Е. В. Галкин

НЕстандартные задачи по математике

задачи с целыми числами

Учебное пособие

- Подготовка к олимпиадам
- Предпрофильная подготовка
- Профильное обучение

Е. В. Галкин

НЕстандартные задачи по математике

Учебное пособие
для учащихся
7-11
классов

задачи с целыми числами

Челябинск
«Взгляд»
2005

УДК 512(079.1)
ББК 22.14я721.6
Г16

Серия
«Нестандартные задачи по математике»

Галкин Е. В.

Г16 Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. — Челябинск: Взгляд, 2005. — 271 с. — (Нестандартные задачи по математике).

ISBN 5-93946-071-2

Учебное пособие предназначено для подготовки учащихся к школьным и районным олимпиадам по математике. Значительная часть книги может быть использована в профильных классах и классах с углубленным изучением математики.

Система расположения материала, наличие теоретических сведений и опорных задач дают возможность самостоятельно обучаться решению задач повышенной трудности по математике.

УДК 512(079.1)
ББК 22.14я721.6

ISBN 5-93946-071-2

Предисловие

Настоящая книга является продолжением пособия «Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера» [18] и связана с ним идейно. Так, § 7 последнего пособия можно рассматривать как своего рода введение в основную тематику данной книги. Возможно, некоторые преподаватели школ и педагогических вузов уже знакомы с содержанием книги, так как она была частично опубликована в газете «Математика» (приложение к газете «Первое сентября» в 1999–2000 гг.)

Пособие написано для учащихся, учителей математики, студентов и преподавателей педагогических вузов. Его основное назначение — подготовка учащихся к олимпиадам по математике. Кроме того, значительную часть книги можно использовать в профильных классах и классах с углубленным изучением математики.

Книга обладает теми же методическими особенностями, что и пособие [18].

1. Она написана для *тех, кто начинает решать* нестандартные задачи. Следовательно, она необходима в первую очередь для подготовки к школьным и районным олимпиадам.

2. Книга предназначена главным образом для *самостоятельного решения*. Поэтому в ней решено в общей сложности (в основной части и в «Ответах, указаниях, решениях») лишь около трети помещенных задач.

3. Задачи в книге изложены в *системе*. В большинстве изданных сборников олимпиадных задач системы нет или почти нет, а потому научиться с их помощью решать подобные задачи довольно сложно.

4. Для книги характерно широкое использование *опорных задач*, то есть задач, утверждения которых следует применять при решении нескольких последующих задач.

5. Примерно четвертая часть книги (задачи для 9–11 классов, отмеченные звездочками) по степени трудности соответствует областным олимпиадам. Они играют роль переходного мостика между задачами районных и задачами областных олимпиад.

Для успешной проработки книги достаточно решить примерно третью часть нерешенных в ней задач — при условии, что для этого выбраны наиболее типичные, характерные по методу решения задачи. Оставшуюся часть учителя, методисты и преподаватели педагогических вузов могут использовать для составления задач школьных и районных олимпиад. При недостатке времени можно данный сборник прорабатывать по сокращенной схеме, ограничившись лишь самыми важными параграфами.

Наиболее важными темами в книге являются делимость целых чисел (§§ 4–8) и решение уравнений в целых и натуральных числах (§§ 17–20).

В начале каждого параграфа приводится список литературы по теме параграфа и указываются классы, для которых он предназначен. Классы указаны лишь приблизительно: в зависимости от обстоятельств рассматриваемую тему можно сдвинуть на класс выше или ниже. Так как при решении большинства задач используется алгебра, то основная часть книги предназначена для 7–11 (даже 8–11) классов, а задач для 5–6 классов немного – это §§ 1–4 и п. 22.8 из § 22. Одно замечание: если указано, что данный параграф написан, скажем, для 7–9 классов, то в полном объеме это указание относится лишь к первым задачам параграфа; начиная с некоторого места, задачи в зависимости от степени трудности используемого в решениях материала по алгебре более подходят для 8–9, а последние – только для 9 класса.

Для меня было проблемой, не следует ли включить в книгу сравнения: их использование значительно упрощает решение ряда задач с целыми числами, особенно задач на делимость. Но я пришел к выводу, что на уровне школьных и районных олимпиад этого делать не стоит. Читатель, интересующийся сравнениями и их применением при решении задач, может познакомиться с ними, например, по статье [91].

Многие известные математики как настоящего, так и прошлого в юности прошли через увлечение задачами с целыми числами, а для некоторых из них это увлечение со временем превратилось в научные исследования по теории чисел. И если вам нравятся такие задачи, то, естественно, эта книга – для вас.

Желаю успеха!

Е. В. Галкин

Условные обозначения

7–9 — в заголовке параграфа (или части параграфа): он предназначен для учащихся 7–9 классов.

в — в номере источника из списка литературы к параграфу: важный источник, который нужно использовать в первую очередь.

о — в номере задачи: опорная задача, утверждение которой следует использовать при решении нескольких последующих задач.

* — в номере задачи (или параграфа): задача (или задачи) повышенной трудности.

△ — начало решения задачи.

▲ — окончание решения задачи.

§ 1. Восстановление знаков действий 5–7

Литература: [33], [52в], [63], [82в].

Рассмотрим задачи на запись натуральных чисел с помощью определенных цифр, например, четырех двоек, знаков арифметических действий: сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, а также скобок.

Такая задача нередко имеет несколько ответов. Достаточно найти один из них, если только условие не требует найти все.

1. У Коли в тетради написано:

$$8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 = 1000.$$

Оказывается, он в некоторых местах забыл поставить знаки сложения. Где именно?

2. Коля написал:

$$21 : 8 - 5 \cdot 2 + 6 : 3 = 16.$$

Потом выяснилось, что он забыл поставить скобки. В каких местах?

3. В записи

$$9 \cdot 6 + 14 : 2 + 2 : 3 + 7 = 22$$

расставьте две пары скобок так, чтобы получилось верное равенство.

4. В записи

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 = 615$$

расставьте знаки сложения так, чтобы получилось верное равенство.

5. В записи

$$9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9$$

поставьте знаки сложения и вычитания так, чтобы значение получившегося выражения было равно 1998.

6. Расставьте знаки сложения между цифрами

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

так, чтобы в сумме получилось число 100.

7. В примере

$$9 * 7 * 3 * 5 * 2 = 10$$

поставьте вместо каждой из звездочек знаки сложения или вычитания так, чтобы равенство было верным.

8. Найдите все натуральные числа, которые можно записать четырьмя единицами, употребляя только знаки сложения или вычитания.

9. Расставьте знаки сложения или вычитания между цифрами

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7$$

так, чтобы в результате получилось число 55.

10. В записи

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 = 100$$

замените каждую из звездочек знаками арифметических действий и расставьте скобки так, чтобы получилось верное равенство.

△ Очевидно, обойтись только знаками сложения и вычитания здесь не удастся. Значит, нужно использовать еще и знак умножения.

Подойдет, например, такая расстановка:

$$1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$$

Ответ: например, $1 \cdot (2 + 3) \cdot 4 \cdot 5 = 100$. ▲

11. Запишите число 1000 шестью тройками, используя знаки арифметических действий.

12. Используя знаки арифметических действий и скобки, запишите число 100:
а) пятью пятерками; б) четырьмя пятерками.

13. Расставьте знаки сложения и вычитания между цифрами

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

так, чтобы в результате получилось число 100.

△ Подойдет, например, такая расстановка:

$$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100.$$

Ответ: например, $123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$. ▲

14. Поставьте знаки сложения и вычитания между цифрами

$$9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1$$

так, чтобы значение получившегося выражения было равно 100.

15. Можно ли, используя знаки арифметических действий и скобки, записать число 100:
а) пятью тройками; б) четырьмя тройками?

16. Применяя знаки арифметических действий, запишите тремя двойками числа:
а) 1; б) 2; в) 3.

17. Четырьмя двойками с помощью знаков арифметических действий запишите выражения, значения которых равны:
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 8; з) 9; и) 10.

18. Применяя знаки арифметических действий и скобки, запишите число 200:
а) 5; б) 7; в) 8; г) 9 двойками.

19. Применяя знаки арифметических действий и скобки, запишите четырьмя семерками числа:
а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5; е) 6; ж) 7; з) 8; и) 9; к) 10.

20. Пользуясь знаками арифметических действий, запишите двумя двойками наибольшее натуральное число.

△ Запишем с помощью двух двоек все натуральные числа. Их немного:

$$2 + 2 = 4, \quad 2 \cdot 2 = 4, \quad 2^2 = 4, 22.$$

Наибольшим из них является число 22. Интересно, что для его записи знаки арифметических действий вообще не понадобились.

Ответ: 22. ▲

21. Применяя знаки арифметических действий, запишите двумя четверками наибольшее натуральное число.

22*. Не применяя явно знаки арифметических действий, запишите наибольшее натуральное число тремя:
а) двойками; б) тройками; в) пятерками.

23. Не применяя явно знаки арифметических действий, запишите наибольшее натуральное число четырьмя единицами.

§ 2. Восстановление цифр натуральных чисел 5–8

Литература: [31], [43], [48[в]], [52[в]], [55[в]].

Здесь мы встретимся с задачами на арифметические действия над натуральными числами, где часть цифр чисел известна, а большая часть нет. Будем обозначать неизвестные цифры звездочками. Нужно найти все цифры, обозначенные звездочками; если ответов несколько, то требуется найти их в с е.

Любопытно проследить, как в задаче, где порой известны две-три, а то и одна цифра, а неизвестных цифр довольно много, удается найти эти цифры — почти из ничего получить все.

В задачах этого параграфа предполагается, что *первая цифра каждого числа отлична от нуля*.

2.1. 5–7

Задачи такого рода уже встречались в книге [18] (см. § 7, задачи 168–171).

Сначала рассмотрим несколько задач с коротким решением.

24. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} **\\ +\;\;\; \\ ** \\ \hline *97. \end{array}$$

△ Чему равна первая цифра суммы? Очевидно, только 1, поскольку слагаемые — числа двузначные.

А какими могут быть эти слагаемые? Если попробовать сложить, например, 96 и 91, то получится 187 — слишком мало. Нужно брать максимально возможные слагаемые:

$$99 + 98 = 197.$$

Если хотя бы одно из этих двух слагаемых уменьшить, то сумма станет меньшей 197.

Ответ: 99 + 98 = 197. ▲

25. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} -\,***\\ **\\ \hline 1. \end{array}$$

26. Восстановите запись:

$$91 \times ** = ***.$$

27. Существуют ли такие цифры, обозначенные звездочками, что

$$\begin{array}{r} +\,***\\ ***\\ \hline *999? \end{array}$$

28. Восстановите запись:

$$*3 \cdot 3* = 3**.$$

△ Какова первая цифра первого множителя? Так как первая цифра произведения 3, то она может быть равна только 1.

Найдем вторую цифру второго множителя. Если она равна 1, то получим: $13 \cdot 31 = 403$ — много. Следовательно, она меньше 1, т. е. равна 0.

Ответ: $13 \cdot 30 = 390$. ▲

29. Восстановите запись:

$$** \cdot * - * = 1.$$

30. Восстановите запись:

$$**1 \cdot 9 = ***.$$

31. Сколько всего решений имеет задача? Восстановите запись:

$$*** \cdot 9 = ***.$$

32. Восстановите запись:

а) $$\begin{array}{r} \times\,643\\ **\\ \hline ***\\ +\,***\\ \hline ****, \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} \times\,37\\ 2*\\ \hline ***\\ +\,**\\ \hline **2. \end{array}$$

33. В поврежденной рукописи в числовом примере удалось разобрать только одну цифру и два знака арифметических действий, остальные, неразличимые, цифры обозначены звездочками:

$$\begin{array}{r} \ast\ast \\ \times\ \ast 8 \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast\ \ \\ \hline \ast\ast\ast\ast. \end{array}$$

Восстановите пример полностью.

△ Обратим внимание, что при умножении первого множителя на 8 получается число двузначное, а при умножении его на первую цифру второго множителя — число трехзначное. Значит, первая цифра второго множителя равна 9.

Теперь попробуем узнать весь первый множитель. Если он равен 10 или 11, то этого мало, поскольку при умножении на 9 должно получиться трехзначное число. А вот число 12 подходит:

$$12 \cdot 8 = 96, \quad 12 \cdot 9 = 108.$$

А число 13? Нет, поскольку $13 \cdot 8 = 104$.

Ответ: $12 \cdot 98 = 1176$. ▲

34. Восстановите запись:

а) $$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast 0 \\ +\ \ast\ast 0\ \ \\ \hline 2\ast\ast\ast, \end{array}$$

б) $$\begin{array}{r} 6\ast \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast\ast\ \ \\ \hline \ast\ast 6, \end{array}$$

в) $$\begin{array}{r} \ast 2\ast \\ \times\ \ast 7 \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast\ast\ \ \\ \hline \ast\ast\ast\ast 8. \end{array}$$

35. Найдите неизвестные цифры в записи:

$$\begin{array}{r} 19 \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast\ast\ \ \\ \hline \ast\ast 0\ast. \end{array}$$

△ Первая цифра суммы может быть равна только 1. Тогда первая цифра второго слагаемого — 9. Отсюда первая цифра второго множителя равна 5, а следовательно, второе слагаемое — 95.

Тогда первая цифра первого слагаемого равна 5. Поэтому вторая цифра второго множителя равна 3.

Ответ: $19 \cdot 53 = 1007$. ▲

36. Восстановите записи:

а) $$\begin{array}{r} \ast\ast\ast \\ \times\quad \ast 8 \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast\ast 0 \end{array},$$

б) $$\begin{array}{r} \ast\ast \\ \times\quad \ast\ast \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast 7 \\ \hline \ast\ast\ast\ast \end{array},$$

в) $$\begin{array}{r} \ast\ast\ast \\ \times\quad \ast 8 \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast 5 \\ \hline \ast\ast\ast\ast\ast \end{array}.$$

37. В примере на умножение

$$\begin{array}{r} \ast\ast\ast 3 \\ \times\quad \ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast 7 \\ +\ \ast\ast\ast\ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast\ast\ast\ast \end{array}$$

допущена ошибка. Откуда это видно?

До сих пор мы встречались главным образом с задачами на умножение. Перейдем теперь к задачам на деление.

38. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r|l} -\ast\ast 8 & \ast\ast \\ \cline{2-2} 2\ast & \ast 7 \\ \cline{1-1} -\ast\ast\ast & \\ \ast\ast\ast & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}.$$

△ Сначала найдем вторую цифру делителя. Так как она при умножении на 7 дает число, оканчивающееся на 8, то эта цифра равна 4.

А чему равна первая цифра делителя? Очевидно, 1 или 2.

Если первая цифра делителя 1, то 14 при умножении на 7 дает двузначное число 98, а должно давать трехзначное число. Значит, этот случай невозможен.

Пусть первая цифра делителя равна 2. Найдем первую цифру частного. Она равна 1, поскольку 24 при умножении на эту цифру дает число 2∗. Наконец, делимое легко найти, умножая делитель 24 на частное 17.

Ответ: 408 : 24 = 17. ▲

39. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r|l} -\ast\ast\ast\ast\ast & \ast\ast \\ \cline{2-2} \ast\ast\ast & \ast 8 \ast \\ \cline{1-1} -\ast\ast\ast & \\ \ast\ast & \\ \cline{1-1} -\ast\ast\ast & \\ \ast\ast\ast & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}.$$

40. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 7 для того, чтобы получить число, записывающееся одними девятками?

△ Будем искать это число с помощью деления

$$9999\ldots \; \underline{|\;7\;\;}\,.$$

Однако частное здесь неизвестно, а у делимого неизвестно число девяток. Выполним деление на 7, приписывая к делимому девятки до тех пор, пока деление не выполнится без остатка в первый раз. Получим:

$$\begin{array}{l|l}
999999 & \underline{\;7\;\;\;\;} \\
\underline{\;\;29} & 142857 \\
\underline{\;\;\;19} & \\
\underline{\;\;\;\;59} & \\
\underline{\;\;\;\;\;39} & \\
\underline{\;\;\;\;\;\;49} & \\
\;\;\;\;\;\;\;0. &
\end{array}$$

Ответ: на 142857. ▲

41. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 333667 для того, чтобы получить число, записывающееся одними восьмерками?

42. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 12345679 для того, чтобы получить число, состоящее из одних пятерок?

2.2. — 7–8

43. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r}
{**} \\
\times\; {**} \\
\hline
{**} \\
+\; {*}1 \\
\hline
{****}.
\end{array}$$

△ Как видно из сложения, первая цифра произведения равна 1. Тогда первая цифра второго слагаемого равна 9, а само слагаемое — 91.

Число 91 можно представить в виде произведения двузначного числа на однозначное двумя способами: $91 \cdot 1$ или $13 \cdot 7$.

В первом случае получаем произведение $91 \cdot 11 = 1001$.

Во втором случае, поскольку первая цифра первого слагаемого может быть равна только 9, у второго множителя не только первая, но и вторая цифра равна 7.

Ответ: $91 \cdot 11 = 1001$ или $13 \cdot 77 = 1001$. ▲

44. Восстановите запись:

а) $$\begin{array}{r} \ast\ast \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast 7 \\ \hline \ast\ast\ast\ast \end{array},$$ б) $$\begin{array}{r} 2\ast \\ \times\ \ast\ast \\ \hline 9\ast \\ +\ \ast 9 \\ \hline \ast\ast\ast \end{array},$$ в) $$\begin{array}{r} 58 \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast \\ \hline 5\ast\ast\ast \end{array},$$ г) $$\begin{array}{r} 1\ast \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast 1 \end{array}.$$

45. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \ast\ast\ast \\ \times\ \ast 8 \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast\ast 0 \end{array}.$$

△ Первая цифра второго множителя равна 9. Первая цифра первого множителя — 1, а последняя его цифра — 0 или 5.

Найдем среднюю цифру первого множителя. Он имеет вид $1 \ast 0$ или $1 \ast 5$. Какие числа этого вида при умножении на 8 дают число трехзначное, а при умножении на 9 — четырехзначное? С помощью перебора устанавливаем, что это соответственно числа 120 и 115.

Ответ: $120 \cdot 98 = 11760$ или $115 \cdot 98 = 11270$. ▲

46. Восстановите запись:

а) $$\begin{array}{r} \ast 2\ast \\ \times\ \ast 7 \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast\ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast\ast 8 \end{array},$$ б) $$\begin{array}{r} \ast 19 \\ \times\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast\ast \\ +\ \ast\ast \\ \hline \ast\ast 0\ast \end{array},$$ в) $$\begin{array}{r} \ast 0\ast \\ \times\ \ast\ast\ast \\ \hline 5\ast\ast \\ +\ \ast 0\ast \\ \hline 5\ast\ast\ast 5 \end{array}.$$

47*. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r|l} \ast\ast\ast\ast 5 & \ast\ast \\ \cline{2-2} -\ \ast 7 & \ast\ast\ast \\ \cline{1-1} \ast\ast\ast \\ -\ \ast\ast\ast \\ \cline{1-1} 0 \end{array}.$$

△ Очевидно, что средняя цифра частного равна 0.

Присмотримся к первому вычитанию: когда разность между трехзначным числом $\ast\ast\ast$ и двузначным числом $\ast 7$ равна однозначному числу? Только тогда, когда первая цифра уменьшаемого равна 1, а первая цифра вычитаемого — 9. Итак, вычитаемое равно 97.

Но 97 — число простое. Поэтому делитель равен 97, а первая цифра частного — 1. Кроме того, последняя цифра частного равна 5.

Ответ: $10185 : 97 = 105$. ▲

48*. Восстановите запись:

а)
```
_****|*7
 **5  **
 ----
  _**
   **
   --
    0,
```

б)
```
_******|**
 **     ***4
 ---
  _***
    **
   ---
    _**
     **
     --
      0.
```

49*. Восстановите деление с остатком:

```
_***|**
  **  *
  --
   *,
```

где все девять цифр различны.

§ 3. Числовые ребусы **5–9**

Литература: [48[В]], [52], [55], [94[В]], [97[В]].

Задачи на числовые ребусы — это те же знакомые нам задачи на восстановление записи при выполнении действий над натуральными числами, только цифры обозначаются не звездочками, а буквами. При этом добавляется важное условие: в одной и той же задаче *одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры*. Кроме того, *первая цифра* каждого числа должна быть *отличной от нуля*. Если задача имеет не один ответ, требуется найти их все.

Такие задачи уже встречались в книге [18] (§ 7, задачи 175–178).

3.1. **5–7**

50. Восстановите запись:

$$AB \cdot AB = ACC.$$

△ Давайте подумаем: когда произведение $AB \cdot AB$ начинается той же цифрой A, что и число AB? Это возможно только при $A = 1$.

А когда такое произведение оканчивается двумя одинаковыми цифрами? Это возможно в двух случаях:

$$10 \cdot 10 = 100, \quad 12 \cdot 12 = 144.$$

Но первый вариант отпадает, так как тогда $B = C = 0$, а разные буквы должны обозначать разные цифры.

Ответ: $12 \cdot 12 = 144$. ▲

51. Восстановите записи:

а) $AA + AA = BAC$; б) $КИС + КСИ = ИСК$.

52. Решите ребусы:

а) $AB \cdot A = CCC$; б) $A \cdot B \cdot AB = BBB$; в) $AA \cdot ABC \cdot BC = ABCABC$.

53. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{КОКА}\\ \text{КОЛА}\end{array} \\ \hline \text{ВОДА.}\end{array}$$

△ Присмотримся к последнему столбцу: в нем стоит одна и та же цифра А. Чему же она равна? Только нулю.

А теперь обратим внимание на второй столбец: в нем аналогичное положение с цифрой О. Отсюда О равна нулю или 9. Но первая возможность отпадает; остается $О = 9$.

Для нахождения К рассмотрим первый столбец. Очевидно, К отлична от нуля и не превосходит 4. Тогда К принимает одно из значений 1, 2, 3, 4. Разберем четыре случая.

1) Пусть $К = 1$.

Получаем, что в третьем столбце $Л = 9$, поскольку во втором столбце должно быть $9 + 9 + 1 = 19$. Но тогда $Д = 0$, а это невозможно.

2) Пусть $К = 2$.

Подставим в ребус значения $К = 2$, $А = 0$, $О = 9$.

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}2920\\ 29\text{Л}0\end{array} \\ \hline \text{В}9\text{Д}0.\end{array}$$

Из третьего столбца

$$2 + Л = 10 + Д, \quad Л = 8 + Д.$$

Отсюда $Д = 0$ или $Д = 1$, соответственно $Л = 8$ или $Л = 9$. Но обе эти возможности исключаются.

3) Пусть $К = 3$.

Получаем:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}3930\\ 39\text{Л}0\end{array} \\ \hline \text{В}9\text{Д}0.\end{array}$$

Тогда

$$3 + Л = 10 + Д, \quad Л = 7 + Д,$$

а значит, $Д = 1$, $Л = 8$. Кроме того, $В = 7$.

4) Пусть $К = 4$.

Следовательно, $В = 9$. Но последнее невозможно.

Итак, решение получается только в третьем случае.

Ответ: $3930 + 3980 = 7910$. ▲

54. Восстановите запись:

$$ДА \cdot МА = ЯЯЯ.$$

55. Восстановите записи:

а) $\begin{array}{r} \text{ОХОХО} \\ +\text{АХАХА} \\ \hline \text{АХАХАХ} \end{array}$, б) $\begin{array}{r} \text{УДАР} \\ +\text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАКА} \end{array}$.

56. Ребус

$$\begin{array}{r} \text{ШАРИК} \\ +\text{МУРКА} \\ \hline \text{ДРУЗЬЯ} \end{array}$$

не имеет решения. Почему?

57*. Имеют ли решение ребусы:

а) АВС = АВ · ВС; б) АВСК = АВ · СК?

58*. Решите ребусы:

а) РЕКА · 7 = МОРЕ; б) НАЛИМ · 4 = ЛИМАН; в) ОКУНЬ · 8 = СУДАК.

59*. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r} \text{*******К} \\ \times \qquad \text{К} \\ \hline \text{ААААААААА} \end{array}.$$

3.2 7–9

60. Решите ребус:

$$\text{СИ} \cdot \text{СИ} = \text{СОЛЬ}.$$

△ Основание квадрата и сам квадрат начинаются с одной и той же буквы С. Это возможно только при С = 1 и С = 9. Но первый вариант отпадает, так как в этом случае квадрат числа СИ трехзначен. Остается С = 9.

Найдем цифру И. Минимальное значение И, при котором квадрат числа 9И начинается с цифры 9, есть И = 5 : $95^2 = 9025$, но в этом случае И = Ь, что невозможно. Проверим еще случаи СИ = 96, СИ = 97 и СИ = 98. Подходит только СИ = 98.

Ответ: 98 · 98 = 9604. ▲

61. Решите ребусы:

а) $\text{СИГ}^2 = \text{СЕМГА}$; б) $\text{СОМ}^2 = \text{ОГОГО}$.

62. Восстановите запись:

$$\text{ААА}^{\text{А}} = \text{********}.$$

63. Решите ребусы:

а) $\text{ЯП}^{\text{О}} = \text{НИЯ}$; б) $\text{И}^{\text{Н}} = \text{ДИЯ}$; в) $\text{С}^{\text{О}} = \text{РОКА}$.

64. Решите ребус:

$$\text{С}^{\text{С}^{\text{СР}}} = \text{РФ}.$$

65. Восстановите запись:

$$\text{ТОРГ} \cdot \text{Г} = \text{ГРОТ}.$$

△ Цифра Т является цифрой единиц квадрата числа Г. Следовательно, Т может принимать значения 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Но значения Т = 0 и Т = 5 нужно сразу отбросить. Разберем остальные четыре возможности. При этом нужно учитывать, что на основании условия Г > Т.

1) Пусть Т = 1.

Тогда Г = 9. Для нахождения О и Р подставим в ребус значения Т = 1, Г = 9:

$$1\text{ОР}9 \cdot 9 = 9\text{РО}1.$$

Развернем это равенство, заменяя четырехзначные числа их разложениями по степеням 10:

$$(1000 + 100 \cdot \text{О} + 10 \cdot \text{Р} + 9) \cdot 9 = 9000 + 100 \cdot \text{Р} + \text{О} + 1,$$

$$9000 + 900 \cdot \text{О} + 90 \cdot \text{Р} + 81 = 9001 + 100 \cdot \text{Р} + 10 + \text{О},$$

$$890 \cdot \text{О} + 80 = 10\text{Р}, \quad \text{Р} = 89 \cdot \text{О} + 8.$$

Отсюда О равно нулю, а Р – 8. Получаем: $1089 \cdot 9 = 9801$.

2) Пусть Т = 4.

Тогда Г = 2 или Г = 8. Но Г = 2 исключается, поскольку Г должно быть большим, чем Т, а при Г = 8 будем иметь:

$$4\text{ОР}8 \cdot 8 = 8\text{РО}4.$$

Последнее равенство невозможно, так как его левая часть — число пятизначное, а правая — четырехзначное.

3) Пусть Т = 6.

В этом случае Г = 4. Получилось, что Г < Т, что невозможно.

4) Пусть Т = 9. Тогда Г = 3 или Г = 7, а это также исключается.

Ответ: $1089 \cdot 9 = 9801$. ▲

66. Решите ребусы:

а) $\begin{array}{r} \text{ОДИН} \\ +\ \text{ОДИН} \\ \hline \text{МНОГО} \end{array}$, б) $\begin{array}{r} \text{ДРАМА} \\ +\ \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$, в) $\begin{array}{r} \text{ТРОПКА} \\ +\ \text{ТРОПКА} \\ \text{ТРОПКА} \\ \hline \text{ДОРОЖКА} \end{array}$.

67*. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{БАЛЕТ}\\ \text{БАЛЕТ}\end{array}\\ \hline \text{ТЕАТР.}\end{array}$$

68. Рассмотрим запись:

$$\begin{array}{r} \text{ЕЛКА}\\ +\ \text{ЕЛКА}\\ \text{ЕЛКА}\\ \hline \text{ЛЕСОК.}\end{array}$$

Из какого наименьшего количества елок может состоять ЛЕСОК? (Буквы Е и Ё означают одну и ту же цифру.)

69*. Решите ребус:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{ГОРА}\\ \text{ОГОНЬ}\end{array}\\ \hline \text{ВУЛКАН.}\end{array}$$

△ Три цифры можно найти сразу:

$$\text{В} = 1, \quad \text{У} = 0, \quad \text{О} = 9.$$

Найдем цифру К. Так как она получается при сложении 9 с 9 и, разумеется, отлична от 9, то К = 8.

Дальнейшее решение сводится к восстановлению записи:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{Г9РА}\\ \text{9Г9НЬ}\end{array}\\ \hline \text{10Л8АН.}\end{array}$$

Отсюда РА + НЬ = АН, Г + Г + 1 = Л + 10, 2Г = Л + 9.

Из последнего равенства следует, что цифра Л нечетна. Кроме того, она отлична от 1 и 9. Тогда она может принимать значения 3, 5 и 7.

1) Пусть Л = 3.

Значит, Г = 6.

Теперь присмотримся к равенству

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{РА}\\ \text{НЬ}\end{array}\\ \hline \text{АН.}\end{array}$$

Мы уже использовали цифры 0, 1, 3, 6, 8, 9. Следовательно, для цифр Р, А, Н и Ь остались значения 2, 4, 5 и 7.

Из последнего равенства видно, что значение 7 может принимать только цифра А. Тогда Р = 2, Н = 4 или Р = 4, Н = 2, а значит, Ь = 5. Но так как из последнего столбца Н = 2, то выполняется только вторая возможность: Р = 4, Н = 2. Получим:

$$6947 + 96925 = 103872.$$

2) Пусть Л = 5.

В этом случае Г = 7.

