БІБЛІОТЕЧКА
ФІЗИКО-
МАТЕМАТИЧНОЇ
ШКОЛИ

МАТЕМАТИКА

В. Н. КАСАТКИН

НОВОЕ О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

БИБЛИОТЕЧКА
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ
МАТЕМАТИКА

В. Н. КАСАТКИН

НОВОЕ О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Киев
Головное издательство
издательского объединения «Вища школа»
1982

ББК 22. 12
51
К28

УДК : 51

Новое о системах счисления. Касаткин В. Н. — Киев : Вища школа. Головное изд-во, 1982. — 96 с. — (Б-ка физ.-мат. школы. Математика).

Искусство счета — одно из самых древних умений человека. От простейших счетных приспособлений до ЭВМ — такой путь прошла творческая изобретательность человека.

В книге рассказывается о системах счисления, представляющих практический и теоретический интерес. Наряду с уже известными учащимся системами счисления с натуральным основанием (десятичная, двоичная, восьмеричная) рассматриваются системы счисления с отрицательным основанием, с основанием, содержащим мнимую единицу, системы остаточных классов, уравновешенные и др.

По каждой из систем счисления приводятся исторические сведения, разъясняется арифметика, обсуждаются необычные практические применения и необходимые вычислительные приспособления.

Пособие рассчитано на учащихся физико-математических и средних общеобразовательных школ. Оно может быть использовано учителями математики при проведении внеурочной кружковой работы.

Ил. 20. Библиогр.: 8 назв.

Рецензент канд. физ.-мат. наук *В. И. Сущанский* (КГУ)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

К $\frac{20202-093}{М 211 (04) - 82}$ 380—82 1702070000

ВВЕДЕНИЕ

Развитие вычислительной техники, появление быстродействующих программно-управляемых электронных вычислительных машин, возникновение искусства программирования — все это потребовало глубокого и целенаправленного изучения особенностей десятичной и других позиционных систем счисления. Перед математиками и конструкторами вычислительных машин в 50-х годах встала задача отыскания таких систем счисления, которые отвечали бы требованиям программирования и удовлетворяли бы запросам, идущим от разработчиков новых вычислительных устройств. В результате активных поисков в очень короткое время наши представления о системах счисления и методах счета оказались значительно измененными. Выяснилось, что одно из древнейших интеллектуальных умений человека — арифметический счет даже в наше время может совершенствоваться подчас весьма неожиданно и, на удивление, эффективно.

Знакомству с историей создания новых систем счисления, с достигнутыми при этом результатами служит предлагаемая вниманию читателя книга. Рассказ о новых системах и их особенностях строится в книге как небольшое математическое исследование. Объектом исследования является формула числа в позиционной системе счисления. Формула хорошо известна школьникам:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0,\ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k})_q = a_n q^n + a_{n-1} \times$$
$$\times q^{n-1} + \cdots + a_1 q^1 + a_0 + a_{-1} q^{-1} + \cdots + a_{-k} q^{-k},$$

где a_n, a_{n-1}, ..., a_{-k} — цифры, а q — основание системы счисления.

Что значит исследовать эту формулу?

В настоящее время в быту, производственной и научной практике в основном применяется десятичная система счисления (основание $q = 10$), а цифрами являются числа 0, 1, 2, ..., 9. Наряду с десятичной ранее использовалась система счисления с основанием $q = 12$, а сейчас широко распространены системы с основаниями 2, 8 и 16. Каждая из указанных систем счисления обладает своими особенностями, которые изучаются и используются на практике.

Из сказанного ясно, что изменяя основание системы, можно получать отличающиеся по свойствам системы счисления. В приведенных выше примерах основания q были различными, но при этом оставались натуральными (2, 8, 10, 12 или 16).

Нельзя ли исследование систем счисления вести более широко и выяснить, какими возможностями будут обладать системы, если основание q считать не обязательно числом натуральным, а и целым отрицательным: $q = -2$, $q = -4$ и т. п., или комплексным числом: $q = i$, $q = 2i$ или $q = a + bi$? Интересно выяснить, можно ли в роли цифр в формуле числа использовать наряду с натуральными и целые отрицательные числа.

В математике исследования такого рода принято называть *обобщениями*. Ниже обобщается понятие о системе счисления, делается это путем расширения представления об основании системы счисления q и цифре a_i. Основной целью исследования является изучение конкретных свойств возникающих систем счисления.

Рассмотрение каждой новой системы счисления включает изучение особенностей выполнения арифметических действий над числами, выяснение признаков делимости, устанавливается связь с другими системами счисления. Обсуждаются возможные практические приложения той или иной системы счисления.

Глава I

НЕДЕСЯТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С НАТУРАЛЬНЫМ ОСНОВАНИЕМ

§ 1. Общие понятия

Обобщение понятия о системах счисления будет осуществляться постепенно. Сначала рассматриваются системы только с натуральным основанием, т. е. при $q \in \in N$.

Изучение естественно начать с частного случая, когда $q = 1$, с ознакомления с так называемой унарной системой счисления.

История этой системы счисления восходит к тому далекому прошлому, когда человек для изображения требуемого числа пользовался насечками на палке или ссыпал камешки в мешочек.

Унарная система счисления — это «...система счисления, в которой для записи чисел применялся только один вид знаков — «палочка». Каждое число в такой системе счисления обозначалось с помощью строки, составленной из палочек, количество которых равнялось обозначаемому числу» (Энциклопедия кибернетики, Киев, Главная редакция УСЭ, 1974, с. 343). Далее в роли системного знака, в роли «палочек», рассматриваются камешки.

От мешочка с камешками до карманного компьютера — вот какой огромный путь прошел человек, совершенствуясь в искусстве счета. Когда-то в далеком прошлом осознание того, что мешочек с камешками есть инструмент, есть орудие счета, средство, манипуляции с которым позволяют решать практические задачи, было чрезвычайно важным событием. Все достижения вычислительной культуры человека берут свое начало в унарной системе счисления.

Формирование абстрактного, оторванного от объекта понятия «числительного» несомненно связано с умением пользоваться счетными инструментами унарной системы счисления, лучшим из которых, вероятнее всего, был мешочек с камешками. Мысль о том, что пять камешков —

это не только пять овец; пять домов или дней — могла постепенно эволюционировать в мысль о числительном «пять» вообще.

Замена в рассуждениях натуральных объектов, подчас громоздких (дом, предметы обихода) или «непослушных» (домашний скот, птица), символами, значками, в роли которых выступали насечки или камешки,— это, по существу, зарождение первых абстракций, появление первых моделей: мешочек с камешками — модель стада овец, палочка с насечками на ней — модель календаря. Осознав это, человек получил возможность для более свободного манипулирования данными, создал себе условия более удобного, наглядного и, главное, более убедительного обсуждения предположений, облегчил себе учет и научился делать первые шаги в планировании.

Используется ли унарная система счисления в наше время?

Ответ для многих может показаться неожиданным — да, используется. Вспомните первоклассников и счетные палочки в их руках. Сложить, найти сумму для малышей — это значит смешать в одну несколько групп (кучек) палочек и пересчитать их. И слагаемые, и сумма в этом случае задаются в унарной системе счисления.

Для тех из школьников, кто скептически относится к роли унарной системы в наши дни, предлагается вопрос:

«Как к пяти прибавить семь?»

Подчеркнем, что требуется описать процесс суммирования, а не сообщить результат.

Заметим еще, что с числами, записанными в унарной системе счисления, приходится иметь дело при изучении и конструировании алгоритмов, задаваемых в специфических алгоритмических системах, например, в системе Э. Поста.

Эволюция унарной системы счисления постепенно привела к идее «пересчитывания группами», а затем к возникновению цифр и чисел, к позиционной цифровой записи чисел. Роль практики, связанной со счетом, с проявлением человеческой изобретательности в этой области, расценивается сегодня очень высоко. Имеются достаточно обоснованные предположения о том, что сначала человек изобрел цифры, а лишь затем другие письменные знаки. Такая точка зрения поддерживается известным ученым и философом, англичанином Джоном Берналом: «...письменность — это величайшее изобретение руки и ума человека, постепенно возникла из счета» (Дж. Бернал. Наука в истории общества. М., Мир, 1956, с. 74). К этой же мысли приходит и известный советский историк А. А. Вайман. Обоснования своему тезису он находит в протошумерских текстах IV—III тысячелетий до нашей эры [6].

Все сказанное выше должно закрепить основные первоначальные понятия счета. Роль унарной системы в развитии математической культуры трудно переоценить, она явилась предшественницей позиционных систем счисления.

В дальнейшем под позиционной системой счисления будем понимать систему, задаваемую определением, которое приведено в энциклопедии кибернетики (Киев, Главная редакция УСЭ, 1974, с. 343):

«Система счисления — совокупность приемов обозначения (записи) чисел. Наиболее совершенными являются позиционные системы счисления, т. е. системы обозначения чисел, в которых значение каждой цифры в изображении числа зависит от ее положения (позиции) в последовательности цифр, изображающей число».

Аналогично определяется позиционная система счисления в западногерманском стандарте: «Позиционная система счисления — это способ представления чисел, при котором вклад, вносимый каждой цифрой, зависит от ее разряда и численного значения» (DIN 44300).

Записать число в какой-либо позиционной системе счисления — это значит представить это число либо в цифровой, либо в многочленной форме:

$A_q = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-k})_q$ — цифровая форма;

$$A_q = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0 + a_{-1} q^{-1} + $$
$$+ a_{-2} q^{-2} + \cdots + a_{-k} q^{-k} \text{ — многочленная форма.}$$

В каждой из записей: a_i — цифра системы счисления; q — основание системы счисления.

Основание системы счисления в начальный период утверждения таких систем счисления истолковывалось как отношение единиц двух любых соседних разрядов в числе: каждая единица следующего разряда в «q» раз больше единицы предшествующего разряда. Со временем, однако, такое толкование понятия «основание системы счисления» расширилось. Ниже раскрывается более общий подход к истолкованию понятия «цифра» и «основание системы».

История развития позиционных систем счисления, как история научно обоснованная, начинается трудами вавилонских математиков. Исследование клинописных дощечек, найденных в Месопотамии, показывает, что за два тысячелетия до нашей эры вавилоняне пользовались фактически двумя позиционными системами: в быту — системой, близкой к десятичной, а в научной практике — шестидесятеричной. Греческий математик и астроном К. Птолемей (II век нашей эры) пользовался в своих вычислениях шестидесятеричной системой счисления, он же ввел знак «нуль» для обозначения отсутствующих единиц в любом разряде числа. Вавилонские математики сознавали роль нуля, как «позиционной пробки», нуль они обозначали как „“, но использовали его только для записи внутри числа, в конце числа они нулей не писали. Числа 2, 120 и $\frac{1}{30}$ записывались одинаково.

Много интересного хранит история математики о достижениях индейцев племени майя в Центральной Америке, которые более 2000 лет назад уже применяли позиционную систему с основанием $q = 20$. К сожалению, подробностей об этой системе счисления не сохранилось, так как все рукописи погибли в период завоевания этого района испанцами.

Создание десятичной позиционной системы счисления является одним из выдающихся достижений науки, и главная заслуга в этом принадлежит индусским математикам.

Запись чисел, как чисел десятичных, у индусов ведется уже с VI века нашей эры, индусам был знаком и нуль. В Европу десятичная система счисления проникла, и об этом имеются убедительные письменные свидетельства, благодаря трактату багдадского астронома и математика Хорезми Мухаммеда бен Муса «Об индийском счете», где он, в частности, говорит: «Когда увидел я, что индийцы составляли из IX букв любое число, благодаря расположению, какое они установили, я пожелал раскрыть, что получится из этих букв для облегчения изучающему».

Исторические сведения далее будут сообщаться при рассмотрении конкретных систем счисления.

§ 2. Двоичная система счисления

Двоичная система счисления, т. е. система, основание которой $q = 2$, образно говоря, является «минимальной» системой, в которой полностью реализуется принцип позиционности в цифровой форме записи чисел. Еще раз подчеркнем, что принцип позиционности состоит в том, что при записи и чтении числа каждой его цифре кроме ее «собственного» значения (оно определяется ее изображением: 7 — семь, 5 — пять и т. д.) придается еще и значение «по месту», значение, задаваемое позицией (разрядом), которую занимает эта цифра в числе. В двоичной системе счисления значение каждой цифры «по месту» при переходе от младшего разряда к следующему старшему увеличивается вдвое. К двоичной форме записи числа приводит пересчитывание предметов, предварительно группируемых в пары.

История развития двоичной системы счисления — одна из ярких страниц в истории арифметики. Официальное «рождение» двоичной арифметики связывают с именем Г. В. Лейбница. Он в 1703 году опубликовал статью (Memoires de l'Academie Royale des Sciences, Paris), в которой были рассмотрены правила выполнения всех арифметических операций над двоичными числами. Следует иметь в виду, что Лейбниц не рекомендовал двоичную систему для практических вычислений, он считал ее полезной лишь при рассмотрении теоретических вопросов. В частности, он полагал, что закономерности в больших числовых последовательностях легко увидеть, если эти последовательности записать в виде двоичных чисел, состоявших из единиц и нулей. Так, по его предложению Яков Бернулли пытался отыскать закономерности в распределении цифр числа π, используя 35-значное двоичное приближение числа π. Из других применений двоичной системы счисления следует указать на использование ее при анализе некоторых игр и головоломок.

Авторский приоритет в публикации основных понятий этой системы счисления, по свидетельству Д. Кнута, «принадлежит испанцу Х. К. Лобковицу, который довольно подробно рассмотрел представление чисел в системах счисления по основаниям 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 и 60, но не привел никаких примеров арифметических операций в недесятичных системах счисления»

(Д. Кнут. Искусство программирования для ЭВМ. М., Мир, т. 2, 1977, с. 208).

До начала тридцатых годов XX века двоичная система счисления оставалась вне поля зрения прикладной математики. Потребность в создании надежных и простых по конструкции счетных механических устройств и удивительная простота выполнения действий над двоичными числами привели к более глубокому и активному изучению особенностей двоичной системы как системы, пригодной для аппаратурной реализации. Первые двоичные вычислительные механические машины были построены во Франции и Германии. Пионером в проектировании вычислительных устройств двоичного действия на электронно-ламповой основе является инженер Дж. В. Атанасов, болгарин по национальности, проживавший в США. Одновременно с ним (1937 г.) двоичную машину, но на релейной основе, спроектировал Дж. Р. Штибиц. В 1941 году немецкий инженер Конрад Цузе построил сначала механическую, а затем и релейную двоичную вычислительную машину.

Утверждение двоичной арифметики в качестве общепринятой основы при конструировании ЭВМ с программным управлением состоялось под несомненным влиянием работы А. У. Беркса, Х. Х. Гольдстайна и Дж. фон Неймана о проекте первой ЭВМ с хранимой в памяти программой, написанной в 1946 году. В этой работе наиболее аргументированно обоснованы причины отказа от десятичной арифметики и переход к двоичной системе счисления как основы машинной арифметики.

В настоящее время практическое значение двоичной системы счисления определяется и многими другими областями ее применения.

§ 3. Двоичная арифметика

Арифметика двоичной системы счисления основана на использовании таблиц сложения и умножения цифр. Эти таблицы чрезвычайно просты:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

×	0	1
0	0	0
1	0	1

Действия над числами, как и в других позиционных системах счисления, осуществляются поразрядно с учетом приведенных выше таблиц:

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 101{,}1101_2 \\ 11{,}1011_2 \end{array} \\ \hline 1001{,}1000_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 11101{,}11_2 \\ 10011{,}10_2 \end{array} \\ \hline 110001{,}01_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 101101{,}011_2 \\ 1111{,}101_2 \end{array} \\ \hline 111101{,}000_2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 11{,}1_2 \\ 10{,}1_2 \end{array} \\ \hline
111 \\
+\;111 \\ \hline
1000{,}11_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 1001{,}11_2 \\ 1{,}11_2 \end{array} \\ \hline
100111 \\
+\;100111 \\
100111 \\ \hline
10001{,}0001_2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 0{,}1011_2 \\ 1{,}1_2 \end{array} \\ \hline
1011 \\
+\;1011 \\ \hline
1{,}00001_2
\end{array}
$$

Рассмотренные примеры показывают, что действия суммирования и умножения выполняются в двоичной арифметике очень просто, но главное достоинство двоичной системы в том, что эти действия легко моделируются. Существует немало удивительных по простоте счетных устройств для выполнения арифметических операций с двоичными числами. Примером могут быть «двоичные счеты», изображенные на рис. 1. На каждой из проволочек эти счеты содержат не 10, а всего 2 косточки. Работают на них как и на общепринятых десятичных счетах.

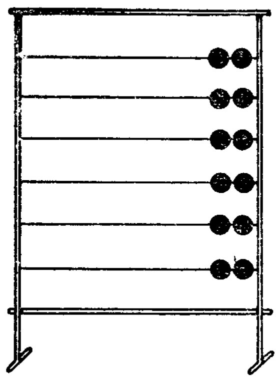


Рис. 1

Как же выполняются действия вычитания и деления? Есть ли какие-нибудь привлекательные особенности в этих операциях?

Прежде всего отметим, что и вычитание, и деление в двоичной арифметике можно осуществить по общепринятым правилам, аналогично тому, как это делается в десятичной системе счисления.

Однако, и это очень важно для практики, особенности двоичной системы счисления позволяют создать специфические алгоритмы вычитания и деления двоичных чисел, наиболее подходящие для аппаратурной реализации. Рассмотрению этих алгоритмов и посвящен следующий параграф.

§ 4. Вычитание с использованием двоичного дополнения. Умножение

Прежде всего введем понятие о дополнении, с тем чтобы облегчить изучение новых, непривычных приемов вычислений. Вся теория будет строиться сначала для чисел десятичных.

Определение. *Десятичным дополнением n-разрядного числа A_{10} называется разность* $10^n - A_{10}$.

Примеры нахождения десятичных дополнений записаны в следующей таблице:

Исходное число A_{10}	Его десятичное дополнение
7	$10^1 - 7 = 3$
27	$10^2 - 27 = 73$
342	$10^3 - 342 = 658$
04	$10^2 - 04 = 96$
038	$10^3 - 038 = 962$

Целесообразность рассмотрения двух последних примеров разъясняется ниже.

Идея использования десятичного дополнения при вычитании основана на следующих рассуждениях. Пусть необходимо найти разность $A_{10} - B_{10}$. Возможны случаи:

а) $A_{10} > B_{10}$.

В этом случае рассмотрим тождество

$$A_{10} - B_{10} = A_{10} + (10^n - B_{10}) - 10^n,$$

откуда следует правило нахождения разности:

найти десятичное дополнение к вычитаемому;

сложить найденное дополнение и уменьшаемое;

зачеркнуть единицу старшего разряда и вместо нее поставить знак «+».

б) $A_{10} < B_{10}$.

В этом случае используем тождество

$$A_{10} - B_{10} = -(10^n - A_{10} - (10^n - B_{10})),$$

или, если через C_{10} обозначить сумму $A_{10} + (10^n - B_{10})$, то получим

$$A_{10} - B_{10} = -(10^n - C_{10}).$$

Отсюда следует, что искомая разность есть десятичное дополнение к числу C_{10}, взятое со знаком «—».

Примеры

1. $A_{10} = 74$; $B_{10} = 39$. Найти разность $A_{10} - B_{10}$.

Решение. Находим дополнение числа 39, имеем $10^2 - 39 = 61$. Складываем уменьшаемое и найденное дополнение:

$$A_{10} + 61 = 74 + 61 = 135.$$

Отбрасываем единицу старшего разряда и получаем 35 (или $74 - 39 = 35$).

2. $A_{10} = 23$; $B_{10} = 47$. Найти разность $A_{10} - B_{10}$.

Решение. Находим дополнение числа 47, имеем

$$10^2 - 47 = 53.$$

Складываем уменьшаемое и найденное дополнение:

$$A_{10} + 53 = 23 + 53 = 76.$$

Так как единица в старшем разряде не появилась, то находим десятичное дополнение числа 76

$$10^2 - 76 = 24,$$

берем его со знаком минус и считаем искомой разностью:

$$A_{10} - B_{10} = 23 - 47 = -24.$$

Приведенные рассуждения позволяют сформулировать алгоритм вычитания целых десятичных чисел с использованием дополнения (рис. 2). Заметим, что алгоритм не требует предварительного сравнения уменьшаемого и вычитаемого.

Приведенные рассуждения и основанный на них алгоритм могут быть построены и в позиционной системе счисления с натуральным основанием, отличным от десяти. Однако наиболее эффективен такой подход к вычитанию в двоичной арифметике. Объясняется это тем, что в этой системе счисления очень просто находится «двоичное дополнение».

Правило отыскания двоичного дополнения числа B_2:

все единицы числа B_2 заменить на нули, а все нули — на единицы;

к полученному числу по правилам двоичной арифметики прибавить 1.

Заметим, что двоичным дополнением числа B_2 является разность $2^n - B_2$.

Если в приведенном выше алгоритме слово «десятичный» везде заменить словом «двоичный», а индекс «10» заменить индексом «2», то новый алгоритм будет пригоден для вычитания двоичных чисел.

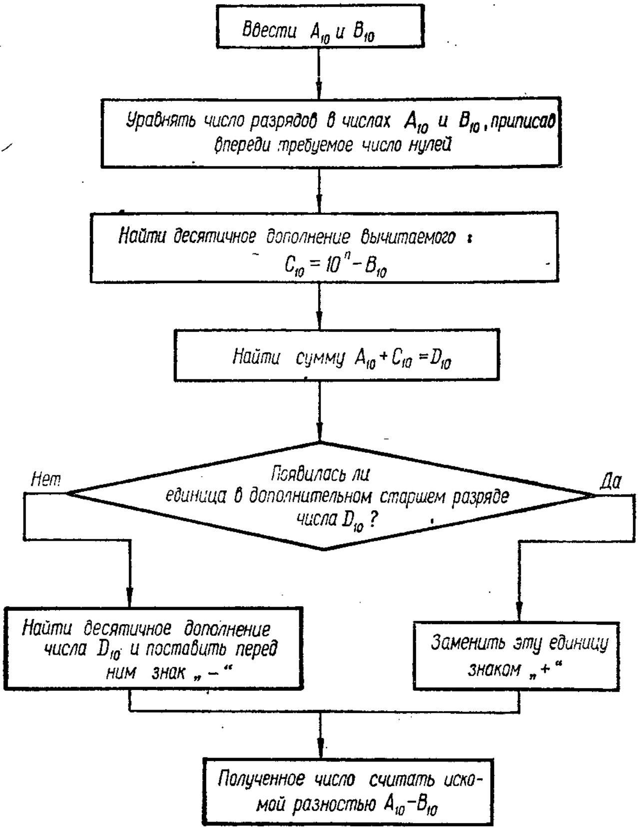


Рис. 2

Примеры

1. $A_2 = 110011_2$; $B_2 = 11101_2$. Найти разность $A_2 - B_2$.

