И. Депман

Рассказы о старой и новой алгебре

Д

И. ДЕПМАН

РАССКАЗЫ О СТАРОЙ И НОВОЙ АЛГЕБРЕ

Издательство
«Детская литература»
Ленинград 1967

51
Д-35

ШКОЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

Продолжая разговор, начатый в книгах «Рассказы о математике» и «Рассказы о решении задач», И. Я. Депман рассказывает читателям о возникновении и развитии алгебры. Книга снабжена большим количеством занимательных задач, которые развивают математическое мышление и смекалку.

Оформление Э. Бордзиловской

7—6—3

ВВЕДЕНИЕ

Все науки возникли из практики. Знания, которые лежат в основе разных наук, человек приобретал в борьбе с опасными для него явлениями природы, и конечная цель наук — создание условий, наиболее благоприятных для существования человека.

Вы не раз читали о том, как человек приобретал различные научные знания.

На уроках истории вы знакомитесь с поэмами «Илиада» и «Одиссея» великого поэта Древней Греции — Гомера. Он подробно описывает жизнь своего народа в период около 1200 лет до начала нашего летоисчисления. В этих поэмах слово «железо» не встречается. Из металлов упоминается только бронза — сплав меди и олова. Медь и олово попадались человеку на земной поверхности, добывать и обрабатывать их было легче, чем найденное позднее железо. И хотя железо, конечно, гораздо более пригодно для создания орудий, чем бронза, оно вытеснило бронзу только к 2000—1500 годам до нашего летоисчисления. Знаменитые египетские пирамиды, сложенные из десятков и сотен тысяч аккуратно обтесанных каменных глыб, возведены в третьем и втором тысячелетиях до начала нашего летоисчисления без использования железных рубил.

В Ленинграде, на набережной Невы, стоят два египетских сфинкса, изображения которых вы, наверное, видели. Гранит, из которого они высечены, сохранился в неповрежденном виде, хотя в течение четырех тысяч лет вынес адскую жару Египта и морозы невских берегов. На гранитном постаменте можно видеть картинки египетского письма, вырезанные в камне аккуратно, как в мягкой глине. Картинки эти выполнены в то время, когда железные орудия не были еще известны. Крупнейший советский инженер-математик академик Алексей Николаевич Крылов (1863—1945) выражает величайшее удивление совершенству техники египтян, которая дала возможность выполнить подобную задачу.

В Америке несколько десятилетий назад была объявлена большая премия автору, который напишет книгу

«Как человек без математики жил?»

Премия осталась невыданной. По-видимому, ни один автор не сумел изобразить жизнь человека без всяких математических знаний.

Простейшим математическим понятием является число. Возникновение числа и счета происходило в течение очень долгого времени, о продолжительности которого наука почти ничего определенного не может сказать. Ученые шутливо говорят, что превращение обезьяны в современного человека, способного заниматься наукою, потребовало миллиона лет. Миллион лет называют «периодом образования из обезьяны доктора философии».

С какой медленностью происходит освоение человеком числа, в частности числового ряда 1, 2, 3, 4..., видно из следующего факта.

На берегах реки Амазонки, в Южной Америке, в прошлом веке было обнаружено индейское племя, которое знало из чисел только 1, 2 и 3, причем число 3 называется.

поэттаррарооринкоароак.

На этом слове можно сломать даже язык, привыкший ко всяким сочетаниям звуков.

Путешественник отмечает: «К счастью для этого народа, их арифметика редко доходит до этого числа».

Другие народы при более благоприятных условиях развивались быстрее и достигали уже в далеком прошлом больших успехов в усвоении числа, счета и арифметики.

Греческий математик Архимед (287—212 гг. до начала нашего летоисчисления) доказывает, что числовой ряд

1, 2, 3, 4...

можно продолжить как угодно далеко, что он бесконечен. Иными словами, это значит, что для «сосчитания» любого количества предметов «цыфирю хватит», как говорит героиня одной из комедий А. Н. Островского.

История возникновения и развития понятия числа и основной науки о числе — арифметики — рассказана автором настоящей книги в других его работах[1].

Арифметика является основною частью великой науки математики. Ее осваивает каждый учащийся в течение первых пяти лет своей школьной жизни.

Вы знаете, что вслед за арифметикой на уроках математики изучаются алгебра, геометрия, анализ.

В этой книге будет идти рассказ об алгебре, непосредственно продолжающей в школьном курсе арифметику.

Мы не стремимся дать большой перечень имен тех лиц, которые внесли новое в развитие алгебры. Такой перечень был бы очень длинным и утомительным для читателя.

Замечательный поэт А. А. Блок, размышляя о своем конце, писал:

Какой-нибудь поздний историк
Напишет внушительный труд...
Вот только замучит, проклятый,
Ни в чем неповинных ребят
Годами рожденья и смерти
И ворохом скверных цитат.

Автор книги не хотел бы дать основания для таких упреков. В книге приведены имена лишь тех творцов, которые внесли в алгебру существенно важные, новые результаты.

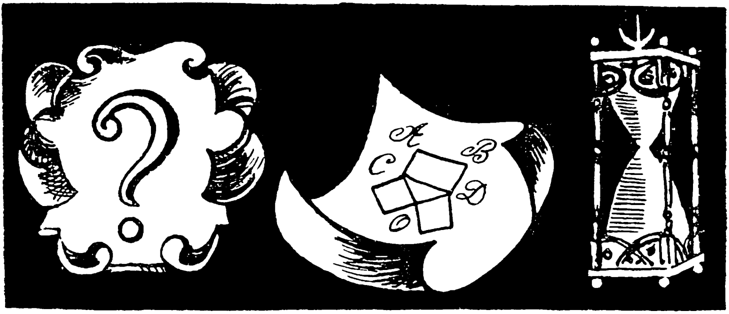
Не столько личность и жизнь отдельных ученых, сколько сущность их учения интересует нас.

Древний философ поучал, что человек должен стремиться заполнить свой «чердачок над плечами» общей картиной науки, а частные подробности откладывать в «чуланчик» — в записи и книги, помня лишь, где какие данные лежат. Многое в нашей книге помещено не для заучивания, а для справок, для «чуланчика». Заведите себе специальный «чуланчик» для имен и фактов, которые помещены в книге, и пометьте соответственные страницы, чтобы в случае надобности найти дополнительные сведения...

---

[1] И. Я. Депман. Мир чисел. Ленинград, «Детская литература», 1966.

Его же. История арифметики. 2-е издание. Москва, «Просвещение», 1965.



I. СТАРАЯ АЛГЕБРА

ЧТО ТАКОЕ АЛГЕБРА И ДЛЯ ЧЕГО ОНА?

Вы, конечно, знаете, что алгебра занимает центральное место среди всех математических предметов школьного обучения. Алгебру в школе изучают с шестого класса и до выпускного. А занятия арифметикой в предшествующих классах в значительной части своей служат подготовкой к алгебре.

Начать книгу, посвященную истории и развитию алгебры, с точного определения ее невозможно, да в этом и нет надобности. Более или менее точное представление о новом предмете вы получите лишь в конце книги. Здесь же мы ограничимся приведением нескольких высказываний крупных и крупнейших ученых.

Гениальный французский математик (геометр и механик) Л. Пуансо (1777—1859) пишет:

«Обыкновенная алгебра или всеобщая (универсальная) арифметика является не чем иным, как *обобщенной арифметикой*, распространенной с обыкновенных чисел на другие числа».

Величайший ученый нового времени англичанин Исаак Ньютон (1643—1727) называет свою книгу «*Универсальной (всеобщей) арифметикой*».

Американский ученый Гиббс (1839—1903), создатель учения о векторах, ныне широко применяемых во всех областях точных наук, писал:

«Человеческий ум не изобрел другой машины, в той же мере избавляющей от нудной работы, как алгебра. Совершенно естественно и прилично именно такой эпохе, как наша, для которой являются характерным поиски всяких избавляющих от работы машин, отличиться невиданным усовершенствованием этой самой точной и самой красивой из всех машин».

Это было написано 70 лет назад.

В наши дни, в эпоху чудодейственных электронных счетных машин, которые в сотни тысяч раз превосходят скоростью вычислений человека, слова Гиббса особенно заслуживают внимания.

Приведем еще слова великого русского математика Николая Ивановича Лобачевского (1793—1856):

«Подобно тому как дар слова обогащает нас мнениями других, так язык математических знаков (алгебра) служит средством еще более совершенным, более точным и ясным, чтобы человек мог передавать другому понятия, которые он приобрел, истину, которую он постигнул, и зависимость, которую он открыл».

Алгебра — это новый язык, язык науки — точный, совершенный. Известно, что когда в институте, в котором работал упомянутый выше Гиббс, обсуждался вопрос об усилении преподавания языков за счет часов, отведенных для математики, никогда не выступавший Гиббс сказал свою единственную речь, состоявшую из трех слов:

«Математика — это язык».

Язык этот чрезвычайно ясный. Величайший французский математик XVIII века Лагранж (1736—1813), оценивая работы по химии своего великого современника Лавуазье, сказал:

«Ныне химия стала столь же легкой для понимания, как алгебра».

Крупнейший английский специалист по прикладной математике Уильям Томсон (XIX век) пишет своему другу, великому физику:

«Я не мог понять содержания вашей статьи, так как она не оживлена иксами и игреками».

Но усваивается алгебра нелегко. Во французском языке есть поговорка: «Это для меня алгебра!»

Эта фраза повторяется всякий раз, когда встречается трудное дело.

Писатель восемнадцатого века И. М. Долгоруков по поводу назначения его на высокий пост пишет:

«На свои служебные дела смотрел как на алгебру». Герой Жюль Верна, дав другому трудное задание, говорит:

«Захотел алгебры, ну и получай!»

Усвоению алгебры может помочь рассказ о ходе ее развития, который дается в нашей книге.

Вспомним слова Алексея Максимовича Горького:

«В каждом деле нужно знать историю его развития. Если бы рабочие каждой отрасли производства знали, как она возникла, как постепенно развивалась, они работали бы с более глубоким пониманием культурно-исторического значения их труда, с бо́льшим увлечением» (М. Горький. О том, как я учился писать).

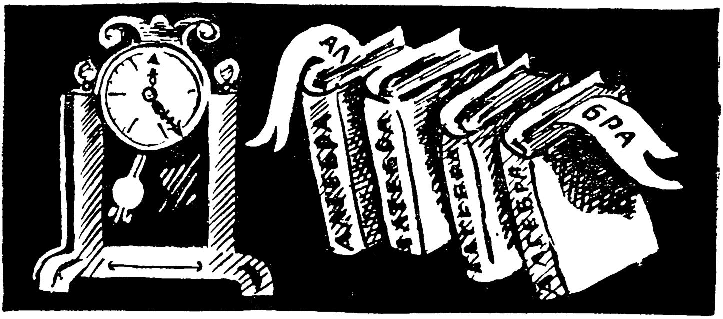
Эти слова Горького относятся и к вам, юные читатели, «грызущие» на уроках гранит науки — алгебры. Хотелось бы верить, что читатель после изучения нашей книги скажет словами средневекового поэта Чосера, чье имя упоминается и в истории математики:

Посредством уравнений, теорем
Я уйму всяких разрешал проблем.

* * *

Попутно здесь приводятся сведения, которые имеют то или иное, хотя бы косвенное, отношение к основной теме разговора, ибо, как кто-то говорил:

«Во всяком обучении случайно схваченное большею частью гораздо прочнее, чем по долгу преподанное».



КАК ВОЗНИК ШКОЛЬНЫЙ УЧЕБНИК АЛГЕБРЫ

В создании школьного курса алгебры важнейшим шагом явился учебник Леонарда Эйлера.

Леонард Эйлер (1707—1783) был членом Петербургской академии наук в XVIII веке. Он является одним из крупнейших математиков не только своего века, но и всех времен. Он создал несколько новых областей математических наук, применяя математику во многих областях техники, в которых до него ее мало применяли. Наука о движении твердых тел (механика), наука о жидких телах (гидродинамика), теория стрельбы, теория звука и музыки, вопросы кораблестроения и кораблевождения и многие другие области знания, помимо чистой математики, получили развитие в трудах Эйлера, число которых около тысячи.

В 1768 и 1769 годах Эйлер издал в Петербурге книгу «Универсальная арифметика», которая является прообразом учебников школьной алгебры у всех народов до наших дней.

«Суть математики, — писал Эйлер, — состоит в том, чтобы подробно изучить и всесторонне рассмотреть науку о числах и все те действия, которые над числами производятся. Эта основная часть математики называется анализом или алгеброй.

Арифметика занимается только некоторыми простейшими способами вычисления, которые встречаются в обыденной жизни. В противоположность ей анализ или алгебра заключает в себе вообще все то, что может встретиться у чисел и при действиях с ними».

«Алгебра» Эйлера, напечатанная в Петербурге на русском и немецком языках, стала образцом всех школьных учебников алгебры в следующее столетие во всем мире. Крупный советский алгебраист, профессор Д. А. Граве (1863—1939), писал об «Алгебре» Эйлера:

«Малообразованный слуга Эйлера, бывший портной, записывая текст «Алгебры» под диктовку ослепшего автора, усвоил науку, о которой он ранее и не слыхал. Вряд ли какой-нибудь другой автор учебника математики может похвастаться такими успехами своего изложения».

О мастерстве изложения Эйлера говорит и следующий факт. В Германии существовало издательство (Ф. Реклама), выпустившее несколько тысяч томиков книг для самого широкого круга читателей. Серия включала, помимо художественной литературы, все, что имеется интересного и доступного для массового читателя в философии, истории, общественных и естественных науках. Единственной математической книгой серии была и остается «Алгебра» Эйлера.

Основным вопросом в учебнике Эйлера, как вообще в школьной алгебре, является решение уравнений.

Что такое уравнение, читатель знает: это соединение знаком равенства (=) двух алгебраических выражений, содержащих, кроме данных чисел, неизвестное число (или несколько их), обозначаемых буквами:

$$3x + 5 = 20 \text{ — это уравнение.}$$

Решить уравнение — значит найти для неизвестных (букв) такие числовые значения, при которых обе половины буквенного равенства будут одинаковыми числами. Эти значения для неизвестных выражаются (если сумеем решить уравнение) через данные в уравнении числа (коэффициенты). Итак, алгебра — это искусство нахождения числовых значений для содержащихся в уравнении неизвестных (букв) по коэффициентам уравнения. Эти значения неизвестных называются корнями уравнения. Говорят, что корни уравнения — это числа, которые удовлетворяют уравнению.

Решение уравнения может быть легкой задачей, известной еще в глубокой древности. Оно может оказаться трудной задачей, с которой справились лишь в новое время; или, как мы увидим в дальнейшем, уравнение может оказаться неразрешимым для алгебры.

Уравнение $2x - 3 = 0$ решается настолько просто, что вряд ли это решение достойно называться алгеброй. Если подняться ступенькой выше, приходим к уравнению второй степени, подобному

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Здесь нам тоже требуется найти число (или числа), которые, заменив x, обращают левую половину уравнения в нуль. Мы ищем корни этого уравнения. Вставьте в уравнение число 1 или число 3 вместо x, и вы увидите, что каждое из этих чисел удовлетворяет записанному уравнению, то есть обращает уравнение в числовое равенство.

Начинающему изучать алгебру может показаться, что решение уравнений — дело, далекое от нашей повседневной жизни. Однако уже уравнение второй степени приводит нас к комплексным числам — основному орудию инженеров и физиков. Они — основа больших достижений в науке и технике, например в открытиях самолетостроителей Николая Егоровича Жуковского (1847—1921) и Сергея Алексеевича Чаплыгина (1869—1942).

В уравнении $2x - 3 = 0$ числа 2 и —3 являются коэффициентами. Мы находим решение этого очень простого уравнения, разделив три на два.

Подобным образом в уравнении $x^2 - 4x + 3 = 0$ числа 1, —4, 3 — тоже коэффициенты. Корни этого уравнения можно найти, проделав над этими коэффициентами определенные действия. В самом деле, мы видели, что этими корнями являются 1 и 3. Числа эти могут быть найдены действиями по простым формулам:

$$1 = 2 - \sqrt{2^2 - 3}, \quad 3 = 2 + \sqrt{2^2 - 3}.$$

Такими формулами можно воспользоваться для решения любого квадратного уравнения.

В случае уравнения второй степени формулы для решения достаточно просты.

Для некоторых других видов уравнений также можно найти корни по коэффициентам уравнения путем сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней. Если корни уравнения можно найти этими действиями, то говорят, что уравнение можно решить в радикалах[1]. Термином «решить уравнение в радикалах» будем в дальнейшем все время пользоваться и мы.

Уравнение первой степени — это пустяк. Уравнение второй степени несложно. Справиться с уравнением третьей степени труднее, но можно. Впервые это удалось сделать четыреста лет назад. Решение уравнения третьей степени можно свести к решению уравнения второй степени. В математике этот прием используется постоянно: решение новой задачи сводится к уже известному способу решения старой. Подобным же образом уравнение четвертой степени может быть сведено к задаче решения уравнения третьей степени. В дальнейшем мы покажем, как Виет в XVI веке применял этот метод.

Казалось, что мы сможем подниматься выше и выше — к решению уравнений все более высоких степеней.

Однако великий французский математик Лагранж показал, что способ сведения решения данного уравнения к решению уравнения более низкой степени пригоден только для уравнений не выше четвертой степени: применяя этот метод к уравнению пятой степени, мы должны предварительно решить уравнение шестой степени, то есть решить задачу более трудную.

Математики оказались в положении анекдота: «Как поймать пять львов?» Ответ: «Поймать шесть и отпустить одного».

В 1826 году норвежец Нильс Хендрик Абель (1802—1829) доказал, что уравнения пятой и высших степеней не имеют решений в радикалах, если коэффициенты не удовлетворяют некоторому дополнительному условию. Уже для уравнения пятой степени не существует алгебраической формулы, которая дает возможность по коэффициентам найти корни уравнения. Французский юноша Эварист Галуа (1811—1832) показал, как установить, решается ли данное уравнение формулой или нет.

Открытиями Абеля и Галуа закончилась пятитысячелетняя история той старой, или классической, алгебры, которой является школьная алгебра.

Основную и почти единственную задачу эта алгебра видела в решении уравнений, в получении ответа на вопрос: чему равняется x? Сколько?

---

[1] Радикалом в алгебре называется выражение, в котором требуется извлечь корень из данного выражения.

НОВАЯ АЛГЕБРА

Итак, к тридцатым годам девятнадцатого века вопросы решения уравнения были исчерпаны: все, что старая алгебра могла сделать своими средствами для решения уравнений, было сделано. Для решения уравнений I, II, III и IV степеней были найдены формулы, и было доказано, что для решения уравнений степени пятой и выше в общем случае таких формул не существует. Долгие поиски таких формул были напрасной тратой времени и умственной энергии многих, в том числе очень больших ученых.

Перед алгеброй возникли иные задачи.

Какие? Ответим пока словами учебников высшей алгебры:

«Для нас цель алгебры состоит в изучении операций, заданных в множестве объектов произвольной природы» (то есть не только чисел. — *И. Д.*).

В школе вы знакомитесь с векторами, в старших классах изучаете начала векторной алгебры. Эта алгебра уже не прежняя алгебра. Решая векторное уравнение, мы получаем в ответе вектор, который не является обычным числом, отвечающим на вопрос: сколько? Формулы векторной алгебры во многом отличны от формул старой алгебры.

Вы знаете применение векторов при изучении физики. Широкое и практическое применение их в механике, геометрии идет от упомянутого выше химика Гиббса.

В IV веке до начала нашего летосчисления греческий философ Аристотель привел разрозненные правила мышления в систему и создал науку логику, соблюдение правил которой считается обязательным для всякого научного рассуждения.

В середине девятнадцатого века, в дополнение старой логике, получила развитие новая наука — математическая логика.

Существенная часть ее справедливо называется «Алгеброй логики».

В наши дни математическая логика является одной из основных математических наук. Она дает доступный пример новой алгебры, решает уравнения, в которых ищется ответ не на вопрос «сколько?», а на вопрос «верно ли?».

Создалась очень важная новая наука из соединения чистой математики и логики.

Один из творцов этой новой алгебры, английский математик А. Де Морган (1806—1871) в свое время жаловался:

«Двумя глазами точной науки являются математика и логика. Математическая секта удаляет логику, логическая — математику. Оба убеждены, что одним глазом виднее, чем двумя».

В наши дни эта жалоба уже лишена основания: серьезнейшие математики стали логиками, серьезнейшие логики — математиками. Во второй части нашей книги будет о них разговор.

* * *

Итак, мы осмотрели с птичьего полета 5000 лет развития алгебры.

Не устарела ли вся она в наши дни бурного развития новой математики?

Шестьдесят шесть видных американских математиков, среди них уважаемые всем миром ученые, чьи книги у нас пользуются большой популярностью, опубликовали «Памятку о преподавании математики в школе». Вот одно из положений этой памятки:

«Математическое образование в школах явно отстает от потребностей нашей эпохи и сильно нуждается в существенных улучшениях. Однако надо очень тщательно разбирать часто встречающиеся утверждения, что изучаемый в средних школах материал устарел. Нельзя это принимать без возражений.

Элементарная алгебра, геометрия, тригонометрия имеют и сейчас фундаментальное значение так же, как они имели и 50 и 100 лет назад. Будущие потребители математики должны изучать эти предметы, готовятся ли они стать математиками, физиками, специалистами в социальных науках или инженерами, и все эти предметы имеют культурное значение для всех учащихся. Программа средней школы содержит все эти предметы... Покинуть какой-нибудь из этих материалов гибельно».

Иной читатель, быть может, задаст такой вопрос: «Бурный рост новой алгебры как будто дает достаточно дела для ума. Нужно ли интересоваться тем, что происходило в алгебре тысячи лет назад, и тратить время на изучение ее истории?»

Иногда такого взгляда держатся и серьезные ученые, которые усиленно развивают ту или иную область новой математики.

Поэтому хочется привести недавнее выступление крупнейшего математика наших дней, академика Андрея Николаевича Колмогорова:

«Как и всякая наука, математика требует прежде всего твердого знания того, что по исследуемому вопросу уже сделано. Но не следует думать, что в математике труднее, чем в других науках, добраться до возможности делать что-либо новое. Опыт говорит скорее о другом: способные математики, как правило, начинают самостоятельные научные исследования очень рано».

Эти слова полезно помнить юным любителям математики.

Помните также слова одного из творцов нашей высшей математики (немецкого философа славянского происхождения, как он сам признается) Лейбница (1646—1716):

«Нет ничего более важного, как обнаружить источники нового открытия. Это, на мой взгляд, интереснее самых открытий».

Величайший историк всех времен грек Геродот (V век до начала нашего летосчисления) начинает свою историю словами:

«Геродот из Галикарнаса (город Малой Азии) записал здесь, что он узнал, чтобы со временем не изгладились из памяти деяния людей и не забылись бесславно огромные, удивления достойные подвиги».

История алгебры являет нам удивительные достижения людей и исключительно ценные для общей культуры открытия творцов науки; забыть их было бы вопиющей неблагодарностью.

В дальнейших главах книги мы расскажем о некоторых важнейших моментах и периодах в истории развития алгебры и о достижениях алгебры у разных народов, помня, что старое не всегда означает устарелое. Как говорил Энгельс: «Теоретическое естествознание, если оно хочет проследить историю возникновения и развития своих теперешних общих положений, вынуждено возвращаться к грекам».

Это указание относится и к математике.

ТЕРМИН «АЛГЕБРА»

Слово «алгебра», как название части математики, появилось в широком обращении у математиков Средней Азии и арабских стран в девятом веке нашего летосчисления.

Несколько тысячелетий до этого у народов Месопотамии существовала математическая дисциплина, которую мы называем «алгеброй»: ученые этой страны, более известной под названием Вавилония, решали уравнения первой и второй степени, даже некоторые виды уравнений третьей степени. По мнению некоторых знатоков языков этих народов, у них математика называлась словом, из которого позднее образовалась «алгебра».

Более распространенным является мнение, что термин «алгебра» пришел к нам из Средней Азии, Хорезма.

Мухаммед бен Муса ал-Хорезми, по-нашему — Магомет сын Моисея Хорезмский, состоявший членом «Дома Мудрости» («Академии наук») в Иране, около 820 года нашего летоисчисления написал книгу, в названии которой содержатся слова «алджебр альмукабала» (al-jabr w'al muqabala). Здесь мы находим в явном виде слово «алгебра».

Мухаммед пишет, что в своей книге он учит решать простые и сложные вопросы арифметики, которые необходимы людям при дележе наследств, составлении завещаний, разделе имущества и судебных делах, в торговле и всевозможных сделках, а также при измерении земель, проведении каналов, геометрии и прочих разновидностях подобных дел.

В этом перечне вопросов, рассматриваемых в книге, существенно важны слова о том, что приемы алджебр и альмукабала помогают решить задачи «о прочих разновидностях подобных дел».

Несколько лет назад одна школьница сказала: «Мы на кур задач не решали». Как мы видим, над ней посмеялся бы вместе с нами и Мухаммед, уже понимавший, что решение задачи не зависит от того, о гусях или курах идет речь.

Слово al-jabr (алджебр) переводчики книги Мухаммеда понимали как восполнение, восстановление, реставрация. Альмукабала переводилось словом противоставление.

Такое употребление этих слов Мухаммеда объяснили следующим образом.

Равенство

$$17 - 5 = 10 + 2$$

можно переписать в виде

$$17 = 10 + 2 + 5.$$

Вычитаемое число 5 перешло из левой половины равенства в правую, став при этом прибавляемым. Запись (—5) в то время если и употреблялась, то смысл ее был для понимания труднее, чем смысл прибавляемого (положительного) числа. Перенос вычитаемого числа из одной половины равенства в другую превращал малопонятное читателю выражение (—5) в число 5, восстановив число.

Естественно было такое преобразование назвать «восполнением, восстановлением», al-jabr, алджебром.

Переписывая равенство

$$3a - 7 = a + 3$$

в виде

$$3a - a = 7 + 3,$$

мы производим над данным равенством преобразование алджебр.

Замена полученного равенства равнозначным ему

$$2a = 10$$

представляет операцию альмукабала. Термин этот и переводился словом противоставление: по нынешней терминологии — это приведение подобных членов. В течение многих столетий и на Востоке и в Европе решение уравнений называлось действием «алджебр и альмукабала». Лишь в шестнадцатом веке слово «альмукабала» было отброшено: получился термин «алджебр».

Есть и другое объяснение происхождения слова «алджебр».

В старых изданиях знаменитой книги Сервантеса «Дон-Кихот» находим неожиданную ремарку: побежденный Дон-Кихотом противник остается для лечения в доме алгебриста, чтобы залечивать свои ушибы.

В испанском оригинале романа находим в этом месте термин algebrista (алгебрист).

В испанском и португальском языках слово «algebra» означает хирургию вообще и в частности — искусство хирурга, вправляющего ломаную руку или ногу. Алгебрист — это костоправ. Таково же значение слова алгебра и в арабском языке.

Долгое время считалось, что способ решения уравнений у Мухаммеда ал-Хорезми позаимствован из Индии. В настоящее время достижения индийских математиков VI—VII века нашего летоисчисления считаются результатом влияния греческой науки. Войска Александра Македонского, которые сопровождали и ученые, в 327 году до нашего летосчисления дошли до западных областей Индии и оставались там и в Средней Азии около двух лет.

Город Самарканд, по преданию, построен на месте, где стоял в свое время Искандер Двурогий (Александр Македонский). Таким образом, проникновение в Индию греческих научных идей могло иметь место. В последующие же века индийские математики достигли значительных результатов в решении неопределенных уравнений.

Один персидский математик придал правилу решения уравнения в терминах ал-Хорезми стихотворную форму. На русском языке это звучит так:

А л д ж е б р:

При решеньи уравненья,
Если в части одной,
Безразлично какой,
Встретится член вычитаемый,
Мы к обеим частям,
С этим членом сличив,
Равный член придадим,
Только с знаком другим,
И найдем результат нам желательный.

А л ь м у к а б а л а:

Дальше смотрим, в уравненье,
Можно ль сделать приведенье:
Если члены есть подобны,
Соединить их удобно.