Тогда цифры Р, А, Н и Ь из последнего ребуса принимают значения 2, 3, 5 и 6. При этом А = 6. Но если Ь принимает значение 2, 3 или 4, то сумма А + Ь второго столбца равна соответственно 8, 9 или 10, что невозможно.

3) Пусть Л = 7.

Тогда Г = 8. Получилось, что К = Г. Следовательно, этот случай также невозможен.

Ответ: 6947 + 96925 = 103872. ▲

70*. Решите ребусы:

а) $\begin{array}{r} +\text{ВОБЛА} \\ \text{ВОБЛА} \\ \hline \text{ПЛОТВА,} \end{array}$ б) $\begin{array}{r} +\text{ВАГОН} \\ \text{ВАГОН} \\ \hline \text{СОСТАВ,} \end{array}$ в) $\begin{array}{r} +\text{КРОСС} \\ \text{КРОСС} \\ \hline \text{СПОРТ,} \end{array}$ г) $\begin{array}{r} +\text{ШАЙБУ} \\ \text{ШАЙБУ} \\ \hline \text{ХОККЕЙ.} \end{array}$

71*. Восстановите запись:

$$\frac{\text{ТРИ}}{\text{ПЯТЬ}} = \frac{3}{5}.$$

В заключение рассмотрим несколько иные задачи, связанные с обозначением цифр буквами.

72. Число КУБ является кубом натурального числа, а число БУК простое. Какие это числа, если одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры?

73*. Числа ТРИ, СТИХ и СПОРТ, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры, являются соответственно квадратом, кубом и четвертой степенью некоторых натуральных чисел. Что это за числа?

74*. Докажите неравенство:

$$\text{ДВА} \cdot \text{ШЕСТЬ} < \text{ДВАДЦАТЬ},$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

75*. Число БАОБАБ, где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры, делится на 101. Какое это число?

§ 4. Четные и нечетные числа 6–9

Литература: [22], [33], [43], [82[В]].

Обычно четные и нечетные числа связывают только с натуральными числами. Здесь мы распространим их на любые целые числа.

Целое число называется *четным*, если оно делится на 2, и *нечетным*, если оно на 2 не делится.

Например, число 6 — четное, число 0 — четное, 5 — нечетное, число –1 — тоже.

Любое четное число можно представить в виде $2a$, а любое нечетное — в виде $2a + 1$ (или $2a - 1$), где число a — целое.

Два целых числа называются *числами одинаковой четности*, если оба они четные или оба нечетные. Два целых числа называются *числами разной четности*, если одно из них четное, а другое нечетное.

Рассмотрим свойства четных и нечетных чисел, важные для решения задач.

1. *Если хотя бы один множитель произведения двух (или нескольких) чисел четен, то и все произведение четно.*

2. *Если каждый множитель произведения двух (или нескольких) чисел нечетен, то и все произведение нечетно.*

3. *Сумма любого количества четных чисел — число четное.*

4. *Сумма четного и нечетного чисел — число нечетное.*

5. *Сумма любого количества нечетных чисел — число четное, если число слагаемых четно, и нечетное, если число слагаемых нечетно.*

Как убедиться в справедливости этих свойств? Например, для свойства 4 это можно сделать так:

$$2a + (2b + 1) = (2a + 2b) + 1.$$

Но число $2a + 2b$ — четное как сумма двух четных чисел (свойство 3), а тогда вся сумма — число нечетное, так как на 2 не делится.

Проведите аналогичные рассуждения, скажем, для свойства 5, взяв суммы двух и трех нечетных чисел.

76. Петя собирал грибы вдоль полотна железной дороги и при этом 11 раз пересек полотно. По одну или по разные стороны от полотна железной дороги находятся Петя и его дом?

77. Участники туристского похода решили при отъезде обменяться друг с другом фотографиями. Четно или нечетно общее число фотографий, которыми обменялись туристы?

78. Произведение трех целых чисел нечетно. Четна или нечетна их сумма?

79. Сумма 15 натуральных чисел четна. Верно ли, что среди них обязательно имеется четное число?

80. Можно ли 33 яблока разложить на пять кучек так, чтобы число яблок в каждой кучке было четным?

81. 75 лошадей расставили в 24 конюшнях. Может ли число лошадей в каждой из конюшен быть нечетным?

82. Сумма двух целых чисел нечетна. Четно или нечетно их произведение?

83. Четна или нечетна сумма всех натуральных чисел от 1 до 17?

△ Из 17 натуральных чисел 8 четных:

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16,$$

остальные 9 нечетны. Сумма всех этих четных чисел четна (свойство 3), сумма нечетных нечетна (свойство 5). Тогда сумма всех 17 чисел нечетна как сумма четного и нечетного чисел (свойство 4).

Ответ: нечетна. ▲

84. Четна или нечетна сумма:

а) всех натуральных чисел от 1 до 1998;

б) всех нечетных чисел от 1 до 151?

85. На доске написано 11 натуральных чисел. Всегда ли можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся 10 чисел была числом четным?

86. В пятиэтажном доме с четырьмя подъездами подсчитали число жителей на каждом этаже и, кроме того, в каждом подъезде. Могут ли все полученные 9 чисел быть нечетными?

△ Обозначим число жителей на этажах соответственно через a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, а число жителей в подъездах соответственно через b_1, b_2, b_3, b_4. Тогда общее число жителей дома можно подсчитать двумя способами — по этажам и по подъездам:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4.$$

Если бы все эти 9 чисел были нечетными, то сумма в левой части записанного равенства была бы нечетной, а сумма в правой части — четной. Следовательно, это невозможно.

Ответ: не могут. ▲

87. Можно ли 12 целых чисел расположить в строчку так, чтобы:

а) сумма любых трех соседних чисел была нечетной, а сумма любых четырех соседних чисел — четной;

б) сумма любых трех соседних чисел была четной, а сумма любых четырех соседних чисел — нечетной?

88. Школьник сложил три последовательных натуральных числа, затем три следующих числа и полученные суммы перемножил. У него получилось число 791. Не ошибся ли он? Почему?

89. В футбольном турнире в один круг участвуют 15 команд. Докажите, что в любой момент турнира найдется команда, которая сыграла к этому моменту четное число матчей (может быть, ни одного).

90. Четно или нечетно произведение

$$(7a + b - 2c + 1)(3a - 5b + 4c + 10),$$

где числа a, b, c — целые?

△ Можно перебирать случаи, связанные с четностью или нечетностью чисел a, b и c (8 случаев!), но проще поступить иначе. Сложим множители:

$$(7a + b - 2c + 1) + (3a - 5b + 4c + 10) = 10a - 4b + 2c + 11.$$

Так как полученная сумма нечетна, то один из множителей данного произведения четен, а другой нечетен. Следовательно, само произведение четно.

Ответ: четно. ▲

91. Может ли произведение

$$(3a - 9b + c + 5)(2a + 3b - 7c + 1)(a + 6b + 4c - 2)$$

быть нечетным при каких-либо целых значениях a, b и c?

92. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25}$ — целые числа, а $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{25}$ — те же самые числа, взятые в другом порядке. Докажите, что число

$$(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)\ldots(a_{25} - b_{25})$$

является четным.

93°. Докажите, что *сумма и разность любых двух целых чисел имеют одинаковую четность*.

△ При доказательстве можно рассмотреть три случая: когда целые числа a и b четны, когда они нечетны и когда они имеют разную четность. Но проще сложить сумму $a + b$ с разностью $a - b$:

$$(a + b) + (a - b) = 2a.$$

Так как полученная сумма четна, то слагаемые $a + b$ и $a - b$ этой суммы могут быть только числами одинаковой четности: если бы они были числами разной четности, то по свойству 4 их сумма была бы числом нечетным, а это неверно. ▲

94. Четно или нечетно число

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + ... + 993\ ?$$

△ На основании утверждения задачи 93 разность $1 - 2$ имеет ту же четность, что и сумма $1 + 2$, разность $3 - 4$ — ту же четность, что и сумма $3 + 4$ и т. д. Поэтому данная сумма имеет ту же четность, что и сумма

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + ... + 993.$$

Дальше можно рассуждать так же, как и при решении задач 83 и 84. Из 993 слагаемых последней суммы 496 четных и 497 нечетных, следовательно, эта сумма нечетна.

Ответ: нечетно. ▲

95. Четны или нечетны числа:

а) $1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 + ... + 1999^2 + 2000^2 - 2001^2$;

б) $1 - 3 - 5 + 7 - 9 - 11 + ... + 607 - 609 - 611$?

96. Сережа написал на доске:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 33,$$

причем вместо каждой звездочки он поставил либо плюс, либо минус. Коля переправил несколько знаков на противоположные и в результате вместо числа 33 получил число 32. Верно ли, что по меньшей мере один из мальчиков ошибся при подсчете?

△ Если все звездочки заменить на плюсы, то полученная сумма будет нечетной (проверьте!), а, следовательно, и данная сумма — тоже. Поэтому по меньшей мере ошибся Коля.

Ответ: верно. ▲

97. Докажите, что для любых целых чисел $a_1, a_2, a_3, ... a_8$ число

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + ... + |a_8 - a_3| + |a_8 - a_1|$$

является четным.

98. На классной доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 49. Разрешается стереть любые два числа и вместо них написать одно — их разность. После 48 таких операций на доске осталось одно число. Может ли оно быть равным 10?

99. В парламенте некой страны две палаты с равным числом депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причем воздержавшихся не было. По окончании голосования председатель парламента объявил, что предложение принято большинством в 35 голосов. Тогда лидер оппозиции заявил, что результаты голосования подсчитаны неверно. Как он догадался?

100. Можно ли число 1 представить в виде суммы

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d},$$

где a, b, c, d — нечетные натуральные числа?

101*. На прямой расположено несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке. И т. д. Докажите, что после каждой такой операции общее число точек будет нечетным.

102*. Найдите все целые значения a, при которых число

$$x^3 + ax^2 + 5x + 9$$

нечетно для всех целых значений x.

103*. На семи карточках написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Затем карточки перевернули, перемешали и на обратных сторонах написали те же числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Числа, написанные на обеих сторонах каждой карточки, сложили и полученные суммы перемножили. Четно или нечетно полученное произведение?

△ Допустим, что произведение нечетно. Для этого все 7 множителей должны быть нечетными. Но тогда у четырех карточек, у которых на одной стороне написаны нечетные числа 1, 3, 5 и 7, на другой стороне должны быть числа четные. Однако четных чисел здесь только три.

Следовательно, этот случай невозможен.

Ответ: четно. ▲

104*. Докажите, что в любой компании число тех людей, которые знакомы с нечетным числом членов компании, четно.

4.2. 8–9

Рассмотрим серию задач, в формулировке которых четные и нечетные числа не упоминаются, но при решении важное значение имеет вопрос: четно или нечетно некоторое целое число, связанное с условиями задачи. Такое решение будем называть *проверкой на четность*.

Фактически подобные задачи являются задачами логического характера, которым посвящена книга [18]. Здесь в п. 4.1 такие задачи уже встречались (см. задачи 76, 88, 96, 98 и 99).

105. Дано 125 чисел, каждое из которых равно 1 или 3. Можно ли их разбить на две группы так, чтобы суммы чисел, входящих в каждую группу, были равны?

106. Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Гриша вырвал из разных мест книги 15 листов и сложил номера всех 30 вырванных страниц. У него получилось число 800. Когда он сказал об этом Мише, тот заявил, что Гриша при подсчете ошибся. Почему Миша прав?

107. По кругу сцепили несколько шестеренок. Смогут ли они одновременно вращаться, если их: а) 5; б) 6?

108. В шести коробках лежат шарики: в первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, в четвертой — 4, в пятой — 5, в шестой — 6. За один ход разрешается в любые две коробки прибавить по одному шарику. Можно ли за несколько ходов уравнять количество шариков во всех коробках?

△ Первоначально всего шариков в коробках

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

а после k ходов их станет $21 + 2k$. С другой стороны, общее число шариков в коробках в тот момент, когда во всех коробках шариков станет поровну, равно $6n$, где n — число шариков в одной коробке. Отсюда

$$21 + 2k = 6n.$$

Но это равенство невозможно при натуральных k и n, так как его правая часть четна, а левая нечетна.

Ответ: нельзя. ▲

109. В одной старинной рукописи приведено описание города, расположенного на 8 островах у берега моря. Острова между собой и с материком были соединены мостами. На материк вели 5 мостов, на 4 островах начинались по 4 моста, на трех островах — по 3 и на один остров вел только 1 мост. Докажите, что такое расположение мостов невозможно.

110. Докажите, что не существует многогранника, у которого 1997 граней — треугольники, а остальные грани — четырехугольники и шестиугольники.

111*. Окружность разделили на 40 равных дуг и в 40 точках деления поставили по шашке. Среди шашек 25 белых и 15 черных. Докажите, что среди шашек найдутся белая и черная, которые стоят на концах одного диаметра.

△ Допустим, что это неверно. Рассмотрим любую белую шашку и диаметр, на котором она стоит. Тогда, по нашему допущению, на другом конце этого диаметра должна стоять также белая шашка. Получается, что всего белых шашек (как и черных) четное число. Но последнее противоречит условию задачи. ▲

112*. Сумма номеров домов одного квартала равна 99, а соседнего квартала той же улицы — 117. Найдите номера всех домов этих кварталов.

113*. В некотором натуральном числе произвольно переставили цифры. Докажите, что сумма полученного числа с исходным не может быть равна 999...9 (125 девяток).

△ Обозначим исходное число через a, число, полученное после перестановки цифр, — через b.

Допустим, что равенство:

$$a + b = 999...9 \text{ (125 девяток)}$$

возможно. Тогда при сложении чисел a и b не может быть переноса единицы в следующий разряд. Так как суммы цифр чисел a и b равны, то сумма цифр у числа $a + b$ в два раза больше, чем у числа a, а значит, она четна. Но, с другой стороны, эта сумма равна $9 \cdot 125$, а, следовательно, нечетна. Мы получили противоречие. ▲

114*. Какое наибольшее количество натуральных чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была четной, а сумма любых четырех соседних чисел нечетной?

△ Обозначим последовательные натуральные числа строки через a_1, a_2, a_3 и т. д.

По условию суммы

$$a_1 + a_2 + a_3, \quad a_2 + a_3 + a_4, \quad a_3 + a_4 + a_5, \quad a_4 + a_5 + a_6$$

и другие четны. Вычитая из каждой суммы, начиная со второй, предыдущую, получаем, что разности

$$a_4 - a_1, \quad a_5 - a_2, \quad a_6 - a_3, \ldots$$

четны, а следовательно, имеют одинаковую четность пары чисел a_1 и a_4, a_2 и a_5, a_3 и a_6 и т. д.

Выпишем нечетные суммы, состоящие из четырех соседних чисел:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = (a_1 + a_2 + a_3) + a_4,$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = (a_2 + a_3 + a_4) + a_5,$$
$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (a_3 + a_4 + a_5) + a_6, \ldots$$

Отсюда следует, что числа a_4, a_5, a_6 и т. д. нечетны. Но тогда сумма $a_4 + a_5 + a_6$ нечетна, а это противоречит условию.

Полученное противоречие возникает всякий раз, когда чисел не меньше 6. Попробуем взять 5 чисел.

Рассуждая аналогично, устанавливаем, что числа a_4 и a_5 нечетны, а следовательно, по-предыдущему нечетны и числа a_1 и a_2. Тогда, так как сумма $a_1 + a_2 + a_3$ четна, то число a_3 четно.

Сделаем еще проверку и убедимся в том, что если взять пять чисел

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5,$$

где число a_3 четно, а остальные нечетны, то каждая из сумм

$$a_1 + a_2 + a_3, \quad a_2 + a_3 + a_4, \quad a_3 + a_4 + a_5$$

четна, а каждая из сумм

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

нечетна.

Ответ: 5. ▲

115. Найдите все целые p и q, при которых трехчлен

$$f(x) = x^2 + px + q$$

принимает при всех целых x: а) четные; б) нечетные значения.

§ 5. Признаки делимости 7–9

Литература: [15], [17], [27], [33], [58], [76].

Вспомним известное из школьного курса математики определение: говорят, что целое число *а делится* на целое число b, не равное нулю, если существует такое целое число m, что

$$a = bm.$$

Число a называется *делимым*, число b — *делителем*, число m — *частным*.

В этом случае говорят также, что число *а кратно* числу b.

Тот факт, что число a делится на число b, будем обозначать так:

$$a \vdots b.$$

А теперь вспомним признаки делимости натуральных чисел, докажем их, а также добавим к ним некоторые новые.

5.1. 7–8

116°. Докажите, что *делимость натурального числа на* 2 *равносильна тому, что его последняя цифра четная*.

Когда в математике говорят, что одно предложение *равносильно* другому, в данном случае — одна делимость равносильна другой, то имеют в виду следующее: из одной делимости следует вторая, а из второй — первая.

Вместо слова «равносильна» говорят также, что первая делимость выполняется *тогда и только тогда* (или *в том и только в том случае*), когда выполняется вторая.

△ Возьмем натуральное число a. Обозначим количество его десятков через b (не цифру, а количество десятков; например, у числа 3258 количество десятков равно 325), а последнюю цифру — через c. Тогда

$$a = 10b + c.$$

Число $10b$ всегда делится на 2. Поэтому если c делится на 2, то и a делится на 2, если a делится на 2, то и c делится на 2. Следовательно, четность числа a равносильна четности цифры c. ▲

117°. Докажите, что *делимость натурального числа на 5 равносильна тому, что его последняя цифра — 0 или 5.*

118°. Докажите, что *делимость натурального числа на 10 равносильна тому, что оно оканчивается цифрой 0.*

119°. Докажите, что *делимость натурального числа на 25 равносильна делимости на 25 числа, образованного двумя его последними цифрами.*

120°. Докажите, что *остаток от деления натурального числа на 3 (на 9) совпадает с остатком от деления суммы его цифр на 3 (на 9).*

△ Возьмем четырехзначное число $\overline{abcd}$ и представим его следующим образом:

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d =$$
$$= (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d).$$

Число $999a + 99b + 9c$ делится на 3 или на 9. Поэтому остаток от деления числа $\overline{abcd}$ на 3 (на 9) совпадает с остатком от деления на 3 (на 9) числа $a + b + c + d$ — суммы его цифр.

Хотя доказательство здесь дано для частного случая, когда число четырехзначно, оно носит общий характер, т. е. применимо без существенных изменений к натуральному числу с любым количеством цифр. ▲

Например, остаток от деления числа 123456 на 9 равен остатку от деления на 9 суммы его цифр

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21,$$

а значит, равен 3.

Из утверждения задачи 120 следует известный признак делимости на 3 и на 9: *делимость натурального числа на 3 (на 9) равносильна делимости на 3 (на 9) суммы его цифр.*

В самом деле, равенство нулю любого из двух остатков, о которых говорилось в задаче 120, равносильно равенству нулю другого остатка.

Перейдем к задачам на применение признаков делимости.

121. Найдите все значения цифры a, если число $\overline{875a}$ делится на 6.

△ Так как это число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3 и обратно.

Применим признак делимости на 3. Для этого найдем сумму цифр числа:

$$8 + 7 + 5 + a = 20 + a.$$

Из делимости $(20 + a)$:3 следует, что цифра a равна 1, 4 или 7. Но по признаку делимости на 2 эта цифра должна быть четной, поэтому подходит только $a = 4$.

Ответ: 4. ▲

122. Найдите цифру, обозначенную звездочкой, в числе 41875*, если это число делится на 18.

123. Существует ли цифра (одна и та же), которую нужно приписать к числу 97 слева и справа для того, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 27?

124. К числу 43 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 45. Найдите все решения.

△ Обозначим неизвестные цифры через a и b. Тогда четырехзначное число можно записать в виде $\overline{a43b}$.

По признаку делимости на 5 $b = 0$ или $b = 5$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $b = 0$.

Полученное число $\overline{a430}$ делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр, равная $a + 7$, делится на 9. Отсюда $a = 2$.

2) Пусть $b = 5$.

Аналогично находим, что $a = 6$.

Ответ: четырехзначное число равно 2430 или 6435. ▲

125. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{124xy}$ делится на 75.

126. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 0 и делится на 225.

127. Докажите, что ребус

АПЕЛЬСИН – СПАНИЕЛЬ = 1999

не имеет решения.

128. Делится ли число $8 \cdot 10^n + 7$ при натуральном n на 3? А на 9?

129. Докажите, что число 111...1 (27 единиц) делится на 27.

130°. Докажите, что разность между любым натуральным числом и суммой его цифр делится на 9.

131°. Докажите, что *делимость натурального числа на 4 равносильна делимости на 4 числа, образованного двумя его последними цифрами.*

△ Возьмем любое натуральное число a. Обозначим количество сотен в этом числе через b, а число, образованное двумя его последними цифрами, через $\overline{kl}$. Тогда

$$a = 100b + \overline{kl}.$$

Число $100b$ делится на 4. Следовательно, число a делится на 4 тогда и только тогда, когда число $\overline{kl}$ делится на 4. ▲

Например, число 3456 делится на 4, так как число 56 делится на 4, а число 8642 не делится на 4, так как 42 не делится на 4.

Подумайте над обобщением утверждения задачи 131: как быстро найти остаток от деления натурального числа на 4?

132°. Докажите, что *делимость натурального числа на 8 равносильна делимости на 8 числа, образованного тремя его последними цифрами.*

133. Докажите, что делимость натурального числа на 2^k ($k \in N$) равносильна делимости на 2^k числа, образованного k его последними цифрами.

(Это предложение является обобщением признаков делимости на 2, 4 и 8 из задач 116, 131 и 132.)

134. К числу 41 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное четырехзначное число делилось на 36. Найдите все решения.

△ Обозначим неизвестные цифры через x и y. Применим к числу $\overline{x41y}$ признак делимости на 4:

$$\overline{1y} \vdots 4.$$

Тогда $y = 2$ или $y = 6$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $y = 2$.

Получим число $\overline{x412}$. На основании признака делимости на 9

$$(x + 4 + 1 + 2) \vdots 9, \quad (x + 7) \vdots 9.$$

Отсюда $x = 2$.

2) Пусть $y = 6$.

Тогда

$$\overline{x416} \vdots 9, \quad (x + 4 + 1 + 6) \vdots 9, \quad (x + 11) \vdots 9.$$

Следовательно, $x = 7$.

Ответ: четырехзначное число равно 2412 или 7416. ▲

135. Найдите две цифры, обозначенные звездочками, если число $\overline{815{*}{*}6}$ делится на 468. Укажите все решения.

136. Найдите цифру a, если число $\overline{49a68}$ делится на 8. Укажите все решения.

137. Докажите, что число 444...4 (n четверок) не делится на 8 ни при каком натуральном n.

138. Найдите цифры a и b, если число $\overline{5a6b2}$ делится на 72. Укажите все решения.

139. Найдите все значения цифр x и y, если число $\overline{4x87y6}$ делится на 56.

5.2. 8–9

140°. Докажите, что *делимость натурального числа на 11 равносильна делимости на 11 разности между суммой его цифр, стоящих на нечетных местах, и суммой цифр, стоящих на четных местах* (другими словами, делимости на 11 знакочередующейся суммы всех его цифр).

△ Возьмем пятизначное число $\overline{abcde}$ и представим его в следующем виде:

$$\begin{gathered}\overline{abcde} = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e = \\ = (9999 + 1)a + (1001 - 1)b + (99 + 1)c + (11 - 1)d + e = \\ = 9999a + a + 1001b - b + 99c + c + 11d - d + e = \\ = (9999a + 1001b + 99c + 11d) + (a - b + c - d + e).\end{gathered}$$

Сумма в первых скобках делится на 11, так как каждое ее слагаемое делится на 11. (Проверьте, что 1001 делится на 11.) Получаем, что число $\overline{abcde}$ делится на 11 в том и только в том случае, когда сумма во вторых скобках делится на 11. Но эта сумма — разность между суммой $a + c + e$ цифр числа, стоящих на нечетных местах, и суммой $b + d$ цифр, стоящих на четных местах, или знакочередующаяся сумма $a - b + c - d + e$ всех цифр числа.

Мы провели доказательство признака делимости на 11 для пятизначного числа. Доказательство для числа с любым количеством цифр основано на том, что или разность $10^n - 1$, или сумма $10^n + 1$ при натуральном n делится на 11. Первое выполняется при четном n (например, при $n = 2$ и $n = 4$), второе — при нечетном n (например, при $n = 1$ и $n = 3$).

Действительно, пусть n четно: $n = 2k$. Тогда

$$10^n - 1 = 10^{2k} - 1 = 100...0 - 1 = 999...9.$$

Последнее число записывается $2k$ девятками, а следовательно, его можно разбить на грани по две девятки в каждой. Но число 99 делится на 11.

Пусть теперь n нечетно: $n = 2k + 1$. Преобразуем сумму $10^n + 1$ так:

$$10^n + 1 = 10^{2k+1} + 1 = (10^{2k+1} - 10) + (10 + 1) = 10(10^{2k} - 1) + 11.$$

Так как разность $10^{2k} - 1$ по-предыдущему делится на 11, то и вся последняя сумма делится на 11.

Приведем пример. Число 924835 делится на 11, поскольку сумма

$$9 - 2 + 4 - 3 + 8 - 5 = 21 - 10 = 11$$

делится на 11.

141. Найдите все значения цифры a, если число $\overline{a719}$ делится на 11.

△ Делимость этого числа на 11 равносильна делимости на 11 суммы $a - 7 + 1 - 9 = a - 15$. Разность $a - 15$ делится на 11 только при $a = 4$.

Ответ: 4. ▲

142. Докажите, что если в трехзначном числе средняя цифра равна сумме крайних, то число делится на 11.

143. Найдите все значения цифр a и b, при которых число $\overline{53ab213}$ делится на 99.

△ По условию это число делится на 9 и на 11. Применим признак делимости на 9:

$$(5 + 3 + a + b + 2 + 1 + 3)\vdots 9, \quad (14 + a + b)\vdots 9, \quad (9 + (5 + a + b))\vdots 9, \quad (5 + a + b)\vdots 9.$$

Отсюда $a + b = 4$ или $a + b = 13$.

Теперь используем признак делимости на 11:

$$(5 - 3 + a - b + 2 - 1 + 3)\vdots 11, \quad (6 + a - b)\vdots 11.$$

Тогда $a - b = 5$ или $a - b = -6$.

Казалось бы, здесь нужно комбинировать каждое значение $a + b$ с каждым значением $a - b$, после чего получатся четыре случая. Но можно сэкономить время: вспомним, что сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность (см. § 3, задачу 93), поэтому достаточно рассмотреть два случая.

1) Пусть

$$\begin{cases} a+b=4, \\ a-b=-6. \end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы, найдем a: $a=-1$. Но последнее невозможно.

2) Пусть

$$\begin{cases} a+b=13, \\ a-b=5. \end{cases}$$

Отсюда $a=9$, $b=4$.

Ответ: $a=9$, $b=4$. ▲

144. Найдите все значения цифр, обозначенных звездочками, если число $4*8*2$ делится на 88.

145. Найдите все значения цифр x и y, при которых число $\overline{84x5y}$ делится на 198.

Теперь изменим характер задач.

146. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а затем у полученной разности вычеркнули одну цифру. Сумма оставшихся цифр разности равна 131. Какую цифру вычеркнули?

△ Разность между натуральным числом и суммой его цифр делится на 9 (см. задачу 130). Обозначим вычеркнутую цифру через x. Тогда сумма $131+x$ делится на 9, откуда $x=4$.

Ответ: 4. ▲

147. Возьмем какое-либо натуральное число с разными цифрами, большее 10, и переставим его цифры любым способом. Вычтем из большего из этих двух чисел меньшее и в разности зачеркнем одну ненулевую цифру. По сумме оставшихся цифр разности можно указать зачеркнутую цифру. Как и почему?

148. Напишите какое-либо многозначное число. Найдите сумму его цифр. Затем вычислите сумму цифр получившегося числа и продолжайте те же операции до тех пор, пока не получится однозначное число. Докажите, что оно равно остатку от деления первоначального числа на 9.

149. У трехзначного числа, делящегося на 45, разность между второй и первой цифрами равна разности между третьей и второй. Найдите все такие трехзначные числа.

150. Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 11, у которых сумма цифр делится на 11.

151. Докажите, что не существует трехзначного числа, делящегося на 11, у которого первая цифра больше второй, а вторая больше третьей.

152. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на 18.

△ Обозначим искомое число через

$$\overline{aaa...a} \text{ (}n\text{ цифр).}$$

Так как оно делится на 18, а следовательно, и на 2, то a — цифра четная.

Применим признак делимости на 9:

$$(a + a + a + ... + a) \vdots 9, \quad na \vdots 9.$$

Поскольку a — четная цифра, то число na четно.

1) Пусть $na = 18$.

Отсюда минимально возможное значение n: $n = 3$, откуда $a = 6$.

2) Пусть теперь na равно 36, или 54, или 72 и т. д.

Если и здесь взять $n = 3$, то a соответственно равно 12, 18, 24 и т. д., а это невозможно. Брать значения n, большие 3, не имеет смысла.

Следовательно, искомым является то число, которое получилось в первом случае.

Ответ: 666. ▲

153. Найдите наименьшее натуральное число, которое записывается одинаковыми цифрами и делится на: а) 72, б) 693.

154. Пятизначное число делится на 72, причем три его цифры — единицы. Найдите все такие числа.

△ Обозначим две неизвестные цифры пятизначного числа через x и y. Одна из них, например, y, стоит на последнем месте, так как 1 не может быть последней цифрой четного числа.

Применим признак делимости на 9:

$$(1 + 1 + 1 + x + y) \vdots 9, \quad (3 + x + y) \vdots 9.$$

Отсюда $x + y = 6$ или $x + y = 15$.

Возникает проблема с местом другой неизвестной цифры x: она может занимать первое, второе, третье или четвертое место. Разберем все четыре случая.

1) Пусть цифра x стоит в числе на первом месте. Тогда число принимает вид $\overline{x111y}$.