Решение. Уравниваем число разрядов в уменьшаемом и вычитаемом, для чего перед числом B_2 впереди приписываем «0». Находим двоичное дополнение к вычитаемому:

$$B_2 = \quad 011101_2 \text{ — вычитаемое},$$

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 100010 \\ 1 \end{array} \\ \hline 100011 \end{array}$$

т. е. $C_2 = 100011$ — искомое дополнение числа B_2.

Находим сумму $A_2 + C_2$:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} 110011_2 \\ 100011_2 \end{array} \\ \hline 1010110_2. \end{array}$$

В соответствии с алгоритмом отбрасываем единицу в дополнительном старшем разряде и получаем $A_2 - B_2 = 10110_2$ или

$$A_3 - B_2 = 110011_2 - 11101_2 = 10110_2.$$

2. $A_2 = 1011_2$; $B_2 = 1001101_2$. Найти разность $A_2 - B_2$.

Р е ш е н и е. Уравниваем число разрядов в уменьшаемом и вычитаемом, для чего перед числом A_2 приписываем два нуля и получаем:

$$A_2 = 001011_2.$$

Находим двоичное дополнение C_2 вычитаемого:

$$B_2 = \quad 101101_2 \text{ — вычитаемое,}$$

$$+\begin{array}{r} 010010 \\ 1 \\ \hline 010011 \end{array}$$

т. е. $C_2 = 010011$ — искомое дополнение числа B_2.

Находим $D_2 = A_2 + C_2$:

$$+\begin{array}{r} 001011_2 \\ 010011_2 \\ \hline 011110_2 \end{array}.$$

Так как число D_2 содержит столько же разрядов, что и числа A_2 и C_2, то в соответствии с алгоритмом находим дополнение числа $D_2 = 011110_2$:

$$+\begin{array}{r} 100001_2 \\ 1_2 \\ \hline 100010_2 \end{array}.$$

Взяв найденное дополнение со знаком минус, получим искомый результат: -100010_2 или

$$A_2 - B_2 = 1011_2 - 101101_2 = -100010_2.$$

Завершая рассказ об этом необычном алгоритме вычитания, заметим, что в процессе отыскания разности $A_2 - B_2$, по существу, действие вычитания не используется. Нахождение двоичного дополнения сводится к замене цифр и прибавлению единицы. Этот метод позволил исключить поразрядное вычитание вообще. Открытие этого обстоятельства значительно облегчило создание арифметических устройств ЭВМ, в которых главным блоком является сумматор — узел для сложения двух двоичных чисел.

Любопытно, что действие умножения очень часто в ЭВМ осуществляется как повторное сложение. Приведем пример, иллюстрирующий особенности такого умножения.

Пусть множимое $A_2 = 1101_2$, множитель $B_2 = 111_2$. Запись чисел при их перемножении отличается от общепринятой:

$$
\begin{array}{rl}
1101_2 & \\
\times\quad 111_2 & \\
\hline
1101 & \\
+\ 1101 & \text{— множимое выписано не три, а два раза;} \\
\hline
100111_2 & \\
+\ 1101_2 & \text{— множимое выписано в третий и последний раз;} \\
\hline
1011011_2 & \text{— окончательный результат.}
\end{array}
$$

Суть всей операции в том, что для промежуточного суммирования всякий раз берется не более двух слагаемых. Одним из слагаемых является множимое (в рассмотренном выше примере это число 1101_2), а другим — содержимое специального сумматора S. До начала умножения в этом сумматоре хранилось число «нуль», постепенно к содержимому сумматора S прибавлялось число 1101_2 (множимое), каждый раз сдвигаемое влево на один разряд. Прибавление множимого к содержимому сумматора S осуществлялось столько раз, сколько единиц содержит множитель. В приведенном примере множитель $B_2 = 111_2$ содержал три единицы.

Рассмотренный метод умножения как последовательного сложения рекомендуется и при выполнении умножения двоичных чисел вручную, на бумаге. В этом случае удается избежать часто встречающихся ошибок при суммировании не двух, а трех и более двоичных чисел столбиком. При этом следует быть особенно внимательным, чтобы не ошибиться при сдвиге множимого влево перед очередным суммированием. Нужно помнить, что если цифра множителя «1», то сдвиг влево осуществляется на один разряд, а если это цифра «0», то на два разряда.

§ 5. Деление — особые алгоритмы

Деление в двоичной арифметике можно осуществлять несколькими способами:

выполнить как «деление углом»;

свести к повторному вычитанию делителя из делимого.

Однако даже рассмотрение примеров, которые мы оставляем для читателя, показывает, что деление вручную этими методами чрезвычайно непривычно и обременительно. Очень «неудобен» алгоритм деления углом и для машинной реализации — очень трудно моделировать догадку о том, какой брать цифру частного, которую мы осуществляем в уме.

Ниже подробно рассматривается специфический алгоритм, в котором четко используются особенности двоичной арифметики. Этот алгоритм предполагает полный отказ от деления в традиционном смысле — предполагает замену операции деления совокупностью действий умножения и вычитания.

Основная идея состоит в том, что деление числа A_2 на число B_2 заменяется умножением числа A_2 на число $C_2 = \frac{1}{B_2}$, обратное делителю. При вычислении же числа C_2 используется итерационная формула, пригодная для получения чисел, обратных данным в позиционных системах счисления с натуральным основанием q:

$$(C_q)_{k+1} = (C_q)_k \cdot (2_{q_k} - (C_q)_k \cdot B_q), \text{ где } k \in Z_0.$$

Зная $(C_q)_k$, пользуясь этой формулой, отыскиваем число $(C_q)_{k+1}$. Вычисление можно повторять; вслед за числом $(C_q)_{k+1}$ находить число $(C_q)_{k+2}$ и т. д. до тех пор, пока не будет достигнута желаемая точность.

Для двоичной системы счисления формула будет иметь вид:

$$(C_2)_{k+1} = (C_2)_k \cdot (10_2 - (C_2)_k \cdot B_2), \quad \text{где } k \in Z_0.$$

Заметим, что $(C_2)_0$ должно удовлетворять условию:

$$0 < (C_2)_0 < \frac{2}{B_2} \cdot$$

Продемонстрируем использование итерационной формулы для отыскания числа, обратного числу $B_2 = 101_2$. В качестве начального значения искомого числа C_2 возьмем число $(C_2)_0 = 0{,}01_2$. Далее индекс системы счисления «2» везде опущен, буквами B и C обозначены всегда двоичные числа

$C_1 = C_0 \cdot (10 - C_0 \cdot B) = 0{,}01\,(10 - 0{,}01 \cdot 101) = 0{,}0011_2;$

$C_2 = C_1 \cdot (10 - C_1 \cdot B) = 0{,}0011 \cdot (10 - 0{,}0011 \cdot 101) =$
$= 0{,}00110011_2;$

$C_3 = C_2 \cdot (10 - C_2 \cdot B) = 0{,}00110011 \cdot (10 - 0{,}00110011 \times$
$\times 101) = 0{,}0011001100110011_2.$

Наблюдается периодичность в распределении цифр. Это закономерно так как число $\frac{1}{101_2}$ является периодической дробью $0,(0011)_2$.

Рассмотренный подход в ряде случаев берется в основу машинного моделирования действия деления с помощью операций умножения и вычитания.

Кроме приведенной выше формулы существуют другие итерационные формулы, пользуясь которыми, число $C_q = \frac{1}{B_q}$ можно найти быстрее, за меньшее число шагов. В качестве примера укажем на следующую формулу:

$$C_{k+1} = C_k (3 \cdot (1 - BC_k) + (BC_k)^2).$$

В этой формуле B и C могут быть числами любой системы счисления. Если B и C — числа десятичные, то в качестве начального значения C берется число $C_0 = \frac{16}{17} \times \times (3 - 2B)$.

Еще раз подчеркнем, что для отыскания числа C_q действие деления заменено последовательностью операций сложения и умножения.

Изучение двоичной системы счисления завершим рассмотрением взаимосвязи систем счисления с основаниями $q = 2$ и $p = 2^n$, в частности, выясним, как числа, данные в двоичной системе счисления, заменяются равными числами в системах счисления с основаниями 4, 8 и 16. Интерес к системе счисления с основанием, равным степени двойки, не случаен. Дело в том, что потребности программирования привели в наше время к широкому использованию на практике восьмеричной ($q = 8$) и шестнадцатеричной ($q = 16$) систем счисления. Сегодня эти системы стали привычными, роль и достоинства этих систем общепризнаны.

История восьмеричной системы счисления не может сравниться по богатству событий с историей двоичной системы. В качестве любопытного курьеза обычно упоминают о том, что шведский король Карл XII в 1717 году увлекся восьмеричной системой, считал ее более удобной для вычислений в сравнении с десятичной и намеревался своим королевским указом ввести восьмеричную систему как общегосударственную, но неожиданная смерть помешала ему осуществить это необычное для того времени намерение.

Любопытно, что в 1862 году американский инженер швед по национальности, Дж. У. Нистром выпустил в Филадельфии за свой счет книгу «Проект новой арифметической и денежной системы, а также системы мер и весов, которую предполагается назвать тональной системой с основанием, равным шестнадцати». Он писал: «Я не боюсь и ничуть не колеблюсь выступить в защиту двоичной системы в арифметике и метрологии. Я знаю, на моей стороне природа; если мне не удастся убедить вас в ее полезности и чрезвычайной важности для человечества, это не сделает чести нашему поколению, нашим ученым и философам».

Сегодня нам становятся понятными мысли, высказанные за сто лет до Дж. У. Нистрома, мысли известного французского математика, сделавшего немало в развитии теории и техники вычислений, Блеза Паскаля: «Десятичная система построена — довольно неразумно, конечно, — в соответствии с людскими обычаями, а вовсе не требованиями естественной необходимости, как склонно думать большинство людей» (B. Pascal, Euvres Completes; Paris, Editions de Seuil, 1963, с. 84—89).

Потребовалось, однако, еще сто лет, чтобы восьмеричная и шестнадцатеричная системы стали практически ценными и наряду с двоичной широко использовались в современной вычислительной технике и программировании. Двоичная арифметика лежит в основе машинной арифметики, а восьмеричными и шестнадцатеричными числами заполняются бланки для записи программ.

Для специалистов, связанных с использованием современных ЭВМ, умение легко оперировать с числами систем счисления с основаниями 2, 8 и 16 необходимо.

Остановимся на алгоритмах замены двоичных чисел равными им числами, записанными в любой из систем счисления с основанием вида $p = 2^n$.

Перед формулированием и доказательством алгоритмов напомним, что в системе с основанием $q = 16$ применяются цифры: 0, 1, 2, ..., 9, A, B, C, D, E, F (где A, B, C, D, E, F соответственно равны 10, 11, 12, 13, 14, 15).

Алгоритмы базируются на следующих теоремах:

Теорема 1. *Для записи целого двоичного числа в системе с основанием $q = 2^n$ достаточно данное двоичное число разбить на грани справа налево по n цифр в каждой и, рассматривая каждую грань как n-разрядное число, записать его, как цифру в системе с основанием $q = 2^n$.*

Теорема 2. Для замены целого числа, записанного в системе с основанием $p = 2^n$, равным ему числом в двоичной системе, достаточно каждую цифру данного числа заменить n-разрядным двоичным числом.

Примеры

1. Число 110111011101100001_2 заменить равным ему восьмеричным числом.

Решение. Так как $p = 8 = 2^3$, то данное число разбиваем на грани справа налево по три цифры в каждой грани:

$$110\ 111\ 011\ 101\ 100\ 001.$$

Рассматриваем каждую грань как трехразрядное двоичное число и заменяем его равной цифрой восьмеричной системы счисления: $110_2 = 6_8$; $111_2 = 7_8$; $011_2 = 3_8$; $101_2 = 5_8$; $100_2 = 4_8$; $001_2 = 1_8$.

Получаем

$$110111011101100001_2 = 673541_8.$$

2. Число $A96BC_{16}$ заменить равным ему двоичным числом.

Решение. Так как $16 = 2^4$, то каждую цифру данного числа заменяем четырехразрядным двоичным числом:

$A_{16} = 1010_2$; $9_{16} = 1001_2$; $6_{16} = 0110_2$; $B_{16} = 1011_2$; $C_{16} = 1100_2$.

Тогда можем записать

$$A96BC = 10101001011010111100_2.$$

Доказательство теоремы 1 приведем для более общего случая, а именно, покажем, что для замены целого числа, записанного в системе с основанием q, равным ему числом в системе с основанием $p = q^2$, достаточно данное число разбить на грани по две цифры в каждой грани и, считая каждую грань двухразрядным числом в системе с основанием q, записать его как цифру в системе с основанием $p=q^2$ (исходное q-ичное число для простоты рассуждений возьмем шестиразрядное):

$$(abcdef)_q = aq^5 + bq^4 + cq^3 + dq^2 + eq + f = q^4(aq + b) + q^2(cq + d) + (eq + f) = Aq^4 + Bq^2 + C.$$

Приведем пример. Число 13203323_4 заменить равным ему числом в системе счисления с основанием $q = 16$.

Исходное число разбиваем на грани по две цифры:

$$13\ 20\ 33\ 23.$$

Каждую грань считаем двухразрядным числом в системе с основанием $q = 4$ и заменяем его соответствующей цифрой системы с основанием $p = q^2 = 16$, а именно:

$$13_4 = 7_{16};\quad 20_4 = 8_{16};\quad 33_4 = F_{16};\quad 23_4 = B_{16};$$

$$13203323_4 = 78FB_{16}.$$

Числа A, B и C по своему значению равны соответствующим двухразрядным q-ичным числам и в то же время они являются цифрами в системе счисления с основанием $p = q^2$. Теорема доказана.

Теорему 2 докажем, обобщая ее условие, а именно: покажем, что число, записанное в системе счисления с основанием $p = q^3$, можно заменить, если каждую цифру данного числа заменить трехразрядным q-ичным числом. (Для простоты рассуждений исходное число возьмем трехразрядным). Доказательство следует из приводимых ниже выкладок:

$$ABC_p = (aq^2 + bq + c)(q^3)^2 + (dq^2 + eq + f)q^3 + \\ + (gq^2 + hq + k) = aq^8 + bq^7 + cq^6 + dq^5 + eq^4 + fq^3 + \\ + gq^2 + hq + k = (abcdefghk)_q.$$

Малыми буквами обозначены цифры системы с основанием q. Из выкладок следует, что любая цифра системы счисления с основанием $p = q^3$ может быть записана в виде трехразрядного q-ичного числа.

Рассмотренные доказательства можно подвергнуть еще более значительному обобщению, если потребовать доказательств теорем 1 и 2, рассматривая основания q и q^n и не ограничиваясь при этом рассуждениями только для конкретных значений «n» и фиксированной длины исходных чисел. Это можно сделать, использовав метод математической индукции.

В завершение заметим, что рассмотренные алгоритмы применимы и для замены правильных q-ичных систематических дробей на равные им q^n-ичные правильные систематические дроби и наоборот.

Описанные алгоритмы имеют большое практическое значение. Обмен информацией между узлами и устройствами большинства современных ЭВМ осуществляется путем передачи командных слов, которые, как правило, являются словами в двоичном алфавите. Использование двухбуквенного (0 и 1) алфавита, как это уже подчеркивалось, диктуется инженерными требованиями. Однако пользоваться словами, записанными в таком алфавите, из-за большой длины слов (в ряде случаев такие слова содержат по 64 буквы) и своеобразной «зрительной однородности» текста (трудно сравнивать слова, состоящие исключительно из 1 и 0) человеку неудобно. Поэтому программисты и инженеры все «машинные слова» при обсуждении заменяют либо на эквивалентные им восьмеричные, либо на слова и числа, записанные в алфавите, буквами которого являются цифры системы с основанием $q = 16$.

В первом случае длина слова сокращается в три раза, а во втором — в четыре, и слова становятся более удобными для рассмотрения и запоминания.

Для иллюстрации рассмотренных вопросов покажем, как можно чрезвычайно просто механизировать замену двоичных чисел восьмеричными и наоборот.

Опишем необычную пишущую машинку (лучше назвать ее кодирующей машинкой). На клавишах (их восемь) этой машинки написаны трехразрядные двоичные числа:

000 001 010 011 100 101 110 111

А на литерах, которые печатают текст на бумаге, соответственно помещены цифры восьмеричной системы счисления:

0 1 2 3 4 5 6 7

Печатая текст на такой машинке, двоичные числа механически, не раздумывая, будем заменять равными им восьмеричными цифрами.

Если клавиши и литеры поменять местами, то получим машинку, которая восьмеричное число будет механически, но очень точно заменять равными им двоичными числами.

Ясно, что рассмотренные алгоритмы неприменимы в том случае, если требуется заменить число, записанное в системе с основанием $q = 4$, на равное ему число восьмеричной системы, или требуется восьмеричное число заменить равным числом в системе с основанием $q = 16$. В этом случае в качестве промежуточной используют двоичную систему счисления.

§ 6. Игры и двоичная арифметика

Рассказ о различных применениях двоичной системы счисления будет неполным, если в него не включить описания игр и головоломок, секреты которых базируются на двоичной системе счисления. Одним из сложных, но и наиболее впечатляющих примеров является конструирование алгоритма беспроигрышного поведения в и г р е Н и м; более просто формулируется секрет успешного участия в и г р е Ф о м и н а.

В каждую из этих игр научиться играть несложно, значительно труднее научиться выигрывать. Обе игры относятся к играм антагонистическим, т. е. к играм, в которых ничьих быть не может. Для игры в обоих случаях нужны какие-либо мелкие предметы: камешки, фишки или спички, располагаемые на столе.

Условия игры Фомина. К началу игры имеется k групп предметов. До первого хода первая группа содержит m_1 предметов, вторая — m_2, третья — m_3, ..., k-я группа — m_k предметов.

Играют в игру два соперника, ходят они по очереди.

Сделать ход любому из соперников — это значит каждую из данных и возникающих в ходе игры групп разделить на две произвольные.

Победителем считается тот из соперников, который сумеет сделать последний ход. После этого хода не будет ни одной группы, которая содержала бы два или более предметов.

Разработать стратегию успешного участия в игре — это значит прежде всего научиться отвечать на вопрос: «Каким по очереди вступать в игру — первым или вторым?».

Ответ на этот вопрос зависит от числа групп и предметов в них.

Разработанная стратегия должна содержать рекомендации и о том, как выполнять свой ход.

Отыскание секрета беспроигрышной игры основывается на следующих соображениях:

игра будет продолжаться до тех пор, пока все предметы, имевшиеся в самой большой к началу игры группе, не будут отделены «по одному». Самая большая группа будет расчленена последней;

число ходов для расчленения самой большой группы «по одному» зависит от того, сколько предметов содержалось в ней до первого хода;

легко убедиться, что если наибольшая группа содержит три предмета, то начинающий проигрывает. Наблюдение и перебор всех вариантов показывает, что начинающий проигрывает и тогда, когда в наибольшей группе к началу игры содержится 7 ($N = 7$) или 15 ($N = 15$) предметов.

Эти наблюдения позволяют высказать гипотезу: «Если наибольшая группа содержит $m_i = 2^n - 1$ предметов, где $n \in N$, то начинающий проигрывает».

Высказанная гипотеза доказывается методом математической индукции.

Предположим, что при $n = k$ начинающий проигрывает, и докажем, что он проигрывает при $n = k + 1$. Иначе говоря, предположим, что при $N_k = 2^k - 1$ начинающий проигрывает, и покажем, что из этого следует его проигрыш, если в наибольшей группе имеется $N_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ предметов.

Выразим N_{k+1} через N_k и, имея в виду, что $2^k = N_k + 1$, получим

$$N_{k+1} = 2^{k+1} - 1 = 2 \cdot 2^k - 1 = 2(N_k + 1) - \\ - 1 = 2N_k + 1 = N_k + (N_k + 1).$$

Из последнего равенства видно, что соперник, делающий очередной свой ход, не может за один ход осуществить расчленение группы, содержащей N_{k+1} предметов, на две группы по N_k предметов или на две группы так, что одна содержит N_k, а другая — меньшее число предметов. В то же время видно, что следующим ходом это можно осуществить всегда. Из вышеизложенного следует, что гипотеза доказана.

Отсюда следует и беспроигрышная стратегия:

если количество предметов в самой большой группе к началу игры выражается числом $N = 2^n - 1$, то в игру вступайте вторым, в противном случае — вступайте в игру первым;

любой очередной (в том числе и первый) ход делайте так, чтобы в оставляемой наибольшей группе содержалось $N = 2^n - 1$ предметов.

Если учесть, что всякое число вида $2^n - 1$ в двоичной системе счисления есть число, записанное одними единицами, то стратегия может быть сформулирована иначе:

если количество предметов в наибольшей группе выражается двоичным числом, записанным только единицами, то вступайте в игру вторым;

каждый свой ход делайте так, чтобы количество предметов в наибольшей группе выражалось двоичным числом, записанным одними единицами.

Условия игры Ним. К началу игры имеется k групп предметов. До первого хода первая группа содержит m_1 предметов, вторая — m_2, третья — m_3, ..., k-я группа — m_k предметов.

Игру ведут два соперника, ходят по очереди. Осуществляя любой свой ход, каждый из соперников может взять себе из одной и только одной группы любое число предметов, или все имеющиеся к этому ходу предметы в группе.

Победителем считается тот, кто, сделав свой очередной ход, возьмет все оставшиеся предметы.

Как и в игре Фомина, для того чтобы выходить победителем, необходимо научиться правильно отвечать на вопросы:

Каким по очереди вступать в игру?

Как рассчитывать свой очередной ход?

Ниже рассказывается о поиске беспроигрышной стратегии и как при этом используется двоичная система счисления.

Введем определения.

Вспомогательная таблица — это таблица, в которой число строк равно числу групп предметов k, а в каждой строке в виде двоичного числа записано количество предметов в данной группе.

Например, пусть $k = 5$ и $m_1 = 19$, $m_2 = 11$, $m_3 = 30$, $m_4 = 27$, $m_5 = 9$. Тогда вспомогательная таблица будет иметь такой вид:

2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	
0	1	0	0	1	1	$m_1 = 19_{10}$
0	0	1	0	1	1	$m_2 = 11_{10}$
0	1	1	1	1	0	$m_3 = 30_{10}$
0	1	1	0	1	1	$m_4 = 27_{10}$
0	0	1	0	0	1	$m_5 = 9_{10}$

Различные начальные условия, различное количество групп и число предметов в группах приводят к двум классам вспомогательных таблиц:

класс особых вспомогательных таблиц,

класс неособых вспомогательных таблиц.

Особая вспомогательная таблица — *это таблица, каждый столбец которой содержит четное число единиц или состоит из одних нулей.*

Неособая вспомогательная таблица — *это таблица, в которой хотя бы один столбец содержит нечетное число единиц.*

Приведенная выше таблица неособая, так как второй и четвертый, считая слева, столбцы содержат нечетное число единиц. Нетрудно понять, что к любой неособой таблице можно всегда приписать одну единственную дополнительную строку так, что новая таблица будет уже особой. Дополнительная строка строится так: данная таблица рассматривается столбец за столбцом, и, если в i-м столбце число единиц четно, то в соответствующем разряде дополнительной строки записывается нуль; если число единиц нечетно, то в i-м разряде строки записывается единица. Из описания построения дополнительной строки ясно, что две различные дополнительные строки к одной и той же таблице построить нельзя. Эту строку называют особой строкой относительно рассматриваемой таблицы. В этой строке, как и в других, записано двоичное число.