В английских школах распространено такое стихотворное изложение алджебр и альмукабала:

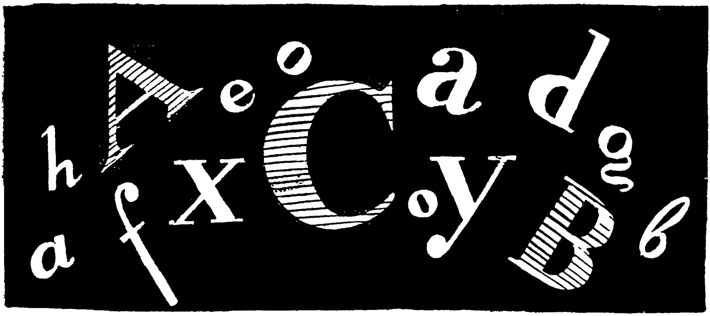
Cancel minusterms and then	Уничтожь минус-
Restore to make your algebra;	члены —
Combine your homogeneous	это будет алгебра;
terms	соедини подобные —
And this is called muqabala.	это альмукабала.

На символах:

I $ax + 2q = x^2 + ax - q$	Сделай в I равенстве ал-
II $ax + 2q + q = x^2 + ax$	джебр, будет II;
III $3q = x^2$.	а потом сделай альмука-
	бала, будет III.

Отец буквенной, нашей современной, алгебры — француз Франсуа Виет (1540—1603) — не употреблял термина «алгебра», как слова, не имеющего в европейских языках никакого смысла. Виет называл учение о числах а н а л и з о м, различая числовой анализ (арифметика) и специальный анализ (алгебра).

Каковы же фактические достижения в алгебре у разных народов? Об этом расскажем на дальнейших страницах нашей книги.



БУКВЕННЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Русский писатель восемнадцатого века Кантемир, очень образованный человек для своего времени, писал:

«Алгебра есть часть математики весьма трудная, но и преполезная, понеже служит в решении труднейших задач всея математики. Можно назвать ее генеральною (общею) арифметикою, понеже части их (то есть арифметики и алгебры) между собою сходны, только что арифметика употребляет для всякого числа свои особливые знаки (цифры), а алгебра генеральные или общие (буквы), которые всякому числу служат. Наука сия, сказывают, в Европу пришла от арап, которые мнят быть ее изобретателями».

Действительно, характерную, бросающуюся в глаза, особенность алгебры составляет обозначение в ней чисел вместо цифр буквами. На первых уроках алгебры это всегда затрудняет учащихся.

Однако употребление букв вместо цифр имеет место и в арифметике и геометрии.

Отдельные случаи употребления букв или особых знаков для обозначения неизвестного числа встречаются в далеком прошлом, но систематическое употребление букв в алгебре является достижением нового времени. Особенно важное значение имело введение буквенных коэфициентов, которое осуществляется в конце шестнадцатого века.

Для чего нужно введение в математику букв вместо цифр — и нужно ли это? Быть может, прав дядя знаменитого ученого Эйнштейна, который на вопрос своего племянника-школьника сказал, что «алгебра — это арифметика для лентяев, которым лень думать и решать задачи при помощи арифметики, почему они обозначают числа буквами, делают с последними какие-то действия и добиваются ответа».

Что буквенные обозначения в математике нужны, можно показать на простых примерах.

Пример I.

Существует такая игра.

Обозначают дни недели от воскресенья до субботы номерами от первого до седьмого. Каждый из играющих задумывает один из дней, не сообщая другим. Один из играющих берется указать, какой день кем был задуман.

Угадывающий предлагает всем участникам игры выполнить про себя над задуманным числом следующие действия.

К примеру, была задумана пятница — шестой день. Предлагается:

1) умножить задуманный номер дня на 2:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) прибавить к произведению 5:

$$12 + 5 = 17;$$

3) умножить сумму на 5:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) приписать к произведению в конце нуль и назвать результат: 850.

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает

$$850 - 250 = 600.$$

Так же отгадываются и другие дни, задуманные играющими. Первая цифра дает номер дня.

Пример II.

Все играющие обозначаются числами 1, 2, 3... Потом нумеруются их пальцы, в определенном порядке, числами от 1 до 10; и, наконец, нумеруются суставы пальцев в определенном порядке, от 1 до 3.

Играющие надевают кольца на один из суставов пальца.

Пусть, например, у *четвертого* человека кольцо находится на *втором* суставе *пятого* пальца.

Угадывающий предлагает всем выполнить про себя следующие действия (возьмем пример, когда играющий будет 4-м и надел кольцо на 2-й сустав 5-го пальца):

1) номер играющего умножить на 2:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) к полученному произведению прибавить 5:

$$8 + 5 = 13;$$

3) полученную сумму умножить на 5:

$$13 \cdot 5 = 65;$$

4) к произведению прибавить номер пальца, на котором находится кольцо:

$$65 + 5 = 70;$$

5) сумму умножить на 10:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

6) к произведению прибавить номер сустава, на котором находится кольцо:

$$700 + 2 = 702.$$

Результат объявляется угадывающему.

Тот отнимает от полученного числа 250 и получает

$$702 - 250 = 452.$$

Цифры (слева направо) отгадывают номер человека, пальца и сустава: кольцо находится у четвертого человека на пятом пальце и втором суставе. Так же можно угадывать номера и всех остальных участников игры.

Пример III.

Пусть играющие задумают и отметят каждый у себя четыре цифры: первое, второе, третье и четвертое число. Положим, кто-то задумал 8, 6, 4, 2.

Угадывающий предлагает выполнить следующие действия:

1) умножить первое число на 2:

$$8 \cdot 2 = 16;$$

2) к произведению прибавить 5:

$$16 + 5 = 21;$$

3) сумму умножить на 5:

$$21 \cdot 5 = 105;$$

4) к произведению прибавить 10:

$$105 + 10 = 115;$$

5) к сумме прибавить второе задуманное число:

$$115 + 6 = 121;$$

6) результат умножить на 10:

$$121 \cdot 10 = 1210;$$

7) к произведению прибавить третье задуманное число:

$$1210 + 4 = 1214;$$

8) сумму умножить на 10:

$$1214 \cdot 10 = 12140;$$

9) к произведению прибавить четвертое задуманное число:

$$12140 + 2 = 12142.$$

Результат сообщается угадывающему. Он отнимает от него 3500:

$$12142 - 3500 = 8642.$$

Цифры этого числа, слева направо, дают задуманные числа.

Если было задумано три или два числа, то вычисление надо остановить на седьмом или пятом действии и вычитывать из объявленного числа 350 или 35, получим:

$$1214 - 350 = 864,$$
$$121 - 35 = 86.$$

Эти «математические забавы» взяты из первого серьезного руководства по математике на русском языке — из знаменитой «Арифметики» (1703) Леонтия Филипповича Магницкого (1669—1739).

Мы дали по одному численному примеру каждой из них. Можно ли считать, что эти правила справедливы для любых чисел и их вариантов? Такой вывод может оказаться неправильным.

Чтобы получить общее правило, применимое ко всем числам, надо это правило доказать не на частном числовом примере, а в общем виде.

Обозначим искомое число буквой. Общее доказательство правила угадывания для наших игр делается так.

Пример I.

Пусть задуман день a.

Выполним указанные в первом примере действия:

1) $a \cdot 2 = 2a;$
2) $2a + 5 = 2a + 5;$
3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25;$
4) $(10a + 25) \cdot 10 = 100a + 250;$
5) $100a + 250 - 250 = 100a.$

Получаем a сотен, a — номер задуманного дня.

Пример III.

Пусть задуманы числа a, $в$ c, d.

Выполним действия:

1) $a \cdot 2 = 2a;$
2) $2a + 5 = 2a + 5;$
3) $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25;$
4) $10a + 25 + 10 = 10a + 35;$
5) $(10a + 35) + в = 10a + в + 35;$
6) $(10a + в + 35) \cdot 10 = 100a + 10в + 350;$

7) $(100a + 10в + 350) + c = 100a + 10в + c + 350;$

8) $(100a + 10в + c + 350) \cdot 10 = 1000a + 100в + 10c + 3500;$

9) $(1000a + 100в + 10c + 3500) + d = 1000a + 100в + 10c + d + 3500.$

Вычтя 3500, получим:

$1000a + 100в + 10c + d,$

то есть четырехзначное число, которое состоит из искомых четырех цифр.

Когда мы обозначаем задуманные числа буквами, то результат будет относиться не к какой-нибудь отдельной, а к любой цифре.

Докажите для второго примера «правило угадывания» самостоятельно.

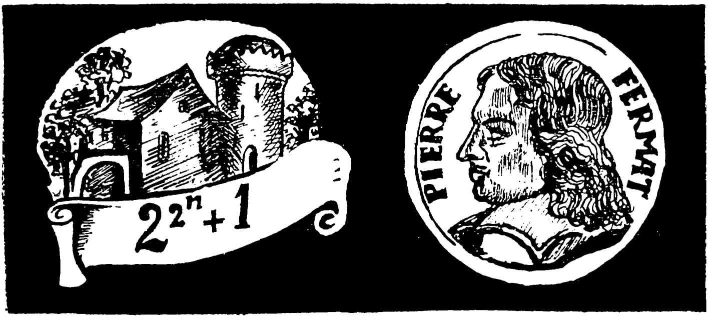
Таких «числовых фокусов» существует много, и вы сами можете их придумать.

Приведенных примеров достаточно, чтобы убедиться в следующем: общие правила в математике выводятся не нацифровых, а на буквенных обозначениях чисел. Решение какой-нибудь задачи в алгебре является общим решением всех задач этого рода, как учил ал-Хорезми. В этом сила алгебры.

Великий немецкий философ и математик Лейбниц (1646—1716) писал:

«До открытия алгебры, этого великого орудия и замечательного доказательства человеческой проницательности, люди смотрели с изумлением на некоторые доказательства древних математиков».

На следующих страницах нашей книги вы увидите, какие большие выгоды при решении задач дает алгебра в сравнении с арифметикой.



УРАВНЕНИЯ С БУКВЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Особенное значение имело введение в алгебру уравнений с буквенными коэффициентами. Покажем это на примере, взятом из школьной практики.

В классе учащиеся решали системы уравнений, каждый — свою, не такую, как у других.

1) $3x+4y=5$, $6x+7y=8$

3) $3x+5y=7$, $9x+11y=13$

2) $2x+5y=8$, $11x+14y=17$

4) $5x+7y=9$, $11x+13y=15$.

Хотя системы эти различные, но ответы у всех оказались одинаковыми, что очень удивило класс.

Рассматривая внимательно системы, ученики заметили, что во всех системах коэффициенты составлены по одному и тому же правилу: первый коэффициент произвольный, дальнейшие в данной системе образуются прибавлением некоторого постоянного числа к предшествующему коэффициенту:

3, 4, 5, 6, 7, 8;

2, 5, 8, 11, 14, 17 и так далее.

Можно ли считать на основании проверки нескольких числовых примеров доказанным, что такого рода системы уравнений всегда имеют одно и то же решение?

Мы знаем из предыдущих рассуждений, что числовые примеры не доказывают общего правила. Вот исторический пример этого. Великий математик XVI—XVII веков Ферма рассматривал числа:

$$2^{2^0}+1=3;\ 2^{2^1}+1=5;\ 2^{2^2}+1=17;\ 2^{2^3}+1=257,$$

$2^{2^4}+1=65537$[1].

Все пять полученных результатов суть простые числа, делятся только сами на себя или на единицу.

Можно ли утверждать, что $2^{2^n}+1$ при любом натуральном n будет число простое?

Нельзя.

Эйлер показал, а вы проверьте, что $2^{2^5}+1=4\,294\,967\,297$ есть число составное, делящееся на 641. Удалось проверить (к 1960 году) еще 36 чисел вида $2^{2^n}+1$ при разных n, бо́льших 4, все они оказались составными[2].

Возвратимся к нашим уравнениям.

Напишем ту же систему уравнений с буквенными коэффициентами, которые составляются так.

Первый коэффициент есть некоторое число a, дальнейшие получаются прибавлением к предшествующему коэффициенту одного и того же числа n:

$$ax+(a+n)\,y=a+2n,$$
$$(a+3n)\,x+(a+4n)\,y=a+5n.$$

Раскроем скобки и вычтем первое уравнение почленно из второго; получаем:

$$3nx+3ny=3n,$$

или, так как $n\neq 0$,

$$x+y=1;\ x=1-y.$$

Подставляя это значение в первое исходное уравнение, получаем $y=2$; $x=-1$.

---

[1] $2^0=1,\ 2^{2^0}+1=3$.

[2] Прочтите интересную книжечку: В. Серпинский. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах, М.—Л., Физматгиз, 1963.

Так как a и n произвольные числа, то все системы двух уравнений с двумя неизвестными, у которых коэффициенты составлены по указанному выше правилу, имеют одно и то же решение:

$$x = -1, y = 2.$$

Все общие свойства уравнений и систем их могут быть получены только на основании изучения уравнений с буквенными коэффициентами.

Уравнения с буквенными коэффициентами ввел Виет. Его часто называют отцом буквенной или символической алгебры. Вы знаете, или узнаете в восьмом классе, формулы Виета для квадратных уравнений. Формулы эти выводятся из уравнений с буквенными коэффициентами и распространяются также на уравнения высших степеней. Они представляют собой очень важное достижение алгебры.

Как же развивалась алгебра у разных народов?

АЛГЕБРА ВАВИЛОНЯН

Самые ранние сведения о возникновении алгебры в виде правил решения уравнений мы имеем от вавилонян третьего и, главным образом, второго тысячелетий до начала нашего летоисчисления. Вавилоняне того времени писали на глиняных плитках или кирпичиках, в которые вдавливали палочкой свои письмена. Высушенные на палящем солнце, эти плитки с «написанными» на них письменами сохранились в большом количестве до наших дней, пролежав в земле четыре-пять тысячелетий. В настоящее время выкопано несколько тысяч таких кирпичных табличек. Они имеются в ленинградском Государственном Эрмитаже и в Музее изобразительных искусств имени А. С. Пушкина в Москве.

Древние математические памятники других народов, писавших на менее прочном материале, до нас почти не дошли.

Так, например, раскопки в Пакистане (в местности Мохенджо́-Даро́, на берегу реки Инд) обнаружили памятники высокой для своего времени культуры: остатки двухэтажных домов, остатки канализации города, мастерских, линейку с делениями, свидетельствующую о десятичной системе счисления, разные предметы житейского обихода. Эти памятники относятся к той же эпохе, что и вавилонские таблички, но «письменных» памятников там почти нет. В Индии писали на пальмовых листьях, которые при влажном жарком климате страны сохраняются очень недолго.

Изучение вавилонской истории, в том числе и изучение истории математики Вавилона, находится в исключительно благоприятном положении. Специалисты по вавилонской истории жалуются не на недостаток источников, а на то, что «прочитывание вавилонских памятников не поспевает за богатыми новыми находками их».

Среди большого числа вавилонских глиняных документов имеется много памятников математического содержания, в том числе своеобразное собрание математических таблиц на 44 плитках. Это древнейший представитель математических словарей (энциклопедий).

В вавилонской математике, в отличие от египетской и ранней греческой, появляются зачатки числовой алгебры в виде решения уравнений и систем уравнений первой и второй степени.

Мы имеем здесь ряд задач на вычисление сторон прямоугольника, в которых дается площадь и сумма или разность сторон и знакомые нам по нашим задачникам системы уравнений:

$$x \pm y = a,\ xy = в;$$
$$x \pm y = a,\ x^2 + y^2 = в$$

и так далее.

Имеются примеры, показывающие возникновение квадратных уравнений из практических задач.

В дошедших до нас решениях вавилонянами квадратных уравнений можно видеть первое появление теоретической математической науки.

Иногда говорят и пишут, что вавилонская математика была чисто практической. Это неверно. В Вавилонии занимались математикой «не только те, кому на сие должность есть», то есть не только практики, которые математикой себе хлеб зарабатывали. Король Ашурбанипал (668—626 гг. до нашего летосчисления) заявляет о себе: «Я совершаю запутаннейшие деления и умножения, которые едва выполнимы. Я читаю хитроумные таблички на темном шумерском (древневавилонском — *И. Д.*) языке, которые трудно передаваемы на разговорном наречии».

Язык шумеров, народа, создавшего основы вавилонской культуры, был во втором и первом тысячелетиях до нашего летосчисления мертвым, непонятным населению. Слова и знаки этого мертвого языка сохранились в ученых трудах и важных документах, как у европейских народов латинские слова или в России — старославянские.

То, что вавилоняне использовали знаки мертвого шумерского языка для математических записей, содействовало зарождению в вавилонской математике символов — этого основного условия возникновения настоящей математики.

Для истории алгебры это факт первостепенной важности[1].

---

[1] О Вавилоне и его культуре, в том числе и математической, прочтите увлекательную книгу Л. Липина и А. Белова «Глиняные книги». (Л., «Детская литература», 1956).

АЛГЕБРА ЕГИПТЯН

Египет, благодаря многочисленным сохранившимся памятникам, — наиболее широко известная страна древности. Египетские пирамиды, эти «рукодельные горы», как их назвал русский путешественник более ста лет назад, сфинксы (их можно видеть в Ленинграде) и многочисленные произведения египетского искусства известны во всем мире.

Рассказ о египетской культуре можно найти в книге Н. Петровского и А. Белова «Страна Большого Хапи» (Л., Детгиз, 1955).

В настоящее время известны два значительных и 30—40 мелких памятников египетской математики.

Самым древним из этих памятников является Московский папирус, содержащий решения 25 задач. Его относят к эпохе около 1900 лет до начала нашего летосчисления.

Значительно богаче содержанием так называемый папирус Ахмеса (по имени автора), или Райнда (по имени приобревшего его 100 лет назад собирателя). Он написан лет на 200 позднее Московского папируса. Оба документа в сухом климате Египта сохранились, хотя и с изъянами. Заглавие папируса Ахмеса: «...Наставление, как достигнуть знания всех темных (трудных) вещей... всех тайн, которые скрывают в себе вещи. Написано... [в таком-то месяце такого-то года в царствование такого-то царя]... писец Ахмес написал это».

Название папируса Ахмеса показывает, как высоко оценивалась математика в Египте. Еще явственнее такая оценка видна из другого факта.

В самое последнее время раскопаны остатки древнейших пирамид эпохи 2900—2800 лет до начала нашего летосчисления — пирамиды фараона Джосера. Это древнейшие известные нам каменные постройки.

Строитель их — Имхотеп — почитался сначала как полубог, позднее — в течение тысячелетий — как бог, которому строили храмы еще в первом веке до начала нашего летосчисления. Имхотеп — имя самого древнего математика, нам известного.

Египтяне в математике вообще, и в особенности в решении уравнений, сильно отстали от вавилонян. У них мы не находим настоящего решения уравнений первой степени, не говоря уже об уравнениях второй или третьей степеней. Но мы находим в папирусе Ахмеса решение 24 задач, требовавших применения уравнений первой степени. Они решаются приемом, который позднее через арабов перешел к европейским народам, употреблялся ими всеми и, в несколько измененной форме, употребляется до сих пор в нашей начальной школе при решении арифметических задач. Это — способ решения задач методом предположений, или «фальшивое правило», как его называет Леонтий Филиппович Магницкий в своей «Арифметике».

В Египте существовали профессии, которым были необходимы математические знания. Это писцы, правительственные чиновники, вроде современных бухгалтеров на крупных предприятиях. Писец — и законовед, и статистик, и вычислитель — занимал весьма привилегированное общественное положение. Это видно из дошедших до нас документов.

Некий отец, наметив своему сыну карьеру писца, посылает его в «дом учения писанию» и дает ему письменное наставление. Изобразив безотрадную жизнь крестьянина, каменщика, садовника, кузнеца, ювелира и представителей многих других профессий, он говорит о карьере писца и путях подготовки к ней:

«Обрати свое сердце к книгам... Как в воде плавай в них... Писец не будет нищим, но всегда сыт... Я не знаю другой должности, которая могла бы дать основание к подобному изречению, поэтому внушаю тебе любить книги, как родную мать, и излагаю тебе все преимущества знающих их...»

То, что писец должен был обладать математическими знаниями, видно из упреков опытного писца своему малознающему товарищу:

«Я объясню тебе, в чем твоя сущность, когда ты говоришь: «Я полномочный писец войска».

Тебе поручают выкопать озеро. Ты приходишь ко мне, чтобы осведомиться насчет провианта для солдат. Ты говоришь мне: «Вычисли это мне». Ты неисправен по своей должности, и то, что я тебя должен поучать выполнению твоих обязанностей, обрушится на твой же затылок...

Скажу тебе кое-что еще в дополнение... Ты — царский писец — приведен для какого-нибудь важного дела... Необходимо сделать укрепление... Спрашивают у генералов, сколько для этого укрепления потребно кирпичей, и собрались все писцы, и ни один из них не знает, они все полагаются на тебя и говорят: «Друг, ты — опытный писец, так реши же быстро для нас... Не допусти, чтобы о тебе сказали: «Есть также такие вещи, которых и ты не знаешь».

Важное достижение египтян в алгебре — метод решения задач на уравнения первой степени «фальшивым правилом». Применение этого правила было усовершенствовано (механизировано) арабскими математиками. Пример его вы найдете в главе нашей книги, специально посвященной «фальшивому правилу».

Правила ложного положения открыли и применяли и китайские и индийские математики.

АЛГЕБРА ГРЕКОВ

Решение уравнений требует знаний о числах: натуральных, дробных, отрицательных — для уравнений первой степени, о числах иррациональных и мнимых — для решения уравнений степени выше первой.

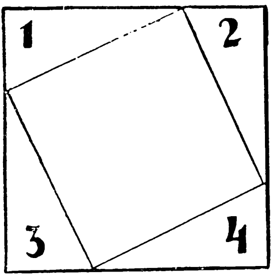
В школе вы решаете простейшие уравнения в пятом, шестом и седьмом классах, сначала такие, для решения которых было достаточно знания арифметики целых и дробных чисел. Изучив отрицательные числа, вы без труда стали решать любые уравнения первой степени и их системы. В седьмом классе решаются уравнения квадратные, для чего нужно прежде всего знание иррациональных и мнимых чисел. Эти числа изучаются в старших классах школы.

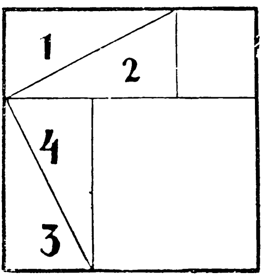
По мере усложнения решаемых уравнений требуется изучение новых видов чисел. Так шло, в общем, и развитие алгебры: жизнь требовала от человека решения все новых и новых задач, которые облекались в форму уравнений. Усложняющиеся уравнения требовали для своего решения новых чисел. Заминка в создании новых чисел для решения уравнений задерживала и замедляла развитие алгебры.

Греки освоили математические знания народов, развивших свою культуру в более раннюю эпоху. Усвоив египетскую геометрию, греки подняли ее на несравненно более высокую ступень, так что создалось широко распространенное мнение об особой способности греков к геометрии, о «геометрическом духе» греков.

Вычислительные навыки — арифметико-алгебраические знания — вавилонян греки также усвоили, но в учении о числе греческих математиков увлекли главным образом лишь теоретические свойства натуральных чисел. Они называли числом только целое положительное число — как собрание (множество) единиц. Дробь для греческих математиков не число, а отношение двух целых чисел. Лишь после расцвета, которого греческая математика достигла в III веке до начала нашего летосчисления, в Грецию перешли дроби вавилонян, сходные с нашими десятичными дробями, в добавление к употреблявшимся на практике долям (египетским дробям с числителем — единица). Однако в период с VI века по III (от школы Пифагора и до Евклида) была создана очень серьезная теоретическая арифметика целых положительных чисел, которая включает ряд вопросов, превышающих программу наших средних школ. Но для решения уравнений эти знания почти не использовались.

Не имея для решения уравнений необходимых чисел (отрицательных, иррациональных), греки создали для этого геометрические средства в виде так называемой геометрической алгебры: числа и действия над ними изображались отрезками прямых и геометрическими построениями. Это можно иллюстрировать на таком примере.





В Пифагорейской школе в VI веке была доказана теорема, которую знали вавилоняне, и египтяне, и другие древние народы: сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Это так называемая теорема Пифагора. Она доказывается чисто геометрически, передвижением некоторый частей фигуры.

Если катеты треугольника выражаются числами a и $в$, гипотенуза числом c и все три стороны измеряются одной мерой, то теорема Пифагора выражается равенством:

$$a^2 + в^2 = c^2.$$

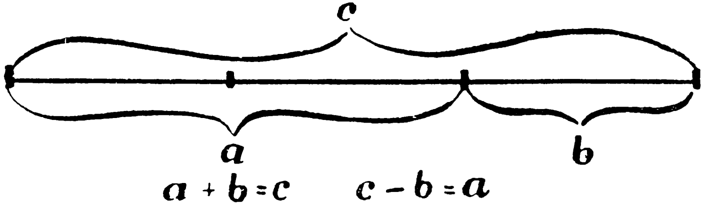
Эта теорема, как и многие другие, могла дать толчок к развитию геометрической алгебры.

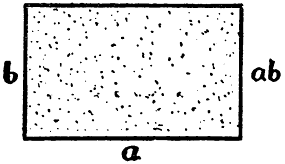
Если $a = 1$ и $в = 1$ (катеты равны единице меры длины), то $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, и, по нашей алгебре, $c = \sqrt{2}$ (действие извлечения квадратного корня было известно задолго до греков древним народам). Число $\sqrt{2}$ не может быть ни целым числом, ни отношением целых чисел (дробью). Греческие математики это строго доказывали. Оказалось, что длина имеющегося перед глазами отрезка прямой — гипотенуза треугольника — не выражается имевшимися у греков числами. Отсюда было сделано заключение: отрезки и действия над ними могут выражать результаты рассуждений и построений, которые в некоторых случаях не выражаются числом. Арифметика отрезков — геометрическая арифметика — более общая, чем числовая арифметика. Научная мысль греков и переключилась на геометрическую арифметику и геометрическую алгебру.

Некоторые основные понятия геометрической алгебры

Выбрав какую-нибудь единицу длины, мы можем каждое целое число n изобразить в виде отрезка, имеющего длину, равную n единицам.

Сумма и разность чисел изображаются отрезками.





Произведение чисел a и $в$ представляет площадь прямоугольника; греки обычно и говорили вместо «произведение $ав$» — «площадь $ав$».

Сложнее оказалось геометрическое выполнение деления чисел, которое требовалось для решения самых простых уравнений вида $вx = a$, откуда $x = \frac{a}{в}$.

Геометрическое выполнение деления $a:в$ в греческой математике производилось при помощи теорем о г н ó м о н е.

Такие теоремы в греческой геометрии играли очень большую роль.

Доказательство Пифагором теоремы о сторонах прямоугольного треугольника в то время считалось высочайшим достижением науки. Слава этой теоремы не меркла в течение двух тысячелетий: до нового времени в европейских университетах для получения высшей квалификации в математике требовалось доказать теорему Пифагора новым способом. Этих доказательств уже имеется больше сотни.

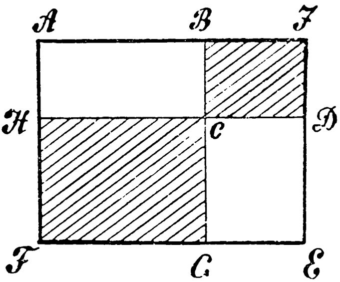
В древности существовала легенда, согласно которой Пифагор, завершив доказательство теоремы, принес в жертву сто быков. Ничего подобного, конечно, не было, так как мировоззрение пифагорейцев не только не допускало кровавых жертв, а даже запрещало употребление в пищу мяса.

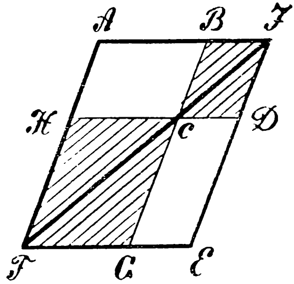
Другие же легенды связывают принесение в жертву ста быков с открытием свойства гномона. Это значит, что открытие гномона греки считали столь же важным приобретением науки, как и важнейшая теорема о прямоугольном треугольнике.

В том, что теорема Пифагора действительно является важнейшей основой математики, вы убеждались много раз в курсе геометрии, тригонометрии, физики. Изучение высшей математики подтвердит это еще яснее.