По признаку делимости на 8 число $\overline{11y}$ делится на 8, откуда $y = 2$.

Так как $x + y = 6$ или $x + y = 15$, то соответственно $x = 4$ или $x = 13$. Но вторая возможность отпадает.

2) Пусть цифра x стоит на втором месте.

Рассуждения из первого случая сохраняются и здесь, поэтому $y = 2$, $x = 4$.

3) Пусть цифра x занимает третье место. Тогда число имеет вид $\overline{11x1y}$.

По признаку делимости на 8 число $\overline{x1y}$ делится на 8. Преобразуем это трехзначное число:

$$\overline{x1y} = 100x + 10 + y = (8 \cdot 12x + 4x) + (8 + 2) + y = (8 \cdot 12x + 8) + (4x + y + 2) =$$
$$= (8 \cdot 12x + 8) + (x + y) + (3x + 2)$$

(здесь выделено слагаемое, равное $x + y$).

Если $x + y = 6$, то

$$(6 + (3x + 2))\vdots 8, \quad (8 + 3x)\vdots 8, \quad 3x\vdots 8, \quad x\vdots 8.$$

Следовательно, $x = 0$ или $x = 8$. При $x = 0$ $y = 6$, а при $x = 8$ $y = -2$, что невозможно.

Если $x + y = 15$, то

$$(15 + (3x + 2))\vdots 8, \quad (17 + 3x)\vdots 8, \quad (16 + (3x + 1))\vdots 8, \quad (3x + 1)\vdots 8.$$

Тогда $x = 5$, откуда $y = 10$, а это также невозможно.

4) Пусть цифра x в числе занимает четвертое место. Число принимает вид $\overline{111xy}$.

Число $\overline{1xy}$ должно делиться на 8. Проделаем с ним такие же преобразования, что и в предыдущем случае:

$$\overline{1xy} = 100 + 10x + y = (8 \cdot 12 + 4) + (8x + 2x) + y = (8 \cdot 12 + 8x) + (2x + y + 4) =$$
$$= (8 \cdot 12 + 8x) + (x + y) + (x + 4).$$

Если $x + y = 6$, то

$$(6 + x + 4)\vdots 8, \quad (x + 10)\vdots 8, \quad ((x + 2) + 8)\vdots 8, \quad (x + 2)\vdots 8.$$

Отсюда $x = 6$, $y = 0$.

Если $x + y = 15$, то

$$(15 + x + 4)\vdots 8, \quad (x + 19)\vdots 8, \quad (x + 3)\vdots 8.$$

Тогда $x = 5$, $y = 10$, а это невозможно.

Ответ: 41112, 14112, 11016, 11160. ▲

155. Пятизначное число делится на 315, причем три его цифры — четверки. Найдите все такие числа.

156*. В натуральном числе переставили цифры и получили число, в три раза большее исходного. Докажите, что полученное число делится на 27.

△ Пусть исходное число есть $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$, а число, образованное после перестановки его цифр, — $\overline{b_1b_2b_3...b_n}$. Тогда

$$\overline{b_1b_2b_3...b_n} = 3 \cdot \overline{a_1a_2a_3...a_n},$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n.$$

Так как в первом равенстве правая часть делится на 3, то и левая часть делится на 3. Применим признак делимости на 3:

$$(b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n)\vdots 3 \Rightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)\vdots 3 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3...a_n}\vdots 3.$$

Тогда в первом равенстве правая, а следовательно, и левая часть делится уже на 9. Используем признак делимости на 9:

$$(b_1 + b_2 + ... + b_n)\vdots 9 \Rightarrow (a_1 + a_2 + ... + a_n)\vdots 9 \Rightarrow \overline{a_1a_2a_3...a_n}\vdots 9 \Rightarrow \overline{b_1b_2b_3...b_n}\vdots 27. \blacktriangle$$

157*. Найдите такое трехзначное число, делящееся на 27, что при любой перестановке его цифр получается число, также делящееся на 27. Укажите все такие числа.

158*. Использовав цифры от 1 до 9 по одному разу, составьте наименьшее девятизначное число, делящееся на 11.

△ Сумма всех цифр искомого числа равна

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 9 = 45.$$

Обозначим сумму цифр числа, стоящих на нечетных местах, через S_1, а сумму цифр на четных местах через S_2. Тогда $S_1 + S_2 = 45$.

Разность $S_1 - S_2$ по признаку делимости на 11 делится на 11. Кроме того, она нечетна, поскольку сумма $S_1 + S_2$ нечетна, а сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность. Следовательно, эта разность может принимать значения 11, -11, 33 и -33. Рассмотрим четыре случая.

1) Пусть $S_1 - S_2 = 11$.

Из системы уравнения

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 45, \\ S_1 - S_2 = 11 \end{cases}$$

находим, что $S_1 = 28$, $S_2 = 17$.

2) Пусть $S_1 - S_2 = -11$.

Тогда

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 45, \\ S_1 - S_2 = -11, \end{cases}$$

откуда $S_1 = 17$, $S_2 = 28$.

3) Пусть $S_1 - S_2 = 33$.

Из системы уравнений

$$\begin{cases} S_1 + S_2 = 45, \\ S_1 - S_2 = 33 \end{cases}$$

получаем, что $S_1 = 39$, $S_2 = 6$. Однако равенство $S_2 = 6$ невозможно, так как если эта сумма состоит даже из 4 (а не из 5) слагаемых a, b, c и d, то

$$S_2 = a + b + c + d \geq 1 + 2 + 3 + 4 > 6.$$

4) Пусть $S_1 - S_2 = -33$.

Аналогично устанавливаем, что этот случай также невозможен. Итак, для S_1 и S_2 остаются только значения 28 и 17 (в том или ином порядке).

Попробуем начать искомое девятизначное число так: 12345; ведь нам требуется наименьшее число, делящееся на 11. Четыре оставшиеся цифры обозначим в последовательном порядке через k, l, m и n. Получим число $\overline{12345klmn}$.

Если сумму $1 + 3 + 5 = 9$ дополнить до 28 с помощью цифр l и n, то $l + n = 28 - 9 = 19$, что невозможно.

Если же сумму $2 + 4 = 6$ дополнить до 28 с помощью цифр k и m, то $k + m = 22$, а это также невозможно.

Следовательно, начать искомое число пятизначным числом 12345 нельзя, так как тогда ни сумма S_1, ни сумма S_2 не может быть равной 28.

Попробуем начать искомое число четырехзначным числом 1234, а само число обозначим через $\overline{1234abcde}$. Так как $1 + 3 = 4$, $2 + 4 = 6$, то

$$a + c + e = 28 - 4 = 24, \quad b + d = 17 - 6 = 11$$

или

$$a + c + e = 17 - 4 = 13, \quad b + d = 28 - 6 = 22.$$

На второй вариант сразу отпадает. Остается первый:

$$\begin{cases} a + c + e = 24, \\ b + d = 11. \end{cases}$$

При этом a, b, c, d и e принимают разные значения из множества $\{5;6;7;8;9\}$.

Цифра a должна быть возможно меньше. Но значение $a = 5$, как мы видели, невозможно; значение $a = 6$ тоже, так как тогда $c + e = 18$, откуда цифры c и e равны: $c = e = 9$. Попробуем $a = 7$. В этом случае:

$$\begin{cases} c + e = 17, \\ b + d = 11. \end{cases}$$

Из первого уравнения $c = 8$, $e = 9$ (но не $c = 9$, $e = 8$), а из второго — $b = 5$, $d = 6$.

Ответ: 123475869. ▲

159*. Можно ли из цифр от 1 до 6 составить шестизначное число с различными цифрами, делящееся на 11?

160*. Можно ли из цифр от 0 до 9 составить десятизначное число с различными цифрами, делящееся на 1980?

§ 6. Задачи на делимость, связанные с теоремой Ферма 7–11

Литература: [22], [27[в]], [53], [72], [83[в]], [88].

Рассмотрим некоторые свойства делимости целых чисел, которые нам понадобятся в дальнейшем.

1) *Если целые числа a и b делятся на целое число c, то их сумма и разность делятся на c.*

Это свойство можно обобщить на сумму любого количества целых чисел, причем допускается, что в сумме перед некоторыми числами вместо знака плюс стоит знак минус.

2) *Если в сумме нескольких чисел все слагаемые, кроме одного, делятся на целое число b, а это слагаемое не делится на b, то вся сумма не делится на b.*

3) *Если целое число a делится на целое число b, а b делится на целое число c, то a делится на c.*

4) *Если целое число a делится на целое число b, то при любом целом k произведение ka делится на b.*

5) *Если целое число a делится на целое число k, целое число b делится на целое число n, то произведение ab делится на произведение kn.*

6) *Если произведение нескольких целых чисел делится на простое число, то по меньшей мере одно из этих чисел делится на простое число.*

7) *Если целое число a делится на каждое из двух взаимно простых натуральных чисел b и c, то a делится и на произведение bc.*

Некоторыми из этих свойств мы уже пользовались в § 5. Кроме того, свойства четных и нечетных чисел из § 4 можно рассматривать как частные случаи свойств делимости.

Как эти свойства доказать? Докажем, например, первое свойство.

Так как числа a и b делятся на число c, то существуют такие целые числа k и n, что

$$a = ck, \quad b = cn.$$

Сложим и вычтем почленно записанные равенства:

$$a + b = ck + cn = c(k + n), \quad a - b = ck - cn = c(k - n).$$

Отсюда и следует, что сумма $a + b$ и разность $a - b$ делятся на c.

Подумайте сами, как доказать, скажем, свойства 2–5. При доказательстве свойства 2 лучше взять сумму двух чисел.

6.1. 7–11

161°. Докажите, что при любом целом a разность $a^2 - a$ делится на 2.

△ Разложим эту разность на множители:

$$a^2 - a = a(a - 1).$$

Из двух последовательных целых чисел $a - 1$ и a одно (и только одно) является четным. ▲

162°. Докажите, что *при любом целом а разность $a^3 - a$ делится на 3.*

△ Разложим разность $a^3 - a$ на линейные множители:

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a - 1)a(a + 1).$$

Из трех последовательных целых чисел $a - 1$, a и $a + 1$ одно (и только одно) делится на 3. Но тогда и все произведение делится на 3 по свойству 4 делимости. ▲

163°. Докажите, что *квадрат целого числа при делении на 3 может давать в остатке только 0 или 1* (и, следовательно, не может давать остаток 2).

△ Представим делимость

$$(a^3 - a) \vdots 3$$

из задачи 162 в следующем виде:

$$a(a^2 - 1) \vdots 3.$$

Так как 3 — число простое, то или a, или $a^2 - 1$ делится на 3 (см. свойство 6 делимости).

Если a делится на 3, то и a^2 делится на 3, а значит, a^2 при делении на 3 дает в остатке нуль.

Если $a^2 - 1$ делится на 3, то

$$a^2 - 1 = 3k \ \ (k \in Z), \quad a^2 = 3k + 1,$$

т. е. a^2 при делении на 3 дает в остатке 1. ▲

А теперь рассмотрим несколько задач пока что на утверждение задачи 162.

164. Верно ли, что сумма $a^3 + 2a$ делится на 3 при любом целом a?

△ Для того чтобы воспользоваться делимостью $(a^3 - a) \vdots 3$, вычтем и прибавим a:

$$a^3 + 2a = (a^3 - a) + 3a.$$

Каждое из слагаемых полученной суммы делится на 3 при любом целом a, поэтому и вся сумма делится на 3 при любом целом a.

Ответ: верно. ▲

165. Найдите все целые a, при которых следующие числа делятся на 3:

а) $a^3 - 5a$; б) $a^5 - a$; в) $a^7 - a$.

166. Докажите, что при любом целом n сумма $n^3 - 3n^2 + 8n$ делится на 6.

167. Верно ли, что при любом целом a сумма

$$\frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2} + \frac{a}{6}$$

является целым числом?

168. Докажите, что при любом четном a сумма

$$\frac{a}{12} + \frac{a^2}{8} + \frac{a^3}{24}$$

число целое.

169. Докажите, что если сумма $a + b + c$, где a, b, c — целые, делится на 3, то и сумма $a^3 + b^3 + c^3$ делится на 3.

△ Преобразуем последнюю сумму следующим образом:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (a + b + c).$$

Каждое из четырех слагаемых последней суммы делится на 3, следовательно, и вся сумма делится на 3. ▲

170. Почему из делимости на 3 суммы $a + b$, где a и b — целые числа, следует делимость на 3 суммы $a^5 + b^7$?

Теперь рассмотрим задачи на утверждение задачи 163.

171. Докажите, что если целое число a не делится на 3, то число $5a^2 + 1$ делится на 3.

△ Квадрат целого числа при делении на 3 дает в остатке 0 или 1. Но так как a не делится на 3, то остается второй случай: $a^2 = 3k + 1$ (k — целое неотрицательное). Тогда

$$5a^2 + 1 = 5(3k + 1) + 1 = 15k + 6.$$

Последняя сумма всегда делится на 3. ▲

172. Целое число n не делится на 3. Делится ли на 3 число $2n^2 + 11$?

173. Докажите, что если целые числа a и b не делятся на 3, то разность $a^2 - b^2$ делится на 3.

174. Ни одно из целых чисел a, b и c не делится на 3. Верно ли, что тогда сумма $a^2 + b^2 + c^2$ делится на 3?

175. Ни одно из целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не делится на 3. Найдите все натуральные n, при которых сумма

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$$

делится на 3.

176*. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами длина по меньшей мере одного из катетов делится на 3.

177°. Докажите, что если сумма $a^2 + b^2$, где a и b — целые числа, делится на 3, то каждое из чисел a и b делится на 3.

△ Из делимости $(a^2 + b^2)\vdots 3$ следует, что числа a и b или оба делятся, или оба не делятся на 3.

Рассмотрим вторую возможность. Тогда каждое из чисел a^2 и b^2 при делении на 3 дает в остатке 1:

$$a^2 = 3k + 1, \quad b^2 = 3l + 1,$$

где k и l — целые неотрицательные числа. Сложим эти равенства почленно:

$$a^2 + b^2 = 3(k + l) + 2.$$

Получилось, что сумма $a^2 + b^2$ не делится на 3. Но это противоречит условию.

Остается первая возможность: числа a и b делятся на 3. ▲

178*. Двузначное число не делится на 3. Может ли делиться на 3 сумма квадратов его цифр?

179*. Имеет ли уравнение

$$x^2 + y^2 = 3^{45}$$

решения в целых числах x и y?

6.2. 8–11

180°. Докажите, что *при любом целом a разность $a^5 - a$ делится на 5.*

△ Разложим данную разность на множители:

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 + 1).$$

Теперь можно рассмотреть пять случаев:

$$a = 5k, \quad a = 5k + 1, \quad a = 5k + 2, \quad a = 5k + 3, \quad a = 5k + 4 \ (k \in Z),$$

но это длинновато. Давайте посмотрим на решение похожей задачи 162: там использовалось произведение трех последовательных целых чисел. Нельзя ли здесь получить произведение п я т и последовательных чисел — от $a - 2$ до $a + 2$? Для этого множитель $a^2 + 1$ представим в таком виде:

$$a^2 + 1 = (a^2 - 4) + 5.$$

Получаем:

$$a^5 - a = (a - 1)a(a + 1)((a^2 - 4) + 5) = (a - 1)a(a + 1)(a^2 - 4) + 5(a - 1)a(a + 1) =$$
$$= (a - 2)(a - 1)a(a + 1)(a + 2) + 5(a - 1)a(a + 1).$$

Первое слагаемое этой суммы делится на 5 как произведение пяти последовательных целых чисел; второе также делится на 5. Следовательно, и вся сумма, т. е. $a^5 - a$ делится на 5. ▲

181°. *Докажите, что при любом целом a степень a^4 при делении на 5 может давать в остатке только 0 или 1.*

△ В самом деле, так как

$$a^5 - a = a(a^4 - 1)$$

по-предыдущему делится на 5, то или a, или $a^4 - 1$ делится на 5. ▲

Рассмотрим задачи на применение утверждения задачи 180.

182. Верно ли, что при любом целом a следующие числа делятся на 5:

а) $a^5 + 12a$; б) $a^5 + 19a$; в) $a^7 - a$; г) $a^9 - a$?

183. Найдите все целые n, при которых сумма

$$n^5 - 5n^3 - 8n$$

делится на 10.

184. Докажите, что при любых целых a, b и c сумма

$$(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5$$

делится на 5.

185. Докажите, что сумма

$$9a^5 - 5a^3 - 4a$$

при любом целом a делится на 15.

△ Нужно доказать, что данная сумма делится на 3 и на 5.

1) Для доказательства делимости суммы на 3 достаточно доказать, что $5a^3 + 4a$ делится на 3 (поскольку $9a^5$ делится на 3). Имеем:

$$5a^3 + 4a = (5a^3 - 5a) + (5a + 4a) = 5(a^3 - a) + 9a.$$

Каждое из слагаемых полученной суммы делится на 3, поэтому и вся сумма делится на 3.

2) Для доказательства делимости исходной суммы на 5 достаточно доказать, что разность $9a^5 - 4a$ делится на 5. Преобразуем эту разность:

$$9a^5 - 4a = (9a^5 - 9a) + (9a - 4a) = 9(a^5 - a) + 5a.$$

Полученная сумма действительно делится на 5. ▲

186. Найдите все целые a, при которых число

$$\frac{a^5}{5} + \frac{a^3}{3} + \frac{7a}{15}$$

является целым.

187. Сумма пяти целых чисел равна нулю. Верно ли, что сумма пятых степеней этих чисел делится на 30?

188*. Если сумма n целых чисел делится на 30, то и сумма 25-х степеней этих чисел делится на 30. Докажите или опровергните это утверждение.

А теперь возьмем группу задач на предложение из задачи 181.

189. Целое число a не делится на 5. Может ли делиться на 5 число $3a^4 + 1$?

△ Из утверждения задачи 183 следует, что в данном случае a^4 при делении на 5 может давать в остатке только 1: $a^4 = 5k + 1$ (k — целое неотрицательное). Тогда

$$3a^4 + 1 = 3(5k + 1) + 1 = 15k + 4.$$

Последняя сумма не делится на 5 ни при каком целом неотрицательном k.

Ответ: не может. ▲

190. Верно ли, что для любых целых a и b разность

$$a^5b - ab^5$$

делится на 5?

191. Докажите, что если сумма

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4,$$

где a, b, c, d — целые числа, делится на 5, то каждое из чисел a, b, c и d делится на 5.

192*. Если ни одно из 10 натуральных чисел не делится на 5, то сумма двадцатых степеней этих чисел делится на 5. Докажите или опровергните это утверждение.

193*. Найдите все целые значения x и y, при которых по меньшей мере одно из чисел

$$x^2 - 2xy + 2y^2, \quad x^2 + 2xy + 2y^2$$

делится на 5.

△ Делимость по меньшей мере одного из этих чисел на 5 равносильна делимости на 5 их произведения. Преобразуем его:

$$(x^2 - 2xy + 2y^2)(x^2 + 2xy + 2y^2) = ((x^2 + 2y^2) - 2xy)((x^2 + 2y^2) + 2xy) =$$
$$= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 = x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 = x^4 + 4y^4.$$

Так как сумма $x^4 + 4y^4$ по условию делится на 5, то числа x и y или оба делятся, или оба не делятся на 5.

1) Если x и y делятся на 5, то все очевидно.

2) Пусть x и y не делятся на 5. Возможен ли этот случай?

Тогда x^4 и y^4 при делении на 5 дают в остатке 1:

$$x^4 = 5k + 1, \quad y^4 = 5l + 1,$$

где k и l — целые неотрицательные. Получаем:

$$x^4 + 4y^4 = (5k + 1) + 4(5l + 1) = 5k + 20l + 5.$$

Так как последняя сумма делится на 5, то и этот вариант возможен.

Ответ: все целые x и y, одновременно делящиеся или не делящиеся на 5. ▲

194*. Докажите, что при любом целом a разность $a^7 - a$ делится на 7.

В задачах 161, 162, 180 и 194 встретились похожие предложения: при любом целом a выполняются делимости

$$(a^2 - a)\vdots 2, \quad (a^3 - a)\vdots 3, \quad (a^5 - a)\vdots 5, \quad (a^7 - a)\vdots 7.$$

Какое общее предложение стоит за этими делимостями? Верно ли, что для любого целого a при любом натуральном n выполняется делимость

$$(a^n - a)\vdots n?$$

В частности, верно ли, что

$$(a^4 - a)\vdots 4, \quad (a^6 - a)\vdots 6, \quad (a^9 - a)\vdots 9?$$

Оказывается, последние делимости неверны, так как, например, $2^4 - 2$ не делится на 4, $2^6 - 2$ — на 6, а $2^9 - 2$ — на 9. В таком случае при каких натуральных значениях показателя степени n справедлива эта делимость?

Она справедлива при простом n.

Пусть для простоты число a — натуральное. Имеет место следующая теорема, которая называется *теоремой Ферма* (точнее, *малой теоремой Ферма*) по имени французского ученого Пьера Ферма (1601–1665): *при любом натуральном a и любом простом p разность $a^p - a$ делится на p.*

Старшеклассники, знакомые с методом математической индукции и формулой Ньютона для степени $(a + b)^n$, могут попробовать доказать эту теорему с помощью индукции по a.

Если в формулировке теоремы вместо натурального a взять целое, то получится также истинное предложение (подумайте, почему).

Из теоремы Ферма вытекает такое *следствие: если a — любое натуральное число, p — любое простое число, то степень a^{p-1} при делении на p может давать в остатке только 0 или 1*; в частности, если *a не делится на p, то разность $a^{p-1} - 1$ делится на p.*

§ 7. Задачи на делимость, связанные с разложением выражений $a^n \pm b^n$ на множители **9–11**

Литература: [17[В]], [27[В]], [53], [72], [83].

Мы с вами знакомы с формулами разности квадратов, суммы и разности кубов двух чисел. А как выглядит, например, формула суммы пятых степеней двух чисел? Главное, какие общие формулы стоят за тремя перечисленными?

Справедливы следующие тождества:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \quad (n \in N), \tag{1}$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}) \quad (n \in N,\ n \text{ нечетно}), \tag{2}$$

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - b^{n-1}) \quad (n \in N,\ n \text{ четно}) \tag{3}$$

Формула (1) является обобщением формул разности квадратов и разности кубов, формула (2) — обобщением формулы суммы кубов, наконец, формула (3) — формулы разности квадратов.

Полезно знать, что *сумма, стоящая во вторых скобках в правой части каждой из формул (1), (2) и (3), содержит n слагаемых,* так как при переходе от каждого слагаемого суммы к следующему показатель буквы b пробегает n значений — от 0 до $n - 1$.

Как доказать эти формулы? Докажем, например, формулу (1).

Для этой цели перемножим суммы в скобках в правой части формулы:

$$(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) =$$
$$= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + ab^{n-1} - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n.$$

Формулы (1)–(3) широко используются в алгебре. Здесь мы ограничимся только их применением к задачам на делимость.

При решении задач на делимость эти тождества обычно используются не в полном объеме, а в более слабой форме. Пусть n — натуральное, a и b — целые числа. Тогда из тождеств (1)–(3) следует, что:

1) *разность $a^n - b^n$ делится на разность $a - b$ оснований степени* ($a \neq b$);

2) *при нечетном n сумма $a^n + b^n$ делится на сумму $a + b$ оснований степени* ($a \neq -b$);

3) *при четном n разность $a^n - b^n$ делится на сумму $a + b$ оснований степени* ($a \neq -b$).

195. Докажите, что разность $26^n - 7^n$ при любом натуральном n делится на 19.

△ На основании первой делимости эта разность делится на разность оснований степени, т. е. на $26 - 7 = 19$. ▲

196. Докажите, что разность $146^{15} - 61^{15}$ делится на 17.

197. Верно ли, что при любом натуральном n число

$$18^n + 15^n - 5^n - 2^n$$

делится на 13?

198. Докажите, что разность:

а) $5^{22} - 18^{11}$ делится на 7;

б) $2^{35} - 3^{20}$ делится на 47.

199. Почему сумма $8^n + 6$ при любом натуральном n делится на 7?

△ А кто ее знает, почему: ведь эту сумму не представишь в виде суммы или разности n-х степеней целых чисел. Впрочем, похожая на нее разность $8^n - 1$ делится на 7... ▲

200. Докажите, что число

$$5^{2n} + 48^n - 2^{n+1}$$

при любом натуральном n делится на 23.

201. Докажите, что сумма $13^{49} + 5^{49}$ делится на 18.

△ На основании второй из известных нам делимостей данная сумма делится на сумму оснований степени, т. е. на $13 + 5 = 18$. ▲

202. Почему число

$$20^{41} - 13^{41} - 8^{41} + 1$$

делится на 21?

203. Число $2^{155} + 1$ делится на 11. Докажите или опровергните.

204. Докажите, что число

$$1^{1997} + 2^{1997} + 3^{1997} + \ldots + 30^{1997}$$

делится на 31.

205. Пусть n — нечетное натуральное число, большее 1. Обязательно ли существует такое натуральное число k, большее 1, что сумма

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + (n-1)^k$$

делится на n?

206*. Докажите, что если последняя цифра десятичной записи числа m равна 5, то сумма

$$12^m + 9^m + 8^m + 6^m$$

делится на 1991.

207. Верно ли, что разность $47^{100} - 14^{100}$ делится на 61?

△ Используем третью из наших делимостей: при четном показателе степени разность степеней с этим (одним и тем же) показателем делится на сумму оснований, т. е. на $47 + 14 = 61$.

Ответ: верно. ▲

208. Докажите, что разность:

а) $67^{24} - 1$ делится на 17;

б) $2^{48} - 1$ делится на 105;

в) $3^{60} - 2^{60}$ делится на 11.

209. Найдите все натуральные n, при которых сумма

$$20^n + 16^n - 3^n - 1$$

делится на 323.

210. Найдите все натуральные n, при которых число $13^n + 6$ делится на 7.

До сих пор в задачах на делимость мы использовали только первый множитель из правых частей тождеств (1), (2) и (3). Иногда бывает необходимо использовать и второй множитель из тех же тождеств.

211. Делится ли разность $17^{15} - 3^{15}$ на 4?

△ Разность оснований степени $17 - 3 = 14$ делится на 2, но не делится на 4. Это еще не значит, что данная разность $17^{15} - 3^{15}$ не делится на 4. Разложим ее на множители, применяя формулу (1):

$$17^{15} - 3^{15} = 14 \cdot (17^{14} + 17^{13} \cdot 3 + 17^{12} \cdot 3^2 + ... + 3^{14}).$$

В скобках стоят только нечетные слагаемые. Сколько их? Вспомним, что при разложении на множители разности $a^n - b^n$ число слагаемых у второго множителя равно n. Здесь $n = 15$, поэтому и число слагаемых записанной суммы равно 15. Следовательно, эта сумма нечетна.

Ответ: не делится. ▲

212. Делится ли разность $11^{10} - 1$ на 100?

213. Делится ли на 125 сумма:

а) $2^{90} + 1$; б) $2^{50} + 1$?

Перейдем к более серьезным задачам по теме параграфа.

214. Докажите, что сумма

$$6^{2(n+1)} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$$

при любом натуральном n делится на 900.

215. Найдите все натуральные n, при которых разность $10^n - 1$ делится на 81.

216. Докажите, что число $2 \cdot 7^n + 1$ при любом натуральном n делится на 3.

△ Преобразуем данную сумму следующим образом:

$$2 \cdot 7^n + 1 = 2 \cdot 7^n + 3 - 2 = 2(7^n - 1) + 3.$$

Так как разность $7^n - 1$ делится на 6, а значит, и на 3, то и вся сумма делится на 3.

Другой вариант решения: так как разность $7^n - 1$ делится на 6, то

$$7^n - 1 = 6k, \quad 7^n = 6k + 1 \quad (k \in N),$$

откуда

$$2 \cdot 7^n + 1 = 2 \cdot (6k + 1) + 1 = 12k + 3.$$

Получилось число, делящееся на 3. ▲

217. Найдите все натуральные n, при которых сумма

$$25^n + 5^n + 6$$

делится на 12.

218. Существуют ли натуральные n, при которых сумма

$$6^{2n} + 3^n + 3^{n+2}$$

не делится на 11?

219°. Докажите, что если $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — различные целые числа, то разность $p(a) - p(b)$ делится на $a - b$.

△ Запишем многочлен $p(x)$ n-й степени в каноническом виде:

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n.$$

Здесь по условию все коэффициенты — целые числа. Тогда получаем:

$$p(a) - p(b) = (a_0a^n + a_1a^{n-1} + \ldots + a_{n-1}a + a_n) - (a_0b^n + a_1b^{n-1} + \ldots + a_{n-1}b + a_n) =$$

$$= a_0(a^n - b^n) + a_1(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(a - b).$$

Каждая из разностей $a^k - b^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ делится на $a - b$, поэтому и $p(a) - p(b)$ делится на $a - b$. ▲

220. Существует ли такой многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, что

$$p(10) = 13, \quad p(4) = 9?$$

221. Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами таков, что

$$p(a) = 1, \quad p(b) = -1,$$

где a и b — различные целые числа. Найдите все значения, которые может принимать разность $a - b$.

222. Найдите все натуральные n, при которых сумма $2^n + 1$ делится на 3.

△ Очевидно, подойдут все нечетные n, так как в этом случае сумма $2^n + 1$ делится на $2 + 1$, т. е. на 3. Ну а если n четно?

4 Зак. 579

Пусть n четно: $n = 2k$ ($k \in N$). Преобразуем данную сумму:

$$2^n + 1 = 2^{2k} + 1 = (2^{2k} - 1) + (1 + 1) = (4^k - 1) + 2.$$

Поскольку $4^k - 1$ делится на 3, а 2 не делится, то вся сумма не делится на 3.

Ответ: при всех нечетных n. ▲

223. Найдите все натуральные n, при которых число

$$4^n + 2^n - 2$$

делится на 9.