Введенные понятия используются при формулировке важного в дальнейшем утверждения: *в любой из неособых таблиц в k строк всегда найдется одна такая строка, что двоичное число, записанное в ней, будет больше числа, записанного в строке особой относительно таблицы, состоящей из $k - 1$ оставшихся строк.*

Например, пусть дана неособая таблица из четырех строк ($k = 4$):

1	0	1	1	0	$m_1 = 22$
0	1	0	1	1	$m_2 = 11$
1	0	1	1	1	$m_3 = 23$
1	0	0	1	1	$m_4 = 19$

Из таблицы выделяется первая строка:

1	0	1	1	0	$m_1 = 22$

Три оставшихся строки образуют неособую таблицу

0	1	0	1	1
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1

к которой особой будет строка

0	1	1	1	1

В данном случае оказалось, что первая строка исходной таблицы содержит число $m_1 = 22$ большее числа ($m_{oc} = 15$), записанного в строке особой относительно таблицы, состоящей из трех остальных строк исходной таблицы. Однако, что именно первая строка исходной таблицы оказалась искомой, это всего лишь случай, ведь выше утверждалось, что такая строка всегда найдется, а о том, как ее отыскать, в утверждении ничего сказано не было. Действительно, если бы в той же самой исходной таблице из четырех строк была выделена не первая, а вторая строка, то оказалось бы, что $m_2 < m_{oc}$.

Пусть, например, выделена вторая строка:

0	1	0	1	1

$m_2 = 11$

Из оставшихся трех строк составлена таблица:

1	0	1	1	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1

и относительно этой таблицы найдена особая строка:

1	0	0	1	0

$m_{oc} = 18$

Число, записанное в выделенной второй строке ($m_2 = 11$), оказалось меньше числа ($m_{oc} = 18$), записанного в особой строке.

Еще раз подчеркнем, что из k строк исходной таблицы какая-то одна строка непременно содержит число большее, чем число, записанное в строке особой относительно таблицы, состоящей из других строк данной таблицы. Никаких указаний о том, как эту строку разыскивать, не дается.

Однако легко понять, что эту строку можно найти всегда, если действовать путем перебора: сначала выделяется первая строка и составляется строка особая относительно таблицы из оставшихся строк, затем сравниваются числа m_1 и $m_{ос}$, и, если $m_1 > m_{ос}$, то задача решена. В противном случае (если $m_1 < m_{ос}$) такие же действия следует выполнить, выделив вторую строку, затем третью и т. д.

Сформулируем основную теорему для разработки стратегии беспроигрышной игры. Предварительно следует вспомнить, что победителем считается тот, кто возьмет себе последний предмет, иначе говоря, таблица перед последним ходом должна иметь только одну строку, не содержащую одни нули, т. е. должна быть непременно неособой, а по окончании игры таблица становится особой (во всех ее строках и столбцах одни нули).

Теорема. *Если сложившаяся в игре ситуация такова, что описывающая ее таблица особая, то начинающий игру проигрывает.*

Доказательство. При доказательстве воспользуемся методом математической индукции. Индукция проводится по индексу i.

Пусть S_i — сумма чисел всех строк особой таблицы. Ясно, что все значения S_i, соответствующие всевозможным особым таблицам, можно расположить в возрастающем порядке так, что между любыми двумя нельзя расположить еще хотя бы одну особую таблицу:

$$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots < S_i < S_{i+1} \ldots .$$

Пусть $S_i = 2$. В этом случае речь идет о ситуации: число имеющихся групп $k = 2$ и в каждой группе по одному предмету $m_1 = 1$ и $m_2 = 1$. Очевидно, что в этом случае начинающий проигрывает, ему приходится брать один предмет из одной группы, соперник игру завершает. Следующую особую таблицу порождает ситуация: $m_1 = 2$ и $m_2 = 2$, при этом $S_2 = 4$. Легко убедиться, что и в этом случае начинающий проигрывает.

Приведенные рассуждения составили первый шаг доказательства — осуществлена проверка справедливоси утверждения теоремы для частных случаев $i = 1$ и $i = 2$.

В дальнейшем условимся ситуации, описываемые особыми таблицами, называть *особыми ситуациями*.

Далее в соответствии с методом доказательства предполагаем, что начинающий игру в особой ситуации проигрывает для всех тех ситуаций, когда

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k < S_i.$$

Покажем, что из этого следует проигрыш начинающего в ситуации, когда

$$m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_k = S_{i+1}.$$

Пусть в такой ситуации начинающий делает ход, беря, например, из второй группы, а это значит, что число m_2 уменьшится и вместо него в таблице будет записано число m_2', а таблица станет неособой. В этой таблице отыскивается строка с номером r такая, что $m_r > m_{\text{ос}}$. Если теперь второй соперник (он делает ход в неособой ситуации) пойдет так, что в строке с номером r останется $m_{\text{ос}}$ предметов (этим он вместо строки с номером r вписывает особую строку), то таблица вновь станет особой. В этой таблице по сравнению с предшествующей будет две новых строки: одна содержит число m_2', а другая — $m_{\text{ос}}$. Сумма всех чисел этой таблицы меньше чем S_{i+1}:

$$m_1 + m_2' + m_3 + \cdots + m_{\text{ос}} + \cdots + m_k < S_{i+1}.$$

Этим самым показано, что утверждение теоремы верно и для $i + 1$, следовательно, теорема доказана. Доказано, что из всякой неособой ситуации всегда можно перейти к особой, а это значит шаг за шагом прийти к выигрышу.

Из всего сказанного следует алгоритм беспроигрышного поведения в игре Ним при любых начальных условиях (рис. 3).

Инструкция 1. Сделать правильный ход в неособой ситуации — значит:

найти строку с номером r такую, что $m_r > m_{\text{ос}}$; из группы, соответствующей этой строке, взять $m_r - m_{\text{ос}}$ предметов.

Ниже приводится пример партии в игре Ним. Вы играете, используя алгоритм. Пусть игра проводится

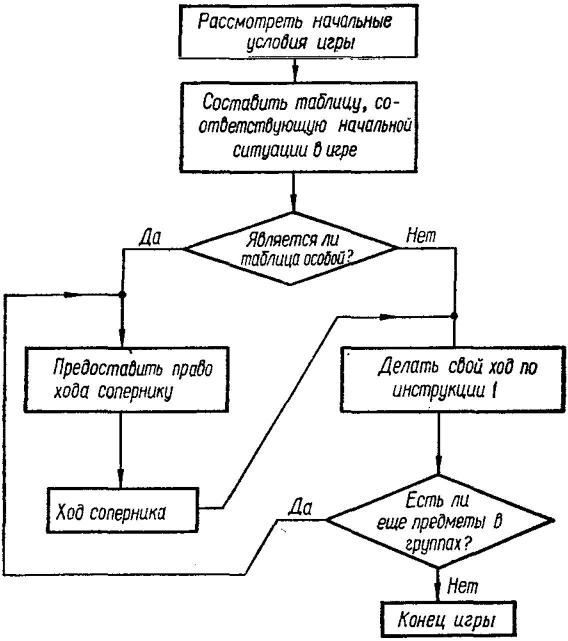


Рис. 3

при начальных условиях $k = 4$, $m_1 = 1$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_4 = 7$.

Составляем таблицу, соответствующую начальным условиям:

1	0	0	1	$m_1 = 1$	○
2	0	1	1	$m_2 = 3$	○ ○ ○
3	1	0	1	$m_3 = 5$	○ ○ ○ ○ ○
4	1	1	1	$m_4 = 7$	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Так как составленная таблица является особой, то первый ход следует предложить сопернику. (Предполагается, что этот соперник не знает алгоритма). Пусть соперник взял себе 3 предмета из третьей группы, т. е. он оставил в этой группе 2 предмета.

В соответствии с алгоритмом составляем таблицу, соответствующую ситуации, сложившейся после первого хода соперника:

1	0	0	1	○
2	0	1	1	○ ○ ○
3	0	1	0	○ ○
4	1	1	1	○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Таблица оказалась неособой. В соответствии с инструкцией вы должны найти строку с номером r, для которой выполняется условие $m_r > m_{oc}$. В процессе поиска обнаруживается, что $r = 4$, а $m_{oc} = 0$. Это означает, что из четвертой строки следует взять все семь предметов. После такого вашего хода соответствующая таблица вновь становится особой:

1	0	0	1	○
2	0	1	1	○ ○ ○
3	0	1	0	○ ○

Пусть теперь соперник берет один предмет из группы 2, оставляя в этой группе два предмета. Соответствующая таблица имеет вид:

1	0	0	1	○
2	0	1	0	○ ○
3	0	1	0	○ ○

Вам вновь необходимо использовать инструкцию и выяснить, что в этот раз $r = 1$, а $m_{oc} = 0$, и, следовательно, необходимо брать один предмет из первой группы, опять превращая таблицу в особую:

2	0	1	0	○ ○
3	0	1	0	○ ○

Пусть соперник решил взять теперь один предмет из второй группы, приводя игру в следующую ситуацию:

2	0	0	1	○
3	0	1	0	○ ○

Ваш ответный ход основывается, как и ранее, на поиске строки r, для которой $m_r > m_{oc}$. Такой строкой оказывается третья строка: $m_3 > m_{oc}$ ($m_3 = 2$, $m_{oc} = 1$). Это означает, что вы берете один предмет из нее, и в ходе игры создается ситуация:

2	0	0	1	○
3	0	0	1	○

Окончание игры очевидно. Соперник берет себе один предмет, и вы завершаете партию в свою пользу.

§ 7. Взаимосвязь систем счисления

Выше уже подчеркивалось, что из недесятичных систем счисления с натуральным основанием наибольшее распространение в настоящее время получили системы счисления с основанием, равным двум, восьми и шестнадцати. По этой причине эти системы рассмотрены подробно, в деталях изучена их взаимосвязь. Не следует, однако, думать, что другие системы счисления совершенно не представляют никакого интереса. Нет, это не так. Ниже будет показано, что системы счисления с основанием $q = 3$ и $q = 4$ очень и очень интересны и через них пролегает путь к специальным системам счисления, о которых будет рассказано далее.

При обсуждении взаимосвязи между различными системами счисления одним из важных вопросов является проблема отыскания простых алгоритмов замены чисел исходной системы равными числами какой-либо другой. Дадим описания наиболее распространенных из таких алгоритмов.

Алгоритм I. Для того чтобы исходное число A_p заменить равным ему числом B_q, необходимо число A_p разделить «с остатком» на «новое» основание q по правилам p-арифметики. Цифрами искомого числа B_q являются остатки от деления, выписанные так, что последний остаток явился цифрой старшего разряда. (Ясно, что число q перед делением должно быть записано как число в системе с основанием p).

Примеры

1. Число 153_{10} заменить равным ему числом в системе счисления с основанием $q = 4$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
153 & 4 \\
\underline{152} & 38 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
38 & 4 \\
\underline{36} & 9 \\
2 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
9 & 4 \\
\underline{8} & 2 \\
1 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
2 & 4 \\
 & 0
\end{array}
$$

$$153 = 38 \cdot 4 + 1,$$
$$38 = 9 \cdot 4 + 2,$$
$$9 = 2 \cdot 4 + 1,$$
$$2 = 0 \cdot 4 + 2,$$

$$153 = 2121_4 = 2 \cdot 4^3 + 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1.$$

2. Число 1011101_2 заменить равным ему числом в системе счисления с основанием $q = 5$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
1011101 & 101 \\
\underline{1011011} & 10010 \\
11 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
10010 & 101 \\
\underline{1111} & 11 \\
11 &
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|l}
11 & 101 \\
 & 0
\end{array}
$$

$$1011101 = 10010 \cdot 101 + 11,$$
$$10010 = 11 \cdot 101 + 11,$$
$$11 = 0 \cdot 101 + 11.$$

Остатки 11_2 являются цифрой в системе счисления с основанием $q = 5$, $11_2 = 3_5$, отсюда следует, что искомое число записываем так:

$$1011101_2 = 333_5.$$

Рассмотренный алгоритм пригоден для использования при любых p и q, но рекомендуется при $p > q$.

Алгоритм II. Для того чтобы исходное число A_p заменить равным ему числом B_q, необходимо цифру старшего разряда числа A_p умножить на «старое» основание «p» по правилам q-арифметики. К полученному произведению необходимо прибавить цифру следующего разряда числа A_p. Полученную сумму вновь умножают на «старое» основание «p», к образовавшемуся произведению прибавляют очередную цифру числа A_p и так поступают до тех пор, пока не будет прибавлена цифра младшего разряда исходного числа A_p.

Примеры

1. Число 21231_4 заменить равным ему десятичным числом.

Решение. Вычисления будем производить, пользуясь алгоритмом II и записывая результаты в таблицу:

	2_{10}	1_{10}	2_{10}	3_{10}	1_{10}
$p = 4_{10}$	2_{10}	9_{10}	38_{10}	155_{10}	621_{10}

Искомое число 621_{10}

2. Число 237_{10} заменить равным ему троичным числом.

Решение. Каждую цифру числа 237_{10} заменяем двухразрядным троичным числом, а основание 10 трехразрядным троичным числом. Пользуясь алгоритмом II, вычисления будем выполнять по следующей схеме:

	2_3	10_3	21_3
$q = 10 = 101_3$	2_3	212_3	22210_3

$$101_3 \cdot 2_3 + 10_3 = 212_3$$

$$101_3 \cdot 212_3 + 21_3 = 22210_3$$

Алгоритм II пригоден для использования при любых натуральных p и q, но рекомендуется при $p < q$.

2. Алгоритмы для правильных дробей

Алгоритм III. Для того чтобы исходную правильную дробь $0, A_p$ заменить равной ей дробью $0, B_q$, необходимо исходную дробь умножить на «новое» основание «q» по правилам p-арифметики; целую часть полученного произведения считать цифрой старшего разряда искомой дроби. Дробную часть полученного произведения умножить на q, целую часть полученного результата считать следующей цифрой искомой дроби. Эту операцию выполнять до тех пор, пока дробная часть не окажется равной нулю либо не будет достигнута требуемая точность.

Примеры

1. Дробь $0{,}375_{10}$ заменить равной ей двоичной дробью.

Решение. Пользуясь алгоритмом III, получим:

$$0{,}375_{10} \cdot 2_{10} = 0{,}750;$$

$$0{,}75_{10} \cdot 2_{10} = 1{,}50;$$

$$0{,}50_{10} \cdot 2_{10} = 1{,}00.$$

Так как дробная часть оказалась равной нулю, то окончательный результат будет следующим:

$$0{,}375_{10} = 0{,}011_2.$$

2. Дробь $0{,}2312_4$ заменить равной ей десятичной дробью с точностью до 10^{-5}.

Решение. Пользуясь алгоритмом III, получим:

$$0{,}2312_4 \cdot 22_4 = 13{,}013;$$
$$0{,}013_4 \cdot 22_4 = 1{,}012;$$
$$0{,}012_4 \cdot 22_4 = 0{,}330;$$
$$0{,}33_4 \cdot 22_4 = 2{,}112;$$
$$0{,}112_4 \cdot 22_4 = 3{,}13.$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Число 13_4 в системе с основанием $q = 10$ следует считать цифрой $13_4 = 7_{10}$, и поэтому $0{,}2312_4 \approx 0{,}71023_{10}$.

Этот алгоритм применим при любых p и q, однако рекомендуется при $p > q$.

Алгоритм IV. Для того чтобы исходную правильную дробь $0, A_p$ заменить на равную ей дробь $0, B_q$, необходимо цифру младшего разряда числа $0, A_p$ разделить на «старое» основание «p» по правилам q-арифметики; к полученному частному прибавить следующую цифру исходной дроби и далее поступать так же, как и с первой взятой цифрой. Эти операции продолжать до тех пор, пока не будет прибавлена цифра старшего разряда исходной дроби. После этого полученную сумму разделить еще раз на «p» и к результату приписать «нуль целых».

Примеры

1. Дробь $0{,}1101_2$ заменить равной ей десятичной дробью.

Решение. Вычисления рекомендуется производить по такой схеме:

0	1	1	0	1
$0{,}8125_{10}$	$1{,}625_{10}$	$1{,}25_{10}$	$0{,}5_{10}$	1

$$1 : 2 + 0 = 0{,}5_{10}$$
$$0{,}5 : 2 + 1 = 1{,}25_{10}$$
$$1{,}25 : 2 + 1 = 1{,}625_{10}$$
$$1{,}625 : 2 + 0 = 0{,}8125_{10}$$

2. Дробь $0{,}2312_4$ заменить равной ей двоичной дробью.

Решение. Каждую цифру исходной дроби заменить двухразрядным двоичным числом и вычисления выполнить по следующей схеме:

0	10_2	11_2	1	10_2
$0{,}10110110_2$	$10{,}11011_2$	$11{,}011_2$	$1{,}1_2$	10_2

$$10 : 100 + 1 = 1{,}1_2$$
$$1{,}1 : 100 + 11 = 11{,}011_2$$
$$11{,}011 : 100 + 10 = 10{,}11011_2$$
$$10{,}11011 : 100 + 0 = 0{,}1011011_2$$

Если учесть, что машинное моделирование операций суммирования и умножения осуществляется более просто в сравнении с операциями умножения и деления, то на практике предпочтение отдается двум из четырех описанных алгоритмов — второму (для целых чисел) и третьему (для правильных дробей).

Глава II

УРАВНОВЕШЕННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Общие сведения

Выше обобщение понятия «система счисления» осуществлялось пока за счет того, что под основанием системы мыслились произвольные, не равные десяти, натуральные числа, а понятие «цифра» истолковывалось всякий раз как количество предметов или групп предметов, образовавшихся при пересчитывании. Отсюда следовало, что цифра всегда обозначает число натуральное.

Можно, однако, представить себе работу, результатом выполнения которой будет число, и число при этом будет записано с учетом позиционного принципа, но смысл, вкладываемый в понятие «цифра», в этом случае будет резко отличаться от ранее принятого.

Формированию такого нового, более широкого взгляда на понятие «цифра» поможет рассмотрение знаменитой задачи «О взвешивании».

Задача [1]. Найти набор из четырех гирь такой, что с их помощью на чашечных весах можно взвесить любой

[1] Задача была известна Леонардо Пизанскому (Фибоначчи) в 1215 году. Иногда эту задачу называют «задачей Баше».

груз массой от 1 до 40 кг включительно. При необходимости гири можно располагать на обеих чашках весов.

Искомый набор состоит из гирь в 1, 3, 9 и 27 кг. Пользуясь им, легко взвесить любой груз от 1 до 40 кг.

Взвешивание одного килограмма очевидно, для этого достаточно одной гири в 1 кг, которая устанавливается на чашке без груза. Запись о таком взвешивании может быть такой: 0001_3.

Взвешивание груза в два килограмма требует уже использования двух гирь: на пустую чашку помещают гирю в 3 кг, а на чашку с грузом — в 1 кг. Результат такого взвешивания записывается в таком виде: $001\bar{1}_3$.

Взвешивание четырех килограммов отражено в записи 0011_3; более сложно выражается масса в 5 кг: $01\bar{1}\bar{1}_3$. Последняя запись означает, что на пустую чашку помещена гиря, масса которой равна единице третьего разряда в троичной системе счисления, т. е. 9, а на чашку с грузом — гири в 1 и 3 килограмма.

Из приведенных записей уже ясно, что если над цифрой того или иного разряда стоит черточка, то это означает, что гиря соответствующей массы помещена на чашку с грузом и ее масса вычитается из общей массы. Иначе говоря, цифра «$\bar{1}$» есть отрицательная единица. Действительно:

$$01\bar{1}\bar{1}_3 = 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3 - 1 \cdot 3^0 = 5_{10}.$$

Приведем несколько примеров:

$$01\bar{1}0_3 = 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3 + 0 \cdot 3^0 = 6_{10};$$

$$01\bar{1}1_3 = 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3^0 = 7_{10};$$

$$010\bar{1}_3 = 0 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3^0 = 8_{10}.$$

Из записей следует, что результат любого взвешивания на чашечных весах выражается числом, записанным в системе счисления с основанием $q = 3$ и с использованием трех цифр: 1 (единица), 0 (нуль) и $\bar{1}$ (единица с чертой).

Определение. *Уравновешенной троичной системой счисления или троичной системой с симметричным основанием называется система с основанием $q = 3$ и цифрами, принадлежащими множеству* $\{1,\ 0,\ \bar{1}\}$, *где цифра* «$\bar{1}$» *означает* «-1» (минус единицу).

Выше были приведены примеры чисел, записанных в троичной уравновешенной системе счисления, и каждое из них начиналось цифрой «1». Можно записать и числа с первой цифрой «$\bar{1}$»:

$$\bar{1}1\bar{1}01_3 = -1\cdot 3^4 + 1\cdot 3^3 - 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3 + 1 = -64_{10};$$

$$\bar{1}\bar{1}111_3 = -1\cdot 3^4 - 1\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3 + 1 = -95_{10}.$$

Ясно, что всякое число, начинающееся цифрой «$\bar{1}$», есть отрицательная величина, а число, начинающееся с цифры «1», — всегда положительная величина.

На эту особенность чисел уравновешенной системы следует обратить внимание. Мы впервые встречаемся с тем, что для обозначения отрицательной величины к числу не требуется присоединять дополнительный знак, впервые знакомимся с системой счисления, в которой при выполнении арифметических действий над числами не требуется использовать еще и правила знаков.

§ 2. Арифметика троичной уравновешенной системы счисления

Суммирование и умножение чисел в этой системе базируется на таблице сложения цифр:

+	1	0	$\bar{1}$
1	$1\bar{1}$	1	0
0	1	0	$\bar{1}$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{1}1$

×	1	0	$\bar{1}$
1	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1

Примеры иллюстрируют их применение:

$$+\begin{array}{r} 1\bar{1}101_3 \\ 1\bar{1}\bar{1}1_3 \\ \hline 1000\bar{1}_3 \end{array} \qquad +\begin{array}{r} 11101_3 \\ 1\bar{1}1_3 \\ \hline 1\bar{1}\bar{1}\bar{1}0\bar{1}_3 \end{array}$$

$$\times\begin{array}{r} \bar{1}1_3 \\ 1\bar{1}_3 \\ \hline 1\bar{1} \\ +\ \bar{1}1 \\ \hline \bar{1}\bar{1}_3 \end{array} \qquad \times\begin{array}{r} \bar{1}0\bar{1}_3 \\ 11_3 \\ \hline \bar{1}0\bar{1} \\ +\ \bar{1}0\bar{1} \\ \hline \bar{1}\bar{1}\bar{1}\bar{1}_3 \end{array}$$

Еще раз следует подчеркнуть, что никакие правила знаков при умножении не использовались.

Важным достоинством троичной системы с симметричным основанием является простота получения числа, противоположного данному; для этого достаточно все цифры «1» исходного числа заменить на цифры «$\bar{1}$», а все цифры «$\bar{1}$» — на «1».