Что же такое г н ó м о н?

Проведите в прямоугольнике, как в параллелограмме, диагональ FJ и через точку C две прямые HD и BG, параллельные сторонам. Фигуры, оставшиеся после того, когда мы вырезали какой-нибудь меньший прямоуголь-





ник или параллелограмм, например *BCDJ* или *HCGF*, называются г н о́ м о н а м и. Площадь фигуры *ABCH* в обоих случаях равна площади фигуры *CDEG*. Действительно:

$$\text{пл. } \triangle AJF = \text{пл. } \triangle FJE,$$
$$\text{пл. } \triangle HCF = \text{пл. } \triangle FCG,$$
$$\text{пл. } \triangle BJC = \text{пл. } \triangle CJD;$$

если отсюда отнять равные площади от равных половин площадей *FAJ* и *FEJ*, получим:

$$\text{пл. } ABCH = \text{пл. } CDEG.$$

Назовем фигуры *ABCH* и *CDEG* д о п о л н е н и я м и г н о м о н а. Имеем теорему:

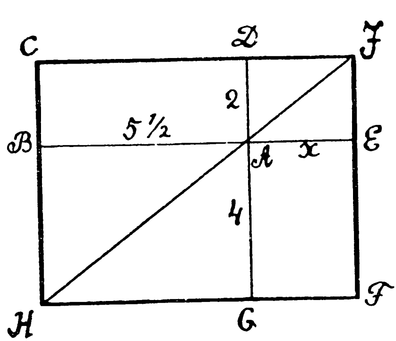
В п а р а л л е л о г р а м м е (п р я м о у г о л ь н и к е) п л о щ а д и д о п о л н е н и й г н о м о н а р а в н ы.

Эта теорема и позволяет решить задачу о геометрическом делении чисел (решения уравнения $вx = a$).

Выполним построение на числовом примере. Надо решить уравнение $4x = 11$, откуда $x = \frac{11}{4}$.

Представим число 11 в виде произведения $2 \cdot \frac{11}{2} = 2 \cdot 5\frac{1}{2}$, иными словами, в виде площади прямоугольника с основанием $5\frac{1}{2}$ и высотою 2.

Дополним полученный прямоугольник



$ABCD$ прямоугольником $AGHB$ (с основанием $AB=5\frac{1}{2}$ и высотою $BH=4$), проведем диагональ HA и продолжим ее до пересечения с продолжением CD в точке J. Проведем $JF \parallel DG$ и продолжим BA и HG до точек E и F, как показано на чертеже. Прямоугольник $ABCD$ оказался дополнением гномона. Площадь прямоугольника $AEFG =$ $=$ пл. $ABCD$, $4 \cdot x = 5\frac{1}{2} \cdot 2 = 11$,

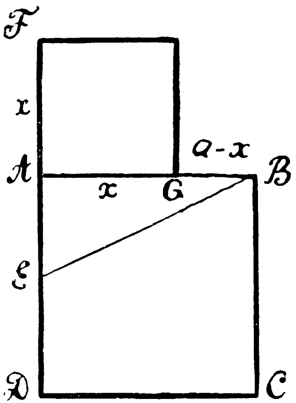
$$AE = x = \frac{11}{4}.$$

Пример наш показывает возможность решения уравнения $вx = a$ геометрически. Свойства гномона были греками использованы для решения очень многих гораздо более сложных вопросов.

Геометрическое решение квадратного уравнения. Во всех учебниках мы встречаем понятие деления данного отрезка в крайнем и среднем отношении. Вопрос заключается в делении данного отрезка a на части x и $a-x$, чтобы

$$x^2 = a(a-x).$$

В наших учебниках вопрос сводится к решению следующего квадратного уравнения, полученного из доказываемого равенства: $x^2 + ax - a^2 = 0$.



Греческие математики выполняли построение, то есть решение квадратного уравнения, геометрически в самом начале учебника и весьма красиво.

Строим на данном отрезке $a = AB$, как стороне, квадрат $ABCD$. Пусть точка E будет середина стороны AD; $AD =$ $= AB = a$, $AE = \frac{a}{2}$, и по пифагоровой теореме, $EB^2 = a^2 +$ $+ \frac{a^2}{4}$.

Продолжим DA и отложим $EF = EB = EA + AF = = \frac{a}{2} + x$

(AF обозначено через x).

Построим на отрезке AF квадрат;

$$AG = x,\ GB = a - x.$$

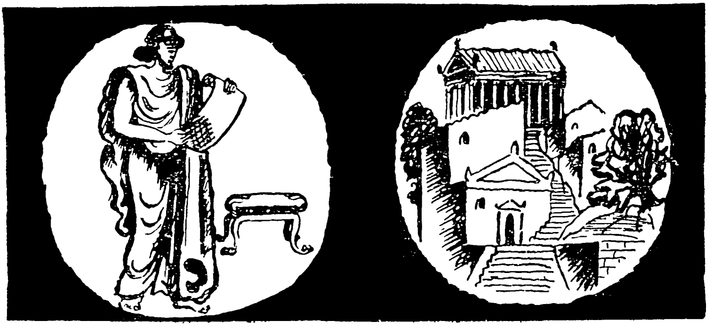
$$EF^2 = EB^2,\ \text{то есть}\ \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} = a^2 + \frac{a^2}{4},$$

$$x^2 = a\,(a - x),\ \text{и}$$

AG^2 или $x^2 = a\,(a - x)$; AG есть средняя пропорциональная между отрезком a и остальной его частью $(a - x)$.

Полученное значение отрезка x есть один из корней квадратного уравнения $x^2 + ax - a^2 = 0$. Он найден геометрическим построением.



ДИОФАНТ

Решения уравнений геометрическими методами часто бывают изящны. Однако они громоздки и постепенно, с развитием науки и производства, перестали удовлетворять ученых. Действительно, познакомившись с приемом решения уравнения на нашем примере, вы видите, что он возможен в ученых трактатах, но мало пригоден на практике, где необходим быстрый ответ. Через 300 лет после расцвета геометрических методов Евклида, в которых нет ни одной вычислительной задачи (даже число π появляется уже после Евклида), начинают появляться вычислительные методы в астрономии, тригонометрии, географии, землемерии.

Некоторые историки видят в этом отходе от методов Евклида упадок греческой математики, или они считают, что грекам был свойствен геометрический дух и числового арифметического духа, свойственного восточным народам, они якобы были лишены.

Когда же в III—IV веках нашего летосчисления александрийский математик Диофант проявил «числовой дух», поразивший Ферма и Эйлера, крупнейших математиков XVII века, упомянутые историки стали объяснять это тем, что Диофант не грек, а происходит из восточного народа и что его творчество находилось под влиянием индийской математики.

О восточном происхождении Диофанта мы ничего не знаем, а индийская математика в эпоху Диофанта не давала греческой ничего, а, наоборот, скорее получала от нее.

Конечно, не упадок греческого научного духа и не восточные влияния породили греческую арифметико-алгебраическую математику в первые века нашего летосчисления, а естественное развитие греческой математики, ее переход от ставших для нее узкими геометрических методов к арифметико-алгебраическим. В лице Диофанта в III—IV веках нашего летосчисления греческая математика достигла новой вершины, которая смело может быть поставлена рядом с ее геометрическими достижениями в предшествующие века.

Мы не знаем о Диофанте ничего, кроме предания о надписи на его могильном камне. Эта надпись дает возможность определить лишь продолжительность жизни Диофанта из составляемого уравнения. Алгебраическая надпись на могиле является весьма естественным для «отца греческой алгебры».

От греческого поэта и математика IV века нашего летосчисления Метродора до нас дошел ряд стихотворений, в числе которых 31 математическое. Одно из них, по преданию, является надписью на могильном камне Диофанта.

Надпись эта в переводе, подражающем древним стихам, такова:

Путник, здесь прах погребен Диофанта. И числа поведать
Могут, о чудо, тебе, сколь долог был век его жизни.
Частью шестою всей жизни явилось прекрасное детство.
Дванадесятая часть протекла еще жизни, покрылся
Пухом его подбородок; седьмую прожив еще долю,
Браком себя сочетал Диофант. Жизни брачной год пятый
Был осчастливлен рожденьем премилого первенца сына,
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
Дал на земле по сравненью с отцом, и в печали глубокой
Старец земного удела конец воспринял, переживши
Года четыре, с тех пор как он сына лишился. Скажи мне,
Сколько лет жизнь Диофанта длилась в этом мире прекрасном?

Кто-то изложил решение латинскими стихами размера надписи. Вот попытка передать эти стихи в русском переводе:

Иксом число неизвестных годов обозначив,
Ты уравненье составь, хорошенько подумав:

Член его первый — шестой будет долею икса,
Дальше — двенадцатой частью, а также седьмою
Ты увеличь результат, не забыв половину.
Пять и четыре добавив, ты икс и получишь.
Действия все совершив, ты увидишь, коль скоро
Не пропустил ничего, что тот возраст героя
Восемь десятков с четверкой составит годов.

Из творений Диофанта дошли до нас шесть из тринадцати книг, которые он называл «Арифметикой». Однако это не есть изложение арифметики в нашем значении этого слова, а решение уравнений на нахождение чисел по условиям, часто весьма сложным. Почти все уравнения неопределенные, имеющие бесчисленное множество решений; Диофант, ограничиваясь нахождением одного решения, проявляет исключительное остроумие, находя для каждой задачи свой специфический способ решения, целесообразную подстановку.

У Диофанта нет общего метода: каждая задача требует свою, часто хитроумную, подстановку.

Ни одно сочинение Диофанта на русский язык не переведено. Нет и популярного изложения трудов Диофанта. Поэтому в дальнейшем мы уделим «отцу греческой алгебры» несколько больше меса, чем другим древним математикам.

Диофантовы уравнения

Уравнение, содержащее более одного неизвестного, или система уравнений, в которой число неизвестных больше числа уравнений, называются неопределенными уравнениями. Решение таких уравнений в целых числах составляет важный раздел математики. Решением таких уравнений в рациональных (целых и дробных) числах и занимался Диофант в дошедших до нас книгах. Часто область математики, занимающаяся решением неопределенных уравнений, называется диофантовым анализом или диофантовою алгеброю. Диофант знает правила знаков при умножении отрицательных чисел, но в явной форме при решении уравнений отрицательных чисел не употребляет. Потребовалось еще много столетий, прежде чем отрицательные корни уравнений получили равноправие с положительными.

В противоположность своим знаменитым предшественникам — Евклиду, Архимеду, Аполлонию, — которых люди средних веков все же знали, хотя и не оценили по достоинству, Диофант был долгие столетия совершенно забыт. Не было среди греческих математиков ни одного, кто был бы в состоянии понимать Диофанта (единственным исключением была растерзанная христианской толпой в 415 году Ипатия, которая, по преданиям, в своих лекциях толковала Диофанта).

Арабы, жадно впитывавшие греческую науку и с восьмого века переводившие на свой язык сочинения Евклида, Архимеда и других, не придавали творениям Диофанта должного значения, хотя в дальнейшем развили применение алгебраических приемов и должны были бы оценить важность идей Диофанта. Лишь в 1464 году немецкий математик Иоганн Мюллер (Региомонтан) обнаружил греческую рукопись с именем какого-то никому не известного Диофанта[1].

Гораздо менее, чем другие великие математики Греции, популярен Диофант и в наши дни, хотя его труды, как мы увидим, представляют интерес и для школьной математики. Поэтому в дальнейшем дается решение нескольких задач Диофанта.

Задачи Диофанта

Найти 3 числа — таких, чтобы сумма всех трех и суммы каждой из пар их были квадратами.

Решение

Обозначим сумму всех трех чисел через $(x+1)^2$, а самые числа через I, II, III:

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}=x^2+2x+1;$$

[1] Иоганн Мюллер (1436—1476), известный по кличке Региомонтан — Королегорский, Кенигсбергский. Много раз разные наши авторы указывали, что Региомонтан родом из бывшего прусского Кенигсберга, нынешнего Калининграда. Это неверно. Мюллер — уроженец Кенигсберга Баварского, вблизи Нюрнберга, в котором протекала его деятельность.

пусть сумму первого и второго искомого числа примем за x^2:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = x^2.$$

Тогда третье число

$$\mathrm{III} = 2x + 1.$$

Обозначим сумму второго и третьего чисел, которая, по условию, должна быть квадратом, через $(x - 1)^2$.

$$\mathrm{II} + \mathrm{III} = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2.$$

Так как $\mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III} = x^2 + 2x + 1$, то

$$\mathrm{I} = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x.$$

Но по условию $\mathrm{I} + \mathrm{II} = x^2$, откуда $\mathrm{II} = x^2 - 4x$.

Отсюда $\mathrm{I} + \mathrm{III} = 4x + 2x + 1 = 6x + 1$, и эта сумма должна быть квадратом.

Положим

$$6x + 1 = 11^2 = 121, \text{ откуда } x = 20.$$

$$\mathrm{I} = 4x = 80;\ \mathrm{II} = x^2 - 4x = 320;\ \mathrm{III} = 2x + 1 = 41.$$

Диофантово уравнение на уроке ленинградской школы

Учительница, излагая новый материал на уроке алгебры, сказала:

— Выражение $x^2 + xy + y^2$ называется неполным квадратом суммы x и y.

Через некоторое время подымается рука ученика. На вопрос учительницы мальчик заявил:

— Марья Ивановна, это неверно.

Смущенная Мария Ивановна спрашивает:

— Что не верно? Я ведь не теорему доказываю или задачу решаю, я говорю, что записанный трехчлен называется неполным квадратом.

Ученик заявляет:

— А это неверно.

Вызванный к доске ученик заявляет, что если $x = 5$

и $y=3$, то выражение $x^2+xy+y^2=49=7^2$, то есть равно полному квадрату.

Пришлось объяснить классу, что трехчлен x^2+xy+ $+y^2$ есть неполный квадрат суммы $x+y$, потому что $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$, а x^2+xy+y^2 не является полным квадратом суммы $x+y$ и что мы при этом не касаемся совершенно числовых значений выражения.

Мальчик задал после этого новый вопрос: существуют ли еще другие значения для x и y, при которых числовое значение неполного квадрата является квадратным числом.

Для ответа нужно решить диофантово уравнение:

$$x^2+xy+y^2= \text{квадратному числу.}$$

Так как правая часть уравнения должна быть лишь квадратом, числовое значение которого может быть различное, то обозначим его символом $(?)^2$. Любое выражение в скобках удовлетворяет нашему уравнению. Итак, надо решить уравнение

$$x^2+xy+y^2=(?)^2.$$

Будем искать целые решения для x и y.

Преобразуем уравнение, деля все его члены на y^2, к виду: $\frac{x^2}{y^2}+\frac{x}{y}+1=\frac{(?)^2}{y^2}$, в котором $\frac{(?)^2}{y^2}$ также равняется квадратному числу.

Обозначив $\frac{x}{y}$ через z, имеем

$$z^2+z+1 = \text{квадратному числу.}$$

Пусть это квадратное число будет $(t-z)^2$, где t любое целое число, так как нам важно только то, чтобы правая часть уравнения была квадратом.

$$z^2+z+1=(t-z)^2=t^2-2zt+z^2,$$

откуда

$$(1+2t)z=t^2-1,$$

$$z=\frac{t^2-1}{1+2t}.$$

Будем давать t различные значения.

$t=2, \quad z=\frac{3}{5}, \qquad \frac{x}{y}=\frac{3}{5}, \quad x=3, \quad y=5;$

$t=3, \quad z=\frac{8}{7}, \qquad \frac{x}{y}=\frac{8}{7}, \quad x=8, \quad y=7;$

$t=4, \quad z=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}, \quad \frac{x}{y}=\frac{5}{3}, \quad x=5, \quad y=3;$

$t=5, \quad z=\frac{24}{11}, \qquad x=24, \quad y=11$ и так далее.

Получаем бесконечное количество решений уравнения, в которых x^2+xy+y^2 *рав*няется квадратному числу. Проверьте!

Диофант решает и задачи нашей школьной алгебры.

Примеры:

1) Найти 2 числа, сумма которых 20, произведение 96.

Решение:

Обозначим разность искомых чисел через $2n$, бóльшее число $10+n$, меньшее $10-n$.

Произведение $(10+n)\ (10-n)=100-n^2=96$, $n^2=4$, $n=2$, искомые числа 12 и 8.

2) Решить систему:

$$x+y=10$$
$$x^2+y^2=68$$

Решение Диофанта:

$$\frac{x+y}{2}=5.$$

Вводим обозначение: $\frac{x-y}{2}=d;$

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x=5+d,$$

$$\frac{x+y}{2}-\frac{x+y}{2}=y=5-d.$$

Подставляем полученные значения для x и y во второе данное уравнение:

$$x^2+y^2=(5+d)^2+(5-d)^2=50+2d^2=68;$$
$$d^2=9,\ d=3,\ \text{откуда}\ x=8,\ y=2.$$

Диофант не признает отрицательных корней и пользуется только значением $\sqrt{9}=3$.

Задача Диофанта № 80

(Из II книги его «Арифметики».)

Найти 2 таких числа, чтобы сумма квадрата каждого из них с другим искомым числом дала полный квадрат.

Решение Диофанта

Пусть первое число (I) будет s. Чтобы квадрат его при прибавлении второго числа дал квадрат, второе число должно быть $2s+1$, так как в таком случае выполняется требование задачи: квадрат первого числа, сложенный со вторым, дает

s^2+2s+1, то есть полный квадрат $(s+1)^2$.

Квадрат второго числа, сложенный с первым, должен также дать квадрат, то есть число $(2s+1)^2+s$, равное $4s^2+5s+1=t^2$.

Положим, что $t=2s-2$; тогда $t^2=4s^2-8s+4$. Это выражение должно равняться $4s^2+5s+1$. Итак, должно быть:

$$4s^2-8s+4=4s^2+5s+1,\ \text{откуда}\ s=\frac{3}{13}.$$

Значит, задаче удовлетворяют числа:

$$s=\frac{3}{13},\ 2s+1=\frac{6}{13}+1=\frac{19}{13}.$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{13}\right)^2+\frac{19}{13}=\frac{9+247}{169}=\frac{256}{169}=\left(\frac{16}{13}\right)^2,$$
$$\left(\frac{19}{13}\right)^2+\frac{3}{13}=\frac{361+39}{169}=\frac{400}{169}=\left(\frac{20}{13}\right)^2.$$

Почему Диофант делает предположение, что $t=2s-2$, он не объясняет. Во всех своих задачах (в дошедших до нас шести книгах его, их 189) он делает то или другое предположение, не давая никакого обоснования. Никакого общего метода для решения Диофант не дает. Притом Диофант всегда дает только одно решение, хотя все уравнения имеют более чем одно решение.

Решите следующие уравнения Диофанта:

1) Данное число есть сумма двух квадратов. Представить его в виде суммы двух других квадратов.

Указание для начала решения: пусть данное число $13 = 2^2 + 3^2$; пусть одно искомое число $s + 2$, другое $2s - 3$, $(s + 2)^2 = s^2 + 4s + 4$; $(2s-3)^2=4s^2-12s+9$. Сумма их:

$$5s^2 - 8s + 13 = 13, \quad 5s^2 - 8s = 0,$$

$$s(5s - 8) = 0, \quad 5s - 8 = 0, \quad s = \frac{8}{5};$$

$$s + 2 = \frac{8}{5} + 2 = \frac{18}{5},$$

$$2s - 3 = 2.\frac{8}{5} - 3 = \frac{16}{5} - 3 = \frac{1}{5}.$$

Проверка:

$$\left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{325}{25} = 13.$$

Составьте таблицу решений, предполагая второе искомое число равным $\kappa s - 3$ при

$$\kappa = 2, 3, 4, 5 \ldots$$

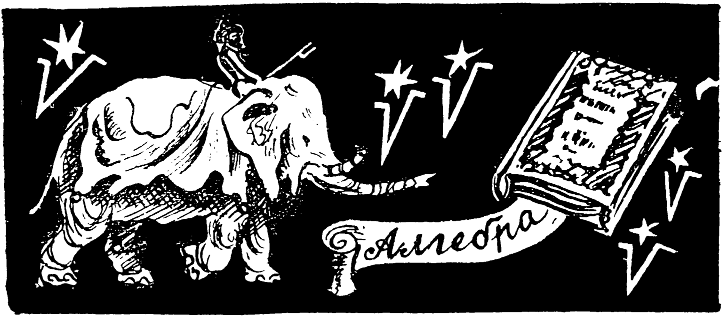
Ответы: 3 и 2; $\frac{18}{5}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{17}{5}$, $\frac{6}{5}$; $\frac{54}{17}$, $\frac{29}{17}$ ...

Проверьте!

2) Найти такое число, от прибавления которого к каждому из двух данных чисел получаются квадраты.

Указание: пусть данные числа 2 и 3, прибавляемое s; $s + 2 = x^2$ и $s + 3 = y^2$. Диофант пользуется своей догадкой, но вы можете решить обычными уравнениями, исходя из равенств $y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) = 1 = \frac{1}{k} \cdot \kappa$ при произвольном κ и полагая $y - x = \frac{1}{k}$, $y + x = \text{к}$.

При $\kappa = 1, 2, 3$ получаются отрицательные решения, которые Диофант не рассматривает. При $\kappa = 4$, $s = \frac{97}{64}$ (случай Диофанта), при $\kappa = 5$, $s = \frac{94}{25}$. Найдите дальнейшие решения и проверьте!



МАТЕМАТИКА У НАРОДОВ ВОСТОКА

В Римской империи математика никакого развития не получила. Однако какие-то воспоминания о греческой математике в ту пору еще сохранялись. В дальнейшем же, с падением империи в V веке, всякое представление о ней было забыто.

Католическая церковь также стремилась уничтожить всякое воспоминание о древней языческой культуре. За тысячу лет, с V по XV век, Западная Европа нисколько не продвинула вперед когда-то существовавшую науку. Мало кто вообще знал о ее существовании.

Но в восточных странах математика в это же время продолжала развиваться. В странах, лежащих ближе к Греции и имевших с ней более тесные культурные связи, для сохранения и развития науки древних были особенно благоприятные условия. К этим странам относится, в частности, Армения.

Математика у армян

С VII века до начала нашего летоисчисления в Закавказье упоминается племя армены. Позднее оно входило в разные образовавшиеся там государства; оно упоминается и в вавилонских памятниках. Армянские ученые работали в греческих академиях в течение сотен лет, некоторые заслужили широкую известность. В Армении продолжались занятия математикой в самые темные времена европейского средневековья.

В VII веке нашего летоисчисления в городе Шираке жил мудрец Анания. До нас дошел ряд его книг, в том числе сборник задач (в русском переводе: «Вопросы и решения Анании Ширакца». Петроград, 1918). В сборнике приведены 24 задачи, по содержанию совершенно схожие с задачами наших сборников занимательных задач. Как решал их Анания, мы не знаем. Все задачи требуют решения уравнений первой степени, которые, следовательно, решались за двести лет до того, как Мухаммед ал-Хорезми создал первое руководство алгебры и ее название.

Армяне переводили на свой язык знаменитые греческие математические труды. Сокращенное изложение, например, знаменитых «Начал» Евклида они осуществили в 1051 году, на 500 лет ранее первого перевода его с оригинала в Западной Европе.

Заслуживает нашего внимания изречение Анании Ширакца:

«Сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, что без числа никакое рассуждение философское не слагается, всей мудрости матерью его почитая».

С этой красивой характеристикой математики можно сопоставить лишь высказывание М. В. Ломоносова:

«Математику уж затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

Анания решает свои задачи в то время, когда английский монах Бэда, которого считали самым ученым человеком в Европе, говорил: «В мире есть много трудных вещей, но нет ничего столь трудного, как деление чисел... Кто усвоил это, тому ничто в мире не является трудным».

Вот несколько задач из сборника Анании Ширакца. Право же, можно подумать, что они взяты из наших сборников занимательной математики и задачников.

Была у меня морковь в огороде, и вошел туда однажды, под предлогом прогулки, некий грек и съел пятую и пятнадцатую часть всей моркови; убедившись в прожорливости мужа, я его выгнал и, войдя в огород, сосчитал и нашел сто десять корней. Итак, узнай, сколько всего было корней моркови, а также, сколько корней съел грек.

Ответ: 150 и 40.

Была охота, на которой было захвачено много дичи, и мне прислали как долю добычи кабана. Так как он был чудовищен (по величине), я взвесил его, и оказалось, что внутренности его составляли четвертую часть всего веса, голова десятую часть, ноги двадцатую, клыки шестидесятую. Туловище его весило двести десять литров. Итак, узнай, сколько всего литров весил кабан. (Литр — римский фунт, около 324 граммов).

Ответ: 360.

Некий муж, из моих близких, приобрел в Индии царственный жемчуг. Возвращаясь домой, он на первой остановке продал половину жемчуга, пятьдесят драмов за зерно. В Нахчаване он продал четвертую часть жемчуга по семьдесят драмов за зерно и, достигнув Двины, он продал двенадцатую часть жемчуга, пятьдесят драмов за зерно, так что, когда он прибыл к нам в Ширак, у него оставалось жемчуга всего двадцать четыре зерна. Итак, узнай по этому остатку, сколько всего было жемчугу, а также, сколько драмов составляла стоимость проданного жемчуга.

(Драм — мера веса, около 4 граммов; монета. Зерно — карат — мера драгоценных камней).

Ответ: 114 зерна; 6720 драмов.

Один муж зашел в три церкви и просил бога в первой: «Подай мне столько, сколько у меня есть, и дам я тебе двадцать пять дахеканов». И во второй церкви так же просил он и дал двадцать пять дахеканов, также и в третьей, и ничего у него не осталось. Итак, узнай, сколько у него прежде было.

(Дахекан — мера веса, около 4,5 грамма; серебряная монета денарий. Задача могла преследовать цель атеистической пропаганды на тему: «Заставь дурака богу молиться — лоб разобьет!»)

Ответ дан в виде египетских дробей $21\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$, то есть

$$21+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}.$$

В городе Афинах был водоем, в который были проведены три трубы; одна из труб, очень мощная, наполняла водоем в один час; вторая, более тонкая, чем эта, наполняла в два часа, а третья, еще более тонкая, наполняла в три часа. Итак, узнай, в какую часть часа трубы наполняют водоем вместе.

Ответ: $\frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{1}{22}$, то есть $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{22}=\frac{6}{11}$.

Алгебра у индийцев

Совершенно не похожа по характеру природа Индии и Греции. И это не могло не сказаться на развитии этих народов, в частности на развитии их науки.

Скудная природа Греции заставляла свой народ пристально наблюдать явления природы, находить им трезвые объяснения и искать этим объяснениям доказательства.

В поисках богатых земель греки захватывали себе колонии в различных странах (Малая Азия и ее острова, север Африки, Италия, острова Средиземного моря), а все эти завоевания и поддержка контактов требовали точных и конкретных знаний.

А роскошная, величественная природа Индии, с изумительным разнообразием форм и красок, воспитывала в народе пылкую фантазию, стремление воспевать природу в поэтических легендах, не вдаваясь в конкретный анализ окружающих явлений.

Отпечаток этого различия в мироощущении народов несет на себе и их математика.

Индийцы увлекаются большими числами. Легенды их говорят о том, что наиболее славным в народных собраниях считался тот, кто лучше всех считал. Красота геометрических фигур, отраженная в великолепных архитектурных сооружениях Индии, явилась результатом не научного построения этих фигур, а творческой интуиции, воображения.

В противоположность греческому математику, который заботился о строгости и точности доказательств, индийский геометр давал только чертеж теоремы или задачи и надписывал одно слово: «Смотри!». Необозримый мир чисел и величин приковал внимание ученых Индии и привел их к великим открытиям в арифметике и алгебре.

Математика нового времени есть результат сочетания греческой и индийской математики. Греки усовершенствовали первое могучее орудие математики — логику, то есть строгое последовательное мышление и рассуждение; индийцы — в равной мере — развили второе орудие математики — догадку, непосредственное усмотрение (интуицию).

Вся наша школьная арифметика была индийским математикам известна. Также известна была почти вся наша школьная алгебра и кое-что сверх нее.