224. Найдите все натуральные n, при которых сумма

$$3^{3n} + 3^{2n} + 3^n + 1$$

делится на 8.

225. Докажите, что сумма

$$2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4$$

при любом натуральном n делится на 25.

△ Преобразуем сумму:

$$2^{n+2} \cdot 3^n + 5n - 4 = 4 \cdot 2^n \cdot 3^n - 4 + 5n = 4(6^n - 1) + 5n =$$
$$= 5(4 \cdot (6^{n-1} + 6^{n-2} + ... + 6 + 1) + n) =$$
$$= 5(4 \cdot 6^{n-1} + 4 \cdot 6^{n-2} + ... + 4 \cdot 6 + 4 - 4n + 5n) =$$
$$= 5(4 \cdot (6^{n-1} - 1) + 4(6^{n-2} - 1) + ... + 4(6 - 1) + 5n).$$

(Здесь в ходе выкладок слагаемое n представлено в виде $-4n + 5n$, затем $-4n$ представлено в виде суммы n слагаемых, каждое из которых равно -4, и выделены разности $4 \cdot 6^{n-1} - 4$, $4 \cdot 6^{n-2} - 4$, ..., $4 \cdot 6 - 4$.)

Получилось, что каждое из слагаемых последней суммы, стоящей в скобках, делится на 5. Следовательно, все произведение делится на 25. ▲

226. Верно ли, что сумма

$$4^n + 6n - 1$$

при любом натуральном n делится на 9?

227. Найдите все натуральные n, при которых число $63^n - 5^n$ делится на 1972.

228. Существует ли натуральное n, для которого число

$$2^{3n} - 7n - 1$$

не делится на 49?

229. Докажите, что число

$$4^{2n+2} - 15n - 16$$

при любом натуральном n делится на 225.

230. Докажите, что сумма

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

при любом натуральном n делится на 133.

△ Преобразуем эту сумму:

$$11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n.$$

А теперь обратим внимание, что

$$121 + 12 = 133, \quad 144 - 11 = 133.$$

Но как это использовать?

Проделаем следующие преобразования:

$$12 \cdot 144^n + 121 \cdot 11^n = (12 \cdot 144^n - 12 \cdot 11^n) + (12 \cdot 11^n + 121 \cdot 11^n) =$$
$$= 12 \cdot (144^n - 11^n) + 133 \cdot 11^n.$$

Отсюда и следует, что данная сумма делится на 133 при любом натуральном n. ▲

При решении последней задачи мы прибавляли к данному числу и отнимали от него одно и то же число (в задаче 230 — число $12 \cdot 11^n$). К подобной операции прибегают довольно часто при решении задач на делимость, а также и некоторых других задач; например, это использовалось при решении нескольких предыдущих задач. Назовем такую операцию *приемом «плюс-минус»*.

231. Делится ли число $22^{55} - 55^{22}$ на 7?

232. Докажите, что число $23^{43} + 43^{23}$ делится на 66.

233*. Делится ли сумма $19^{19} + 69^{69}$ на 44?

△ Так как $44 = 4 \cdot 11$, где числа 4 и 11 — взаимно простые, то достаточно проверить, делится ли эта сумма на 4 и 11.

С делимостью на 4 дело обстоит просто: используем прием «плюс-минус», прибавляя и отнимая 1. Получаем:

$$19^{19} + 69^{69} = (19^{19} + 1) + (69^{69} - 1).$$

Число в каждой из скобок делится на 4, поэтому и вся сумма делится на 4.

А вот как быть с делимостью на 11? Та же операция — прибавить и отнять 1 — здесь не проходит. Если мы с вами не придумаем ничего хорошего, то придется 19 возвести в 19-ю степень, 69 — в 69-ю, сложить полученные числа и разделить сумму на 11.

К счастью, имеется возможность избежать столь тяжкой участи, хотя и не очень простая. Используем тот же прием «плюс-минус», прибавляя и отнимая не 1, а 69^{19}. Почему именно эту степень? Уже потому, что сумма $19^{19} + 69^{69}$ делится на 88, а следовательно, и на 11. Будем иметь:

$$19^{19} + 69^{69} = (19^{19} + 69^{19}) + (69^{69} - 69^{19}) =$$
$$= (19^{19} + 69^{19}) + 69^{19}(69^{50} - 1).$$

Делится ли разность $69^{50} - 1$ на 11? Эта разность делится на $69^2 - 1$, но последняя разность не делится на 11, так как она разлагается на множители, не делящиеся на 11:

$$69^2 - 1 = (69 + 1)(69 - 1) = 70 \cdot 68.$$

Но разность $69^{50} - 1$ делится на $69^5 - 1$. Может быть, эта новая разность делится на 11? Преобразуем ее, представляя 69 в виде $66 + 3$, с тем, чтобы воспользоваться делимостью 66 на 11:

$$69^5 - 1 = (66 + 3)^5 - 1 = (66 + 3)(66 + 3)(66 + 3)(66 + 3)(66 + 3) - 1 =$$
$$= 66k + 3^5 - 1.$$

(Если перемножить пять сумм, каждая из которых равна $66 + 3$, то все члены получающегося разложения, кроме одного, равного 3^5, делятся на 66; их сумма и обозначена через $66k$, где k — натуральное.)

Число

$$3^5 - 1 = 243 - 1 = 242$$

делится на 11. Тогда на 11 делится разность $69^5 - 1$, а значит, и разность $69^{50} - 1$. Следовательно, на 11 делится и данная сумма $19^{19} + 69^{69}$.

Ответ: делится. ▲

234. Найдите все натуральные n, при которых число $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ делится на 11.

235. Сумма

$$5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n+1}$$

при любом натуральном n делится на 19. Докажите или опровергните это утверждение.

236. Докажите, что число $2^{5n+1} + 5^{n+2}$ при любом натуральном n делится на 27.

237*. Делится ли сумма

$$2222^{5555} + 5555^{2222}$$

на 7?

238*. Делится ли число $3^{101} + 1$ на 7?

239*. Найдите все натуральные n, при которых разность $2^n - 1$ делится на 7.

△ Выполним перебор, придавая n значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7. Получается, что разность $2^n - 1$ делится на 7 только при $n = 3$ и $n = 6$. Видимо, эта разность делится на 7 лишь при n, делящемся на 3. Проверим свою гипотезу. Для этого рассмотрим три случая.

1) Пусть n делится на 3: $n = 3k$ ($n \in N$). Тогда

$$2^n - 1 = 2^{3k} - 1 = 8^k - 1,$$

а $8^k - 1$ делится на 7 при любом натуральном k.

2) Пусть n при делении на 3 дает в остатке 1: $n = 3k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Получаем:

$$2^n - 1 = 2^{3k+1} - 1 = 2 \cdot 2^{3k} - 1 = 2 \cdot 8^k - 1 =$$
$$= 2((8^k - 1) + 1) - 1 = 2(8^k - 1) + 1.$$

Первое слагаемое полученной суммы при любом целом неотрицательном k делится на 7, второе не делится, поэтому вся сумма не делится на 7.

3) Пусть n при делении на 3 дает в остатке 2: $n = 3k + 2$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). Аналогично предыдущему доказывается, что в этом случае разность $2^n - 1$ также не делится на 7.

Ответ: все n, делящиеся на 3. ▲

240*. Существует ли такое натуральное n, при котором сумма $2^n + 1$ делится на 7?

241*. Найдите все натуральные n, при которых число

$$1 + 3^n + 9^n$$

делится на 13.

242*. Найдите все натуральные n, при которых разность $5^n - 2^n$ делится на 9.

243*. Найдите все натуральные n, при которых число $5^{2n} - 3^n$ делится на 16.

244*. Докажите, что число

$$3^{2n+3} - 24n + 37$$

при любом натуральном n делится на 64.

245*. Может ли число $5^n - 1$ делиться на число $4^n - 1$ при одном и том же натуральном n?

△ Разность $4^n - 1$ при любом натуральном n делится на 3, следовательно, и разность $5^n - 1$ делится на 3. Но последнее выполняется только при четном n (проверьте!): $n = 2k$ ($n \in N$). Однако при четном n число

$$4^n - 1 = 4^{2k} - 1$$

делится еще и на 5, а разность $5^n - 1$ ни при каком натуральном n не делится на 5; поэтому число $5^n - 1$ ни при каком n не делится на $4^n - 1$.

Ответ: не может. ▲

246*. Существуют ли такие натуральные n и k, что число $5^n + 1$ делится на число $5^k - 1$?

247*. Докажите, что если

$$(a + b) \vdots k, \quad (a^2 + b) \vdots k,$$

то при любом натуральном n

$$(a^n + b) \vdots k.$$

248*. Найдите все натуральные n и k, при которых число $2^n + 1$ делится на число $2^k - 1$.

§ 8. Разные задачи на делимость 7–11

Литература: [17], [22$^{\text{В}}$], [27$^{\text{В}}$], [53], [77], [78], [83$^{\text{В}}$], [88].

8.1. 7–9

8.1.1. 7–9

Сначала рассмотрим задачи на делимость, связанные *со следующими разложениями натуральных чисел на простые множители*:

$$111 = 3 \cdot 37, \quad 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13, \quad 1111 = 11 \cdot 101,$$

$$10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37, \quad 11111 = 41 \cdot 271, \quad 111111 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

249. Познакомимся с одной из задач из книги [62] «Живая математика» широко известного в нашей стране автора многих популярных, интересно написанных книг по математике, физике и астрономии Я. И. Перельмана. Дело происходит в доме отдыха, где во время дождя отдыхающие собрались в столовой и развлекаются тем, что по очереди предлагают присутствующим головоломки. Вот одна из них:

«— Пусть кто-нибудь из вас, хотя бы вы, товарищ председатель, запишет на бумажке тайно от меня любое трехзначное число...

— Написал. Что теперь?

— Припишите к нему это же число еще раз. У вас получится, конечно, шестизначное число.

— Есть. Шестизначное число.

— Передайте бумажку соседу, что сидит подальше от меня. А он пусть разделит это шестизначное число на семь.

— Легко сказать: разделить на семь! Может, и не разделится.

— Не беспокойтесь, поделится без остатка.

— Числа не знаете, а уверены, что поделится.

— Сначала разделите, потом будем говорить.

— На ваше счастье разделилось.

— Результат вручите своему соседу, не сообщая мне. Он разделит его на 11.

— Думаете, опять повезет — разделится?

— Делите, остатка не получится.

— В самом деле без остатка! Теперь что?

— Передайте результат дальше. Разделим его... ну, скажем, на 13.

— Нехорошо выбрали. Без остатка на 13 мало чисел делится... Ан нет, разделилось нацело. Везет же вам!

— Дайте мне бумажку с результатом, только сложите ее, чтобы я не видел числа.

Не разворачивая листа бумаги, «фокусник» вручил его председателю.

— Извольте получить задуманное вами число. Правильно?

— Совершенно верно! — с удивлением ответил тот, взглянув на бумажку. — Именно это я и задумал...».

Так в чем же дело — почему после таких операций получается первоначальное трехзначное число?

250. Всегда ли шестизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 37?

251. Почему любое шестизначное число вида $\overline{ababab}$ делится на 13?

△ Очевидно, это число делится на двузначное число $\overline{ab}$. После деления получаем:

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10101,$$

а число 10101 делится на 13 (см. записанные выше числовые равенства). ▲

252. Докажите, что десятизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 41.

253. Найдите натуральное число n, если $n - 1$ делится на 47, а 1001 делится на $n + 1$. Укажите все решения.

254. Даны два трехзначных числа, сумма которых делится на 37. Эти числа записаны друг за другом. Верно ли, что полученное шестизначное число обязательно делится на 37?

△ Обозначим данные трехзначные числа через a и b. Тогда их сумма $a + b$ делится на 37.

Шестизначное число принимает вид $1000a + b$. Преобразуем его, выделяя слагаемое $a + b$:

$$1000a + b = 999a + (a + b).$$

У полученной суммы не только второе, но и первое слагаемое делится на 37, так как $999a$ делится на 111, а 111 делится на 37. Поэтому и вся сумма делится на 37.

Ответ: верно. ▲

255*. Трехзначное число $\overline{abc}$ делится на 37. Докажите, что и сумма $\overline{bca} + \overline{cab}$ делится на 37.

256. Докажите, что если шестизначное число делится на 7, или на 11, или на 13, или на 37, то и число, полученное из него после перестановки первой цифры в конец, делится на то же самое число.

△ Обозначим исходное шестизначное число через $\overline{abcdef}$. Тогда новое число, полученное из него после перестановки цифры, есть $\overline{bcdefa}$.

Пусть $\overline{bcdef} = x$. Тогда начальное число равно $10^5a + x$, а новое — $10x + a$. Почему же из делимости суммы $10^5a + x$, скажем, на 13 следует делимость суммы $10x + a$ на 13?

Умножим первое число на 10 и вычтем из полученной суммы $10^6 \cdot a + 10x$ сумму $10x + a$:

$$(10^6 \cdot a + 10x) - (10x + a) = (10^6 - 1)a = 999999a = 9 \cdot 111111 \cdot a.$$

Но число 111111 делится на 13, а кроме того, и на 7, и на 11, и на 37. Следовательно, разность двух чисел делится на любое из чисел 7, 11, 13 и 37, кроме того, уменьшаемое делится на любое из этих чисел.

Но тогда и вычитаемое $10x + a$ делится на каждое из этих чисел. ▲

257. Если семизначное число делится на 7, 11, 13 и 37, то и число, полученное из него при перестановке местами первой и последней цифр, делится на то же самое число. Почему?

258. Найдите все натуральные n, при которых число $10^n - 1$ делится на 101.

△ Преобразуем это число:

$$10^n - 1 = 999...9 \text{ (} n \text{ девяток).}$$

При каком числе девяток полученное число делится на 101? Перебор показывает, что числа 9, 99 и 999 не делятся на 101, а вот число 9999 делится на 101, поскольку 9999 делится на 1111, а 1111 делится на 101.

По-видимому, данное число делится на 101 только тогда, когда n делится на 4. Рассмотрим два случая.

1) Пусть n делится на 4: $n = 4k$ ($k \in N$). Получаем:

$$10^n - 1 = 10^{4k} - 1 = (10^2)^{2k} - 1,$$

а последнее число делится на $10^2 + 1 = 101$ (см. § 7, третья делимость).

2) Пусть n не делится на 4. Разделим n на 4 с остатком:

$$n = 4k + r,$$

где k — целое неотрицательное число, r — целое число, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant r \leqslant 3$. Преобразуем данное число:

$$10^n - 1 = 10^{4k+r} - 1 = 10^r \cdot 10^{4k} - 1 = 10^r((10^{4k} - 1) + 1) - 1 =$$
$$= 10^r(10^{4k} - 1) + (10^r - 1).$$

Первое слагаемое полученной суммы делится на 101, а второе не делится, так как при $r = 1, 2, 3$ число $10^r - 1$ принимает соответственно значения 9, 99 и 999. Следовательно, вся сумма не делится на 101.

Ответ: все n, делящиеся на 4. ▲

259. Найдите все натуральные n, при которых число
$$100...01 \text{ (}n\text{ нулей)}$$
делится на 101.

260. Найдите все натуральные n, при которых число
$$111...1 \text{ (}n\text{ единиц)}$$
делится: а) на 7; б) на 41.

261*. Докажите, что если все трехзначные числа от 111 до 999 записать в произвольном порядке, то полученное многозначное число делится на 37.

△ Всего таких трехзначных чисел $999 - 110 = 889$. Запишем само число в виде
$$S = a_1 + a_2 \cdot 10^3 + a_3 \cdot 10^6 + ... + a_{888} \cdot 10^{2661} + a_{889} \cdot 10^{2664},$$
где $a_1, a_2, ..., a_{889}$ — указанные в условии различные трехзначные числа. (Подумайте, почему последний показатель степени равен 2664.)

Преобразуем эту сумму, прибавляя и отнимая число $a_1 + a_2 + ... + a_{889}$ (прием «плюс-минус»):
$$S = (a_1 + a_2 + ... + a_{889}) + a_2(10^3 - 1) + a_3(10^6 - 1) + ... + a_{889}(10^{2664} - 1).$$

Все слагаемые последней суммы, начиная со второго, делятся на $10^3 - 1 = 999$, причем 999 делится на 111, а 111 делится на 37. Что касается первого слагаемого, то
$$a_1 + a_2 + ... + a_{889} = 111 + 112 + ... + 999.$$

Будем складывать слагаемые полученной суммы попарно: первое — с последним, второе — с предпоследним и т. д. Каждая из сумм
$$111 + 999, \quad 112 + 998, \quad 113 + 997$$
и т. д. равна 1110 и, следовательно, делится на 37. Но одному, среднему, слагаемому нет пары. Нетрудно подсчитать, что оно имеет номер 445 и равно 555, а значит, тоже делится на 37.

Мы получили, что сумма $a_1 + a_2 + ... + a_{889}$ делится на 37. Но тогда и вся сумма S делится на 37. ▲

262*. Найдите все натуральные n, для которых можно составить число, записывающееся n единицами и n нулями и делящееся на 13.

8.1.2. 7–8

Перейдем к другому типу задач на делимость.

263. Докажите, что если сумма $6a + 11b$ (a и b — целые числа) делится на 31, то и сумма $a + 7b$ делится на 31.

△ Умножим вторую из этих сумм на 6 с тем, чтобы уравнять у сумм коэффициенты при a. Из полученной суммы $6a + 42b$ вычтем первоначальную:
$$(6a + 42b) - (6a + 11b) = 31b$$

Оказалось, что разность двух этих чисел делится на 31. Так как, кроме того, по условию вычитаемое делится на 31, то на 31 делится и уменьшаемое $6a + 42b$, а следовательно, и сумма $a + 7b$. ▲

264. Верно ли, что если сумма $3x + 7y$ (x и y — целые) делится на 19, то и сумма $43x + 75y$ делится на 19? Если верно, докажите. Если неверно, опровергните с помощью примера.

265. Докажите, что суммы $8x + 5y$ и $17x + 3y$ делятся на 61 при одних и тех же целых значениях x и y.

266. Верно ли, что если сумма $3a + 46 + 5c$ (a, b, c — целые) делится на 11, то и сумма $9a + b + 4c$ делится на 11?

267. Найдите все целые числа x и y, для которых из делимости суммы $2x + 3y$ на 17 следует делимость суммы $9x + 4y$ на 17.

8.1.3. **8–9**

268. Какие три цифры нужно приписать к числу 456 для того, чтобы полученное шестизначное число делилось на 504? Найдите все решения.

△ Обозначим неизвестные цифры в последовательном порядке через x, y и z. Тогда шестизначное число принимает вид $\overline{456xyz}$.

Так как $504 = 7 \cdot 8 \cdot 9$, то, казалось бы, нужно использовать признаки делимости на 8 и 9. Но поскольку цифры x, y и z стоят рядом, то проще искать сразу число $\overline{xyz}$. Для этого поступим следующим образом:

$$\overline{456xyz} = 456000 + \overline{xyz}.$$

Разделим 456000 на 504 с остатком:

$$456000 = 504 \cdot 904 + 384.$$

Тогда

$$\overline{456xyz} = 504 \cdot 904 + 384 + \overline{xyz}.$$

Сумма $384 + \overline{xyz}$ должна делиться на 504.

Она может быть равной 504:

$$384 + \overline{xyz} = 504,$$

откуда

$$\overline{xyz} = 504 - 384 = 120.$$

Она может равняться также $504 \cdot 2 = 1008$:

$$384 + \overline{xyz} = 1008,$$

откуда

$$\overline{xyz} = 1008 - 384 = 624.$$

Ответ: цифры составляют числа 120 или 624. ▲

269. Какие две цифры нужно приписать справа к числу 1997 для того, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найдите все решения.

270. Какими должны быть цифры x и y для того, чтобы число $\overline{853xy6}$ делилось на 468? Найдите все решения.

271. Найдите такие цифры a, b и c, чтобы число $\overline{abc999}$ делилось на 13, 17 и 19. Укажите все решения.

272. Какими должны быть цифры a и b для того, чтобы число $\overline{a234b}$ делилось на 29? Найдите все решения.

273. Найдите цифры a и b, если число $\overline{19a97b}$ делится на 43. Укажите все решения.

8.1.4. 8–9

Займемся *комбинаторными задачами*, связанными с делимостью.

274. Сколько натуральных чисел, делящихся на 3 или 7, имеется среди натуральных чисел от 1 до 500?

△ Сначала подсчитаем, сколько натуральных чисел от 1 до 500 делятся на 3. Выпишем все такие числа:

$$3, \quad 6 = 3 \cdot 2, \quad 9 = 3 \cdot 3, \quad 12 = 3 \cdot 4, \ldots, \quad 498 = 3 \cdot 166.$$

Отсюда видно, что количество таких чисел равно 166.

Теперь найдем, сколько натуральных чисел, заключенных в тех же границах, делятся на 7. Выпишем их:

$$7, \quad 14 = 7 \cdot 2, \quad 21 = 7 \cdot 3, \ldots, \quad 497 = 7 \cdot 71.$$

Следовательно, количество этих чисел равно 71.

Но это еще не все: среди тех и других чисел имеются такие, которые делятся и на 3, и на 7, а значит, и на 21. Поскольку эти числа входят и в 166 чисел, делящихся на 3, и в 71 число, делящееся на 7, то они входят в 166 + 71 = 237 чисел дважды. Подсчитаем, сколько их. Выпишем числа от 1 до 500, делящиеся на 21:

$$21, \quad 42 = 21 \cdot 2, \quad 63 = 21 \cdot 3, \ldots, \quad 481 = 21 \cdot 23.$$

Следовательно, таких чисел 23. Тогда общее количество чисел, делящихся на 3 или 7, равно 237 – 23 = 214.

Ответ: 214. ▲

При решении этой задачи можно применять формулу включений и исключений для случая двух множеств:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(см. [18], § 4, формула (1)). Напомним еще аналогичную формулу для случая трех множеств:

$$n(A \cup B \cup C) =$$
$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C).$$

275. Сколько натуральных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, имеется среди первой тысячи натуральных чисел?

276. Сколько натуральных чисел, делящихся на 2, или 3, или 5, имеется среди первой тысячи натуральных чисел?

277. Сколько натуральных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 7, ни на 11, имеется среди первых 10 000 натуральных чисел?

278*. Сколько натуральных чисел первого миллиона:
а) делятся на 2 или 7, но не делятся на 3;
б) не делятся ни на 3, ни на 5, но делятся на 7?

279. Сколько натуральных чисел первой тысячи имеют в своей записи:
а) цифру 3; б) цифру 1 или 4?

280*. Сколько чисел среди натуральных чисел от 1 до 1000, которые делятся на 4, но не имеют цифры 4 в своей записи?

8.1.5. 8–9

Задачи этого цикла группируются вокруг утверждения задачи 281.

281°. Докажите, что при любом нечетном a разность $a^2 - 1$ делится на 8.

△ Так как

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1)$$

и числа $a + 1$ и $a - 1$ при нечетном a четны, то разность $a^2 - 1$ делится на 4. Но почему же она делится не только на 4, но и на 8?

Положим $a = 2k + 1$, где k — целое число, и преобразуем эту разность:

$$a^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1).$$

Из двух последовательных целых чисел k и $k + 1$ одно является четным, поэтому полученное произведение делится на 8. ▲

Доказанному результату можно придать такую форму: квадрат нечетного числа a при делении на 8 дает в остатке 1.

$$a^2 = 8b + 1 \quad (b = 0, 1, 2, \ldots).$$

282. Существует ли такое нечетное число a, что сумма $3a^2 + 1$ делится на 8?

283. Если число p — простое, то разность $p^2 - 5$ не делится на 8. Почему?

284. Докажите, что если числа a и b нечетны, то число $a^2 - b^2$ делится на 8.

285. Докажите, что при любом целом n число

$$n^5 - 5n^3 + 4n$$

делится на 120.

△ Разложим число 120 на простые множители:

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Кроме того, выражение $n^5 - 5n^3 + 4n$ разложим на множители:

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n(n^2 - 4)(n^2 - 1) =$$
$$= (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).$$

Достаточно доказать делимость последнего произведения на 3, 5 и 8.

Делимость на 3 и 5 доказать легко: из трех последовательных целых чисел, скажем, n, $n + 1$ и $n + 2$ одно делится на 3; из пяти последовательных целых чисел одно делится на 5. А как доказать делимость на 8?

Если n четно, то произведение трех четных чисел $n - 2$, n и $n + 2$ делится на 8.

Если n нечетно, то произведение

$$(n-1)(n+1) = n^2 - 1$$

делится на 8 на основании утверждения задачи 281. ▲

286. Верно ли, что число

$$9a^5 - 5a^3 - 4a$$

при любом целом a делится на 120?

287. Докажите, что если целое число n не делится ни на 2, ни на 3, ни на 5, то разность $n^4 - 1$ делится на 240.

288*. Докажите, что число

$$n^7 - 14n^5 + 49n^3 - 36n$$

при любом целом n делится на 5040.

8.1.6. 8–9

А здесь займемся *задачами на алгебраические дроби*, числитель и знаменатель которых содержат одну и ту же целочисленную переменную.

Обычный вопрос в такой задаче: при каких значениях этой переменной дробь равна целому числу? Подобные задачи уже встречались в книге [18] (см. § 7, задачи 187 и 188).

289. Найдите все целые a, при которых дробь

$$\frac{a^2 - 21a + 17}{a}$$

равна целому числу.

△ Разделим почленно числитель дроби на знаменатель:

$$\frac{a^2 - 21a + 17}{a} = a - 21 + \frac{17}{a}.$$

Представление алгебраической дроби в виде суммы многочлена и дроби с тем же знаменателем, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, называется *выделением целой части дроби*; многочлен и называется *целой частью дроби*. В данном случае целая часть дроби равна $a - 21$.

Так как разность $a - 21$ при всех целых a принимает целые значения, то вопрос задачи сводится к следующему: при каких целых a дробь $\frac{17}{a}$ равна целому числу?

Для полного ответа на этот вопрос нужно перебрать все делители числа 17, включая и целые отрицательные.

Получаем числа: 1, −1, 17, −17.

Ответ: ± 1, ± 17. ▲

290. Найдите все целые a, при которых дробь $\frac{18}{2a-1}$ равна целому числу.

291. Найдите все целые n, при которых дробь $\frac{n-2}{n+1}$ принимает целые значения.

△ Для выделения целой части дроби в числителе прибавим и отнимем 1 (прием «плюс-минус»):

$$\frac{n-2}{n+1} = \frac{(n+1)-1-2}{n+1} = \frac{(n+1)-3}{n+1} = 1 - \frac{3}{n+1}.$$

Дробь $\frac{3}{n+1}$ должна быть равна целому числу. Переберем все случаи.

1) Пусть $n + 1 = 1$. Тогда $n = 0$.
2) Пусть $n + 1 = -1$. Отсюда $n = -2$.
3) При $n + 1 = 3$ получаем $n = 2$.
4) При $n + 1 = -3$ находим, что $n = -4$.

Ответ: 2, 0, −2, −4. ▲

292. Найдите все целые n, при которых дроби

$$\text{а) } \frac{2n+7}{n-3}; \qquad \text{б) } \frac{5-3n}{n+2}$$

принимают целые значения.

293. Найдите все целые k, при которых значения дроби

$$\frac{2k^2+k-8}{k-1}$$

являются целыми числами.

△ Для выделения целой части дроби разделим ее числитель на знаменатель «углом» — по аналогии с делением многозначного натурального числа на другое натуральное число. Получаем:

$$\begin{array}{r|l}
2k^2 + k - 8 & k-1 \\ \cline{2-2}
-\;(2k^2 - 2k) & 2k+3 \\ \cline{1-1}
3k - 8 & \\
-\;(3k - 3) & \\ \cline{1-1}
-5. &
\end{array}$$

Понимать эту запись нужно следующим образом: делим старший член делимого на старший член делителя; полученное частное $2k$ умножаем на делитель и подписываем произведение

$$2k(k-1) = 2k^2 - 2k$$

под делимым; вычитаем из делимого это произведение и старший член полученной разности $3k - 8$ делим на старший член делителя и т. д.

Частное $2k + 3$ и является целой частью данной дроби. Тогда

$$\frac{2k^2 + k - 8}{k-1} = 2k + 3 - \frac{5}{k-1}.$$

А теперь обычный путь: перебираем все делители числа 5.

Ответ: 6, 2, 0, –4. ▲

294. Найдите все целые a, при которых дроби

$$\text{а) } \frac{6a^2 - 3a - 4}{2a+1}; \qquad \text{б) } \frac{a^3 + 4a^2 - 2a - 26}{a-3}.$$

принимают целые значения.

295. Найдите все натуральные n, при которых число $7n + 5$ делится на число $3n - 1$.

△ Здесь прямолинейное деление делимого на делитель «углом» не проходит, так как число 7/3 не является целым. Попробуем обходной путь.

Если дробь $\dfrac{7n+5}{3n-1}$ равна натуральному числу, то и утроенная дробь

$$\frac{3(7n+5)}{3n-1} = \frac{21n+15}{3n-1}$$

равна натуральному числу. Обратное утверждение также верно, поскольку числа 3 и $3n - 1$ взаимно просты (подумайте, почему).

Теперь уже можно применять или деление «углом», или прием «плюс-минус», во втором случае необходимо знать, какое слагаемое нужно выделять в числителе последней дроби. Очевидно, слагаемое, равное

$$(3n-1) \cdot 7 = 21n - 7.$$

Получаем:

$$\frac{21n+15}{3n-1} = \frac{(21n-7)+22}{3n-1} = 7 + \frac{22}{3n-1}.$$

Осталось перебрать случаи, когда $3n - 1$ равно 1, 2, 11 и 22.

Ответ: 1, 4. ▲

296. Найдите все натуральные n, при которых дроби

$$\text{а) } \frac{11n-9}{7n-1}; \qquad \text{б)* } \frac{n^4+n^2}{2n+1}$$

равны целым числам.