Например. Исходное число $1\bar{1}01\bar{1}_3 = 56_{10}$. Число, противоположное ему: $\bar{1}10\bar{1}1_3 = -56_{10}$.

Вычитание определяется как суммирование уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому, что значительно облегчается вышеотмеченной простотой получения противоположных чисел.

Обращаем внимание и на то, что все сказанное распространяется не только на целые числа, а и на систематические дроби троичной уравновешенной системы.

Остановимся на взаимосвязи между троичной уравновешенной системой счисления и системами с натуральным основанием. Прежде всего отметим, что приведенные выше алгоритмы применимы для замены чисел с любым натуральным основанием на равные числа, записанные в троичной системе с симметричным основанием.

Приводимые ниже примеры убеждают в этом.

Примеры

1. Данное число $1\bar{1}01\bar{1}_3$ заменить равным ему числом в системе основанием $q = 5$.

Решение. Вычисления будем производить по такой схеме:

1_5	-1_5	0_5	-1_5	1_5
1_5	2_5	11_5	32_5	202_5

$$1_5 \cdot 3_5 - 1 = 2_5$$
$$2_5 \cdot 3_5 + 0 = 11_5$$
$$11_5 \cdot 3_5 - 1 = 32_5$$
$$32_5 \cdot 3_5 + 1 = 202_5$$

Действия выполняются по правилам пятеричной арифметики. Искомый результат: $1\bar{1}01\bar{1}_3 = 202_5$.

2. Данное десятичное число 475_{10} заменить равным ему числом в троичной уравновешенной системе.

Решение. Напоминаем, что все действия будут выполняться по правилам арифметики троичной уравновешенной системы счисления и поэтому все десятичные цифры исходного числа следует заменить равными им числами уравновешенной системы. А именно:

положить $4_{10} = 11_3$; $5_{10} = 1\bar{1}\bar{1}_3$; $7_{10} = 1\bar{1}1_3$ и $q = 10_{10} = 101_3$ и действия выполнять в соответствии со схемой

	11_3	$1\bar{1}1_3$	$1\bar{1}\bar{1}_3$
$q = 101_3$	11_3	$1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3$	$1\bar{1}00\bar{1}\bar{1}1_3$

$$101_3 \cdot 11_3 + 1\bar{1}1_3 = 1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3$$
$$101_3 \cdot 1\bar{1}\bar{1}1\bar{1}_3 + 1\bar{1}\bar{1}_3 = 1\bar{1}00\bar{1}\bar{1}1_3$$

Из приведенных примеров ясно, что задача взаимозамены чисел и в случае, когда одна из систем является уравновешенной, решается общим методом. Существуют, конечно, и специфические алгоритмы, в которых используется более глубокая связь между системами. Примером могут быть алгоритмы взаимозамены целых чисел троичной и уравновешенной троичной систем.

1. Алгоритм замены троичных чисел равными числами троичной уравновешенной системы

1. Обозреть данное троичное число справа налево, от младших разрядов к старшим.

2. Все встречающиеся цифры 1 и 0 до первой цифры 2 оставить без изменения.

3. Встреченную цифру 2 заменить цифрой $\bar{1}$ и к цифре следующего разряда прибавить единицу по правилам троичной арифметики.

4. Полученную после суммирования цифру считать очередной из обозреваемых и действовать в соответствии с алгоритмом.

5. Если исходное число было отрицательным, то в полученном числе все цифры 1 заменить на цифру $\bar{1}$ и наоборот.

2. Алгоритм замены целых чисел троичной уравновешенной системы равными троичными числами

1. Если исходное число отрицательное, то его заменить на противоположное; положительное исходное число оставить без изменения.

2. Обозреть заменяемое число справа налево, от младших разрядов к старшим.

3. Все встречающиеся цифры 1 и 0 до первой цифры $\bar{1}$ оставить без изменения.

4. Встреченную цифру $\bar{1}$ заменить цифрой 2 и после этого цифру следующего разряда уменьшить на единицу по правилам 3-арифметики.

5. Полученную после вычитания цифру считать обозреваемой и применить к ней пункт 3.

6. Если исходное число было отрицательным, то перед результатом преобразования поставить знак «минус».

Примеры применения алгоритмов:

Исходное число троичное

$$221021_3.$$

$$10\bar{1}11\bar{1}1_3 \text{ — результат.}$$

Исходное число дано в уравновешенной системе:

$$\begin{array}{rl} 10\bar{1}\bar{1}1_3 & \\ 1\bar{1}121 & \text{— промежуточный результат} \\ \hline 2121_3 & \text{— искомое троичное число.} \end{array}$$

Как и при изучении других систем счисления, важной является задача создания аппаратурных средств для выполнения арифметических операций по правилам арифметики троичной системы с симметричным основанием.

Еще раз обратим внимание на главную особенность записи отдельных чисел: перед отрицательными числами не выписывается знак «минус», а при выполнении арифметических операций совершенно не используются «правила знаков». Эти особенности привлекают внимание конструкторов ЭВМ. В Советском Союзе в 1958 году была построена экспериментальная модель ЭВМ, арифметика которой базировалась на троичной уравновешенной системе счисления. Инициатором разработки этой уникальной машины была группа математиков вычислительного центра Московского университета во главе с академиком С. Л. Соболевым и при участии Н. П. Брусенцова и С. П. Маслова. В 1962—1965 годах было выпущено более 50 промышленных экземпляров ЭВМ «Сетунь» — так именем подмосковной речки была названа эта вычислительная машина. Особенности этой машины до сих пор привлекают внимание. Есть ряд серьезных соображений, которые позволяют высказать мысль о том, что инженерные поиски в создании троичных машин не закончены. Главный конструктор ЭВМ «Сетунь»

Н. П. Брусенцов пишет, что в этой машине реализованы далеко не все полезные свойства троичного кода и трехзначной логики: ограниченно используется возможность выполнения операций над словами различной длины, не применяется однопроводная передача трехзначных сигналов, сравнительно слабо использованы воз-

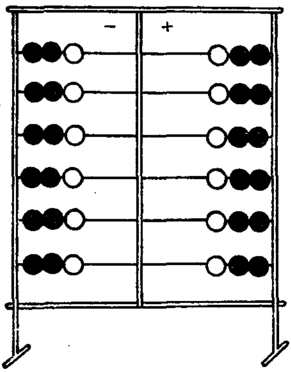


Рис. 4

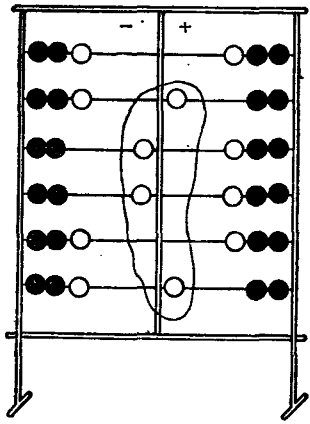


Рис. 5

можности трехзначной пороговой логики. Кроме того, в «Сетуни» нет операции с плавающей запятой, для которых преимущества троичного кода особенно существенны. Несмотря на это «Сетунь» наглядно продемонстрировала выгодность троичного кода. Достаточно сказать, что даже в условиях мелкосерийного производства и фактически в макетном исполнении «Сетунь» была значительно дешевле машин ее класса, превосходя их в отношении быстродействия и диапазона эффективных приложений.

Моделирование арифметических действий в соответствии с правилами 3-арифметики можно осуществлять и простыми, доступными школьнику средствами. На рис. 4 изображены счеты, специально приспособленные для этой работы.

Каждая проволочка разделена перегородкой на две равные части, и на каждой из них помещено по три косточки. Существенно, что две дальние от перегородки косточки на каждой стороне склеены и при движении одной из них движется и вторая. Левая часть предназначена для действий с отрицательными единицами, а правая — для действий с положительными единицами.

На рис. 5 показано, как на счетах откладывается число $1\bar{1}\bar{1}01_3$.

Прибавление единицы к единице в каком-либо разряде осуществляется так же, как и на других счетах.

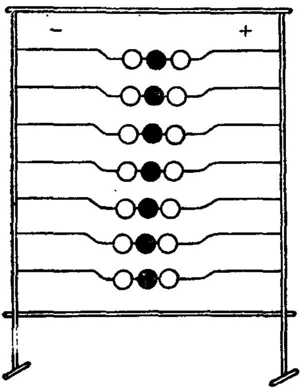


Рис. 6

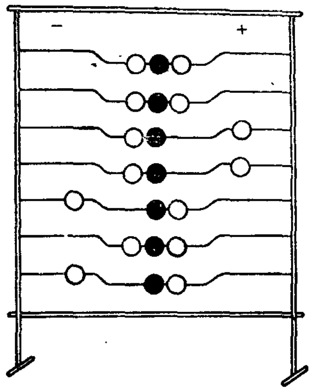


Рис. 7

Отличие в том, что при движении второй косточки к проволочке придвигается и склеенная с ней третья косточка, и сдвинутыми оказываются все косточки, расположенные на этой части проволочки — это значит, что одна из них лишняя и ее приходится нейтрализовать, придвигая одну косточку на проволочке с другой стороны перегородки, а затем все эти косточки сдвигаются от перегородки к краю проволочки, а на следующей (старшей позиции) проволочке одна косточка придвигается к перегородке.

Еще один вариант конструкции счет для демонстрации процесса и особенностей действий сообщил нам Н. П. Брусенцов. Этот вариант он рекомендует использовать на уроках при ознакомлении учащихся с $\overline{3}$-арифметикой. Его счеты еще более просты, их конструкция ясна из рис. 6.

Каждая проволочка в этих счетах изогнута так, что образуются три одинаковых по длине участка. Косточки, а их всего три, которые в начальном положении находятся в средней части, можно передвигать в правую и левую части. Если косточка сдвинута вправо, то это будет означать запись цифры 1 в данном разряде; если

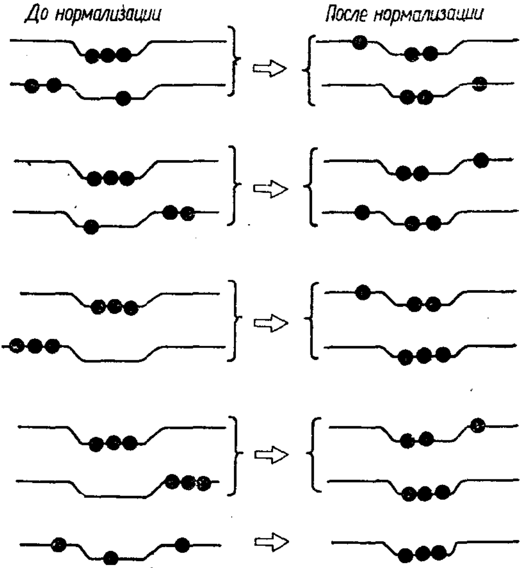


Рис. 8

косточка из средней части будет передвинута на левую часть проволочки, то это означает запись цифры $\bar{1}$ в данном разряде. На рис. 7 показано, как на счетах отложено число $1\bar{1}0\bar{1}$.

Складывая $1 + 1$ или $\bar{1} + \bar{1}$, получим две косточки справа или слева, в процессе счета это допустимо, но для получения окончательного результата в $\bar{3}$-арифметике промежуточный результат следует «нормализовать», т. е. сделать так, чтобы на правых и левых участках проволочки было не более, чем по одной косточке. Правила нормализации ясны из рис. 8.

Такую конструкцию естественно сравнить с обычными чашечными весами. Левому участку проволочки соответствует левая чашка весов (на ней будет размещаться груз), правому — правая чашка, а на среднем участке будут лежать неиспользованные «гири». Отличие от обычных счет только в том, что появился участок отрицательных значений и чуть-чуть усложнились правила нормализации чисел.

Настойчиво рекомендуем читателю поработать на таких счетах.

При необходимости расширение представлений об уравновешенных системах счисления можно осуществлять путем введения и изучения систем с основаниями 5, 7, ... Если, например, основание системы $q = 5$, то в этой системе используются цифры $a_i \in \{2, 1, 0, \bar{1}, \bar{2}\}$, если $q = 7$, то $a_i \in \{3, 2, 1, 0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$.

Таблицы сложения и умножения в системе с основанием $q = 5$ имеют вид:

+	0	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$
0	0	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$
1	1	2	$1\bar{2}$	0	$\bar{1}$
2	2	$1\bar{2}$	11	1	0
$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1	$\bar{2}$	$\bar{1}2$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$	0	$\bar{1}2$	$\bar{1}1$

×	0	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	$\bar{1}$	$\bar{2}$
2	0	2	$1\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{1}1$
$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$	1	2
$\bar{2}$	0	$\bar{2}$	$\bar{1}1$	2	$1\bar{1}$

Нетрудно догадаться и до конструкции простейшего счетного приспособления. На рис. 9 показаны счеты, пригодные для вычислений в уравновешенной системе счисления с основанием $q = 5$.

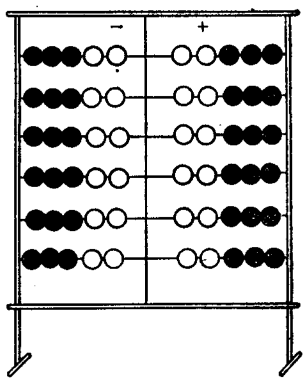


Рис. 9

Аналогично вводятся уравновешенные системы с другими основаниями.

В завершение приведем краткие исторические сведения о возникновении систем счисления с отрицательными цифрами. Вероятно, первой опубликованной работой по этой теме явилась работа Джона Лесли, напечатанная в 1817 году. Независимо от него аналогичную работу в 1840 году издал О. Коши. В этих работах рассматривались системы счисления с симметричным основанием, и не только троичные, а пятеричные и семеричные. По свидетельству Дональда Кнута [4]: «... в «чистом» виде уравновешенная троичная система счисления впервые появилась в статье Леона Лаланна, изобретателя механических вычислительных устройств». Работа Л. Лаланна опубликована в 1840 году.

Интерес к уравновешенным системам счисления, как оказалось, обнаружился более чем через сто лет. Возник он под влиянием требований, идущих от разработчиков вычислительной техники. Одной из первых работ, в которой обсуждаются технические проблемы создания арифметических устройств, работающих по правилам 3-арифметики, была опубликованная в 1950 году работа Клода Шеннона. Наиболее глубокие исследования, которые привели к созданию ЭВМ «Сетунь», были проведены в 60-х годах в Московском университете. Для этих исследований характерны глубокий анализ математических особенностей уравновешенных систем счисления и оригинальность технического решения проблем создания действующей троичной ЭВМ.

Глава III

НЕГА-ПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Целенаправленный поиск специальных, обладающих наперед заданными свойствами, систем счисления привел к углубленному изучению систем счисления с целым отрицательным основанием.

Основание систем q уже не натуральное число, а число целое. Это еще один шаг в обобщении понятия «система счисления».

Системы счисления, основание которых есть число целое отрицательное, называют **нега-позиционными**. Если основание системы $q = -2$, то ее называют нега-двоичной, если $q = -4$, то нега-четверичной, и т. д. Можно рассматривать и нега-десятичную систему.

Формула числа в нега-позиционной системе счисления имеет вид:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n} \ldots)_{-q} = a_n (-q)^n + a_{n-1} (-q)^{n-1} + \cdots + a_1 (-q) + a_0 + a_{-1} (-q)^{-1} + a_{-2} (-q)^{-2} + \ldots .$$

Множество цифр в любой из нега-позиционных систем счисления совпадает с множеством цифр соответствующей системы счисления с натуральным основанием. Для записи чисел, например, в нега-двоичной системе счисления достаточно цифр 0 и 1, а в нега-четверичной — $a_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Какими же особенностями характерны эти системы? Что привлекает в них конструкторов вычислительных машин?

Основным достоинством нега-позиционной системы с любым основанием является отсутствие знака перед отрицательными числами, а следовательно, и отсутствие правил знаков. Этим свойством рассматриваемые системы аналогичны уравновешенным системам.

Суммирование нега-двоичных чисел в других нега-позиционных системах счисления осуществляется поразрядно с использованием таблиц сложения цифр. Таблица сложения для системы счисления с основанием $q = -2$ имеет вид:

+	0	1
0	0	1
1	1	110

Обращает внимание то, что «перенос единицы» осуществляется не в следующий старший разряд, а в два непосредственно следующих старших разряда. Этим обеспечивается сохранение знака единиц того разряда, в котором выполняется суммирование, и в конечном счете нахождение требуемой суммы исходных чисел с требуемым знаком.

Сложение многоразрядных чисел «столбиком» ведется поразрядно, но из-за необычной процедуры «переноса» возникают неожиданности, которые легко преодолеть. Пример разъясняет все детали суммирования.

Пусть необходимо найти сумму чисел $11_{-2} + 11_{-2}$.

$$\begin{array}{r l}
\boxed{\begin{array}{r}11\\1\end{array}}\,1 & \text{— единицы переноса;}\\
\hline
+\begin{array}{r}11_{-2}\\11_{-2}\end{array} & \text{— слагаемые;}\\
\hline
10_{-2} & \text{— искомая сумма}
\end{array}$$

Обращаем внимание на то, что начиная с третьего разряда, суммированию подлежат только единицы переноса, и при этом в процессе суммирования этих единиц образовалась «новая» пара слагаемых: $11_{-2} + 1_{-2}$, эти слагаемые взяты в рамку. Легко понять, что эта сумма равна нулю. Действительно: $11_{-2} = 1\,(-2) + 1 = -1_{10}$, а $1_{-2} = 1_{10}$, а это значит, что они противоположны и в сумме дают нуль.

Приведем еще один пример на суммирование:

$$\begin{array}{rl}
\boxed{\begin{array}{r}11\\ 1\end{array}}\,1 & \\
11 & \text{— единицы переноса;}\\
11 & \\
\hline
+\begin{array}{r}1011_{-2}\\ 101_{-2}\end{array} & \text{— слагаемые;}\\
\hline
1100_{-2} & \text{— искомая сумма.}
\end{array}$$

Суммированием единиц четвертого разряда процесс сложения чисел завершен.

Взаимосвязь между нега-позиционными системами счисления и системами с натуральным основанием, а также возможность замены чисел одной из этих систем равными им числами другой базируется на уже рассмотренных выше алгоритмах I—IV.

Остановимся подробнее на особенностях применения алгоритма I для замены натуральных чисел равными числами нега-двоичной системы. Иначе говоря, рассмотрим задачу замены исходного натурального числа A равным ему целым числом B. В соответствии с алгоритмом I исходное число A_{10} необходимо разделить на новое основание, т. е. на число $p = -2$. Заметим, что деление «с остатком» на отрицательное число обладает некоторыми неожиданными особенностями, подчеркнуть которые можно при рассмотрении примера.

Примеры

1. Число 23_{10} заменить равным ему нега-двоичным числом.

Решение. Используя алгоритм I, делим число 23 на -2 по правилам десятичной арифметики и получаем:

$$\begin{aligned}
23 &= (-2)\cdot(-11)+1,\\
-11 &= (-2)\cdot(6)+1,\\
6 &= (-2)\cdot(-3)+0,\\
-3 &= (-2)\cdot(2)+1,\\
2 &= (-2)\cdot(-1)+0,\\
-1 &= (-2)\cdot(1)+1,\\
1 &= (-2)\cdot(0)+1.
\end{aligned}$$

$$23_{10} = 1101011_{-2} = 1\cdot(-2)^6 + 1\cdot(-2)^5 + 1\cdot(-2)^3 + 1\cdot(-2) + 1.$$

2. Число 39_{10} заменить равным ему числом в системе с основанием $q = -4$.

Решение.

$$39 = (-4) \cdot (-9) + 3,$$
$$-9 = (-4) \cdot (3) + 3,$$
$$3 = (-4) \cdot (0) + 3.$$
$$39_{10} = 333_4 = 3(-4)^2 + 3(-4) + 3.$$

Описанный выше алгоритм является общим, пригодным для различных p и $(-q)$, однако в частных случаях, для конкретных p и q, алгоритмы могут оказаться очень простыми подобно тому, как чрезвычайно простыми являются рассмотренные выше алгоритмы взаимозамены чисел в системах с основаниями p и $q = p^n$.

Примером такого алгоритма может быть алгоритм замены двоичных чисел равными им нега-двоичными числами (рис. 10).

Пример. Число 10111_2 заменить равным ему нега-двоичным числом.

Решение. Составляем таблицу, в верхние клетки которой записываем цифры исходного числа $A_2 = 10111_2$:

1	0	1	1	1
	0		0	0

В нижние клетки вписываем нули под цифрами нулевого и всех нечетных разрядов числа A_2.

В две оставшиеся пустые клетки вписываем (справа налево) 1 и 0, после чего числа, записанные в верхней и нижней строках, суммируем по правилам нега-двоичной арифметики:

1	0	1	1	1
0	0	1	0	0

$$\begin{array}{r@{}l} 11 & \\ 11 & \\ \hline 10111_{-2} & = 23_{10} \\ +\quad 100_{-2} & \\ \hline 1101011_{-2} & = 23_{10} \end{array}$$

Обратная замена, т. е. замена целых чисел нега-воичной системы равными числами системы с любым

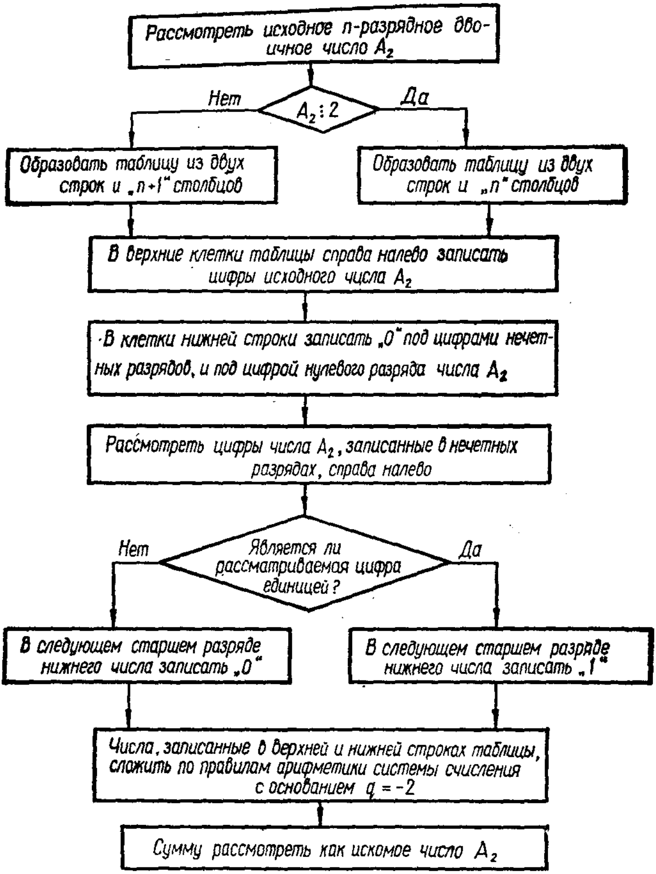


Рис. 10

натуральным основанием, осуществляется с использованием алгоритма II.

