересечения графика с осью Ox. Для этого следует решить уравнение $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x} = 0$, которое имеет единственный корень $x = 0$.

С учетом полученных данных строим график рассматриваемой функции (рис. 6.19).

Глава 7

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 7.1. Понятие комплексного числа. Арифметические действия с комплексными числами

Действительные числа a и b называются *упорядоченной парой*, если указано, какое из этих чисел является первым, какое вторым. Если число a является первым, а b — вторым, то упорядоченную пару действительных чисел a и b обозначают (a, b).

Определение 7.1. Упорядоченная пара $z = (a, b)$ действительных чисел называется *комплексным числом*. Число a называется *действительной частью* (обозначается $\operatorname{Re} z$), а число b — *мнимой частью* (обозначается $\operatorname{Im} z$) этого комплексного числа.

Два комплексных числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называются *равными*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексное число $z = (a, b)$ считается *равным нулю*, если $a = 0$ и $b = 0$.

Определим операции сложения и умножения комплексных чисел.

Определение 7.2. *Суммой двух комплексных чисел* $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число, которое обозначается $z_1 + z_2$ и определяется формулой

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2). \tag{7.1}$$

Определение 7.3. *Произведением двух комплексных чисел* $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число, которое обозначается $z_1 z_2$ и определяется формулой

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{7.2}$$

Применяя (7.1) и (7.2), заметим, что для суммы и произведения комплексных чисел вида $(a,0)$ справедливы формулы

$$(a_1,0)+(a_2,0)=(a_1+a_2,\,0),\quad (a_1,0)(a_2,0)=(a_1a_2,\,0).$$

Это дает основание комплексное число вида $(a,0)$ отождествить с действительным числом a. Итак, множество всех действительных чисел есть подмножество множества всех комплексных чисел.

Разность двух комплексных чисел $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ определяется формулой

$$z_1-z_2=(a_1-a_2,\,b_1-b_2). \tag{7.3}$$

Определение 7.4. *Частным двух комплексных чисел* $z_1=(a_1,b_1)$ и $z_2=(a_2,b_2)$ $(z_2\neq 0)$ называется комплексное число, которое обозначается $\dfrac{z_1}{z_2}$ и определяется формулой

$$\frac{z_1}{z_2}=\left(\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2},\ \frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\right). \tag{7.4}$$

§ 7.2. Алгебраическая форма записи комплексного числа

В операциях с комплексными числами особую роль играет комплексное число $(0,1)$, которое обозначается буквой i и называется *мнимой единицей*. Пользуясь формулой (7.2), вычислим i^2:

$$i^2=i\cdot i=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Итак,

$$i^2=-1.$$

С учетом последнего любое комплексное число $z=(a,b)$ можно представить в виде

$$z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=a+ib.$$

Таким образом, для комплексного числа $z=(a,b)$ получили представление

$$z=a+ib,$$

которое и называется *алгебраической формой* записи комплексного числа.

Алгебраическая форма записи комплексного числа позволяет производить операции с комплексными числами так *же, как они производятся с алгебраическими многочленами.* Например,

$$(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i(a_1 b_2) + i(a_2 b_1) + i^2(b_1 b_2) = \\ = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Комплексное число $\overline{z} = a - ib$ называется *сопряженным по отношению к комплексному числу* $z = a + ib$.

Справедливо равенство

$$z\overline{z} = a^2 + b^2. \tag{7.5}$$

Действительно, $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$.

Теперь нетрудно проверить, что для частного двух комплексных чисел $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ справедлива формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\, z_1 \overline{z_2}.$$

Действительно,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\, z_1 \overline{z_2} = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\, (a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2) = \\ = \frac{1}{a_2^2 + b_2^2}\, [(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)] = \\ = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\, \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Пример 7.1. Пусть $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 1 + 4i$. Вычислить:

1) $z_1 + z_2$; 2) $z_1 - z_2$; 3) $z_1 z_2$; 4) $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Проводим вычисления:

1) $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (1 + 4i) = 3 + i$;

2) $z_1 - z_2 = (2 - 3i) - (1 + 4i) = 1 - 7i$;

3) $z_1 z_2 = (2 - 3i)(1 + 4i) = 2 - 3i + 8i - 12i^2 = \\ = 2 + 5i + 12 = 14 + 5i$;

4) $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \dfrac{(2 - 3i)(1 - 4i)}{(1 + 4i)(1 - 4i)} = \dfrac{2 - 8i - 3i + 12i^2}{1 + 16} = \\ = \dfrac{-10 - 11i}{17} = -\dfrac{10}{17} - \dfrac{11}{17}\, i.$

§ 7.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Рассмотрим на плоскости декартову прямоугольную систему координат xOy. Каждому комплексному числу $z = a + ib$ можно сопоставить точку M с координатами (a, b), и наоборот, каждой точке M с координатами (a, b) можно сопоставить комплексное число $z = a + ib$ (рис. 7.1). Таким образом, между точками плоскости и множеством комплексных чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексные числа можно изображать как точки плоскости.

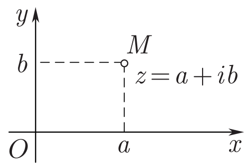


Рис. 7.1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается $\mathbb{C}$. Ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

Пусть $z = (a, b)$ — произвольное комплексное число, которое на комплексной плоскости изображается точкой $M(a, b)$. Тогда этому комплексному числу можно сопоставить также радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. Длина вектора $\overrightarrow{OM}$ называется *модулем комплексного числа* $z = (a, b)$ и обозначается $|z|$. Угол, образованный радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с осью Ox, называется *аргументом числа* $z = (a, b)$ и обозначается $\arg z$ (см. рис. 7.1).

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется не однозначно, а с точностью до числа, кратного 2π. Однако обычно аргумент указывают в промежутке $[0, 2\pi)$ или в промежутке $(-\pi, \pi]$. Аргумент комплексного числа $z = 0$ не определен.

Итак, по определению

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}\,. \tag{7.6}$$

С учетом формулы (7.5) получим

$$z\overline{z} = |z|^2, \tag{7.7}$$

или

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}\,. \tag{7.8}$$

Теперь введем понятие полярной системы координат.

Говорят, что на плоскости задана *полярная система координат*, если на этой плоскости фиксирована некоторая точка O, называемая *полюсом полярной системы координат*, и задан выходящий из точки O луч, называемый *полярной осью*.

Если на плоскости задана полярная система координат, то тогда произвольной точке $M \in R^2$ плоскости соответствуют *полярные координаты* (r, φ), где r — расстояние от точки M до точки O, а φ — угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и полярной осью, отсчитываемый от последней против часовой стрелки (рис. 7.2).

Теперь предположим, что положительная ось Ox прямоугольной системы координат Oxy совпадает с полярной осью

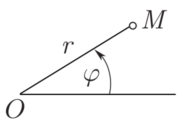


Рис. 7.2

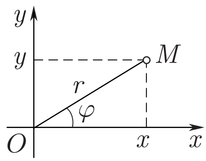


Рис. 7.3

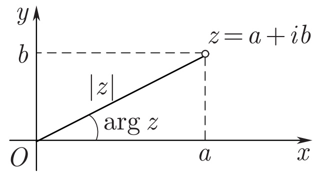


Рис. 7.4

(рис. 7.3). Тогда очевидно, что декартовы координаты (x, y) и полярные координаты (r, φ) связаны формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{7.9}$$

Заметим, что модуль и аргумент комплексного числа $z = a + ib$ являются полярными координатами точки $M(a, b)$: $|z| = r$, $\arg z = \varphi$ (рис. 7.4). Тогда получаем $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Следовательно, комплексное число $z = a + ib$ можно записать в виде $z = r\cos\varphi + i(r\sin\varphi)$, или

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{7.10}$$

Последнее представление называется *тригонометрической формой* записи комплексного числа.

Аргумент φ комплексного числа $z = a + ib$ определяется из формул

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}, \tag{7.11}$$

где r — модуль числа $z = a + ib$.

Пример 7.2. Комплексные числа

$$z_1 = 2 + 2i, \quad z_2 = -i, \quad z_3 = 5$$

представить в тригонометрической форме.

Сначала следует найти модуль и аргумент данного комплексного числа, а после этого воспользоваться формулой (7.10):

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \arg z_1 = \operatorname{arctg}\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4},$$

$$z_1 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$|z_2| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1, \quad \arg z_2 = -\frac{\pi}{2},$$

$$z_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right);$$

$$|z_3| = \sqrt{5^2 + 0^2} = 5, \quad \arg z_3 = 0, \quad z_3 = 5(\cos 0 + i\sin 0).$$

В тригонометрической форме удобно производить операции умножения и деления комплексных чисел.

Пусть даны два произвольных комплексных числа

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Вычислим произведение $z_1 z_2$ согласно формуле (7.2):

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= (r_1 r_2 \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - r_1 r_2 \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + \\
&+ i(r_1 r_2\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + r_1 r_2\sin\varphi_1\cos\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i r_1 r_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \\
&= r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].
\end{aligned}$$

Мы получили формулу

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{7.12}$$

Из этой формулы следуют равенства

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|,$$
$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Итак, мы пришли к важному заключению: *при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.*

Аналогично можно доказать, что

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \qquad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2;$$

иными словами, *при делении комплексных чисел их модули делятся один на другой, а аргументы вычитаются.*

Правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме (7.12) распространяется на любое количество множителей. В частности, если имеются n множителей и все они равны одному и тому же комплексному числу $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то получим
$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{7.13}$$

Эта формула называется *формулой Муавра.*

Пример 7.3. Вычислить z^6, если $z = 1 - i$.

Комплексное число $z = 1 - i$ представим в тригонометрической форме:
$$r = |z| = \sqrt{2}\,, \quad \varphi = \arg z = -\frac{\pi}{4},$$
$$z = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$
По формуле Муавра находим
$$z^6 = (\sqrt{2}\,)^6\left[\cos\left(-\frac{6\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{4}\right)\right] = \\ = 8\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right].$$

Вычисляя косинус и синус, окончательно получим $z^6 = 8i$.

§ 7.4. Показательная форма комплексного числа

Рассмотрим комплексное число, представленное в тригонометрической форме
$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$
Обозначим
$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \tag{7.14}$$

Эта формула называется *формулой Эйлера.* На основании этой формулы комплексное число z можно представить в виде
$$z = re^{i\varphi}. \tag{7.15}$$

Эта запись называется *показательной формой комплексного числа*. Так же, как и в тригонометрической форме, здесь

$$r = |z|, \qquad \varphi = \arg z.$$

Нетрудно заметить, что $e^{i\varphi}$ — периодическая функция периода 2π:

$$e^{i(\varphi+2\pi)} = \cos(\varphi + 2\pi) + i\sin(\varphi + 2\pi) = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Поскольку

$$|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1,$$

следовательно, график функции $z = e^{i\varphi}$, при $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ представляет собой окружность радиуса 1 с центром в точке $z = 0$.

Справедливы равенства

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}, \quad e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}. \tag{7.16}$$

Действительно,

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) =$$
$$= (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1) =$$
$$= (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2},$$

$$e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi =$$
$$= \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}.$$

С помощью формулы Эйлера (7.14) можно определить показательную функцию комплексного аргумента. Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Например,

$$e^{2+(5\pi/6)i} = e^2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -e^2\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{e^2}{2}\,i.$$

Из формулы Эйлера (7.14) легко получить

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \tag{7.17}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{7.18}$$

Пример 7.4. Комплексное число $z = -1 + i$ представить в показательной форме.

Находим модуль и аргумент данного комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{2}\,, \quad \varphi = \arg z = \frac{3\pi}{4}.$$

Следовательно, показательная форма такова:

$$z = \sqrt{2}\, e^{(3\pi/4)i}.$$

Пример 7.5. Комплексное число записано в показательной форме $z = 2e^{(\pi/6)i}$. Найти его алгебраическую форму.

По формуле Эйлера получаем

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i.$$

§ 7.5. Извлечение корней из комплексных чисел

Извлечение корня n-й степени определяется как действие, обратное возведению в натуральную степень.

Корнем n-й степени из комплексного числа w называется комплексное число z, удовлетворяющее равенству

$$z^n = w. \tag{7.19}$$

Итак, для извлечения корня n-й степени из комплексного числа w: $\sqrt[n]{w}$, мы должны решить уравнение (7.19), где z — неизвестное комплексное число, а w — известное.

Если $w = 0$, то $z = 0$. Пусть $w \neq 0$. Запишем число w в тригонометрической форме:

$$w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Здесь ρ и ψ — известные величины. Запишем неизвестное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

где r и φ — неизвестные величины. По формуле Муавра имеем

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Таким образом,

$$r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

Если два комплексных числа равны, то их модули должны быть равны. Поэтому $r^n = \rho$. Поскольку r и ρ — положительные числа, следовательно, $r = \sqrt[n]{\rho}$, где справа стоит обычный арифметический корень из положительного числа.

Из равенства двух комплексных чисел следует, что аргументы у них могут различаться только на величину, кратную 2π. Поэтому из последнего равенства имеем

$$n\varphi = \psi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

или

$$\varphi = \frac{\psi + 2\pi k}{n}.$$

Итак, мы получили формулу

$$z = \sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\psi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi + 2\pi k}{n}\right), \tag{7.20}$$

где $k = 0, 1, \ldots, n-1$. При других значениях k в силу периодичности косинуса и синуса получатся значения корня, совпадающие с уже найденными.

Пример 7.6. Найти корни уравнения $z^4 = -1$.

Представим число -1 в тригонометрической форме:

$$-1 = 1 \cdot (\cos\pi + i\sin\pi),$$

т. е. $\rho = 1$, $\psi = \pi$. Тогда

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{1}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3$.

При $k = 0$ получим

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При $k = 1$ получим

$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При $k = 2$ получим

$$z_3 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

При $k = 3$ получим

$$z_4 = \cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Глава 8

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 8.1. Понятия первообразной функции и неопределенного интеграла

В дифференциальном исчислении функции одной переменной решается задача нахождения производной или дифференциала данной функции $f(x)$. Интегральное исчисление решает обратную задачу: найти функцию $F(x)$, зная ее производную $F'(x) = f(x)$.

Корни этой задачи уходят в механику, важной задачей которого является задача об определении закона движения материальной точки по заданной ее скорости, а также задача об определении закона движения и скорости материальной точки по заданному ее ускорению.

Эти задачи приводят к математической проблеме отыскания функции по заданной производной этой функции.

Определение 8.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* или просто *первообразной* для функции $f(x)$ на интервале (a, b), если для любого $x \in (a, b)$ справедливо равенство $F'(x) = f(x)$.

Замечание 8.1. Понятие первообразной для функции $f(x)$ на бесконечных интервалах определяется аналогично.

Пример 8.1. Функция $F(x) = \sqrt{x}$ является первообразной для функции $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на бесконечном интервале $(0, \infty)$, поскольку $(\sqrt{x}\,)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ для любого $x \in (0, \infty)$.

Пример 8.2. Функция $F(x) = \cos 2x$ является первообразной для функции $f(x) = -2\sin 2x$ на числовой прямой $(-\infty, \infty)$, так как $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$ в каждой точке числовой прямой.

Пример 8.3. Функция $F(x) = \sqrt{1-x^2}$ является первообразной для функции $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ на интервале $(-1, 1)$, так как $(\sqrt{1-x^2}\,)' = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ в каждой точке этого интервала.

Заметим, что если функция $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b), то функция $F(x) + C$, где C — произвольная константа, также является первообразной для функции $f(x)$ на этом же интервале:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Теорема 8.1. *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — две произвольные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале (a, b), то всюду на этом интервале $F_1(x) - F_2(x) = C$, где C — некоторая постоянная.*

Иначе говоря, две произвольные первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным числом.

Доказательство. В силу определения первообразной имеем $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и вычислим $\Phi'(x)$:

$$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Итак, для произвольного $x \in (a, b)$, $\Phi'(x) = 0$. А значит, в силу следствия 6.1 $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x) = C = \mathrm{const}$ для любого $x \in (a, b)$.

Теорема доказана.

Следствие 8.1. *Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a, b).*

Тогда любая первообразная $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на интервале (a, b) имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная.

Определение 8.2. Семейство всех первообразных функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)\,dx.$$

В последнем обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, x — *переменной интегрирования*, а сама функция $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Итак, если $F(x)$ — некоторая первообразная для функции $f(x)$, то в силу следствия 8.1 имеем

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Операция нахождения неопределенного интеграла от данной функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

Пример 8.4.

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sqrt{1-x^2} + C$$

на интервале $(-1, 1)$ (см. пример 8.3).

Возникает естественный вопрос: всякая ли функция интегрируема? Ответ на этот вопрос отрицательный. Однако справедливо следующее достаточное условие интегрируемости функции.

Теорема 8.2. *Всякая непрерывная на интервале* (a, b) *функция* $f(x)$ *имеет первообразную, а следовательно, и неопределенный интеграл.*

Доказательство последней теоремы можно найти в любом учебнике по математическому анализу.

§ 8.2. Основные свойства неопределенного интеграла

Прежде всего отметим свойства, которые непосредственно вытекают из определения неопределенного интеграла

1°. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

В самом деле, $\left(\int f(x)\,dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x) + C' = f(x)$.

2°. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$

Действительно,

$$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d(F(x)+C) = dF(x) + dC = F'(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

3°. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C,$$

или

$$\int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Действительно, $\int dF(x) = \int F'(x)\,dx = \int f(x)\,dx = F(x) + C.$

Последнее свойство имеет большое практическое значение и называется *вычислением интеграла путем подведения под знак дифференциала.*

Следующие два свойства называются *линейными свойствами* интеграла.

4°. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,$$

где $a = \text{const}$.

Действительно,

$$a\int f(x)\,dx = a(F(x)+C) = aF(x) + aC = aF(x) + C_1 = \\ = \int (aF(x))'\,dx = \int aF'(x)\,dx = \int af(x)\,dx,$$

где было положено $aC = C_1$.

5°. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов слагаемых функций:

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$$

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, а $G(x)$ — для функции $g(x)$. Тогда

$$\int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx = F(x) + C_1 + G(x) + C_2 =$$

$$= F(x) + G(x) + C = \int (F(x) + G(x))'\,dx =$$

$$= \int (F'(x) + G'(x))\,dx = \int (f(x) + g(x))\,dx,$$

где было положено $C = C_1 + C_2$.

§ 8.3. Таблица основных неопределенных интегралов

На основе таблицы производных основных элементарных функций мы приходим к следующей таблице основных неопределенных интегралов.

1°. $\int 0\;dx = C.$

2°. $\int 1\,dx = x + C.$

3°. $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1).$

4°. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$

5°. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1).$

6°. $\int e^x\,dx = e^x + C.$

7°. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

8°. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9°. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots\right).$

10°. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n, \quad \text{где} \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$

11°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$

12°. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

13°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln|x + \sqrt{x^2+1}\,| + C.$

14°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln|x + \sqrt{x^2-1}\,| + C \quad (|x| > 1).$

15°. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C \quad (|x| \neq 1).$

16°. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

17°. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

18°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

19°. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

Заметим, что формулы 13°, 14° и 15° не имеют аналогов среди формул таблицы производных. Для проверки этих формул достаточно убедиться, что производные выражений, стоящих в правых частях этих формул, совпадают с соответствующими подынтегральными функциями.

§ 8.4. Замена переменной в неопределенном интеграле

Одним из эффективных методов вычисления неопределенных интегралов является *метод замены переменной* (*метод подстановки*). Этот метод основывается на следующей теореме.