297*. Найдите все действительные x, при которых дробь

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}$$

принимает целые значения.

△ Обратим внимание, что здесь число x, вообще говоря, не является целым, поэтому способы, примененные в предыдущих задачах, мало помогают.

Положим

$$\frac{x^2+2x-3}{x^2+1}=a,$$

где число a — целое. Упростим выражение:

$$x^2+2x-3=ax^2+a, \quad (a-1)x^2-2x+(a+3)=0.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a=1$. Тогда последнее уравнение превращается в линейное. Найдем из него x:

$$-2x+4=0, \quad x=2.$$

2) Пусть $a\neq 1$. В этом случае уравнение является квадратным. Его дискриминант D должен быть неотрицательным:

$$\frac{1}{4}D=1-(a-1)(a+3)\geqslant 0, \quad 1-a^2+a-3a\geqslant 0, \quad a^2+2a-4\geqslant 0.$$

Последнее неравенство нужно решить в целых числах. Корни квадратного трехчлена, стоящего в его левой части, равны $-1\pm\sqrt{5}$, поэтому неравенство равносильно следующему:

$$-1-\sqrt{5}\leqslant a\leqslant -1+\sqrt{5}.$$

С учетом того, что $\sqrt{5}\approx 2.2$, получаем такие целые решения неравенства:

$$-3, -2, -1, 0, 1.$$

Случай $a=1$ мы уже рассмотрели.

При $a=-3$ будем иметь:

$$-4x^2-2x=0, \quad 2x^2+x=0; \quad x_1=0, \quad x_2=-1/2.$$

Значения $a=-2$, $a=-1$ и $a=0$ рассматриваются аналогично.

Ответ: $-3, -1, -1/2, 0, 1/3, 1, 2, (-1\pm\sqrt{5})/2$. ▲

298*. Найдите все действительные x, при которых дроби

$$\text{а) } \frac{x}{x^2-5x+7}; \qquad \text{б) } \frac{x^2-x-2}{x^2+4}$$

принимают целые значения.

299*. Найдите все целые a, при которых число a^2-71 делится на число $7a+55$.

300*. Найдите все натуральные n, при которых число n^5+3 делится на число n^2+1.

А теперь рассмотрим одиночные или, самое большее, парные задачи на делимость. Естественно, что их решение требует, кроме известных способов, и некоторых других.

301. Найдите какие-либо три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат натурального числа, большего 1.

302. На какое наибольшее натуральное число делится произведение любых трех последовательных четных чисел?

303. На какое наибольшее натуральное число делится произведение любых пяти последовательных нечетных чисел?

304. Докажите, что произведение любых пяти последовательных целых чисел делится на 120.

305. Докажите, что из любых десяти последовательных натуральных чисел можно выбрать три числа a, b и c так, что произведение $a(b + c)$ делится на 100.

△ В качестве a возьмем то из десяти последовательных чисел, которое делится на 10; такое a существует и единственно. В качестве b и c выберем любые числа, у которых сумма последних цифр равна 10 (например, у одного последняя цифра равна 3, а у другого — 7). Тогда произведение $a(b + c)$ делится на 100. ▲

306. Сумма цифр трехзначного числа, все цифры которого различны, делится на 7; само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

307. Найдите наименьшее натуральное число, делящееся на 63, у которого сумма цифр равна 63.

308. Докажите, что для любых целых чисел a и b либо $a + b$, либо $a - b$, либо ab делится на 3.

309. Если разность $a - b$ (a и b — целые) делится на 3, то разность $a^3 - b^3$ делится на 9. Почему?

310. Докажите, что сумма кубов любых трех последовательных целых чисел делится: а) на 3; б) на 9.

△ Обозначим среднее из трех чисел через n. Преобразуем данную сумму:

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 1 =$$

$$= 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2).$$

Отсюда следует, что эта сумма делится на 3. Но почему она делится и на 9? Рассмотрим два случая.

5 Зак. 579

1) Пусть n делится на 3. Тогда последнее произведение делится на 9.

2) Пусть n не делится на 3. В этом случае n^2 при делении на 3 даст в остатке 1 (см. § 6, утверждение задачи 163):

$$n^2 = 3k + 1 \qquad (k = 0, 1, 2, ...) \Rightarrow n^2 + 2 = 3k + 3.$$

Получилось, что и здесь это произведение делится на 9. ▲

311. Найдите все такие натуральные n, при которых сумма

$$n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2$$

делится на 10.

312*. Докажите, что если сумма $a^2 + ab + b^2$ (a и b — целые) делится на 9, то числа a и b делятся на 3.

313*. Докажите, что если $a - b$ делится на c и ab делится на c (a, b, c — целые, $c \neq 0$), то и сумма $a^3 + b^3$ делится на c.

314*. Верно ли, что если сумма $a^2 + b^2$ (a и b — натуральные) делится на 11, то числа a и b делятся на 11?

△ Давайте посмотрим, какие остатки может давать квадрат натурального числа при делении на 11. Результат вычислений можно оформить в виде следующей таблицы.

Остаток от деления a на 11	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Остаток от деления a^2 на 11	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1

Заполняется она таким образом. Если натуральное число a при делении на 11 дает в остатке r:

$$a = 11k + r \qquad (k \text{ и } r \text{ — целые неотрицательные, } r < 11),$$

то

$$a^2 = (11k + r)^2 = (121k^2 + 22\,kr) + r^2.$$

Следовательно, достаточно выяснить, какой остаток даст r^2 при делении на 11 (в случае если $r^2 > 11$, нужно r^2 разделить на 11 с остатком и записать в таблицу полученный остаток).

А теперь присмотримся к таблице: когда сумма остатков от деления на 11 квадратов двух натуральных чисел a и b равна 0 или 11? Только в одном случае: когда оба эти остатка равны нулю, т. е. когда и число a, и число b делятся на 11.

Ответ: верно. ▲

315*. Может ли число вида $2^{2n-1} + 2^n + 1$ делиться на 7 при каком-либо натуральном n?

316*. Докажите, что для любого натурального k существует такое натуральное n, что:

а) $3^n - 2^k$ делится на 7; б) $3^n + 2^k$ делится на 7.

317*. Найдите все натуральные n, при которых сумма

$$1^n + 2^n + 3^n + 4^n$$

делится на 10.

318*. Докажите, что если произведение

$$(10a + 192b)(11a + 191b)(12a + 190b),$$

где a и b — целые, делится на 101, то оно делится на 101^3.

8.2.

9–11

8.2.1.

9–11

319. Докажите, что сумма $n^2 + 3n + 4$ ни при каком целом n не делится на 49.

△ Данная сумма делится на 7, например, при $n = 2$. Но почему же она никогда не делится на 49?

Допустим противное: существует такое целое n, что число $n^2 + 3n + 4$ делится на 49. Тогда выполняется равенство

$$n^2 + 3n + 4 = 49k,$$

где k — целое. Будем это равенство рассматривать как квадратное уравнение относительно n:

$$n^2 + 3n + (4 - 49k) = 0.$$

Дискриминант D уравнения должен быть квадратом некоторого целого числа a:

$$D = 9 - 4(4 - 49k) = a^2; \quad 4 \cdot 49k - 7 = a^2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 7, значит, и правая его часть делится на 7. Тогда a делится на 7, а следовательно, a^2 делится на 49. Получаем противоречие: в этом равенстве правая часть делится на 49, а левая — нет. ▲

320. Существует ли такое целое n, что число $n^2 + n + 10$ делится на 169?

321. Докажите, что не существует целого числа a, для которого:

а) число $a^2 + 3a + 5$ делится на 121;

б) число $a^2 + 4a + 7$ делится на 100.

322. Существует ли такое целое a, что сумма $a^2 + 2a + 730$ делится на 81? Если существует, найдите хотя бы одно такое a. Если не существует, докажите.

323. Найдите все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

△ Обозначим двузначное число через $\overline{ab}$. Тогда

$$\overline{ab} \vdots ab, \quad (10a + b) \vdots ab.$$

Так как сумма $10a + b$ делится на a и первое ее слагаемое $10a$ делится на a, то и второе слагаемое b делится на a: $b = ka$, где k — целое неотрицательное число, меньшее 10.

Аналогично сумма $10a + b$ делится на b, второе ее слагаемое делится на b, следовательно, первое слагаемое делится на b:

$$10a \vdots b, \quad 10a \vdots ka,$$

откуда $10 \vdots k$. Тогда k может принимать только значения 1, 2 или 5. Рассмотрим все три случая.

1) Пусть $k = 1$.

В этом случае $b = a$. Делимость $(10a + b) \vdots ab$ превращается в делимость $11a \vdots a^2$, т. е. $11 \vdots a$. Значит, $a = 1$, $b = 1$. Получаем число $\overline{ab} = 11$.

2) Пусть $k = 2$.

Тогда $b = 2a$. Следовательно,

$$(10a + 2a) \vdots 2a \cdot a, \quad 12a \vdots 2a^2, \quad 6 \vdots a.$$

Отсюда $a \in \{1, 2, 3, 6\}$. Значение $a = 6$ нужно сразу отбросить, так как тогда $b = 12$. Если $a = 1$, 2 или 3, то соответственно $b = 2$, 4 или 6. Получаем числа 12, 24 и 36.

3) Пусть $k = 5$.

Тогда $b = 5a$. Значит,

$$(10a + 5a) \vdots 5a^2, \quad 3 \vdots a,$$

откуда $a = 1$, $b = 5$ (случай $a = 3$ невозможен). Следовательно, $\overline{ab} = 15$.

Ответ: 11, 12, 24, 36, 15. ▲

324. Найдите все трехзначные числа, составленные из четных цифр и делящиеся на их произведение.

325. Найдите все четырехзначные числа, которые делятся на произведение двух натуральных чисел, составленных (в том же порядке) из их первых двух цифр и последних двух цифр.

326. Найдите два таких трехзначных числа, что если первое из них приписать слева ко второму, то полученное шестизначное число делится на произведение двух исходных трехзначных чисел. Укажите все решения.

327. Найдите все 12-значные числа, которые делятся на произведение двух натуральных чисел, образованных (в том же порядке) из их первых 6 цифр и последних 6 цифр.

Рассмотрим *задачи на многочлены*, связанные с делимостью.

328. Докажите, что для любого целого n, отличного от 0 и ± 1, существует квадратный трехчлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, который при любом целом x не делится на n.

△ Подойдет, например, трехчлен $f(x) = nx^2 + nx + 1$. ▲

Очевидно, эту задачу (вместе с решением) можно обобщить на многочлен любой степени.

329. Постройте пример многочлена $P(x)$ третьей степени с целыми коэффициентами и коэффициентом старшего члена, равным 1, который при всех целых значениях x делится на 3.

△ Можно взять, например,

$$P(x) = x(x + 1)(x + 2).$$

Из трех последовательных целых чисел x, $x + 1$ и $x + 2$ одно делится на 3. ▲

330. Докажите, что для любого натурального n, большего 1, существует многочлен $P(x)$ n-й степени с целыми коэффициентами и коэффициентом старшего члена, равным 1, который при всех целых x делится на n.

331. Постройте пример многочлена $P(x)$ третьей степени с коэффициентом старшего члена, равным 1/6, который при всех целых x принимает целые значения.

332*. Пусть $P(x)$ — многочлен третьей степени с целыми коэффициентами, который при любом целом x принимает целые значения, делящиеся на 7. Докажите, что все его коэффициенты делятся на 7.

333*. Докажите, что многочлен

$$y = \frac{1}{5040}x^7 - \frac{1}{360}x^5 + \frac{7}{720}x^3 - \frac{1}{140}x$$

при всех целых x принимает целые значения.

334*. Найдите все целые числа p и q, для которых кубический многочлен

$$P(x) = x^3 + px + q$$

при всех целых значениях x принимает целые значения, делящиеся на 3.

335. Найдите все такие пары натуральных чисел, что сумма каждого из них с 1 делится на другое число.

△ Обозначим искомые числа через a и b. По условию

$$(a+1) \vdots b, \qquad (b+1) \vdots a. \tag{1}$$

Докажем, что числа a и b взаимно просты: НОД $(a, b) = 1$.

В самом деле, если НОД $(a, b) = d$, то

$$(a+1) \vdots b, \quad b \vdots d \Rightarrow (a+1) \vdots d.$$

Но первое слагаемое a суммы $a + 1$ тоже делится на d, тогда и второе слагаемое делится на d: $1 \vdots d$, откуда $d = 1$.

В таком случае система двух записанных выше делимостей равносильна следующей:

$$(a+b+1) \vdots ab. \tag{2}$$

Действительно, из делимостей (1) следует делимость (2), а из делимости (2) — каждая из делимостей (1).

(Обратите внимание, что указанная здесь равносильность справедлива только тогда, когда натуральные числа a и b взаимно просты.)

Пусть $a \leqslant b$. Это ограничение не мешает решению, так как делимости (1) симметричны относительно a и b. Поскольку сумма $a + b + 1$ делится на произведение ab, то $ab \leqslant a + b + 1$. Получаем:

$$ab \leqslant a + b + 1 \leqslant b + b + b = 3b.$$

Оказалось, что $ab \leqslant 3b$. Следовательно, $a \leqslant 3$, а значит, $a \in \{1; 2; 3\}$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $a = 1$.

Тогда делимость $(a + 1) \vdots b$ принимает вид $2 \vdots b$. Отсюда $b = 1$ или $b = 2$. В обоих случаях вторая делимость $(b + 1) \vdots a$ выполняется.

2) Пусть $a = 2$.

Тогда $3 \vdots b$. Следовательно, $b = 1$ или $b = 3$. Но первую возможность нужно отбросить, так как должно выполняться неравенство $a \leqslant b$, а вторая дает верную делимость $(3 + 1) \vdots 2$.

3) Пусть $a = 3$.

Получаем $4 \vdots b$. Из трех делителей 1, 2 и 4 числа 4 нужно оставить только последний: $b = 4$. Но тогда делимость $(b + 1) \vdots a$ не выполняется.

Ответ: 1, 1; 1, 2; 2, 3. ▲

336. Найдите все пары натуральных чисел k и n, если

$$(2k+1) \vdots n, \quad (2n+1) \vdots k.$$

337. Найдите все пары натуральных чисел k и n, если

$$(3k-1) \vdots n, \quad (3n-1) \vdots k.$$

338. Найдите все такие тройки попарно взаимно простых натуральных чисел, что сумма любых двух из них делится на третье.

△ Обозначим эти числа через a, b и c. Тогда

$$(a + b)⋮c, \quad (a + c)⋮b, \quad (b + c)⋮a.$$

Применим такой же способ решения, что и в задаче 335. Так как числа a, b и c по условию попарно взаимно просты, то система трех делимостей равносильна одной:

$$(a + b + c)⋮abc$$

(проверьте!). Пусть $a \leqslant b \leqslant c$. Получаем:

$$abc \leqslant a + b + c \leqslant c + c + c = 3c,$$

откуда $abc \leqslant 3c$, $ab \leqslant 3$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $a = b = 1$.

Тогда делимость $(a + b)⋮c$ принимает вид $2⋮c$, а значит, $c = 1$ или $c = 2$. В каждом из этих подслучаев делимости $(a + c)⋮b$ и $(b + c)⋮a$ выполняются.

2) Пусть $a = 1$, $b = 2$.

Тогда $3⋮c$, а следовательно, $c = 1$ или $c = 3$. Значение $c = 1$ нужно отбросить, а при $c = 3$ получаем верные делимости $4⋮2$ и $5⋮1$.

Случай $a = 2$, $b = 1$ рассматривать не нужно, поскольку должно выполняться неравенство $a \leqslant b$.

3) Пусть $a = 1$, $b = 3$.

Тогда $4⋮c$, а значит, $c = 4$. Но в этом случае делимость $(a + c)⋮b$ принимает вид $5⋮3$, что неверно.

Ответ: 1, 1, 1; 1, 1, 2; 1, 2, 3. ▲

339. Найдите все такие тройки натуральных чисел, отличных от 1, что произведение любых двух из них, сложенное с 1, делится на третье.

340. Найдите все такие тройки натуральных чисел, что произведение любых двух из них при делении на третье дает в остатке 1.

341. Найдите все такие четверки натуральных чисел, отличных от 1, что произведение любых трех из них, сложенное с 1, делится на четвертое число.

8.2.5. 9–11

А теперь займемся одиночными или парными задачами на делимость.

342. Найдите наименьшее девятизначное число $\overline{a_1a_2a_3...a_9}$, если число $\overline{a_1a_2}$ делится на 2, число $\overline{a_1a_2a_3}$ делится на 3 и т. д., число $\overline{a_1a_2a_3...a_9}$ делится на 9.

343. Запись девятизначного числа, делящегося на 37, разделили на две части и переставили эти части местами. Всегда ли полученное девятизначное число делится на 37?

△ Пусть исходное число равно

$$m = \overline{a_1a_2...a_9}$$

и оно разделено на части

$$x=\overline{a_1a_2...a_k},\quad y=\overline{a_{k+1}a_{k+2}...a_9}\quad (1\leqslant k\leqslant 9).$$

Тогда

$$m=x\cdot 10^{9-k}+y.$$

По условию

$$m=37b,\quad x\cdot 10^{9-k}+y=37b\quad (b\in N),$$

откуда

$$y=37b-x\cdot 10^{9-k}$$

Запишем новое девятизначное число:

$$n=\overline{a_{k+1}a_{k+2}...a_9a_1a_2...a_k}=y\cdot 10^k+x.$$

Составим разность $n-m$ с тем, чтобы выяснить, всегда ли она делится на 37:

$$n-m=(y\cdot 10^k+x)-(x\cdot 10^{9-k}+y)=$$
$$=(37b-x\cdot 10^{9-k})\cdot 10^k+x-x\cdot 10^{9-k}-37b+x\cdot 10^{9-k}=$$
$$=37b\cdot 10^k-37b-x\cdot(10^9-1)=(37b\cdot 10^k-37b)-x\cdot 999999999.$$

Число 999999999 делится на 111, а следовательно, и на 37.

Получилось, что разность $n-m$ делится на 37. Кроме того, вычитаемое m делится на 37. Отсюда и уменьшаемое n делится на 37.

Ответ: всегда. ▲

344. Докажите, что если p — простое число, большее 2, то числитель дроби, равной сумме

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p-1},$$

делится на p.

△ Число слагаемых суммы равно $p-1$. Поскольку p — простое число, большее 2, то p нечетно, откуда $p-1$ четно.

Запишем сумму S в следующем виде:

$$S=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{p-3}\right)+...+\left(\frac{1}{\frac{1}{2}(p-1)}+\frac{1}{\frac{1}{2}(p+1)}\right)=$$
$$=\frac{p}{p-1}+\frac{p}{2\cdot(p-2)}+\frac{p}{3\cdot(p-3)}+...+\frac{p}{\frac{1}{2}(p^2-1)}.$$

После сложения этих дробей получится дробь, числитель которой делится на p, а знаменатель равен произведению

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(p-1)=(p-1)!,$$

которое является взаимно простым с p. Поэтому число p из числителя этой последней дроби сократиться не может. ▲

345. Верно ли, что при любом нечетном $n\geqslant 3$ произведение

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n-1}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot...\cdot(n-1)$$

делится на n? Если верно, докажите, если неверно, опровергните.

346. Докажите, что если числа a, b, c — целые, то из трех чисел

$$a^3 - abc, \quad b^3 - abc, \quad c^3 - abc$$

по меньшей мере одно делится на 2 и по меньшей мере одно делится на 3.

347. Докажите, что если m, n, p, q — натуральные числа, где $m \neq p$, и

$$(mn + pq) \vdots (m - p),$$

то и

$$(mq + np) \vdots (m - p).$$

△ Составим разность данных сумм и преобразуем ее:

$$(mn + pq) - (mq + np) = m(n - q) - p(n - q) = (n - q)(m - p).$$

Так как эта разность делится на $m - p$ и уменьшаемое $mn + pq$ делится на $m - p$, то и вычитаемое $mq + np$ делится на $m - p$. ▲

348. Пусть a, b, m, n — натуральные числа и

$$(am + bn) \vdots (a + b).$$

Всегда ли при этом условии

$$(an + bm) \vdots (a + b)?$$

349. Пусть a, b, c, d — натуральные числа и $a + c = b + d$. Докажите, что при любом натуральном n сумма

$$ab^{2n} + cd^{2n}$$

делится на $a + c$.

350. Докажите, что если сумма $(n - 1)! + 1$, где n — натуральное число, большее 1, делится на n, то число n — простое.

351*. Найдите все натуральные $n > 1$, для которых $(n - 1)!$ делится на n.

△ Рассмотрим две возможности.

1) Пусть число n — простое.

Но тогда число $(n - 1)!$ — взаимно простое с n и, следовательно, не может делиться на n. Поэтому такой случай отпадает.

2) Пусть число n — составное.

Если при этом n разлагается на два *различных* множителя a и b, больших 1, то числа a и b входят в разложение

$$(n - 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n - 1),$$

причем на различных местах. Отсюда $(n - 1)!$ делится на $ab = n$. Это значит, что все такие составные n удовлетворяют условию задачи.

Пусть теперь $n = a^2$ $(a > 1)$. При $a = 2$, т. е. при $n = 4$ получаем: $3!$ делится на 4, что неверно. Если же $a > 2$, то для того, чтобы произведение

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (a^2 - 1)$$

делилось на $n = a^2$, достаточно, чтобы среди множителей содержались числа a и $2a$, т. е., чтобы

$$a^2 - 1 \geqslant 2a, \quad a^2 - 2a - 1 \geqslant 0.$$

Тогда $a \geqslant 1 + \sqrt{2}$. Но последнее неравенство при всех $a > 2$ выполняется. Поэтому все $n = a^2$, где $a > 2$, также подходят.

Ответ: все составные числа, отличные от 4. ▲

352*. Существует ли двузначное число $\overline{ab}$ с разными цифрами, которое делится на число $\overline{ba}$?

△ Предположим, что такое двузначное число существует. Тогда

$$\overline{ab} = k \cdot \overline{ba},$$

где k — натуральное, $1 < k \leqslant 9$.

Сложим числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$. С одной стороны, их сумма равна

$$\overline{ab} + \overline{ba} = k \cdot \overline{ba} + \overline{ba} = (k + 1)\,\overline{ba},$$

а с другой —

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Но равенство

$$(k + 1)\overline{ba} = 11(a + b)$$

невозможно, так как ни число $k + 1$, ни число $\overline{ba}$ не делится на 11.

Ответ: не существует. ▲

353*. Существует ли трехзначное число $\overline{abc}$ с различными цифрами, которое делится на число $\overline{cba}$?

354*. Натуральные числа x, y и z таковы, что

$$(x - y)(y - z)(z - x) = x + y + z.$$

Докажите, что сумма $x + y + z$ делится на 27.

355*. Найдите все пары натуральных чисел x и y, для которых сумма $x + y$ делится на $xy - 1$.

356*. Натуральные числа a и b таковы, что

$$(a^2 + ab + 1) \vdots (b^2 + ba + 1).$$

Докажите, что $a = b$.

На этом мы заканчиваем большой цикл задач на делимость, который начали еще в § 5. Задачи на делимость буквально пронизывают тему «Задачи с целыми числами», занимая в ней ведущее место. В частности, задачи следующих §§ 9–11 непосредственно примыкают к задачам на делимость, да и в остальных параграфах соображения делимости играют важную роль.

§ 9. Простые и составные числа **8–11**

Литература: [3], [17], [51], [70[в]], [76[в]], [83].

Вспомним соответствующие определения.

Натуральное число, большее 1, называется *простым*, если оно делится только на 1 и на само себя. Натуральное число называется *составным*, если оно имеет больше двух различных делителей.

Принято считать, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Отсюда следует, что множество натуральных чисел можно разбить на такие три подмножества: множество простых чисел, множество составных чисел и множество, содержащее единственный элемент 1.

Справедлива следующая теорема.

Любое натуральное число, большее 1, можно, и притом единственным образом, представить в виде произведения простых чисел.

Это предложение называется *основной теоремой арифметики натуральных чисел*.

На его доказательстве мы здесь не останавливаемся. Оно приводится, например, в книге [76].

Среди простых делителей натурального числа могут быть равные, и их произведение можно записать в виде степени. Тогда разложение натурального числа a на простые множители можно представить в следующем виде:

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_3^{k_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{k_n},$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа, $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — натуральные.

Перейдем к задачам.

357. Володя имеет две небольшие специальные библиотечки: книги по туризму и книги по шахматам. Те и другие он нумерует отдельно. Изучая по учебнику тему «Простые и составные числа» и одновременно перебирая свои книжные богатства, Володя обнаружил, что книг по туризму с простыми номерами у него столько же, сколько и с непростыми, а книг по шахматам с составными номерами — столько же, сколько и с несоставными. Какое наибольшее число книг могло быть у него в каждой из библиотечек? В какой библиотечке книг больше?

358. К двузначному числу приписали такое же число. Может ли полученное четырехзначное число быть простым?

359. Натуральные числа a и b таковы, что

$$31a = 54b.$$

Докажите, что число $a + b$ составное.

△ Так как число $31a$ делится на 54 и числа 31 и 54 — взаимно простые, то a делится на 54: $a = 54n$, где $n \in N$. Тогда

$$31 \cdot 54 \cdot n = 54b, \quad b = 31n.$$

Отсюда

$$a + b = 54n + 31n = 85n,$$

а следовательно, число $a + b$ является составным. ▲

360. Натуральные числа a и b удовлетворяют условию $15a = 32b$. Может ли число $a - b$ быть простым? Если может, постройте пример, если не может, докажите.

361. Простое число разделено на 21 с остатком. Найдите все значения остатка, являющиеся составными числами.

△ Обозначим простое число через p, неполное частное — через q, остаток — через r. Тогда

$$p = 21q + r \quad (0 < r < 21).$$

Поскольку p — число простое, то из всех составных значений r, меньших 21, нужно выбирать все те, которые взаимно просты с 3 и 7, иначе сумма $21q + r$ делится на 3 или 7. Подходят значения

$$r = 4, 8, 10, 16, 20.$$

Нужно еще проверить, что для каждого из этих значений r существует простое число p, которое при делении на 21 дает именно такой остаток; например, при $r = 4$ можно взять $p = 67$, где число 67 получено как $21 \cdot 3 + 4$.

Ответ: 4, 8, 10, 16, 20. ▲

362. Может ли быть составным числом остаток от деления простого числа на: а) 30; б) 60?

363. К числу, являющемуся произведением двух последовательных натуральных чисел, приписали справа число 21. Докажите, что полученное число составное.

364. Найдите все натуральные a, при которых число $a^2 - 10a + 21$ простое.

△ Разложим этот квадратный трехчлен на линейные множители:

$$a^2 - 10a + 21 = (a - 3)(a - 7).$$

Отсюда видно, что данное число, вообще говоря, составное. А когда оно простое? Когда один из множителей равен 1, а другой — простому числу или когда один из них равен -1, а другой равен $-p$, где число p — простое. Переберем все случаи.

1) Пусть $a - 3 = 1$.

Тогда $a = 4$, откуда $a - 7 = -3$. Получилось, что число $a^2 - 10a + 21$ отрицательно. Значит, этот случай невозможен.

2) Пусть $a - 7 = 1$.

Тогда $a = 8$, $a - 3 = 5$, где 5 — число простое. Следовательно, значение $a = 8$ удовлетворяет требованию задачи.

3) Положим $a - 3 = -1$.

В этом случае $a = 2$, $a - 7 = -5$. Так как число 5 — простое, то значение $a = 2$ также подходит.

4) Пусть $a - 7 = -1$.

Тогда $a = 6$, $a - 3 = 3$. Поскольку здесь $(a - 3)(a - 7) < 0$, то этот случай невозможен.

Ответ: 8, 2. ▲

365. Найдите все целые n, при которых модуль числа $n^2 - 7n + 10$ — число простое.

366. Найдите все натуральные числа n, при которых являются простыми числа:
а) $n^3 - n^2 + n - 1$; б) $n^3 - 6n + 4$.

367. Найдите все натуральные n, при которых число $n^4 + 4$ составное.

△ Попробуем разложить выражение $n^4 + 4$ на множители с целыми коэффициентами. Мы привыкли к тому, что сумма квадратов на множители с целыми коэффициентами не разлагается. Оказывается, иногда разлагается. В данном случае это делается с помощью приема «плюс-минус» следующим образом:

$$n^4 + 4 = (n^4 + 4 + 4n^2) - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - 4n^2 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2).$$

Очевидно, множитель $n^2 + 2n + 2$ всегда больше 1. Второй множитель $n^2 - 2n + 2$ может быть равным 1:

$$n^2 - 2n + 2 = 1, \quad n^2 - 2n + 1 = 0, \quad (n - 1)^2 = 0, \quad n = 1.$$

Так как при $n = 1$ множитель $n^2 + 2n + 2$ принимает значение 5, являющееся простым числом, то значение $n = 1$ нужно отбросить.

Ответ: все $n \neq 1$. ▲

368. Найдите все натуральные a, при которых являются составными числа:
а) $a^4 + 64$; б) $a^4 + a^2 + 1$; в)* $a^5 + a + 1$.

369. Найдите все натуральные числа a и b, при которых число $a^4 + 4b^4$ простое.

370. Найдите все натуральные n, при которых число $\frac{1}{5}(n^3 - 1)$ простое.

371. Найдите хотя бы одно натуральное n, при котором число $n^2 + 21n + 1$ является составным.

372. Верно ли, что все члены последовательности $(210n + 1)$ — простые числа? Если верно, докажите, если неверно, найдите хотя бы один член последовательности, который является составным числом.

373. Докажите, что среди членов последовательностей:

а) $2^2+1,\quad 4^2+1,\quad 6^2+1,\quad 8^2+1,\ldots;$

б)* $4^2+1,\quad 14^2+1,\quad 24^2+1,\quad 34^2+1,\ldots$

имеется бесконечное множество составных чисел.