Пример. Число 1232_{-4} заменить равным ему десятичным числом.

Решение.

1_{10}	2_{10}	3_{10}	2_{10}
1	-2	11	-42

$$1\cdot(-4)+2=-2$$
$$(-2)\cdot(-4)+3=11$$
$$11\cdot(-4)+2=-42$$

Всякое число любой из нега-позиционных систем с четным числом цифр является отрицательным, а число с нечетным числом цифр — положительным. Это свойство следует из формулы числа. Например:

$$10111_{-2} = 1(-2)^4 + 0(-2)^3 + 1(-2)^2 + 1(-2)^1 + \\ + 1(-2)^0 = 19_{10};$$

$$1111_{-2} = 1(-2)^3 + 1(-2)^2 + 1(-2)^1 + 1(-2)^0 = -5_{10};$$

$$102131_{-4} = 1(-4)^5 + 2(-4)^3 + 1(-4)^2 + 3(-4)^1 + \\ + 1(-4)^0 = -1147_{10}.$$

Из всего сказанного следует, что простейшим вычислительным устройством для выполнения операций с числами нега-позиционных систем счисления будут счеты, применяемые в системах счисления с соответствующим натуральным основанием. На рис. 11 изображены двоичные счеты, которые без какой-либо переделки можно использовать в нега-двоичной арифметике.

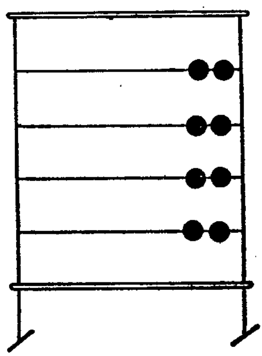


Рис. 11

Рекомендуем читателю попробовать свои силы в суммировании и вычитании нега-двоичных чисел на таких счетах.

Введенных понятий достаточно, чтобы читатель при желании мог самостоятельно продолжить исследование особенностей нега-позиционных систем счисления. Примером небольшой задачи, рекомендуемой для самостоятельного решения, может быть такая задача: отличаются ли признаки делимости чисел на два в троичной и нега-троичной системах счисления?

Более интересный вопрос: утверждается, что всякое нега-двоичное число, составленное из нечетного количества единиц и нулей и единицы в записи которого расположены симметрично относительно средней цифры, непременно число простое. Верно ли это? Например

$$101_{-2} = 5_{10}; \quad 111_{-2} = 3_{10}; \quad 11111_{-2} = 11_{10};$$

$$1101011_{-2} = 23_{10}.$$

Иначе говоря, предлагается проверить еще раз предположение Г. В. Лейбница, который предсказывал, что многие свойства чисел можно «увидеть» в «рисунке» двоичных чисел, наблюдая за прихотливыми мозаиками в чередовании единиц и нулей.

Глава IV

СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ С ОСНОВАНИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ МНИМУЮ ЕДИНИЦУ [1]

Расширение наших представлений о системах счисления естественно продолжить введением систем, основание которых содержит мнимую единицу (i), т. е. рассмотреть случаи, когда q принадлежит множеству комплексных чисел.

Одним из неожиданных открытий на этом пути оказалась система счисления с основанием $q = 2i$. Дело в том, что до недавнего времени комплексное число A чаще всего представлялось в двух основных формах: двучленной — $A = a + bi$, либо в тригонометрической — $A = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Оба представления имеют свои достоинства, однако оба они плохо подходят к общепринятой арифметике, реализуемой в ЭВМ. Дело в том, что действия над комплексными числами выполняются по алгоритмам, значительно отличающимся от алгоритмов арифметических операций над действительными числами. При сложении и вычитании, например, операция расчленяется и выполняется раздельно над коэффициентами мнимой и действительной части. Правила умножения и деления еще более сложны.

Из сказанного естественно следует задача: найти способ записи комплексных чисел в цифровой форме и при этом такой, чтобы над числами можно было выполнять действия поразрядно, по алгоритмам, близким к принятым для действительных чисел, записанных в цифровой форме.

Задача на первый взгляд кажется весьма необычной, настолько в нашем сознании утвердились вышеупомянутые двучленная и тригонометрическая формы записи комплексных чисел. Однако, и это очень интересно, система счисления с основанием $q = 2i$ дает многие из требуемых возможностей.

---

[1] Для школьников, не знакомых с комплексными числами, эту главу можно опустить.

Формула числа в этой системе, которую принято называть мнимо-четверичной записывается так:

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0)_{2i} = a_n (2i)^n + a_{n-1} (2i)^{n-1} + \\ + \cdots + a_2 (2i)^2 + a_1 (2i) + a_0,$$

где $a_i \in A$, $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Например:

$$12312_{2i} = 1 \cdot (2i)^4 + 2 \cdot (2i)^3 + 3 \cdot (2i)^2 + 1 \cdot (2i) + 2 = \\ = 6 - 14i;$$

$$20310_{2i} = 2 \cdot (2i)^4 + 3 \cdot (2i)^2 + 1 \cdot (2i) = 20 + 2i.$$

Учитывая, что четная степень числа «$2i$» всегда есть действительное число, а нечетная — мнимое, переход от всякого мнимо-четверичного числа к соответствующему ему десятичному комплексному числу легко осуществить, базируясь на формуле:

$$(a_{2n} a_{2n-1} a_{2n-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_{-4} = (a_{2n} + a_{2n-2} + \cdots + a_2 + \\ + a_0)_{2i} + (a_{2n-1} + a_{2n-3} + \cdots + a_1)_{2i} = A + Bi.$$

Любопытно, что обратный переход от общепринятой двучленной формы записи десятичных комплексных чисел к равным им мнимо-четверичным числам осуществляется с использованием в качестве промежуточной системы нега-четверичной системы с основанием $q = -4$.

Оказывается, что между формами записи чисел в мнимо-четверичной системе счисления и нега-четверичной существует глубокая внутренняя связь, выражаемая равенством:

$$(a_{2n} a_{2n-1} a_{2n-2} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0)_{2i} = (a_{2n} a_{2n-2} \cdots a_2 a_0)_{-4} + \\ + 2i\,(a_{2n-1} a_{2n-3} \cdots a_3 a_1)_{-4}. \qquad (1)$$

Отсюда следует идея алгоритма замены десятичных комплексных чисел на соответствующие им мнимо-четверичные числа: действительную часть и коэффициент мнимой части исходного десятичного числа заменить равными числами нега-четверичной системы, а затем воспользоваться формулой (1) и получить искомое мнимо-четверичное число.

Замена десятичного числа равным ему нега-четверичным осуществляется делением данного числа на $q = -4$ «с остатком».

Прежде чем сформулировать алгоритм в целом, рассмотрим представление в мнимо-четверичной системе числа «i» и чисел вида $(2k+1)i$:

$$i = 10{,}2_{2i} = 1\cdot 2i + \frac{2}{2i} = 2i - i = i;$$
$$3i = 20{,}2_{2i} = 2\cdot 2i - i;$$
$$5i = 30{,}2_{2i} = 3\cdot 2i - i.$$

Приписывание в первом дробном разряде цифры 2 обеспечивает уменьшение коэффициента мнимой части на единицу.

Алгоритм замены десятичного комплексного числа равным ему числом мнимо-четверичной системы задается схемой, изображенной на рис. 12.

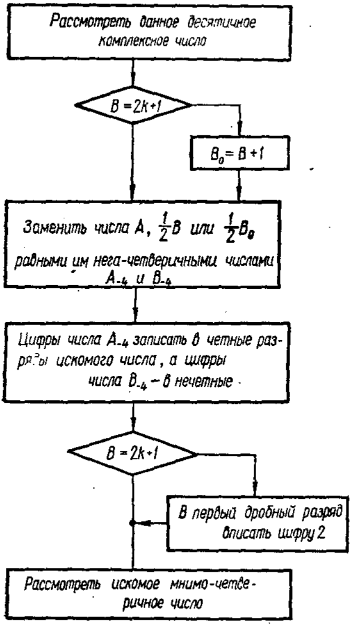


Рис. 12

Примеры

1. Число $37+28i$ записать в мнимо-четверичной системе счисления.

Решение. Так как число $B=28$ есть число четное, то числа 37 и $14=\frac{1}{2}$ (28) заменяем в соответствии с алгоритмом нега-четверичными числами. Для этого каждое число делим на $q=-4$ «с остатком»:

$$\begin{aligned} 37 &= (-4)\cdot(-9)+1,\\ -9 &= (-4)\cdot 3+3,\\ 3 &= (-4)\cdot 0+3 \end{aligned}$$
$$37_{10} = 331_{-4}$$

$$\begin{aligned} 14 &= (-4)\cdot(-3)+2,\\ -3 &= (-4)\cdot 1+1,\\ 1 &= (-4)\cdot 0+1 \end{aligned}$$
$$14_{10} = 112_{-4}$$

Выписываем искомое число, которое будет содержать шесть разрядов. В четные разряды вписываем цифры числа 331_{-4}, а в нечетные — цифры числа 112_{-4}:

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
	3		3		1

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0
1	3	1	3	2	1

Таким образом,

$$37 + 28i = 131321_{2i}.$$

2. Число $45 + 33i$ записать в мнимо-четверичной системе счисления.

Решение. Так как число $B = 33$ нечетное, то рассматриваем число $B = B + 1$, т. е. $B = 34$ и затем его половину — число 17. Числа 45 и 17 заменяем равными им нега-четверичными числами:

$$\begin{array}{ll} 45 = (-4) \cdot (-11) + 1, & 17 = (-4) \cdot (-4) + 1, \\ -11 = (-4) \cdot (3) + 1, & -4 = (-4) \cdot 1 + 0, \\ 3 = (-4) \cdot 0 + 3 & 1 = (-4) \cdot 0 + 1 \\ \hline 45_{10} = 311_{-4} & 17_{10} = 101_{-4} \end{array}$$

Выписываем искомое число. Оно будет содержать шесть разрядов в целой части числа и один — в дробной. В четные разряды целой части выписываем цифры числа 311_{-4}, а в нечетные — цифры числа 101_{-4}:

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}
	3		1		1	

a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	a_0	a_{-1}
1	3	0	1	1	1	2

Искомое число запишется так:

$$130111{,}2_{2i}.$$

Еще раз подчеркнем, что приведенный алгоритм основан на неожиданной, но глубокой внутренней связи трех систем счисления: десятичной, нега-четверичной и мнимо-четверичной. Использование алгоритма позволяет ввести третью форму записи комплексных чисел — цифровую форму.

Какие же достоинства обнаруживаются при такой записи комплексных чисел?

Прежде всего следует отметить, что арифметические действия над числами, записанными в этой форме, осуществляются целостно, без расчленения операций на действия, осуществляемые отдельно над действительной и мнимой частью. Сложение, например, в мнимо-четверичной системе счисления проводится поразрядно по правилам, весьма сходным с алгоритмом суммирования чисел в системе счисления с основанием $q = 4$. Отличие состоит только в том, что образующаяся при сложении цифр

n-го разряда единица переноса не прибавляется к единице следующего $(n+1)$-го разряда, а как «минус единица» прибавляется к цифре, записанной в $(n+2)$-м разряде. Это значит, что цифра $(n+2)$-го разряда уменьшается на единицу. В дальнейшем «минус единица» (-1) в записях будет обозначаться как «$\bar{1}$» (единица с чертой).

Приведем примеры суммирования чисел:

$$\begin{array}{r} \bar{1} \\ +\begin{array}{r} 312_{2i} \\ 23_{2i} \end{array} \\ \hline 231_{2i} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1} \\ +\begin{array}{r} 20{,}21_{2i} \\ 11{,}22_{2i} \end{array} \\ \hline 21{,}03_{2i} \end{array}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} &312_{2i} = 3\,(2i)^2 + 1\,(2i) + 2 = -10 + 2i \\ +\;&23_{2i} = 2\,(2i) + 3 \qquad\qquad\;\; = 3 + 4i \\ \hline &231_{2i} = 2\,(2i)^2 + 3\,(2i) + 1 = -7 + 6i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &20{,}21_{2i} = 1\,(2i) + 0 + \frac{2}{2i} + \frac{1}{(2i)^2} = 3i - \frac{1}{4} \\ +\;&11{,}22_{2i} = 1\,(2i) + 1 + \frac{2}{2i} + \frac{2}{(2i)^2} = i + \frac{1}{2} \\ \hline &21{,}03_{2i} = 2\,(2i) + 1 + \frac{3}{(2i)^2} \qquad\quad = 4i + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

При сложении следует иметь в виду, что при переносе «$\bar{1}$» в $(n+2)$-й разряд в нем может не оказаться единицы. Например,

$$\begin{array}{r} \bar{1}\bar{1} \\ +\begin{array}{r} 0023_{2i} \\ 32_{2i} \end{array} \\ \hline \bar{1}\bar{1}11\phantom{_{2i}} \end{array} \begin{array}{l} \\ = 3 + 4i \\ = 2 + 6i \\ \hline = 5 + 10i \end{array}$$

Сумма записана «не по правилам», так как в ее записи использован значок «$\bar{1}$», который не входит во множество цифр системы с основанием $q = 2i$. Полученную запись следует преобразовать так, чтобы она была числом мнимо-четверичной системы. Это делается так:

значок $\bar{1}$, стоящий в n-м разряде, заменяется на цифру 3, а к цифре $(n+2)$-го разряда прибавляется цифра 1 (обычная единица);

значок $\bar{2}$ (оказывается, появление такого значка возможно при умножении), стоящий в n-м разряде, заменяется цифрой 2, а к цифре $(n+2)$-го разряда прибавляется цифра 1.

Например

$$\begin{array}{r} 11\bar{1}\bar{1}11 \\ 33 \\ \hline 113311_{2i} \end{array} = 1\,(2i)^5 + 1\,(2i)^4 + 3\,(2i)^3 + 3\,(2i)^2 + 1\cdot 2i + $$
$$+ 1 = 5 + 10i.$$

Сформулированные выше рекомендации основаны на соотношениях:

$$(2i)^{n+2} + (2i)^n = (2i)^n \cdot (2i)^2 + (2i)^n = -4\,(2i)^n + (2i)^n$$

или

$$\bar{1}\,(2i)^n = -1\,(2i)^n = (2i)^{n+2} + 3\,(2i)^n,$$

$$\bar{2}\,(2i)^n = -2\,(2i)^n = (2i)^{n+2} + 2\,(2i)^n.$$

После всего рассмотренного можно составить таблицу сложения цифр:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	$\bar{1}00$
2	2	3	$\bar{1}00$	$\bar{1}01$
3	3	$\bar{1}00$	$\bar{1}01$	$\bar{1}02$

В процессе суммирования значок «$\bar{1}$» используется. При оформлении окончательного результата он заменяется в соответствии с вышеприведенными правилами.

Очень проста и таблица умножения:

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	$\bar{1}00$	$\bar{1}02$
3	0	3	$\bar{1}02$	$\bar{2}01$

Приведем пример:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 23_{2i} \\ 32_{2i} \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} \bar{1}\bar{1}02 \\ \bar{1}\bar{2}21 \end{array} \\ \hline 1131112_{2i} \end{array}.$$

Проверка:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 23_{2i} = 4i + 3 \\ 32_{2i} = 6i + 2 \end{array} \\ \hline 1131112_{2i} = 26i - 18 \end{array}$$

$$1131112_{2i} = 1\,(2i)^6 + 1\,(2i)^5 + 3\,(2i)^4 + 1\,(2i)^3 + 1\,(2i)^2 + \\ + 1\,(2i) + 2 = -18 + 26i.$$

Приведенные примеры подчеркнули одно из достоинств записи комплексных чисел в цифровой форме: *над числами, записанными в цифровой форме, арифметические действия выполняются проще, особенно если учесть машинную их реализацию, чем над числами, записанными в иных формах.*

Комплексные десятичные числа при их записи в цифровой форме могут оказаться целыми числами, смешанными и правильными дробями. При этом дробная часть числа может состоять из конечного числа цифр, а может содержать и бесконечно много их. Отсюда следует, что возможны «периодические» дроби, например, $0,(23)_{2i}$; можно рассматривать и «иррациональные» числа мнимо-четверичной системы.

Вопрос о том, каким десятичным комплексным числам соответствуют «периодические» дроби и «иррациональные» числа мнимо-четверичной системы счисления, предлагается рассмотреть читателям.

Для читателей предлагается и задача отыскания алгоритма замены комплексных чисел $A + Bi$ мнимо-четверичным, если A и B есть числа дробные.

Глава V
СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ КЛАССОВ

§ 1. Вводные сведения

Общим достоинством всех рассмотренных выше позиционных систем счисления является компактность записи чисел, простота алгоритмов выполнения простейших действий над числами, возможность сведения операций над числами к действиям над цифрами. Так, сложение и умножение в позиционных системах счисления основываются на таблицах сложения и умножения цифр. Может быть, самым трудным при сложении цифр (или при их умножении) является необходимость запоминать единицы переноса: «семь плюс пять — двенадцать; два пишем, один запоминаем», или «трижды восемь — двадцать четыре; четыре пишем, два запоминаем». Необходимость работать с цифрами переноса можно рассматривать как недостаток позиционных систем счисления и можно попробовать поставить задачу устранить этот «недостаток».

Иначе говоря, можно заняться решением задачи по разработке новой специальной системы счисления, сложение чисел в которой должно осуществляться поразрядно, но при этом без операции переноса цифр в старший или старшие разряды (вспомните сложение чисел в системе с основанием $q = -2$). В результате поисков появилась система счисления остаточных классов — СОК.

Изучение всех особенностей этой системы счисления следует проводить после ознакомления с некоторыми свойствами сравнений. Понятие о сравнении введем на примере.

Рассмотрим множество натуральных чисел. Зададим какое-нибудь число, например, $m = 5$, и назовем его модулем. При делении любого натурального числа на $m = 5$ могут получиться остатки: 0,1, 2,3 и 4. Все множество натуральных чисел можно разбить на пять классов, включая в каждый класс числа, которые при делении на пять дают один и тот же остаток. Говорят, что они сравнимы по модулю пять. Вот как выглядят эти классы:

$$\div\ 1,\ 6,\ 11,\ 16,\ 21,\ \ldots,$$
$$\div\ 2,\ 7,\ 12,\ 17,\ 22,\ \ldots,$$
$$\div\ 3,\ 8,\ 13,\ 18,\ 23,\ \ldots,$$
$$\div\ 4,\ 9,\ 14,\ 19,\ 24,\ \ldots,$$
$$\div\ 0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ \ldots.$$

Числа в каждом классе образуют арифметическую прогрессию с формулами общего члена соответственно:

$$a_n = 5n - 4,$$
$$a_n = 5n - 3,$$

$$a_n = 5n - 2,$$
$$a_n = 5n - 1,$$
$$a_n = 5(n - 1), \quad n \in N.$$

Ясно, что каждое натуральное число войдет в один и только один класс, будет членом одной и только одной прогрессии. Назовем такие прогрессии классами по модулю пять. Аналогично рассуждая, можно ввести понятие о классах по любому другому натуральному модулю «p». Числа, входящие в классы, называются вычетами по модулю 5. Если из каждого класса взять по одному вычету, то их совокупность будет называться полной системой вычетов по модулю пять. Обычно в полную систему вычетов выбирают из каждого класса наименьшие числа. Полная система вычетов по модулю p всегда содержит p чисел: 0, 1, 2, ..., $p - 2$, $p - 1$.

Введем над числами, входящими в полную систему вычетов, операцию сложения. Сложить два вычета из полной системы — это значит сложить их по правилам сложения десятичной арифметики, но сумму заменить наименьшим вычетом того же класса. Все сказанное дает основание составить таблицу сложения:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$m = 5$

Примеры суммирования вычетов принято записывать так:

$$3 + 4 \equiv 2 \pmod 5 \text{ или } 4 + 4 \equiv 3 \pmod 5.$$

Таблица умножения вычетов по модулю пять имеет вид:

×	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$m = 5$

Примеры умножения: $4 \cdot 3 \equiv 2 \pmod{5}$ или $3 \cdot 3 \equiv 4 \pmod{5}$.

По существу, выше построена арифметика вычетов по модулю 5. Легко убедиться (для этого достаточно рассмотреть таблицы умножения и сложения), что оба действия обладают переместительным и сочетательным свойствами, а операция умножения обладает и распределительным свойством относительно сложения.

Очень простыми являются счеты для сложения чисел, входящих в полную систему вычетов по модулю пять. На рис. 13 изображены эти счеты.

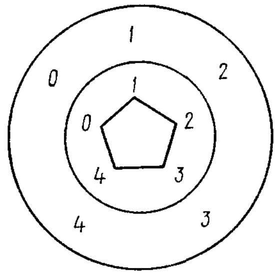


Рис. 13

Счеты состоят из двух концентрически расположенных кругов. На поверхности внутреннего круга изображен пятиугольник. Для сложения чисел достаточно на большем круге заметить слагаемое, повернув внутренний круг, — разместить напротив этого слагаемого нуль внутреннего круга. Напротив второго слагаемого, которое берется на внутреннем круге, на большом круге находится искомая сумма.

Эти же счеты можно использовать и для умножения вычетов по модулю пять. Чтобы, например, умножить 4 на 3, поступают так: сначала счеты приводятся в исходное положение — одинаковые цифры располагаются против одинаковых (рис. 14, *а*). Затем меньший круг поворачивается три раза (т. е. число раз, равное множителю) на угол, равный $\frac{4}{5}$ окружности, и то число, против которого расположился нуль меньшего круга, и будет искомым произведением.

На рис. 14, *б*, *в*, *г* показано положение кругов соответственно после первого, второго и третьего поворотов.

Все сказанное подготовило введение основных понятий системы счисления остаточных классов (СОК). В этой системе всякое натуральное число A_{10} представляется в виде:

$$A_{10} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)_c, \qquad (*)$$

где

$$a_i = A - \left[\frac{A}{p_i}\right] \cdot p_i, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, k;$$

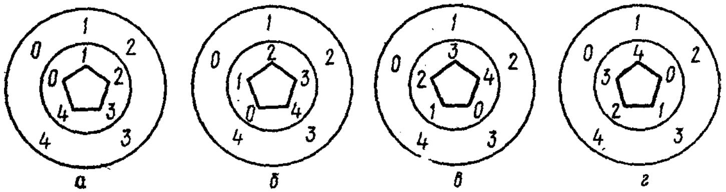


Рис. 14

$\left[\frac{A}{p_i}\right]$ — целая часть частного, p_i — модули (взаимно простые числа). Формулу (*) можно считать формулой целого числа в СОК.

Если $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, то $11_{10} = 121_c$, так как

$$a_1 = 11 - \left[\frac{11}{2}\right]\cdot 2 = 1, \quad a_2 = 11 - \left[\frac{11}{3}\right]\cdot 3 = 2 \text{ и}$$

$$a_3 = 11 - \left[\frac{11}{5}\right]\cdot 5 = 1,$$

а $14_{10} = 024_c$, так как

$$a_1 = 14 - \left[\frac{14}{2}\right]\cdot 2 = 0, \quad a_2 = 14 - \left[\frac{14}{3}\right]\cdot 3 = 2 \text{ и}$$

$$a_3 = 14 - \left[\frac{14}{5}\right]\cdot 5 = 4.$$

Ясно, что при другом наборе оснований (модулей) те же самые числа запишутся иначе.