Теорема 8.3. *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на интервале (a, b), где $x = \varphi(t)$ — дифференцируемая на интервале (α, β) функция, множество значений которой совпадает с интервалом (a, b). Предположим, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a, b), т. е.*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Тогда на интервале (α, β) *для функции* $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ *существует первообразная, равная функции* $F[\varphi(t)]$, *т. е.*

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)] + C.$$

Доказательство. Воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции и вычислим:

$$(F[\varphi(t)])' = F'(x)\varphi'(t) = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Теперь покажем, как применить последнюю теорему для вычисления неопределенных интегралов. Предположим, что требуется вычислить интеграл $\int f(x)\,dx$. В ряде случаев удается выбрать такую дифференцируемую функцию $x = \varphi(t)$, что легко интегрируется функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. Допустим, что

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt = G(t) + C.$$

Теперь остается вернуться от новой переменной интегрирования t к старой переменной x. Для этого достаточно найти обратную функцию $t = \Phi(x)$ функции $x = \varphi(t)$ и поставить ее в функцию $G(t)$. Итак,

$$\int f(x)\,dx = G[\Phi(x)] + C.$$

Пример 8.5. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (-a < x < a).$$

Произведем замену переменной $x = at$. Тогда $dx = a\,dt$, $t = \dfrac{x}{a}$. Теперь вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2 - a^2t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \arcsin t + C = \\ = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Итак, мы получили формулу

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Пример 8.6. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

Произведем замену переменной $x = at$. Тогда $dx = a\,dt$, $t = \dfrac{x}{a}$. Теперь вычислим данный интеграл:

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2 + a^2t^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C = \\ = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Таким образом, мы получили еще один неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

Произведя замену переменной $x = at$ и учитывая соответствующие табличные интегралы, легко получить формулы

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}\,| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}\,| + C \quad (|x| > a),$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a + x}{a - x} \right| + C \quad (|x| \neq a).$$

Пример 8.7. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}}.$$

Произведем замену переменной $x = a \sin t$. Тогда $dx = a \cos t\,dt$, $t = \arcsin \dfrac{x}{a}$. Теперь вычислим интеграл:

$$\int \frac{dx}{(a^2 - x^2)^{3/2}} = \int \frac{a \cos t\,dt}{(a^2 \cos^2 t)^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{a^2} \operatorname{tg} t + C = \\ = \frac{1}{a^2} \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} + C.$$

§ 8.5. Метод интегрирования по частям

Этот метод основывается на следующей теореме.

Теорема 8.4. *Пусть функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *дифференцируемы, а функция* $v(x)u'(x)$ *интегрируема на интервале* (a, b). *Тогда на этом интервале интегрируема и функция* $u(x)v'(x)$, *причем справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx, \tag{8.1}$$

или, что то же самое,

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \tag{8.2}$$

Доказательство. По правилу дифференцирования произведения двух функций, имеем

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

Но тогда

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du,$$

или

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du.$$

Из последнего равенства следует утверждение теоремы. Теорема доказана.

Формула (8.2) называется *формулой интегрирования по частям*. Она сводит вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$. В ряде конкретных случаев вычисление последнего интеграла оказывается существенно более простым, чем вычисление исходного интеграла.

Теперь отметим некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

I. К первой группе относятся интегралы типа

$$\int P(x)e^{ax}\,dx, \quad \int P(x)\sin ax\,dx, \quad \int P(x)\cos ax\,dx,$$

где a — действительное число, а $P(x)$ — некоторый многочлен.

Для вычисления интегралов этой группы удобно положить $u = P(x)$, а остальные сомножители обозначить через dv.

Пример 8.8. Вычислить интеграл

$$\int x\cos 2x\,dx.$$

Обозначим $u = x$, а $dv = \cos 2x\,dx$. Тогда $v = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, а $du = dx$. Теперь применим формулу (8.2) интегрирования по частям:

$$\int x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\,x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

II. Ко второй группе относятся интегралы типа

$$\int P(x)\arcsin x\,dx, \quad \int P(x)\arccos x\,dx, \quad \int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx,$$

$$\int P(x)\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx, \quad \int P(x)\ln x\,dx,$$

где $P(x)$ — некоторый многочлен.

Для вычисления интегралов этой группы следует положить $P(x)\,dx = dv$, а остальные сомножители обозначить через u.

Пример 8.9. Вычислить интеграл

$$\int x\ln x\,dx.$$

Применим формулу (8.2) интегрирования по частям:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}\int \ln x\,dx^2 = \frac{1}{2}\,x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2\,d\ln x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{4}\,(2\ln x - 1) + C.$$

III. К третьей группе относятся интегралы типа

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \quad \int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

где a и b — действительные числа.

Для вычисления интегралов этой группы можно положить $dv = e^{ax}\,dx$.

Пример 8.10. Вычислить интеграл

$$\int x^2e^x\,dx.$$

Для вычисления этого интеграла дважды применим формулу (8.2) интегрирования по частям:

$$\int x^2 e^x\,dx = \int x^2\,de^x = x^2e^x - \int e^x\,dx^2 = x^2e^x - 2\int xe^x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2\int x\,de^x = x^2e^x - 2xe^x + 2\int e^x\,dx =$$
$$= x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

§ 8.6. Алгебраические многочлены

Определение 8.3. Функция вида

$$P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0, \tag{8.3}$$

где a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, — постоянные коэффициенты, причем $a_n \neq 0$, называется *алгебраическим многочленом* или *целой рациональной функцией* степени n.

В общем случае коэффициенты a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, и переменная x рассматриваются как комплексные числа.

Договоримся называть *многочленом нулевой степени* любую (комплексную) постоянную.

Определение 8.4. Число x_0 называется *корнем многочлена* $P_n(x)$, если $P_n(x_0) = 0$.

Теорема 8.5. *Пусть число x_0 является корнем многочлена $P_n(x)$.*

Тогда многочлен $P_n(x)$ делится без остатка на $x - x_0$, т. е. имеет место представление

$$P_n(x) = (x - x_0)\,P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$.

Возникает естественный вопрос: всякий ли алгебраический многочлен имеет корни? Ответ на этот вопрос дает *основная теорема алгебры*.

Теорема 8.6. *Всякий алгебраический многочлен ненулевой степени имеет хотя бы один корень, действительный или комплексный.*

Опираясь на эту теорему докажем, что всякий алгебраический многочлен степени n имеет ровно n корней.

Теорема 8.7. *Всякий алгебраический многочлен $P_n(x)$ степени n можно представить в виде*

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n), \tag{8.4}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P_n(x)$, a_n — коэффициент при степени x^n.

Доказательство. По теореме 8.6 многочлен $P_n(x)$ имеет хотя бы один корень, который обозначим через x_1. Согласно теореме 8.5 для $P_n(x)$ справедливо разложение

$$P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен $(n-1)$-й степени. По той же теореме 8.6 многочлен $P_{n-1}(x)$ тоже имеет корень. Обозначим его через x_2. Тогда

$$P_{n-1}(x) = (x - x_2)P_{n-2}(x)$$

(теорема 8.5), где $P_{n-2}(x)$ — многочлен $(n-2)$-й степени. Следовательно,

$$P_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)P_{n-2}(x).$$

Продолжая этот процесс мы окончательно получим разложение (8.4).

Теорема доказана.

В разложении (8.4) множители $x - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называются *линейными множителями*, а само представление 8.4 называется *разложением многочлена на линейные множители*.

Заметим, что в разложении (8.4) некоторые корни могут повториться. Если, скажем, корень x_1 встретился ровно k_1 раз, то тогда говорят, что корень x_1 имеет *кратность* k_1 или является *корнем кратности* k_1. Корень *кратности* 1 называется также *простым корнем*.

Теперь предположим, что x_1 — *корень кратности* k_1, x_2 — *корень кратности* k_2 и т. д., x_r — *корень кратности* k_r, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, а r — число различных корней многочлена $P_n(x)$. Тогда очевидно, что разложение (8.4) примет вид

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2}\ldots(x - x_r)^{k_r}. \tag{8.5}$$

Пользуясь теоремой 8.6, нетрудно доказать следующие утверждения.

Теорема 8.8. *Если многочлен n-й степени*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

равен нулю при $n+1$ (или более) различных значениях аргумента, то все его коэффициенты равны нулю.

Следствие 8.2. *Если многочлен n-й степени $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ равен нулю тождественно, то все его коэффициенты равны нулю.*

Теорема 8.9 (условие тождественности многочленов). *Два многочлена n-й степени,*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

и

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0,$$

тождественно равны друг другу тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты этих многочленов равны между собой: $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 8.10. *Если многочлен $P_n(x)$ с действительными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + ib$, то он имеет и комплексно сопряженный корень $\overline{z} = a - ib$.*

Доказательство последней теоремы следует из утверждения: *для многочлена с с действительными коэффициентами справедливо равенство $P_n(z) = \overline{P_n(\overline{z})}$, где z, $\overline{z}$ и $P_n(z)$, $\overline{P_n(\overline{z})}$ — комплексно сопряженные числа.*

Итак, в разложении (8.4) комплексные корни входят сопряженными парами $[x - (a + ib)]$ и $[x - (a - ib)]$. Тогда

$$[x - (a + ib)][x - (a - ib)] = [(x - a) - ib][(x - a) + ib)] =$$
$$(x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

где $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$.

Таким образом, в разложениях (8.4) и (8.5) произведения линейных множителей, соответствующих комплексно сопряженным корням, можно заменить квадратными трехчленами с действительными коэффициентами. Следовательно, с учетом теоремы 8.7 окончательно имеем

Теорема 8.11. *Всякий алгебраический многочлен с действительными коэффициентами можно представить в виде*

$$P_n(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_l)^{k_l} \times$$
$$\times (x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\dots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m} =$$
$$= a_n\prod_{i=1}^{l}(x-x_i)^{k_i}\prod_{i=1}^{m}(x^2+p_ix+q_i)^{s_i}, \quad (8.6)$$

где a_n *— коэффициент при старшей степени* x^n *многочлена* $P_n(x)$, $k_1+k_2+\ldots+k_l+2(s_1+s_2+\ldots+s_m)=n$, *а все квадратные трехчлены неприводимы, т. е. не имеют вещественных корней.*

§ 8.7. Рациональные функции. Разложение на простейшие дроби

Функция вида

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (8.7)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — алгебраические многочлены, называется *рациональной функцией* или *рациональной дробью*.

Пусть степень многочлена $P(x)$ равна m, а степень $Q(x)$ равна n. Рациональная дробь (8.7) называется *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя ($m<n$). В противном случае ($m \geqslant n$) рациональная дробь (8.7) называется *неправильной*.

Теорема 8.12. *Всякую неправильную рациональную дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *можно представить в виде суммы алгебраического многочлена и правильной рациональной дроби*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{T(x)}{Q(x)}. \quad (8.8)$$

Многочлен $S(x)$ называется *целой частью*, а $T(x)$ — *остатком рациональной дроби* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Доказательство. Достаточно провести деление многочлена $P(x)$ на $Q(x)$ «столбиком», что возможно, поскольку степень числителя больше степени знаменателя.

Пример 8.11. Рациональную дробь

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

представить в виде (8.8).

Для нахождения частного и остатка применим алгоритм деления многочленов «столбиком»:

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +5x^2 & -\ 2x & +\ 1 & x-2 \\ \cline{5-5}
\underline{x^3} & \underline{-2x^2} & & & x^2+7x+12 \\
 & 7x^2 & -\ 2x & +\ 1 & \\
 & \underline{7x^2} & \underline{-14x} & & \\
 & & 12x & +\ 1 & \\
 & & \underline{12x} & \underline{-24} & \\
 & & & 25 &
\end{array}$$

Таким образом, мы представили неправильную рациональную дробь $R(x)$ в виде

$$R(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - 2x + 1}{x - 2} = x^2 + 7x + 12 + \frac{25}{x - 2}.$$

Определение 8.5. Рациональные дроби вида:

$$\text{(I)} \quad \frac{A}{x-a}; \qquad \text{(II)} \quad \frac{A}{(x-a)^k};$$

$$\text{(III)} \quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \qquad \text{(IV)} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l};$$

где $k > 1$, $l > 1$, а A и B — некоторые постоянные, называются *простейшими рациональными дробями.*

Справедлива следующая важная теорема.

Теорема 8.13. *Пусть* $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *— правильная рациональная дробь. Предположим, что знаменатель* $Q(x)$ *разложен на линейные и неприводимые квадратные множители*:

$$Q(x) = a_n(x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_l)^{k_l} \times$$

$$\times (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}(x^2 + p_2x + q_2)^{s_2} \ldots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m} = \\ = a_n \prod_{i=1}^{l}(x - x_i)^{k_i} \prod_{i=1}^{m}(x^2 + p_ix + q_i)^{s_i}.$$

Тогда правильную рациональную дробь $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *можно представить и притом единственным образом в виде следующей суммы простейших рациональных дробей*:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \ldots \\ \ldots + \frac{A_{l1}}{x - x_l} + \frac{A_{l2}}{(x - x_l)^2} + \ldots + \frac{A_{lk_l}}{(x - x_l)^{k_l}} + \\ + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \ldots + \frac{M_{1s_1}x + N_{1s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \ldots \\ \ldots + \frac{M_{m1}x + N_{m1}}{x^2 + p_mx + q_m} + \ldots + \frac{M_{ms_m}x + N_{ms_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}} = \\ = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{s_i} \frac{M_{ij}x + N_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}\,, \quad (8.9)$$

где A_{ij}, M_{ij} *и* N_{ij} *— некоторые действительные числа.*

Для отыскания неизвестных постоянных A_{ij}, M_{ij} и N_{ij} в разложении (8.9) используется *метод неопределенных коэффициентов.* Суть этого метода заключается в следующем.

1. Нужно привести к общему знаменателю сумму, стоящую в правой части. Заметим, что этот общий знаменатель, очевидно, равен $Q(x)$. В результате получится тождество

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{S(x)}{Q(x)},$$

где многочлен $S(x)$ содержит неизвестные постоянные A_{ij}, M_{ij} и N_{ij}.

2. Поскольку в последнем тождестве знаменатели равны, значит, тождественны равны и числители:

$$P(x) \equiv S(x).$$

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях последнего тождества (согласно теореме 8.9 об условии тождественности многочленов), получим систему линейных уравнений, из которой и определяются искомые коэффициенты.

Систему линейных уравнений для нахождения искомых коэффициентом можно получить также, если в последнем тождестве аргументу x придать конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов. Обычно удобно подставить вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$.

Описанные способы получения системы линейных уравнений можно комбинировать друг с другом так, чтобы найти искомые коэффициенты наиболее удобным способом.

Продемонстрируем вышеизложенное на конкретном примере.

Пример 8.12. Разложить рациональную дробь

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+2)}$$

в виде сумму простейших дробей.

Заметим, что квадратный трехчлен x^2+x+2 не имеет действительных корней. Значит, согласно теореме 8.13 имеем

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2},$$

где A, B и C — неизвестные постоянные.

Для нахождения этих постоянных приведем правую часть к общему знаменателю:

$$\frac{2x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+2} =$$

$$= \frac{A(x^2+x+2)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+(A-B+C)x+2A-C}{(x-1)(x^2+x+2)}.$$

Отсюда следует

$$2x^2+x+1 = (A+B)x^2+(A-B+C)x+2A-C.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим

$$\begin{cases} A + B = 2, \\ A - B + C = 1, \\ 2A - C = 1. \end{cases}$$

Решая систему, находим $A = B = C = 1$. Итак,

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+x+2)} = \frac{1}{x-1} + \frac{x+1}{x^2+x+2}.$$

§ 8.8. Интегрирование рациональных дробей

Теперь мы готовы к тому, чтобы в общем виде решить проблему интегрирования рациональной дроби с вещественными коэффициентами.

Прежде всего заметим, что в силу теоремы 8.12 интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию некоторого многочлена и некоторой правильной рациональной дроби. Многочлены интегрировать мы умеем. Остается научиться интегрировать правильные рациональные дроби. Но а в силу теоремы 8.13 вопрос интегрирования правильных рациональных дробей сводится к интегрированию простейших рациональных дробей (I)–(IV) (см. определение 8.5).

Разберем интегрирование всех четырех типов простейших дробей по порядку.

Интегрирование простейших дробей вида (I) и (II) сводится к применению табличного интеграла.

1. $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = A\int (x-a)^{-k}\,d(x-a) =$

$$= A\,\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = -\frac{A}{k-1}\,\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

3. Для вычисления интеграла $\displaystyle\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx$ от простейшей дроби вида (III) представим квадратный трехчлен в виде

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Учитывая, что $q - \frac{p^2}{4} > 0$ (поскольку квадратный трехчлен не имеет действительных корней), обозначим $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Сделав подстановку $t = x + \frac{p}{2}$, вычислим интеграл:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx = \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)}\,dx =$$

$$= \int \frac{At + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{t^2+a^2}\,dt = \frac{A}{2}\int \frac{2t\,dt}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+a^2} =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{t}{a}\right)}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(t^2+a^2) + \frac{2B-Ap}{2a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C =$$

$$= \frac{A}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2B-Ap}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C.$$

4. Осталось вычислить интеграл $\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}\,dx$ от простейшей дроби вида (IV).

Используя введенные выше обозначения $t = x + \frac{p}{2}$ и $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$, получим

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^l}\,dx = \int \frac{At + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{(t^2+a^2)^l}\,dt =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^l} + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l}.$$

Интеграл $\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^l}$ вычисляется просто:

$$\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^l} = \int (t^2+a^2)^{-l}\,d(t^2+a^2) = -\frac{1}{(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}} + C.$$

Для вычисления интеграла $I_l = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l}$, получим *рекуррентную формулу*, сводящую вопрос о вычислении I_l к вычислению I_{l-1} $(l \geqslant 2)$:

$$I_l = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^l} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a^2}{(t^2+a^2)^l}\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^l}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2dt}{(t^2+a^2)^l}\,dt =$$

$$= \frac{1}{a^2}\,I_{l-1} - \frac{1}{a^2}\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^l}\,dt. \quad (8.10)$$

Последний интеграл преобразуем, применив формулу интегрирования по частям, полагая $u = t$ и $dv = \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^l}$. Тогда

$$du = dt, \qquad v = \frac{-1}{(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^l}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{td(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^l}\,dt =$$

$$= -\frac{t}{2(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{1}{2(l-1)}\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{l-1}} =$$

$$= -\frac{t}{2(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{1}{2(l-1)}\,I_{l-1}.$$

Подставив это выражение в (8.10), получим

$$I_l = \frac{1}{a^2}\,I_{l-1} - \frac{1}{a^2}\Big(-\frac{t}{2(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}} + \frac{1}{2(l-1)}\,I_{l-1}\Big),$$

или

$$I_l = \frac{1}{a^2}\Big(\frac{2l-3}{2l-2}\,I_{l-1} + \frac{t}{2(l-1)(t^2+a^2)^{l-1}}\Big). \quad (8.11)$$

Последняя формула позволит вычислить интеграл I_l для любого $l = 2, 3, \ldots$, если, конечно, мы сумеем вычислить первый интеграл I_1. Но заметим, что $I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{a} + C$ — табличный интеграл.

Таким образом, мы пришли к следующей важной теореме об интегрировании рациональных дробей.