Индийские математики Арьябхатта (VI век), Брахмагупта (VII век) и Бхаскара (XII век) и другие пользовались отрицательными числами, толкуя их как долг. Это дало возможность найти общее решение квадратных уравнений и знание того, что такое уравнение имеет два корня (про отрицательные корни они говорили, что «люди их не одобряют»).

Индийские ученые знали решение неопределенных уравнений в целых числах (в том числе и в отрицательных, чего Диофант избегал).

Греческий математик Герон (I или II век нашего летоисчисления) вывел формулу для решения квадратного уравнения $ax^2 + вx = c$ умножением всех членов на a и прибавлением к обеим половинам уравнения $\left(\frac{b}{2}\right)^2$:

$$ax^2 + bx = c,$$

$$a^2x^2 + abx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac,$$

$$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac,$$

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + ac},$$

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right) + ac} - \frac{b}{2}}{a}.$$

В Индии пришли к более простому способу вывода, который встречается и в наших учебниках: обе половины уравнения $ax^2+bx=c$ они умножали на $4a$ и прибавляли к обеим половинам по b^2. Это дает

$$ax^2+bx=c.$$
$$4a^2x^2+4abx+b^2=4ac+b^2,$$
$$(2ax+b)^2=4ac+b^2,$$
$$2ax+b=\sqrt{b^2+4ac},$$
$$x=\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2a}.$$

Индийские математики часто давали задачи в стихах.

Вот некоторые примеры таких задач.

Задача о лотосе

Над озером тихим, с полмеры над водой,
Был виден лотоса цвет.
Он рос одиноко, и ветер волной
Нагнул его в сторону — и уж нет
Цветка над водой.
Нашел его глаз рыбака
В двух мерах от места, где рос.
Сколь озера здесь вода глубока?
Тебе предложу я вопрос.

Ответ: $3\frac{3}{4}$.

Задача об обезьянах

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась;
Криком радостным двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько их, мне скажешь,
Обезъян там было в роще?

Ответ: 48 и 16.

Задача о тополе

На речном берегу тополь рос одинокий.
Вдруг ветра порыв его ствол надломал.
Бедный тополь упал. А угол прямой
С речною гладью его ствол составлял.
В том месте река
Четыре лишь меры была широка.
Верхушка дошла до края реки,
И три меры лишь осталось всего от ствола.
А ты мне теперь скоро скажи,
У тополя как велика высота?

Ответ: 8.

Задача о пчелах

Есть кадáмба цветок,
На один лепесток
Пчелок пятая часть опустилась.
    Рядом тут же росла,
    Вся в цвету, симендгá,
    И на ней третья часть поместилась.
Разность их ты найди,
Трижды их ты сложи,
На кутый этих пчел посади.
    Лишь одна не нашла себе места нигде,
    Все летала то взад, то вперед и везде
    Ароматом цветов наслаждалась.
Назови теперь мне,
Посчитавши в уме,
Сколько пчелок всего здесь собралось?

Ответ: 15.

Много задач связаны с именем прекрасной дочери математика Бхаскары — Лилавати. Вот одна из них.

Во время свидания Лилавати с влюбленным у нее порвалась нитка жемчуга. Одна шестая жемчужин упала, пятая часть осталась на нити, третью часть спасла Лилавати, десятую часть взял себе влюбленный и, кроме того, осталось еще 6 жемчужин. Сколько было всего жемчужин на нитке?

Ответ: 30.

Пример индийского решения уравнения IV степени.

Решить уравнение

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

Решение Бхаскары (XII век).

Он прибавляет к каждой половине уравнения $4x^2 + 400x + 1$, сопровождая это указанием: «З д е с ь н у ж н а б ы л а д о г а д л и в о с т ь».

Следуя указанию, получаем:

$$x^4 - 2x^2 - 400x + 4x^2 + 400x + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000,$$
$$x^4 + 2x^2 + 1 = 4x^2 + 400x + 10\,000,$$
$$(x^2 + 1)^2 = (2x + 100)^2,$$
$$x^2 + 1 = 2x + 100,$$
$$x^2 - 2x - 99 = 0,$$
$$x_1 = 11, \ x_2 = -9.$$

Второго решения Бхаскара не рассматривает.

Индийский математик говорит, что для решения уравнения нужна была д о г а д л и в о с т ь. Естественно спросить, как приобрести эту «догадливость», которую каждый желал бы иметь?

Обратимся к книге, которая об этом рассказывает.

Это — книга нашего современника, талантливого венгерского математика Д. Пойа, изданная в русском переводе под заглавием «Как решать задачу?».

На странице 141-й книги Пойа читаем: «Правила, как делать открытия».

Первое правило: надо иметь способности, а наряду с ними и удачу.

Второе: стойко держаться и не отступать, пока не появится счастливая идея».

На странице 103-й дается еще совет:

«Найдя первый гриб или сделав первое открытие, осмотритесь вокруг, — они родятся кучками».

О догадливости говорит и ваш старый знакомый Фабр

(1823—1915), автор поэтичных книг о пауках и других насекомых.

«Если мне выпало на долю написать страницу-другую, которые читатель пробежал без скуки, то я обязан этим в большой степени математике, этой удивительной учительнице в искусстве направлять мысль. Она (математика), правда, не создает воображения (догадливости) — этот деликатный цветок, который вырастает не на всякой почве и распускается так, что никто не знает как, — но она приводит в порядок неупорядоченное, выкорчевывает глупости, фильтрует грязное и дает ясность — эту высшую форму всякого сочинения».

— Что же, — спросите вы, — безнадежно пытаться научиться решать задачи, раз у меня нет этой догадливости?

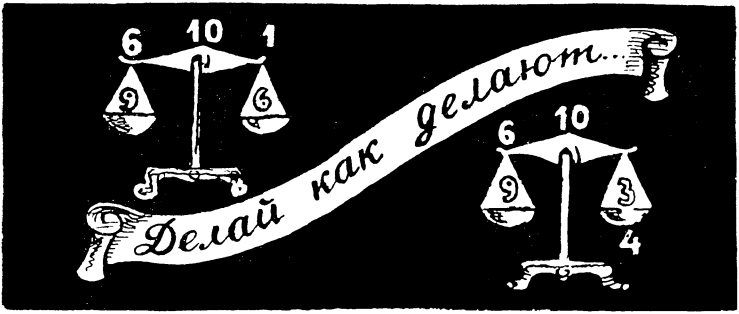
Повторю ответ, который много раз приходилось давать учащимся, заявлявшим, что их *не научили* решать задачи:

— *Научить* кого-нибудь решить любую задачу нельзя, но *научиться решать* их можно.

Надо присматриваться к тому, как их решали люди, быть может, в большей мере обладавшие догадливостью, а затем прислушиваться к советам мастеров (Д. Пойа, И. И. Александров, Ю. Петерсен и др.).

Вот заключение Пойа:

«Найти безотказно действующие правила, применимые *ко всем возможным задачам*, — это старая мечта, но мечта, которая навсегда останется только мечтой... Но можно изучить типичные приемы, полезные при решении задач... Собрание таких вопросов и советов — вещь реальная и может быть составлено».



МЕТОД ЛОЖНОГО ПОЛОЖЕНИЯ
(«ФАЛЬШИВОЕ ПРАВИЛО»)

Уравнение первой степени с одним неизвестным можно привести всегда к виду $ax + b = c$, в котором a, b, c — целые числа. По правилам арифметических действий $ax = c - b$, $x = \frac{c-b}{a}$.

Если $b > c$, то $c - b$ число отрицательное. Отрицательные числа были египтянам и многим другим более поздним народам неизвестны (равноправно с положительными числами их стали употреблять в математике только в семнадцатом веке).

Для решения задач, которые мы теперь решаем уравнениями первой степени, был изобретен метод ложного положения.

В папирусе Ахмеса 15 задач решается этим методом. Решение первой из них позволяет понять, как рассуждал автор.

Египтяне имели особый знак для обозначения неизвестного числа, который до недавнего прошлого читали «хау» и переводили словом «куча» («куча» или «неизвестное количество» единиц). Теперь читают немного менее неточно: «ага».

Вот задача № 24 сборника Ахмеса:

«Куча. Ее седьмая часть (подразумевается: «дают в сумме») 19. Найти кучу».

Запись задачи нашими знаками:

$$x+\frac{x}{7}=19.$$

Решение Ахмеса может быть представлено в наших символах в следующих четырех столбцах:

(куча) 7	. 8	. $2\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$	$16\frac{1}{2}\frac{1}{8}$
$\frac{1}{7}$... 1	.. 16 *	.. $4\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	$2\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{2}$ 4	.... $9\ \frac{1}{2}$	Вместе 19.
	$\frac{1}{4}$ 2 *	Куча	
	$\frac{1}{8}$ 1 *	$16\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{8}$	

Во многих задачах в начале или в конце встречаются слова: «Делай как делается», другими словами: «Делай, как люди делают».

Смысл решения Ахмеса легко понять.

Делается предположение, что куча есть 7; тогда $\frac{1}{7}$ ее часть есть 1. Это записано в первом столбце.

Во втором столбце записано, что при предположении $x=7$ куча и ее $\frac{1}{7}$ часть дали бы 8 вместо 19. Удвоение предположения дает 16. Автор, в уме очевидно, прикидывает, что дальше удваивать предположение нельзя, так как тогда получится больше 19. Он записывает 16, ставит перед числом две точки для обозначения удвоения первоначального предположения и отмечает значком (у нас — звездочкой) результат; для получения в сумме 19 первоначальное предположение надо умножить на 2 с некоторым добавлением, так как для получения точного результата, 19, не хватает еще $19-16=3$. Ахмес находит $\frac{1}{2}$ от 8, получает 4. Так как это больше нехватки 3, то на $\frac{1}{2}$ предположение умножить нельзя. Но $\frac{1}{4}$ от 8 есть 2, $\frac{1}{8}$ от восьми 1. Ахмес видит, что $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ первоначального результата дают точно те 3 единицы, которых не хватало. Отметив $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{8}$ значками, Ахмес убедился, что первоначальное предположение для кучи (7) надо помножить на $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

Умножение числа 7 на смешанное число $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ Ахмес заменяет умножением смешанного числа $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ на 7. В третьем столбце выписаны: $\frac{1}{7}$ часть искомой кучи есть $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, удвоенное это число: $4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ и учетверенное: $9\frac{1}{2}$. Сумма этих трех чисел, равная числу $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$, есть произведение первоначального предположения 7 на $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$.

Итак, куча равна $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$.

В последнем столбце Ахмес делает проверку, складывая полученное значение для кучи $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ и его $\frac{1}{7}$ части $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. В сумме получается 19, и решение заканчивается обычным для автора заключением: «Будет хорошо».

Способ решения, примененный Ахмесом, называется методом одного ложного положения. При помощи этого метода решаются уравнения вида $ax = b$. Его применяли и вавилоняне.

У разных народов применялся метод двух ложных положений. Арабами этот метод был механизирован и получил ту форму, в которой он перешел в учебники европейских народов, в том числе в «Арифметику» Магницкого. Магницкий называет способ решения «фальшивым правилом» и пишет о части своей книги, излагающей этот метод:

Зело бо хитра есть сия часть,
Яко можеши ею все класть (вычислить. — *И. Д.*)
Не токмо что есть во гражданстве,
Но и высших наук в пространстве,
Яже числятся в сфере неба,
Якоже мудрым есть потреба.

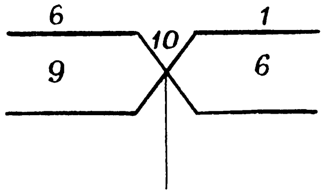
Содержание стихов Магницкого можно вкратце передать так: эта часть арифметики весьма хитрая. При помощи ее можно вычислить не только то, что понадобится в житейской практике, но она решает и вопросы «высшие», которые встают перед «мудрыми».

Магницкий пользуется «фальшивым правилом» в форме, какую ему придали арабы, называя его «арифметикой двух ошибок» или «методой весов». Вот объяснение метода, данное арабским автором.

«Надо решить уравнение $x + \frac{2}{3}x + 1 = 10$.

Вот как поступай.

Черти весы и на точке опоры напиши 10. Положи на левую чашу какое угодно число, например 9, и сосчитай, сколько получится в левой половине равенства при x равном девяти: $9 + 6 + 1 = 16$. Это больше, чем требуется на $16 - 10 = 6$. Запиши число 9, которое есть первое положение, на левой чаше весов, а число 6, которое есть первое отклонение, над левой чашей.



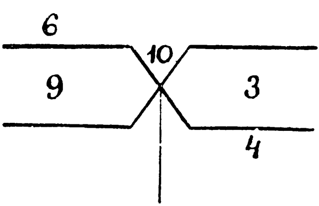
Теперь положи на правую чашу другое какое-нибудь число, например 6, и подсчитай, что при $x = 6$ получается в левой половине равенства: $6 + 4 + 1 = 11$.

Запиши число 6, которое есть второе положение, на правой чаше, а $11 - 10 = 1$, которое есть второе отклонение, над чашею.

Умножай первое положение на второе отклонение и второе положение на первое отклонение и разность произведений дели на разность отклонений:

$$\frac{6 \cdot 6 - 9 \cdot 1}{6 - 1} = \frac{27}{5} = 5\frac{2}{5}; \; x = \sqrt{5}\frac{2}{5}.$$

Если бы вместо положений 9 и 6 взять 9 и 3, то имели бы первое отклонение больше 6; второе положение 3 дало бы при подстановке $3 + 2 + 1 = 6$, на 4 меньше 10. Отклонения «меньше» (недохватки, по-нашему — отрицательные. — *И. Д.*) запишем под весами.



Правило: в случае, когда отклонения записаны по разные стороны от весов, нужно вычислить *сумму* произведений первого положения на второе отклонение и второго положения на первое отклонение и разделить на *сумму* отклонений:

$$\frac{9\cdot 4+3\cdot 6}{6+4}=\frac{36+18}{10}=5\,\frac{2}{5}.$$

Способом двух ложных положений можно решать всякие уравнения первой степени с одним неизвестным вида $ax+b=c$».

Магницкий в своей «Арифметике» решает среди задач на фальшивое правило следующую:

«Спросил некто учителя: «Скажи мне, сколько имеешь в школе своей учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына». Учитель ответил: «Если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько, и четвертая часть, и твой сын, тогда будет у меня учеников 100». Удивившись ответу, спрашиватель отошел и стал изыскивать посредством сей науки так.

Первое положение:	Второе положение:
24	32
24	32
12	16
6	8
1	1
67 «меньше» ста на 33.	89 «меньше» ста на 11.

$$\begin{array}{r}33\cdot 32\\ \hline 66\\ 99\\ \hline 1056\end{array}\qquad\begin{array}{r}24\cdot 11\\ \hline 24\\ 24\\ \hline 264\end{array}\qquad\begin{array}{r}1056\\ -\,264\\ \hline 792\end{array}\qquad 792:22=36.$$

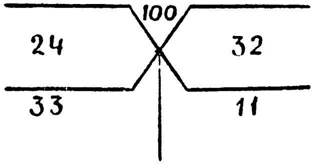
Вычисления становятся понятными, если применить способ весов.

Уравнение, которое нужно решить:

$$x+x+\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+1=100.$$

Первое положение $x_1 = 24$; подсчитывается, что это дает 67, «меньше» требуемого на $100 - 67 = 33$.

Второе положение $x_2 = 32$; подсчет дает 89, «меньше» на $100 - 89 = 11$.



Имеем $\dfrac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = \dfrac{1056 - 264}{22} = \dfrac{792}{22} = 36.$

Мы могли бы выбрать другие предположения, например: 40 и 52.

Чертите весы и сделайте запись.

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36.$$

Если сделать предположения 60 и 20:

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Легко дать обоснование применяемых правил.

Имеем уравнение

$$ax + b = c.$$

Делаем произвольные «положения» и подставим их в уравнение:

первое положение: $x = x_1$, $ax_1 + b = c_1$,

второе положение: $x = x_2$, $ax_2 + b = c_2$.

Вычитаем полученные равенства почленно из данного уравнения:

$a(x - x_1) = c - c_1 = l_1 \ldots$ первое отклонение,

$a(x - x_2) = c - c_2 = l_2 \ldots$ второе отклонение.

Разделим почленно равенства и сделаем преобразования:

$$\frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{l_1}{l_2},\ l_2 x - l_2 x_1 = l_1 x - l_1 x_2;\ \ (l_2 - l_1)x = l_2 x_1 - l_1 x_2,$$

$$x = \frac{x_1 l_2 - x_2 l_1}{l_2 - l_1}.$$

Это есть нахождение искомого числа в случае, когда отклонения l_1 и l_2 оба положительные.

Если $l_1<0$ и $l_2<0$, то

$$x = \frac{x_2 l_1 - x_1 l_2}{l_1 - l_2}$$

(правило то же, что и в первом случае).

Если же отклонения разных знаков, например $l_1>0$, $l_2<0$, то

$$x = \frac{x_2 l_1 + x_1 l_2}{l_1 + l_2}.$$

Решите примеры:

$$x + \frac{x}{3} + 6 = 30,$$

$$x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 2 = 20$$

при разных выборах «положений».

В заключение этой главы дадим решение одной известной арабской задачи на метод двух ложных положений.

Арабская задача

Лиса находится на 36 своих прыжков впереди собаки; когда собака делает 4 прыжка, лиса их делает 5, но 7 прыжков собаки равны 11 прыжкам лисы.

Сколько сделает лиса прыжков, пока собака догонит ее?

Решение:

Первое положение: $x = 100$ (лисьих прыжков).

За время 100 прыжков лисы, собака делает $\frac{100 \cdot 4}{5} = 80$ прыжков.

Расстояние от начала бега собаки до финиша равно 136 лисьим прыжкам; это же расстояние равно 80 собачьим прыжкам. По условию 11 лисьих прыжков равны 7 собачьих. Имеем:

расстояние 136 лисьих прыжков = 80 собачьих прыжков,
расстояние 11 лисьих прыжков = 7 собачьих прыжков.

Отношения лисьих прыжков и собачьих прыжков должны быть равны в случае, если $x_1 = 100$ есть верный ответ.

Но при нашем предположении, $x_1 = 100$, разность отношения

$$\frac{136}{11} \text{ и } \frac{80}{7} \text{ вместо } 0 \text{ есть } \frac{136}{11} - \frac{80}{7} = \frac{136 \cdot 7 - 80 \cdot 11}{77} =$$
$$= \frac{952 - 880}{77} = \frac{72}{77} = l_1 \text{ — первое отклонение.}$$

Второе положение: $x_2 = 120$ (лисьих прыжков); им соответствует $\frac{120 \cdot 4}{5} = 96$ собачьих.

$\frac{156}{11} - \frac{96}{7} = \frac{156 \cdot 7 - 96 \cdot 11}{77} = \frac{1092 - 1056}{77} = \frac{36}{77} = l_2$ — второе отклонение.

Итак, имеем:

$$\begin{array}{cc} \frac{72}{77} & \frac{36}{77} \\ 100 & 120 \end{array}$$

Находим по правилу двух ложных положений

$$x_2 l_1 - x_1 l_2 = \frac{120 \cdot 72 - 100 \cdot 36}{77} = \frac{140 \cdot 36}{77};$$

$$\text{разность отклонений } l_1 - l_2 = \frac{72}{77} - \frac{36}{77} = \frac{36}{77};$$

$$x = \frac{x_2 l_1 - x_1 l_2}{l_1 - l_2} = \frac{140 \cdot 36}{77} : \frac{36}{77} = 140.$$

Проверка решения

Лиса сделала 140 прыжков. Собака покрыла расстояние $36 + 140 = 176$ лисьих прыжков. За время 140 лисьих прыжков собака сделала $\frac{140 \cdot 4}{5} = 112$ прыжков.

Бег продолжался одно и то же время, и так как расстояние 11 лисьих прыжков равняется расстоянию 7 собачьих прыжков, то 176 должно содержать 11 столько же раз, сколько раз 112 содержит 7.

Действительно, $\frac{176}{11} = \frac{112}{7} = 16$, что доказывает правильность решения.

* * *

А теперь закройте книгу и попробуйте решить задачу без применения метода двух ложных положений. Таких решений можно найти несколько. Приводим одно из них, а арабское сохраним как дань уважения замечательным арабским математикам.

Второе решение

Без применения метода ложного положения

За время 4 прыжков собаки лиса делает 5 прыжков, за время 1 прыжка собаки лиса делает $\frac{5}{4}$ прыжка.

Расстояние 11 прыжков лисы равно расстоянию 7 прыжков собаки; расстояние 1 прыжка лисы равно $\frac{7}{11}$ прыжка собаки.

За время 1 прыжка собаки лиса пробежит расстояние

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{7}{11} = \frac{35}{44} \text{ прыжка собаки.}$$

Пути, пройденные собакой и лисой за одно и то же время, относятся как $1 : \frac{35}{44} = 44 : 35$.

Собака пробежала расстояние на 36 лисьих прыжков больше, чем лиса.

$44 - 35 = 9$ частей равны 36, 1 часть $= 4$.

Собака пробежала расстояние $44 \cdot 4 = 176$ лисьих прыжков, лиса $35 \cdot 4 = 140$.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решим задачу: мальчик имел 28 копеек для покупки линеек и карандашей. Линейка стоит 5 копеек, карандаш — 3 копейки. Сколько линеек и карандашей может купить мальчик на все деньги?

Обозначив число линеек через y, число карандашей через x, получим уравнение

$$3x + 5y = 28.$$

Надо найти, могут ли неизвестные x и y в этом уравнении иметь целые положительные значения?

Уравнение это, в котором два неизвестных, называется неопределенным.

Если допускать дробные и отрицательные решения, то существует бесконечно много решений: за x можно взять любое число и вычислить соответственное значение для y. Приняв, например, в нашем уравнении x равным 5, имеем: $15 + 5y = 28$, $5y = 13$, $y = \frac{13}{5}$; x можно принять равным и любому другому числу.

Если же требуется получить только целые положительные решения уравнения, то, как увидим на примерах, уравнение может совсем не иметь таких решений, а может иметь их или только конечное, или же бесконечное число.

Как же решить наше уравнение при условии, чтобы значения для x и y были целые или целые положительные числа?

Рассуждаем так:

$$3x+5y=28,$$
$$3x=28-5y,$$
$$x=\frac{28-5y}{3}=9-y+\frac{1-2y}{3}.$$

Чтобы x и y были целыми числами, необходимо, чтобы $\frac{1-2y}{3}$ было целым числом, которое обозначим буквой z. Тогда $\frac{1-2y}{3}=z$, или $3z=1-2y$, или $2y=1-3z$. Отсюда $y=\frac{1-3z}{2}=-z+\frac{1-z}{2}$. Чтобы y было целым, $\frac{1-z}{2}$ должно быть также целым числом. Обозначим его через t.

$$\frac{1-z}{2}=t,\ 1-z=2t,\ z=1-2t.$$

При любом целом значении t будут целыми z, y и x:

$$z=1-2t,$$
$$y=-z+\frac{1-z}{2}=-1+2t+t=-1+3t;$$
$$x=9-y+\frac{1-2y}{3}=9+1-3t+1-2t=11-5t.$$

Итак, имеем для нахождения целых значений для x и y формулы:

$$x=11-5t;$$
$$y=-1+3t;$$

где t любое целое число.

При целых значениях t имеем:

t	0	1	2	3...	−1	−2...
x	11	6	1	−4...	16	21...
y	−1	2	5	8...	−4	−7...

Так как задача по смыслу требует **целых положительных** решений, то имеем только два решения:

$$x=6,\ y=2 \text{ и } x=1,\ y=5.$$

Второй пример:

$$5x+8y=39.$$

$$x=\frac{39-8y}{5}=7-y+\frac{4-3y}{5},\ \frac{4-3y}{5}=z,\ 5z+3y=4;$$

$$y=\frac{4-5z}{3}=1-z+\frac{1-2z}{3},\ \frac{1-2z}{3}=v,\ 3v+2z=1,$$

$$z=\frac{1-3v}{2}=-v+\frac{1-v}{2};\ \frac{1-v}{2}=t,\ v=1-2t;$$

$$z=-1+2t+t=-1+3t,$$

$$y=1+1-3t+1-2t=\underline{3-5t},$$

$$x=7-3+5t-1+3t=\underline{3+8t}\ ;$$

t	0	1	-1	$-2\ldots$
x	3	11	-5	$-13\ldots$
y	3	-2	8	$13\ldots$

Единственное решение в положительных целых числах (3,3).

Примечание:

Если в уравнении

$$ax+by=c$$

коэффициенты a и b имеют общий делитель d, и $d>1$, а c не делится на d, то решение в целых числах невозможно. Уравнение

$$18x-15y=7$$

не может иметь целых решений, так как левая часть при всяких целых значениях x и y делится на 3, а правая не делится.

Уравнение $ax+by=c$, у которого коэффициенты a и b взаимнопростые числа, всегда решается в целых числах.

Восточная задача

Найти натуральное число, которое делится на 7 и при делении на 2, 3, 4, 5, 6 дает остаток 1.

Решение:

Искомое число $N = 7x$.

$7x - 1$ делится на 2, 3, 4, 5, 6; для этого достаточно, чтобы $7x - 1$ было кратным наименьшего общего кратного чисел 2, 3, 4, 5, 6, то есть числа 60.

$7x - 1 = 60y$, или

$7x = 60y + 1$, и x и y целые положительные числа.

$$x = \frac{60y+1}{7} = 8y + \frac{4y+1}{7};$$

$$\frac{4y+1}{7} = z \text{ (целому числу)},$$

$$4y + 1 = 7z,\ y = \frac{7z-1}{4} = z + \frac{3z-1}{4};$$

$$\frac{3z-1}{4} = v \text{ (целому)},\ 3z - 1 = 4v,$$

$$z = \frac{4v+1}{3} = v + \frac{v+1}{3};$$

$$\frac{v+1}{3} = t,\ v = 3t - 1;$$

$$z = 3t - 1 + t = 4t - 1;$$

$$y = 4t - 1 + 3t - 1 = 7t - 2;$$

$$x = 56t - 16 + 4t - 1 = 60t - 17:$$

t	0	1	2	3...
x	-17	43	103	...
y	-2	5	12	
$N = 7x$	отр.	301	721	

При отрицательных значениях t числа x, y, N будут отрицательными; при любых положительных значениях t получаем положительные решения; уравнение $7x - 1 = 60y$ или $N - 1 = 60y$ дает бесчисленное количество положительных значений N.

Задача о годе рождения

Найти год рождения человека, возраст которого в 1964 году равен сумме цифр его года рождения и которому менее 64 лет.

Решение:

Он родился после 1900 года. Пусть числа десятков и единиц номера года рождения x и y. Год рождения его имеет номер $1900+10x+y$. Возраст равен разности 1964 и номера года рождения, то есть

$$1964-1900-10x-y=64-10x-y.$$

Сумма цифр номера года рождения, то есть числа $1900+10x+y$, равна $10+x+y$.

По условию задачи

$$64-10x-y=10+x+y,$$

откуда

$$54=11x+2y.$$

Требуется, чтобы x и y были целыми числами,

$$0\leqslant x\leqslant 6,\ 0\leqslant x\leqslant 9.$$

Имеем:

$$2y=54-11x,$$

$$y=27-5x-\frac{x}{2};$$

обозначив $\frac{x}{2}$ через t, имеем

$$\frac{x}{2}=t,\ x=2t;$$

$$y=27-11t.$$

Составляем таблицу:

t	0	1	2	3	-1	$-2\ldots$
x	0	2	4	6	-2	...
y	27	16	5	-6	38	

Так как x и y должны быть положительные числа и $x \leqslant 6$, $y \leqslant 9$, то имеем единственное решение, удовлетворяющее задаче: $x = 4$, $y = 5$ и год рождения 1945. Возраст человека равен $1964 - 1945 = 19$, как и сумма цифр года рождения.

Примечание: наибольшую сумму цифр номера годов до 1964-го дает год 1959, именно 24. Для возраста, превышающего 24 года, изложенным способом задачу решить нельзя.

Мы могли бы рассуждать иначе.

Зная, что наибольшая возможная сумма цифр номеров годов до 1959-го 24 и $1964 - 24 = 1940$, мы можем номер года рождения представить в виде $1940 + 10x + y$, сумма цифр которого $14 + x + y$.