Заметим, что если набор модулей задан, то этим самым определен и диапазон чисел, которые могут быть записаны в этом наборе: в вышеприведенном наборе $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и $p_3 = 5$ наибольшим числом, которое может быть в нем записано, является число $A_{10} = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Еще раз подчеркнем, что любая цифра числа, записанного в СОК, есть вычет по конкретному модулю, входящему в набор. Число в СОК есть набор вычетов.

Выше на примерах было показано, как каждое десятичное число заменяется равным ему числом в СОК. Суть этой замены заключается в том, что исходное число A_{10} сначала делится на p_1 и остаток a_1 считается первой цифрой числа в СОК. Затем число A_{10} делится последовательно на p_2, p_3 и так далее; последнее деление осуществляется на p_k, что и дает требуемый набор циф : $(a_1a_2a_3\ldots a_k)_c$.

Для решения обратной задачи — замены чисел, записанных в конкретных СОК, равными им десятичными числами существует несколько алгоритмов. Наиболее распространен следующий, суть которого задается формулой:

$$A_{10} \equiv (a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 + \cdots + a_kB_k) \pmod N,$$

где $B_i = \frac{m_i N}{p_i}$, а m_i находится из условия

$$\frac{m_i N}{p_i} \equiv 1 \pmod{p_i}.$$

Пример. Найти коэффициенты B_1, B_2, ..., B_5 для набора модулей $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ и $p_5 = 11$; $N = p_1p_2p_3p_4p_5$.

Решение.

$$B_1 = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{2} = 1155,\ m_1 = 1, \text{ так как } 1155 \equiv$$

$$\equiv 1 \pmod 2;$$

$$B_2 = \frac{m_2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{3} = 2 \cdot 770 = 1540,\ m_2 = 2, \text{ так как}$$

$$1540 \equiv 1 \pmod 3;$$

$$B_3 = \frac{m_3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{5} = 3 \cdot 462 = 1386,\ m_3 = 3, \text{ так как}$$

$$1386 \equiv 1 \pmod 5;$$

$$B_4 = \frac{m_4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{7} = 330,\ m_4 = 1, \text{ так как } 330 \equiv$$

$$\equiv 1 \pmod 7;$$

$$B_5 = \frac{m_5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{11} = 210,\ m_5 = 1, \text{ так как } 210 \equiv$$

$$\equiv 1 \pmod{11}.$$

Подробное изучение особенностей алгоритмов взаимной замены десятичных чисел и чисел, записанных в СОК, предоставляется читателям осуществить самостоятельно. Ниже в качестве задачи рассматривается алгоритм взаимной замены чисел, записанных в СОК с различными наборами оснований.

Заметим, что процесс представления числа в виде набора вычетов и решение обратной задачи — восстановление числа по его остаткам — были известны китайцам более 2000 лет назад.

§ 2. Арифметические действия в СОК

Сложение чисел, записанных в СОК, осуществляется в соответствии с очень простым и удивительным алгоритмом. Пусть даны два слагаемых: $A_1 = (a_1a_2a_3\ldots a_k)_c$ и $A_2 = (b_1b_2b_3\ldots b_k)_c$. Их суммой будет число $A_1 + A_2$, которое тоже будет записано в СОК с тем же набором оснований:

$$A_1 + A_2 = (c_1c_2c_3 \quad \ldots \quad c_k)_c, \text{ где } c_i \equiv (a_i + b_i) \pmod{p_i}.$$

Пример. Найти сумму чисел $A_1 = 233_c$ и $A_2 = 030_c$, записанных в СОК с набором оснований $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ и $p_3 = 7$.

Решение. Суммируем в соответствии с приведенным выше правилом:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}233_c\\030_c\end{array}\\ \hline 213_c.\end{array}$$

Помним, что $3 + 3 \equiv 1 \pmod 5$.

Для проверки каждое слагаемое и сумму заменяем равными им десятичными числами:

$$233_c = 2 \cdot 70 + 3 \cdot 21 + 3 \cdot 15 - 210 = 38_{10},$$

$$030_c = 3 \cdot 21 = 63_{10},$$

$$213_c = (2 \cdot 70 + 1 \cdot 21 + 3 \cdot 15) - 105 = 101_{10},$$

$38_{10} + 63_{10} = 101_{10}$ — это и доказывает правильность суммирования чисел 233_c и 030_c.

Подчеркнем, что суммирование чисел в СОК свелось к поразрядному суммированию вычетов, никакого переноса единиц в следующий разряд, естественно, при этом не возникает. Это означает, что система, в которой числа суммируют поразрядно, без использования операции переноса единиц из младших разрядов в старшие, найдена, это система счисления остаточных классов.

Не менее неожиданными свойствами обладает операция умножения чисел в СОК.

Перемножить числа $A_1 = (a_1a_2a_3\ldots a_k)_c$ и $A_2 = (b_1b_2b_3\ldots b_k)_c$ — это значит найти новое число $C = A_1 \times A_2 = (c_1c_2c_3\ldots c_k)_c$, где $c_i \equiv (a_ib_i) \pmod{p_i}$.

Пример. Найти произведение чисел $A_1 = 113_c$ и $A_2 = 321_c$, записанных в системе СОК с основаниями $p_1 = 5$, $p_2 = 7$ и $p_3 = 11$.

Решение. Перемножаем в соответствии с приведенным выше правилом:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}113_c\\321_c\end{array}\\ \hline 323_c.\end{array}$$

Проверку осуществляем, заменив сомножители и полученное произведение равными им десятичными числами:

$$113_С = 36_{10}, \quad 321_С = 23_{10} \text{ и } 36 \times 23 = 828_{10} = 323_С.$$

Оказывается, что и операция умножения выполняется поразрядно. Это очень интересное свойство, и в числе других привлекает к СОК внимание конструкторов вычислительных устройств и машин.

Рассказ о системе счисления остаточных классов строился целенаправленно. Была поставлена задача показать, что существует позиционная система с удивительными алгоритмами суммирования и умножения. Естественно, что многие особенности этой системы остались вне поля зрения. Не рассмотренным оказался, например, вопрос о представлении в СОК отрицательных чисел, а следовательно, и не обсуждена операция вычитания, ни слова не было сказано о делении чисел, заданных в СОК. Не обсуждался интересный вопрос: не является ли процесс замены десятичных чисел равными им числами в СОК до выполнения над ними действий и обратной замены после выполнения операций более громоздким, чем операция переноса единиц при действиях в десятичной системе счисления?

Ответы на все эти вопросы читатель может найти в рекомендуемой литературе.

Рассказ о СОК — это еще один рассказ о развитии современной прикладной вычислительной математики, рассказ еще об одной искусственной системе счисления.

Для читателей, желающих узнать о СОК побольше и ознакомиться с историей появления СОК, ее реализацией в современных ЭВМ, рекомендуем книгу И. А. Акушского и Д. Юдицкого «Машинная арифметика в остаточных классах» (М., Советское радио, 1968).

Глава VI

ФАКТОРИАЛЬНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ. СМЕШАННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

В рассмотренных выше системах счисления «вес» единицы любого разряда, кроме первого, всегда равнялся «весу» единицы предшествующего разряда, умноженному на постоянное основание системы q. Можно, однако, представить еще один вариант системы счисления, в которой смысл понятия «основание системы счисления» заметно отличается от традиционного. Предлагаемая система является следствием расширения наших представлений о роли основания системы счисления. Существо нового подхода легко представить, если рассмотреть счеты необычной конструкции (рис. 15).

На нижней проволочке счет, отведенной для единиц младшего разряда, вес каждой из которой равен единице, помещено две косточки. На следующей проволочке косточек помещено три, на третьей — четыре и т. д., на n-й проволочке — $n+1$ косточка. Так как каждая косточка на второй проволочке заменяет две косточки, расположенные на первой проволочке, то ее вес равен 2. Каждая же косточка третьей проволочки заменяет три косточки, расположенные на второй проволочке, и, следовательно, ее вес в $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1$ раз больше, чем вес косточки первой проволочки. Из этих разъяснений следует, что косточка, расположенная на n-й проволочке, имеет вес, равный $n!$. Вес единиц от разряда к разряду растет, но растет неравномерно. Это приводит к неожиданному представлению чисел в многочленной форме:

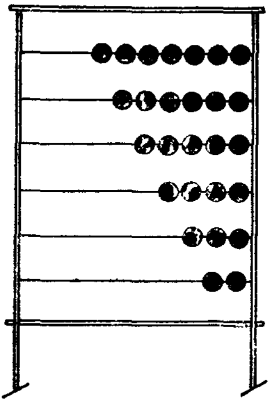


Рис. 15

$$(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1) = a_n \cdot n! + a_{n-1} \cdot (n-1)! + a_{n-2} \cdot (n-2)! + \cdots + a_2 \cdot 2! + a_1 \cdot 1!$$

N-разрядное десятичное число, «списанное со счет», оказывается представленным не в виде суммы степеней основания q, а является суммой факториалов «n» первых натуральных чисел. Например:

$$3221_{\text{ф}} = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = 89_{10};$$

$$40301_{\text{ф}} = 4 \cdot 5! + 3 \cdot 3! + 1 \cdot 1! = 499_{10}.$$

Эту систему счисления относят к смешанным позиционным и называют **факториальной системой счисления**.

Счеты, с помощью которых вводилось понятие о факториальной системе счисления, явились инструментом для представления любого натурального числа

«n» в виде суммы факториалов. Для этого достаточно единицу за единицей складывать на этих счетах до тех пор, пока не будет отложено «n» единиц.

Естественно, что у учащихся может возникнуть вопрос о том, как число десятичное заменить равным ему числом факториальной системы.

Алгоритм, согласно которому осуществляется такая замена, очень прост, он аналогичен алгоритму замены чисел путем деления данного числа на основание системы, в которой разыскивается заменяющее число. Отличие в том, что первое деление исходного числа осуществляется на 2, первое частное делится на 3, второе — на 4 и т. д. Пример разъясняет детали:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
-1236 & |\underline{\;2\;} & & & & & \\
\underline{1236} & -618 & |\underline{\;3\;} & & & & \\
0 & \underline{618} & -206 & |\underline{\;4\;} & & & \\
 & 0 & \underline{204} & -51 & |\underline{\;5\;} & & \\
 & & 2 & \underline{50} & -10 & |\underline{\;6\;} & \\
 & & & 1 & \underline{6} & 1 & |\underline{\;7\;} \\
 & & & & 4 & & 0
\end{array} \qquad 1236_{10} = 141\,200_{ф}$$

$$1236_{10} = 141\,200_{ф} = 1 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 1 \cdot 4! + 2 \cdot 3! = $$
$$= 1236_{10}.$$

С числами этой системы можно выполнять арифметические действия по правилам, незначительно отличающимся от правил десятичной арифметики.

Аналогично другим системам счисления в факториальной системе можно рассматривать дроби и смешанные числа. Например,

$$301,102_{ф} = 3 \cdot 3! + 1 + 1 \cdot \frac{1}{1!} + 2 \cdot \frac{1}{3!};$$

$$3210,102_{ф} = 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 1 \cdot \frac{1}{1!} + 2 \cdot \frac{1}{3!}.$$

Каких-либо существенных практических применений этой системы, основанных на необычной сущности цифрового и многочленного представления, по-видимому, нет. Рассмотрение этой системы прежде всего полезно как методический подход в расширении представлений о системах счисления.

Все сказанное выше подготовило еще один шаг в обобщении понятия «основание системы счисления».

Рассмотрим более подробно смешанные системы счисления, примером которых явилась факториальная система счисления.

Дадим определение «базиса системы счисления». Под базисом системы понимается последовательность чисел, иногда говорят — последовательность ключевых чисел, каждое из которых задает «вес» одного из разрядов числа. Приведем примеры базисов уже рассмотренных систем счисления.

Базис десятичной системы счисления:

$$1,\ 10,\ 10^2,\ 10^3,\ \ldots,\ 10^n,\ \ldots \text{ или}$$

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots,\ 10^n,\ \ldots.$$

Базис двоичной системы счисления:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots \text{ или}$$

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots,\ 2^n,\ \ldots.$$

Базис нега-четверичной системы счисления:

$$(-4)^0,\ (-4)^1,\ (-4)^2,\ \ldots,\ (-4)^n \text{ или}$$

$$1,\ -4,\ 16,\ -32,\ \ldots,\ (-4)^n,\ \ldots.$$

Базис факториальной системы счисления:

$$1,\ 2,\ 6,\ 24,\ 120,\ 720,\ \ldots.$$

Если базис системы счисления задан, то получение записи числа осуществляется путем последовательного деления на ключевые числа базиса.

Пусть $q_0 = 1 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n \ldots$ есть базис системы и нам необходимо числю N_{10} записать в системе с этим базисом. Поступаем так: среди ключевых чисел находим самое большое q_n, не превосходящее N_{10}. Делим N на q_n и получаем частное (неполное) и остаток r_{n-1}:

$$N = a_n \cdot q_n + r_{n-1}, \text{ где } 0 \leqslant r_{n-1} < q_n.$$

Далее остаток r_{n-1} делим на следующее ключевое число q_{n-1}:

$$r_{n-1} = a_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_{n-2}, \quad 0 \leqslant r_{n-2} < q_{n-1}$$

или

$$N_{10} = a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_{n-2}.$$

Далее остаток r_{n-2} делим на q_{n-2} и получаем

$$r_{n-2} = a_{n-2} \cdot q_{n-2} + r_{n-3}$$

или

$$N_{10} = a_n \cdot q_n + a_{n-1} \cdot q_{n-1} + a_{n-2}q_{n-2} + r_{n-3}.$$

Продолжая деление, находим последний остаток r. Тогда

$$N_{10} = a_n q_n + a_{n-1} q_{n-1} + \cdots + a_2 q_2 + a_1 q_1 + \\ + r_0, \text{ где } 0 \leqslant r_0 < q_1$$

или

$$N_{10} = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0.$$

Из описания процесса получения цифр a_i ясно, что каждое число N записывается единственным образом.

Заметим, что в каждом разряде можно использовать строго определенное число цифр, которое зависит от ключевых чисел. Действительно

$$a_n < \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

и поэтому, если частное $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ заключено между целыми числами A и $A-1$:

$$A - 1 < \frac{q_{n+1}}{q_n} < A,$$

то «цифра» a_n не превосходит $A - 1$, т. е. она может принимать значения $a_n = 0$ или 1, или 2, ..., или $A - 1$. Аналогично,

$$a_{n-1} < \frac{q_n}{q_{n-1}} \text{ и т. д.}$$

В качестве базиса можно выбирать различные последовательности. В качестве примера рассмотрим систему, ключевыми числами в базисе которой будут все четные числа и число $q_0 = 1$. Базис этой системы, которую будем называть четной, имеет вид:

$$q_0 = 1, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 4, \quad q_3 = 6, \quad q_4 = 8, \quad q_5 = 10, \ldots .$$

Выясним, какие цифры можно использовать в этой системе для записи чисел. Прежде всего определим цифры младшего разряда:

$$\frac{q_1}{q_0} = 2.$$

Отсюда следует, что a_0 может быть либо 0, либо 1. Замечаем, что

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} = \frac{2(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} < 2,$$

откуда следует, что цифры во всех других разрядах могут быть либо нулем, либо единицей.

Приведем примеры нескольких чисел, записанных в этой системе счисления:

$$2_{10} = 10, \quad 3_{10} = 11, \quad 4_{10} = 100, \quad 5_{10} = 101,$$
$$6_{10} = 1000, \quad 7_{10} = 1001, \; \ldots .$$

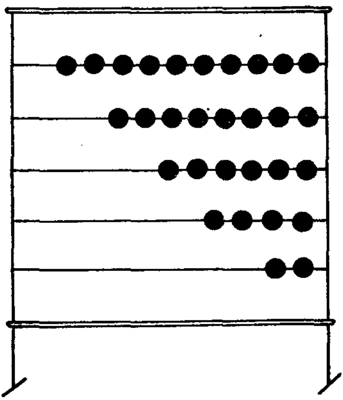


Рис. 16

Легко увидеть, что все числа изображаются либо единицей с несколькими нулями в конце (это всегда четные числа), либо двумя единицами: одна из них — в начале числа, другая — в конце. Примечательно, что не всякая запись, составленная из единиц и нулей, есть число в четной системе счисления.

Еще одна смешанная система счисления возникает, если воспользоваться счетами, изображенными на рис. 16.

Базисом системы счисления, соответствующей таким счетам, является последовательность 1, 2, 8, 48, ...

Число 37_{10} в этой системе запишется так:

$$37_{10} = 4 \cdot 8 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 421.$$

О том, какие цифры можно использовать в каждом разряде, легко догадаться, глядя на счеты. Любопытно, что сложение и вычитание в этой системе счисления требуют внимательности. Нужно помнить о «весе» единицы каждого разряда и о том, какие цифры разрешается использовать в каждом разряде.

Приведем примеры выполнения действий:

$$+\begin{array}{r}421\\530\\\hline 1411\end{array}, \quad +\begin{array}{r}1521\\531\\\hline 2520\end{array}, \quad -\begin{array}{r}1031\\521\\\hline 110\end{array}, \quad -\begin{array}{r}1001\\430\\\hline 111\end{array}.$$

Завершая ознакомление со смешанными системами, остановимся на фибоначчиевой системе счисления. Базисом этой системы являются числа, образующие последовательность Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...

Легко сообразить $\left(\text{для этого достаточно рассмотреть отношение } \frac{q_n}{q_{n-1}}\right)$, что в этой системе счисления также используются в роли цифр только 0 и 1.

Приведем примеры чисел, записанных в фибоначчиевой системе счисления:

$$37_{10} = 34 + 3 = 1 \cdot q_7 + 1 \cdot q_2 = 10000100,$$

$$25_{10} = 21 + 3 + 1 = 1 \cdot q_6 + 1 \cdot q_2 + 1 \cdot q_0 = 1000101.$$

Интересно, что в записи чисел не будут стоять две единицы подряд. Ответить на вопрос «почему?» — это также предоставляем читателю.

Заметим, что аналогичные рассмотренным системы имеют применение при кодировании цифр в некоторых машинных арифметиках. Из всего рассказанного следует, что смешанные позиционные системы счисления нельзя считать «математической забавой». Это практически и теоретически интересные системы записи чисел. Изучение особенностей ряда из них продолжается и в наше время.

Глава VII
АРИФМЕТИКА НОРМАЛИЗОВАННЫХ ЧИСЕЛ

Для развития машинной вычислительной математики очень важной и полезной оказалась идея нормализации чисел, как еще одна специфическая форма записи чисел.

Рассмотрение понятия «нормализованное число» следует начать с введения понятия «десятичное нормализованное число».

Определение. *Число A_{10} называется нормализованным, если оно представлено в виде: $A_{10} = M_{10} \cdot 10^p$, где M_{10} — мантисса, десятичная правильная дробь, равная или большая* 0,1 (т. е. $\frac{1}{10} \leqslant M_{10} < 1$), *$p$ — порядок, целое десятичное число.*

Приведем примеры:

$$273_{10} = 0{,}273 \cdot 10^3 \; (M = 0{,}273_{10}; \quad p = +3);$$

$$0{,}029_{10} = 0{,}29 \cdot 10^{-1} \; (M = 0{,}29_{10}; \quad p = -1);$$

$$-17{,}321_{10} = -0{,}17321 \cdot 10^2 \; (M = -0{,}17321; \; p = 2).$$

При нормализации числа осуществляется своеобразное его «расчленение» на составляющие: знак числа; модуль мантиссы; знак порядка; модуль порядка.

Зная каждое из этих составляющих, можно восстановить исходное число.

Пример. Найти десятичное число, если:
знак числа — минус,
мантисса — $M = 0{,}7421$,
знак порядка — плюс,
порядок — $p = 2$.

Решение. Нормализованная форма искомого числа:

$$-0{,}7421_{10} \cdot 10^2.$$

Искомое число, записанное в общепринятой форме:

$$A = -74{,}21_{10}.$$

В нормализованной форме могут быть представлены натуральные, целые, рациональные и иррациональные числа. Арифметика нормализованных чисел обладает рядом особенностей, которые привлекли внимание конструкторов вычислительных машин. Ниже будет рассмотрена в деталях арифметика десятичных нормализованных чисел, однако основные выводы и алгоритмы можно распространить и на недесятичные нормализованные числа. Знание основных особенностей арифметики нормализованных чисел необходимо, это еще один пример нового подхода в записи чисел, а следовательно, и в организации вычислений.

Арифметика нормализованных чисел тесно связана с ее машинной реализацией. Связь состоит в том, что в каждой ячейке памяти ЭВМ отводится раз навсегда установленное для этого класса машин число разрядов как для хранения порядка (p), так и для хранения мантиссы (M); определен способ хранения знака мантиссы и порядка.

Из сказанного следует, что если для хранения порядка отведено n разрядов, то диапазон изменения порядка задается условием

$$-(q^n - 1) \leqslant p \leqslant +(q^n - 1),$$

где q — основание системы счисления.

Если для записи и хранения цифр мантиссы отведено m разрядов в ячейке памяти, то диапазон изменения мантиссы определяется условием

$$q^{-m} \leqslant M_q \leqslant 1 - q^{-m}.$$

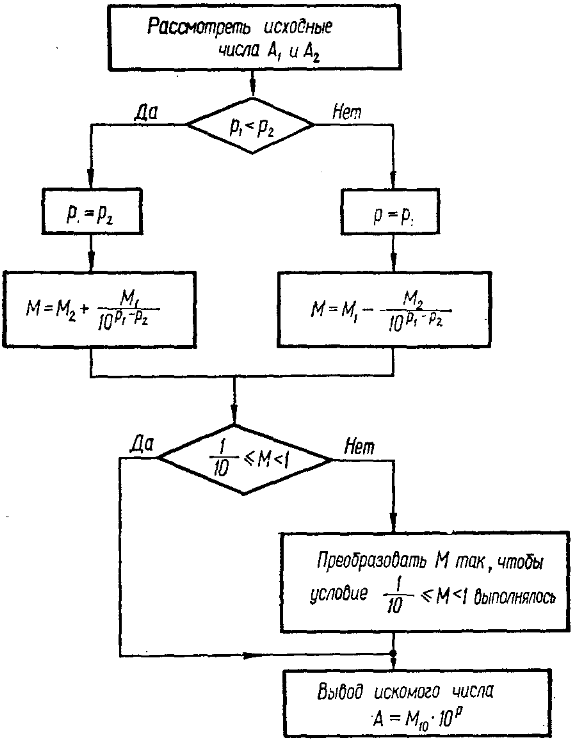


Рис. 17

В целом диапазон изменения числа A_q, которое можно хранить в памяти ЭВМ, задается условием

$$q^{-m} q^{-(q^n - 1)} \leqslant A_q < (1 - q^m)\, q^{(q^n - 1)}.$$

Еще раз подчеркнем, что ниже рассматривается арифметика только десятичных нормализованных чисел. Сложение и вычитание двух нормализованных чисел $A_1 = M_1 \cdot 10^{p_1}$ и $A_2 = M_2 \cdot 10^{p_2}$ выполняется в соответствии с алгоритмом, схема которого приведена на рис. 17.