Теорема 8.14. *Всякая рациональная дробь интегрируется в элементарных функциях.*

Пример 8.13. Вычислить интеграл

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 4}{x^5 - x^4 - x + 1}\, dx.$$

Под знаком интеграла стоит правильная дробь. Разложим на множители знаменатель дроби. Это можно сделать, например, группировкой слагаемых:

$$x^5 - x^4 - x + 1 = (x^5 - x^4) - (x - 1) = x^4(x - 1) - (x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x^4 - 1) = (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 1).$$

Разложим подынтегральную рациональную дробь на простейшие дроби:

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 4}{x^5 - x^4 - x + 1} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} + \frac{Dx+E}{x^2+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим

$$2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 4 \equiv A(x+1)(x^2+1) + B(x^4-1) +$$
$$+ C(x-1)^2(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)(x-1)^2 =$$
$$= (B + C + D)x^4 + (A - 2C - D + E)x^3 +$$
$$+ (A + 2C - D - E)x^2 + (A - 2C + D - E)x + (A - B + C + E).$$

Из последнего тождества получим

$$\begin{cases} B + C + D = 2, \\ A - 2C - D + E = -4, \\ A + 2C - D - E = 2, \\ A - 2C + D - E = -4, \\ A - B + C + E = -4. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$A = -2, \quad B = 2, \quad C = 1, \quad D = -1, \quad E = -1.$$

Итак, мы имеем

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 4}{x^5 - x^4 - x + 1} = \frac{-2}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} + \frac{-x-1}{x^2+1}.$$

Значит,

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x - 4}{x^5 - x^4 - x + 1}\, dx =$$

$$= -2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{2}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + C =$$

$$= \frac{2}{x-1} + \ln\frac{(x-1)^2|x+1|}{\sqrt{x^2+1}} - \operatorname{arctg} x + C.$$

§ 8.9. Универсальная тригонометрическая подстановка

Некоторые типы неопределенных интегралов сводятся путем соответствующей замены к интегралам от рациональных функций.

Введем понятия многочлена и рациональной функции двух переменных.

Определение 8.6. Выражение вида

$$Ax^n y^m,$$

где $A = \text{const}$, а n и m — целые неотрицательные числа, называется *одночленом от двух переменных* x *и* y. Число $n+m$ называется *степенью* этого одночлена.

Многочленом от двух переменных x *и* y называется сумма конечного числа одночленов от этих двух переменных. Максимальная степень одночленов, входящих в многочлен, называется *степенью* этого многочлена.

Заметим, что общий вид многочлена от двух переменных x и y следующий:

$$P_n(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots + a_{0n}y^n,$$

где a_{00}, a_{10}, $a_{01}, \ldots, a_{0n}$ — некоторые постоянные числа.

Определение 8.7. Отношение

$$R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)},$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены от двух переменных x и y, называется *рациональной функцией от двух переменных* x *и* y.

Например,

$$R(x,y)=\frac{2x-5y}{x^2y+3xy+y-1}$$

— рациональная функция от двух переменных x и y.

Если $R(x,y)$ — рациональная функция, то выражение

$$R(\sin x,\cos x)$$

означает, что в функции $R(x,y)$ вместо x подставлено $\sin x$, а вместо y подставлено $\cos x$.

Итак, пусть $R(x,y)$ — рациональная функция. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx. \tag{8.12}$$

Докажем, что этот интеграл можно свести к интегралу от рациональной функции от одной переменной с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Действительно, так как

$$\begin{gathered}\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\\ x=2\operatorname{arctg}t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2},\end{gathered} \tag{8.13}$$

то с помощью этих формул исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R\Big(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2\,dt}{1+t^2}=\int R_1(t)\,dt,$$

где

$$R_1(t)=R\Big(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\Big)\frac{2}{1+t^2}$$

является рациональной функцией уже одной переменной t.

Подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ хотя и является универсальной подстановкой, но часто приводит к громоздким выкладкам. В связи с этим укажем несколько частных случаев, в которых интеграл (8.12) рационализируется с помощью других, более простых подстановок.

1. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т. е. $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\cos x = t$ рационализирует интеграл (8.12).

2. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е. $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то подстановка $\sin x = t$ рационализирует интеграл (8.12).

3. Если функция $R(\sin x, \cos x)$ четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, т. е. $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то интеграл (8.12) рационализируется подстановкой $\operatorname{tg} x = t$. (Такая же подстановка применяется, если подынтегральная функция имеет вид $R(\operatorname{tg} x)$.)

Пример 8.14. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 1}.$$

Применим универсальную замену $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Учитывая формулы (8.13), получим

$$\int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 1} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} + 1} =$$

$$= -2\int \frac{dt}{t^2 - 2t - 3} = -2\int \frac{dt}{(t-1)^2 - 4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\frac{t-1-2}{t-1+2} + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}\right| + C.$$

Пример 8.15. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{3 + \cos^2 x}.$$

Так как подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, то полагаем $\operatorname{tg} x = t$ (случай 3). Тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dx}{3+\cos^2 x} = \int \frac{dt}{3t^2+4} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\,t}{2} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} x}{2} + C.$$

§ 8.10. Вычисление интегралов типа $\int \sin^m x \cos^n x\,dx$

Для вычисления интеграла типа

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx, \tag{8.14}$$

где m и n — целые числа, рассмотрим следующие четыре случая.

Случай 1. Пусть n — нечетное положительное число: $n = 2k+1$. Тогда подстановкой $\sin x = t$ интеграл (8.14) сводится к интегралу от некоторой рациональной функции переменной t. Действительно,

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx = \int \sin^m x \cos^{2k+1} x\,dx =$$

$$= \int \sin^m x (\cos^2 x)^k \cos x\,dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k\,d\sin x =$$

$$= \int t^m (1-t^2)^k\,dt = \int R(t)\,dt,$$

где $R(t) = t^m(1-t^2)^k$.

Пример 8.16. Вычислить интеграл

$$\int \cos^3 x\,dx.$$

Обозначим $\sin x = t$. Тогда

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos^2 x \cos x\,dx = \int (1-\sin^2 x)\,d\sin x =$$

$$= \int (1-t^2)\,dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Случай 2. Пусть m — нечетное число: $m = 2k + 1$. Тогда интеграл (8.14) рационализируется подстановкой $\cos x = t$:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^n x\, dx =$$

$$= \int (\sin^2 x)^k \cos^m x \sin x\, dx = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^m x\, d\cos x =$$

$$= -\int (1 - t^2)^k t^m\, dt = \int R(t)\, dt,$$

где $R(t) = -(1 - t^2)^k t^m$.

Случай 3. Пусть m и n — четные неотрицательные числа: $m = 2k$, $n = 2l$. Применяя формулы понижения порядка

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

получим

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2^{k+l}} \int (1 - \cos 2x)^k (1 + \cos 2x)^l\, dx.$$

Возведя в соответствующие степени и раскрывая скобки в подынтегральном выражении, получим слагаемые с четными или нечетными степенями $\cos 2x$. Слагаемые с нечетными степенями интегрируются, как в случае 1, а слагаемые с четными степенями интегрируются с помощью формулы понижения порядка.

Случай 4. Пусть m и n — четные числа и хотя бы одно из них отрицательно. Предположим, что $m = 2k$, $n = -2l$ $(l > 0)$. Тогда следует подставить $\operatorname{tg} x = t$:

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = \int \frac{\sin^{2k} x}{\cos^{2l} x}\, dx = \int \frac{\operatorname{tg}^{2k} x}{\cos^{2(l-k-1)} x} \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= \int \operatorname{tg}^{2k} x\, (1 + \operatorname{tg}^2 x)^{l-k-1}\, d\operatorname{tg} x = \int t^{2k} (1 + t^2)^{l-k-1}\, dt = \int R(t)\, dt,$$

где $R(t) = t^{2k}(1 + t^2)^{l-k-1}$.

Возведя в соответствующие степени и раскрывая скобки в подынтегральном выражении, получим слагаемые с четными или нечетными степенями $\cos 2x$. Слагаемые с нечетными степенями интегрируются, как в случае 1, а слагаемые с четными степенями интегрируются с помощью формулы понижения порядка.

§ 8.11. Интегрирование выражений с помощью тригонометрических преобразований

Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx \, dx, \qquad \int \cos ax \cos bx \, dx, \qquad \int \sin ax \sin bx \, dx$$

вычисляются с помощью известных тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)],$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

Пример 8.17. Вычислить интеграл

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx.$$

Применим первую из приведенных выше формул:

$$\int \sin 3x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin x + \sin 5x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\cos x - \frac{1}{5}\cos 5x\right) + C.$$

§ 8.12. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \tag{8.15}$$

где a, b, c, и d — некоторые постоянные, а n — натуральное число.

Подынтегральное выражение называется *дробно-линейной иррациональностью.*

Докажем, что интеграл (8.15) при $ad-bc\neq 0$ рационализируется подстановкой

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\,.$$

В самом деле, тогда

$$t^n=\frac{ax+b}{cx+d},\quad x=\frac{d\,t^n-b}{a-c\,t^n},\quad dx=\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$\int R\biggl(x,\,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\biggr)dx=$$

$$=\int R\Bigl(\frac{d\,t^n-b}{a-c\,t^n},\,t\Bigr)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt=\int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)=R\Bigl(\dfrac{d\,t^n-b}{a-c\,t^n},\,t\Bigr)\dfrac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}$ — рациональная функция переменной t.

П р и м е р 8.18. Вычислить интеграл

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}.$$

Подставим $t=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. Тогда

$$t^2=\frac{1+x}{1-x},\quad x=\frac{t^2-1}{t^2+1},\quad dx=\frac{4t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Теперь вычислим данный интеграл:

$$\int\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{dx}{1-x}=2\int\frac{t^2\,dt}{t^2+1}=2\int\frac{(t^2+1-1)\,dt}{t^2+1}=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t^2+1}=2t-2\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}+C.$$

Рассмотрим теперь интеграл вида

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \ldots,\ \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx\ , \tag{8.16}$$

где a, b, c, и d — действительные числа, $ac - bd \neq 0$, а $n \geqslant 2$, $m \geqslant 2$ — натуральные числа.

Как и в случае интеграла (8.15), нетрудно доказать, что интеграл (8.16) сводится к интегралу от рациональной функции переменной t с помощью подстановки

$$\sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

где k — наименьшее общее кратное чисел $n, \ldots, m$ (обозначение: $k = \text{НОК}\{n, \ldots, m\}$).

§ 8.13. Интегрирование биномиальных дифференциалов

Биномиальными дифференциалами называются выражения вида

$$x^m(a + bx^n)^p\, dx,$$

где a и b — постоянные числа, а m, n и p — некоторые рациональные числа.

Теорема 8.15 (Чебышев). *Интегралы*

$$\int x^m(a + bx^n)^p\, dx \tag{8.17}$$

от биномиальных дифференциалов выражаются через элементарные функции лишь в трех случаях:

1) *когда число* p *целое*;

2) *когда число* $\dfrac{m+1}{n}$ *целое*;

3) *когда число* $\dfrac{m+1}{n} + p$ *целое.*

Причем:

в случае 1) *интеграл* (8.17) *рационализируется подстановкой* $x = t^k$, *где* k — *наименьшее общее кратное знаменателей дробей* m *и* n;

в случае 2) *интеграл* (8.17) *рационализируется подстановкой* $a + bx^n = t^s$, *где* s — *знаменатель дроби* p;

в случае 3) *интеграл* (8.17) *рационализируется подстановкой* $a + bx^n = x^n t^s$, *где* s — *знаменатель дроби* p.

Пример 8.19. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Заметим, что

$$m = -\frac{1}{2}, \quad n = \frac{1}{4}, \quad p = \frac{1}{3}, \quad \frac{m+1}{n} = 2.$$

Итак, имеет место случай 2) последней теоремы. Следовательно, необходимо подставить $1 + \sqrt[4]{x} = t^3$. Тогда

$$t = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\,, \quad x = (t^3-1)^4, \quad dx = 12(t^3-1)^3 t^2\,dt.$$

Теперь вычислим

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{t\cdot 12(t^3-1)^3 t^2}{(t^3-1)^2}\,dt = 12\int (t^6 - t^3)\,dt =$$

$$= 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{12}{7}\,(1+\sqrt[4]{x}\,)^{7/3} - 3(1+\sqrt[4]{x}\,)^{4/3} + C.$$

§ 8.14. Интегрирование квадратичных иррациональностей

Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}\,)\,dx, \tag{8.18}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}\,)\,dx, \tag{8.19}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}\,)\,dx, \tag{8.20}$$

где a — некоторое постоянное число.

Эти интегралы рационализируются с помощью подстановок:

$x = a\sin t$ для интеграла (8.18);

$x = a\,\mathrm{tg}\,t$ для интеграла (8.19);

$x = \dfrac{a}{\sin t}$ для интеграла (8.20).

Пример 8.20. Вычислить интеграл

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx.$$

Положим $x = 3\sin t$. Тогда $dx = 3\cos t\,dt$, $t = \arcsin\frac{x}{3}$. Итак,

$$\int \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{9-9\sin^2 t}}{9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}\,dt =$$

$$= \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}\,dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} - \int dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C,$$

поскольку $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}{\frac{x}{3}} = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x}$.

Функция вида $R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)$, где a, b и c — некоторые постоянные, называется *квадратичной иррациональностью*.

Для вычисления интеграла

$$\int R\big(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\big)\,dx \tag{8.21}$$

от квадратичной иррациональности выделим полный квадрат под радикалом:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right]},$$

и обозначим $x + \dfrac{b}{2a} = t$. Теперь нетрудно заметить, что в зависимости от знаков чисел a и $\left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b^2}{4a^2}\right)$, интеграл (8.21) сводится к одному из интегралов (8.18)–(8.20).

Глава 9

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 9.1. Понятие определенного интеграла

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных *частичных отрезков* точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (рис. 9.1).

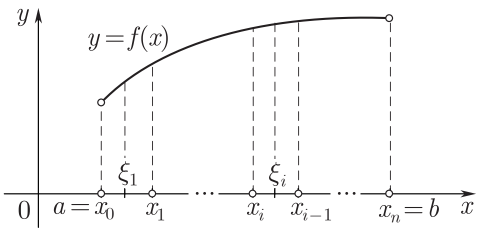


Рис. 9.1

Точки x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, назовем *точками разбиения* отрезка $[a, b]$. Выберем в каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, произвольную точку ξ_i и составим сумму

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{9.1}$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

Сумма (9.1) называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Обозначим через λ длину максимального частичного отрезка данного разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Определение 9.1. Если существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \tag{9.2}$$

независимо от способа разбиения отрезка $[a, b]$ и выбора точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, то он называется *определенным интегралом функции* $y = f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{9.3}$$

Если определенный интеграл (9.3) существует, то функция называется *интегрируемой на отрезке* $[a, b]$. Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*, $f(x)\,dx$ — *подынтегральным выражением*.

П р и м е р 9.1. Доказать, что функция $f(x) = C = \text{const}$ интегрируема на любом отрезке $[a, b]$, причем

$$\int\limits_a^b C\,dx = C(b - a). \tag{9.4}$$

В самом деле, так как $f(\xi_i) = C$ для всех $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, то

$$\int\limits_a^b C\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = C(b - a).$$

Из формулы (9.4), в частности, следует

$$\int\limits_a^b dx = b - a. \tag{9.5}$$

§ 9.2. Необходимое условие интегрируемости. Классы интегрируемых функций

Т е о р е м а 9.1 (необходимое условие интегрируемости функции). *Интегрируемая на отрезке* $[a, b]$ *функция ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Предположим обратное: пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, но не ограничена на этом отрезке.

Рассмотрим интегральную сумму (9.1). Из неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ следует, что она не ограничена на одном из частичных отрезков, пусть на $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. Зафиксируем $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ для всех $i \neq i_0$, а $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ будем считать переменной. В интегральной сумме (9.1) слагаемое $f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}$ не ограничено на частичном отрезке $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, а сумма остальных слагаемых есть определенное число. Но тогда модуль этой интегральной суммы $|S_n|$ можно сделать сколь угодно большим за счет соответствующего подбора точки $\xi_{i_0} \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$. А из этого следует, что не существует конечного предела (9.2), т. е. функция $f(x)$ не интегрируема. Полученное противоречие и доказывает нашу теорему.

Замечание 9.1. Ограниченность функции не является достаточным условием ее интегрируемости.

Например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \\ 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \end{cases}$$

ограничена, но не интегрируема ни на каком отрезке $[a,b]$.

Действительно, при любом разбиении отрезка $[a,b]$ на частичные отрезки, взяв в качестве промежуточных точек ξ_i иррациональные числа, получим интегральную сумму (9.1), равную нулю: $S_n = 0$. А если в качестве промежуточных точек ξ_i взять рациональные числа, то интегральная сумма (9.1) будет равна сумме длин всех частичных отрезков, т. е. $b - a$.

Это показывает, что интегральная сумма S_n функции Дирихле не может иметь предела при $\lambda \to 0$, не зависящего от выбора точек ξ_i. Следовательно, функция Дирихле не интегрируема на $[a,b]$.

Следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки нашего курса, выделяет основные классы интегрируемых функций.

Теорема 9.2. *Пусть выполняется одно из следующих условий*:

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,b]$;

2) *функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a,b]$ *и имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва*;

3) *функция* $f(x)$ *монотонна на отрезке* $[a,b]$.

Тогда функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,b]$, *т. е. существует определенный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

§ 9.3. Геометрический смысл определенного интеграла

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x) \geqslant 0$.

Фигура, ограниченная графиком функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$, $(a<b)$, называется *криволинейной*

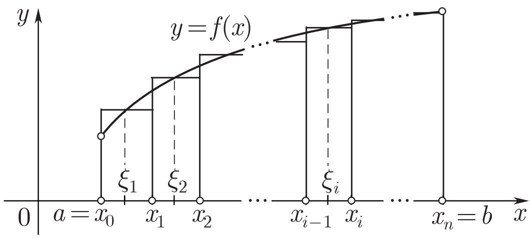


Рис. 9.2

трапецией (рис. 9.2). Наша задача — найти площадь этой криволинейной трапеции.

Для этого отрезок $[a,b]$ разобьем на n частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

В каждом частичном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ возьмем произвольную точку ξ_i и рассмотрим произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ — длина частичного отрезка $[x_{i-1}, x_i]$. Это произведение есть площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$. Теперь заметим, что площадь ступенчатой фигуры, состоящей из прямоугольников с основанием Δx_i и высотой $f(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, n$, вычисляется по формуле

$$S_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Ясно, что при достаточно малых Δx_i эта ступенчатая фигура будет мало отличаться от исходной криволинейной трапеции. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции естественно принять предел:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} S_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

где $\lambda = \max \Delta x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Однако в силу определения 9.1 последний предел есть $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Итак, *определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции*:

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

В этом и заключается *геометрический смысл* определенного интеграла.

§ 9.4. Основные свойства определенного интеграла

1°. *Если функция* $f(x)$ *определена в точке* $x = a$, *то*

$$\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0.$$

2°. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx.$$

Эти два свойства следует принимать по определению. Первое из них нужно рассматривать как естественное распространение определенного интеграла на отрезок нулевой длины, а второе — как обобщение определенного интеграла на случай, когда отрезок $[a, b]$ пробегается от b к a.