Возраст равен:

$$1964 - 1940 - 10x - y = 14 + x + y,$$

$$24 - 10x - y = 14 + x + y,$$

$$10 = 11x + 2y.$$

Отсюда

$$y = \frac{10 - 11x}{2} = 5 - 5x - \frac{x}{2};$$

Принимая $\frac{x}{2} = t$, имеем

$$x = 2t,$$

$$y = 5 - 11t.$$

t	0	1	-1
x	0	2	-2
y	5	-6	16

Единственное решение, удовлетворяющее смыслу задачи:

$$x = 0, \ y = 5,$$

и год рождения $1940 + 0 \cdot 10 + 5 = 1945$, возраст $1964 - 1945 = 19$, сумма цифр номера года рождения 19.

Еще одна восточная задача

Найти положительное число, которое при делении на 3, 5 и 7 дает в остатке соответственно 2, 3 и 2.

Решение:

Пусть искомое число будет v, а частные при делении на 3, 5 и 7 соответственно x, y, z.

Имеем равенства:

$$v = 3x + 2, \qquad v = 5y + 3, \qquad v = 7z + 2.$$

Из первого и третьего равенства получим

$$3x = 7z.$$

Это равенство требует, чтобы число x делилось на 7 и z делилось на 3, то есть

$$x = 7\kappa, \qquad z = 3l,$$

где κ и l целые числа.

$$v = 3x + 2 = 21\kappa + 2,$$
$$v = 7z + 2 = 21l + 2,$$

откуда $\kappa = l$.

Решаем уравнение:

$$21\kappa + 2 = 5y + 3;$$

$$5y = 21\kappa - 1, \qquad y = \frac{21k - 1}{5} = 4\kappa + \frac{k - 1}{5}.$$

Чтобы y было целым, $\frac{k-1}{5}$ должно быть целым числом. Вводя обозначение $\frac{k-1}{5} = t$, имеем $\kappa = 5t + 1$,

$$y = 4\kappa + \frac{k-1}{5} = 4\,(5t + 1) + t; \qquad y = 21t + 4.$$

Итак:

$$x = 7\kappa = 35t + 7,$$
$$y = 21t + 4,$$
$$z = 3l = 3\kappa = 15t + 3,$$
$$v = 3x + 2 = 105t + 23.$$

При t целом положительном числа x, y, z, v будут целыми положительными, при отрицательных значениях t все искомые числа будут отрицательными.

Составим таблицу:

t	0	1	2	3...
x	7	42	77	112...
y	4	25	46	67...
z	3	18	33	48...
v	23	128	233	338...

При $t=4, 5, 6...$ получаем все новые и новые решения.

Проверьте!

Задача моряков

3 моряка после крушения попали на пустынный остров. Имея некоторое количество орехов в запасе, они легли спать, предполагая потом разделить орехи поровну. Через некоторое время один из моряков проснулся и собирался съесть $\frac{1}{3}$ часть орехов, но так как число орехов при делении на 3 дало остаток 1, то он съел 1 орех и $\frac{1}{3}$ остальных. Так же поступили и оба другие. Сколько было вначале орехов и сколько осталось для дележа, когда проснулись все трое?

Решение

Пусть было первоначально x орехов и осталось y.

После первого проснувшегося осталось $\frac{2}{3}(x-1)$,

после второго $\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right]$,

после третьего $\frac{2}{3}\left\{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right]-1\right\}=y.$

Вычисление целесообразно провести так:

$$\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right]=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}-1=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3};$$

$$\left\{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(x-1)-1\right]-1\right\}=\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}\right]-1=$$

$$=\frac{4}{9}x-\frac{10}{9}-1=\frac{4}{9}x-\frac{19}{9};$$

$$y=\frac{2}{3}\left\{\frac{4}{9}x-\frac{19}{9}\right\}=\frac{8}{27}x-\frac{38}{27},\quad 8x-27y=38.$$

$$8x=38+27y,\qquad x=4+3y+\frac{6+3y}{8}=4+3y+3\cdot\frac{2+y}{8}.$$

$$\frac{2+y}{8}=t,\qquad y=8t-2,\qquad x=-2+27t;$$

$t \leqslant 0$ дает x и y отрицательные.

t	1	2	3...
x	25	52	79...
y	6	14	22...

Проверим:

	Было 25		Было 52		Было 79	
	Съели	Осталось	Съели	Осталось	Съели	Осталось
I	1 + 8	16	1 + 17	34	1 + 26	52
II	1 + 5	10	1 + 11	22	1 + 17	34
III	1 + 3	6	1 + 7	14	1 + 11	22
Всего	19	6	38	14	57	22

Решите ту же задачу для четырех моряков и при условии, что каждый сверх одного ореха отделяет для себя $\frac{1}{4}$ часть остальных.

* * *

К неопределенным уравнениям приводят многие вопросы науки и техники.

Решите следующие задачи:

1) $18x-23y=1$.

Ответ

x	9	32...
y	7	25...

2) A должен получить от B 231 рубль. У B имеются только двадцатипятирублевки, а у A только трехрублевки.

Как они могут рассчитаться?

Ответ: A получит 12 двадцатипятирублевок, отдает 23 трехрублевки.

3) На пароходе едут взрослые и дети. Взрослые заплатили за проезд по 25 коп., дети — по 16 коп. Оказалось, что с детей получено одной копейкой больше, чем со взрослых. Сколько могло быть на пароходе взрослых и сколько детей?

Ответ:

Детей	11	36	61...
Взрослых	7	23	39...

«Слепое» правило

В очень старых задачниках можно встретить «слепое правило» (иногда оно называлось «пьяным правилом» и «девичьим»).

Образцом задачи на это правило может служить широко распространенная в народе задача:

«Купить на 100 рублей 100 предметов трех сортов, цены которых 10, 5 и 0,5 рубля».

Старые учебники дают для решения механическое правило без какого-либо обоснования.

Задача сводится к решению неопределенного уравнения рассмотренного нами типа.

Решение

Пусть куплено x десятирублевых и y пятирублевых предметов, предметов третьего вида куплено $100-x-y$.

Стоимость купленных предметов

$$10x+5y+\frac{1}{2}(100-x-y)=100,$$

или

$$20x+10y+100-x-y=200,$$

или

$$19x+9y=100.$$

Решая это уравнение, имеем

$$y=\frac{100-19x}{9}=11-2x+\frac{1-x}{9}.$$

Чтобы x и y были целыми числами, таким же числом должна быть дробь $\frac{1-x}{9}$, обозначим ее целым числом t. Значит,

$$\frac{1-x}{9}=t, \quad x=1-9t,$$

$$y=11-2x+\frac{1-x}{9}=11-2+18t+t=9+19t.$$

Составляем таблицу решений уравнения:

t	0	1	-1	-2	$-3\ldots$
x	1	-8	10	19	$28\ldots$
y	9	28	-10	-20	$-48\ldots$
$100-x-y$	90	отрицательные значения x или y			

X и y должны быть по смыслу задачи целыми положительными числами; задаче удовлетворяет только решение:

$$x=1, \quad y=9, \quad 100-x-y=90.$$

В таком случае стоимость 100 предметов будет

$$10+45+45=100 \text{ рублей.}$$

В других задачах такого типа может получаться несколько решений, что и послужило основанием назвать правило решения «слепым» или «пьяным».

Решите задачу:

На 200 рублей купить 80 предметов трех сортов, цены которых 6, 3 и 1 рубль (11 различных ответов).

Неопределенные уравнения второй степени

Все культурные народы древности знали Пифагорову теорему: сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе. Если стороны треугольника выражаются числами a, b, c, то имеем равенство $a^2 + b^2 = c^2$.

Естественно возник вопрос, какими числами могут выражаться стороны такого треугольника, — иными словами, какие целые значения x, y, z («пифагоровы тройки») удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Очень общий ответ дали вавилоняне около 2000 лет до нашего летоисчисления: при произвольных целых неравных числах p и q и $p>q$

$$x = p^2 - q^2, \quad y = 2pq, \quad z = p^2 + q^2.$$

Действительно

$$(p^2 - q^2)^2 + (2pq)^2 = (p^2 + q^2)^2.$$

Проверьте!

Пример: $p = 3, \quad q = 2;$

$$(9-4)^2 + (2 \cdot 2 \cdot 3)^2 = (9+4)^2,$$
$$5^2 + 12^2 = 13^2,$$
$$25 + 144 = 169.$$

До нас дошла вавилонская табличка двадцати «пифагоровых троек». Способы нахождения таких троек, указанные греческими учеными в школах Пифагора и Платона, дают лишь частные виды решений.

В школе Пифагора (VI век до нашей эры) были найдены для решения вопроса формулы:

$$x = a, \quad y = \frac{a^2 - 1}{2}, \quad z = \frac{a^2 + 1}{2}$$ при a нечетном,

а в школе Платона (IV век до нашей эры) формулы

$$x = a, \quad y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1, \quad z = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 1$$ при a четном.

Проверьте правильность этих формул!

Как найти решение уравнения $x^2+y^2=z^2$?

Рассмотрим сначала частный случай этого уравнения, именно $x^2+y^2=1$, то есть случай треугольника, в котором гипотенуза равна единице длины. Тогда катеты будут правильные дроби.

Из $\quad x^2+y^2=1$, имеем

$$y=\sqrt{1-x^2}.$$

Обозначим $\sqrt{1-x^2}=1-tx$, где t некоторое рациональное, то есть не содержащее корня число.

$$1-x^2=(1-tx)^2,$$
$$1-x^2=1-2tx+t^2x^2,$$
$$(1+t^2)\,x^2=2tx,$$
$$(1+t^2)\,x=2t,$$
$$x=\frac{2t}{1+t^2}.$$

$$y=1-tx=1-\frac{2t^2}{1+t^2}=\frac{1+t^2-2t^2}{1+t^2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Если t рационально, то x тоже рационально.

Итак, рациональные корни уравнения $x^2+y^2=1$

$$x=\frac{2t}{1+t^2},\ y=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Примеры:

$$t=\frac{1}{2},\ x=\frac{4}{5},\ y=\frac{3}{5};$$

$$t=\frac{1}{3},\ x=\frac{6}{10},\ y=\frac{8}{10},\quad \text{или}\quad x=\frac{3}{5},\ y=\frac{4}{5};$$

$$t=\frac{1}{4},\ x=\frac{8}{17},\ y=\frac{15}{17};$$

$$t=\frac{1}{5},\ x=\frac{10}{26},\ y=\frac{24}{26}\quad \text{или}\ x=\frac{5}{13},\ y=\frac{12}{13}.$$

Зная решение уравнения $x^2+y^2=1$, можно получить решение, данное вавилонянами для более общего уравнения

$$x^2+y^2=z^2.$$

Предположим, что a, b, c — натуральные числа и $a^2+b^2=c^2$,

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1.$$

Тогда $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ есть решение уравнения $x^2+y^2=1$.

Если t правильная несократимая дробь $\frac{k}{l}$, то есть $l > к$, то

$$\frac{a}{c}=\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\cdot\frac{k}{l}}{1+\frac{k^2}{l^2}}=\frac{2kl}{l^2+k^2},$$

$$\frac{b}{c}=\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\frac{k^2}{l^2}}{1+\frac{k^2}{l^2}}=\frac{l^2-k^2}{l^2+k^2}.$$

Так как $\left(\frac{a^2}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)^2=1$, то

$\frac{(2kl)^2}{(l^2+k^2)^2}+\frac{(l^2-k^2)^2}{(l^2+k^2)^2}=1$ и $(2кl)^2+(l^2+к^2)^2=(l^2+k^2)^2$,

то есть для уравнения $x^2+y^2=z^2$ имеем

$$x=2кl,\ y=(l^2-к^2),\ z=l^2+к^2.$$

Примеры:

Пусть $к=3,\ l=5,\ t=\frac{k}{l}=\frac{3}{5}$;

$x=2\cdot 3\cdot 5=30;\ y=5^2-3^2=16;\ z=5^2+3^2=34;$

числа (30, 16, 34) дают решение уравнения $x^2+y^2=z^2$:

$$30^2+16^2=34^2=1156.$$

При $к=3,\ l=7,\ t=\frac{k}{l}=\frac{3}{7}$;

$$2кl=42,\ l^2-к^2=40,\ l^2+к^2=58;$$
$$42^2+40^2=58^2.$$

Числа (42, 40, 58) представляют одно из решений уравнения

$$x^2+y^2=z^2.$$

Теорема Ферма

Читая «Арифметику» Диофанта, французский математик Пьер Ферма (1601—1665) сделал приписку к задаче, в которой требуется разложить данное квадратное число на сумму двух квадратов:

«Невозможно разбить ни куб на два куба, ни биквадрат на два биквадрата, ни вообще степень, бо́льшую второй, на две степени с тем же показателем. Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на полях книги».

Иными словами, Ферма утверждает, что неопределенное уравнение $x^n + y^n = z^n$ при $n>2$ не имеет целочисленного решения. Это утверждение называется **Великой теоремой Ферма**. Для ряда значений показателя n доказано, что утверждение Ферма верно.

Недавно выяснилось, что теорема Ферма доказана для всех n, меньших числа 4003. Однако общее доказательство до сих пор не достигнуто, и теорема продолжает оставаться «вызовом человеческому уму».

Интересно, что этой задачей занимаются не только математики, достаточно подготовленные для серьезных атак на теорему. За нее берутся и тысячи любителей математики, не имеющих представления о трудности вопроса. Число таких искателей возросло неимоверно после того, как немецкий инженер П. Вольфскель в 1911 году внес 50 000 (или 100 000) немецких марок (около 35 000 или 70 000 золотых рублей) для премии доказавшему теорему.

Однако и премия не продвинула вперед решение проблемы.

«Уравнение Пелля»

Это неопределенное уравнение второй степени

$$x^2 - ky^2 = 1,$$

в котором k не есть квадратное число. Это уравнение прославилось историей его решения.

Его решали известнейшие европейские математики XVII и XVIII веков, включая славных Ферма и Эйлера, а Лагранж в 1768 году доказал, что существует бесконечное число решений уравнения, и указал способ нахождения их.

В начале XIX века была переведена на английский язык первая индийская книга по математике. Оказалось, что в Индии уже в VII веке нашей эры со ссылками на более ранних математиков рассматривается решение этого уравнения способом, почти совпадающим по своей идее с тем, к которому пришел Лагранж.

Решение уравнения $x^2 - ky^2 = 1$ сложное. Составлены таблицы наименьших значений решений до $k = 2000$. Некоторое количество их (до $k = 99$) дано в книге А. З. Вальфиш «Уравнение Пелля» (Издание Академии наук Грузинской ССР, Тбилиси, 1952).

Вот несколько примеров из таблицы:

$x^2 - ky^2 = 1$	k	x	y	x^2	y^2
$x^2 - 2y^2 = 1$	2	3	2	9	4
$x^2 - 3y^2 = 1$	3	2	1	4	1
$x^2 - 10y^2 = 1$	10	19	6	361	36
$x^2 - 29y^2 = 1$	29	9801	1820	96 059 601	3 312 400
$x^2 - 50y^2 = 1$	50	99	14	9 801	196
$x^2 - 99y^2 = 1$	99	10	1	100	1

Поражает решение уравнения Пелля

$$x^2 - 4\,729\,494\, y^2 = 1.$$

Его наименьшее решение, найденное в 1880 году:
$x = 109\,931\,986\,732\,829\,734\,979\,866\,232\,821\,433\,543\,901\,088\,049$ (45 цифр);
$y = 50\,549\,485\,234\,033\,074\,477\,819\,735\,540\,408\,986\,340$ (38 цифр).

Кто-нибудь из читателей, быть может, засомневается: нужно ли искать решения таких исключительных уравнений, которые, по-видимому, практического значения не имеют?

Ответить на такой вопрос можно так:

— Тебе хорошо знаком Митрофанушка Простаков из «Недоросля» Фонвизина.

Этот парень сказал, что дверь, которая прилажена к своему месту, есть имя прилагательное, а та, которая лежит на чердаке и не прилажена к месту, имя существительное, так как эта дверь только существует и не используется.

Академик А. Н. Крылов сказал: «Большинство научных истин после их открытия являются «сущесвительными» иногда на сотни и тысячи лет, но потом наступит момент, когда они найдут приложение и станоятся «прилагательными». Уравнение Пелля уже стало прилагательным, так как нашло применение в астрономии.

В связи с решением уравнения Пелля поучительно следующее.

Не зная способа решения уравнения

$$x^2 - 4\,729\,494\, y^2 = 1,$$

можно было бы рассуждать так.

Из уравнения следует, что

$$x^2 = 4\,729\,494\, y^2 + 1.$$

Будем искать решения этого уравнения опытом: будем подставлять вместо y числа 1, 2, 3.., вычислять значения суммы $4\,729\,494\, y^2 + 1$ и проверять, будет ли сумма квадратным числом.

Когда мы таким образом дойдем до подстановки вместо y тридцативосьмизначного числа, написанного под таблицей решений на предыдущей странице, то убедимся в существовании решения.

Сколько же времени пришлось бы потратить, чтобы прийти к этому открытию? Оказывается, если бы все существовавшие на Земле люди были хорошими вычислителями, то им для этого понадобилось бы миллиарды лет. Математик же, пользующийся вычислительными машинами, найдет это решение за несколько часов.

Таково могущество современной математики.

На замечание же, что это уравнение на практике не возникает, можно ответить, что, по преданию, у Архимеда, например, оно возникло.

Вообще же надо помнить, что при бурно развивающейся технике нельзя угадать, что понадобится завтра для практики.

То обстоятельство, что возникающие в науке вопросы могут привести к очень сложным уравнениям, показано на одном из примеров.

Читатель, наверное, слыхал, что французский астроном Леверье более ста лет назад указал точку на небесном своде, где должна была находиться, как говорят, «открытая на кончике пера Леверье» не известная до этого новая планета Нептун.

Астроному Леверье для этого нужно было, между прочим, подсчитать корни уравнения

$$3447\,x^6 + 14\,560\,x^5 + 22\,430\,x^4 + 29\,193\,x^2 + 11\,596\,x + 5602 = 0.$$

А для составления геодезической карты в Москве была решена при помощи быстродействующей электронной счетной машины система 800 линейных уравнений. Решение требовало выполнения 250 миллионов арифметических действий.

Неопределенные уравнения степени выше второй

Решение таких уравнений представляет задачу несравненно более трудную, чем решение уравнений второй степени. Найдены лишь решения отдельных частных видов их.

Доказана только одна общая теорема норвежским математиком Акселем Туэ (1863—1922):

«Если неопределенное уравнение степени выше второй имеет целочисленные решения (оно может их и не иметь), то этих решений может быть только конечное число».

Учитель средней школы А. С. Веребрюсов в 1906 году, ранее Акселя Туэ, доказал эту теорему для уравнений третьей степени.

В дальнейшем даны некоторые примеры изученных уравнений. Решение каждого из этих уравнений требовало целого исследования, иногда весьма большого. Проверьте все данные примеры!

1) Уравнение $y^2 = x^3 + 7$ не имеет целых решений (доказано Лебегом, 1869).

2) Уравнение $y^2 = x^3 + 17$ имеет 8 решений:

x	−2	−1	2	4	8	43	52	5234
y	3	4	5	9	23	282	375	378 661

(Доказано весьма высокими средствами в 1930 году).

3) $y^3 = x^2 + 2$ имеет единственное решение $x = \pm 5$, $y = 3$. Ферма в 1657 году пишет: «Существует единственный целый квадрат 25, который при прибавлении двух дает куб. Трудно поверить этому отрицательному предложению, но оно несомненно. Чтобы еще более удивить читателя, указываю, что существует только два квадрата, 4 и 121, которые при прибавлении четырех дают куб. И все бесконечное множество чисел не дает третьего числа, имеющего то же свойство».

Последнее утверждение означает, что уравнение

4) $y^3 = x^2 + 4$ имеет только два решения:
$x = \pm 11$, $y = 5$ и $x = \pm 2$, $y = 2$.

5) $y^3 = x^2 - 2$ имеет единственное решение:
$x = \pm 1$, $y = -1$.

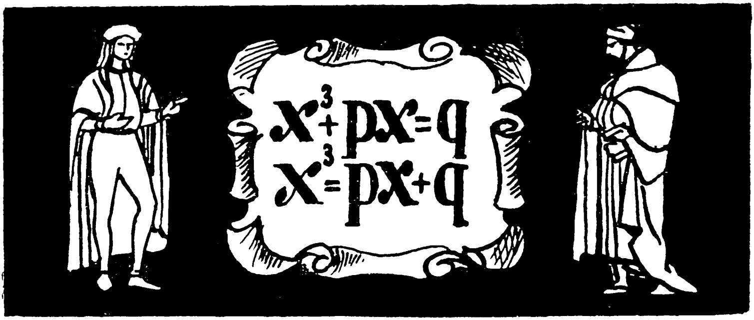
6) $y^n = x^2 + 2$, $n > 1$ имеет целые решения только при $n = 3$; $x = \pm 5$, $y = 3$.

7) Крупнейший современный английский математик А. Морделл в 1962 году доказал, что уравнение $2^n = x^2 + 7$ при $x > 0$ имеет следующие целочисленные решения:

при	$n = 3$	$x = 1$,
	$n = 4$	$x = 3$,
	$n = 5$	$x = 5$,
	$n = 7$	$x = 11$,
	$n = 15$	$x = 181$.

В изучении неопределенных уравнений высших порядков большие заслуги принадлежат русским и советским математикам.

Может сложиться впечатление, что за 5000 лет существования алгебры все вопросы ее решены и сегодняшним юным математикам не осталось возможности проявить свое остроумие и свои силы. Однако нерешенных вопросов в алгебре несравненно больше, чем решенных. Такое же положение имеет место во всех науках. Поэтому тебе, читатель, на каждом уроке повторяется: изучи основательно то, что уже известно, и скорее приступай к решению новых, еще не решенных вопросов.



КАК БЫЛИ НАЙДЕНЫ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ, ТРЕТЬЕЙ И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ

Правила алджебр и альмукабала Мухаммеда ал-Хорезми свели решение уравнений первой степени к некоторой последовательности арифметических действий.

Последовательность действий для решения какой-нибудь задачи называется алгоритмом. Слово алгоритм произошло от имени ал-Хорезми.

Правила «ложного положения», которые были уже у вавилонян и египтян, у китайцев и индийцев, усовершенствованные арабами, также получили широкое распространение.

Эти знания сообщил западноевропейским народам итальянский купец Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в своей книге в 1202 году. В Италии же математик Лука Пачоли (умер в начале XVI века) изложил эти правила в своей книге, написанной в 1494 году. Его книга дает первое в Европе полное печатное изложение алгебры.

Правило решения квадратных уравнений знали, как мы видели, уже древние народы — вавилоняне, индийцы, греческие математики. Вывод формулы корней квадратного уравнения имеется у Герона (I или II век нашей эры), ее знал Диофант.

Ал-Хорезми выводил эту формулу из геометрических построений. Он рассуждал следующим образом.

Пусть дано уравнение, записанное в наших современных обозначениях. Например $x^2 + 10\,x = 39$ (сам ал-Хорезми излагал все решение словами).

Следуя его словам, построим квадрат со стороною произвольной длины, которую обозначим буквой x. Площадь квадрата x^2. Пристраиваем к этому квадрату два прямоугольника со сторонами x и 5 (половина коэффициента второго члена уравнения). Образуется наугольник (гномон) с площадью $x^2 + 10\,x$. Пристраиваем к наугольнику квадрат со стороною 5, как показано на чертеже. Образовался новый, больший квадрат со стороною $x + 5$. Его площадь $(x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$. По решаемому уравнению получаем

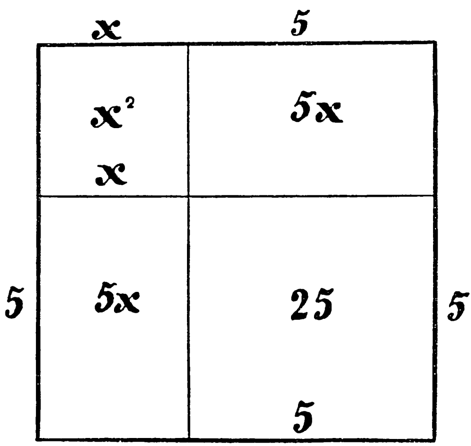
$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25,$$
$$(x + 5)^2 = 25 + 39,$$
$$x + 5 = \sqrt{25 + 39},$$
$$x = \sqrt{25 + 39} - 5 = 3$$ (отрицательного корня ал-Хорезми не рассматривает).

Если написать уравнение в общем виде

$$x^2 + px - q = 0,$$

то решение получаем в виде

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2},$$



то есть нашу формулу, в которой не хватает только второго решения.

Мы уже знаем вывод этой формулы Героном и индийскими математиками. Таких выводов было придумано много. Вот еще один.

Напишем уравнение в виде

$$x^2 + 2px + q = 0,$$

что всегда возможно, так как p может быть и дробным числом. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 + 2px + p^2 - p^2 + q = 0,$$
$$(x + p)^2 - (p^2 - q) = 0,$$
$$x + p = \pm\sqrt{p^2 - q},$$
$$x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}.$$

Знаменитый ирано-таджикский поэт и математик Омар Хайям (1040—1123) дал графическое решение всех видов уравнений третьей степени. Это было высочайшее достижение в алгебре средних веков. Но тут же возник вопрос об алгебраическом решении (нахождение формулы решения) кубического уравнения. Это решение удалось получить только спустя 400 лет, в XVI веке, итальянским математикам.

Самым передовым из итальянских университетов в то время был университет города Болоньи, основанный в XI веке. В шутку о нем говорили так: «В Болонье самые маленькие собаки (болонки) и самые большие ученые; в других городах — большие собаки и маленькие ученые».

Профессор Болонского университета Шипионе дель Ферро (1465—1526) в начале XVI века нашел формулу для решения кубического уравнения вида

$$x^3 + px = q,$$

(p и q положительные числа). Открытие это он сообщил своему ученику Фиоре.

В те времена ученые часто вызывали других на публичные диспуты. Диспуты происходили обычно в церквах и привлекали внимание общества.

В Италии в XVI веке возник большой интерес к науке и литературе Древней Греции. Известно, что лекция упомянутого Пачоли в 1505 году в Венеции, в церкви, в 5 часов утра, об одной из самых трудных книг (V) «Начал» Евклида, собрала 500 знатных граждан.

Одновременно с Фиоре в Италии работал математик-самоучка, вошедший в историю под кличкой Николо Тарталья («тарталья» значит «заика»).

В 1535 году между Тартальей и Фиоре состоялся турнир на таких условиях: каждая сторона предлагает противнику 30 задач для решения в течение 50 дней; победитель получает премию в виде парадного обеда на число лиц, равное количеству решенных задач.

Тарталья знал, что Фиоре владеет правилом решения уравнения вида $x^3 + px = q$, не известным ему, Тарталье. Лишь за 10 дней до назначенного срока турнира он нашел не только это правило, но и способ решения уравнений вида $x^3 = px + q$.

Фиоре действительно предложил задачи вида $x^3 + px = q$, которые Тарталья решил за 2 часа. Из предложенных Тартальей задач Фиоре за 50 дней не решил ни одной. Победа Тартальи была блестящей и принесла ему заслуженную славу.

В те же годы в Италии работал ученый Джироламо Кардано (1501—1576). Он происходил из знатной фамилии, был известным врачом, а с 1534 года состоял профессором математики. Как и все ученые того времени, он писал на латинском языке и для ученых, в то время как Тарталья писал на итальянском языке для читателей из народа.

Кардано решил написать книгу «Великое искусство», которая должна была содержать все известное по алгебре. Для этого ему нужно было узнать от Тартальи способ решения кубических уравнений.

Кардано обратился к Тарталье с просьбой сообщить для публикации свое открытие. Он рассчитывал на то, что бедняк Тарталья будет польщен обращением к нему важного аристократа-ученого. Однако Тарталья отказался, предпочитая остаться единственным математиком, способным решать кубические уравнения.

Разными хитростями Кардано в конце концов добился того, что Тарталья передал ему свое открытие, изложенное латинскими стихами. При этом Кардано поклялся на библии, что решения Тартальи не опубликует.

Однако в 1545 году Кардано издал свою книгу, в которой поместил формулу решения кубических уравнений, — правда, с указанием на принадлежность решения Тарталье и с некоторыми своими добавлениями.