Сложение и вычитание нормализованных чисел — это арифметические операции над новыми объектами. Они обладают специфическими свойствами и поэтому обозначаться будут по-новому:

$$\oplus \text{ и } \ominus.$$

Подчеркнем, что при выполнении операций сложения и вычитания над нормализованными числами могут возникать искажения исходных чисел. Одним из источников искажения может быть сдвиг вправо при нормализации, часть цифр мантиссы может при этом переместиться за пределы отведенной для мантиссы части разрядной сетки, т. е. потеряться. Может переполниться и та часть разрядной сетки, которая отведена для цифр порядка.

Рассмотрим пример суммирования двух десятичных нормализованных чисел.

Пусть слагаемые $A_1 = 0{,}87 \cdot 10^1$ и $A_2 = 0{,}765 \cdot 10^3$. Найти $A_1 \oplus A_2$.

Прежде чем начать сложение, всегда необходимо выяснить, как устроена ячейка памяти той ЭВМ, на которой будет осуществляться суммирование. Нельзя приступать к выполнению арифметической операции, не зная точно структуры ячейки памяти, не изучив ее разрядной сетки.

Ниже во всех примерах следует иметь в виду, что нами в качестве примера взята разрядная сетка, в которой для мантиссы отведено четыре десятичных разряда, а для порядка — один. Разрядную сетку можно было бы взять и другую.

Найти сумму $A_1 \oplus A_2$ — это значит найти порядок искомого числа «p» и его мантиссу «M». Алгоритм предусматривает отдельную работу над мантиссами и порядками исходных слагаемых:

$$M_1 = 0{,}87, \quad p_1 = 1;$$

$$M_2 = 0{,}765, \quad p_2 = 3.$$

Так как $p_1 < p_2$, то в соответствии с алгоритмом имеем:

$$M = M_2 + \frac{M_1}{10^{p_2-p_1}} = 0{,}765 + \frac{0{,}87}{10^2} = 0{,}765 +$$

$$+ 0{,}0087 = 0{,}7737,$$

$$p = p_2 = 3.$$

Следовательно, $A_1 \oplus A_2 = M \cdot 10^p = 0{,}7737 \cdot 10^3 = 773{,}7_{10}$.

В рассмотренном примере и переполнения разрядной сетки не произошло, и нормализация не потребовалась.

Если в качестве исходных слагаемых взять числа $A_1 = 0{,}29 \cdot 10^0$ и $A_2 = 0{,}876 \cdot 10^4$, то в соответствии с приведенным выше алгоритмом можно получить:

$$M = M_2 + \frac{M_1}{10^4} = 0{,}876 + \frac{0{,}29}{104} = 0{,}876 +$$

$$+ 0{,}000029 = 0{,}8760\underline{29}.$$

Мантисса суммы не требует нормализации. Подчеркнутые две цифры младших разрядов оказались за пределами разрядной сетки, поэтому искомая сумма такова:

$$A_1 \oplus A_2 = 0{,}876 \cdot 10^4 = 8760.$$

Этот результат, с одной стороны, приближенный, так как часть цифр оказалась утраченной, с другой стороны — это верный результат, как найденный с точностью до ограничений разрядной сетки. Влияние ограничений, вносимое размерами разрядной сетки, приводит подчас к неожиданностям, которые могут восприниматься с недоумением.

Примером «неожиданности» может быть такое свойство операции сложения: *суммирование некоторых нормализованных чисел не обладает сочетательным свойством*. Иначе говоря:

$$(A_1 \oplus A_2) \oplus A_3 \neq A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3).$$

Приводимый ниже пример показывает, что это действительно так.

Пусть $A_1 = 0{,}45 \cdot 10^0$, $A_2 = 0{,}82 \cdot 10^0$ и $A_3 = 0{,}13 \times \times 10^4$, тогда

$$A_1 \oplus A_2 = 0{,}45 \cdot 10^0 + 0{,}82 \cdot 10^0 = 1{,}27 \cdot 10^0 =$$

$$= 0{,}127 \cdot 10^1,$$

$$S_1 = (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3 = 0{,}127 \cdot 10^1 +$$

$$+ 0{,}13 \cdot 10^4 \quad \left(M = 0{,}13 + \frac{0{,}127}{10^3} = 0{,}1301\underline{27}\right),$$

$$S_1 = 0{,}1301 \cdot 10^4.$$

$$A_2 \oplus A_3 = 0{,}82 \cdot 10^0 +$$

$$+ 0{,}13 \cdot 10^4 \quad \left(M = 0{,}13 + \frac{0{,}82}{10^4} = 0{,}1300\underline{82}\right),$$

$$A_2 \oplus A_3 = 0{,}13 \cdot 10^4,$$

$$S_2 = A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3) = 0{,}45 \cdot 10^0 +$$

$$+ 0{,}13 \cdot 10^4 \quad \left(M = 0{,}13 + \frac{0{,}45}{10^4} = 0{,}1300\underline{45}\right),$$

$$S_2 = 0{,}13 \cdot 10^4.$$

Два одинаковой точности числа не совпали: $S_1 \neq S_2$. Умножение и деление осуществляются по более простым правилам. Найти произведение двух нормализованных чисел $A_1 \otimes A_2$ — это значит найти порядок и мантиссу произведения. Если $A_1 = M_1 \cdot 10^{p_1}$ и $A_2 = M_2 \cdot 10^{p_2}$, то искомые порядок p и мантисса M находятся так:

$$p = p_1 + p_2,$$
$$M = M_1 \cdot M_2.$$

Полученное число M может потребовать нормализации.

Пусть $A_1 = 0{,}48 \cdot 10^1$ и $A_2 = 0{,}56 \cdot 10^3$, тогда:

$$p = 1 + 3 = 4,$$
$$M = 0{,}48 \cdot 0{,}56 = 0{,}2648.$$

Искомое число $A = A_1 \otimes A_2 = 0{,}2648 \cdot 10^4$.

Разделить одно нормализованное число на другое $A_1 \odot A_2$ — это значит найти порядок p, мантиссу частного M. Если $A_1 = M_1 \cdot 10^{p_1}$ и $A_2 = M_2 \cdot 10^{p_2}$, то:

$$p = p_1 - p_2,$$
$$M = \frac{M_1}{M_2}.$$

Полученное частное M может потребовать нормализации.

Пусть $A_1 = 0{,}25 \cdot 10^1$ и $A_2 = 0{,}64 \cdot 10^2$, тогда

$$p = 1 - 2 = -1,$$
$$M = 0{,}25 : 0{,}64 = 0{,}375.$$

Искомое частное $A_1 \odot A_2 = 0{,}375 \cdot 10^{-1}$.

Отмеченные выше ограничения на размер используемой разрядной сетки могут сказаться при выполнении умножения и деления. Оказывается, например, что имеют место свойства:

умножение некоторых нормализованных чисел не обладает сочетательным свойством;

умножение некоторых нормализованных чисел не обладает распределительным свойством относительно суммы некоторых нормализованных чисел;

существуют такие $A_1 \neq A_2$, что $A_1 \oplus A_1 = A_2 \oplus A_2$;

существуют такие A_1, A_2 и A_3, что $A_1 \oplus (A_2 \ominus A_1) \neq A_3$.

Несомненно, что обнаруженные свойства арифметики нормализованных чисел способствуют расширению наших представлений об операциях и операндах.

Еще раз подчеркнем, что нормализация чисел возможна в любой позиционной системе счисления с натуральным основанием (возможна и в других системах, но этот вопрос почти не изучен). Современные ЭВМ в большинстве своем используют арифметику двоичных нормализованных чисел.

Задачи

Решение предлагаемых задач, хотя и потребует от читателя-школьника смекалки и настойчивости, является все же посильным ему делом. Никаких дополнительных сведений о системах счисления, кроме тех, которые были приведены в книге для решения задач, не потребуется.

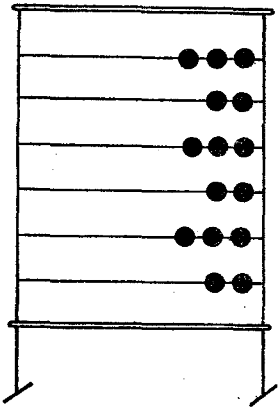


Рис. 18

1. Изучите конструкцию счет (рис. 18) и ответьте на такие вопросы:

а) какие числа образуют базис системы счисления?

б) как в этой системе счисления запишутся числа 100_{10}, 27_{10}, 45_{10}, 64_{10}?

в) какое самое большое число можно отложить на этих счетах?

г) чему равны суммы чисел

$$+\begin{array}{r}121\\21\\\hline ?\end{array}\qquad+\begin{array}{r}2121\\121\\\hline ?\end{array}\qquad+\begin{array}{r}2111\\2020\\\hline ?\end{array}$$

д) чему равны разности чисел

$$-\begin{array}{r}101\\21\\\hline ?\end{array}\qquad-\begin{array}{r}2120\\111\\\hline ?\end{array}\qquad-\begin{array}{r}2111\\121\\\hline ?\end{array}$$

2. Утверждается, что, располагая конкретными счетами (под счетами понимается рамка с натянутыми проволочками и размещенными на этих проволочках косточками), можно всегда выяснить соответствующий базис системы, иначе говоря, всегда можно установить «вес» единицы каждого разряда и выписать все ключевые числа, составляющие базис системы. Обратное — неверно, т. е. не для каждого базиса системы можно всегда сконструировать счеты для вычислений в системе с данным базисом. Так ли это?

Если так, то какому условию должны удовлетворять ключевые числа, образующие базис системы, чтобы можно было изготовить счеты?

3. Каким условиям должны удовлетворять числа, образующие базис системы $(q_n q_{n-1} q_{n-2} \ldots q_1 q_0)$, чтобы в записи чисел встречались только цифры 0 и 1? Только цифры 0, 1 и 2?

4. Известно, что в фибоначчиевой системе счисления не всякая последовательность, составленная из 0 и 1, может рассматриваться как число этой системы счисления, например, в этой системе счисления две цифры «1» не могут стоять рядом в записи числа. Почему?

Доказать, что если $(q_{n+1}) \vdots (q_n)$ при всех n, то это является необходимым условием того, что всякая последовательность $N = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0$, составленная из цифр, есть некоторое число в системе с данным базисом, где $a_0 = \frac{q_1}{q_0}$, $a_1 = \frac{q_2}{q_1}$, $a_2 = \frac{q_3}{q_2}$, ...

5. Существует простое правило увеличения двоичного многоразрядного числа на единицу (это правило часто называют «правилом продвижения единицы»):

обозреть данное целое число справа налево (от младших разрядов к старшим);

если обозреваемая цифра есть «0», то заменить ее единицей и считать работу завершенной;

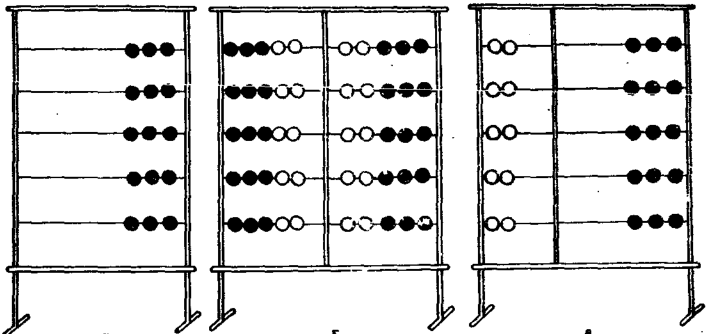
если обозреваемая цифра «1», то заменить ее цифрой «0» и продолжить работу, переходя к рассмотрению цифры следующего разряда.

Разработать аналогичные правила для увеличения на единицу целых чисел, данных в системах счисления: троичной ($q = 3$); нега-двоичной ($q = -2$); троичной уравновешенной.

6. Сформулировать алгоритм уменьшения многозначного числа на единицу в системах счисления: двоичной ($q = 2$); троичной ($q = 3$); нега-двоичной ($q = -2$); троичной уравновешенной.

7. Составить таблицы сложения цифр в системах счисления: троичной ($q = 3$, рис. 19, *а*); пятеричной уравновешенной ($q = 5$, $a_i \in \{\bar{2}, \bar{1}, 0, 1, 2\}$, рис. 19, *б*); четверичной ($q = 4$, $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$, рис. 19, *в*).

8. В системе счисления с основанием $q = 5$ вместо цифр 0, 1, 2, 3, 4 используют цифры $\bar{1}$, 0, 1, 2, 3 (цифра $\bar{1}$ обозначает минус единицу). Составить таблицы сложе-



а *б* *в*

Рис. 19

ния и умножения цифр в этой системе, используя цифры $\bar{1}$, 0, 1, 2, 3.

9. В системе счисления, рассмотренной в задаче 8, выполнить действия:

$$+\begin{array}{r}231\bar{1}\\ \bar{1}2\bar{1}2\\ \hline ?\end{array}\qquad +\begin{array}{r}33\bar{1}1\bar{1}\\ 3222\bar{1}\\ \hline ?\end{array}\qquad -\begin{array}{r}2\bar{1}1\bar{1}\\ 32\bar{1}\\ \hline ?\end{array}\qquad -\begin{array}{r}12\bar{1}\bar{1}\\ 1\bar{1}1\\ \hline ?\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}2\bar{1}\\ \bar{1}3\\ \hline ?\end{array}\qquad \times\begin{array}{r}10\bar{1}\\ 2\bar{1}\\ \hline ?\end{array}$$

10. Выполнить действия над числами, записанными в нега-двоичной системе счисления (при вычитании пользоваться нахождением числа, противоположного вычитаемому):

$$+\begin{array}{r}10111_{-2}\\ 11011_{-2}\\ \hline ?\end{array}\qquad +\begin{array}{r}11011_{-2}\\ 1110_{-2}\\ \hline ?\end{array}\qquad -\begin{array}{r}11011_{-2}\\ 1110_{-2}\\ \hline ?\end{array}\qquad -\begin{array}{r}10001_{-2}\\ 1110_{-2}\\ \hline ?\end{array}$$

11. Сформулировать правило получения целого числа, противоположного данному, в системах счисления: нега-двоичной ($q = -2$); нега-троичной ($q = -3$); пятеричной уравновешенной; мнимо-четверичной ($q = 2i$); для системы, рассмотренной в задаче 8.

12. Сформулировать и доказать признак делимости на 2 в системах счисления: троичной ($q = 3$); нега-троичной ($q = -3$); троичной уравновешенной.

13. Найти все системы счисления с натуральным основанием q, в которых признаком делимости любого числа N_q на данное число A является делимость суммы его цифр на число A.

14. Доказать, что если в системе счисления с основанием q, $q \in N$, сумма цифр числа A_q, стоящих на нечетных местах, равна сумме цифр, стоящих на четных, или разность этих сумм кратна $q+1$, то число A_q кратно числу $q+1$.

15. Найти основание q, $q \in N$, системы, в которой верны следующие признаки делимости:

если сумма цифр числа делится на 5, то само число делится на 5;

если число, образованное двумя последними цифрами данного числа, делится на 7, то и само число делится на 7.

16. Доказать, что целое число, записанное в системе с нечетным натуральным основанием, нечетно в том и только том случае, если оно содержит нечетное число нечетных цифр.

17. Показать, что число $2^{10} - 2^8 + 2^6 - 2^4 + 2^2 - 1$ делится на 9. Сформулировать и доказать признак делимости на девять в нега-десятичной системе счисления.

18. Занимательная задача. Доказать, что если в некотором числе, записанном в системе с основанием q, произвольно переставить цифры и вычислить разность между исходным и полученным числами, то разность будет кратна $q-1$.

19. Занимательная задача. Человека, которому больше чем 9 и меньше чем 100 лет, просят записать число, выражающее его возраст, три раза подряд (например, 373737). Доказать, что полученное число делится на 7.

20. Занимательная задача. Рассмотреть четырехразрядное число $abcd_{10}$, представить его в виде многочлена $a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d$ и найти значение этого многочлена. Если полученное число делится на 7, то и исходное число делится на 7. Так ли это?

21. Известно, что $145_{10} = 5! + 4! + 1!$. Не учитывая, что $0 = 0!$, $1 = 1!$ и $2 = 2!$, установить, имеются ли еще десятичные числа, обладающие таким же свойством.

22. Известно, что $ab_p = ba_q$ и $p \in N$, $q \in N$. Выразить p как функцию q.

Найти x и y из условия $43_x = 34_y$. Сколько решений имеет задача?

23. Известно, что $xy_p = yx_q$ и $p \in N$, $q \in N$. Выразить x через y.

Найти x и y из условия $xy_7 = yx_4$. Сколько решений имеет задача?

24. Известно, что $xy_p = yx_q$, где $p \in Z$, $q \in Z$. Выразить x как функцию y и p как функцию q, считая: а) $x > 0$, $y > 0$ и $p < 0$, $q < 0$; б) $x < 0$, $y < 0$ и $<$ < 0 и $q < 0$.

Найти x и y из условия $xy_{-7} = yx_{-3}$.

Найти p и q из условия $32_p = 23_q$.

25. Утверждается, что алгоритм извлечения квадратного корня из положительного числа, записанного в недесятичной системе с натуральным основанием, совпадает с алгоритмом извлечения квадратного корня в десятичной системе. Так ли это?

26. Найти алгоритм извлечения квадратного корня из положительных чисел, записанных в нега-десятичной позиционной системе счисления.

27. Дана «возрастающая» последовательность, состоящая из 16 чисел: (0001, 0002, 0003, 0010, 0011, 0012, 0013, 0020, 0021, 0022, 0023, 0030, 0031, 0032, 0033, 0100, ...), записанных в системе с основанием $q = 2i$. Нанести все числа на координатную плоскость. Нельзя ли указать правило размещения на плоскости 10 следующих чисел?

28. Найти правило, с помощью которого можно указать для любого числа; записанного в системе с основанием $q = 2i$, в какой четверти находится точка, изображающая его.

Для точки, задаваемой числом $231{,}2_{2i}$, найти симметричные относительно оси Ox и начала системы координат.

29. Целые числа записаны в СОК с набором модулей $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$ и $p_4 = 11$, например, 2312_c. Установить признак делимости предоставленного этой записью числа на какое-нибудь натуральное число.

30. Найти простое правило сравнения двух чисел в СОК с набором модулей $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$ и $p_4 = 11$. Верна ли запись: $3210 > 3123$?

31. Занимательная задача. Квадрат целого десятичного числа, содержащего более одной цифры, имеет цифру десятков, равную 7. Какой цифрой оканчивается квадрат этого числа?

32. Занимательная задача. При нумерации страниц книги использовалась восьмеричная система счисления. Всего было использовано 216_8 цифр. Сколько страниц имеет книга?

33. Занимательная задача. Доказать, что разность чисел $(abcd_q - dcba_q)$, где $q \in N$, кратна числу $q - 1$.

34. Сформулировать условия, которым должны удовлетворять основания p и q систем, с тем чтобы при переходе от записи правильных конечных дробей, записанных в системе с основанием q, к их записи в системе с основанием p всегда получались конечные дроби.

35. В системе остаточных классов с набором модулей $p_1 = 3$, $p_2 = 5$ и $p_3 = 7$ даны три числа: $A_1 = 245_c$, $A_2 = 141_c$ и $A_3 = 225_c$. Укажите среди них наибольшее.

36. Дана сумма чисел $abc_q + cba_q$. Показать, что делимость суммы на q не зависит от средней цифры.

Найти все трехзначные числа, кратные семи, если $q = 7$.

37. Доказать, что нет таких десятичных трехразрядных чисел, которые при перестановке начальной цифры в младший разряд числа увеличиваются в 5, 6 или 8 раз.

38. Четырехзначное десятичное число записано только четными цифрами и является полным квадратом. Найти все такие десятичные числа.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

1. а) Базис системы счисления, соответствующий счетам, изображенным на рис. 18, составляют числа 1, 2, 6, 12, 36, 72, 216, ...

б) Число 100_{10} в этой системе счисления будет записано так:

$$100_{10} = 102\,020 = 1 \cdot 72 + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 2.$$

Разложение числа 100_{10} получено делением на числа 76,32 ,... по правилам десятичной арифметики.

Аналогично получены и следующие разложения:

$$27_{10} = 2011, \quad 45_{10} = 10\,111, \quad 64_{10} = 12020.$$

в) Самое большое число, которое можно отложить на счетах такой конструкции и имеющих четыре проволочки, есть число

$$2121 = 2 \cdot 12 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 1 = 35_{10}.$$

Результаты вычислений:

г) $121 + 21 = 1020$, $2121 + 121 = 10120$, $2111 + 2020 = 12001$;

д) $101 - 21 = 10$, $2120 - 111 = 2001$, $2111 - 121 = 1220$.

2. Да, так. Например, нельзя сконструировать счеты для выполнения действий в фибоначчиевой системе счисления, базис которой образуют числа 1, 2, 3, 5, 8, ... Для того чтобы можно было сконструировать счеты, необходимо, чтобы «вес» единицы каждого следующего разряда был кратен «весу» единицы предшествующего разряда.

3. Для того чтобы в записи числа использовались только цифры 0 и 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

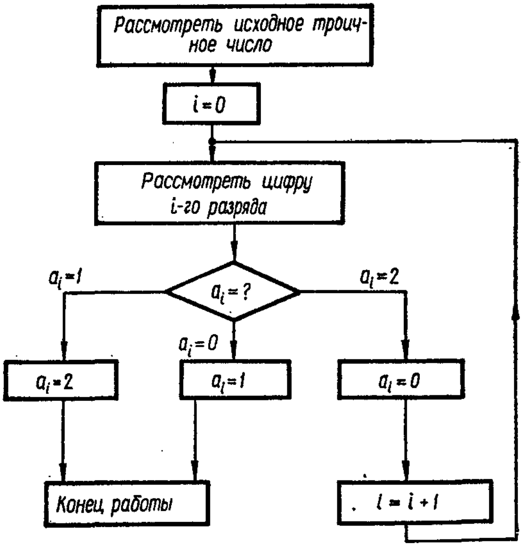
$$2 \cdot q_n \geqslant q_{n+1}.$$

Примером может быть двоичная система счисления, в которой $2 \cdot q_n = q_{n+1}$, и фибоначчиева, в которой $2 \cdot q_n \geqslant q_{n+1}$ (предполагается, что $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ стремится к числу $\varphi = 1{,}68...$).