3°. *Если C — постоянное число, а функция $f(x)$ интегрируема на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = C\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Действительно, для произвольного разбиения отрезка $[a, b]$ имеем

$$\int\limits_a^b Cf(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\Delta x_i = \\ = C\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Последнее свойство утверждает, что *постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла.*

4°. *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то сумма $f(x) + g(x)$ также интегрируема на этом отрезке, причем справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В самом деле,

$$\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(f(\xi_i) \pm g(\xi_i))\Delta x_i = \\ = \lim_{\lambda\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i\right) = \\ = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \pm \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

5°. *Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ и $a < c < b$, то $f(x)$ интегрируема также на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, причем справедливо равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx. \tag{9.6}$$

Верно и обратное: *если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$, то $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$, причем справедливо равенство* (9.6).

Это свойство верно при любом расположении точек a, b и c. Оно называется *адитивностью* определенного интеграла. Примем его без доказательства.

6°. *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$ *и* $f(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in [a, b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Действительно, используя теорему о переходе к пределу в неравенствах (см. следствие 4.2), получим

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \geqslant 0.$$

7°. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a, b]$, *причем* $f(x) \leqslant g(x)$ *для всех* $x \in [a, b]$. *Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

В самом деле, $\varphi(x) = g(x) - f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in [a, b]$. В силу предыдущего свойства

$$\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx = \int\limits_a^b (g(x) - f(x))\,dx \geqslant 0.$$

Отсюда получаем требуемое неравенство.

8°. *Пусть* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a, b]$. *Тогда* $|f(x)|$ *также интегрируем на* $[a, b]$, *причем*

$$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx.$$

Доказательство непосредственно следует из неравенств

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

и предыдущего свойства.

Теорема 9.3 (о среднем для определенного интеграла). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Тогда существует такая точка $c \in [a, b]$, *что*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a). \tag{9.7}$$

Доказательство. Согласно теореме Вейерштрасса 5.3 функция $f(x)$ на $[a, b]$ принимает свои наименьшее и наибольшее значения. Обозначим эти значения через m и M соответственно.

Итак, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, для всех $x \in [a, b]$. Согласно свойству 7° имеем

$$\int_a^b m\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b M\,dx,$$

или, учитывая свойство 3°,

$$m\int_a^b dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M\int_a^b dx.$$

То есть

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Поделив эти неравенства на $b - a > 0$, получим

$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leqslant M.$$

Поскольку число $\dfrac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ лежит между двумя значениями непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, то из теоремы Больцано–Коши 5.4 следует существование такой точки $c \in$ $\in [a, b]$, что

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

Отсюда и получается формула (9.7).

Теорема доказана.

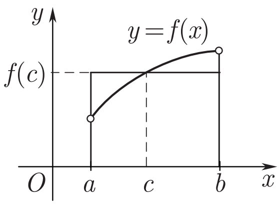


Рис. 9.3

Равенство (9.7) называется *формулой среднего значения*, а величина

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

— *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Формула (9.7) имеет ясный геометрический смысл (рис. 9.3): *при* $f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$, *площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с основанием* $b - a$ *и высотой* $f(c)$, *где* c — *некоторая точка отрезка* $[a, b]$.

§ 9.5. Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольного $x \in [a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема также на отрезке $[a, x]$.

Это утверждение требует доказательства, однако мы не будем его доказывать, отметив лишь, что в конкретных случаях это утверждение очевидно. Например, когда функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, она непрерывна и, следовательно, интегрируема на отрезке $[a, x]$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{9.8}$$

которая определена на отрезке $[a, b]$. Эта функция называется *интегралом с переменным верхним пределом.*

Теорема 9.4. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$.

Тогда функция $\Phi(x)$, *определенная формулой* (9.8), *является первообразной функции* $f(x)$, *т. е.* $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. По определению производной

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$

Применяя свойство 5° определенного интеграла и учитывая определение функции $\Phi(x)$ (см. (9.8)), получим

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=$$

$$=\int\limits_a^x f(t)\,dt+\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt-\int\limits_a^x f(t)\,dt=\int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

По формуле (9.7) среднего значения находим

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(c)\Delta x,$$

где $c\in[x,\,x+\Delta x]$. Очевидно, что $c\to x$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, в силу непрерывности $f(x)$ имеем $f(c)\to f(x)$ при $\Delta x\to 0$.

Теперь вычислим

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(c)=f(x).$$

Теорема доказана.

Теорема 9.5. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а $F(x)$ — некоторая первообразная этой функции. Тогда справедлива следующая формула Ньютона–Лейбница:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a). \tag{9.9}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. В силу предыдущей теоремы функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ также является первообразной функции $f(x)$. Поскольку любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга постоянным числом, то

$$\Phi(x)=F(x)+C,$$

т. е.

$$\int\limits_a^x f(t)\,dt=F(x)+C. \tag{9.10}$$

Полагая в последнем равенстве $x = a$, получим $0 = F(a) + C$, т. е. $C = -F(a)$.

Подставляя найденное значение $C = -F(a)$ в (9.10), получим

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a),$$

откуда при $x = b$ вытекает формула

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a),$$

которая совпадает с формулой (9.9).

Теорема доказана.

Формулу (9.9) записывают также в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Пример 9.2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

Получаем

$$\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

§ 9.6. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 9.6. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, причем множество значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ совпадает с отрезком $[a, b]$ и $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$.*

Тогда справедлива следующая формула замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad (9.11)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — некоторая первообразная функции $f(x)$. По формуле Ньютона–Лейбница (9.9) имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{9.12}$$

Функция $F(\varphi(t))$ является первообразной для подынтегральной функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ правого интеграла формулы (9.11), поскольку

$$\frac{d}{dt}\,[F(\varphi(t))] = \frac{dF(x)}{dx}\,\frac{dx}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Следовательно, по формуле Ньютона–Лейбница (9.9) находим

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a). \tag{9.13}$$

Из равенств (9.12) и (9.13) следует формула (9.11).

Теорема доказана.

Замечание 9.2. Заметим, что доказанная формула (9.11), в отличие от формулы замены переменной в неопределенном интеграле, дает нам возможность после перехода к интегралу от функции новой переменной не возвращаться к исходному интегралу от функции старой переменной.

Пример 9.3. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx.$

Произведем замену переменной $\sin x = t$. Тогда $\cos x\,dx = dt$. Кроме того, при $x = 0$ имеем $t = 0$, а при $x = \dfrac{\pi}{2}$ имеем $t = 1$. Следовательно, по формуле (9.11) получим

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

§ 9.7. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 9.7. *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a, b]$.*

Тогда справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx.$$

Так как $v'(x)\,dx = dv$ и $u'(x)\,dx = du$, то эту формулу обычно записывают следующим образом:

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du. \tag{9.14}$$

Доказательство. Так как функция $u(x)v(x)$ является первообразной для функции $(u(x)v(x))' = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$, то по формуле Ньютона–Лейбница (9.9) получим

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + v(x)u'(x)]\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

или

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

что можно записать в виде (9.14).

Теорема доказана.

Формула (9.14) называется *формулой интегрирования по частям в определенном интеграле*.

Пример 9.4. Вычислить интеграл $\int_1^2 xe^x\,dx$.

Положим $u = x$, $dv = e^x dx = de^x$. Значит, $v = e^x$. Итак, используя формулу (9.14), получим

$$\int_1^2 xe^x\,dx = \int_1^2 x\,de^x = xe^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x\,dx =$$

$$= xe^x\Big|_1^2 - e^x\Big|_1^2 = e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2.$$

§ 9.8. Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования (несобственный интеграл первого рода)

Предположим, что функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $b \in [a, +\infty)$.

Определение 9.2. Предел

$$\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx \tag{9.15}$$

называется *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом* или *несобственным интегралом первого рода* функции $f(x)$ на $[a, +\infty)$ и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

Итак, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{9.16}$$

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называется *сходящимся*, если существует предел (9.15). Если же предел (9.15) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ называется *расходящимся*.

Если функция $f(x)$ задана на бесконечном интервале $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом конечном отрезке $[a, b]$, где $a \in (-\infty, b]$, то аналогичным образом определяется *несобственный интеграл с бесконечным нижним пределом*:

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx. \tag{9.17}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$ и интегрируема на любом отрезке $[a, b]$. Тогда *несобственный интеграл с бесконечными верхним и нижним* *пределами* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \int\limits_{a}^{b} f(x)\ dx. \tag{9.18}$$

Несобственные интегралы $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ называются *сходящимися*, если существуют пределы (9.17) и (9.18). Если же эти пределы не существуют или равны бесконечности, то указанные несобственные интегралы называются *расходящимися*.

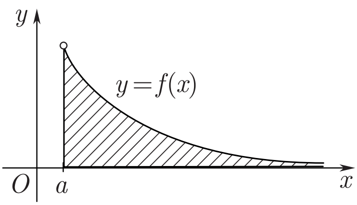


Рис. 9.4

Отметим, что если $f(x)$ — непрерывная неотрицательная ($f(x) \geqslant 0$) функция на бесконечном интервале $[a, +\infty)$ и несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то он выражает площадь *бесконечной криволинейной трапеции*, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $y = 0$ (рис. 9.4).

П р и м е р 9.5. Вычислить несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

Имеем

$$\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} e^{-x}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$$

П р и м е р 9.6. Показать, что расходится несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx$.

Проведем вычисления:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{0} \cos x\,dx = \lim_{a\to-\infty} \sin x\Big|_a^0 =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (0 - \sin a) = \lim_{a\to-\infty} \sin a.$$

А поскольку предел $\lim\limits_{a\to-\infty} \sin a$ не существует, значит, рассматриваемый несобственный интеграл расходится.

Следующая теорема дает важные примеры сходящихся и расходящихся несобственных интегралов.

Теорема 9.8. *Пусть $a > 0$ и α_0 — произвольное действительное число. Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ сходится при любом $\alpha > 1$ и расходится при любом $\alpha \leqslant 1$.*

Доказательство. Действительно,

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^{b} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \lim\limits_{b\to+\infty} \left.\dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_a^b & \text{при } \alpha \neq 1, \\ \lim\limits_{b\to+\infty} \ln x\Big|_a^b & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Получаем

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \dfrac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ \infty & \text{при } \alpha \leqslant 1, \end{cases}$$

откуда и следует утверждение теоремы.

§ 9.9. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Теоремы сравнения

Для установления сходимости или расходимости несобственных интегралов от неотрицательных функций важную роль играют так называемые теоремы сравнения.

Теорема 9.9 (первая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на бесконечном интервале $[a, +\infty)$, причем для всех $x \in [a, +\infty)$ выполняются неравенства*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x). \tag{9.19}$$

Тогда:

а) *из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$;*

б) *из расходимости интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *следует расходимость интеграла* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Доказательство. а) Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Рассмотрим функцию

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Поскольку $f(x) \geqslant 0$, то функция $\Phi(b)$ не убывает. Действительно, если $b_2 \geqslant b_1 \geqslant a$, то

$$\Phi(b_2) = \int\limits_a^{b_2} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx + \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \Phi(b_1).$$

Точно так же можно показать, что не убывает и функция

$$\Psi(b) = \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

для произвольного $b \in [a, +\infty)$.

Теперь покажем, что функция $\Phi(b)$ ограничена на $[a, +\infty)$. В самом деле,

$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = \text{const}.$$

Итак, функция $\Phi(b)$ не убывает и ограничена на $[a, +\infty)$, следовательно, в силу теоремы 4.5 существует предел

$$\lim_{b \to +\infty} \Phi(b) = \lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

А это, по определению, означает, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

б) Пусть несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Докажем, что тогда несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ тоже расходится. Предположим обратное: пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Но тогда по доказанному утверждению а) несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, вопреки предположению, тоже сходится. Значит, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расходится.

Теорема доказана.

Замечание 9.3. В последней теореме условие неотрицательности функций $f(x)$ и $g(x)$ является существенным.

Например, если взять $f(x) = -1$, $g(x) = 0$ для всех $x \in$ $\in [0, +\infty)$, то нетрудно заметить, что утверждения последней теоремы неверны.

Пример 9.7. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

Рассмотрим функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$. Очевидно, что

$$0 < f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = g(x).$$

В силу теоремы 9.8 несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\,dx =$ $= \int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\,dx$ сходится, значит, сходится и несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ (см. утверждение а) теоремы 9.9).

Теорема 9.10 (вторая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и положительны на бесконечном интервале $[a, +\infty)$, и пусть существует конечный положительный предел*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < +\infty). \tag{9.20}$$

Тогда несобственные интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Доказательство. По определению предела функции из (9.20) следует, что для $\varepsilon = \dfrac{A}{2} > 0$ существует такое число $M > a$, что при всех $x \geqslant M$ имеет место

$$-\frac{A}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - A < \frac{A}{2}.$$

Из этого неравенства получаем

$$0 < \frac{A}{2}\,g(x) < f(x) < \frac{3A}{2}\,g(x). \tag{9.21}$$

Пусть теперь несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится. Тогда интеграл

$$\int\limits_M^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx - \int\limits_a^{M} f(x)\,dx$$

тоже сходится. Следовательно, в силу теоремы 9.9 с учетом левой части неравенства (9.21) сходится интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{A}{2}\,g(x)\,dx = \frac{A}{2}\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx,$$

а с ним сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Аналогично доказывается, что из расходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ следует расходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ (отметим, что в этом случае необходимо использовать правую часть неравенства (9.21)).

Теорема доказана.

Замечание 9.4. Аналогичные теоремы сравнения справедливы и для несобственных интегралов с бесконечным нижним пределом, а также для несобственных интегралов с бесконечными нижним и верхним пределами.

Пример 9.8. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x^3}\,dx$.

Так как интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sin\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\,\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = 1,$$

то по теореме сравнения 9.10 сходится также несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} x\sin\frac{1}{x^3}\,dx$.

§ 9.10. Абсолютно и условно сходящиеся несобственные интегралы

Пусть функция $f(x)$ на бесконечном интервале $[a,+\infty)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Определение 9.3. Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx \tag{9.22}$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx. \tag{9.23}$$

Если несобственный интеграл (9.22) сходится, а несобственный интеграл (9.23) расходится, то интеграл (9.22) называется *условно сходящимся.*

Теорема 9.11. *Абсолютно сходящийся интеграл сходится.*

Доказательство. Пусть несобственный интеграл (9.22) сходится абсолютно, т. е. сходится интеграл (9.23). Докажем, что тогда сходится интеграл (9.22).

Рассмотрим очевидное двойное неравенство

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|,$$

откуда получим

$$0 \leqslant f(x) + |f(x)| \leqslant 2\,|f(x)|. \tag{9.24}$$

Несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} 2\,|f(x)|\,dx = 2\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

сходится, так как сходится интеграл (9.23). Следовательно, в силу теоремы сравнения 9.9 с учетом правой части неравенства (9.24) несобственный интеграл

$$\int\limits_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx$$

также сходится.

Теперь заметим, что

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)| - |f(x)|)\,dx = \\ = \int\limits_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx - \int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Из этого следует, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится как разность двух сходящихся интегралов.

Теорема доказана.

Пример 9.9. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$.

Поскольку $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leqslant \frac{1}{x^3}$ для всех $x \in [1, +\infty)$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$ сходится (см. теорему 9.8), то в силу теоремы 9.9 несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$ тоже сходится, т. е. интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ является абсолютно сходящимся. А из этого, по теореме 9.11, следует, что несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^3}\,dx$ сходится.

§ 9.11. Несобственный интеграл от неограниченной функции (несобственный интеграл второго рода)

Пусть функция $f(x)$ определена на полуинтервале $[a, b)$, интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $b-\varepsilon \in [a, b)$, и имеет бесконечный разрыв в точке $x = b$, т. е. точка $x = b$ является *особой* для функции $f(x)$ (рис. 9.5).

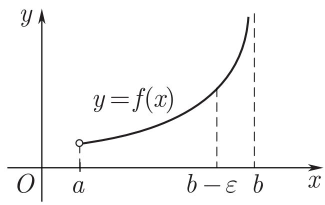


Рис. 9.5

Определение 9.4. Предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx \qquad (9.25)$$

называется *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ (*с особой точкой* $x = b$) *на* $[a, b)$ или *несобственным интегралом второго рода*.

Для несобственного интеграла второго рода применяется обычное обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Итак, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \qquad (9.26)$$

Определение 9.5. Несобственный интеграл второго рода $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *сходящимся*, если существует предел (9.25). Если же предел (9.25) не существует или равен бесконечности, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется *расходящимся*.

Аналогично определяется *несобственный интеграл от*

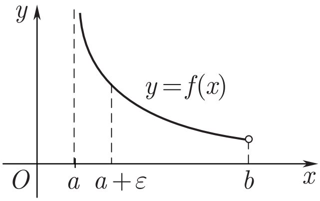


Рис. 9.6

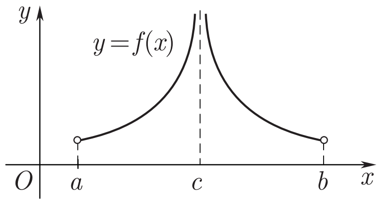


Рис. 9.7

функции $f(x)$ *с особой точкой* $x = a$ (рис. 9.6) *на полуинтервале* $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx. \tag{9.27}$$

Если функция $f(x)$ имеет особую точку $x = c$ внутри отрезка $[a, b]$ (рис. 9.7), то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

В этом случае интеграл слева называется *сходящимся*, если оба интеграла справа сходятся.

Важные примеры сходящихся и расходящихся интегралов второго рода содержатся в следующей теореме.

Теорема 9.12. *Несобственный интеграл второго рода*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} \quad (a < b, \quad p > 0):$$

а) *сходится при* $0 < p < 1$; б) *расходится при* $p \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $0 < p < 1$. Тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{(x-a)^{-p+1}}{-p+1}\bigg|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = \frac{(b-a)^{1-p}}{1-p}.$$

Следовательно, утверждение а) доказано.

Если $p > 1$, то как и выше,

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{(b-a)^{1-p}}{1-p} - \frac{\varepsilon^{1-p}}{1-p}\right) = +\infty,$$

что означает расходимость данного интеграла.

Наконец, пусть $p = 1$. Тогда

$$\int_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln(x-a)\Big|_{a+\varepsilon}^b =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln(b-a) - \ln\varepsilon) = +\infty.$$

Следовательно, в этом случае тоже рассматриваемый интеграл расходится.

Теорема доказана.

Сходимость или расходимость несобственных интегралов второго рода от неотрицательных функций часто устанавливается с помощью следующих теорем.

Теорема 9.13 (первая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a, b)$, причем точка $x = b$ является особой точкой для обеих функций $f(x)$ и $g(x)$.*

Если для всех $x \in [a, b)$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant f(x) \leqslant g(x), \tag{9.28}$$

то:

а) *из сходимости несобственного интеграла $\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$;*

б) *из расходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *следует расходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Теорема 9.14 (вторая теорема сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на полуинтервале $[a, b)$, причем точка $x = b$ является особой точкой для обеих функций $f(x)$ и $g(x)$.*

Если существует конечный положительный предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{g(x)} = A \quad (0 < A < +\infty), \tag{9.29}$$

то несобственные интегралы $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *одновременно сходятся или одновременно расходятся.*

Доказательства этих теорем аналогичны доказательствам первой и второй теорем сравнения 9.9 и 9.10 для несобственных интегралов с бесконечным верхним пределом интегрирования.

Пример 9.10. Исследовать на сходимость несобственный интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$.

Функция $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ на отрезке $[0, 1]$ имеет единственную особую точку $x = 0$. Рассмотрим функцию $g(x) = \frac{1}{x}$ и заметим, что интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_\varepsilon^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon = +\infty$$

расходится. И так как

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

то интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sin x}$ в силу последней теоремы также расходится.