374. Простое или составное число $2^{80}+3^{80}$?

375. Докажите, что число $2^{17}+2^5-1$ является составным.

376*. Докажите, что любое число вида

$$a=101010\ldots101$$

(n нулей, $n+1$ единица, где $n>1$) составное.

△ Преобразуем число a, учитывая, что всего у него $2n+1$ цифр, а следовательно, первая единица — разряда $2n$:

$$a=101010\ldots101=10^{2n}+10^{2n-2}+10^{2n-4}+\ldots+10^2+1=$$

$$=\frac{1}{10^2-1}(10^2-1)(10^{2n}+10^{2n-2}+\ldots+10^2+1)=\frac{1}{99}(10^{2n+2}-1)=$$

$$=\frac{1}{99}((10^{n+1})^2-1)=\frac{1}{99}(10^{n+1}+1)(10^{n+1}-1).$$

Здесь применялось тождество (1) из § 7.

Теперь рассмотрим два случая.

1) Пусть n четно.

Тогда сумма $10^{n+1}+1$ делится на 11 (см. § 7, третья делимость), причем частное от такого деления больше 1, так как $10^{n+1}+1>11$; разность $10^{n+1}-1$ делится на 9, причем частное также больше 1. Получилось составное число

$$a=\frac{10^{n+1}+1}{11}\cdot\frac{10^{n+1}-1}{9}.$$

2) Пусть n нечетно.

В этом случае разность $10^{n+1}-1$ делится на $10^2-1=99$ и частное больше 1, поскольку $10^{n+1}-1>99$. ▲

377*. Докажите, что все числа вида

$$10001,\quad 100010001,\quad 1000100010001,\ldots$$

составные.

378*. Докажите, что число

$$8\cdot(3^{5k}+5^{5n})-5$$

при любых натуральных k и n является составным.

379*. Какое наибольшее число простых чисел может быть среди 15 последовательных натуральных чисел, больших 2?

△ Очевидно, простые числа нужно искать среди нечетных. Из 15 последовательных натуральных чисел имеется 7 или 8 нечетных. Среди любых трех последовательных нечетных чисел ровно одно делится на 3 (докажите!), поэтому среди 7 или 8 последовательных нечетных натуральных чисел имеются 2 или 3 числа, делящихся на 3. Если их отбросить, то останется 5 или 6 нечетных чисел.

Нужно еще убедиться, что 6 простых чисел возможны. Например, если взять такие 15 последовательных натуральных чисел:

$$3, 4, 5, 6, \ldots, 17,$$

то среди них 6 простых:

$$3, 5, 7, 11, 13, 17.$$

Ответ: 6. ▲

380*. Составьте из простых чисел все возможные арифметические прогрессии с разностью 6 и числом членов, большим 4.

381. Числа p и $p + 15$ простые. Найдите все такие p.

△ При $p = 2$ получаем, что число $p + 15 = 17$ простое.

Пусть $p > 2$. Тогда p нечетно. Следовательно, число $p + 15$ четно. Отсюда это число составное. Значит, никакое простое $p > 2$ не подходит.

Ответ: 2. ▲

382°. Докажите, что все числа p, $p + 2$ и $p + 4$ являются простыми только в случае, когда они образуют тройку 3, 5, 7.

△ Рассмотрим несколько случаев в зависимости от p.

При $p = 2$ уже число $p + 2 = 4$ — составное, поэтому значение $p = 2$ отпадает.

При $p = 3$ получаем тройку 3, 5, 7, о которой упоминается в условии задачи.

При $p = 5$ число $p + 2 = 7$ — простое, но число $p + 4 = 9$ — составное, значит, $p = 5$ нужно отбросить.

При $p = 7$ число $p + 2 = 9$ — составное.

При $p = 11$ число $p + 4 = 15$ — тоже составное.

Возникает предположение, что подходит только $p = 3$. Докажем его.

Нетрудно заметить, что значения $p = 5$, $p = 7$ и $p = 11$ не подходили потому, что или $p + 2$, или $p + 4$ делится на 3. Убедимся, что так будет всегда при простом $p > 3$.

Простое число, большее 3, не делится на 3 и, следовательно, при делении на 3 может давать в остатке только 1 или 2. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть p при делении на 3 дает в остатке 1: $p = 3k + 1$ $(k \in N)$. Тогда число

$$p + 2 = (3k + 1) + 2 = 3k + 3$$

делится на 3, причем частное от этого деления больше 1. Значит, число $p + 2$ — составное.

2) Пусть $p = 3k + 2$ $(k \in N)$. Тогда число

$$p + 4 = (3k + 2) + 4 = 3k + 6$$

составное. ▲

383. Найдите все такие p, при которых числа p, $p + 10$ и $p + 20$ простые.

384. Найдите все простые p, при которых являются простыми числа:
а) $p^2 + 13$; б) $p^2 + 14$; в) $2p + 1$ и $4p + 1$; г) $p^4 - 6$; д) $p^2 + 4$ и $p^2 + 6$.

385. Найдите все простые p, при которых являются простыми числа:

$$p^2 - 2,\ 2p^2 - 1 \text{ и } 3p^2 + 4.$$

386*. Найдите все простые p, при которых являются простыми числа:
а) $p^{p+1} + 8$; б) $4^p + p^4 + 2$.

387. Найдите все пары простых чисел p и q, сумма и разность которых простые числа.

△ Так как числа $p + q$ и $p - q$ — простые, то меньшее из чисел p и q, т. е. число q равно 2: в противном случае $p + q$ и $p - q$ были бы четными.

Получаем тройку простых чисел:

$$p - 2, \quad p, \quad p + 2.$$

Но мы уже знаем (см. утверждение задачи 382), что она должна совпадать с тройкой 3, 5, 7. Отсюда $p = 5$.

Ответ: $p = 5$, $q = 2$. ▲

388. Найдите все простые числа, которые являются одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

389. Найдите все пары простых чисел p и q, для которых являются простыми числа:
а) $7p + q$ и $pq + 11$; б) $pq + 1$ и $pq - 1$; в)* $p^{p+1} + q^{q+1}$.

390. Найдите все такие простые числа p и q, при которых число $(p + 1)^q$ — квадрат натурального числа.

391. Найдите три последовательных простых числа (необязательно отличающихся на 1 или на 2 друг от друга), сумма квадратов которых также простое число. Укажите все решения.

△ Обозначим эти простые числа в порядке возрастания через p, q и r. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $p = 2$.

Тогда числа q и r нечетны, а значит, сумма $4 + q^2 + r^2$ четна. Поэтому случай $p = 2$ невозможен.

2) Пусть $p = 3$.

Следующие за 3 простые числа — это 5 и 7. Сделаем проверку:

$$3^2 + 5^2 + 7^2 = 9 + 25 + 49 = 83.$$

Получилось простое число, а это и требовалось.

3) Пусть $p > 3$.

Тогда и числа q и r больше 3. Следовательно, ни одно из чисел p, q и r не делится на 3. Но квадрат натурального числа, не делящегося на 3, при делении на 3 может давать в остатке только 1 (см. утверждение задачи 163 из § 6). Будем иметь:

$$p^2 + q^2 + r^2 = (3k + 1) + (3l + 1) + (3m + 1) = 3k + 3l + 3m + 3.$$

Поскольку эта сумма делится на 3, то случай $p > 3$ невозможен.

Ответ: 3, 5, 7. ▲

392. Найдите все тройки таких простых чисел, что одно из них равно:

а) разности квадратов двух других;

б) разности кубов двух других.

393. Докажите, что существует бесконечное множество составных чисел вида $2^n - 1$, где n — нечетное натуральное число.

△ Возьмем в качестве n любое с о с т а в н о е число. Тогда $n = ab$, где a и b — натуральные числа, $a > 1$, $b > 1$. Получается, что разность

$$2^n - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1$$

делится на $2^a - 1$, причем и число $2^a - 1$, и частное от этого деления больше 1. ▲

394. Докажите, что если разность $2^n - 1$, где n — натуральное, — простое число, то и число n простое.

395. Если сумма $2^n + 1$, где n натуральное, — число простое, то $n = 2^k$ ($k \in N$). Докажите или опровергните.

396. Если p — простое число, большее 3, то число

$$n = 2^{2p} + 3a + 2$$

составное при любом натуральном a. Почему?

397. Докажите, что если число 111...1 (n единиц) — простое, то и n — простое. Верно ли обратное утверждение?

398. Докажите, что для любого натурального a:

а) существует такое натуральное число x, что число $ax + 1$ составное;

б) таких x — бесконечное множество.

△ а) Подберем x так, чтобы выполнялось, например, равенство

$$ax + 1 = (a + 1)^2.$$

Отсюда

$$ax + 1 = a^2 + 2a + 1, \quad x = a + 2.$$

Так как число $(a + 1)^2$ составное, то утверждение доказано.

Можно также находить x из равенств:

$$ax + 1 = (2a +1)^2, \quad ax + 1 = (3a + 1)^2, \quad ax + 1 = (a + 1)(2a + 1)$$

и т. д.

б) По аналогии с предыдущим найдем x так, чтобы

$$ax + 1 = (ka + 1)^2,$$

где k — любое натуральное число (или, скажем, из равенства $ax + 1 = (a + 1)(ka + 1)$). Тогда

$$x = k^2a + 2k.$$

Поскольку таких x — бесконечное множество за счет k, то утверждение доказано. ▲

399. Верно ли, что для любого натурального a существует такое натуральное число x, что будет составным число:

а) $ax + 3$; б) $ax + 5$?

400*. Докажите, что при любом натуральном a среди чисел вида

$$(7n + a)^2 + 3 \quad (n \in N)$$

имеется бесконечное множество составных чисел.

401*. Пусть p_1 и p_2 — два последовательных нечетных простых числа и $\frac{p_1 + p_2}{2} = q$. Докажите, что число q составное.

△ Пусть $p_1 < p_2$. Тогда

$$p_1 < \frac{p_1 + p_2}{2} < p_2$$

(проверьте!), т. е. $p_1 < q < p_2$. Так как p_1 и p_2 — ближайшие друг к другу простые числа, то число q, заключенное между ними, может быть только составным. ▲

402*. Докажите, что *множество всех простых чисел бесконечно.*

Это теорема Евклида (IV в. до н. э.) из его знаменитого труда «Начала». Она играет важную роль в теории чисел.

△ Допустим противное: множество простых чисел конечно и состоит из чисел $2, 3, 5, 7, ..., p$, где, следовательно, p — самое большое простое число.

Рассмотрим число

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot ... \cdot p + 1.$$

Обозначим через q любой простой делитель числа a.

Тогда $q \neq 2$, так как если $q = 2$, то из делимости на 2 числа a и первого слагаемого в правой части равенства следует, что 1 делится на 2, а это неверно.

Аналогично доказывается, что

$$q \neq 3, \quad q \neq 5, \quad q \neq 7, ..., \quad q \neq p.$$

Получилось, что q — новое простое число, которое не содержится среди исходных чисел. Мы пришли к противоречию.

Остается принять, что множество простых чисел бесконечно. ▲

403*. Докажите, что множество простых чисел вида:

а) $4k + 3$ $(k \in N)$; б) $6k + 5$ $(k \in N)$

бесконечно.

404*. Докажите, что для любого натурального n существует n последовательных составных чисел.

Это также одна из теорем теории чисел. Если вдуматься, то перед нами удивительное предложение: ведь n может быть очень большим, например, равным 10^{20}, тем не менее найдутся 10^{20} составных чисел, непосредственно следующих друг за другом, т. е. существуют промежутки сколь угодно большой длины, которые не содержат ни одного простого числа.

△ Составим следующую конечную последовательность:

$$(n+1)!+2, \quad (n+1)!+3, \quad (n+1)!+4, \ldots, \quad (n+1)!+(n+1).$$

Очевидно, в ней n членов. При этом первый ее член делится на 2, второй — на 3, третий — на 4 и т. д., последний — на $n+1$. Следовательно, все члены этой последовательности являются составными числами. ▲

§ 10. Деление с остатком 7–9

Литература: [3], [17$^{\text{в}}$], [22], [27$^{\text{в}}$], [33], [91].

С делением с остатком мы с вами на страницах этой книги уже встречались, и довольно часто. Например, с ним связаны утверждения некоторых опорных задач: 120 (§ 5), 163, 181 (§ 6) и 281 (§ 8). Утверждения многих задач на делимость можно переформулировать так, что в новой формулировке будет упоминаться деление с остатком. При решении многих задач на делимость деление с остатком используется часто (см., например, решение задачи 314).

Теорема о делении с остатком читается следующим образом.

Для любых натуральных чисел a и b существует, и притом единственная, такая пара целых неотрицательных чисел q и r, где $r < b$, что

$$a = bq + r. \tag{1}$$

При этом число a называется *делимым*, b — *делителем*, q — *частным* (*неполным частным*), r — *остатком*.

В случае, когда натуральное число a делится на натуральное число b:

$$a = bq \quad (q \in N), \tag{2}$$

можно считать, что получилось равенство вида (1), когда $r = 0$, т. е. равенство (2) — частный случай равенства (1).

Сформулируем равенство (1) словами: *делимое равно произведению делителя на частное, сложенному с остатком.*

Например, тот факт, что число 43 при делении на 6 дает частное 7 и остаток 1, выражается равенством следующим образом:

$$43 = 6 \cdot 7 + 1.$$

Доказательство теоремы о делении с остатком можно найти, скажем, в книге [3].

Утверждение теоремы можно обобщить на случай, когда числа a и b — целые, $b \neq 0$. При этом числа q и r должны быть целыми, причем остаток r — удовлетворять неравенству $0 \leqslant r \leqslant |b|$.

Сначала рассмотрим ***вводные задачи*** на деление с остатком.

405. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 6 в частном получится то же число, что и в остатке.

△ Обозначим искомое число через a, частное и одновременно остаток — через q. Тогда

$$a = 6q + q = 7q.$$

Казалось бы, ответом являются все натуральные числа, делящиеся на 7. Однако это не так, поскольку остаток q должен удовлетворять неравенству $0 < q < 6$. Полагая $q = 1, 2, 3, 4$ и 5, находим все возможные значения a.

Ответ: 7, 14, 21, 28, 35. ▲

406. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 9 в частном получается число, на 1 большее остатка.

407. Найдите частное и остаток от деления числа

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 + 75$$

на 35.

408. Из множества чисел

$$\{2; 3; 9; 27; 81; 243; 567\}$$

выбраны числа a, b, q и r так, что получается равенство (1). Найдите делимое, делитель, частное и остаток.

△ Начнем с делимого. Оно не равно 2, 3 или 9, поскольку является наибольшим из четырех чисел. Оно не равно также 27, 81 или 243, так как при делении каждого из этих чисел на все предшествующие в остатке получаются 0 или 1 (проверьте!), а чисел 0 и 1 среди элементов множества нет. Следовательно, делимое равно 567.

Перейдем к делителю. Он отличен от чисел 3, 9, 27 и 81, поскольку 567 делится на каждое из этих чисел без остатка. Значит, делитель равен 2 или 243. Но 2 исключается, так как 567 при делении на 2 дает в остатке 1; остается число 243.

Осталось разделить 567 на 243 с остатком:

$$567 = 243 \cdot 2 + 81.$$

Ответ: 567, 243, 2, 81. ▲

409. Когда трехзначное число, у которого две первые цифры одинаковы, а третья равна 2, разделили на однозначное число, то в остатке получили 8. Найдите делимое, делитель и частное. Укажите все решения.

410. Докажите, что остаток от деления на 24 квадрата простого числа, большего 3, равен 1.

411. При делении натурального числа на 12 получается остаток 2. Как изменится частное и сколько получится в остатке, если делимое увеличить в 10 раз?

412. При делении натурального числа на 108 в остатке получилось 24. Как изменится частное и сколько получится в остатке, если то же число разделить на 18?

413. При делении натурального числа на 67 получился остаток, равный 45. У делимого отбросили две последние цифры, и полученное число стало делиться на 67 без остатка. Какие цифры были отброшены?

414. Докажите, что два различных натуральных числа при делении на их разность дают одинаковые остатки.

△ Обозначим эти числа через a и b, где $a > b$. Тогда

$$a = (a - b)q_1 + r_1,$$
$$b = (a - b)q_2 + r_2.$$

Вычтем почленно эти равенства:

$$a - b = (a - b)(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2).$$

Отсюда разность $r_1 - r_2$ делится на $a - b$.

Но $r_1 < a - b$, $r_2 < a - b$, поэтому разность $r_1 - r_2$ по модулю меньше $a - b$. Следовательно, она может делиться на $a - b$ только в одном случае, когда

$$r_1 - r_2 = 0, \quad r_1 = r_2. \blacktriangle$$

416. Докажите, что остаток от деления произведения любых двух последовательных натуральных чисел на натуральное число, непосредственно следующее за ними, равен 2.

417. Верно ли, что числа 36! и 38! при делении на 281 дают одинаковые остатки?

10.2. 7–9

Рассмотрим серию задач, где *неизвестно делимое.*

418. Докажите, что не существует натурального числа, которое при делении на 15 и 24 дает в остатке соответственно 6 и 11.

419. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 47, а при делении на 43 дает в остатке 20.

420. При делении двузначного числа на 6 в остатке получилось число, равное цифре его десятков, а при делении того же числа на 10 частное было равно 3, а остаток — цифре единиц делимого. Найдите все такие двузначные числа.

△ Обозначим искомое число через $\overline{xy}$. Тогда

$$\begin{cases} \overline{xy} = 6q + x, \\ \overline{xy} = 30 + y. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем:

$$10x + y = 30 + y, \quad x = 3.$$

Преобразуем первое уравнение:

$$30 + y = 6q + 3, \quad 27 + y = 6q.$$

Отсюда цифра y нечетна и делится на 3, т. е. $y = 3$ или $y = 9$.

Ответ: 33, 39. ▲

421. Двузначное число при делении на цифру единиц дает в частном цифру единиц, а в остатке — цифру десятков. Найдите все такие двузначные числа.

422. Частное от деления трехзначного числа на сумму его цифр равно 13, а остаток — 15. Найдите все такие трехзначные числа.

△ Обозначим искомое число через $\overline{xyz}$. Получаем:

$$100x + 10y + z = 13(x + y + z) + 15, \quad 87x = 3y + 12z + 15, \quad 29x = y + 4z + 5.$$

Так как

$$y + 4z + 5 \leqslant 9 + 4 \cdot 9 + 5 = 50,$$

то $29x \leqslant 50$, откуда $x = 1$.

Теперь решим уравнение

$$29 = y + 4z + 5, \quad y + 4z = 24.$$

Отсюда видно, что цифра y делится на 4. Находим такие решения:

$$y = 0, z = 6; \quad y = 4, z = 5; \quad y = 8, z = 4.$$

Ответ: 106, 145, 184. ▲

423. Четырехзначное число делится на 7 и 29. После умножения на 19 и деления нового числа на 37 получился остаток 3. Найдите все такие четырехзначные числа.

424. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 1997 дает в остатке 97, а при делении на 1998 — остаток 98.

425*. Двузначное число разделили на число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, и получили равные частное и остаток. Найдите все такие двузначные числа.

△ Обозначим искомое число через $\overline{xy}$. Тогда

$$10x + y = (10y + x)r + r, \quad 10x + y = (10y + x + 1)r,$$

где r — остаток (и одновременно частное). Очевидно, $1 \leqslant r < 10$. Рассмотрим все возможные случаи в зависимости от r.

1) Пусть $r = 1$. Тогда

$$10x + y = 10y + x + 1, \quad 9x - 9y = 1.$$

Но последнее равенство невозможно.

2) Пусть $r = 2$. Получаем:

$$10x + y = 20y + 2x + 2, \quad 8x = 19y + 2, \quad 8x = 16y + (3y + 2).$$

Значит, $(3y + 2)⋮8$. Отсюда $y = 2$. Найдем еще x: $x = 5$.

3) Пусть $r = 3$. Тогда

$$10x + y = 30y + 3x + 3, \quad 7x = 29y + 3, \quad 7x = 28y + (y + 3).$$

Следовательно, $(y + 3)⋮7$, откуда $y = 4$. Но в этом случае $x = 17$, что невозможно.

4) Аналогично при $r = 4$ получаем:

$$10x + y = 40y + 4x + 4, \quad 6x - 39y = 4,$$

а это также невозможно.

5) Остальные случаи $r = 5, 6, 7, 8, 9$ объединим в одном. Пусть $5 \leqslant r \leqslant 9$. Придадим уравнению такой вид:

$$10x - rx = 10ry - y + r, \quad (10 - r)x = (10r - 1)y + r.$$

Так как $r \geqslant 5$, то $5 \geqslant 10 - r$. Умножим последнее неравенство на x и оценим $5x$ снизу.

$$5x \geqslant (10 - r)x = (10r - 1)y + r \geqslant (10 \cdot 5 - 1)y + 5 \geqslant 49 + 5 = 54.$$

Получаем неравенство $5x \geqslant 54$, из которого $x > 10$. Но это невозможно.

Ответ: 52. ▲

426*. Квадрат натурального числа n, увеличенный на 5, делится на 161 и при делении на 161 дает частное, равное неполному частному от деления числа n на 4. Найдите все такие n.

10.3.

7–8

Перейдем к группе задач, где *неизвестен делитель.*

427. Если числа 826 и 4373 разделить на одно и то же натуральное число, то получатся соответственно остатки 7 и 8. Найдите все значения делителя.

△ Запишем соответствующие равенства:

$$826 = bq_1 + 7, \quad 4373 = bq_2 + 8,$$

где b — неизвестный делитель, q_1 и q_2 — неполные частные. Тогда

$$bq_1 = 819, \quad bq_2 = 4365.$$

Разложим числа 819 и 4365 на простые множители:

$$819 = 3^2 \cdot 7 \cdot 13, \quad 4365 = 3^2 \cdot 5 \cdot 97.$$

Следовательно, общими делителями чисел 819 и 4365 являются числа 1, 3 и 9. Но общие делители, равные 1 и 3, невозможны, так как остаток должен быть меньше делителя. Остается число 9.

Ответ: 9. ▲

428. Числа 200 и 1997 при делении на натуральное число a дают одинаковые остатки. Найдите все значения a.

429. При делении чисел 1108, 1453, 1844 и 2281 на натуральное число a получается один и тот же остаток. Найдите все значения a.

430*. Натуральное число n таково, что если разделить на него любое нечетное натуральное число, а потом куб этого числа, то получатся одинаковые остатки. Найдите все значения n.

10.4.

8–9

В заключение рассмотрим серию задач, где *неизвестен остаток*.

431. При делении натурального числа a на 2 в остатке получается 1, а при делении на 3 — остаток 2. Какой остаток получится при делении a на 6?

△ Положим

$$a = 6q + r,$$

где остаток r удовлетворяет неравенству $0 \leqslant r \leqslant 5$. Переберем все возможные значения r.

Случай $r = 0$ невозможен, иначе число a делится на 2 и на 3.

Случай $r = 1$ — тоже, так как тогда a при делении на 3 дает в остатке 1, а не 2.

По аналогичным причинам отпадают случаи $r = 2$, $r = 3$ и $r = 4$.

Случай $r = 5$ возможен, например, при $a = 5$ или $a = 11$.

Ответ: 5. ▲

432. Натуральное число n при делении на 6 дает остаток 4, а при делении на 15 — остаток 7. Найдите остаток от деления n на 30.

433. Натуральное число a — четное, не делящееся на 4. Найдите остаток от деления a^2 на 32.

434. Докажите, что остатки от деления чисел

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots$$

на 9 периодически повторяются. Какой остаток дает при делении на 9 число 2^{100}?

△ С помощью перебора и вычислений устанавливаем, что остатки от деления данных чисел на 9, записанные в том же порядке, равны

$$1, 2, 4, 8, 7, 5; \quad 1, 2, 4, 8, 7, 5; \quad 1, 2, 4, 8, 7, 5; \ldots .$$

Наметившаяся закономерность сохраняется и дальше: эти остатки периодически повторяются через каждые 6 чисел. При этом если показатель степени n при делении на 6 дает в остатке 0, 1, 2, 3, 4 или 5, остаток от деления 2^n на 9 равен соответственно 1, 2, 4, 8, 7 или 5.

В случае степени 2^{100} разделим 100 на 6 с остатком: $100 = 6 \cdot 16 + 4$. Следовательно, число 2^{100} при делении на 9 дает в остатке 7.

Ответ: 7. ▲

435. Какой остаток дает 5^{1000} при делении на 11?

436. Чему равен остаток от деления числа 5^{7^9} на 6?

437. Найдите остаток от деления:
а) 2^{1000} на 5; б) 3^{128} на 11; в) 4^{93} на 13.

438*. Какой остаток дает 46^{925} при делении на 21?

△ Метод решения, который мы применяли в последних задачах, здесь слишком громоздок из-за большого основания степени и большого делителя. Попробуем его видоизменить.

Разделим 46 на 21 с остатком и преобразуем степень:

$$46^{925} = (21 \cdot 2 + 4)(21 \cdot 2 + 4)...(21 \cdot 2 + 4).$$

Если выполнить умножение 925 одинаковых сумм друг на друга, то все слагаемые получающейся суммы делятся на 21, кроме слагаемого 4^{925}. Значит, остаток от деления степени 46^{925} на 21 совпадает с остатком от деления степени 4^{925} на 21.

Воспользуемся тем, что

$$4^3 = 64 = 21 \cdot 3 + 1.$$

Получаем:

$$4^{925} = 4 \cdot 4^{924} = 4 \cdot (4^3)^{308} = 4 \cdot 64^{308} = 4 \cdot (21 \cdot 3 + 1)^{308} = 4 \cdot (21k + 1) = 4 \cdot 21k + 4.$$

Следовательно, искомый остаток равен 4.

Ответ: 4. ▲

439*. Найдите остаток от деления:
а) 176^{100} на 29; б) 223^{200} на 31; в) 3^{50} на 1998.

440*. Найдите остаток от деления числа 2^{p^2} на 13, где число p — простое.

441*. Число 2001^{2001} разбили на несколько слагаемых, являющихся натуральными числами, возвели эти слагаемые в куб и полученную сумму кубов разделили на 6. Какой получится остаток?

442*. Найдите остаток от деления на 3 числа

$$a = (1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)...(1000^2 + 1).$$

§ 11. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное **7–11**

Литература: [3в], [7в], [17], [27в], [33], [51], [76в].

Вспомним определения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного.

Наибольшим общим делителем двух или нескольких натуральных чисел называется наибольшее из натуральных чисел, на которое делится каждое из данных чисел.

Обозначение наибольшего общего делителя чисел a и b:

$$\text{НОД}\,(a, b).$$

В частном случае, когда наибольший делитель двух чисел равен 1, эти числа называются *взаимно простыми*.

Наименьшим общим кратным двух или нескольких натуральных чисел называется наименьшее из натуральных чисел, которое делится на каждое из данных чисел.

Обозначение наименьшего общего кратного двух чисел a и b —

$$\text{НОК}\,(a, b).$$

Вероятно, читатель помнит, как нужно находить наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух или нескольких натуральных чисел с помощью разложения этих чисел на простые множители.

11.1. **7–11**

Сначала рассмотрим задачи на *наибольший общий делитель.*

11.1.1. **7–9**

443. Коля и Миша играют в такую игру: каждый из них выбирает два различных натуральных числа, не превосходящих 99, и находит их наибольший общий делитель. Выигравшим считается тот, у кого наибольший делитель оказался больше. Коля выбрал числа 66 и 99 и получил их наибольший общий делитель, равный 33. Миша выбрал числа 45 и 90, получил их наибольший общий делитель, равный 45, и утверждал, что больше 45 наибольший общий делитель быть не может. А как думаете вы — для каких двух различных натуральных чисел в пределах от 1 до 99 их наибольший общий делитель будет наибольшим из всех возможных?

444. Среди первых 2000 натуральных чисел найдите три различных числа, наибольший общий делитель которых является наибольшим из всех возможных.

445. Найдите все пары натуральных чисел, сумма которых равна 288, а наибольший общий делитель — 36.

△ Обозначим искомые числа через a и b. Так как их наибольший общий делитель равен 36, то

$$a = 36k, \quad b = 36n,$$

где k и n — взаимно простые натуральные числа. Тогда

$$a + b = 288, \quad 36k + 36n = 288, \quad k + n = 8.$$

Чему же равны из последнего уравнения k и n? Или 7 и 1, или 5 и 3. Отсюда находим a и b.

Ответ: 252, 36; 180, 108. ▲

446. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 8400, а наибольший общий делитель — 20.

447. Найдите наибольший общий делитель чисел 111111 и 111111111.

△ Очевидно, каждое из данных чисел делится на 111, т. е. число 111 является их общим делителем. Но будет ли 111 их н а и б о л ь ш и м общим делителем?

Для ответа на этот вопрос разделим данные числа на 111 и выясним, являются ли полученные частные взаимно простыми числами. Будем иметь:

$$111111 = 111 \cdot 1001, \quad 111111111 = 111 \cdot 1001001.$$

Разделим 1001001 на 1001 с остатком:

$$1001001 = 1001 \cdot 1000 + 1.$$

Отсюда видно, что числа 1001001 и 1001 взаимно простые: если бы они имели наибольший общий делитель $d > 1$, то из последнего равенства следовало бы, что остаток, который равен 1, тоже делится на d, а это невозможно (меньшее натуральное число не может делиться на большее). Следовательно, наибольший общий делитель данных чисел равен 111.

Ответ: 111. ▲

448. Найдите наибольший общий делитель чисел 121212 и 121212121212.

449. Найдите наибольший общий делитель всех девятизначных чисел, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, ..., 9 встречается по одному разу.

△ Обозначим этот наибольший общий делитель через d.

Из всех девятизначных чисел указанного вида возьмем только два — 123456798 и 123456789.