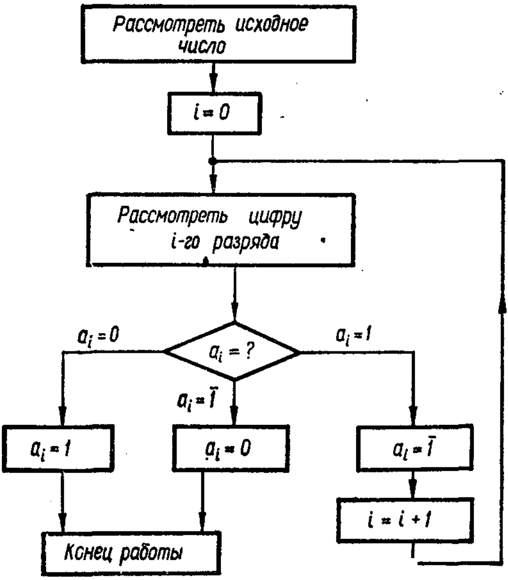
Для того чтобы в записи числа использовались только цифры 0,1 и 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$3 \cdot q_n \geqslant q_{n+1}.$$

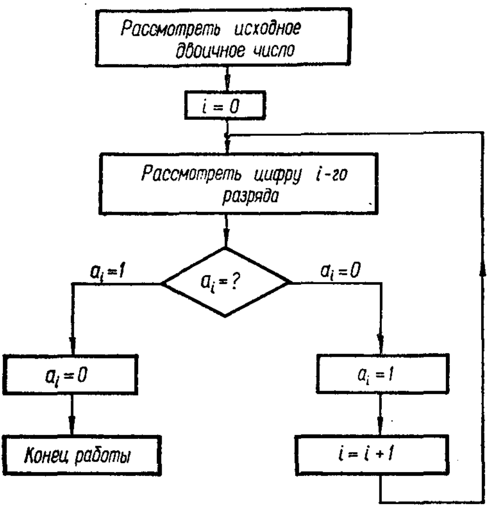
5. Алгоритм увеличения многоразрядного троичного числа на единицу задается в виде следующей структурной схемы:



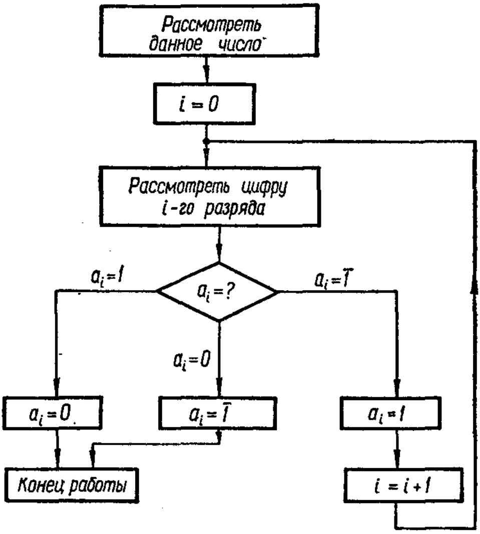
Алгоритм увеличения на единицу многоразрядного числа, записанного в троичной уравновешенной системе, задается структурной схемой:



6. Алгоритм уменьшения многозначного двоичного числа на единицу задается структурной схемой:



Алгоритм уменьшения многозначного натурального числа, записанного в троичной уравновешенной системе, задается в виде следующей структурной схемы:



7. Таблицы имеют вид:

+	2	1	0	$\bar{1}$	$\bar{2}$
2	$1\bar{1}$	$1\bar{2}$	2	1	0
1	$1\bar{2}$	2	1	0	1
0	2	1	0	1	2
$\bar{1}$	1	0	1	2	$\bar{1}2$
$\bar{2}$	0	1	2	$\bar{1}2$	$\bar{1}1$

$q = 5$ (уравновешенная)

+	$\bar{1}$	0	1	2
$\bar{1}$	$\bar{1}2$	1	0	1
0	1	0	1	2
1	0	1	2	$1\bar{1}$
2	1	1	$1\bar{1}$	10

$q = 4$, $a_i \in \{\bar{1}, 0, 1, 2\}$

8. Таблицы имеют вид:

+	$\bar{1}$	0	1	2	3
$\bar{1}$	$\bar{1}3$	$\bar{1}$	0	1	2
0	$\bar{1}$	0	1	2	3
1	0	1	2	3	$1\bar{1}$
2	1	2	3	$1\bar{1}$	10
3	2	3	$1\bar{1}$	10	11

×	$\bar{1}$	0	1	2	3
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$	$\bar{1}3$	$\bar{1}2$
0	0	0	0	0	0
1	$\bar{1}$	0	1	2	3
2	$\bar{1}3$	0	2	$1\bar{1}$	11
3	$\bar{1}2$	0	3	11	21

$$q = 5, \quad a_i \in \{\bar{1}, 0, 1, 2, 3\}.$$

9. $231\bar{1} + \bar{1}21\bar{2} = 2001$, $33\,\bar{1}1\bar{1} + 32\,22\bar{1} = 120\,123$,
$2\bar{1}1\bar{1} - 32\bar{1} = 1110$, $12\bar{1}\bar{1} - 1\bar{1}1 = 1123$,
$\bar{2}1 \times \bar{1}3 = 112$, $10\bar{1} \times 2\bar{1} = 1331$.

10. $10111_{-2} + 11011_{-2} = 1101110_{-2}$; $11011_{-2} + 1110_{2-} = 1_{-2}$.
Используя соотношение $1 + 11 = 0$, находим число 11010_{-2}, которое противоположно вычитаемому. Суммируя его с уменьшаемым, получим:

$$11011_{-2} + 11010_{-2} = 11101_{-2}; \quad 10001_{-2} + 11010_{-2} = $$
$$= 1101011_{-2}.$$

11. Для получения числа, противоположного данному в нега-двоичной системе счисления, необходимо действовать по правилу:

над исходным числом написать такое же, сдвинув его на разряд влево;

полученные числа суммировать по правилам нега-двоичной арифметики.

Например, исходное число $11001_{-2} = 9_{10}$. Выписываем слагаемые и суммируем:

$$\begin{array}{r} 11001 \\ +\ \ 11001 \\ \hline 01011. \end{array}$$

Для получения числа, противоположного данному в пятеричной системе с симметричным основанием, достаточно каждую цифру исходного числа заменить на симметричную, оставляя нуль неизменным. Например, исходное число $2\bar{1}210\bar{2}_5$, противоположное ему $\bar{2}1\bar{2}\bar{1}02_5$.

12. В троичной и нега-троичной системах счисления признак делимости на 2 формулируется одинаково:

«на 2 делятся те и только те числа указанных систем, в записи которых количество «1» четное».

Данный признак делимости следует из того, что при представлении числа в виде многочлена все слагаемые, содержащие произведения типа $1 \cdot 3^n$, есть нечетные числа, а слагаемые типа $2 \cdot 3^n$ — числа четные, поэтому для делимости исходного числа на 2 достаточно, чтобы число слагаемых типа $1 \cdot 3^n$ было четным.

В троичной уравновешенной системе счисления признак делимости на 2 формулируется так:

«на 2 делятся те и только те числа, в записи которых используется четное число единиц».

13. «На число A делятся те и только те числа N_q, сумма цифр которых делится на A». Так формулируется признак в тех системах счисления с основанием q, в которых имеет место равенство $(q^n - 1) \vdots\ A$, $n \in N$.

14. Доказательство проведем для шестиразрядного числа $abcdef$. Представим данное число в виде многочлена

$$aq^5 + bq^4 + cq^3 + dq^2 + eq + f = aq^5 + cq^3 + eq + bq^4 + dq^2 + f =$$
$$= a(q^5 + 1) + c(q^3 + 1) + e(q + 1) - a - c - e + b(q^4 - 1) +$$
$$+ d(q^2 - 1) + b + d + f = a(q^5 + 1) + c(q^3 + 1) + e(q + 1) +$$
$$+ b(q^4 - 1) + d(q^2 - 1) + (b + d + f) - (a + c + e).$$

Отсюда следует сформулированный признак.

15. В системе счисления с основанием $q = 21$ натуральное число делится нацело на 5 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 5 (это следует из того, что $21^n - 1$ всегда делится нацело на 5). В этой же системе число делится на 7 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 7.

16. Утверждение следует из того, что всякая степень нечетного числа есть число нечетное (это значит, что q^n есть число нечетное при всех n), и из того, что нечетное число нечетных чисел есть число нечетное.

17. Преобразуем исходную сумму и убедимся в делимости ее на 9:

$$2^{10} - 2^8 + 2^6 - 2^4 + 2^2 - 1 = 2^2 \cdot (2^8 + 2^4 + 1) - (2^8 + 2^4 + 1) =$$
$$= (2^2 - 1)(2^8 + 2^4 + 1) = 3 \cdot 273 = 3 \cdot 3 \cdot 91.$$

19. Записать какое-нибудь двузначное число три раза подряд, например, 373 737 — это значит умножить его на 10 101, а так как число 10 101 делится на 7, то отсюда следует, что и число $37 \cdot 10\,101$ делится на 7.

20. Да, такой признак делимости на 7 имеет место.

22. Из условия $ab_p = ba_q$ следует, что $ap + b = bq + a$, откуда

$$p = \frac{bq + a - b}{a} = \frac{b}{a}(q - 1) + 1.$$

23. Для отыскания x и y используем равенство

$$xp + y = yq + x.$$

Из условия $xy_7 = yx_4$ имеем

$$7x + y = 4y + x, \quad 6x = 3y, \quad 2x = y,$$

а также, использовав ограничения $x \leqslant 3$, $y \leqslant 3$, получим

$$21_4 = 12_7.$$

24. $xy_{-7} = yx_{-3}, -7x + y = -3y + x, 2x = y$, имеем $12_{-7} = 21_{-3}$. $32p = 23q$, $3p + 2 = 2q + 3$, откуда получаем $p = \frac{2q+1}{3}$ и, замечая, что $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 4$, находим все значения p и q, которые образуют две арифметические прогрессии:

$$q: 7,\ 10,\ 13,\ \ldots \qquad (q_1 = 7, \quad d = 3),$$

$$p: 5,\ 7,\ 9,\ \ldots \qquad (p_1 = 5, \quad d = 2).$$

25. Алгоритм, применимость которого доказывается, предполагает разбиение подкоренного числа на грани по две цифры в каждой и подбор цифр, которые образуют число искомого корня. Доказательство проведем для числа

$$A_q = a_n q^n + a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \cdots + a_2 q^2 + a_1 \cdot q + a_0.$$

Представим число A_q в виде трехразрядного числа

$$A_q = Bq^2 + a_1 q + a_0 = Bq^2 + c,$$

где $Bq^2 = a_n q^{n-2} + a_{n-1}q^{n-3} + \ldots + a_2$ — число единиц третьего разряда в исходном числе A_q, а $c = a_1 q + a_0$.

Лемма 1. *Число единиц второго разряда искомого квадратного корня из числа A_q равно корню из числа единиц третьего разряда, т. е. корню из числа Bq^2.*

Доказательство. Из числа B можно извлечь квадратный корень с недостатком с точностью до единицы:

$$x^2 \leqslant B < (x + 1)^2.$$

Умножая на q^2, получим

$$q^2x^2 \leqslant Bq^2 < q^2(x + 1)^2.$$

Так как B и $(x + 1)^2$ — числа целые, то число Bq^2 меньше числа $q^2(x + 1)^2$ по крайней мере на одну единицу второго разряда, т. е. на q^2. Учитывая, что $c < q^2$, получаем $Bq^2 + c < q^2(x + 1)^2$ и далее:

$$(qx)^2 \leqslant A < q(x + 1)^2.$$

Из этого следует, что A либо равно одному из чисел qx, $(qx)^2$, $(qx + 1)^2$, $(qx + 2)^2$, ..., $(qx + q)^2$, либо заключено между какими-либо двумя из них.

Лемма 2. Если x есть число единиц второго разряда числа A, то число единиц корня

$$y \leqslant \frac{A - q^2x^2}{2x}.$$

Доказательство. Из леммы 1 имеем $(qx + y)^2 < A$, где y — число единиц искомого корня из A (y — целое число). Тогда

$$2qxy + y^2 < A - q^2x^2.$$

В числе $2qxy$ содержится $2xy$ единиц второго разряда, а в числе y^2 эти единицы содержатся или не содержатся. Отсюда имеем: $2xy < m$, где m — число единиц второго разряда, содержащихся в $A - q^2x^2$. Итак, $y \leqslant \frac{m}{2x}$, что и требовалось доказать.

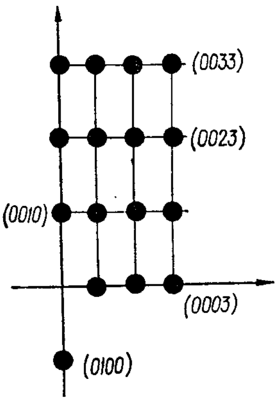


Рис. 20

Леммы были доказаны в предположении, что исходное число представляется в виде трехзначного числа

$$A_q = Bq^2 + a_1q + a_0.$$

На основании первой леммы можно исходное число разбивать на грани и каждую грань рассматривать как самостоятельное число.

На основании второй леммы можно осуществлять второй этап извлечения квадратного корня из A_q, а именно: подбирать такое y (единица следующего младшего разряда), чтобы

$$2xy \leqslant A - q^2x^2.$$

Следовательно, алгоритм извлечения квадратного корня в системе счисления с основанием q совпадает с известным алгоритмом десятичной системы счисления.

27. Для нанесения данных чисел на координатную плоскость представим каждое из них в традиционной форме

$$\begin{array}{lll} 1 = 1 + 0i, & 10 = 1 \cdot 2i + 0, & 20 = 2 \cdot 2i + 0, \\ 2 = 2 + 0i, & 11 = 1 \cdot 2i + 1, & 21 = 2 \cdot 2i + 1, \\ 3 = 3 + 0i, & 12 = 1 \cdot 2i + 2, & 22 = 2 \cdot 2i + 2, \\ & 13 = 1 \cdot 2i + 3, & 23 = 2 \cdot 2i + 3 \ \ldots . \end{array}$$

Координатная плоскость с нанесенными числами будет иметь вид, изображенный на рис. 20.

28. Число $231{,}2_{2i}$ на плоскости изображается точкой A (—7; 5), симметричное ему относительно оси Ox — точкой B (—7; —5), а относительно начала системы координат — точкой C (7; —5).

Правило, с помощью которого можно по записи числа судить о том, в какой четверти координатной плоскости находится точка, изображающая его, может быть следующим:

Все одноразрядные числа изображаются точками прямой Ox вправо от нуля.

Все двухразрядные числа изображаются точками первой четверти.

По мере увеличения разрядности числа (увеличения количества цифр в нем) точка переходит из I четверти во II, затем в III, IV и снова в I и так далее (плоскость заполняется точками «по ломаной спирали»).

Правило следует из закономерности в последовательности ключевых чисел:

...	$-32i$	16	$-8i$	-4	$2i$	1

29. Один из признаков делимости в системе счисления СОК может быть сформулирован так:

пусть задан набор модулей $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$;

тогда исходное число делится на p_1, если оно оканчивается нулем, делится на p_2, если цифра его второго разряда нуль, делится на p_3, если цифра его третьего разряда нуль, и так далее. Число делится на p_n, если цифра его n-го разряда нуль. Исходное число делится на $p_k p_{k+1}$, если цифры k и $k+1$ разрядов нули.

Заметим, что приведенный текст признака делимости — это лишь один из возможных вариантов и приводится лишь в качестве примера.

32. Если страницы в книге пересчитать в десятичной системе счисления, то их будет 121. Это следует из таких соображений:

на нумерацию первых семи страниц использовано 7 цифр — (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7);

на нумерацию следующих страниц уже затрачивалось по две восьмеричные цифры на каждую страницу и их было израсходовано — 112_{10} (10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20, 21,..., 76, 71).

Из сказанного следует, что на нумерацию 179 страниц было израсходовано 167_8 цифр, оставшиеся 33_8 были истрачены на нумерацию 9_{10} страниц и при этом на каждую страницу расходовалось по три цифры. Следовательно, 216_8 цифр израсходовали на нумерацию книги в 170_8 страниц.

33. Искомое следует из выкладок:

$$(abcd_q - dcba_q) = aq^3 + bq^2 + cq + d - dq^3 - cq^2 - bq - a =$$

$$= q^3(a-d) + q^2(b-c) + q(c-b) + (d-a) = (a-d)(q^3-1) +$$

$$+ q(b-c)(q-1).$$

Отсюда и следует делимость на $q-1$.

34. Для того чтобы конечная правильная дробь, записанная в системе счисления с основанием q (т. е. дробь $(0, a_1 a_2 \dots a_k)_q$), оказалась записанной в системе с основанием p ($p < q$) как конечная, необходимо и достаточно, чтобы q было кратно p. Это следует из выкладок

$$\frac{a_1}{q} + \frac{a_2}{q^2} + \frac{a_3}{q^3} + \dots + \frac{a_k}{q^k} =$$

$$= \frac{b_1}{p} + \frac{b_2}{p^2} + \frac{b_3}{p^3} + \dots + \frac{b_m}{p^m},$$

или

$$\frac{a_1q^{k-1}+a_2q^{k-2}+\cdots+a_k}{q^k}=\frac{b_1p^{m-1}+b_2p^{m-2}+\cdots+b_m}{p^m}.$$

Ясно, что q^k должно быть общим знаменателем и при этом должно делиться на p^m нацело, откуда следует, что q должно делиться на p нацело:

$$(q^k \vdots p^m)=(q^m \vdots p^m)\,q^{k-m}=(q \vdots p)^m\,q^{k-m}.$$

Примеры:

$$0{,}32_{10}=0{,}13_5 \quad (q=10,\quad p=5);$$
$$0{,}24_6=0{,}11_3 \quad (q=6,\quad p=3);$$
$$0{,}76_8=0{,}332_4 \quad (q=8,\quad p=4).$$

35. Запишем данные числа в десятичной системе счисления. Для этого воспользуемся формулой

$$A_{10}\equiv(a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3)\ (\mathrm{mod}\ N),$$

где $N=p_1p_2p_3$, а $B_i=\dfrac{m_iN}{p_i}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ p_i)$. Тогда

$$B_1=\frac{m_1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{3}=m_1\cdot 35\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ m_1=2,\ \text{так как}\ 70\equiv$$

$$\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ \text{откуда}\ B_1=70;$$

$$B_2=\frac{m_2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{5}=m_2\cdot 21\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5),\ m_2=1,\ \text{так как}$$

$$21\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 5),\ \text{откуда}\ B_2=21;$$

$$B_3=\frac{m_3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{7}=m_3\cdot 15\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7),\ m_3=1,\ \text{так как}$$

$$15\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 7),\ \text{откуда}\ B_3=15.$$

Находим десятичные значения данных чисел:

$$A_1\equiv(2\cdot 70+4\cdot 21+5\cdot 15)\ (\mathrm{mod}\ 105)\ \text{или}\ A_1\equiv 299\ (\mathrm{mod}\ 105).$$

Отсюда видим, что A_1 есть остаток от деления числа 299 на 105, т. е. $A_1=89_{10}$;

$$A_2\equiv(1\cdot 70+4\cdot 21+1\cdot 15)\ (\mathrm{mod}\ 105),\ \text{или}\ A_2\equiv 169\ (\mathrm{mod}\ 105),$$

откуда $A_2=64_{10}$;

$$A_3\equiv(2\cdot 70+2\cdot 21+5\cdot 15)\ (\mathrm{mod}\ 105),\ \text{или}\ A_3\equiv 257\ (\mathrm{mod}\ 105),$$

откуда $A_3=47_{10}$.

Итак наибольшим будет число $A_1=245_C$.

36. Преобразуем данную сумму

$$abc_q + cba_q = aq^2 + bq + c + cq^2 + bq + a = q^2(a + c) + 2bq + (a + c) = (a + c)(q^2 + 1) + 2bq.$$

Согласно признаку делимости суммы на число, полученная сумма делится на q, если $(a + c) \vdots q$. Следовательно, делимость данной суммы на q не зависит от цифры b.

Если $q = 7$, то $abc_7 + cba_7 = (a + c) \cdot 50 + 14b$. Ясно, что сумма $a + c$ должна делиться на 7, а это возможно только при a и c, имеющих значения 1 и 6 (6 и 1), 2 и 5 (5 и 2), 3 и 4 (4 и 3), при этом значение «b» может быть любым из допустимых. Например,

$$166_7 + 661_7 = 1060_7 \vdots 7.$$

37. Пусть abc_{10} исходное число, bca_{10} — число, полученное при перестановке начальной цифры в младший разряд. По условию задачи имеем

$$5 \cdot (100a + 10b + c) = 100b + 10c + a,\ 499a - 50b - 5c = 0 \text{ или}$$

$$499a = 5 \cdot (10b + c).$$

Видим, что это условие невыполнимо ни при каких значениях a, b и c. Отсюда следует, что никакое число abc_{10} при перестановке его первой цифры в младший разряд в пять раз увеличено быть не может. Аналогично доказываются и другие два случая.

38. Четырехзначное число, которое записывается четырьмя цифрами, может начинаться с цифр 2, 4, 6 или 8. Иными словами, оно может быть заключено между числами 1999 и 3000, или 3999 и 5000, или 5999 и 7000, или 7999 и 9000. Поэтому корень квадратный из этих чисел заключается между числами 44 и 55, или 63 и 71, или 77 и 84, или 89 и 95.

Заметим, что так как $(10x + y)^2 = 100x^2 + 20xy + y^2$, то при $0 \leqslant y \leqslant 9$ цифра десятков числа $(10x + y)^2$ четна или нечетна одновременно с цифрой десятков числа y^2. Поэтому корень квадратный из искомого числа не может оканчиваться цифрами 4 и 6.

Так как корень квадратный из искомого числа четен, то он может равняться лишь одному из следующих 10 чисел:

48, 50, 52, 68, 70, 78, 80, 82, 90 и 92.

Проверка показывает, что условию задачи удовлетворяют числа: $68^2 = 4624$; $78^2 = 6084$; $80^2 = 6400$; $92^2 = 8464$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воробьев Н. Н. Признаки делимости. М., Физматгиз, 1963.

2. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. Математические новеллы. Математические досуги. М., Мир, 1971—1974.

3. Касаткин В. Н. Введение в кибернетику. Киев, Рад. школа, 1980.

4. Кнут Д. Искусство программирования. М., Мир, 1976.

5. Справочник по цифровой вычислительной технике / Под ред. чл.-кор. АН УССР Б. Н. Малиновского. Киев, Вища школа, Головное изд-во, 1974.

6. Фомин С. В. Системы счисления. М., Наука, 1976.

7. Энциклопедия кибернетики. Киев, Главная редакция УСЭ, 1974.

8. Яглом И. М. Системы счисления.— Квант, 1970, № 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Библиотечка физико-математической школы
Математика

Валентин Николаевич Касаткин

НОВОЕ О СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ

Редактор Л. П. Онищенко
Литредактор А. П. Ковальчук
Художественный редактор Е. В. Чурий
Технический редактор А. И. Омоховская
Корректор Л. Д. Мякоход

Информ. бланк № 6603

Сдано в набор 21.11.80. Подп. в печать 26.01.82. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага газетная. Лит. гарн. Выс. печать. 5,04 усл. печ. л. 5,34 усл.кр.-отт. 4,31 уч.-изд. л. Тираж 13000 экз. Изд. № 4773. Зак. № 1—742. Цена 25 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, г. Киев, Довженко, 3, в Харьковской городской типографии № 16, Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 220.