§ 9.12. Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах

Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Рассмотрим плоскую фигуру D, ограниченную графиками непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ и прямыми $x=a$ и $x=b$, причем предполагаем, что $0 \leqslant g(x) \leqslant \leqslant f(x)$ для всех $x \in [a,b]$ (рис. 9.8).

Заметим, что площадь S плоской фигуры D равна разности площадей двух криволинейных трапеций, соответствующих

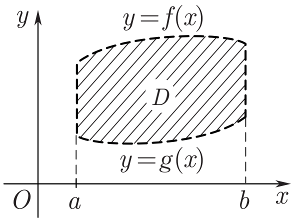


Рис. 9.8

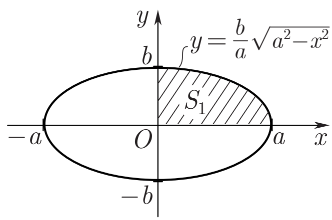


Рис. 9.9

функциям $f(x)$ и $g(x)$. Следовательно, учитывая геометрическую интерпретацию определенного интеграла, получим следующую формулу вычисления площади S плоской фигуры D:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx. \tag{9.30}$$

Пример 9.11. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Заметим, что искомая площадь есть $S = 4S_1$, где S_1 — площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, осью Ox и прямыми $x=0$, $x=a$ (рис. 9.9).

Следовательно, по формуле (9.30) имеем

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx.$$

Для вычисления последнего интеграла сделаем замену переменной $x = a\sin t$. Тогда $dx = a\cos t\,dt$ и $t = 0$ при $x = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ при $x = a$.

Теперь вычислим искомую площадь:

$$S = 4\int\limits_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{4b}{a}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt =$$

$$= 2ab\int\limits_0^{\pi/2}(1 + \cos 2t)\,dt = 2ab\Big(t + \frac{\sin 2t}{2}\Big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

Итак, *площадь, ограниченная эллипсом с полуосями a и b, равна $S = \pi ab$.* Положив в этой формуле $a = b = R$, получим площадь $S = \pi R^2$ круга с радиусом R: $x^2 + y^2 = R^2$.

Пример 9.12. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

Графики функций $f(x) = \sqrt{x}$ и $g(x) = x^2$ пересекаются в точках $(0,0)$ и $(1,1)$, а на отрезке $[0,1]$ имеет место неравенство $g(x) \leqslant f(x)$. По формуле (9.30) имеем

$$S = \int\limits_0^1(\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

§ 9.13. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах

Понятие полярной системы координат было введено нами в § 7.3. Напомним, что декартовы координаты (x,y) и полярные координаты (r,φ) связаны формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{9.31}$$

Пусть кривая L в полярной системе координат задана уравнением

$$r = r(\varphi), \qquad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

Фигуру D, ограниченную кривой L и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, назовем *криволинейным сектором* (рис. 9.10).

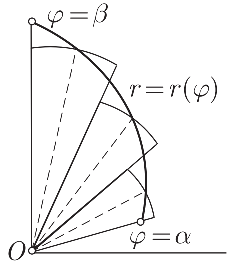


Рис. 9.10

Теорема 9.15. *Пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[\alpha, \beta]$.*

Тогда площадь S криволинейного сектора D, ограниченного кривой L и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, вычисляется формулой

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi. \tag{9.32}$$

Доказательство. Отрезок $[\alpha, \beta]$ разобьем на части точками

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$$

и выберем на каждом отрезке $[\varphi_{k-1}, \varphi_k]$ некоторую точку ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Лучами

$$\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi = \varphi_n$$

данный криволинейный сектор разбивается на n частичных секторов. Площадь каждого частичного сектора заменим на площадь кругового сектора, ограниченного теми же лучами и с радиусом $r(\xi_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, которая вычисляется по формуле

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}\,r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k,$$

где $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Составим сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\,r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k.$$

Естественно считать, по определению,

$$S = \lim_{\lambda\to 0} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} r^2(\xi_k) \Delta\varphi_k = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi,$$

где

$$\lambda = \max \Delta\varphi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема доказана.

Замечание 9.5. Пусть плоская фигура D ограничена кривыми

$$r = r_1(\varphi), \quad r = r_2(\varphi) \qquad (0 \leqslant r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi))$$

и лучами

$$\varphi = \alpha, \quad \varphi = \beta \qquad (\alpha < \beta).$$

Тогда площадь S этой фигуры вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [r_2^2(\varphi) - r_1^2(\varphi)]\, d\varphi. \tag{9.33}$$

Пример 9.13. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной спиралью Архимеда $r = a\varphi$, где a — некоторое положительное число, и лучами $\varphi = 0$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{2}$ (рис. 9.11).

По формуле (9.32) имеем

$$S = \frac{1}{2} \int_{0}^{3\pi/2} (a\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_{0}^{3\pi/2} \varphi^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2} \left. \frac{\varphi^3}{3} \right|_0^{3\pi/2} = \frac{9a^2\pi^3}{16}.$$

Пример 9.14. Вычислить площадь S фигуры, ограниченной

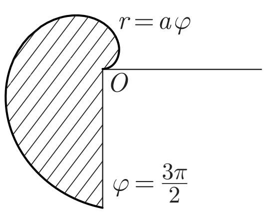


Рис. 9.11

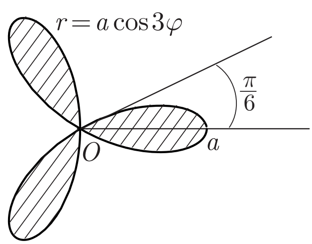


Рис. 9.12

«трехлепестковой розой» $r = a\cos 3\varphi$, где a — некоторое положительное число (рис. 9.12).

Заметим, что $S = 6S_1$, где

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/6} (a\cos 3\varphi)^2\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/6} \frac{1+\cos 6\varphi}{2}\, d\varphi =$$
$$= \frac{a^2}{4}\left(\varphi + \frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Следовательно, $S = \dfrac{\pi a^2}{4}$.

§ 9.14. Вычисление длины дуги кривой

В настоящем параграфе определим понятие длины дуги произвольной кривой и укажем способы ее вычисления.

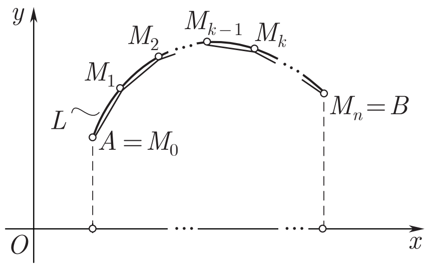


Рис. 9.13

Пусть L — некоторая плоская кривая (рис. 9.13). Разобьем ее на части точками

$$A = M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_n = B,$$

принадлежащими этой кривой. Рассмотрим ломаную $M_0M_1\ldots$ $\ldots M_n$, длину которой обозначим через l_n:

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k.$$

Пусть $\Lambda = \max\{M_0M_1,\ M_1M_2,\ \ldots,\ M_{n-1}M_n\}$.

Определение 9.6. Если существует конечный предел

$$l = \lim_{\Lambda\to 0} l_n = \lim_{\Lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k, \tag{9.34}$$

независимо от способа разбиения кривой на части, то он называется *длиной дуги кривой* L.

Кривая, имеющая длину, называется *спрямляемой*.

Теорема 9.16. *Пусть функция $y = f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$.*

Тогда кривая L, заданная уравнением $y = f(x)$, спрямляема, и ее длина l вычисляется формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx. \tag{9.35}$$

Доказательство. Отрезок $[a, b]$ разобьем на части точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Пусть этим точкам соответствуют точки

$$A = M_0(x_0, y_0), \quad M_1(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad M_n(x_n, y_n) = B,$$

принадлежащие кривой L (рис. 9.14).

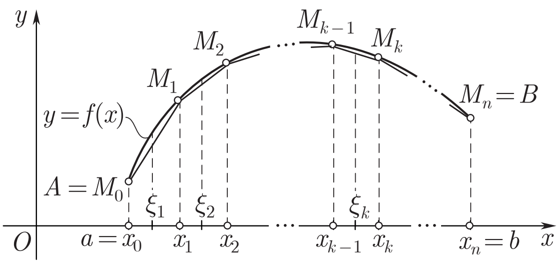


Рис. 9.14

Тогда по данному выше определению длины дуги кривой

$$l = \lim_{\Lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k,$$

где $\Lambda = \max\{M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n\}$. Найдем длину отрезка $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$:

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2}\,.$$

По теореме Лагранжа 6.12 имеем

$$y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $\xi_k \in (x_{k-1}, x_k)$.

Положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Тогда

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + [f'(\xi_k)\Delta x_k]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k.$$

Учитывая, что $\lambda = \max\{\Delta x_k, k = 1, 2, \ldots, n\} \to 0$ при $\Lambda \to 0$ и что функция $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ интегрируема на отрезке $[a, b]$ (будучи непрерывной на этом отрезке по условию теоремы), окончательно получим

$$l = \lim_{\Lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2}\,\Delta x_k = \int\limits_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx.$$

Теорема доказана.

П р и м е р 9.15. Вычислить длину l окружности радиуса R:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Найдем $\frac{1}{4}$ часть длины окружности, расположенный в первой четверти координатной плоскости (рис. 9.15).

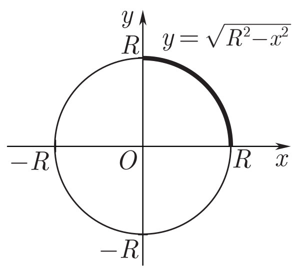


Рис. 9.15

Так как эта часть окружности задается уравнением

$$y = \sqrt{R^2 - x^2},$$

где $x \in [0, R]$, то в силу формулы (9.35) имеем

$$\frac{l}{4} = \int\limits_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\,dx = R\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_0^R = \frac{\pi R}{2}.$$

Следовательно, $l = 2\pi R$.

Т е о р е м а 9.17. *Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{9.36}$$

где $t \in [t_0, t_1]$.

Если функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_0, t_1]$, то кривая L спрямляема, и ее длина l вычисляется формулой

$$l = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt. \tag{9.37}$$

Формула (9.37) может быть получена из формулы (9.35), если применить теорему 6.6 о существовании обратной функции и формулу (6.15) вычисления производной параметрически заданной функции.

Действительно, предположим, что

$$\varphi'(t) \neq 0, \quad t \in [t_0, t_1].$$

Из этого следует, что на отрезке $[t_0, t_1]$ функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна.

Значит, по теореме 6.6 существует обратная функция $t = \Phi(x)$ на отрезке $[a, b]$, где $a = \varphi(t_0)$, $b = \varphi(t_1)$. Поэтому уравнения (9.36) задают параметрически функцию

$$y = f(x) = \psi(\Phi(x)).$$

Теперь для вычисления длины l кривой L воспользуемся формулой (9.35), делая в ней замену переменной $x = \varphi(t)$ и учитывая равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

(правило дифференцирования параметрически заданной функции):

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\, \varphi'(t)\, dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \frac{\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}}{\varphi'(t)}\, \varphi'(t)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

П р и м е р 9.16. Вычислить длину l дуги циклоиды, заданной параметрическими уравнениями

$$x = R(t - \sin t), \quad y = R(1 - \cos t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Циклоида — это плоская кривая, которую описывает точка окружности радиуса R, катящейся без скольжения по прямой линии (рис. 9.16).

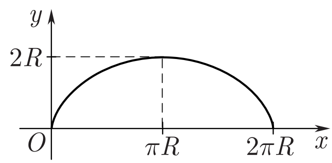


Рис. 9.16

Поскольку

$$x'(t) = R(1 - \cos t), \quad y'(t) = R\sin t,$$

то по формуле (9.37) получим, что

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1-\cos t)^2 + R^2\sin^2 t}\, dt =$$

$$= R\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\, dt = 2R\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, dt = -4R\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi} = 8R.$$

Теорема 9.18. *Пусть кривая L задана в полярных координатах уравнением*

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

Если функция $r = r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, то кривая L спрямляема, и ее длина l вычисляется формулой

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi. \tag{9.38}$$

Доказательство. Так как полярные и прямоугольные координаты связаны формулами

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t,$$

то данную кривую L можно задать параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \tag{9.39}$$

где $\varphi \in [\alpha, \beta]$.

Теперь применим формулу (9.37), учитывая, что

$$x'(\varphi) = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y'(\varphi) = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi.$$

Имеем

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi]^2 + [r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi]^2}\, d\varphi =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\varphi) + [r'(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

Таким образом, теорема доказана.

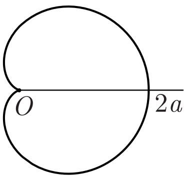


Рис. 9.17

Пример 9.17. Вычислить длину l кардиоиды

$$r = a(1 + \cos\varphi)$$

(рис. 9.17).

Поскольку кардиоида симметрична относительно полярной оси, найдем половину длины кардиоиды по формуле (9.38):

$$\frac{l}{2} = \int_{0}^{\pi} \sqrt{[a(1+\cos\varphi)]^2 + [a(-\sin\varphi)]^2}\, d\varphi =$$

$$= a\int_{0}^{\pi} \sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\int_{0}^{\pi} \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Итак, мы нашли длину кардиоиды: $l = 8a$.

§ 9.15. Вычисление объема тела

Рассмотрим некоторое тело, которое ограничено двумя параллельными плоскостями $x = a$, $x = b$, и пусть для любого $x \in$ $\in [a, b]$ известна площадь $S = S(x)$ его поперечного сечения плоскостью, проходящей через точку x и перпендикулярной оси Ox (рис. 9.18).

Если функция $S = S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то объем V данного тела вычисляется по формуле

$$V = \int_{a}^{b} S(x)\, dx. \tag{9.40}$$

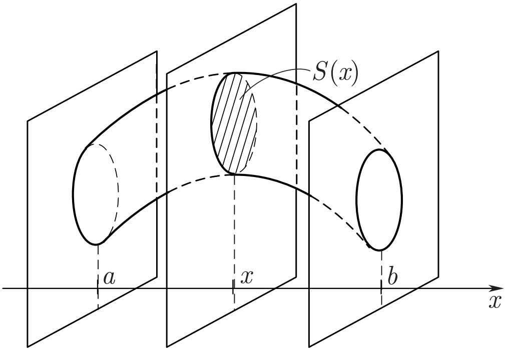


Рис. 9.18

Эта формула называется *формулой объема тела по площади параллельных сечений.*

П р и м е р 9.18. Найти объем V эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Рассмотрим сечение эллипсоида плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке с абсциссой x, $a \leqslant x \leqslant b$. Очевидно, что

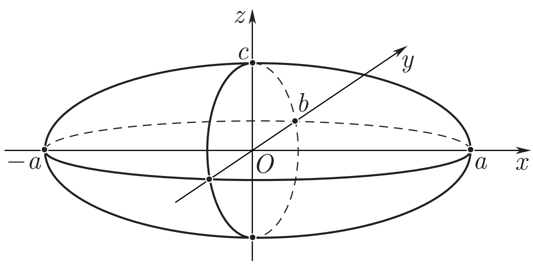


Рис. 9.19

это сечение является эллипсом (рис. 9.19), определяемым уравнением

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \quad (x=\mathrm{const}),$$

или

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1 \quad (x=\mathrm{const}).$$

Площадь, ограниченная этим эллипсом, равна:

$$S(x) = \pi\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}\sqrt{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Следовательно, по формуле (9.40) получим

$$V = \int\limits_{-a}^{a} S(x)\,dx = \int\limits_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Таким образом, *объем эллипсоида с полуосями* a, b, c *равен*

$$V = \frac{4}{3}\,\pi abc.$$

В частности, при $a = b = c = R$, получаем объем шара с радиусом R:

$$V = \frac{4}{3}\,\pi R^3.$$

Рассмотрим теперь тело, которое образуется вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной на отрезке $[a, b]$ функции $y =$

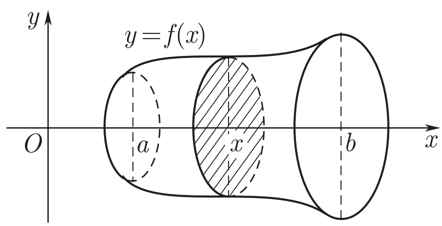


Рис. 9.20

$= f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (рис. 9.20). Это тело называется *телом вращения*.

Сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox, проведенной через точку $x \in [a, b]$, есть круг радиуса $f(x)$. Следовательно,

$$S(x) = \pi y^2 = \pi f^2(x).$$

Применяя (9.40), получим следующую *формулу вычисления объема тела вращения*:

$$V = \pi\int\limits_{a}^{b} f^2(x)\,dx. \qquad (9.41)$$

Пример 9.19. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной графиком

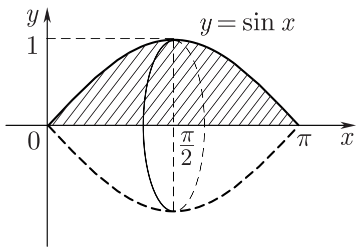


Рис. 9.21

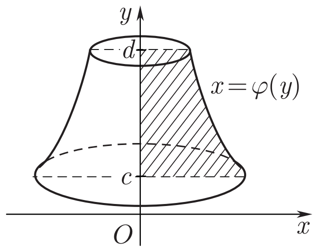


Рис. 9.22

функции $y = \sin x$ и прямыми $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ (рис. 9.21).

По формуле (9.41) имеем

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком функции $x = \varphi(y) \geqslant 0$ и прямыми $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, $x = 0$, то объем тела, образованного вращением этой криволинейной трапеции вокруг оси Oy (рис. 9.22), вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \qquad (9.42)$$

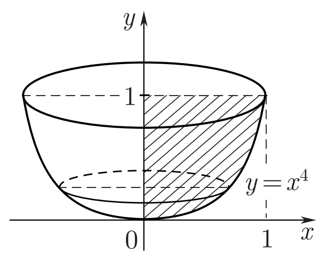


Рис. 9.23

Пример 9.20. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^4$ и прямыми $x = 0$, $y = 1$ (рис. 9.23).

По формуле (9.42) имеем

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy = \pi \int_0^1 x^2\,dy = \pi \int_0^1 \sqrt{y}\,dy = \pi \frac{y^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Глава 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 10.1. Понятие функции многих переменных

Пусть D — некоторое непустое множество упорядоченных пар действительных чисел (x, y).

Определение 10.1. Если в силу определенного закона каждой паре $(x, y) \in D$ поставлено в соответствие некоторое действительное число z, то говорят, что дана *функция* $z = f(x, y)$ *от двух переменных* x *и* y, определенная на множестве D со значениями в множестве $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. При этом x и y называются *независимыми переменными* (*аргументами*), а z — *зависимой переменной* (*функцией*).

Множество $D = D(f)$ называется *областью определения* функции двух переменных $z = f(x, y)$. Множество значений, принимаемых функцией z, называется *областью изменения* этой функции и обозначается $E(f)$ или E.

Предположим, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Тогда существует взаимно однозначное соответствие (биекция) между множествами всех точек плоскости и всевозможных пар действительных чисел (x, y). Эта биекция произвольной точке M плоскости ставит в соответствие пару (x, y), где x — абсцисса, а y — ордината точки M. И наоборот, любой паре чисел (x, y) эта биекция сопоставляет точку M плоскости с абсцисой x и ординатой y. Таким образом, множество D можно рассматривать как подмножество плоскости, а функцию двух переменных $f(x, y)$ — как отображение $f\colon D \mapsto \mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ — множество действительных чисел.