Тарталья пытался протестовать, но из этого ничего не вышло. Ведь он был простолюдином, а Кардано аристократом.

Так формула решения кубического уравнения и вошла в книги под названием «формулы Кардано».

Правда, практического значения она сейчас не имеет. В задачах, приводящихся к решению уравнений третьей степени, обычно достаточно иметь приближенное значение корней, для нахождения которых есть более простые способы.

После того как было получено (учеником Кардана Феррари) решение уравнения четвертой степени, математики занялись отысканием формулы решения уравнения пятой степени. Как будто путь для этого был подготовлен: решение уравнений второй, третьей и четвертой степени получается сведением решения каждого из этих уравнений к решению уравнения степени на единицу низшей.

Мы уже знаем, что свести уравнение пятой степени к уравнению четвертой степени не удалось, несмотря на все старания математиков в течение почти 300 лет.

Знаменитый французский математик Лагранж в 1750 году установил, что приемы, которые для уравнений второй, третьей и четвертой степени понижали степень решаемого уравнения, для уравнения пятой и дальнейших степеней дают не понижение, а повышение степени.

Но, с другой стороны, многие математики XVIII века доказывали, хотя не строго, существование корня у любого алгебраического уравнения. Немецкий математик К.-Ф. Гаусс (1777—1855) в конце этого века дал строгое для того времени доказательство существования корней у всякого уравнения, однако это не означало, что для нахождения корня можно вывести формулу.

Итальянский математик Руффини в 1799 году делает попытку, верную по идее, но недостаточно строгую, доказать, что решение уравнения пятой степени в радикалах невозможно.

Строго доказал это положение гениальный норвежский математик Нильс Абель двадцатью пятью годами позднее.

ФРАНСУА ВИЕТ —
ОТЕЦ СИМВОЛИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ

Имя Франсуа Виета — почти единственное, которое упоминается на уроках алгебры. Поэтому естественно посвятить последний рассказ о старой алгебре его жизни и достижениям.

Примерно до тысячного года алгебра была словесной, или риторической, — не употреблявшей никаких символов. Даже такие условные знаки математики, как $>$, $<$, a^3, a^4... вместо *aaa* и *aaaa*, символы x, y, z для обозначения неизвестных появились в семнадцатом веке, знак $=$ в шестнадцатом.

Основною же чертою современной алгебры является символический язык. Виет, употреблявший символы в алгебре в гораздо большей мере, чем все его предшественники, справедливо считается отцом символической алгебры.

Жизнь Виета представляет для нас интерес во многих отношениях.

XV век в Западной Европе был веком ожесточенных религиозных волнений, и к началу XVI века целый ряд стран отпал от католической церкви.

Всесильная католическая церковь преследовала и убивала всякую мысль, в которой усматривала отклонение от своих учений. Церковный суд — инквизиция — всех, попавших под подозрение, карал вплоть до сожжения на костре, а имущество казненных отбирал в пользу церкви. Не один ученый погиб в руках инквизиции. В их числе были и математики.

Испанский математик Вальмес в 1486 году как-то в семейном кругу обмолвился о том, что нашел формулу для решения уравнения четвертой степени. В числе гостей оказался влиятельный инквизитор. Услышав слова Вальмеса, он заявил, что волей божьей решать эти уравнения человеку не дано и найти формулу можно было только с помощью дьявола.

В ту же ночь Вальмес был брошен в тюрьму, а через три недели сожжен на костре за связь с дьяволом. А через 100 лет решение этих уравнений было найдено вторично.

Виет также был на волосок от костра.

В ту пору наиболее могущественное государство в Европе, Испания, вела победоносную войну с Францией.

Однажды французам удалось перехватить приказы испанского правительства командованию своих войск, написанные очень сложным шифром (тайнописью). Виет с помощью математики сумел найти ключ к этому шифру. С этих пор французы, зная планы испанцев, с успехом предупреждали их наступления.

Инквизиция обвинила Виета в том, что он прибегнул к помощи дьявола и приговорила к сожжению на костре. Но так как французы, благодаря Виету, в дальнейшем побеждали, он не был выдан инквизиции.

В родном городке Виет был лучшим адвокатом, а позднее стал королевским советником. Но главным делом его жизни была математика. Биографы Виета пишут, что он мог несколько ночей подряд не спать, решая очередную математическую задачу.

Среди современников Виет особенно прославился после одного события.

Голландский ученый Адриан Ромен обратился ко всем математикам мира с предложением найти корень сложного уравнения 45-й степени, коэффициенты которого доходили до 488 494 125. Сообщая о своем вызове французскому королю, посланник заметил, что во Франции, впрочем, нет математика, которому по плечу было бы заняться этой задачей.

Каково же было удивление Ромена, когда Виет указал не один, а 23 корня уравнения. Ромен приехал во Францию, чтобы познакомиться с замечательным ученым, и стал его другом.

Свои работы Виет печатал за свой счет в очень небольшом количестве — только для рассылки друзьям. Поэтому многие его труды после его смерти, при подготовке к изданию собрания его сочинений, так и не удалось найти.

Но и в дошедших до нас работах Виета по алгебре содержится много важнейших открытий.

Виету принадлежит способ алгебраического решения геометрических задач, приближенное решение уравнений, применение алгебры в тригонометрии, многие приемы тождественных преобразований и освобождения уравнений от радикалов.

Основная заслуга его — в утверждении, что в алгебре главное не выкладки, а установление зависимостей между коэффициентами уравнения и его корнями. Это возможно лишь при употреблении буквенных коэффициентов в уравнениях. Виет ввел их в алгебру. Простейшим примером использования их являются теоремы Виета о корнях квадратных уравнений.

Обогатил Виет и приемы решения уравнений. Он ввел общий по идее метод решения уравнений II, III и IV степени.

Покажем на примере квадратного уравнения этот метод.

Надо решить уравнение

$$x^2 + ax + в = 0.$$

Введем вместо x две новые неизвестные z и v, полагая $x = z + v$. Подставим в уравнение вместо x сумму $z + v$.

Имеем:

$$(z + v)^2 + a\,(z + v) + b = 0$$

или, после раскрытия скобок,

$$v^2 + (2z + a)\,v + (z^2 + az + b) = 0.$$

Выберем z так, чтобы $2z + a = 0$, то есть $z = -\frac{a}{2}$.

Преобразованное уравнение примет вид

$$v^2 - \frac{1}{4}(a^2 - 4b) = 0,$$

$$v = \pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b},$$

$$x = z + v = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4b}.$$

Решение уравнений III и IV степени получается также соответственными подстановками.

Работы Виета понимали при его жизни лишь немногие, но зато математики, понимавшие их, считали Виета крупнейшим ученым.

«Не было никогда человека в большей степени родившегося математиком... Человек большого ума и мудрости, один из самых ученых математиков», — пишет основной научный журнал того времени. «Виету, Декарту и Галилео обязан я тем, что знаю», — сказал великий математик и физик Гюйгенс.

В школьной алгебре имя Виета заслуженно стоит рядом с именами Декарта и Ньютона, в трудах которых алгебра получила дальнейшее развитие.

ГЕНИАЛЬНЫЕ ЮНОШИ АБЕЛЬ И ГАЛУА

Нильс Хендрик Абель, сын бедного сельского священника в Норвегии, родился 5 августа 1802 года. Он обладал блестящими математическими способностями и уже в школе прослыл вундеркиндом. Отец его рано умер, оставив жену и пятерых детей без всяких средств к существованию. Из членов семьи только один Нильс был трудоспособным, ему пришлось стать опорою для родных.

В 1824 году Нильс представил казавшееся ему правильным решение уравнения пятой степени в радикалах и получил правительственную стипендию в университете. В 1826 году он сам же обнаружил свою ошибку, которую не заметили просматривающие работу профессора. Абелю дали командировку в Берлин и Париж. В Париже он представил Академии наук очень важную работу. Она была премирована академией, но уже после смерти Абеля. От французских математиков Абель не был в восторге. Пребывание его в Берлине оказалось более полезным.

В Берлине инженер Крелле начал с 1826 года издание «Журнала чистой и прикладной математики», который до наших дней остается одним из самых серьезных международных математических журналов. Начиная с первого выпуска в журнале Крелле был напечатан ряд важнейших работ Абеля, которые принесли ему славу первоклассного математика.

Абель, несмотря на всеобщее признание, не мог найти в маленькой Норвегии применения своему таланту. Полуголодное существование и удрученное настроение обострили туберкулез, и 6 апреля 1829 года он скончался, не дожив до 27 лет. Спустя два дня после его смерти прибыло сообщение о создании для Абеля кафедры в Берлинском университете.

Много теорем, формул, уравнений, функций в высшей математике носят имя Абеля. В области алгебры он дал следующие фундаментальные результаты.

Абель выяснил условия, вследствие которых уравнения II, III и IV степеней решаются в радикалах. Условия эти не существуют вообще в уравнениях степени выше четвертой, хотя в частных случаях они могут иметь место.

Абель нашел среди уравнений пятой степени группы разрешаемых и не разрешаемых в радикалах уравнений. Открытие общего условия разрешимости уравнений высших степеней в радикалах осталось на долю другого столь же гениального юноши — Эвариста Галуа.

Эварист Галуа родился 25 октября 1811 года. В лицее Эварист обнаружил удивительные математические способности, но пренебрегал другими занятиями. Он в два дня прочел и усвоил лучший в то время учебник геометрии, который в школе изучали два года. Крупный математик Штурм сформулировал, не дав доказательства, новую теорему высшей алгебры. Галуа, узнав об этой теореме, на уроке сразу ее доказал.

С 16-летнего возраста Эварист начал собственные исследования по алгебре, изучил работы Лагранжа, которые были последним словом в алгебре во Франции того времени. Несмотря на это, он два раза провалился на приемных испытаниях в Парижскую политехническую школу. Видимо, не зря его предупреждал учитель лицея: «Ты знаешь сущность вопросов, но можешь не знать маловажных деталей, знания которых требуют на экзамене».

Галуа поступил в 1829 году в Эколь Нормаль (высший педагогический институт Франции).

Политическая обстановка (канун Июльской революции 1830 года) была бурная. Эварист помогал разоблачению двуличной роли директора школы, и был уволен. Он поступил в боевой корпус республиканцев. А после роспуска корпуса по приказу короля в 1830 году Галуа посвятил себя революционной деятельности, дважды за нее подвергался тюремному заключению.

На дуэли, которая, по предположению, была подстроена полицией, Галуа был тяжело ранен и на следующий день, 31 мая 1832 года, скончался, прожив всего 20 лет и 7 месяцев.

Еще учеником лицея Галуа начал исследования по вопросу о разрешимости в радикалах уравнений степени выше четвертой. Вначале он пытался найти такое решение, но вскоре убедился в тщетности этих попыток. Зато он создал общий метод, который позволяет установить, какие из уравнений высших степеней решаются в радикалах. Этот метод привел к разработке новой области алгебры — теории групп. Совокупность результатов, полученных Галуа, составляет ныне обширную область математики, которую в настоящее время так и называют — «теория Галуа». Она имеет широчайшее применение не только в разных разделах чистой математики, но и во многих областях естественных наук.

Галуа трижды представлял свои работы в Парижскую академию наук, но его записки были или затеряны или не поняты.

При жизни Галуа напечатал всего пять статей. Накануне дуэли, смертельный исход которой он предвидел, Галуа всю ночь записывал основные свои результаты. Он просил своего друга переслать письмо крупнейшим немецким математикам того времени, чтобы они дали отзыв «не о справедливости результатов, а о важности этих теорем». Но был ли дан такой отзыв — неизвестно.

Все опубликованные работы Эвариста Галуа составляют 60 небольших страниц. Никогда такое малое число страниц не приносило автору столь широкой известности. Видные французские математики, в числе их алгебраист Серре, изучали наследие Галуа 25 лет и признали, что ничего не поняли. Математик младшего поколения Камилл Жордан (1838—1922) сидел над ними около 40 лет, все понял и написал большую книгу в 667 страниц, отметив, что вся книга есть только истолкование рукописей Галуа. И теперь во всех серьезных курсах алгебры теория Галуа составляет основную часть.

На русском языке есть несколько изложений теории Галуа, среди них — глубокие исследования и развитие его идей в работах Н. Г. Чеботарева (1894—1947), Б. Н. Делоне, И. Р. Шафаревича и других.

Удивительно сходны во всем судьбы Абеля и Галуа: раннее развитие таланта, тяжелые условия жизни, нужда, непризнание официальными представителями науки.

В замечательной книге Л. Инфельда «Эварист Галуа — избранник богов» есть фраза: «Попросите когонибудь, знающего математику, назвать 12 известных ему больших математиков, и вы непременно услышите имена Абеля и Галуа».

Жизнь каждого из них — увлекательный роман (книга О. Оре об Абеле и книги Л. Инфельда и А. Дальма о Галуа).

Труды двух гениальных юношей — Нильса Абеля и Эвариста Галуа к 1830 году в основном завершили вопросы старой, или классической, алгебры, для которой главной проблемой являлось решение уравнения в радикалах. Было доказано, что уравнения степени выше четвертой в общем случае, когда коэффициенты уравнения не подчинены особым условиям, не имеют решения в радикалах. Теория Галуа решает вопрос, как установить, принадлежит ли уравнение к тем частным видам уравнений, которые допускают такое решение, или нет.

Надо помнить, что речь идет о решении в радикалах или о существовании для нахождения корня уравнения формулы, составленной из коэффициентов уравнения. После Абеля и Галуа были найдены разные способы решения уравнений высших степеней, но при помощи более сложных функций. Это означает, что корнями разных степеней из чисел можно выразить только самые простые зависимости неизвестного x, которые содержатся в уравнениях первых четырех степеней и в некоторых уравнениях высших степеней. Уравнения высших степеней вообще выражают более сложные зависимости. Для решения таких уравнений необходимы более сложные функции. Они изучаются в высшей математике.

Вы, наверное, читали знаменитую детскую сказку «Алиса в стране чудес». Она написана профессором математики, который в литературе известен под именем Люиса Керрола.

Алису в стране чудес удивлял улыбающийся кот, который время от времени исчезал для глаз Алисы, а в воздухе оставалась только его улыбка.

Работы Галуа сняли задачу о решении при помощи радикалов уравнений любой степени — задачу, которой посвящали свои силы очень многие великие математики. Проблема эта исчезла. От нее осталась улыбка гениального юноши Эвариста Галуа в виде «теории Галуа».

У читателя может возникнуть мысль о том, что с достижениями Абеля и Галуа алгебра потеряла свой основной предмет и, быть может, вообще закончила свое развитие. Между тем никогда ранее математики не занимались именно алгеброй так много, как теперь.

Верно, что уже сто лет алгебра видит свою основную задачу не в поисках чисел — корней уравнения. Она теперь интересуется самими алгебраическими операциями и их свойствами. Современная алгебра изучает системы или множества элементов произвольной природы, изучает применимость к ним основных формул старой алгебры, изучает операции с иными основными формулами. Самой ранней такой «новой» алгеброй была алгебра ирландского математика Буля, самая простая часть математической логики, о которой пойдет речь во второй части книги.

Новая алгебра ввела в математику так много новых, сложных понятий, что классическая алгебра со всеми своими достижениями кажется, пользуясь словами арабского математика, только «сенями» в величественное здание современной алгебры.

Одним из главных архитекторов новой алгебры является Эмми Нётер (1882—1935), работавшая в тридцатых годах в Москве.

КНИГИ, В КОТОРЫХ РАССКАЗЫВАЕТСЯ ОБ ИСТОРИИ АЛГЕБРЫ

На русском языке не было ни одной книги, посвященной специально истории алгебры. Но в книгах по истории математики содержатся такие сведения.

Вот эти книги:

Г. Г. Цейтен. История математики в древности и в средние века. М.—Л., 1938.

Его же. История математики в XVI и XVII веках, М.—Л., 1938.

М. Я. Выгодский. Арифметика и алгебра в древнем мире. М., 1941.

В. П. Шереметевский. Очерки по истории математики. М., 1940.

К. А. Рыбников. История математики. т. I. М., 1960.

Его же. История математики. т. II. М., 1963.

А. П. Юшкевич. История математики в средние века. М., 1961.

Г. Вилейтнер. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М., 1960.

Д. Стройк. Краткий очерк истории математики. М., 1964.

Л. Инфельд. Эварист Галуа. М., 1966.

А. Дальма. Эварист Галуа — революционер и математик. М., 1960.

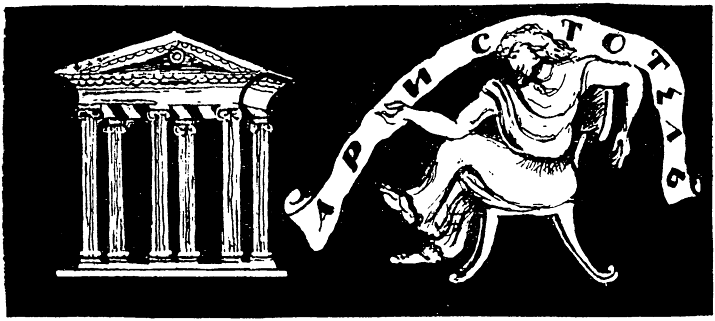
О. Оре. Замечательный математик Нильс Абель. М., 1961.

Ф. Кеджори. История элементарной математики. Одесса, 1917.

Г. Глейзер. История математики для учителя. М., 1964.

В. И. Лебедев. Очерки по истории точных наук. Выпуск первый. Кто изобрел алгебру? М., 1922.

Его же. Очерки. Выпуск третий. Как постепенно обобщалось понятие о числе. М., 1922.



II. НОВАЯ АЛГЕБРА

АЛГЕБРА ЛОГИКИ

Логика — наука о законах мышления — стала самостоятельной наукой в IV веке до нашего летосчисления в трудах греческого ученого Аристотеля (384—322) и сохранилась почти неизменной до нового времени.

Но в XVII веке развитие науки потребовало дальнейшего развития логики. Эту мысль выразил немецкий математик и философ Готфрид Лейбниц (1646—1716). Он высказал идею о создании науки, которая обозначит все понятия символами и установит некоторую новую алгебру для соединения этих символов. После создания такой науки, по мысли Лейбница, ученые и философы перестанут спорить и перекрикивать друг друга, а возьмут в руки карандаши и спокойно скажут: «Давайте-ка вычислять!»

Мысли о такой новой науке сам Лейбниц не осуществил. Частично решил эту задачу чешский математик-философ Бернард Больцано (1781—1848), но труды Больцано не получили широкого распространения.

В середине XIX века ирландский математик Джордж Буль (1815—1864) начал осуществлять идеи Лейбница в своих работах «Математический анализ логики» (1847) и «Законы мышления» (1854).

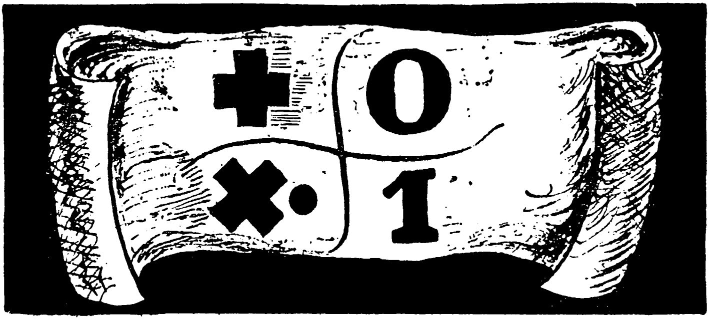
На уроках вы не слышали имени этого гениального ученого. Но зато вы хорошо знаете одну из его талантливых дочерей — Этель Войнич (1864—1960), автора повести «Овод». Другие две дочери Буля были замечательными учеными: одна — математиком, другая первой из женщин Англии стала профессором химии. Этель Лилиан Войнич несколько лет жила в Петербурге, была близка к русским революционерам.

Буль исходил из того, что одно и то же алгебраическое уравнение может выражать вопросы теории чисел, геометрии, механики, физики и вообще чего угодно при различных толкованиях входящих в уравнение букв. Он стал обозначать буквами высказывания или суждения и показал, что уравнениями можно решать вопросы об истинности и ложности высказываний. Так возникла «алгебра логики», или «алгебра Буля», — первое осуществление идеи Лейбница. Эта алгебра есть первая часть математической логики, которая в наши дни стала важнейшей составной частью математики.

Алгебру логики после Буля развивали многие ученые. Одним из первых был казанский астроном П. С. Порецкий (1846—1907), затем ныне еще здравствующий английский философ Бертран Рассел (рождения 1872 года) и ряд европейских математиков. Большие заслуги в математической логике имеют советские математики И. И. Жегалкин (1860—1947), П. С. Новиков (родился в 1901 году), А. А. Марков (родился в 1903 году) и П. С. Эренфест (1880—1933).

Помните, что было сказано в нашей книге о новой алгебре? Одна из ее задач — применение правил алгебры к изучению множеств элементов, которые не являются числами. Алгебра логики дает пример такой новой алгебры. Элементы, которые в ней изучаются, суть высказывания. При решении обычных уравнений мы искали, какому числу равняется неизвестное x. Мы искали там ответа на вопрос: «Сколько?» В алгебре логики мы ищем ответа на вопрос: «Верно ли то или другое высказывание, обозначенное буквой x?»

На следующих страницах пойдет речь об идеях этой алгебры — алгебры логики.



ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

Правила обычной алгебры

Действия и преобразования, применяемые в обычной алгебре, в которой буквами обозначаются числа, основываются на небольшом числе определений и формул.

I. Существует арифметическое действие, называемое сложением и обозначаемое знаком $+$. Принимается, что для каждой пары данных двух чисел a и b существует единственное определенное число c, называемое суммой чисел a и b.

Действие сложения обладает переместительным и сочетательным свойствами. Отсюда формулы:

1) $a+b=c$ (существование единственной суммы чисел a и b),

2) $a+b=b+a$ (переместительное свойство),

3) $a+(b+d)=(a+b)+d$ (сочетательное свойство).

II. Существует второе арифметическое действие, называемое умножением и обозначаемое знаком $\times$ или $\cdot$ (последний знак при употреблении буквенных обозначений обычно не ставится). Действие умножения обладает теми же свойствами, что и сложение: для каждых двух чисел a и b существует определенное единственное произведение d, и действие умножения обладает переместительным и сочетательным свойствами, которые дают формулы:

4) $ab = d$ (существование произведения),

5) $ab = ba$ (переместительное свойство),

6) $a(bc) = (ab)c$ (сочетательное свойство).

Сложение и умножение обладают распределительным свойством: чтобы умножить сумму двух слагаемых на третье число, можно умножить каждое слагаемое отдельно на это число и полученные произведения сложить:

7) $(a + b)\,c = ac + bc$ (распределительное свойство).

III. Существует такое число, обозначаемое знаком 0 (нуль), при сложении которого с любым числом a получается в сумме то же число a, а при перемножении его (то есть нуля) с любым числом a, получается в произведении 0. Отсюда формулы:

8) $a + 0 = 0 + a = a$,

9) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

IV. Существует еще число, обозначаемое знаком 1 и называемое единицей, при перемножении с которым любого числа a получается в произведении то же число a:

10) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

Отмеченные десять формул являются основными законами обычной арифметики и алгебры.

Алгебра высказываний

Джордж Буль сделал предположение, что буквы в записанных десяти формулах обозначают не числа, а высказывания, и показал, что можно выбрать такие определения действий сложения и умножения, при которых все десять формул остаются в силе.

Не должен удивлять нас тот факт, что надо выбрать новые определения сложения и умножения. Это делается и в обычной алгебре. Действия сложения и умножения для дробных, отрицательных или комплексных чисел имеют иной смысл, чем для натуральных чисел. При переходе от одной числовой области к другой надо определять, что будет называться суммой или произведением новых чисел.

Может показаться бессмысленным понятие арифметических действий над высказываниями. Что понимать, например, под «суммой» таких высказываний: «В огороде бузина, а в Киеве дядя»? Как будто никакого смысла в «сумме» таких высказываний нет.

В алгебре логики высказывание рассматривается не по его предметному содержанию или смыслу, а только в отношении того, истинно оно или ложно. Принимается, что каждое высказывание может быть только или истинным, или ложным. Условимся истинность высказывания обозначать единицей, а ложность — нулем. Тогда каждое высказывание может быть приравнено числам 1 или 0, которые являются мерами истинности высказывания «a». Для любого высказывания «a» либо $a=1$, либо $a=0$.

Сложение. Сумма двух высказываний a и b, то есть $a+b$, является сложным высказыванием, которое, как всякое высказывание, может быть истинно или ложно. Сумма двух высказываний считается истинной, то есть равной единице, если хоть одно из складываемых высказываний истинно:

$$a+b=1,$$

если или $a=1$ или $b=1$, что согласно с обычной арифметикой:

$$1+0=0+1=1.$$

Если оба складываемых высказывания истинны, то сумма считается также истинной, поэтому в алгебре логики

$$(1)+(1)=1.$$

Скобки поставлены для того, чтобы подчеркнуть условный, «неарифметический» смысл этого сложения.

Это особенность алгебры логики, вытекающая из того, что и для суммы двух высказываний, которая является сложным высказыванием, можно поставить только вопрос, считается ли она истинной или ложной, то есть сумма должна иметь меру истинности или 1 или 0.

Сумма двух высказываний считается ложной и равной нулю тогда и только тогда, когда оба слагаемых ложны, то есть

$$0+0=0.$$

Итак, «сумма» двух высказываний $a+b$ считается истинной, если истинно **или** a, **или** b, **или** оба слагаемых. Таким образом, слово «или» обозначается знаком $+$.

Мы этим выполняем частичку плана Лейбница о замене слов символами.

Умножение. Произведение ab двух высказываний a и b является также сложным высказыванием. Оно считается истинным (равным единице) тогда и только тогда, когда оба сомножителя истинны, и ложным (равным нулю), если хоть один из сомножителей ложен. Это определение произведения соответствует обычной арифметике:

$$1 \cdot 1 = 1,$$
$$1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0,$$
$$0 \cdot 0 = 0.$$

Первое равенство читается так: если **и** a, **и** b истинны, то произведение ab истинно. Значит, знак умножения $\times$ или $\cdot$ заменяет союз «**и**».

Определения сложения и умножения алгебры логики можно выразить следующими таблицами: помня, что a и b могут быть истинными или ложными и, следовательно, имет меру истинности 1 или 0:

a	b	$a+b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

a	b	ab
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Выбрав данные определения сложения и умножения, легко доказать, что все десять правил обычной алгебры остаются верными и в алгебре логики.

Докажем в качестве примера переместительные законы. Для этого составим соответствующие таблицы, давая буквам a и b по порядку значения 1 или 0, комбинируя их и находя по данным правилам меру истинности суммы и произведения.

1	2	3	4	5	6
a	b	$a+b$	$b+a$	ab	ba
1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Меры истинности сумм $a+b$ и $b+a$ (третий и четвертый столбцы) при всех возможных комбинациях мер истинности a и b совпадают, — следовательно, $a+b$ и $b+a$ в отношении истинности всегда одинаковы («равны»). То же имеем для произведений ab и ba (пятый и шестой столбцы таблицы).

Вот еще доказательство распределительного закона

$$(a+b)c = ac + bc;$$

1	2	3	4	5	6	7	8
a	b	$a+b$	c	$(a+b)c$	ac	bc	$ac+bc$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	1
1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

В первом, втором и четвертом столбцах содержатся все возможные комбинации значений меры истинности для a, b и c; в пятом и восьмом столбцах стоят значения меры истинности для выражений $(a+b)c$ и $ac+bc$. Во всех случаях меры истинности обоих этих выражений одинаковы: если $(a+b)c$ истинно (1), то так же истинны и $ac+bc$. Если $(a+b)c$ ложно (0), то ложно и $ac+bc$. Значит, в отношении истинности при всех возможных комбинациях a, b, c имеет место распределительный закон

$$(a+b)c = ac + bc.$$

Так же можно проверить, что все законы обычной алгебры верны и для алгебры высказываний при указанном выше определении действий сложения и умножения. (Проверьте справедливость сочетательных законов!)