Так как эти числа делятся на d, то и их разность, которая равна 9, делится на d: $9 \vdots d$. Отсюда $d = 1$, $d = 3$ или $d = 9$.

Какой из этих случаев дает ответ? Для выяснения истины определим с помощью признаков делимости на 3 и на 9, делится ли каждое из девятизначных чисел на 3 или 9. С этой целью найдем сумму цифр любого из них:

$$1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45.$$

Поскольку 45 делится на 9, то каждое из девятизначных чисел делится на 9. Из предыдущего следует, что 9 является их наибольшим делителем.

Ответ: 9. ▲

450. Найдите наибольший общий делитель всех шестизначных чисел, которые записываются цифрами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (без повторений).

451. На миллиметровой бумаге нарисован прямоугольник 280×168 мм со сторонами, идущими по прямым линиям сетки. Проведем его диагональ и отметим все узлы сетки, которые на ней лежат. На сколько частей узлы делят диагональ?

452. Натуральные числа a и b, где $a > b$, взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел $a + b$ и $a - b$.

△ Положим

$$\text{НОД}\,(a + b, a - b) = d.$$

Тогда

$$(a + b) \vdots d, \quad (a - b) \vdots d.$$

Следовательно, сумма и разность чисел $a + b$ и $a - b$ делятся на d. Сумма этих чисел равна $2a$, а разность — $2b$. Получаем:

$$2a \vdots d, \quad 2b \vdots d.$$

Но числа a и b по условию взаимно просты, поэтому 2 делится на d: $2 \vdots d$. Отсюда $d = 1$ или $d = 2$.

Оба ли эти случая возможны? Оба: $d = 1$, если числа a и b разной четности, и $d = 2$, если они нечетны.

Ответ: 1 или 2. ▲

453. Пусть a и b — натуральные числа, $a > b$ и числа $a + b$ и $a - b$ взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел a и b.

454°. Докажите, что *любые два последовательных натуральных числа взаимно просты*.

△ Обозначим два последовательных натуральных числа через n и $n + 1$, а их наибольший общий делитель через d. Тогда

$$(n + 1) \vdots d,$$

$$n \vdots d.$$

Вычитая эти числа, получаем: $1 \vdots d$. Значит, $d = 1$. ▲

455°. Докажите, что *наибольший общий делитель любых двух последовательных четных натуральных чисел равен 2.*

456°. Докажите, что *любые два последовательных нечетных натуральных числа взаимно просты.*

457. Найдите все значения наибольшего общего делителя натуральных чисел n и $n + 3$.

458. Докажите, что среди любых:

а) трех; б) четырех; в) пяти

последовательных натуральных чисел имеется число взаимно простое с каждым из остальных.

459. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел $8a + 3$ и $5a + 2$, где a — натуральное число.

△ Обозначим наибольший общий делитель этих чисел через d. Тогда

$$(8a + 3)⋮d, \quad (5a + 2)⋮d.$$

Умножим сумму $8a + 3$ на 5, а сумму $5a + 2$ — на 8. Получим:

$$(40a + 15)⋮d, \quad (40a + 16)⋮d.$$

Но два последовательных натуральных числа $40a + 15$ и $40a + 16$ взаимно просты (см. утверждение задачи 454), следовательно, $d = 1$.

Ответ: 1. ▲

460. Натуральные числа a и b взаимно просты. Найдите все значения наибольшего общего делителя чисел $11a + 2b$ и $18a + 5b$.

461. На какое число и при каких натуральных значениях a сократима дробь

$$\frac{2a + 5}{3a + 4}?$$

Найдите все решения.

△ Положим

$$\text{НОД}\,(2a + 5, 3a + 4) = d.$$

Следовательно,

$$(2a + 5)⋮d, \quad (3a + 4)⋮d.$$

Теперь умножим число $2a + 5$ на 3, а число $3a + 4$ на 2. Тогда

$$(6a + 15)⋮d, \quad (6a + 8)⋮d.$$

Вычтем полученные числа $6a + 15$ и $6a + 8$:

$$7⋮d.$$

Отсюда $d = 1$ или $d = 7$. Значит, если данная дробь сократима, то только на 7. Найдем все натуральные a, при которых дробь сократима на 7.

Первым подобным значением a является $a = 1$, следующим — $a = 8$, затем — $a = 15, 22$ и т. д.

Общий вид таких a —

$$a = 1 + 7k \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

Ответ: на 7 при $a = 7k + 1$ ($k = 0, 1, 2, ...$). ▲

462. Докажите, что дробь $\frac{6a-1}{7a-1}$ несократима ни при каких натуральных a.

463. На какое число и при каких натуральных a сократима дробь $\frac{4a+3}{3a+1}$? Найдите все решения.

464*. Докажите, что при любых натуральных k и n

$$\text{НОД}\ (k, n) = \text{НОД}\ (5k + 3n, 13k + 8n).$$

11.1.2. **9–11**

465. Найдите наибольший общий делитель чисел $2^{1995} - 1$ и $2^{1998} - 1$.

466. На какое число и при каких натуральных n сократима дробь $\frac{n^2+1}{n+1}$? Найдите все решения.

△ Положим

$$\text{НОД}\ (n^2 + 1, n + 1) = d.$$

Так как $n + 1$ делится на d, то и произведение

$$n(n + 1) = n^2 + n$$

делится на d. Теперь получаем:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l}(n^2 + n)\vdots d \\ (n^2 + 1)\vdots d\end{array} \\ \hline (n - 1)\vdots d. \end{array}$$

Следовательно, числа $n + 1$ и $n - 1$ делятся на d. Но наибольший общий делитель двух чисел, различающихся на 2, равен 1 или 2 (см. утверждения задач 455 и 456). Нас интересует случай $d = 2$. Он возможен при всех нечетных n.

Ответ: на 2 при всех нечетных n. ▲

467. На какое число и при каких натуральных n сократима дробь $\frac{2n^2-1}{2n+1}$? Найдите все решения.

468. Докажите, что дробь $\frac{2n-3}{n^2-3n+2}$ несократима ни при каких натуральных $n \geqslant 3$.

469. Натуральные числа a и b взаимно просты. Найдите все значения НОД ($a + b, ab$).

470. Натуральные числа m и n взаимно просты. Найдите все значения

$$\text{НОД}\,(m + n,\ m^2 - mn + n^2).$$

471. Докажите, что при любом натуральном n числа $n^5 + 4n^3 + 3n$ и $n^4 + 3n^2 + 1$ взаимно просты.

△ Введем обозначение:

$$\text{НОД}\,(n^5 + 4n^3 + 3n,\ n^4 + 3n^2 + 1) = d.$$

Предположим, что $d > 1$.

Разделим число $n^5 + 4n^3 + 3n$ на число $n^4 + 3n^2 + 1$ с остатком с помощью правила деления многочлена на многочлен «углом» (см. § 8, п. 8.1.6, решение задачи 293):

$$n^5 + 4n^3 + 3n = (n^4 + 3n^2 + 1) \cdot n + (n^3 + 2n).$$

Так как здесь делимое $n^5 + 4n^3 + 3n$ и делитель $n^4 + 3n^2 + 1$ делятся на d, то и остаток $n^3 + 2n$ делится на d.

Теперь разделим делитель $n^4 + 3n^2 + 1$ на остаток $n^3 + 2n$ с остатком:

$$n^4 + 3n^2 + 1 = (n^3 + 2n) \cdot n + (n^2 + 1).$$

Поскольку числа $n^4 + 3n^2 + 1$ и $n^3 + 2n$ делятся на d, то и новый остаток $n^2 + 1$ делится на d.

Аналогично разделим $n^3 + 2n$ на $n^2 + 1$ с остатком:

$$n^3 + 2n = (n^2 + 1)n + n.$$

Так как $n^3 + 2n$ и $n^2 + 1$ делятся на d, то и новый остаток n делится на d.

Наконец, разделим $n^2 + 1$ на n с остатком:

$$n^2 + 1 = n \cdot n + 1.$$

Так как здесь $n^2 + 1$ и n делятся на d, то и остаток, равный 1, делится на d. Но это невозможно, поскольку, по нашему предположению, $d > 1$. Мы пришли к противоречию.

Остается принять, что $d = 1$. ▲

472. На какое число и при каких натуральных a сократимы дроби:

а) $\dfrac{a^4 + a^3 - a^2 + a + 1}{a^2 - 1}$; б) $\dfrac{a^4 + 6a^3 + 15a^2 + 18a + 8}{a^4 + 6a^3 + 13a^2 + 12a + 3}$?

473°. Пусть a и b — натуральные числа, где $a > b$, и число a разделено на число b с остатком:

$$a = bq + r\ (0 < r < b).$$

Докажите, что

$$\text{НОД}\,(a, b) = \text{НОД}\,(b, r).$$

△ Введем обозначения:

$$\text{НОД}\,(a, b) = d_1, \quad \text{НОД}\,(b, r) = d_2.$$

Так как числа a и b делятся на d_1, то из исходного равенства получаем, что и остаток r делится на d_1. Тогда d_1 является общим делителем чисел b и r. Но d_2 — наибольший общий делитель тех же чисел; следовательно, $d_2 \geqslant d_1$.

Так как числа b и r делятся на d_2, то из исходного равенства и a делится на d_2. Тогда d_2 — общий делитель чисел a и b. Но d_1 является наибольшим общим делителем этих чисел, значит, $d_1 \geqslant d_2$.

Из неравенств $d_2 \geqslant d_1$ и $d_1 \geqslant d_2$ и следует, что $d_1 = d_2$. ▲

На утверждении задачи 473 основан следующий способ нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел.

474°. Пусть a и b — натуральные числа, $a > b$. Разделим a на b с остатком; число b разделим на полученный остаток r_1 с остатком; число r_1 разделим на новый остаток r_2 с остатком; r_2 — на новый остаток r_3 с остатком и т. д. Докажите, что тогда ***наибольший общий делитель чисел a и b равен последнему остатку, отличному от нуля.***

△ Запишем равенства, соответствующие условиям задачи:

$$\begin{array}{ll} a = bq_1 + r_1 & (r_1 < b) \\ b = r_1q_2 + r_2 & (r_2 < r_1) \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 & (r_3 < r_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n & (r_n < r_{n-1}) \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1}. & \end{array}$$

Почему мы рано или поздно придем к остатку, равному нулю? Потому, что остатки образуют убывающую последовательность целых неотрицательных чисел

$$r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n,$$

а следовательно, этот процесс имеет конец.

Теперь получаем, пользуясь утверждением задачи 473:

$$\text{НОД}\,(a, b) = \text{НОД}\,(b, r_1) = \text{НОД}\,(r_1, r_2) = \ldots = \text{НОД}\,(r_{n-1}, r_n) = r_n.$$

(Равенство НОД $(r_{n-1}, r_n) = r_n$ объясняется тем, что, как видно из последнего исходного равенства, число r_{n-1} делится на число r_n.) ▲

Доказанное утверждение и даст способ нахождения наибольшего общего делителя двух чисел. Он называется *алгоритмом Евклида*, который изложил его в своем труде «Начала». Алгоритм Евклида применяется в тех случаях, когда натуральные числа довольно велики; если они небольшие, лучше применять обычный способ — с разложением чисел на простые множители.

С помощью алгоритма Евклида найдем, например, наибольший общий делитель чисел 9240 и 8568. Получаем:

$$\begin{array}{l} 9240 = 8568 \cdot 1 + 672, \\ 8268 = 672 \cdot 12 + 504, \\ 672 = 504 \cdot 1 + 168, \\ 504 = 168 \cdot 3. \end{array}$$

Так как здесь последний остаток, отличный от нуля, — 168, то наибольший общий делитель чисел 9240 и 8568 равен 168.

475. Пользуясь алгоритмом Евклида, найдите наибольшие общие делители чисел:
а) 248501 и 37961; б) 936504 и 59976; в) 540540 и 962676.

7 Зак. 579

Остановимся на применении алгоритма Евклида к решению задач типа 471 и 472. Если присмотреться к решению задачи 471, то в нем по существу используется алгоритм Евклида.

476. Пользуясь алгоритмом Евклида, выясните, на какое число и при каких натуральных n сократимы дроби:

а) $\dfrac{4n^3+7n^2+4n+3}{4n^2+7n}$; б) $\dfrac{2n^3+3n^2+8n+1}{2n^4+n^3+7n^2-4n+5}$;

в) $\dfrac{3n^4+2n^3-2n^2-9n-7}{3n^5+2n^4+n^3-7n^2-12n-8}$.

477*. Чему равен наибольший общий делитель всех чисел $7^{n+2}+8^{2n+1}$ ($n \in N$)?

△ Обозначим наибольший общий делитель всех таких чисел через d. Заменяя в данной сумме n на $n+1$, получаем сумму $7^{n+3}+8^{2n+3}$, которая также должна делиться на d. Кроме того, умножим сумму $7^{n+2}+8^{2n+1}$ на 7:

$$(7^{n+2}+8^{2n+1})\cdot 7 = 7^{n+3}+7\cdot 8^{2n+1}.$$

Теперь получаем:

$$\begin{array}{r} (7^{n+3}+8^{2n+3}) \vdots d \\ -\ (7^{n+3}+7\cdot 8^{2n+1}) \vdots d \\ \hline 8^{2n+1}\cdot(64-7) \vdots d. \end{array}$$

Так как d нечетно, то $57 \vdots d$, откуда d может принимать значения 1, 3, 19 и 57.

Все ли найденные значения d подходят? Положим в сумме $7^{n+2}+8^{2n+1}$ $n=1$:

$$7^3+8^3=343+512=855,$$

а 855 делится на 57 (проверьте!). Кроме того, из хода решения видно, что если сумма $7^{n+2}+8^{2n+1}$ при некотором натуральном n делится на 57, то и при замене этого n на $n+1$ она делится на 57. Следовательно, указанная сумма при любом натуральном n делится на 57.

(Фактически здесь доказательство проводилось методом математической индукции — см., например, [18], § 14, п. 14.7.)

Ответ: 57. ▲

478*. Пусть k, n, a — натуральные числа, причем n нечетно. Докажите, что наибольший общий делитель чисел a^k+1 и a^n-1 равен 1 или 2.

479*. При каком наименьшем натуральном n каждая из дробей

$$\frac{5}{n+6},\quad \frac{6}{n+7},\quad \frac{7}{n+8},\ \dots,\quad \frac{24}{n+25}$$

несократима?

△ Преобразуем данные дроби следующим образом:

$$\frac{5}{n+6}=\frac{5}{(n+1)+5},\quad \frac{6}{n+7}=\frac{6}{(n+1)+6},\ \dots,\ \frac{24}{n+25}=\frac{24}{(n+1)+24}.$$

Отсюда видно, что каждая из этих дробей несократима тогда и только тогда, когда число $n+1$ взаимно просто с каждым из чисел 5, 6, 7, ..., 24. Тогда $n+1$ взаимно просто и с числами 25 (иначе дроби с числителями 5, 10, 15, 20 сократимы на 5), 26, 27 и 28. Получается, что ни одно из значений $n + 1$ от 2 до 28 не подходит. А вот значение $n + 1 = 29$ подходит, так как число 29 взаимно просто с каждым из натуральных чисел от 5 до 24. Следовательно, наименьшее значение n равно 28.

Ответ: 28. ▲

480*. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ — натуральные числа, сумма которых равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать их наибольший общий делитель?

11.2. 7–9

Теперь займемся задачами на *наименьшее общее кратное.*

481. Коля и Миша играют в такую игру. Каждый из них выбирает два различных натуральных числа, не превосходящих 1000, и находит их наименьшее общее кратное. Выигравшим считается тот, у кого наименьшее общее кратное оказалось больше. Коля выбрал числа 666 и 999 и получил их наименьшее общее кратное, равное $333 \cdot 2 \cdot 3 = 1998$. Миша выбрал числа 750 и 1000, получил их наименьшее общее кратное, равное $250 \cdot 3 \cdot 4 = 3000$, и утверждал, что оно самое большое, какое только может быть. А как думаете вы — для каких двух различных натуральных чисел в пределах от 1 до 1000 их наименьшее общее кратное является наибольшим из всех возможных?

482. Среди первых ста натуральных чисел найдите три различных числа, наименьшее общее кратное которых наибольшее из всех возможных.

483. Три теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход совершает рейс за 4 дня, второй — за 6, третий — за 9. Однажды они встретились в порту все вместе. Через какое наименьшее число дней они снова встретятся в порту все вместе?

484. На гранях кубиков нужно написать буквы русского алфавита, по одной на каждой грани. Какое наименьшее число кубиков нужно взять для того, чтобы все 33 буквы алфавита были написаны одинаковое количество раз и все грани кубиков были заполнены?

485. Отец и сын шли по занесенной снегом дороге друг за другом. Длина шага отца — 80 см, сына — 60 см. Их шаги совпали 601 раз, в том числе в самом начале и в конце пути. Какое расстояние они прошли?

△ Найдем расстояние, которое прошли отец и сын от одного совпадения шагов до следующего. Оно равно наименьшему общему кратному чисел 80 и 60, т. е. 240 см = 2,4 м. Значит, весь путь, который они прошли, равен

$$600 \cdot 2{,}4 \text{ м} = 1440 \text{ м} = 1 \text{ км } 440 \text{ м}.$$

Ответ: 1 км 440 м. ▲

486. Два школьника вышли одновременно из пункта A и отправились друг за другом по занесенной снегом тропинке. Шаг одного из них равен 75 см, другого — 65 см. В первый раз их шаги совпали через 18 сек. после начала движения, а после 10 мин. движения их шаги совпали впервые в пункте B. Найдите расстояние AB.

487. Покупатель хотел купить у продавщицы все имеющиеся у нее яйца и спросил, сколько у нее яиц. Та ответила, что не помнит, но знает, что если яйца раскладывать по 2, 3, 4, 5 или 6, то каждый раз в остатке остается одно яйцо. Какое наименьшее число яиц могло быть у продавщицы?

△ Временно отложим одно яйцо в сторону. Число оставшихся яиц равно наименьшему общему кратному чисел 2, 3, 4, 5 и 6, т. е. 60. Осталось добавить к этому числу еще одно яйцо.

Ответ: 61. ▲

488. Натуральное число при делении на 2, 3, 4, 5, 6 и 7 даст в остатке соответственно 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Найдите:

а) наименьшее такое число; б) общий вид таких чисел.

489. Найдите трехзначное число, если оно при делении на 7, 11 и 13 дает соответственно остатки 5, 9 и 11.

490. Натуральное число при делении на 4, 5 и 6 дает в остатке соответственно 3, 4 и 6, а на 7 делится без остатка. Найдите:

а) наименьшее такое число; б) общий вид таких чисел.

491. Докажите, что наименьшее общее кратное любых двух последовательных натуральных чисел равно их произведению.

492. Найдите наименьшее общее кратное натуральных чисел n и $n + 3$.

△ Ответ зависит от того, чему равен наибольший общий делитель чисел n и $n + 3$. Он равен 1, если n не делится на 3, и 3, если n делится на 3 (см. задачу 457).

Ответ: $n(n + 3)$, если n не делится на 3, и $\frac{1}{3}n(n + 3)$, если n делится на 3. ▲

493. Найдите наименьшее общее кратное натуральных чисел:

а) n, $n + 1$ и $n + 2$; б) n, $n + 1$, $n + 2$ и $n + 3$.

494. Найдите все пары натуральных взаимно простых чисел, меньших 225, наименьшее общее кратное которых равно 225.

495. Найдите все пары натуральных чисел, если их сумма равна 60, а наименьшее общее кратное — 72.

△ Обозначим искомые числа через a и b.

Число 72 делится на каждое из них. Поскольку

$$72 = 8 \cdot 9 = 2^3 \cdot 3^2,$$

то разложение чисел a и b на простые множители содержит только двойки и тройки. При этом в разложение одного из чисел a и b число 2 входит в третьей степени, а в разложение другого — только во второй, так как сумма $a + b = 60$ делится на 4, но не делится на 8. По аналогичной причине число 3 в разложение одного из чисел a и b входит во второй степени, а другого — только в первой.

Переберем все случаи.

1) Пусть

$$a = 2^3 \cdot 3^2 = 72, \quad b = 2^2 \cdot 3 = 12.$$

Этот вариант не подходит, так как не выполняется равенство $a + b = 60$.

2) Пусть

$$a = 2^2 \cdot 3 = 12, \quad b = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Этот случай по существу совпадает с первым.

3) Пусть

$$a = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad b = 2^2 \cdot 3^2 = 36.$$

А здесь условие $a + b = 60$ выполняется.

4) Пусть

$$a = 2^2 \cdot 3^2 = 36, \quad b = 2^3 \cdot 3 = 24.$$

Этот вариант совпадает с третьим.

Ответ: 24 и 36. ▲

496. Найдите все пары натуральных чисел, отношение которых равно $\frac{5}{7}$, а наименьшее общее кратное — 140.

497. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 40, а наименьшее общее кратное — 20.

498. Найдите все пары натуральных чисел, разность которых равна 60, а наименьшее общее кратное — 288.

11.3. 7–11

Рассмотрим *совместные задачи на наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное*.

11.3.1. 7–9

499. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 24, а наименьшее общее кратное — 360.

△ Обозначим искомые числа через a и b.

Числа 24 и 360 разложим на простые множители:

$$24 = 2^3 \cdot 3, \quad 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Следовательно, разложения чисел a и b на простые множители содержат только двойки, тройки и пятерки, причем $2^3 = 8$ входит в каждое из чисел a и b, 3 — в одно из чисел во второй степени, в другое — в первой, 5 — в одно из этих чисел. Переберем все возможности.

1) Пусть

$$a = 2^3 \cdot 3 = 24, \quad b = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Получаем числа 24 и 360.

2) Пусть

$$a = 2^3 \cdot 3^2 = 72, \quad b = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120.$$

Мы нашли числа 72 и 120.

Очевидно, этим исчерпываются все случаи.

Ответ: 24 и 360; 72 и 120. ▲

500. Найдите все пары натуральных чисел, наибольший общий делитель которых равен 54, а наименьшее общее кратное — 324.

501. Найдите все тройки таких попарно различных натуральных чисел, что их наибольший общий делитель равен 30, а наименьшее общее кратное — 180.

502. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{21}{25}$ и $\frac{14}{15}$ получаются натуральные числа.

Условия этой задачи своеобразны: здесь упоминаются две дроби, одна из которых делится на другую нацело.

△ Обозначим искомую дробь через $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные взаимно простые числа. Разделим ее на каждую из данных дробей.

$$\frac{a}{b} : \frac{21}{25} = \frac{25a}{21b}, \quad \frac{a}{b} : \frac{14}{15} = \frac{15a}{14b}.$$

Так как полученные дроби равны натуральным числам, то $25a$ делится на $21b$, а $15a$ на $14b$. Учитывая, что числа a и b взаимно просты, получаем:

$$a \vdots 21, \quad 25 \vdots b,$$

$$a \vdots 14, \quad 15 \vdots b.$$

Тогда число a является общим кратным чисел 21 и 14, а число b — общим делителем чисел 25 и 15. Но поскольку искомая дробь $\frac{a}{b}$ должна быть н а и м е н ь ш е й из всех возможных, то ее числитель — наименьший, а знаменатель — наибольший из всех возможных. Следовательно,

$$a = \text{НОК}\,(21, 14) = 42, \quad b = \text{НОД}\,(25, 15) = 5.$$

Ответ: $\frac{42}{5}$. ▲

503. Найдите наименьшую дробь, при делении которой на каждую из дробей $\frac{35}{66}$, $\frac{28}{165}$ и $\frac{25}{231}$ получаются натуральные числа.

504. Найдите наибольшую дробь, при делении на которую каждой из дробей $\frac{154}{195}$, $\frac{385}{156}$ и $\frac{231}{130}$ получаются натуральные числа.

505*. Докажите, что для любых двух натуральных чисел a и b произведение их наибольшего общего делителя на наименьшее общее кратное равно произведению самих чисел:

$$\text{НОД}\,(a, b) \cdot \text{НОК}\,(a, b) = ab.$$

△ Разложим числа a и b на простые множители:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}, \quad b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n},$$

где все p_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) — различные простые числа, α_k и β_k — целые неотрицательные. При этом, если, например, простое число p_1 входит в разложение числа a, но не входит в разложение числа b, припишем к разложению числа b степень $p_1^0 = 1$. По указанной причине можно считать, что числа a и b имеют одни и те же простые делители (но, вообще говоря, в разных степенях).

Обозначим большее из чисел α_k и β_k через c_k, меньшее — через d_k. Тогда

$$\alpha_k + \beta_k = c_k + d_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Теперь вспомним правила нахождения наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного. Будем иметь:

$$\text{НОД}\,(a, b) = p_1^{d_1} \cdot p_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{d_n}, \quad \text{НОК}\,(a, b) = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{c_n}.$$

Перемножим эти равенства почленно:

$$\text{НОД}\,(a, b) \cdot \text{НОК}\,(a, b) = p_1^{c_1 + d_1} \cdot p_2^{c_2 + d_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{c_n + d_n} = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n + \beta_n}.$$

С другой стороны, перемножая разложения для чисел a и b, получаем то же самое выражение:

$$ab = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \cdot p_2^{\alpha_2 + \beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n + \beta_n}.$$

Отсюда и следует утверждение задачи. ▲

506. Верно ли, что утверждение, аналогичное утверждению задачи 505, справедливо для любых трех натуральных чисел? Если верно, докажите. Если неверно, постройте контрпример.

507. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых равно 108, а отношение их наименьшего общего кратного к наибольшему общему делителю — 12.

508. Верно ли, что для любых трех натуральных чисел a, b и c их произведение делится на произведение

$$\text{НОД}\,(a, b, c) \cdot \text{НОК}\,(a, b, c)?$$

509*. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b и c справедливы равенства:

а) $\text{НОД}\,(a, b, c) \cdot \text{НОК}\,(ab, ac, bc) = abc$;

б) $\text{НОД}\,(ab, ac, bc) \cdot \text{НОК}\,(a, b, c) = abc$.

§ 12. Перестановка и зачеркивание цифр в натуральном числе 6–11

Литература: [48[В]], [52], [65], [83[В]].

Задачи этого параграфа — это по существу числовые ребусы, похожие на те, что были в § 3. Своеобразие таких задач в том, что один из двух компонентов действия получается из другого с помощью перестановки или зачеркивания цифр.

12.1. 7–9

Сначала рассмотрим задачи на *зачеркивание цифр* в натуральном числе.

510. Сумма двух натуральных чисел равна 1498. Если у одного из них зачеркнуть цифру единиц, равную 2, то получится второе число. Найдите все такие пары чисел.

Приведем два решения задачи.

1) Очевидно, большее число четырехзначно, а меньшее трехзначно.

Представим эту задачу как задачу на восстановление записи

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} {*}{*}{*}2 \\ {*}{*}{*} \end{array} \\ \hline 1498, \end{array}$$

где второе слагаемое совпадает с трехзначным числом, образованным тремя первыми цифрами первого слагаемого.

Последовательно получаем:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} {*}{*}62 \\ {*}{*}6 \end{array} \\ \hline 1498 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +\begin{array}{r} {*}362 \\ {*}36 \end{array} \\ \hline 1498 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} +\begin{array}{r} 1362 \\ 136 \end{array} \\ \hline 1498. \end{array}$$

Мы нашли оба слагаемых — 1362 и 136.

2) Обозначим меньшее число через x. Тогда большее число равно $10x + 2$. Получаем уравнение, которое легко решается:

$$(10x + 2) + x = 1498, \quad 11x + 2 = 1498, \quad 11x = 1496, \quad x = 136.$$

Ответ: 1362 и 136. ▲

В дальнейшем при решении задач в зависимости от задачи и от ваших склонностей можно выбрать решение первого или второго типа.

511. Разность двух натуральных чисел равна 409. Если у одного из них зачеркнуть цифру единиц, равную 4, то получится второе число. Найдите все такие пары чисел.

512. Сумма двух натуральных чисел равна 2902. Если у одного из них зачеркнуть первую цифру, то получится другое число. Найдите все такие пары чисел.

513. Сумма двух натуральных чисел равна 739. Если в одном из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится другое число. Найдите все такие пары чисел.

514. Сумма трех натуральных чисел равна 229. Если в одном из них зачеркнуть первую цифру, то получится второе число, а если последнюю, то третье. Найдите все такие тройки чисел.

515. Найдите все натуральные числа, которые при зачеркивании последней цифры уменьшаются в 14 раз.

△ Обозначим искомое число через $10x + y$, где x — количество десятков числа, y — его последняя цифра. Тогда

$$10x + y = 14x, \quad y = 4x.$$

Так как y — цифра, то и x — цифра, причем не превосходящая 2. Полагая $x = 1, 2$, находим, что соответственно $y = 4, 8$.

Ответ: 14, 28. ▲

516. В двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 31 раз. Какую цифру в каком числе зачеркнули? Найдите все решения.

517. В трехзначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 7 раз. Какую цифру в каком числе зачеркнули? Найдите все решения.

518*. Существует ли натуральное число, которое от зачеркивания первой цифры уменьшается: а) в 57; б) в 58 раз?

△ а) Обозначим искомое число через $10^k \cdot a + x$, где k — натуральное, a — зачеркиваемая цифра числа, x — число, образованное k его последними цифрами. Получаем:

$$10^k \cdot a + x = 57x, \quad 10^k \cdot a = 56x.$$

Так как правая часть последнего равенства делится на 7, то и левая его часть делится на 7, т. е. a делится на 7, откуда $a = 7$. Тогда

$$10^k \cdot 7 = 56x, \quad 10^k = 8x.$$

Отсюда 10^k делится на 8, т. е. $k \geqslant 3$. Например, если $k = 3$, то

$$1000 = 8x, \quad x = 125,$$

а искомое число равно 7125. Общий же вид таких чисел — 712500...0, где число нулей может принимать любые целые неотрицательные значения.