Определение 10.2. Множество $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ (x, y) \in D,\ z = f(x, y)\}$ называется *графиком функции двух переменных* $z = f(x, y)$.

Как видно из рис. 10.1, график функции $z = f(x, y)$ геометрически представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$.

Например, графиком функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, которая определена на множестве $D = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, является

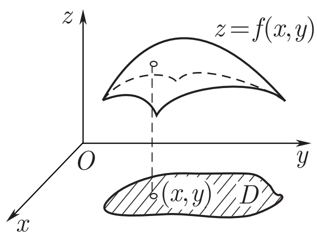


Рис. 10.1

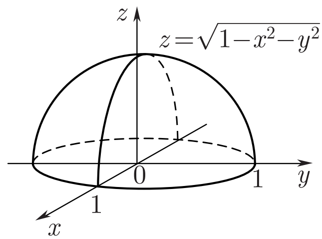


Рис. 10.2

верхняя полусфера радиуса 1 с центром в начале координат O (рис. 10.2).

Пусть f и φ — две произвольные функции двух переменных, определенные на одном и том же множестве D. Тогда сумма $f + \varphi$, разность $f - \varphi$, произведение $f\varphi$ и частное $\dfrac{f}{\varphi}$ этих функций определяются следующими формулами:

$$f(x, y) + \varphi(x, y), \quad f(x, y) - \varphi(x, y),$$

$$f(x, y)\varphi(x, y), \quad \frac{f(x, y)}{\varphi(x, y)},$$

где в случае частного предполагается, что $\varphi(x, y) \neq 0$ для всех $(x, y) \in D$.

Точно так, как и в определении 10.1, можно ввести понятие *функции трех переменных* $u = f(x, y, z)$. Областью определения последней служит некоторое множество D упорядоченных троек (x, y, z), что соответствует некоторому подмножеству трехмерного пространства $\mathbf{R}^3$.

Аналогично можно определить и *функцию от n переменных* $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где n — некоторое натуральное число. Область определения этой функции является некоторым подмножеством *n-мерного векторного пространства* $\mathbf{R}^n$, элементы которого суть всевозможные упорядоченные системы n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

§ 10.2. Открытые множества

В дифференциальном исчислении функций нескольких переменных важным является понятие открытого множества n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$. Поэтому нам прежде всего необходимо ввести это понятие, а также связанные с ним другие понятия.

Пусть $\mathbf{R}^2$ — двумерная плоскость, на которой задана прямоугольная декартова система координат Oxy. Рассмотрим произвольные две точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$ плоскости $\mathbf{R}^2$. Напомним, что *расстояние* $d(M_0, M_1)$ *между точками* $M_0(x_0, y_0)$ *и* $M_1(x_1, y_1)$ вычисляется по формуле

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}\,.$$

Расстояние между произвольными точками $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots$ $\ldots, x_n^0)$ *и* $M_1(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ n-мерного пространства $\mathbf{R}^n$ определяется аналогичным образом:

$$d(M_0, M_1) = \sqrt{(x_1^1 - x_1^0)^2 + (x_2^1 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n^1 - x_n^0)^2}\,.$$

Определение 10.3. Множество всех тех точек M плоскости, расстояние которых до точки M_0 меньше r (меньше или равно r), называется *открытым* (*замкнутым*) *кругом радиуса* r *с центром в точке* M_0, где r — некоторое положительное число (рис. 10.3).

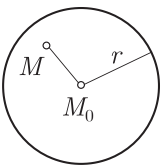


Рис. 10.3

Другими словами, открытый круг радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ — это множество всех точек $M(x, y)$, которые удовлетворяют неравенству

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Замкнутый круг, соответственно, получается, когда последнее неравенство не строгое:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2.$$

Открытый круг радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется *окрестностью* или *ε-окрестностью* точки $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 10.4. Пусть $D \subset \mathbf{R}^2$ — некоторое подмножество плоскости. Точка $M_0 \in D$ называется *внутренней точкой множества* D, если существует такая ε-окрестность этой точки, которая целиком лежит в D (рис. 10.4).

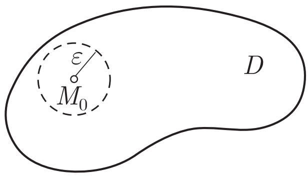


Рис. 10.4

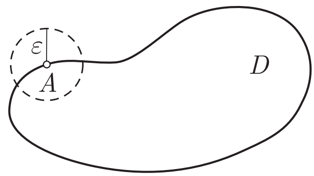


Рис. 10.5

Определение 10.5. Множество $D \subset \mathbf{R}^2$ называется *открытым*, если все точки этого множества являются внутренними.

Нетрудно заметить, что любой открытый круг является открытым множеством (проверить).

Определение 10.6. Точка A называется *граничной точкой* множества $D \subset \mathbf{R}^2$, если любая ε-окрестность этой точки содержит точки, как принадлежащие множеству D, так и не принадлежащие этому множеству (рис. 10.5).

Определение 10.7. Множество $D \subset \mathbf{R}^2$, которое содержит все свои граничные точки, называется *замкнутым множеством*.

Замкнутый круг D радиуса r с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$

$$D = \{M(x, y),\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant r^2\}$$

является замкнутым множеством.

Определение 10.8. Множество $D \subset \mathbf{R}^2$ называется *связным*, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат множеству D. В противном случае множество называется *несвязным*.

Определение 10.9. Открытое и связное множество $D \subset \subset \mathbf{R}^2$ называется *областью*.

Все понятия, введенные в этом параграфе, точно так же можно было определить и в n-мерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$.

§ 10.3. Предел функции двух переменных

Пусть

$$\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty} = M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n),\ \ldots$$

— некоторая последовательность точек плоскости $\mathbf{R}^2$.

Определение 10.10. Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется *пределом последовательности* $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, если для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ имеет место

$$d(M_n, M_0) < \varepsilon,$$

или, что то же самое, начиная с номера N все члены данной последовательности лежат в ε-окрестности точки M_0.

В этом случае пишут $M_n \to M_0$ $(n \to \infty)$ или

$$\lim_{n\to\infty} M_n = M_0.$$

Нетрудно заметить, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = M_0$ *тогда и только тогда, когда справедливы равенства*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, за исключением, быть может, самой этой точки.

Определение 10.11. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для произвольной последовательности $\{M_n(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится к точке $M_0(x_0, y_0)$, соответствующая последовательность $\{f(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ значений этой функции сходится к числу A. То есть из того, что при $n \to \infty$

$$M_n \to M_0,$$

следует, что

$$f(x_n, y_n) \to A.$$

В этом случае пишут

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y) = A. \tag{10.1}$$

Последнее определение на «языке $\varepsilon - \delta$» звучит так.

Определение 10.12. Число A называется *пределом функции* $f(x, y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для произвольного положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число δ (зависящее от ε), что для всех x и y, удовлетворяющих неравенству

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Двойное неравенство $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ означает, что точка $M(x,y)$ принадлежит δ-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и не совпадает с точкой $M_0(x_0, y_0)$.

Координаты точки $M(x,y)$ представим в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Тогда равенство (10.1) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = A. \tag{10.2}$$

Сформулируем определение предела функции при стремлении переменной точки $M(x,y)$ к бесконечности.

Определение 10.13. Число A называется *предельным значением* или *пределом функции* $f(x,y)$ *при* $M(x,y) \to \infty$, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число L, что для всех точек $M(x,y)$ из области определения функции, удовлетворяющих условию

$$\sqrt{x^2 + y^2} > L,$$

выполняется неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon.$$

Теперь определим понятие предела функции двух переменных в случае когда $A = \infty$.

Определение 10.14. Говорят, что *предел функции* $f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *равняется* ∞, и пишут

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = \infty,$$

если для произвольного положительного числа L существует такое число $\delta > 0$, что для всех точек $M(x,y)$, удовлетворяющих условию

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(x,y)| > L.$$

Теорема 10.1. *Пусть функции двух переменных* $f(x,y)$ *и* $\varphi(x,y)$ *имеют конечные пределы в точке* $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда сумма, разность, произведение и частное этих функций также имеют предел в точке $M_0(x_0, y_0)$, *причем справедливы равенства*

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \pm \varphi(x,y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \pm \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y), \qquad (10.3)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y) \cdot \varphi(x,y)] = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y), \qquad (10.4)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y)} \qquad \Bigl(\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y) \neq 0\Bigr). \qquad (10.5)$$

Доказательство. Следует из соответствующих свойств числовых последовательностей (см. теорему 2.5). Докажем, к примеру, (10.4).

Пусть $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ $((x_n, y_n) \neq (x_0, y_0))$. Тогда

$$\lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y_n\to y_0}} [f(x_n,y_n) \cdot \varphi(x_n,y_n)] = \lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y_n\to y_0}} f(x_n,y_n) \cdot \lim_{\substack{x_n\to x_0\\ y_n\to y_0}} \varphi(x_n,y_n) =$$

$$= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) \cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \varphi(x,y).$$

Теорема доказана.

§ 10.4. Непрерывность функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, в том числе в самой точке $M_0(x_0, y_0)$.

Определение 10.15. Функция $z = f(x,y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если предел этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует и равен значению $f(x_0, y_0)$, т. е. если справедливо равенство

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0). \qquad (10.6)$$

Точки, в которых функция не обладает свойством непрерывности, называются *точками разрыва* этой функции.

Сформулируем определение непрерывности функции на «языке $\varepsilon - \delta$».

Определение 10.16. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $M_0(x_0, y_0)$, если для произвольного положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех точек $M(x, y)$ из области определения данной функции, удовлетворяющих условию

$$d(M, M_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta,$$

выполняется неравенство

$$|f(M) - f(M_0)| = |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

Условие непрерывности (10.6) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0), \tag{10.7}$$

где Δx и Δy называются *приращениями* аргументов x и y соответственно.

Величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x, y)$$

называется *полным приращением* или просто *приращением* функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.

Учитывая эти обозначения и равенство (10.7), условие непрерывности функция $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ примет вид

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0. \tag{10.8}$$

Последнее равенство называют *разностной формой условия непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$.*

Определение 10.17. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной*, если она непрерывна в каждой точке своей области определения.

Теорема 10.2. *Сумма, разность, произведение и частное непрерывных в точке $M_0(x_0, y_0)$ функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ есть непрерывные в этой точке функции, если, конечно, в случае частного $\varphi(x_0, y_0) \neq 0$.*

Доказательство непосредственно следует из теоремы 10.1.

Теорема 10.3. *Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0, y_0)$, а функции*

$$x = \varphi(t, \tau), \quad y = \psi(t, \tau)$$

непрерывны в точке (t_0, τ_0), *причем*

$$x_0 = \varphi(t_0, \tau_0), \quad y_0 = \psi(t_0, \tau_0),$$

Тогда сложная функция

$$F(t, \tau) = f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)]$$

непрерывна в точке (t_0, τ_0).

Доказательство. Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\lim_{\substack{t \to t_0 \\ \tau \to \tau_0}} F(t, \tau) = \lim_{\substack{t \to t_0 \\ \tau \to \tau_0}} f[\varphi(t, \tau), \psi(t, \tau)] = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) =$$
$$= f[\varphi(t_0, \tau_0), \psi(t_0, \tau_0)] = F(t_0, \tau_0).$$

Теорема доказана.

§ 10.5. Частные производные

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Рассмотрим разности

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Разности $\Delta_x z$ и $\Delta_y z$ называются *частными приращениями* функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ соответственно по x и y.

Определение 10.18. Если существует предел отношения

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$$

при $\Delta x \to 0$, то он называется *частной производной по x функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$* и обозначается через $f'_x(x, y)$ или $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$.

Итак, по определению

$$f'_x(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Совершенно аналогично можно определить *частную производную по y функции $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$*:

$$f'_y(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ часто называются также *частными производными первого порядка функции* $z = f(x, y)$.

Замечание 10.1. Заметим, что при фиксированном аргументе y функция $z = f(x, y)$ превращается в функцию от одной переменной x. Обычная производная этой функции и есть частная производная $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. Точно таким образом, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ есть обычная производная функции $z = f(x, y)$, если ее рассматривать как функцию от одной переменной y при фиксированном x.

Последнее замечание позволяет вычислять частные производные функций нескольких переменных по обычным правилам вычисления производных функций одной переменной.

Пример 10.1. Вычислить частные производные функций: 1) $z = (x^2 + y^2)e^x$; 2) $z = \operatorname{arctg}(xy)$.

Имеем:

1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xe^x + (x^2 + y^2)e^x, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x;$

2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{1 + x^2y^2}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x}{1 + x^2y^2}.$

§ 10.6. Частные производные высших порядков. Теорема о равенстве смешанных производных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и имеет частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках $M(x, y)$ множества $D \subset \mathbf{R}^2$. Тогда $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ сами являются функциями двух переменных, и, стало быть, можно определить их частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Они называются *частными производными второго порядка функции* $z = f(x, y)$.

Точно таким же образом можно определить частные производные n-го порядка для произвольного натурального $n \geqslant 3$. Они называются *частными производными высших порядков*. Так

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\,\partial y}, \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n}, \quad \ldots$$

— примеры частных производных высших порядков.

Здесь возникает естественный вопрос: равны ли между собой частные производные второго порядка $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, которые называются *смешанными производными*?

Ответ на этот вопрос в общем случае отрицательный. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 10.4 (о равенстве смешанных производных). *Пусть функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ определены в некоторой окрестности точки $M(x, y)$, причем $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ непрерывны в точке $M(x, y)$. Тогда*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$$

в точке $M(x, y)$.

Доказательство. Составим смешанные частные приращения функции $z = f(x, y)$:

$$\begin{aligned}\Delta_x(\Delta_y z) &= \Delta_x(f(x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y)) = \\ &= [f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x+\Delta x,\, y)] - \\ &\qquad - [f(x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y)] = \\ &= [f(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - f(x,\, y+\Delta y)] - \\ &\qquad - [f(x+\Delta x,\, y) - f(x,\, y)] = \\ &= \Delta_y(f(x+\Delta x,\, y) - f(x,\, y)) = \Delta_y(\Delta_x z).\end{aligned} \tag{10.9}$$

Учитывая последнее равенство и применяя теорему Лагранжа по переменной y к функции $f(x+\Delta x,\, y) - f(x,\, y)$ на промежутке $[y,\, y+\Delta y]$, получим

$$\Delta_x(\Delta_y z) = [f'_y(x+\Delta x,\, y+\vartheta\Delta y) - f'_y(x,\, y+\vartheta\Delta y)]\Delta y, \tag{10.10}$$

где $0 < \vartheta < 1$. Применение теоремы Лагранжа правомерно, поскольку по предположению теоремы существует частная производная f'_y в достаточно малой окрестности точки $M(x, y)$. Так как такое же предположение верно и для частной смешанной производной f''_{xy}, то, снова применяя теорему Лагранжа на промежутке $[x,\, x + \Delta x]$, из (10.10) получим

$$\Delta_x(\Delta_y z) = f''_{xy}(x + \vartheta_1 \Delta x,\, y + \vartheta \Delta y)\Delta x\, \Delta y, \tag{10.11}$$

где $0 < \vartheta_1 < 1$.

Поскольку по условию теоремы функция f''_{xy} непрерывна в точке $M(x, y)$, то последнее равенство можно записать в следующей форме:

$$\Delta_x(\Delta_y z) = [f''_{xy}(x, y) + \varepsilon]\Delta x\, \Delta y, \tag{10.12}$$

где $\varepsilon \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$.

Из (10.12) следует, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_x(\Delta_y z)}{\Delta x \Delta y} = f''_{xy}(x, y). \tag{10.13}$$

Совершенно аналогично можно доказать, что

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_y(\Delta_x z)}{\Delta x \Delta y} = f''_{yx}(x, y). \tag{10.14}$$

Из последних двух равенств в силу (10.9) следует утверждение теоремы.

Замечание 10.2. В последней теореме условие непрерывности смешанных производных является существенным. То есть при отсутствии этого условия смешанные производные могут быть различными в данной точке $M(x, y)$.

Действительно, рассмотрим функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{при} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

и докажем, что ее смешанные частные производные в точке $(0, 0)$ не равны друг другу. Действительно,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} y\dfrac{x^4 + 3x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{при} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x^3 \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{при} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при} \quad x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

Теперь вычислим вторые производные:

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = \lim_{y\to 0} \frac{f'_x(0,y) - f'_x(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\,\partial y} = \lim_{x\to 0} \frac{f'_y(x,0) - f'_y(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1.$$

Осталось заметить, что смешанные частные производные разрывны в точке $(0,0)$. В самом деле, например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$$

при $x^2+y^2 \neq 0$. Следовательно,

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x=y}} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\,\partial x} = \frac{1}{2} \neq \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

А это значит, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$ не является непрерывной в точке $(0,0)$.

§ 10.7. Дифференцируемые функции

Пусть $z = f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная в некоторой окрестности точки $M(x,y)$. Рассмотрим полное приращение функции в этой точке

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Мы предполагаем, что приращения Δx и Δy настолько малы, что точка $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ по-прежнему принадлежит области определения функции $z = f(x,y)$.

Определение 10.19. Функция $z = f(x,y)$ называется *дифференцируемой в точке* $M(x,y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \tag{10.15}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, когда Δx, $\Delta y \to 0$.

Величина $A\Delta x + B\Delta y$ называется *главной линейной частью* приращения Δz. Заметим, что величина $\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$ является бесконечно малой более высшего порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, т. е.

$$\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y = o(\rho).$$

В самом деле, так как $|\Delta x|$, $|\Delta y| \leqslant \rho$, то при $\Delta x, \Delta y \to 0$ имеем

$$\frac{|\varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y|}{\rho} \leqslant |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2| \to 0.$$

Из (10.15) и разностной формы (10.8) условия непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ следует

Теорема 10.5. *Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то в этой точке она непрерывна.*

Теорема 10.6 (необходимое условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то в этой точке существуют частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, которые равны A и B соответственно*:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = A, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = B.$$

Доказательство. Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$. Из равенства (10.15) при $\Delta y = 0$ получаем

$$\Delta_x z = A\Delta x + \varepsilon_1\Delta x.$$

А из этого следует, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = A.$$

Точно таким же образом доказывается, что $\dfrac{\partial f}{\partial y} = B$.

Теорема доказана.

Обратное утверждение последней теоремы, в отличие от функции одной переменной, вообще говоря, не верно, т. е. из существовании частных производных не следует дифференцируемость и даже непрерывность функции.

Пример 10.2. Функция $z = f(x, y)$, равная нулю на координатных осях $x = 0$ и $y = 0$ и единице в остальных точках плоскости $\mathbf{R}^2$, имеет частные производные в точке $(0, 0)$, однако в этой точке не является непрерывной и, стало быть, дифференцируемой.

Однако справедливо следующее достаточное условие дифференцируемости.

Теорема 10.7 (достаточное условие дифференцируемости функции). *Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные в точке $M(x, y)$, то в этой точке она дифференцируема. Причем в представлении* (10.15) *полного приращения функции $z = f(x, y)$*

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Доказательство. Докажем, что полное приращение функции $z = f(x, y)$ можно представить в виде (10.15).