Некоторые особенности алгебры высказываний

В алгебре высказываний вводится новое действие — отрицание данного высказывания. Для каждого высказывания a существует его отрицание «не-a», которое обозначается символом $\bar{a}$. Если высказывание a истинно (и), то его отрицание $\bar{a}$ ложно (л); если a ложно, то его отрицание $\bar{a}$ истинно. Это можно выразить таблицами:

a	$\bar{a}$
и	л
л	и

или

a	$\bar{a}$
1	0
0	1

Из определения смысла действия отрицания, именно из того положения, что из двух высказываний a и $\bar{a}$ всегда одно истинно, следуют новые формулы алгебры логики:

11) $a + \bar{a} = 1$,

12) $a\bar{a} = 0$.

В обычной алгебре формулы (11) и (12) не имеют смысла. В алгебре логики они позволяют при преобразованиях выражений делать указываемые в формулах (11) и (12) замены, чем значительно упрощаются выкладки.

В алгебре логики существуют еще другие упрощающие формулы, которых нет в обычной алгебре. Вот некоторые примеры их:

$$a + a = a, \quad a + a + a = a, \ \ldots \ \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} = a$$

при любом числе слагаемых (иными словами: $na = a$).

Точно так же

$$aa = a, \quad aaa = a, \quad aa \ldots a \ (n \text{ раз}) = (a^n) = a$$

(в обоих случаях n — целое положительное число).

Поэтому в алгебре логики нет коэффициентов, отличающихся от единицы, нет степеней выше первой. Многочлены в этой алгебре проще, чем в обычной алгебре, и преобразования выражений легче. Кроме того, есть еще и другие формулы, упрощающие выкладки.

По распределительному закону обычной алгебры

$$(a + c) \cdot (b + c) = ab + ac + bc + c^2;$$

в алгебре логики имеется еще другой распределительный закон:

$$(a + c) \cdot (b + c) = ab + c \, . \ (*)$$

Докажем справедливость этого закона в алгебре логики обычным методом применения таблицы истинности, давая буквам a, b, c значения единицы и нуля и рассматривая все комбинации этих значений.

1	2	3	4	5	6	7	8
a	b	c	ab	$a+c$	$b+c$	$(a+c)(b+c)$	$ab+c$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Мера истинности в седьмом и восьмом столбцах во всех случаях одинакова, формула (*) всегда верна.

Можно получить еще ряд других «формул поглощения» — аналогичным методом или простыми соображениями. Например: $1+a=1$, так как, согласно определению сложения, в случае, когда одно слагаемое равно единице, сумма равна единице, независимо от того, будет ли $a=0$ или $a=1$. Дальнейшие примеры формул поглощения:

$$a+ab=a\,(1+b)=a\cdot 1=a,$$
$$a(a+b)=a^2+ab=a+ab=a(1+b)=a\cdot 1=a.$$

Формулы поглощения упрощают выкладки по сравнению с преобразованиями в обычной алгебре.

Все изложенное приводит к заключению: так как все основные формулы обычной алгебры верны и для алгебры высказываний, то все преобразования, употребляемые в обычной алгебре при решении уравнений, остаются верными и в алгебре высказываний (в первую очередь возможность почленного перемножения уравнений). Особенности алгебры высказываний — действие отрицания, отсутствие показателей степеней и коэффициентов, отличных от единицы, — должны строго учитываться. Нужно помнить, что в алгебре высказываний мы складываем и умножаем не числа, а меры истинности, и поэтому нас не должны смущать равенства

$$a+a=a,\quad aa=a,\quad 1+a=1$$

и другие, идущие вразрез с обычной алгеброй, в которой a означает число.

ФИЗИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ В АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

Имеют ли сложение и умножение по правилам алгебры логики какое-нибудь конкретное истолкование?

Они иллюстрируются на физических и технических явлениях, простейшее из которых — действие выключателей.

Предположим, что ток идет из какого-нибудь источника к потребителю через выключатель S.

Выключатель может быть либо включен, либо выключен. Цепь соответственно будет или замкнута, или разомкнута. Включенное состояние цепи обозначим единицей, а выключенное — нулем (рис. *а*). Получается аналогия с мерой истинности высказываний (истинно или ложно).

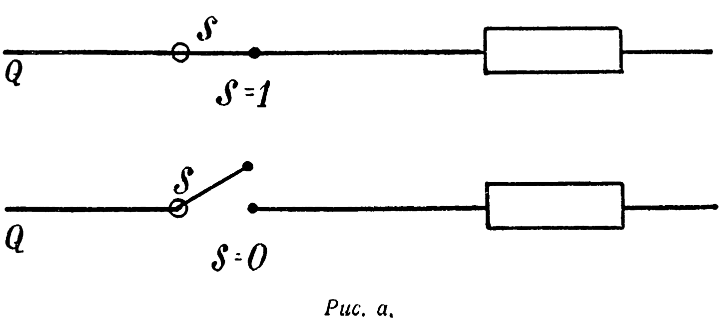


Рис. а.

Дальнейшие операции с выключателем соответствуют понятиям алгебры высказываний.

1) Пусть выключатель S соединен с другим выключателем $\overline{S}$ так, что при включении S выключатель $\overline{S}$ будет выключен, и, наоборот, при выключении S выключатель $\overline{S}$ будет включен (рис. *б*). Действие такой установки может быть выражено таблицей:

S	$\overline{S}$
1	0
0	1

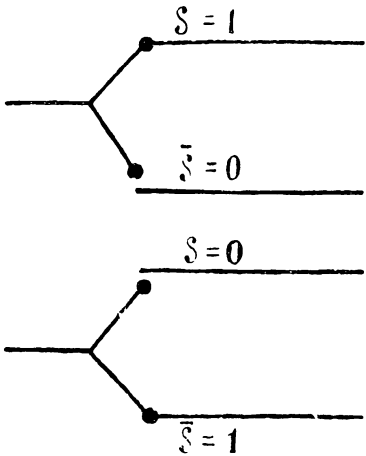


Рис. б.

Это таблица истинности высказывания и его отрицания.

2) Имеются два выключателя S и T на параллельных проводах.

Действие такой параллельной комбинации выключателей обозначим через $S+T$. Такая комбинация может дать замыкание или размыкание цепи. Если S и T оба включены, то $S+T$ замыкает цепь, и мы имеем $S+T = (1)+(1) = 1$ (рис. *в*).

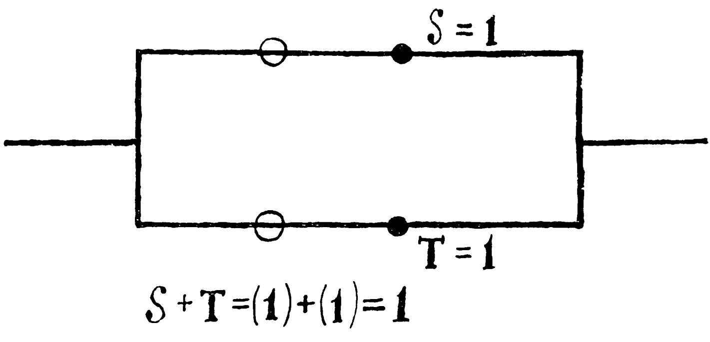


Рис. в.

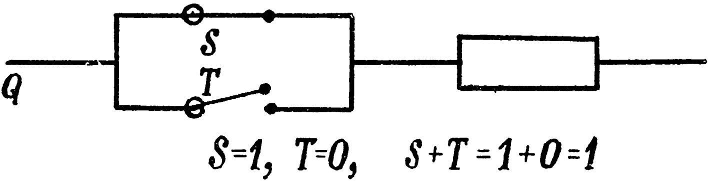


Рис. г.

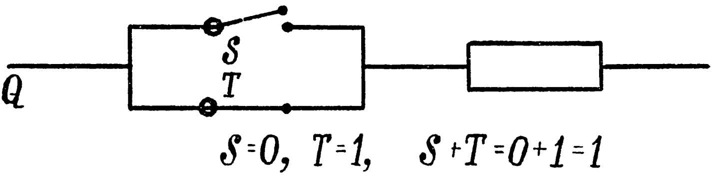


Рис. д.

Цепь будет замкнута и в том случае, если один из выключателей включен, другой выключен:
$S+T=1+0=1$ (рис. *г*); $S+T=0+1=1$ (рис. *д*).

Когда оба выключателя выключены, цепь будет разомкнута;

$S=0,\quad T=0,\quad S+T=0+0=0$ (рис. *е*).

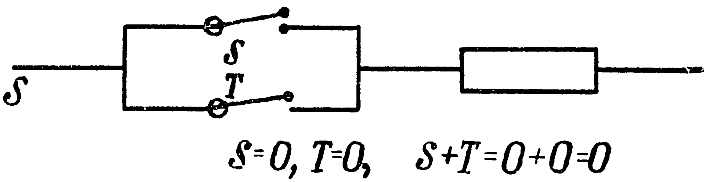


Рис. е.

Результат действия $S+T$ определяется таблицей:

S	T	$S+T$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

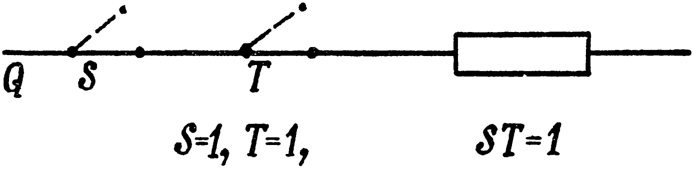


Рис. ж.

Это таблица истинности суммы двух высказываний.

3) Пусть выключатели S и T соединены последовательно (рис. *ж*). Обозначим их совместное действие символом ST. Такая комбинация двух выключателей дает в результате замыкание или размыкание цепи.

Цепь будет замкнута лишь в том случае, если оба выключателя S и T включены (рис. *ж*).

$$S = 1 \text{ и } T = 1, \quad ST = 1 \cdot 1 = 1.$$

Если же хоть один из выключателей не включен, то цепь будет разомкнута (рис. *з, и, к*).

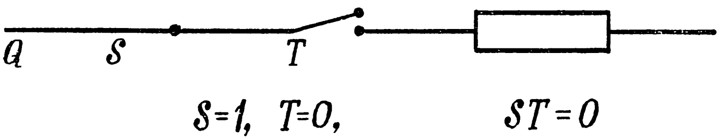


Рис. з.

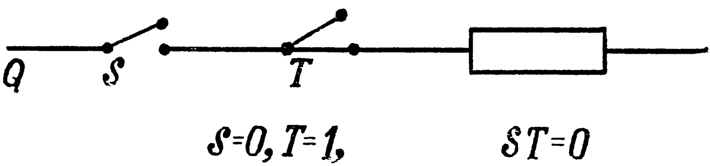


Рис. и.

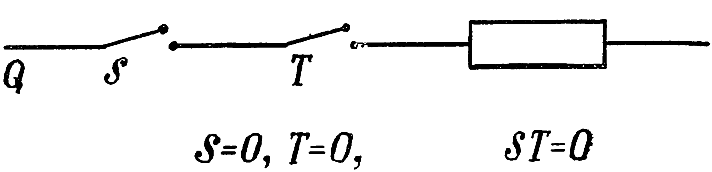


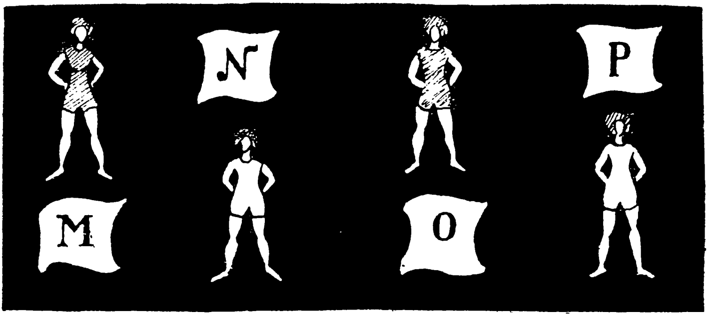
Рис. к.

Замкнутость и разомкнутость цепи выражены таблицей:

S	T	ST
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Эта таблица совпадает с таблицей меры истинности произведения двух высказываний.

Таблицы, которые были составлены выше, свидетельствуют, что операции по включению и выключению электрических цепей можно описывать и изучать средствами алгебры логики. Это открытие, сделанное в 1910 году физиком Эренфестом, в настоящее время очень широко применяется в технических науках.



РЕШЕНИЕ ЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Познакомившись с основными понятиями и правилами, попробуем порешать теперь логические задачи.

Каждую задачу будем решать сначала общими рассуждениями, не применяя символов алгебры логики. Вы, вероятно, вскоре сами перестанете применять «старый» способ решения и перейдете к уравнениям алгебры логики: увидите, что это гораздо проще.

Вот сводка основных правил для решения логических уравнений:

1) Помните, что все правила решения систем уравнений, известные вам из школьной алгебры, остаются в силе, — в частности, почленное перемножение уравнений.

2) Если после преобразований получилось уравнение, левая половина которого есть многочлен, а в правой половине стоит единица, то это означает, что по крайней мере одно слагаемое равно единице, то есть выражает истину. Однако истинными могут быть и несколько слагаемых высказываний, так как в алгебре логики $(1) + (1) + (1) + \ldots = 1$.

3) Если сумма нескольких слагаемых равна нулю, то все они выражают ложные высказывания.

4) Помните, что знак $+$ обозначает слово «или». Все высказывания, имеющие формулу «верно или то, или другое предположение», записываются в виде суммы, приравненной единице.

5) Высказывание, имеющее формулу «имеет место и A, и B, и C», и так далее, записывается в виде уравнения $ABC\ldots = 1$, так как союз «и» обозначается знаком умножения и соответственное сложное высказывание — произведением.

6) Если получилось уравнение $ABC\ldots=1$, то все высказывания $A, B, C\ldots$ истинны и $A=1$, и $B=1$, и $C=1\ldots$

7) Уравнение $ABC\ldots=0$ выражает лишь то, что по крайней мере одно из высказываний $A, B, C\ldots$ ложно. Однако среди них могут быть и истинные высказывания.

8) Для каждого высказывания a существует его отрицание $\bar{a}$: если a истинно, то $\bar{a}$ ложно, если a ложно, то $\bar{a}$ истинно. Нельзя считать отрицание истины a отрицательным числом в смысле обычной алгебры. В алгебре логики отрицательных чисел нет.

9) Помните и применяйге, где возможно, формулы, вытекающие из определений сложения и умножения:

$$a + \bar{a} = 1, \; a\bar{a} = 0.$$

10) Помните, что при натуральном значении n:

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} = na = a,$$

$$a \cdot a \cdot a \ldots a = (a^n) = a.$$

11) Получив при решении задачи уравнение в виде приравненного единице многочлена, рассмотрите все слагаемые. Если какое-нибудь из них содержит противоречие, то для упрощения дальнейших преобразований откиньте это слагаемое, как равное нулю.

Помня все это, принимайтесь за решение задач, применяя правила обычной алгебры.

ЗАДАЧА 1. Четыре ученицы: Мария (M), Нина (N), Ольга (O) и Поля (P) ходили на соревнование и заняли первые четыре места. На вопрос, кто из них какое место занял, девушки дали три разных ответа:

1) Ольга была вторая, Поля — третья;
2) Ольга была первая, Нина — вторая;
3) Мария была вторая, Поля — четвертая.

В каждом из этих трех ответов одна часть верна, другая неверна.

Какое место заняла каждая из четырех учениц?

Решение. Задачу можно было бы решить так. Составим все возможные перестановки четырех букв M, N, O, P. Таких перестановок будет 24 (составьте их). Каждую из перестановок надо сравнить с тремя условиями задачи 1, 2, 3 и найти ту перестановку, которая удовлетворяет им, то есть такую перестановку, чтобы в каждом из трех условий одна часть оказалась верной, другая — неверной. Решение потребует $24 \cdot 3 = 72$ проверки.

Решение можно сократить следующими рассуждениями.

В каждом из данных трех ответов можно предположить верной первую или вторую часть.

Рассмотрим возможные предположения.

Предположим, что верно: Ольга была вторая. При таком предположении во втором ответе было бы неверно, что Ольга была первая, и, значит, верно, что Нина была вторая; это приводит к противоречию: Ольга — вторая (по предположению) и Нина — вторая (по следствию). Значит, предположение, что Ольга была вторая — ложно, а верно, что Поля была третья, так как в каждом ответе одна часть верна, другая неверна: если высказывание, что Ольга была вторая, неверно, то верно, что Поля была третья.

Если Поля была третья, то в третьем ответе неверно, что она была четвертая, и верно, что Мария была вторая.

Во втором ответе неверно, что Нина была вторая, — значит, верно, что Ольга была первая. Остается, что Нина была четвертая.

К этим же результатам мы придем, начиная с любого из предположений: Ольга была первая, или Мария была вторая, или Нина была вторая, или Поля была четвертая и так далее.

Решение с помощью логических уравнений. Вводим обозначения для высказываний: «Ольга была первая — O_1, «Мария была вторая» — M_2, «Нина не была первая» — $\overline{N}_1$, «Поля не была вторая» — $\overline{P}_2$ и так далее.

Приступая к решению, мы по первому условному ответу не можем сказать, будет ли $O_2 = 1$ или $O_2 = 0$, $P_3 = 1$ или $P_3 = 0$.

Но одна часть ответа верна, то есть или $O_2 = 1$ или $P_3 = 1$, поэтому

$$O_2 + P_3 = 1.$$

Так же из условных ответов второго и третьего имеем:

$$O_1 + N_2 = 1$$
$$M_2 + P_4 = 1$$

Итак, имеем три логических уравнения, которые все должны удовлетворяться одновременно, то есть имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} O_2 + P_3 &= 1 \\ O_1 + N_2 &= 1 \qquad (*) \\ M_2 + P_4 &= 1 \end{aligned}$$

Мы ищем ответ, в котором говорится, что Ольга заняла такое-то место, **и** Нина — такое-то, **и** Мария — такое-то, **и** Поля — такое-то. Союз «и» обозначается знаком умножения, поэтому мы должны получить ответ в виде произведения букв O, M, N, P.

Все правила обычной алгебры имеют место в алгебре высказываний. Перемножим почленно два первых уравнения системы (*). Получаем

$$O_2O_1 + O_2N_2 + P_3O_1 + P_3N_2 = 1.$$

Это уравнение утверждает, что по крайней мере одно из слагаемых в левой части уравнения истинно и равняется единице.

$O_2O_1 = 0$, так как это утверждение противоречиво: Ольга заняла и второе и первое место;

$O_2N_2 = 0$, так как O и N обе не могли быть вторыми.

Остается:

$$P_3O_1 + P_3N_2 = 1.$$

Помножим это уравнение почленно на третье уравнение системы (*). Имеем:

$$P_3O_1M_2 + P_3O_1P_4 + P_3N_2M_2 + P_3N_2P_4 = 1.$$

В этом уравнении $P_3O_1P_4=0$ и $P_3N_2P_4=0$ (Поля не может занимать третье и четвертое места); $P_3N_2M_2=0$ (Нина и Мария не могут обе занимать второе место). Остается

$$P_3O_1M_2=1 \text{ или } O_1M_2P_3=1;$$

Ольга заняла первое, Мария — второе, Поля — третье, Нина — четвертое место, и ответ будет

$$O_1M_2P_3N_4=1.$$

После решения задачи необходимо проверить правильность ответа. Это делается, как в любой задаче, по условиям задачи. В нашей задаче условия были следующие: в каждом из трех ответов одна часть была верна, другая неверна:

1) Ольга — вторая, Поля — третья: сравнив с полученным ответом, видим, что первое утверждение (O_2) неверно, второе (P_3) — верно;

2) Ольга — первая, Нина — вторая: O_1 — верно, N_2 — неверно;

3) Мария — вторая, Поля — четвертая: M_2 — верно, P_4 — неверно.

Наше решение задачи верно. Оно займет не более пяти строк.

Самое решение выполняется автоматически, как решение систем уравнений в обычной алгебре, которое вы выполняете без рассуждений.

Вам может показаться, что это решение все-таки длинное. Но ведь и в школе первые системы обычных уравнений вы решали длинно, объясняя каждое преобразование. Решая логические уравнения, мы могли бы не писать тех произведений, в которых повторяется одна и та же буква с двумя разными индексами или две буквы с одинаковыми индексами: такие произведения заведомо равны нулю, и их потом пришлось вычеркивать. Следующие задачи вы можете решить уже гораздо короче.

ЗАДАЧА 2. При составлении расписания на определенный день в определенном классе преподавателями были высказаны просьбы:

1) математика, желающего иметь первый или второй урок;

2) историка, желающего иметь первый или третий урок;

3) литератора, желающего иметь второй или третий урок.

Как удовлетворить всем пожеланиям, и можно ли это сделать одним только способом?

(См. указание в конце книги).

ЗАДАЧА 3. Три девушки: Аня *(А)*, Варя *(В)* и Клава (*К*) ходили на демонстрацию. Одна из них была в красном платье, другая — в белом, третья — в синем. На вопрос, какое на каждой из девушек было платье, они дали ответ:

Аня была в красном,
Варя — в некрасном, (*)
Клава — в несинем.

В этом условном ответе одно из трех утверждений верно, два — неверны.

В каком платье была каждая из девушек?

Решение. Решим задачу не пользуясь логическими уравнениями.

В условном ответе (*) только одна часть верна. Можно предположить верною или первую часть (Аня — в красном), или вторую (Варя — в некрасном), или третью (Клава — в несинем).

При каждом из этих предположений остальные две части условного ответа (*) должны быть неверны. Рассмотрим вытекающие из каждого предположения выводы.

1) Предположение «Аня — в красном» невозможно, так как при этом предположении Варя окажется в некрасном, и в условном ответе (*) две части — первая и вторая — верны, чего не должно быть по условию задачи.

2) Предположим, что верна вторая часть условного ответа: Варя — в некрасном. При таком предположении Варя одета или в белое, или в синее платье.

Аня не может быть в красном платье, так как в таком случае в ответах (*) две части были бы верны: значит, она одета в белое или синее, то есть в некрасное, как и Варя. Значит, для Клавы остается только красное платье. Итак, при втором предположении:

Аня — в некрасном,

Варя — в некрасном,

Клава — в красном, то есть в несинем.

Сравнивая этот результат с условным ответом (*), видим, что в нем верны две части: Варя — в некрасном (по предположению) и Клава — в несинем (следствие). Это противоречит условию задачи, по которому в условном ответе должна быть верна только одна часть. Второе предположение — «Варя — в некрасном» приводит к противоречию с условием. Это предположение невозможно.

3) Остается только третье предположение: верна третья часть условного ответа (*), а именно: Клава — в несинем, и неверны первые две части условия (*). Если неверно, что Варя — в некрасном платье, то верно, что Варя — в красном. В таком случае Клава должна быть одета в белое, а Аня — в синее платье, и мы имеем возможное предположение:

Аня — в синем, Варя — в красном, Клава — в белом платье.

В этом ответе первые две части не согласны с условным ответом (*), третья — согласна.

Это рассуждение начинающие с трудом усваивают.

Решение с помощью логических уравнений.

Введем обозначения высказываний:

$A_{\text{к}}$ — Аня — в красном,

$\overline{B}_{\text{к}}$ — Варя в некрасном,

$\overline{K}_{\text{с}}$ — Клава — в несинем платье.

Условный ответ выражается символом

$$A_{\text{к}}\,\overline{B}_{\text{к}}\overline{K}_{\text{с}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (**)$$

Верной может быть лишь одна из трех частей этого ответа, причем остальные две части неверны. Возможны три предположения:

1) Если верно, что Аня была в красном платье ($A_{\text{к}}$), то неверны утверждения: Варя — в некрасном ($\overline{B}_{\text{к}}$) и Клава — в несинем ($\overline{K}_{\text{с}}$), и верны: Варя — в красном ($B_{\text{к}}$) и Клава — в синем ($K_{\text{с}}$). Этот вывод выражается произведением

$$A_{\text{к}}B_{\text{к}}K_{\text{с}} \qquad (1)$$

Это произведение равно единице, если первое предположение верно, и равно нулю, если предположение неверно.

2) Если верно, что Варя — в некрасном ($\overline{B}_k$), то неверны утверждения: Аня — в красном (A_k) и Клава — в несинем ($\overline{K}_c$), а верны: Аня — в некрасном ($\overline{A}_k$) и Клава — в синем (K_c), что выражается произведением

$$\overline{A}_k\overline{B}_kK_c \qquad (2)$$

Произведение (2) равно единице или нулю, в зависимости от того, верно или неверно второе предположение.

3) Если в (*) верна третья часть: Клава — в несинем ($\overline{K}_c$), то неверны утверждения: Аня — в красном (A_k) и Варя — в некрасном ($\overline{B}_k$), а верны: Аня — в некрасном ($\overline{A}_k$) и Варя — в красном (B_k). Это предположение дает произведение

$$\overline{A}_kB_k\overline{K}_c \qquad (3)$$

Какое из трех предположений (1), (2), (3) верно, мы не знаем, но знаем, что по крайней мере одно из них верно. Поэтому имеем уравнение

$$A_kB_kK_c + \overline{A}_k\overline{B}_kK_c + \overline{A}_kB_k\overline{K}_c = 1.$$

$A_kB_kK_c = 0$, так как A и B не могли быть обе в красном платье.

$\overline{A}_k\overline{B}_kK_c = 0$, так как при таком предположении синее платье занято Клавой и для Ани и Вари не остается двух некрасных платьев.

Можно было бы рассуждать и так, $\overline{A}_k\overline{B}_kK_c$ можно записать в виде $\overline{A}_k\overline{B}_k\overline{K}_k$; это предположение невозможно, так как по нему ни одна из девушек не одета в красное, — значит, $\overline{A}_k\overline{B}_k\overline{K}_k = 0$ и равнозначное ему $\overline{A}_k\overline{B}_kK_c = 0$.

Следовательно, остается:

$$\overline{A}_kB_k\overline{K}_c = 1.$$

Это возможно:

$$A_cB_kK_б = 1:$$

Аня — в синем платье, Варя — в красном, Клава — в белом.

ЗАДАЧА 4. О возрасте четырех студенток A, M, N, O были даны ответы:

1) Ане 23 года, Марии 22 года;

2) Нине 20 лет, Ане 22 года;

3) Оле 22 года, Нине 19 лет.

Ровесниц среди них нет. В каждом ответе одна часть верна, другая неверна. Найти возраст каждой из студенток, если он может быть равен лишь 19, 20, 22, 23.

(См. указания в конце книги).

ЗАДАЧА 5. Шесть школьников C, D, H, F, G, T ходили на олимпиаду. Двое из них решили задачи. На вопрос, кто решил, они ответили:

1) C и G;

2) D и T;

3) T и C;

4) D и F;

5) H и C.

В четырех из ответов одна часть верна (1), другая неверна (0); в одном из ответов обе части неверны (0, 0).

Кто из учеников решил задачи на олимпиаде?

Решение без уравнений.

Обозначим высказывания: C решил, G решил и так далее символами C, G ... Предположение, что школьник C решил, запишется равенством $C = 1$, G не решил задачи — равенством $G = 0$.

Выясним, в каком ответе обе части неверны.

1) Положим, что в первом ответе обе части неверны, то есть $C = 0$, $G = 0$; тогда имеем: из третьего ответа, что T решил, $T = 1$, из второго $D = 0$, из пятого $H = 1$, из четвертого $F = 1$, то есть предположение (1) приводит к тому, что решили трое: H, F, T, что противоречит условию. Значит, первое наше предположение (1) приводит к тому, что решили трое: H, F, T. Это противоречит условию. Значит, наше предположение, что $C = 0$ и $G = 0$, невозможно.

2) Предположим, что во втором ответе обе части неверны: $D = 0$, $T = 0$; тогда из третьего ответа $C = 1$, из четвертого $F = 1$, из пятого $H = 0$, из первого $G = 0$.

Задачи решили C и F, предположение (2) возможно.

3) Предположим, что в третьем ответе обе части неверны: $T = 0$, $C = 0$; тогда имеем: из первого ответа $G = 1$, из второго $D = 1$, из пятого $H = 1$. При этом предположении трое оказываются решившими, что противоречит условию, — третье предположение отпадает.

4) Пусть в четвертом ответе обе части неверны: $D=0$, $F=0$. Тогда имеем: из второго ответа $T=1$, из третьего $C=0$, из первого $G=1$, из пятого $H=1$. Оказалось трое решивших; предположение (4) невозможно.