В самом деле,

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y) = \\
&= [f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y + \Delta y)] + [f(x,\, y + \Delta y) - f(x,\, y)] = \\
&= f'_x(x + \vartheta_1 \Delta x,\, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x,\, y + \vartheta_2 \Delta y)\Delta y = \\
&= (f'_x(x,\, y) + \varepsilon_1)\Delta x + (f'_y(x,\, y) + \varepsilon_2)\Delta y = \\
&= f'_x(x,\, y)\Delta x + f'_y(x,\, y)\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \qquad (10.16)
\end{aligned}$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$, когда $\Delta x,\ \Delta y \to 0$. Здесь была применена теорема Лагранжа для функций $f(x,\, y + \Delta y)$ на отрезке $[x,\, x + \Delta x]$ и $f(x,\, y)$ на отрезке $[y, y + \Delta y]$, а также непрерывность частных производных f'_x и f'_y в точке $(x,\, y)$.

Утверждение теоремы следует из (10.16).

Теорема доказана.

§ 10.8. Дифференциал функции. Правила дифференцирования

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, т. е. для полного приращения Δz имеет место представление (10.15):

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

где $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \to 0$, когда $\Delta x,\ \Delta y \to 0$.

Определение 10.20. Главная линейная часть приращения Δz называется *дифференциалом функции* в данной точке и обозначается через df.

В силу теорем 10.6 и 10.7 дифференциал df имеет следующий вид:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y.$$

Обозначим

$$\Delta x = dx, \quad \Delta y = dy.$$

Обозначения dx и dy называются *дифференциалами независимых переменных* x и y соответственно. Учитывая эти обозначения, дифференциал df можно записать в следующем окончательном виде:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Дифференциал функции n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ выражается аналогичной формулой:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n.$$

Теорема 10.8. *Пусть функции двух переменных* $u = u(x, y)$ *и* $v = v(x, y)$ *имеют непрерывные частные производные в точке* (x, y).

Тогда справедливы следующие формулы:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Доказательство. Докажем, например, вторую формулу:

$$d(uv) = \frac{\partial (uv)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial (uv)}{\partial y}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial x}\,v + u\,\frac{\partial v}{\partial x}\right]dx + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\,v + u\,\frac{\partial v}{\partial y}\right]dy =$$

$$= \left[\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right]u + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right]v = u\,dv + v\,du.$$

Теорема доказана.

§ 10.9. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет вторые непрерывные частные производные. Тогда естественным образом определяется *второй дифференциал* функции $z = f(x, y)$, соответствующий *независимым приращениям* (*дифференциалам*) dx и dy:

$$d^2 f = d(df).$$

Вычислим дифференциал второго порядка:

$$d^2 f = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\Big) = d\Big(\frac{\partial f}{\partial x}\Big)dx + d\Big(\frac{\partial f}{\partial y}\Big)dy =$$

$$= \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,dy\Big)dx + \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy\Big)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Итак, для *дифференциала второго порядка функции* $f(x, y)$ получили следующее выражение:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2.$$

Последнюю формулу символически записывают так:

$$d^2 f = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\Big)^2 f.$$

Дифференциал порядка n функции $f(x, y)$ определяется по индукции с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$d^n f = d(d^{n-1} f).$$

Методом математической индукции можно доказать, что

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\,dy\right)^n f.$$

§ 10.10. Производная сложной функции

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Если x и y в свою очередь являются функциями от переменной t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то мы получаем сложную функцию $z = f(\varphi(t), \psi(t))$, которая уже является функцией от одной переменной. Наша задача — получить формулу вычисления производной этой сложной функции.

Теорема 10.9. *Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), а функции*

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

имеют производные в точке t.

Тогда производная сложной функции $z = f(\varphi(t), \psi(t)) = f(t)$ по переменной t вычисляется по формуле

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \tag{10.17}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что произвольное приращение Δt аргумента t порождает некоторые приращения Δx и Δy функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$:

$$\varphi(t + \Delta t) = x + \Delta x, \quad \psi(t + \Delta t) = y + \Delta y.$$

Следовательно,

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta z.$$

Теперь, поскольку функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y), полное приращение Δz можно представить в виде

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \tag{10.18}$$

где ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$, когда Δx, $\Delta y \to 0$ (см. определение 10.19 и теорему 10.6).

После деления последнего равенства на Δt и перехода к пределу, когда $\Delta t \to 0$, получим

$$\begin{aligned} f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right) = \\ = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_1 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \\ + \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_2 \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 10.3. Если x и y являются функциями многих переменных, например, двух:

$$x = \varphi(t, \tau), \quad y = \psi(t, \tau),$$

то, сначала фиксируя τ, а затем t, на основании (10.17) получим формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial f}{\partial \tau} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}. \end{aligned} \tag{10.19}$$

§ 10.11. Инвариантность формы первого дифференциала

Пусть $f(u, v)$ — функция двух переменных u и v. Предположим, что u и v сами являются функциями двух переменных x и y:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

Тогда мы получим сложную функцию $f(u(x, y), v(x, y))$, которая уже зависит от переменных x и y.

Если воспользоваться формулами (10.19), то для дифференциала сложной функции $f(u(x, y), v(x, y))$ мы получим следующее выражение:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy =$$

$$= \left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right] dx + \left[\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right] dy =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right] = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv.$$

Итак, мы установили, что первый дифференциал функции двух переменных выражается через *независимые* переменные так же, как через *зависимые*. Это свойство называется *инвариантностью формы первого дифференциала*.

§ 10.12. Производная по направлению

Пусть $u = f(x, y, z)$ — функция двух переменных, а $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ — произвольный вектор.

Определение 10.21. *Производной функции* $f(x,y,z)$ *в точке* $M(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{l}$ называется предел

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{f(x+tl_1, y+tl_2, z+tl_3) - f(x,y,z)}{t},$$

если, конечно, он существует.

Нетрудно заметить, что последнее определение можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Определение 10.22. *Производной от функции* $f(x,y,z)$ *в точке* $M(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{l}$ называется правая производная в точке $t=0$ функции $f(x+tl_1, y+tl_2, z+tl_3)$ по t (если она существует).

Теорема 10.10. *Пусть функция* $f(x,y,z)$ *дифференцируема в точке* $M(x,y,z)$, *а* $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ — *произвольный единичный вектор, где* α, β *и* γ — *направляющие косинусы вектора* $\vec{n}$.

Тогда в точке $M(x,y,z)$ *существует производная функции* $f(x,y,z)$ *по направлению* $\vec{n}$, *которая вычисляется по формуле*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \tag{10.20}$$

Доказательство. Согласно определению (10.22) и теореме (10.9) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} = \left[\frac{d}{dt} f(x+t\cos\alpha,\ y+t\cos\beta,\ z+t\cos\gamma)\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где частные производные взяты в точке $M(x,y,z)$, что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

Замечание 10.4. Последняя теорема не обратима, т.е. если функция $f(x,y,z)$ имеет производную в точке $M(x,y,z)$ по всем направлениям, то она не обязательно дифференцируема в этой точке.

Таким примером служит функция

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad y=x^2 \ (x>0),\\ 0 & \text{в остальных точках.}\end{cases}$$

§ 10.13. Градиент

Определение 10.23. *Градиентом функции* $f(x,y,z)$ в точке $M(x,y,z)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

Из формулы (10.20) следует, что производная по направлению $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ равна скалярному произведению векторов $\operatorname{grad} f$ и $\vec{n}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}=(\operatorname{grad} f,\vec{n})=|\operatorname{grad} f||\vec{n}|\cos\varphi=|\operatorname{grad} f|\cos\varphi, \tag{10.21}$$

где φ — угол между векторами $\operatorname{grad} f$ и $\vec{n}$.

Из последней формулы следует очевидное неравенство

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\leqslant|\operatorname{grad} f| \tag{10.22}$$

для любого вектора $\vec{n}$.

Если $\operatorname{grad} f=\vec{0}$ в некоторой точке, то в этой точке $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}=0$ для произвольного вектора $\vec{n}$.

Предположим, что $\operatorname{grad} f\neq\vec{0}$. Тогда из (10.21) следует, что неравенство (10.22) строгое для всех единичных векторов $\vec{n}$, за исключением вектора

$$\vec{n}_0=(\cos\alpha_0,\cos\beta_0,\cos\gamma_0),$$

имеющего направление вектора $\operatorname{grad} f$, т. е. за исключением вектора

$$\vec{n}_0=\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}.$$

Координаты последнего вектора вычисляются формулами

$$\cos\alpha_0=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Очевидно, что производная функции $f(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{n}_0$ принимает максимальное значение, которое равно $|\mathrm{grad} f|$: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}_0} = |\mathrm{grad} f|$.

Таким образом, мы пришли к следующему важному заключению.

Градиент функции $f(x, y, z)$ *в точке* (x, y, z) — *это вектор, обладающий следующими двумя свойствами*:

1) *длина его равна максимальной величине производной по направлению* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ *в точке* (x, y, z);

2) *если его длина не равна нулю, то его направление совпадает с направлением, при котором производная* $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ *имеет максимальное значение.*

Эти два свойства полностью характеризуют градиент функции. Следовательно, их можно рассматривать, как новое определение градиента.

§ 10.14. Формула Тейлора

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до n-го порядка включительно. Наша задача — получить разложение функции $f(x, y)$ в этой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ из указанной окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Очевидно, что координаты точки M можно представить следующим образом:

$$x = x_0 + \Delta x, \quad y = y_0 + \Delta y.$$

Составим следующую функцию от одной переменной t:

$$F(t) = f(x_0 + t\Delta x,\, y_0 + t\Delta y),$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Имеем

$$F(1) - F(0) = f(x_0 + \Delta x,\, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \\ = f(x, y) - f(x_0, y_0). \quad (10.23)$$

Функцию $F(t)$ разложим по формуле Маклорена:

$$F(t) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\, t + \ldots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\, t^{n-1} + \frac{F^{(n)}(\vartheta)}{n!}\, t^n,$$

где $0 < \vartheta < 1$. При $t = 1$ из последней формулы получим

$$F(1) - F(0) = \frac{F'(0)}{1!} + \ldots + \frac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{F^{(n)}(\vartheta)}{n!}. \qquad (10.24)$$

По формуле производной сложной функции вычислим $F'(t)$:

$$F'(t) = \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial x}\, \Delta x + \frac{\partial f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y)}{\partial y}\, \Delta y.$$

Отсюда при $t = 0$ получаем

$$F'(0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\, \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\, \Delta y = df(x_0, y_0). \qquad (10.25)$$

Точно таким же образом получим $F''(t)$:

$$F''(t) = f''_{x^2}(x_0 + t\Delta x,\, y_0 + t\Delta y)\Delta x^2 + \\ + 2f''_{xy}(x_0 + t\Delta x,\, y_0 + t\Delta y)\Delta x\Delta y + f''_{y^2}(x_0 + t\Delta x,\, y_0 + t\Delta y)\Delta y^2$$

и

$$F''(0) = d^2 f(x_0, y_0). \qquad (10.26)$$

Продолжая этот процесс, получим

$$F^{(n-1)}(0) = d^{n-1} f(x_0, y_0), \\ F^{(n)}(\vartheta) = d^n f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y). \qquad (10.27)$$

Учитывая формулы (10.23)–(10.27), окончательно получим

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0, y_0)}{1!} + \ldots + \frac{d^{n-1} f(x_0, y_0)}{(n-1)!} + \\ + \frac{d^n f(x_0 + \vartheta\Delta x, y_0 + \vartheta\Delta y)}{n!}. \quad (10.28)$$

Формула (10.28) называется *формулой Тейлора* для функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Для функций от n переменных формула Тейлора также имеет вид (10.28).

§ 10.15. Неявные функции. Теорема о существовании неявной функции

Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на некотором подмножестве плоскости $\mathbf{R}^2$. Рассмотрим уравнение

$$f(x, y) = 0. \tag{10.29}$$

Множество всех точек (x, y), для которых выполняется равенство (10.29), обозначим через $\mathscr{M}$. Это множество может иметь самую различную природу.

Например, в случае

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

множество $\mathscr{M}$ состоит из единственной точки $(0, 0)$, в случае

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

множество $\mathscr{M}$ пусто, а в случае

$$f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

множество $\mathscr{M}$ есть пара прямых, проходящих через начало координат $(0, 0)$.

Пусть $(x_0, y_0) \in \mathscr{M}$. Если в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 задана такая функция

$$y = \varphi(x),$$

что $(x, \varphi(x)) \in \mathscr{M}$, или, что то же самое,

$$f(x, \varphi(x)) = 0$$

для всех точек $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то говорят, что *функция $y = \varphi(x)$ задана неявно уравнением* (10.29) или что уравнение (10.29) *задает неявную функцию.*

Возникает естественный вопрос: при каких ограничениях, накладываемых на функцию двух переменных $z = f(x, y)$, существует неявная функция, или, что то же самое, уравнение (10.29) однозначно разрешимо относительно y?

Ответ на этот вопрос дает следующая важная теорема.

Теорема 10.11 (о существовании неявной функции). *Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0, y_0)$ и непрерывна там вместе со своими частными производными первого порядка, причем*

$$f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \tag{10.30}$$

и $f(x_0, y_0) = 0$.

Тогда для произвольного $b_0 > 0$ существует прямоугольник

$$\Delta = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\} \quad (b < b_0),$$

лежащий в Ω, такой, что множество $\mathscr{M} \cap \Delta$ описывается некоторой непрерывно дифференцируемой функцией

$$y = \varphi(x),$$

определенной на интервале $|x - x_0| < a$.

Доказательство. Не теряя общности предположим, что $f'_y(x_0, y_0) > 0$. В силу непрерывности функции f'_y существует такая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, которую снова обозначим через Ω, что $f'_y(x, y) > 0$ для всех точек (x, y) этой окрестности.

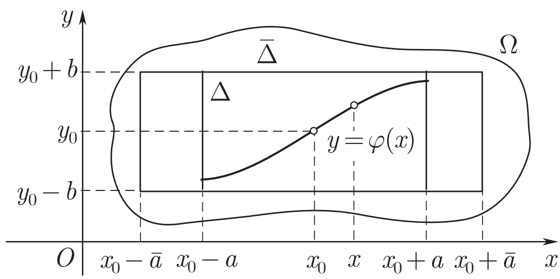


Рис. 10.6

Пусть $b_0 > 0$ — произвольное число. Рассмотрим замкнутый прямоугольник (рис. 10.6)

$$\overline{\Delta} = \{|x - x_0| \leqslant \bar{a},\ |y - y_0| \leqslant b\} \subset \Omega \quad (b < b_0).$$

Тогда $f'_y(x, y) > 0$ на $\overline{\Delta}$. Обозначим

$$\min_{(x,y)\in\overline{\Delta}} f'_y(x, y) = m > 0. \tag{10.31}$$

Теперь заметим, что при фиксированном $x = x_0$ функция $f(x, y)$ представляет собой функцию одной переменной y, которая непрерывна на отрезке $[y_0 - b,\, y_0 + b]$, строго возрастает и обращается в нуль в точке $y = y_0$. Значит,

$$f(x_0,\, y_0 - b) < 0, \quad f(x_0,\, y_0 + b) > 0.$$

Из непрерывности функции f следует существование достаточно малого числа a, $0 < a < \overline{a}$, такого, что

$$f(x,\, y_0 - b) < 0, \quad f(x,\, y_0 + b) > 0$$

для произвольного $x \in (x_0 - a,\, x_0 + a)$.

Обозначим

$$\Delta = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}\,.$$

Очевидно, $\Delta \subset \overline{\Delta} \subset \Omega$.

Для произвольного и фиксированного $x \in (x_0 - a,\, x_0 + a)$ рассмотрим функцию f как функцию от одной переменной y на отрезке $[y_0 - b, y_0 + b]$. Она непрерывна, строго возрастает и имеет противоположные знаки на его концах. Стало быть, существует и притом единственное $y \in (y_0 - b,\, y_0 + b)$, для которого $f(x, y) = 0$. Поскольку найденное значение y зависит от x, следовательно, мы получаем функцию $y = \varphi(x)$, определенную на интервале $(x_0 - a,\, x_0 + a)$, которая удовлетворяет уравнению

$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$

Таким образом доказано существование и единственность неявной функции $y = \varphi(x)$.

Докажем непрерывность этой функции на интервале $(x_0 - a,$ $x_0 + a)$. Пусть $x \in (x_0 - a,\, x_0 + a)$ — произвольная точка, а Δx — такое приращение, что $x + \Delta x \in (x_0 - a,\, x_0 + a)$. Тогда в силу формулы Тейлора имеем

$$0 = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y) - f(x, y) =$$
$$= f'_x(x + \vartheta\Delta x,\, y + \vartheta\Delta y)\Delta x + f'_y(x + \vartheta\Delta x,\, y + \vartheta\Delta y)\Delta y,$$

где $0 < \vartheta < 1$. Отсюда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x + \vartheta\Delta x, y + \vartheta\Delta y)}{f'_y(x + \vartheta\Delta x, y + \vartheta\Delta y)}, \tag{10.32}$$

где точка $(x + \vartheta\Delta x,\, y + \vartheta\Delta y)$ принадлежит Δ. В силу условия теоремы на замкнутом прямоугольнике $\overline{\Delta}$, а следовательно, и на прямоугольнике $\Delta \subset \overline{\Delta}$, функция f'_x ограничена: $|f'_x| \leqslant M$. Из равенства (10.32), учитывая (10.31), получим

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \leqslant \frac{M}{m}.$$

А отсюда следует, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это и означает непрерывность функции $y = \varphi(x)$ в точке x.

Переходя к пределу в равенстве (10.32), получаем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}.$$

А это означает, что функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема, и ее производная вычисляется формулой

$$\varphi'(x) = -\frac{f'_x(x,\varphi(x))}{f'_y(x,\varphi(x))}. \tag{10.33}$$

Теорема полностью доказана.

Теперь рассмотрим функциональное уравнение

$$f(x,y,z) = 0, \tag{10.34}$$

где переменная z является функцией аргументов x, y: $z = \varphi(x,y)$.

В этом случае говорят, что *функция двух переменных $z = \varphi(x,y)$ задана неявно.*

Для неявно заданной функции двух переменных справедлива теорема о существовании неявной функции, которая формулируется аналогично теореме 10.11.

Теорема 10.12 (о существовании неявной функции). *Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в некоторой окрестности Ω точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и непрерывна там вместе со своими частными производными первого порядка, причем*

$$f'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0 \tag{10.35}$$

и $f(x_0,y_0,z_0) = 0$.

Тогда для произвольного $c_0 > 0$ существует параллелепипед

$$\Delta = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b,\ |z - z_0| < c\} \quad (c < c_0),$$

лежащий в Ω, такой, что множество $\mathscr{M} \cap \Delta$ описывается некоторой непрерывно дифференцируемой функцией

$$z = \varphi(x,y),$$

определенной на прямоугольнике

$$\Delta^0 = \{|x - x_0| < a,\ |y - y_0| < b\}.$$

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем, так как оно аналогично доказательству теоремы 10.11.

Частные производные неявной функции $z = \varphi(x, y)$ вычисляются по аналогичным (10.33) формулам

$$\varphi'_x = -\frac{f'_x}{f'_z}, \quad \varphi'_y = -\frac{f'_y}{f'_z}. \tag{10.36}$$

§ 10.16. Касательная плоскость. Нормаль к поверхности

Пусть задана поверхность S, описываемая функцией двух переменных $z = f(x, y)$. Рассмотрим произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ и проходящую через эту точку плоскость α.