5) Пусть в пятом ответе обе части неверны: $H=0$, $C=0$. Тогда имеем: из первого ответа $G=1$, из третьего $T=1$, из второго $D=0$, из четвертого $F=1$. Опять оказалось трое решивших, что делает пятое предположение невозможным.

Итак, возможно только одно решение: решили C и F, $CF=1$.

Проверка решения по пяти условиям задачи показывает, что решение $CF=1$ верно, и оно единственное.

В ответах:
в первом: C решил, G не решил;
во втором: D не решил, T не решил;
в третьем: T не решил, C решил;
в четвертом: D не решил, F решил;
в пятом: H не решил, C решил.

В одном ответе (втором) обе части неверны, в остальных — одна часть верна, другая неверна.

Решение $CF=1$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Решение при помощи уравнений. Условия задачи можно записать так:

$$CG=DT=TC=DF=HC=0 \qquad (*)$$
$$(C+G)\ (D+T)\ (T+C)\ (D+F)\ (H+C)=0 \qquad (**)$$

Равенства нулю в (*) следуют из того, что в каждом произведении по крайней мере один сомножитель равен нулю. В произведении (**) одна из скобок (неизвестно которая) равна нулю ($0+0$, оба слагаемых ее нули), остальные четыре скобки равны единице ($0+1$).

Раскроем скобки в (**) и уничтожим на основании (*) отдельные слагаемые: перемножим первый сомножитель на второй, результат — на третий, новый результат — на четвертый, этот результат — на пятый сомножитель:

$$(C+G)\ (D+T)=CD+CT+GD+GT=CD+$$
$$+GD+GT,$$

так как $CT=0$ по (*);

$$(CD+GD+GT)\ (T+C)=CDT+GDT+GTT+ \\ +CCD+CGD+CGT=GT+CD,$$

так как по (*)

$$DT=CG=CT=0, \quad \text{а } GTT+CCD=GT+CD;$$

$$(GT+CD)\ (D+F)=GTD+GTF+CDD+CDF= \\ =CD,$$

так как по (*) $DT=DF=0$, а $GTF=0$, потому что GTF означает, что задачу решили трое, что неверно;

$$CD\ (H+C)=CDH+CCD=CD.$$

Итак, левая часть выражения (**) равна CD и согласно условию (**)

$$CD=0.$$

Можно этого результата добиться гораздо скорее. Представим, что в выражении (**) все скобки раскрыты. Получается многочлен, отдельные слагаемые которого после замены степеней букв первыми степенями их содержат два, три, четыре или пять множителей, например

$$CD,\ CDF,\ CDTF,\ CDTFH.$$

Произведение из трех, четырех или пяти букв означает, что решили 3, 4 или 5 учеников, что по условию задачи неверно, и такие произведения равны нулю. Нам необходимо найти в развернутом выражении (**) только слагаемые, состоящие из двух букв. Таким произведением будет только

$$CCCDD=CD.$$

Итак, по раскрытии скобок в выражении (**) и отбрасывании всех слагаемых из трех, четырех и пяти букв, равных нулю, имеем в дополнение к (*) еще

$$CD=0.$$

По смыслу задачи мы должны получить произведение двух из содержащихся в условии букв, равное единице. Полученные же пока уравнения имеют в правой части нули.

В уравнении (**) правая часть есть нуль, потому что четыре скобки равны каждая единице, одна скобка равна нулю. Мы не знаем, какая из скобок дает нуль.

Если мы из пяти множителей выражения (**) составим все произведения по четыре множителя в каждом произведении, то таких произведений будет пять:

$$\begin{gathered}(C+G)\,(D+T)\,(T+C)\,(D+F),\\(C+G)\,(D+T)\,(T+C)\,(H+C),\\(C+G)\,(D+T)\,(D+F)\,(H+C),\\(C+G)\,(T+C)\,(D+F)\,(H+C),\\(D+T)\,(T+C)\,(D+F)\,(H+C).\end{gathered}$$

Четыре из пяти скобок равны единице, одна скобка равна нулю, так как в ней оба слагаемых равны нулю. Такая скобка войдет в четыре произведения и обращает их в нуль; в одно из пяти произведений она не войдет, и это произведение равно единице (например, если $C+G=0$, то пятое произведение равно единице; если $D+T=0$, то четвертое произведение равно единице и так далее). Следовательно, одно из пяти произведений равно единице, и сумма

$$\begin{aligned}&(C+G)\,(D+T)\,(T+C)\,(D+F)+\\&+(C+G)\,(D+T)\,(T+C)\,(H+C)+\\&+(C+G)\,(D+T)\,(D+F)\,(H+C)+\\&+(C+G)\,(T+C)\,(D+F)\,(H+C)+\\&+(D+T)\,(T+C)\,(D+F)\,(H+C)=1.\end{aligned}\qquad (***)$$

Предполагая, что в каждом из слагаемых раскрыты скобки, выпишем в получаемых многочленах слагаемые, состоящие из двух букв (слагаемые из трех или четырех букв равны нулю).

Имеем из первого слагаемого $CCDD=CD=0$;

из второго слагаемого $CCCD=CD=0$ и $CCCT=$ $=CT=0$;

из третьего слагаемого $CCDD=CD=0$;

из четвертого слагаемого $CCCD=CD=0$ и $CCCF=CF$

(равенства $CF=0$ имеющиеся у нас уравнения (*) не дают!);

из пятого слагаемого $CCDD=CD=0$.

Итак, из левой части уравнения (***) осталось только CF, и мы имеем

$$CF=1.$$

Ответ. Задачи решили C и F.

ЗАДАЧА 6. У меня в детстве было четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дидрих и Фридрих. В один из осенних дней мы впервые переступили порог школы. Учительница сказала, что она будет нас называть по фамилиям. Оказалось, что у друзей фамилии те же, что и имена, только ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковы. Кроме того, фамилия Дидриха не была Альберт. Определить фамилию каждого из мальчиков, если известно, что имя мальчика, фамилия которого Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого — фамилия Карла.

Решение при помощи уравнений.

Условимся обозначать имена первыми буквами и фамилии указателями при обозначении имени.

Так, если имя мальчика A, а фамилия C, то это запишется символом A_C и $A_C = 1$; если же фамилия мальчика с именем A не C, то $A_C = 0$. При такой записи по условиям задачи

$$A_A = C_C = D_D = F_F = D_A = 0.$$

По последнему условию задачи есть мальчик по имени X с фамилией F, и мальчик по имени $У$ с фамилией X и мальчик C с фамилией $У$, иными словами

$$X_F \; Y_X C_Y = 1.$$

Ясно, что

$$X \neq C,\; X \neq F,\; У \neq C,\; У \neq F,$$

так как нет двух мальчиков о одинаковыми именами или с одинаковыми фамилиями.

В уравнение $X_F Y_X C_Y = 1$ вместо X и $У$ можно подставить только A и D.

Так как произведение $X_F Y_X C_Y = 1$, то все множители равны единице и $У_X = 1$. Подстановка вместо X и $У$ букв A и D может дать только два результата: A_D и D_A.

$D_A = 0$ по условию. Остается единственная возможность $A_D = 1$, то есть в уравнении $Y_X = 1$ должно быть $У = A$, $X = D$.

D имеет фамилию F,
A имеет фамилию D,
C имеет фамилию A,
F имеет фамилию C.

Ответ соответствует всем условиям задачи.
Имена и фамилии мальчиков:
Альберт Дидрих,
Карл Альберт,
Дидрих Фридрих,
Фридрих Карл.

ЗАДАЧА 7. В журнале «Техника — молодежи» была предложена задача:

«При решении одной задачи ученики дали три ответа:

1) x есть число иррациональное, равное площади правильного треугольника, у которого сторона $a=2$;

2) x — число, кратное 4 и равное радиусу окружности, длина которой 2;

3) $x<3$ и равно диагонали квадрата, сторона которого 2.

В каждом из ответов одна часть верна, другая неверна. Чему равно x?

Указание. Упростим выражения вторых частей ответов.

1) Площадь правильного треугольника, сторона которого равна 2, есть $\frac{2^2}{4}\sqrt{3}=\sqrt{3}.$

2) Радиус окружности, длина которой 2, дает:

$$2\pi r=2;\ r=\frac{1}{\pi}.$$

3) Диагональ квадрата, сторона которого равна 2, есть $2\sqrt{2}.$

После этого условные ответы задачи можно записать так:

1) X число иррациональное, равное $\sqrt{3}$;

2) X кратно четырем и равно $\frac{1}{\pi}$;

3) $X<3$ и равно $2\sqrt{2}.$

Решение без применения уравнений.

1) $X\neq\sqrt{3},$ так как при предположении $X=\sqrt{3}$ мы имели бы в первом условном ответе обе части верные, а именно: $X=\sqrt{3},$ которое является иррациональным числом. Первый ответ не соответствует условию.

2) Третий ответ также невозможен, так как $2\sqrt{2} < 3$, и при предположении, что $X = 2\sqrt{2}$ в этом ответе обе части верны.

3) Второй ответ удовлетворяет условию задачи: при предположении, что $X = \frac{1}{\pi}$, первая часть условного ответа «X кратно 4» неверна, так как кратным числа 4 может быть только целое число, а вторая часть ответа верна.

Ответ: $X = \frac{1}{\pi}$.

Он удовлетворяет всем трем условиям:

1) $\frac{1}{\pi}$ число иррациональное, но не равно $\sqrt{3}$. Значит, в первом условном ответе первая часть верна, вторая неверна;

2) во втором условном ответе вторая часть верна, первая неверна: $X = \frac{1}{\pi}$, но $\frac{1}{\pi}$ не является кратным 4;

3) в третьем условном ответе первая часть верна: $\frac{1}{\pi} \approx \frac{1}{3,14\ldots} < 3$, но вторая часть неверна, $\frac{1}{\pi} \neq 2\sqrt{2}$.

Очевидно, редакция журнала ожидала такого решения.

Решение при помощи уравнений. Введем обозначения для высказываний:

$[И]$ — число иррациональное,
$[\sqrt{3}]$ — X равно $\sqrt{3}$,
$[\text{Кр. } 4]$ — X кратно 4,
$\left[\frac{1}{\pi}\right]$ — X равно $\frac{1}{\pi}$,
$[< 3]$ — X меньше 3,
$[2\sqrt{2}]$ — X равно $2\sqrt{2}$.

Как и при решении первых задач, имеем систему уравнений

$$[И] + [\sqrt{3}] = 1$$
$$[\text{кр. } 4] + \left[\frac{1}{\pi}\right] = 1$$
$$[< 3] + [2\sqrt{2}] = 1.$$

Почленное перемножение первых двух уравнений дает:

$$[И]\ [\text{кр. }4]+[И]\left[\frac{1}{\pi}\right]+[\sqrt{3}]\cdot[\text{кр. }4]+[\sqrt{3}]\cdot\left[\frac{1}{\pi}\right]=1$$

$[И]\ [\text{кр. }4]=0$, так как число X не может быть одновременно иррациональным и целым;

$[И]\ \left[\frac{1}{\pi}\right]$ — возможно, так как $\frac{1}{\pi}$ иррациональное число;

$[\sqrt{3}]\cdot[\text{кр. }4]=0$, так как $\sqrt{3}$ не кратно 4;

$[\sqrt{3}]\left[\frac{1}{\pi}\right]=0$, так как $\frac{1}{\pi}\neq\sqrt{3}$.

Уравнение получает вид:

$$[И]\cdot\left[\frac{1}{\pi}\right]=1.$$

Таким образом, получено, что $X=\frac{1}{\pi}$, которое есть иррациональное число. Проверим, не противоречит ли этому третье условное уравнение. Перемножим почленно полученный результат с третьим условным уравнением:

$$[И]\ \left[\frac{1}{\pi}\right]\ [<3]+[И]\cdot\left[\frac{1}{\pi}\right][2\sqrt{2}]=1.$$

В первом слагаемом нет противоречий: $\frac{1}{\pi}$ — число иррациональное и меньше 3, второе слагаемое $[И]\left[\frac{1}{\pi}\right]\ [2\sqrt{2}]=0$, так как оно утверждает, что $X=\frac{1}{3,14\ldots}$ и в то же время равно $2\sqrt{2}$. Последнее неверно.

Итак, имеем для значения X уравнение:

$$[И]\ \left[\frac{1}{\pi}\right]\ [<3]=1,\quad X=\frac{1}{\pi}.$$

ЗАДАЧА 8. В велогонке участвовали и заняли первые пять мест пять учащихся. На вопрос, кто из них какое место занял, ребята ответили:

1) Сережа (S) занял второе место, Коля (K) — третье.

2) Надя (N) — третье, Толя (T) — пятое;
3) Толя (T) — первое, Надя (N) — второе;
4) Сережа (S) — второе, Ваня (V) — четвертое;
5) Коля (K) — первое, Ваня (V) — четвертое место.

В каждом ответе одна часть верна, другая неверна. Найти, кто какое место занял.

Решение без уравнений.

Если верно, что Сережа занял второе место, то в третьем ответе неверно, что Надя заняла второе, а верно, что Толя занял первое место. Но тогда по 4 и 5 ответам Коля занял первое место, что невозможно, так как это место занял при сделанном предположении Толя. Предположение, что Сережа занял второе место, невозможно.

Если это предположение невозможно, то по первому ответу верно, что Коля занял третье место. По пятому ответу утверждение, что Коля занял первое место, неверно; значит, Ваня занял четвертое; по второму ответу предположение, что Надя заняла третье место, также неверно; значит, Толя занял пятое место, а по третьему ответу Надя — второе. Итак, при сделанном предположении заняли места: Коля — третье, Ваня — четвертое, Толя — пятое и Надя — второе. Следовательно, Сережа занял первое место.

Решение при помощи уравнений.

При употреблении введенного нами в предыдущих задачах способа обозначать высказывания символами, имеем:

$$\begin{array}{lll}
1)\ S_2+K_3=1 & & S_2K_3=0 \\
2)\ N_3+T_5=1 & & N_3T_5=0 \\
3)\ T_1+N_2=1 & \text{и} & T_1N_2=0 \\
4)\ S_2+V_4=1 & & S_2V_4=0 \\
5)\ K_1+V_4=1 & & K_1V_4=0
\end{array}$$

Совместные уравнения первого столбца перемножим почленно.

Почленное перемножение второго и третьего уравнения дает:

6) $N_3T_1+N_3N_2+T_5T_1+T_5N_2=N_3T_1+T_5N_2=1.$

($N_3N_2=0$ и $T_5T_1=0$, как выражающие невозможные высказывания).

Почленное перемножение уравнений (4) и (5) дает:

7) $S_2K_1 + S_2V_4 + V_4K_1 + V_4 = S_2K_1 + V_4 = 1$, так как $S_2V_4 = 0$ и $V_4K_1 = 0$ по (*).

Почленное перемножение уравнений (1) и (6) дает:

$$S_2N_3T_1 + S_2T_5N_2 + K_3N_3T_1 + K_3T_5N_2 = 1,$$

а так как $S_2N_2 = 0$, $K_3N_3 = 0$,

то имеем:

8) $S_2N_3T_1 + K_3T_5N_2 = 1$.

Почленное перемножение результатов (7) и (8) дает:

$$S_2K_1N_3T_1 + S_2K_1K_3T_5N_2 + V_4S_2N_3T_1 + V_4K_3T_5N_2 = 1;$$

первое, второе и третье слагаемые равны нулю, как содержащие $K_1T_1 = 0$, $K_1K_3 = 0$, $V_4S_2 = 0$.

Остается $N_2K_3V_4T_5 = 1$,

или

9) $S_1N_2K_3V_4T_5 = 1$.

Ответ. Сережа был первым, Надя — второй, Коля — третьим, Ваня — четвертым, Толя — пятым.

Проверьте выполнение всех пяти условий задачи: в каждом условном высказывании одна часть верна, другая неверна.

Примечания к решению задач

Второй способ решения задачи № 1

Для упражнения в решении логических уравнений можно предложить второй способ решения нашей задачи.

Согласно первому условному ответу, верно одно из двух: или Ольга — вторая и тогда Поля не третья, или Ольга не вторая, но Поля — третья. Иными словами, из двух произведений $O_2\overline{P}_3$ и $\overline{O}_2P_3$ одно верно, но которое из них верно, нам неизвестно. Имеем равенство

$$O_2\overline{P}_3 + \overline{O}_2P_3 = 1,$$

Из других условных ответов получаем подобные уравнения:

$$O_1\overline{N}_2+\overline{O}_1N_2=1,$$
$$M_2\overline{P}_4+\overline{M}_2P_4=1.$$

Имеем систему уравнений:

$$O_2\overline{P}_3+\overline{O}_2P_3=1,$$
$$O_1\overline{N}_2+\overline{O}_1N_2=1,$$
$$M_2\overline{P}_4+\overline{M}_2P_4=1.$$

Перемножим почленно два первых уравнения:

$$O_2\overline{P}_3O_1\overline{N}_2+O_2\overline{P}_3\overline{O}_1N_2+\overline{O}_2P_3O_1\overline{N}_2+\overline{O}_2P_3\overline{O}_1N_2=1;$$

$O_2\overline{P}_3O_1\overline{N}_2=0$ (Ольга не может занимать два места);
$O_2\overline{P}_3\overline{O}_1N_2=0$ (Ольга и Нина не могут занимать обе второе место).

Остается уравнение:

$$\overline{O}_2P_3O_1\overline{N}_2+\overline{O}_2P_3\overline{O}_1N_2=1;$$

Умножение его почленно на третье уравнение системы (**) дает:

$$\overline{O}_2P_3O_1\overline{N}_2M_2\overline{P}_4+\overline{O}_2P_3O_1\overline{N}_2\overline{M}_2P_4+\overline{O}_2P_3\overline{O}_1N_2M_2\overline{P}_4+$$
$$+\overline{O}_2P_3\overline{O}_1N_2\overline{M}_2P_4=1.$$

Второе и четвертое слагаемые равны нулю, так как содержат противоречие P_3P_4; третье слагаемое равно нулю, как содержащее противоречие N_2M_2. Остается

$$\overline{O}_2P_3O_1\overline{N}_2M_2\overline{P}_4=1,$$

или

$$O_1M_2P_3=1,$$

или

$$O_1M_2P_3N_4=1.$$

Таким же способом можно решить задачи 2, 3, 5, 8. Проделайте это для упражнения в выкладках.

ЗАДАЧА 2. Решение системы приводит к уравнению

$$M_1Л_2И_3+И_1M_2Л_3=1.$$

Оба слагаемых удовлетворяют условиям задачи. Здесь мы имеем равенство

$$(1)+(1)=1.$$

Возможны два варианта расписания.

Ответ. $М_1 Л_2 И_3 = 1$,

$И_1 М_2 Л_3 = 1$.

Найдите эти ответы рассуждением.

ЗАДАЧА 4. Вводим обозначения A_{23}, M_{22} и так далее получаем систему трех уравнений, из которых

$$A_{23} N_{20} O_{22} = 1.$$

Так как возможные возрасты 19, 20, 22, 23, то возраст Марии 19 лет, ровесниц у нее нет, и ответ задачи:

$$A_{23} M_{19} N_{20} O_{22} = 1.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ВТОРОЙ ЧАСТИ КНИГИ

Мы решили несколько задач. Почти для всех рассмотренных примеров было показано, как можно решить задачи и без алгебры логики, когда счастливая догадка подсказала способ рассуждения. Однако такая возможность нисколько не уменьшает значения алгебры логики. По этому поводу поучительны рассуждения академика А. Н. Крылова о взаимоотношениях математики и техники.

Встречались представители техники, которые недооценивали значения математики. Они ссылались на тот факт, что, например, «в средние века и в древности возводились неподражаемые дворцы и храмы, поражающие не только размерами, красотою форм и линий, но и легкостью сооружения, разумным использованием материала, соблюдением даже в деталях истинных принципов строительной механики, которой тогда не было, да и быть не могло, так как даже правило параллелограмма сил известно не было»[1]. Это внушало противникам математики мнение, что математика, в сущности, есть переливание из пустого в порожнее, ибо «все, что в ней есть, взято из ее основных, совершенно очевидных, аксиом; значит, всеобъемлющий ум видел бы сразу в этих

---

[1] А. Н. Крылов. Прикладная математика и ее значение для техники. Изд. АН СССР, М., 1931, стр. 5.

аксиомах и все их следствия, то есть — всю математику».

На это А. Н. Крылов отвечает: «Да, ум всеобъемлющий (разрядка моя. — *И. Д.*) это видел бы, но известно, что ум человеческий ограничен... Математика и нужна уму ограниченному как подспорье для правильных умозаключений».

К этим словам А. Н. Крылова можно добавить следующее.

В минувшие века чудеса архитектуры возводились в тех случаях, когда находился гениальный строитель. Гении вроде Леонардо да Винчи рождаются редко. Поэтому и чудеса архитектуры возникали с большими перерывами во времени. В наши дни, когда ежегодно возводятся десятки высотных зданий, нельзя рассчитывать на гениев, а нужно, чтобы эти здания могли строить обыкновенные люди. Им для возведения высотных зданий необходимы большие знания по математике.

Совершенно так же обстоит дело с решением задач, приведенных выше. Одни учащиеся легко, без символического аппарата, решали предлагаемые примеры, но таких учащихся сравнительно мало. У подавляющего же большинства не хватало догадки для решения этих задач. Решение стало для них доступным при помощи предложенных основ алгебры логики.

Алгебра логики вносит значительный вклад в сокровищницу полезных приемов для решения задач математики и техники, притом и таких, которые другими средствами не решаются или решаются с большим трудом. Однако не следует сбрасывать со счетов и решения задач обычными логическими рассуждениями. Развитие логического мышления, которое применяется при решении задач в арифметике и алгебре, является важною целью при изучении математики.

Гимназисту первого класса Альберту Эйнштейну его дядя сказал: «Алгебра — это арифметика лентяев».

Отстаивать «честь» алгебры нет надобности. И обычная алгебра и алгебра логики облегчают решение задач, которые арифметически часто решаются при помощи сложных рассуждений, алгебраически же — просто. Но бывают и такие задачи, которые арифметически решаются проще, чем алгебраически.

Арифметика — тоже важная ступень математического мышления, поэтому арифметическое решение задач не теряет своего значения и для человека, знающего алгебру.

КНИГИ ДЛЯ ЧТЕНИЯ ПО АЛГЕБРЕ ЛОГИКИ

1. Л. А. Калужнин. Что такое математическая логика. Киев., 1965.

2. Г. О. Ефремов. Математическая логика и машины. М., 1962.

3. И. Я. Депман. Первое знакомство с математической логикой. Л., 1965.

4. А. А. Столяр. Элементы математической логики. Часть первая. Логика высказываний. М., 1964.

5. Его же. Часть вторая. Логика предикатов. М., 1965.

6. Его же. Элементарное введение в математическую логику. М., 1965.

7. П. С. Новиков. Элементы математической логики. М., 1959.

8. Э. Кольман и О. Зих. Занимательная логика. М., 1966.

Последнее слово к читателю

Юный математик, мы с тобою пробежали 5000 лет истории алгебры — центральной части математической науки. Из этого обзора ты видишь, как богата математика, в частности алгебра.

Во все времена математика была основой научно-технического и экономического развития народов. Она была тем действенным инструментом, тем микроскопом, который позволяет проникать в дебри знаний, составляющих основу нашей техники и цивилизации. Эта роль математики особенно возросла в наше время.

В прошедшие десятилетия и столетия все признавали роль математики для техники. Будущий инженер первые годы учения в институте посвящал изучению математики.

За последние же десятилетия развитие науки привело к убеждению, что изучение почти всех наук требует предварительного знания математики. Математика и ее методы ныне оказались необходимыми для экономических наук, медицины, философии, разных областей биологии, географии, химии и даже филологических наук.

Предание говорит, что на дверях школы греческого философа Платона была надпись: «Не знающий геометрии пусть не входит в эти двери».

В наши дни почти все научные аудитории должны бы сделать на своих дверях эту надпись.

Астрономия и физика с давних пор были полуматематическими науками, ныне их нужно признать математическими больше чем на половину. Современная физика требует ряда специальных математических дисциплин.

Наука XVIII и XIX веков в качестве триумфов математики называла открытие планеты Нептун «на кончике пера», которое осуществил в 1846 году французский астроном Леверье, или предсказание английским математиком Гамильтоном некоторого физического явления (конической рефракции). В наши дни можно назвать много таких примеров, когда математика предсказала физическое явление (в теории относительности, в теории частиц, предсказание Дираком существования позитрона и др.). Каждая новая победа в космических полетах представляет не меньшую победу математики, чем предсказания Леверье и Гамильтона.

Часто повторяются справедливые слова академика А. Н. Несмеянова: «Поколение, вступающее сейчас в школу, будет жить и творить в гораздо более математизированном мире, и это должны учесть и органы народного образования».

Добавим к этому: это должна учесть и сама современная молодежь.

В. И. Ленин считал, что естествознание достигнет высшего развития, когда оно подойдет «к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку». К. Маркс писал: «Наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой». Очевидно, что рядом наук эта стадия достигнута.

«Дальнейшие перспективы прогресса науки и техники, — говорится в программе КПСС, — определяются в настоящий период, прежде всего, достижениями ведущих отраслей естествознания. Высокий уровень развития математики, физики, химии, биологии — необходимые условия подъема и эффективности технических, медицинских, сельскохозяйственных и других наук».

Значение и роль математики не исчерпывается ее применением. «Математика не есть только столп, на который опирается технологическая цивилизация сегодняшнего дня, но является существенной частью интеллектуального вооружения каждого гражданина», — говорил крупный английский математик Ходж, председатель международного конгресса математиков.

Математика имеет и свою внутреннюю логику и красоту, свою поэзию. «Нельзя быть математиком, не будучи немного поэтом», — говорил математик К. Вейерштрасс, учитель славной С. В. Ковалевской. А понять эту красоту, да и вообще использовать математику, может лишь тот, кто не боится трудностей ее усвоения.

* * *

Некоторые страницы книги могли и для тебя, читатель, оказаться пока трудными, особенно в том случае, если ты еще учишься в V, VI или VII классе. Не пугайся трудностей.

Автор книги стремился следовать совету старого русского математика Симеона Кирилловича Котельникова (1723—1806):

«Я стремился предложить и доказать все кратко, сколько возможно, и ясно, сколько дозволяет краткость». В какой мере это удалось — об этом судить тебе.

Перечитай трудные места вновь и вновь, многое непонятное тебе станет ясным, особенно когда перейдешь в старшие классы. Математическая книга читается не так, как повесть или роман. Читать ее надо с карандашом в руке.

Кое-какие мысли автор книги только наметил, представляя тебе самому закончить их. Завершить книгу мне хочется словами автора очень старой (1714 год) русской математической книги, третьей по счету. Надеюсь, ты докопаешься до смысла ее старинного языка:

«Итак, благоразумный читатель, изволь сию малую книжицу в великий дар себе прияти, аще и мала есть... Нашего же сего труда не вмени, яко ленивства ради малое число написахом, но дабы прилежный всяк из малой вещи в бо́льшее себе прилежание принуждал и не довольствовался бы чюжею премудростью, но сам пифагором стал. А если нам, трудившимся, случилось при этом погрешить, то своим благоразумием изволь простить».

ОГЛАВЛЕНИЕ

II НОВАЯ АЛГЕБРА

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ДЕПМАН ИВАН ЯКОВЛЕВИЧ

РАССКАЗЫ О СТАРОЙ И НОВОЙ АЛГЕБРЕ

Ответственный редактор *Н. К. Неуймина.* Художественный редактор *В. В. Куприянов* Технический редактор *Т. С. Филиппова.* Корректоры *Л. К. Малявко* и *К. Д. Немковская.*

Подписано к набору 7/VII 1966 г. Подписано к печати 12/IV 1967 г. Формат 84×108 1/32. Бум. № 2. Печ. л. 4,5. Усл. печ. л. 7,56. Уч.-изд. л. 6,526. Тираж 50 000 экз. ТП 1966 № 552. М-16258. Ленинградское отделение издательства «Детская литература». Ленинград, Д-187, наб. Кутузова, 6. Типография «Пунане Тяхт». Таллин, ул. Пикк, 54/58. Заказ № 1390. Цена 20 коп.

20 коп.

ИЗДАТЕЛЬСТВО
„ДЕТСКАЯ ЛИТЕРАТУРА“