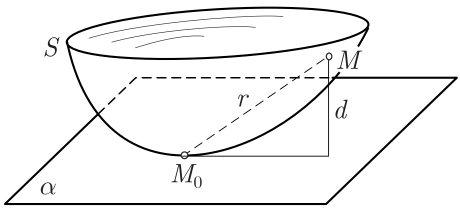


Рис. 10.7

Расстояние от произвольной точки $M(x, y, z) \in S$ до плоскости α обозначим через d, а до точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — через r (рис. 10.7).

Определение 10.24. Плоскость α называется *касательной к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$*, если $\dfrac{d}{r} \to 0$ ($d = o(r)$), когда точка $M(x, y, z)$ стремится к точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по поверхности S.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 10.13. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то поверхность S, описываемая этой функцией, имеет и при том единственную касательную плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $(z_0 = f(x_0, y_0))$, которая определяется уравнением*

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0), \tag{10.37}$$

где $(\ )_0$ *означает, что частные производные вычисляются в точке* (x_0, y_0).

Доказательство. Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0). Докажем, что плоскость α, определяемая уравнением (10.37), является касательной к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Вычисляя расстояние от точки $M(x, y, z)$ до плоскости α по известной из аналитической геометрии формуле и применяя дифференцируемость функции $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), получим

$$d = \frac{1}{L}\left|z - z_0 - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 (y - y_0)\right| =$$
$$= \frac{1}{L}\left|\Delta z - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \Delta x - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \Delta y\right| = o(\rho) = o(r) \quad (10.38)$$

при Δx, $\Delta y \to 0$. Здесь

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

а

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0^2 + 1}$$

есть нормирующий множитель плоскости α.

Формула (10.38), согласно определению 10.24 и означает, что плоскость α, определяемая уравнением (10.37), является касательной к поверхности S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Теперь докажем, что другой касательной плоскости к S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не существует. В самом деле, предположим, что такая плоскость есть и описывается уравнением

$$z - z_0 - A(x - x_0) - B(y - y_0) = 0.$$

Но тогда в силу определения 10.24 мы имели бы

$$d = \frac{1}{L}\,|z - z_0 - A(x - x_0) - B(y - y_0)| = o(r) = o(\rho)$$

при Δx, $\Delta y \to 0$. А это означает дифференцируемость функции

$z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и соответственно выполнение равенств

$$A = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \quad B = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0.$$

Теорема полностью доказана.

Замечание 10.5. Последняя теорема дает геометрическую иллюстрацию условию дифференцируемости функции двух переменных: *функция* $z = f(x, y)$ *дифференцируема в точке* (x_0, y_0) *тогда и только тогда, когда поверхность* S, *описываемая этой функцией, имеет касательную плоскость в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Предположим теперь, что поверхность S определяется неявно заданной функцией трех переменных:

$$F(x, y, z) = 0.$$

Пусть функция F имеет непрерывные частные производные в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, одновременно не равные нулю. Не теряя общности, предположим, что $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_0 \neq 0$. Тогда на основании теоремы о неявной функции существует окрестность точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в которой поверхность S описывается явно непрерывно дифференцируемой функцией $z = f(x, y)$, а стало быть, касательная плоскость задается уравнением (10.37), где

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 = -\frac{F'_x|_0}{F'_z|_0}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_0 = -\frac{F'_y|_0}{F'_z|_0}.$$

Учитывая последние соотношения, уравнение (10.37) перепишем так:

$$F'_x\big|_0(x - x_0) + F'_y\big|_0(y - y_0) + F'_z\big|_0(z - z_0) = 0. \tag{10.39}$$

Это и есть уравнение касательной плоскости к поверхности S, когда последняя определена неявно заданной функцией $F(x, y, z) = 0$.

Определение 10.25. Прямая, которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ и перпендикулярна касательной к поверхности S плоскости, называется *нормалью поверхности* S *в точке* $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Из (10.39) следует, что уравнение нормали к S в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\frac{x - x_0}{F'_x\big|_0} = \frac{y - y_0}{F'_y\big|_0} = \frac{z - z_0}{F'_z\big|_0}. \tag{10.40}$$

Итак, вектор

$$\mathrm{grad} f_0 = \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0\right)$$

является направляющим для нормали к поверхности S.

§ 10.17. Экстремумы. Необходимое условие экстремума

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ задана в области $D \subset \mathbf{R}^2$.

Определение 10.26. Точка $M_0(x_0, y_0) \in D$ называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $z = f(x, y)$ (рис. 10.8), если существует такая окрестность этой

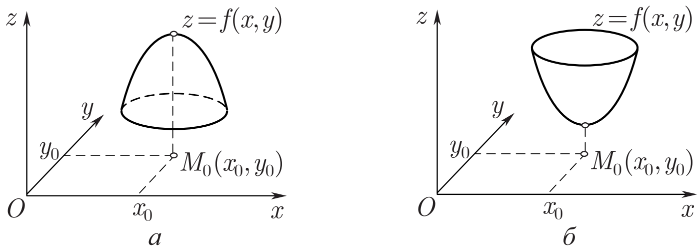


Рис. 10.8. Локальный максимум (*а*) и локальный минимум (*б*)

точки, что для всех точек $M(x, y)$ этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)). \tag{10.41}$$

В этом случае говорят также, что функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет *локальный максимум* (*минимум*).

Из условий (10.41) следует, что функция $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет локальный максимум, если

$$\Delta z \leqslant 0,$$

и имеет локальный минимум, если

$$\Delta z \geqslant 0$$

в достаточно малой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$.

Локальные максимумы и локальные минимумы вместе называются *точками экстремума* данной функции.

Теорема 10.14 (необходимое условия экстремума). *Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$.*

Тогда если существуют частные производные первого порядка этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$, то они равны нулю:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{10.42}$$

Доказательство. Предположим, что функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$. Зафиксируем переменную y, положив $y = y_0$. Тогда получим функцию $z = f(x, y_0)$ от одной переменной x. Очевидно, эта функция имеет локальный экстремум в точке $x = x_0$. А из этого в силу необходимого условия экстремума функции одной переменной следует, что в этой точке производная функции $z = f(x, y_0)$ равна нулю. Но эта производная равна частной производной функции $z = f(x, y)$ по x в точке $M_0(x_0, y_0)$, т. е.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0.$$

Точно так же доказывается равенство $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$.

Теорема доказана.

Следствие 10.1. *Если функция $z = f(x, y)$ имеет локальный экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$ и дифференцируема в этой точке, то*

$$df(x_0, y_0) = 0,$$

или

$$\mathrm{grad} f(x_0, y_0) = 0.$$

Замечание 10.6. Условие (10.42) не является достаточным для существования экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Например, функция $z = x^2 y$ имеет частные производные, которые обращаются в нуль в точке $(0, 0)$. Однако эта точка не является точкой экстремума, поскольку в любой окрестности этой точки $\Delta z = x^2 y - 0 = x^2 y$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Точки, в которых существуют непрерывные частные производные функции $f(x, y)$ и равны нулю, называются *стационарными точками* или *точками возможного экстремума* данной функции.

§ 10.18. Достаточное условие экстремума

Теорема 10.15 (достаточное условия экстремума). *Пусть функция $z = f(x, y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, и пусть $M_0(x_0, y_0)$ — стационарная точка, т. е. $df(x_0, y_0) = 0$. Обозначим*

$$A = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}, \quad B = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}, \quad C = \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}.$$

Тогда:

1) *если* $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0$, *то точка* $M_0(x_0, y_0)$ *является точкой локального экстремума, причем*:

а) *локального максимума при* $A < 0$,

б) *локального минимума при* $A > 0$;

2) *если* $AC - B^2 < 0$, *то в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *нет экстремума*;

3) *если* $AC - B^2 = 0$, *то вопрос наличия экстремума в точке* $M_0(x_0, y_0)$ *остается открытым.*

Доказательство. Разложим функцию $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ и применим непрерывность частных производных в этой точке:

$$\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0) =$$

$$= df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0 + \vartheta \Delta x,\ y_0 + \vartheta \Delta y) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2} \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \, \partial y} \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2} \Delta y^2\right) +$$

$$+\varepsilon = \frac{1}{2}\,(A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon \to 0$, когда Δx, $\Delta y \to 0$.

Из этого равенства следует, что при малых Δx и Δy знак Δz определяется знаком выражения

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2.$$

Предположим, что $A \neq 0$. Тогда

$$A\Delta x^2 + 2B\Delta x\Delta y + C\Delta y^2 = \frac{(A\Delta x + B\Delta y)^2 + (AC - B^2)\Delta y^2}{A}. \tag{10.43}$$

Из полученного равенства легко следует утверждение 1) теоремы.

В самом деле, для произвольных Δx и Δy при $A < 0$ имеем неравенство $\Delta z < 0$, что соответствует случаю локального максимума, а при $A > 0$ имеем неравенство $\Delta z > 0$, что соответствует случаю локального минимума.

Теперь докажем утверждение 2). Пусть

$$AC - B^2 < 0.$$

Предположим, что $A \neq 0$ (случай $C \neq 0$ симметричен). Тогда можно, с одной стороны, подобрать такие Δx и Δy, что $\Delta y \neq 0$ и $A\Delta x + B\Delta y = 0$, а с другой — положить $\Delta y = 0$ и $\Delta x > 0$. В обоих случаях из (10.43) следует, что Δz не равно нулю, но имеет разные знаки. А это и означает отсутствие экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Наконец, если

$$AC - B^2 = 0,$$

то при $A \neq 0$ (случай $C \neq 0$ симметричен), как следует из равенства (10.43), можно подобрать такие Δx и Δy, одновременно не равные нулю, что $\Delta z = 0$. К такому выводу приходим и в случае $A = C = 0$. А это означает, что в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция может иметь экстремум, но может и не иметь его.

Теорема полностью доказана.

П р и м е р 10.3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y.$$

Найдем частные производные и составим систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - 6 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_0 = 0$, $y_0 = 3$. Так как

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2,$$

то из последней теоремы следует, что в точке $M_0(0, 3)$ функция имеет минимум, равный $z_0 = -9$.

§ 10.19. Условный (относительный) экстремум

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y)$ определена в некоторой области $D \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим все точки области D, которые удовлетворяют условию

$$F(x, y) = 0. \tag{10.44}$$

Последнее уравнение называется *уравнением связи* аргументов x и y.

Задача *условного экстремума функции* $z = f(x, y)$ заключается в отыскании экстремума этой функции при условии, что ее аргументы удовлетворяют уравнению связи (10.44).

Заметим, что если уравнение (10.44) можно разрешить относительно y и получить явную функцию

$$y = \varphi(x),$$

то задача отыскания условного экстремума функции $z = f(x, y)$ с уравнением связи (10.44) сведется к отысканию обычного экстремума функции одной переменной $g(x) = f(x, \varphi(x))$.

Пример 10.4. Исследовать на условный экстремум функцию

$$z = x^2 + y^2$$

при условии

$$x + y - 1 = 0.$$

Из уравнения связи находим $y = 1 - x$. Теперь исследуем на экстремум функцию одной переменной

$$g(x) = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1.$$

Так как $g'(x) = 4x - 2 = 2(2x-1)$, то очевидно, что $x_0 = \frac{1}{2}$ является точкой локального минимума функции $g(x)$. Значит, точка $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $(y_0 = 1 - x_0)$ является точкой условного минимума функции $z = x^2 + y^2$.

Геометрический смысл этого условного экстремума становится очевидным из рис. 10.9.

Заметим, что в любой окрестности точки $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ существуют точки, в которых значение функции $z = x^2 + y^2$ меньше, чем значение этой же функции в точке $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Последнее значение действительно является наименьшим лишь среди значений функции в точках, принадлежащих прямой $x + y - 1 = 0$. В этом и заключается *условность* (*относительность*) минимума.

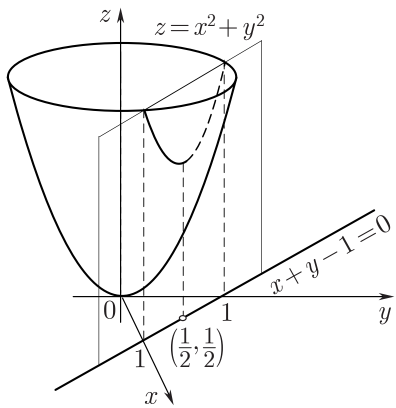


Рис. 10.9

Теперь переходим к установлению *необходимого условия условного экстремума* функции $z = f(x,y)$ при наличии уравнения связи (10.44).

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — точка условного экстремума функции $z = f(x,y)$ с уравнением связи (10.44). Предположим, что функция $F(x,y)$ в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка, причем $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда (в силу теоремы 10.11 о существовании неявной функции) в некоторой ε-окрестности точки $x = x_0$ существует непрерывно дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, такая, что для всех точек этой окрестности

$$F(x, \varphi(x)) = 0. \tag{10.45}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ — точка условного экстремума функции $z = f(x, y)$, то точка $x = x_0$ является безусловным экстремумом функции $g(x) = f(x, \varphi(x))$. Следовательно,

$$g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0, \tag{10.46}$$

где $y_0 = \varphi(x_0)$.

Из тождества (10.45) следует, что

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\varphi'(x) = 0$$

для всех точек x из вышеуказанной ε-окрестности точки $x = x_0$. В частности,

$$F'_x(x_0, y_0) + F'_y(x_0, y_0)\varphi'(x_0) = 0. \tag{10.47}$$

Теперь равенство (10.47) умножим на число λ и сложим с (10.46). Получим

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda F'_x(x_0, y_0) + [f'_y(x_0, y_0) + \lambda F'_y(x_0, y_0)]\varphi'(x_0) = 0. \tag{10.48}$$

Число λ выберем так, чтобы выражение в квадратных скобках в последнем равенстве обратилось в нуль:

$$f'_y(x_0, y_0) + \lambda F'_y(x_0, y_0) = 0. \tag{10.49}$$

Для этого достаточно положить

$$\lambda = \lambda_0 = -\frac{f'_y(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

Теперь из (10.48) получим еще одно равенство:

$$f'_x(x_0, y_0) + \lambda F'_x(x_0, y_0) = 0. \tag{10.50}$$

Если учесть, что x_0 и y_0, кроме уравнений (10.49) и (10.50), удовлетворяют также уравнению

$$F(x_0, y_0) = 0,$$

то получим, что тройка чисел (x_0, y_0, λ_0) удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) = 0, \\ F(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{10.51}$$

Итак, мы получили необходимое условие условного экстремума: *для того чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ была условным экстремумом функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $F(x, y) = 0$,* *необходимо, чтобы координаты этой точки удовлетворяли системе* (10.51), *где* $\lambda = \lambda_0 = -\dfrac{f'_y(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}$.

Таким образом, условные экстремумы функции $z = f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ следует искать в решениях (x, y) системы (10.51), которые называются *стационарными точками* функции $z = f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$. Этот метод отыскания условных экстремумов называется *методом Лагранжа*.

Замечание 10.7. Задача отыскания условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при уравнении связи $F(x, y) = 0$ сводится к отысканию безусловного экстремума функции трех переменных

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y), \tag{10.52}$$

которая называется *функцией Лагранжа*, а число λ называется *множителем Лагранжа*.

Действительно, в силу теоремы 10.14 необходимым условием экстремума функции $L(x, y, \lambda)$ является равенство нулю частных производных L'_x, L'_y, L'_λ:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x(x, y) + \lambda F'_x(x, y) = 0, \\ L'_y = f'_y(x, y) + \lambda F'_y(x, y) = 0, \\ L'_\lambda = F(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \tag{10.53}$$

А эта система совпадает с системой (10.51).

Пример 10.5. Исследовать на условный экстремум функцию

$$z = y + 2$$

при условии

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = y + 2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Система уравнений (10.53) принимает вид

$$\begin{cases} L'_x = 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 1 + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

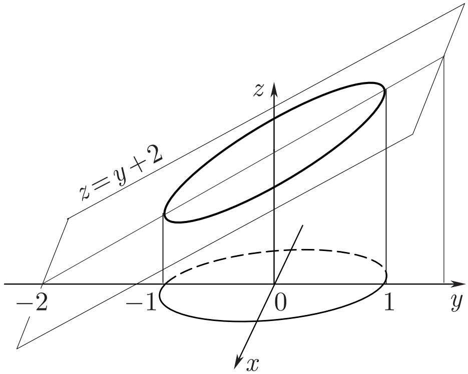


Рис. 10.10

Эта система имеет два решения:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = -1, \quad \lambda_0 = \frac{1}{2},$$

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 1, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{2}.$$

Как видно из рис. 10.10, данная функция имеет условный минимум в точке $M_0(0, -1)$ и имеет условный максимум в точке $M_1(0, 1)$.

§ 10.20. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в замкнутой области D, которая ограничена кривой, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

По теореме Вейерштрасса функция $z = f(x, y)$ имеет наибольшее и наименьшее значения в замкнутой области D. Эти значения функция может принимать в точках экстремума (внутри области D) и в точках условного экстремума при $F(x, y) = 0$ (на границе области D).

Итак, предложим следующий *алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции* $z = f(x, y)$ в замкнутой области D.

1. Найти все стационарные точки функции $z = f(x, y)$ внутри области D и вычислить значения функции в этих точках.

2. Найти все стационарные точки функции $z = f(x, y)$ при $F(x, y) = 0$ и вычислить значения функции в этих точках.

3. Из всех вычисленных значений функции $z = f(x, y)$ выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Пример 10.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

в замкнутой области D:

$$x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y \leqslant 3.$$

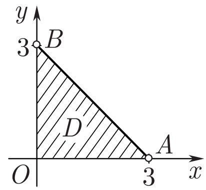


Рис. 10.11

Область D представляет собой треугольник (рис. 10.11).

1. Находим стационарные точки данной функции:

$$\begin{cases} z'_x = 2x - y - 1 = 0, \\ z'_y = 2y - x - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, которое принадлежит области D. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(1, 1) = -1.$$

2. Находим все стационарные точки нашей функции на границе области D, которая состоит из отрезков OA, OB и AB.

На отрезке OA имеем $y = 0$. Следовательно, $z = x^2 - x$, где $x \in [0, 3]$. Имеем $z' = 2x - 1 = 0$. Откуда получаем $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

Вычислим значения функции $z = x^2 - x$ в точке $x_1 = \dfrac{1}{2}$ и на концах отрезка $[0, 3]$:

$$z\left(\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4}, \quad z(0, 0) = 0, \quad z(3, 0) = 6.$$

На отрезке OB имеем $x = 0$. Следовательно, $z = y^2 - y$, где $y \in [0, 3]$. Имеем $z' = 2y - 1 = 0$. Откуда получаем $y_2 = \dfrac{1}{2}$.

Вычислим значения функции $z = y^2 - y$ в точке $y_2 = \dfrac{1}{2}$ и на концах отрезка $[0, 3]$:

$$z\left(0, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \qquad z(0, 0) = 0, \qquad z(0, 3) = 6.$$

Наконец, на отрезке AB имеем $x + y = 3$, или $y = 3 - x$. Тогда получим $z = 3x^2 - 9x + 6$. Имеем $z' = 6x - 9 = 0$. Откуда получаем $x_3 = \dfrac{3}{2}$ и, значит, $y_3 = 3 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Вычислим значение функции $z = 3x^2 - 9x + 6$ в точке $x_3 = \frac{3}{2}$:

$$z\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}.$$

3. Сравнивая полученные значения нашей функции, заключаем, что

$$z_{\text{наиб.}} = z(0,3) = z(3,0) = 6, \quad z_{\text{наим.}} = z(1,1) = -1.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