б) При тех же обозначениях получаем:

$$10^k \cdot a + x = 58x, \quad 10^k \cdot a = 57x.$$

Но последнее равенство невозможно, поскольку его правая часть делится на 19, а левая не делится.

Ответ: а) существует, например, 7125; б) не существует.

519. Существует ли натуральное число, которое при зачеркивании нескольких последних его цифр уменьшается: а) в 1999; б)* в 2000 раз?

520. Найдите все натуральные числа, оканчивающиеся на 91, которые после вычеркивания этих цифр уменьшаются в целое число раз.

521*. Средняя цифра трехзначного числа — нуль. Если эту цифру зачеркнуть, то число уменьшится в целое число раз. Найдите все такие числа.

522*. Найдите все трехзначные числа, которые уменьшаются в целое число раз от зачеркивания последней цифры.

12.2. 6–9

Перейдем к задачам на *перестановку цифр* в натуральном числе.

523. В трехзначном числе первая цифра равна 9. Если ее перенести в конец числа, то оно уменьшится на 216. Найдите все такие числа.

524. У трехзначного числа поменяли местами две последние цифры и сложили новое число с исходным. В результате получилось число 1187. Найдите все такие числа.

△ Обозначим искомое число через $\overline{abc}$. Нужно восстановить запись

$$\begin{array}{r} +\,\overline{abc} \\ \overline{acb} \\ \hline 1187. \end{array}$$

Отсюда видно, что $a = 5$. Для нахождения цифр b и c выполним сложение:

$$(500 + 10b + c) + (500 + 10c + b) = 1187, \quad 1000 + 11b + 11c = 1187,$$

$$11b + 11c = 187, \quad b + c = 17.$$

Из последнего уравнения $b = 9$, $c = 8$ или $b = 8$, $c = 9$.

Ответ: 598 или 589.

525. Трехзначное число оканчивается цифрой 3. Если эту цифру перенести в начало числа, то новое число будет на 1 больше утроенного первоначального числа. Найдите все такие числа.

А теперь рассмотрим задачи, в которых последняя цифра натурального числа переносится на первое место или первая цифра — на последнее, и при этом число увеличивается в целое число раз. Сначала несколько задач первого типа.

526. Шестизначное число оканчивается цифрой 7. Если эту цифру перенести в начало числа, то оно увеличится в 5 раз. Что это за число?

△ Задачу можно решить двумя способами.

1) Будем решать ее как задачу на восстановление записи.

$$\times\begin{array}{r} *****7 \\ 5 \\ \hline 7***** \end{array},$$

где пятизначные числа, обозначенные звездочками, в первом множителе и в произведении одинаковы. Последовательно получаем:

$$\times\begin{array}{r} ****57 \\ 5 \\ \hline 7****5 \end{array} \to \times\begin{array}{r} ***857 \\ 5 \\ \hline 7***85 \end{array} \to \times\begin{array}{r} **2857 \\ 5 \\ \hline 7**285 \end{array} \to \times\begin{array}{r} *42857 \\ 5 \\ \hline 7*4285 \end{array} \to \times\begin{array}{r} 142857 \\ 5 \\ \hline 714285. \end{array}$$

Исходное число оказалось равным 142857.

2) Обозначим искомое число через $10x + 7$, где x — количество десятков в числе. Получаем уравнение

$$(10x + 7)5 = 7 \cdot 10^5 + x.$$

Из него находим x, а затем вычисляем $10x + 7$:

$$50x + 35 = 700000 + x, \quad 49x = 699965,$$
$$x = 14285, \quad 10x + 7 = 142857.$$

Ответ: 142857. ▲

Число 142857, которое получилось в ответе, часто встречается при решении подобных задач. Из него с помощью перестановки последней цифры на первое место последовательно находим пять таких шестизначных чисел:

$$714285, \quad 571428, \quad 857142, \quad 285714, \quad 428571.$$

Разложение числа 142857 на простые множители имеет следующий вид:

$$142857 = 3^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37.$$

Следовательно, это число делится на 27. Но и все записанные выше шестизначные числа делятся на 27, а некоторые — на 81. Число 142857 делится на 11, 13 и 37. Но и остальные шестизначные числа делятся на 11, 13 и 37! (Проверьте или найдите утверждение задачи 256 из § 8.) Кроме того, если число 142857 умножать на числа 2, 3, 4, 5 и 6, то получатся соответственно числа

$$285714, \quad 428571, \quad 571428, \quad 714285, \quad 857142$$

(проверьте!) — те самые пять чисел, только записанные в ином порядке. Наконец,

$$142857 \cdot 7 = 999999.$$

Следовательно, 142857 — необычное число, заслуживающее внимания. Оно еще не раз нам встретится.

527. Найдите шестизначное число, которое оканчивается цифрой 4 и при переносе этой цифры на первое место увеличивается в 4 раза.

528. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается цифрой 6 и при переносе этой цифры в начало увеличивается в 4 раза.

529. Натуральное число оканчивается цифрой 8. Если эту цифру переместить на первое место, то оно увеличивается в 8 раз. Найдите наименьшее такое число.

530. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается цифрой 3 и при переносе этой цифры в начало числа увеличивается в 2 раза.

531. Натуральное число начинается цифрой 4. Если эту цифру перенести на последнее место, то оно уменьшится в 2 раза. Найдите наименьшее такое число.

Теперь решим несколько задач, связанных с переносом первой цифры натурального числа на последнее место при условии, что число после такой операции увеличивается (а не уменьшается, как в задаче 531) в целое число раз.

532. Шестизначное число начинается цифрой 2. Если эту цифру переместить на последнее место, то число увеличится в 3 раза. Какое это число?

△ Решим задачу двумя способами.

1) Восстановим запись:

$$\times\begin{array}{r}2{*}{*}{*}{*}{*}\\ 3\\ \hline {*}{*}{*}{*}{*}2,\end{array}$$

где пятизначные числа, обозначенные звездочками, у первого множителя и у произведения совпадают. Последовательно получаем:

$$\times\begin{array}{r}2{*}{*}{*}{*}4\\ 3\\ \hline {*}{*}{*}{*}42\end{array} \to \times\begin{array}{r}2{*}{*}{*}14\\ 3\\ \hline {*}{*}{*}142\end{array} \to \times\begin{array}{r}2{*}{*}714\\ 3\\ \hline {*}{*}7142\end{array} \to \times\begin{array}{r}2{*}5714\\ 3\\ \hline {*}57142\end{array} \to \times\begin{array}{r}285714\\ 3\\ \hline 857142.\end{array}$$

(При этом сначала находим цифру 4 в первом множителе, а затем ставим ее на соответствующее место в произведении; сначала находим цифру 1 в первом множителе, а затем ставим ее в произведение и т. д.)

Получилось число 285714.

2) Обозначим искомое число через $200000 + x$, где x — число, образованное пятью последними цифрами. Тогда

$$(200000 + x)3 = 10x + 2.$$

Отсюда

$$x = 85714, \quad 200000 + x = 285714.$$

Ответ: 285714. ▲

533. Найдите шестизначное число, которое начинается цифрой 1 и при переносе этой цифры на последнее место увеличивается втрое.

534. Натуральное число оканчивается цифрой 4. Если первую цифру числа переставить на последнее место, то число увеличится в 3 раза. Найдите наименьшее такое число.

535*. Найдите все шестизначные числа, которые увеличиваются втрое при перестановке первой цифры числа в конец.

12.3. 9–11

Следующая серия задач — это тоже задачи на перестановку цифр в натуральном числе, но в более сложной ситуации.

536*. Докажите, что не существует двух-, трех-, четырех- и пятизначных чисел, которые при перестановке первой цифры числа в конец увеличиваются в целое число раз.

△ Рассмотрим только случай пятизначного числа.

Обозначим пятизначное число через $\overline{abcde}$, а натуральное число, показывающее, во сколько раз второе число больше исходного, через k. Тогда

$$\overline{abcde} \cdot k = \overline{bcdea}.$$

Положим еще $\overline{bcde} = x$. Получаем:

$$(10000a + x) \cdot k = 10x + a, \quad 10000ka + kx = 10x + a,$$

$$10000ka - a = 10x - kx, \quad a \cdot (10000k - 1) = x \cdot (10 - k).$$

Для решения последнего уравнения найдем наибольший общий делитель чисел $10000k - 1$ и $10 - k$. Пусть

$$\text{НОД}\,(10000k - 1,\ 10 - k) = d.$$

Тогда $10000k - 1$ делится на d; $10 - k$ делится на d, откуда $100000 - 10000k$ делится на d. Будем иметь:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} (10000k - 1)\vdots d \\ (100000 - 10000k)\vdots d \end{array} \\ \hline 99999\vdots d \end{array}.$$

Так как $2 \leqslant k \leqslant 9$, то $1 \leqslant 10 - k \leqslant 8$. Следовательно, $10 - k$ и соответственно d могут принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8. Но значения $d = 2, 4, 5, 6, 8$ исключаются, поскольку число 99999 должно делиться на d, значение $d = 7$ — тоже по той же причине (проверьте!). Остаются значения $d = 1, 3, 9$.

Пусть $d = 9$. Тогда

$$10 - k = 9, \quad k = 1,$$

а значение $k = 1$ исключается.

Пусть $d = 3$. Тогда $10 - k$ равно 3 или 6, а k — соответственно 7 или 4. В первом случае записанное выше уравнение принимает вид:

$$a \cdot 69999 = 3x, \quad a \cdot 23333 = x.$$

Но последнее равенство невозможно, так как число x по условию четырехзначно.

Во втором случае получаем:

$$a \cdot 39999 = 6x, \quad a \cdot 13333 = 2x.$$

Отсюда цифра a — четная и равна по меньшей мере 2. Но тогда число x пятизначно.

Наконец, пусть $d = 1$. В этом случае из уравнения видно, что x делится на $10000k - 1$, а следовательно, тоже пятизначно.

Остается принять, что пятизначного числа, которое при переносе первой цифры числа в конец увеличивается в целое число раз, не существует. ▲

537*. Докажите, что не существует двух-, трех-, четырех- и пятизначных чисел, которые при перестановке последней цифры числа на первое место увеличиваются в целое число раз.

В задачах 526–529, в которых применялся перенос последней цифры натурального числа в начало, число могло увеличиваться в р а з н о е число раз: в 5, 4, 8, 2. А вот в задачах 532–535, в которых использовался обратный перенос — первой цифры на последнее место, число каждый раз увеличивалось только в 3 раза. Случайно ли это? Давайте выясним.

538. Существует ли натуральное число, которое при перестановке его начальной цифры в конец увеличивается в 5, 6 или 8 раз?

△ Первая цифра исходного числа может быть равна только 1, так как в противном случае при его умножении на 5, 6 или 8 получится число, у которого количество цифр на 1 больше, чем у исходного.

Пусть при переносе первой цифры числа в конец оно увеличивается в 5 раз. Получаем запись:

$$\begin{array}{r} \times\,1{*}{*}\ldots{*} \\ 5 \\ \hline {*}{*}\ldots{*}1. \end{array}$$

Однако она невозможна, поскольку последняя цифра такого произведения может быть равна только 5 или 0.

Точно так же при умножении числа на 6 или 8 последняя цифра произведения должна быть четной.

Ответ: не существует. ▲

539. Докажите, что при переносе первой цифры натурального числа на последнее место оно не может увеличиться в 7 или 9 раз.

540. Докажите, что не существует натурального числа, которое при переносе его первой цифры в конец увеличивается в 4 раза.

△ Очевидно, переставляемая цифра a не превосходит 2 и четная, значит, $a = 2$.

Обозначим исходное число через $2 \cdot 10^n + x$, где n — натуральное, а x — число, образованное цифрами, которые следуют за цифрой 2. Число $2 \cdot 10^n + x$ $(n + 1)$-значно; тогда число x записывается не более чем n цифрами.

Получаем уравнение:

$$(2 \cdot 10^n + x) \cdot 4 = 10x + 2.$$

Найдем из него x:

$$8 \cdot 10^n + 4x = 10x + 2, \quad 6x = 8 \cdot 10^n - 2, \quad x = \frac{1}{3}(4 \cdot 10^n - 1).$$

Так как

$$\frac{1}{3}(4 \cdot 10^n - 1) > 10^n,$$

то в формуле для x правая часть $(n + 1)$-значна, а x — не более чем n-значен; следовательно, это равенство невозможно. ▲

541. Докажите, что не существует натурального числа, которое при перестановке его первой цифры на последнее место увеличивается в 2 раза.

Теперь, после решения задач 538–541, мы можем ответить на вопрос, поставленный раньше. Получилось, что если при переносе первой цифры натурального числа на последнее место число увеличивается в целое число раз, то это целое число может быть равным *только трем*.

542. В четырехзначном числе последнюю цифру переставили на первое место. В результате оно увеличилось в $\frac{11}{9}$ раза. Найдите все такие числа.

543. Существует ли шестизначное число, которое увеличивается в 6 раз, если три первые его цифры, не меняя их порядка, переставить в конец числа?

△ Обозначим искомое число через $\overline{abcdef}$. Тогда

$$\overline{abcdef} \cdot 6 = \overline{defabc}.$$

Положим

$$\overline{abc} = x, \quad \overline{def} = y.$$

Уравнение принимает вид

$$(1000x + y) \cdot 6 = 1000y + x.$$

Упростим его:

$$6000x + 6y = 1000y + x, \quad 5999x = 994y, \quad 857x = 142y.$$

Так как числа 857 и 142 взаимно просты, то из последнего уравнения $x = 142$, $y = 857$. Следовательно, шестизначное число равно

$$1000x + y = 142857.$$

Ответ: существует и единственно — 142857. ▲

544. Существует ли шестизначное число, которое при перестановке трех его последних цифр в начало числа без изменения их порядка увеличивается в 2 раза?

545*. Может ли четырехзначное число при переносе числа, образованного двумя его последними цифрами, в начало числа без изменения их порядка увеличиваться в целое число раз?

546. Найдите все четырехзначные числа, которые при переносе числа, образованного двумя его последними цифрами, в начало числа без изменения их порядка увеличиваются в $\frac{89}{12}$ раза.

547*. Натуральное число начинается с 15. Если число 15 переставить в конец числа, то оно увеличивается в 5 раз. Найдите наименьшее такое число.

12.4. 9–11

Рассмотрим задачи на *обращенные числа.*

Обращенным числом для данного натурального числа, записанного в десятичной системе счисления и имеющего более одной цифры, называется натуральное число с теми же цифрами, что и у исходного числа, но переставленными в обратном порядке.

Например, для трехзначного числа $\overline{abc}$ обращенным является число $\overline{cba}$.

548. У трехзначного числа цифры расположены в порядке возрастания, причем вторая цифра больше первой во столько же раз, во сколько третья цифра больше второй. Сумма этого числа с его обращенным — число простое. Найдите все такие числа.

549°. Докажите, что разность между натуральным числом и его обращенным делится на 9.

△ Натуральное число при делении на 9 дает тот же остаток, что и сумма его цифр (см. утверждение опорной задачи 120 из § 5). Но у натурального числа и его обращенного сумма цифр одна и та же, поэтому разность таких чисел делится на 9. ▲

550°. Пусть x — n-значное число ($n > 1$), x' — его обращенное. Докажите, что:

а) если n нечетно, то разность $x - x'$ делится на 11;

б) если n четно, то сумма $x + x'$ делится на 11.

△ а) Пусть n нечетно.

Запишем исходное число x в виде $\overline{a_1a_2a_3...a_n}$. Тогда получаем:

$$x - x' = \overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n} - \overline{a_na_{n-1}...a_3a_2a_1} =$$

$$= (a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n) -$$

$$- (a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + ... + a_3 \cdot 10^2 + a_2 \cdot 10 + a_1) =$$

$$= a_1 \cdot (10^{n-1} - 1) + a_2 \cdot 10 \cdot (10^{n-3} - 1) + a_3 \cdot 10^2 \cdot (10^{n-5} - 1) + \ldots$$
$$\ldots - a_{n-1} \cdot 10 \cdot (10^{n-3} - 1) - a_n \cdot (10^{n-1} - 1).$$

Так как n нечетно, то показатели степени $n - 1$, $n - 3$, $n - 5$ и т. д. четны. Но при четном k разность $10^k - 1$ делится на сумму оснований степени $10 + 1 = 11$ (см. § 7, третья делимость). Следовательно, и вся сумма делится на 11.

б) Пусть n четно.

Составим сумму $x + x'$ и преобразуем ее. При этом получится выражение, похожее на выражение для разности $x - x'$, с тем отличием, что все слагаемые будут иметь знак плюс:

$$x + x' = a_1 \cdot (10^{n-1} + 1) + a_2 \cdot 10 \cdot (10^{n-3} + 1) + a^3 \cdot 10^2 \cdot (10^{n-5} + 1) + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} \cdot 10 \cdot (10^{n-3} + 1) + a^n \cdot (10^{n-1} + 1).$$

Поскольку n четно, то разности $n - 1$, $n - 3$, $n - 5$ и т. д. нечетны. При нечетном k сумма $10^k + 1$ делится на сумму оснований степени $10 + 1 = 11$ (см. § 7, вторая делимость). ▲

551. Верно ли, что разность: а) квадратов; б) кубов натурального числа и его обращенного всегда делится на 99?

552. Найдите все четырехзначные числа, которые в 9 раз больше своих обращенных.

△ Обозначим искомое число через $\overline{abcd}$. Тогда

$$\overline{abcd} = 9 \cdot \overline{dcba}.$$

Две цифры — d и a можно найти сразу. Так как произведение $9 \cdot \overline{dcba}$ — число четырехзначное, то цифра d может быть равна только 1. Так как произведение $9a$ оканчивается цифрой $d = 1$ (см. последние цифры каждого из четырехзначных чисел), то $a = 9$.

Число $\overline{abcd} = \overline{9bc1}$ делится на 9, поэтому сумма его цифр делится на 9:

$$(10 + b + c) \vdots 9.$$

Отсюда $b + c = 8$ или $b + c = 17$.

Теперь воспользуемся утверждением задачи 550, учитывая, что количество цифр числа $\overline{abcd}$ четно: сумма

$$\overline{abcd} + \overline{dcba}$$

должна делиться на 11. Преобразуем ее:

$$\overline{abcd} + \overline{dcba} = 9 \cdot \overline{dcba} + \overline{dcba} = 10 \cdot \overline{dcba} = 10 \cdot \overline{1cb9}.$$

Тогда число $\overline{1cb9}$ делится на 11. По признаку делимости на 11 сумма

$$1 + b - c - 9 = b - c - 8$$

делится на 11. Следовательно, $b - c = 8$ или $b - c = -3$.

Сопоставим значения $b + c$ со значениями $b - c$. Поскольку сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность (см. утверждение задачи 93 из § 4), то из четырех возможных здесь случаев достаточно рассмотреть два.

8 Зак. 579

1) Система уравнений

$$\begin{cases} b + c = 8, \\ b - c = 8 \end{cases}$$

имеет решение $b = 8$, $c = 0$.

2) Система уравнений

$$\begin{cases} b + c = 17, \\ b - c = -3 \end{cases}$$

имеет решение $b = 7$, $c = 10$, но оно не подходит.

Ответ: 9801. ▲

553. Существует ли четырехзначное число, которое больше своего обращенного: а) в 4; б) в 3 раза?

554. Может ли пятизначное число быть в 9 раз больше своего обращенного?

555. Существует ли шестизначное число, которое в 9 раз больше своего обращенного?

Присмотримся к ответам в задачах 552, 554 и 555:

$$9801, 98901, 989901,$$

где при переходе от четырех-, пяти- и шестизначного числа к его обращенному число каждый раз уменьшается в 9 раз. Ответы похожи друг на друга. Вероятно, в случае семизначного и восьмизначного числа ответы в аналогичных задачах — 9899901 и 98999901 (проверьте!) По-видимому, подмеченная закономерность продолжается как угодно далеко. Интересно, почему бы это?

Напомним еще, что ранее при решении задач 352 и 353 из § 8 было установлено, что не существует двузначных и трехзначных чисел, которые больше своих обращенных в целое число раз.

556. Найдите все:

а) двузначные; б) трехзначные; в) четырехзначные

числа, которые больше своих обращенных в 1, 2 раза.

557*. Найдите все такие трехзначные числа с разными цифрами, у которых разность между этим числом и его обращенным — трехзначное число, состоящее из тех же цифр, что и исходное.

§ 13. Последние цифры натурального числа 7–9

Литература: [3], [22], [48[в]], [83].

Здесь мы займемся задачами на определение последних цифр, одной или нескольких, натурального числа, заданного некоторым способом, — в виде степени натурального числа с натуральным показателем, или суммы, или произведения натуральных чисел.

558. Какой цифрой оканчивается произведение:
а) всех натуральных чисел от 11 до 19;
б) всех нечетных натуральных чисел от 1 до 121;
в) $3 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 33 \cdot 43 \cdot 53 \cdot 63 \cdot 73 \cdot 83 \cdot 93$?

559. Какой цифрой оканчивается сумма:
а) $7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{40}$;
б) $4^n + 4^{n+1} + 4^{2n}$ $(n \in N)$?

560. Сколько нулей на конце произведения всех натуральных чисел от 1 до 60?

△ Так как нули в произведении натуральных чисел образуются при умножении двоек на пятерки, то желательно знать, сколько в разложении данного произведения на простые множители двоек и пятерок. Но поскольку в этом разложении двоек больше, чем пятерок, то достаточно подсчитать число пятерок.

Прежде всего пятерки имеются в разложениях на простые множители чисел

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60.$$

Таких чисел 12.

Кроме того, имеется еще по одной дополнительной пятерке в числах 25 и 50.

Итого получается 14 пятерок. Поэтому на конце данного произведения 14 нулей.

Ответ: 14. ▲

561. Сколько нулей на конце произведения всех натуральных чисел:
а) от 1 до 100; б) от 1 до 325?

562. При каком наименьшем натуральном n произведение всех натуральных чисел от 1 до n оканчивается ровно на 499 нулей?

563°. а) Докажите, что *если натуральное число оканчивается цифрой 5, то его квадрат оканчивается на 25.*

б) Докажите, что *для возведения такого числа в квадрат достаточно умножить количество его десятков на число, большее этого количества на 1, и приписать к полученному произведению 25.*

△ а) Возьмем натуральное число вида $10n + 5$, где n — количество его десятков. Возведем его в квадрат:

$$(10n + 5)^2 = 100n^2 + 100n + 25 = 100n(n + 1) + 25.$$

Так как произведение $n(n + 1)$ — количество сотен квадрата, то две последние его цифры образуют число 25.

б) А теперь обратим внимание, что в полученной формуле количество сотен квадрата равно произведению количества n десятков основания квадрата на $n + 1$. ▲

564. Пользуясь правилом из задачи 563 б), вычислите устно:

а) 35^2; б) 85^2; в) 195^2.

565. Квадратами каких натуральных чисел являются числа:

а) 9025; б) 13225; в) 24025?

566°. Докажите, что если у квадрата натурального числа последняя цифра нечетна, то его предпоследняя цифра четна.

△ Возьмем натуральное число вида $10a + b$, где a — количество его десятков, b — последняя цифра. Возведем его в квадрат:

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Количество десятков этого квадрата составляется из количества десятков числа $20ab$, равного четному числу $2ab$, и количества десятков числа b^2.

Цифра b по условию нечетна. При $b = 1, 3, 5, 7, 9$ соответственно получаем:

$$b^2 = 1, 9, 25, 49, 81.$$

Поскольку число десятков числа b^2 оказалось каждый раз равным четному числу, то общее количество десятков квадрата $(10a + b)^2$ четно. Тогда по признаку делимости на 2 последняя цифра этого количества четна, т. е. предпоследняя цифра квадрата $(10a + b)^2$ четна. ▲

567. Докажите, что у квадрата натурального числа произведение двух последних цифр четно.

568. Может ли квадрат натурального числа оканчиваться на:

а) 31; б) 61; в) 39; г) 69; д) 65; е) 26?

569°. Докажите, что *пятая степень натурального числа оканчивается той же цифрой, что и само число.*

△ Обозначим исходное натуральное число через a. Числа a и a^5 оканчиваются одной и той же цифрой тогда и только тогда, когда разность $a^5 - a$ делится на 10.

$$(a^5 - a) \vdots 10.$$

То, что эта разность делится на 2, очевидно: числа a и a^5 имеют одинаковую четность, поэтому их разность четна.

Но разность $a^5 - a$ делится и на 5 на основании утверждения опорной задачи 180 из § 6. Следовательно, она делится на 10. ▲

Утверждение задачи 569 можно обобщить. Так как степень a^5 оканчивается той же цифрой, что и число a, то:

a^6 оканчивается той же цифрой, что и a^2;

a^7 — той же цифрой, что и a^3;

a^8 — той же цифрой, что и a^4;

a^9 — той же цифрой, что и a^5, т. е. той же цифрой, что и a;

a^{10} — той же цифрой, что и a^6, т. е. той же цифрой, что и a^2, и т. д.

Сформулируем общий результат.

Если у степени a^n, где a и n — натуральные числа, показатель n имеет вид $4k + 1$, $4k + 2$, $4k + 3$ или $4k$ ($k \in N$), то a^n оканчивается той же цифрой, что и соответственно a, a^2, a^3 или a^4.

Для применения этого правила нужно показатель степени n разделить на 4 с остатком r и найти последнюю цифру степени a^r, если $r \neq 0$, и степени a^4, если $r = 0$.

Например, если нужно найти последнюю цифру степени 7^{91}, то после деления показателя степени на 4 с остатком: $91 = 4 \cdot 22 + 3$, получаем, что последняя цифра степени 7^{91} равна последней цифре степени 7^3, т. е. 3.

570. Найдите последнюю цифру степени:

а) 3^{46}; б) 57^{127}; в) 34^{125}.

571. Делится ли разность $23^{47} - 47^{23}$ на 10?

572. Какой цифрой оканчивается число

$$53^{59} + 55^{59} + 57^{59} + 59^{59}?$$

573. Существуют ли такие натуральные числа a, b и c, что десятичная запись суммы

$$a^{60} + b^{60} + c^{60}$$

оканчивается цифрой 9?

574°. Докажите, что квадрат двузначного числа $\overline{ab}$ ($b \neq 0$) оканчивается на $\overline{ab}$ только тогда, когда $\overline{ab}$ равно 25 или 76.

△ Числа $x = \overline{ab}$ и $x^2 = \overline{ab}^2$ оканчиваются двумя одинаковыми цифрами тогда и только тогда, когда их разность делится на 100:

$$(x^2 - x)\vdots 100, \quad x(x - 1)\vdots 100.$$

Два последовательных натуральных числа $x - 1$ и x взаимно просты (см. утверждение опорной задачи 454 из § 11), поэтому их произведение делится на 100 лишь тогда, когда одно из них делится на 25, а другое — на 4. (Нужно учитывать, что эти множители двузначны, поэтому ни один из них не может делиться на 100.)

Рассмотрим два случая.

1) Пусть число x делится на 25, а $x - 1$ на 4.

Из первого условия находим, что $x \in \{25; 50; 75\}$. Из этих чисел второму условию удовлетворяет только 25.

2) Пусть x делится на 4, а $x - 1$ на 25.

Из второго условия получаем, что $(x - 1) \in \{25; 50; 75\}$, т. е. $x \in \{26; 51; 76\}$. Первому условию удовлетворяет только 76. ▲

575. Найдите две последние цифры степени 76^{99}.

576. Восстановите запись:

а) АМ × АМ = ГАМ; б) ТОН × ОН = АНТОН,

где каждая буква означает цифру, одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры.

577°. Докажите, что квадрат трехзначного числа $\overline{abc}$ $(c \neq 0)$ оканчивается на $\overline{abc}$ только тогда, когда $\overline{abc}$ равно 625 или 376.

578. К какому трехзначному числу можно так приписать слева три цифры, что получится его квадрат? Найдите все такие числа.

579. Восстановите запись, где каждая буква означает цифру, одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры:

а) ЛИК × ЛИК = БУБЛИК; б) СУК × СУК = БАРСУК;

в) КОТ × КОТ = ВОРКОТ; г) ГОЛ × ГОЛ = ФУТБОЛ.

580. Найдите все такие числа $\overline{abcd}$ $(d \neq 0)$, что $\overline{abcd}^2$ оканчивается на $\overline{abcd}$.

581. Известно, что число

$$n^4 + n^3 + n^2 + n \ (n \in N)$$

не делится на 10. Какой цифрой оканчивается десятичная запись числа n? Найдите все значения этой цифры.

582. Число $n^2 + 2n$ $(n \in N)$ оканчивается цифрой 4. Найдите все значения его предпоследней цифры.

△ Прибавим к обеим частям равенства

$$n^2 + 2n = 10a + 4,$$

где a — количество десятков числа $n^2 + 2n$, по 1:

$$n^2 + 2n + 1 = 10a + 5, \quad (n + 1)^2 = 10a + 5.$$

Отсюда видно, что число $n + 1$ оканчивается на 5, а следовательно, его квадрат — на 25 (см. утверждение задачи 563). Тогда число a оканчивается на 2, т. е. предпоследняя цифра исходного числа $n^2 + 2n$ равна 2.

Ответ: 2. ▲

583. Произведение четырех последовательных нечетных натуральных чисел оканчивается цифрой 9. Какая цифра у этого произведения стоит перед девяткой? Найдите все ее значения.

584. Докажите, что если перемножить все натуральные числа от 1 до 2000, то последняя ненулевая цифра произведения является четной.

585. Найдите последнюю ненулевую цифру произведения всех натуральных чисел от 1 до 40.

△ Сначала найдем последнюю ненулевую цифру произведения $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$. Для этого выбросим из числа множителей 10, 2 и 5. Остается произведение

$$3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9,$$

которое, как нетрудно подсчитать, оканчивается цифрой 8.

По аналогичной причине у каждого из произведений

$$11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20, \quad 21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \ldots \cdot 30, \quad 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot \ldots \cdot 40$$

последняя цифра, отличная от нуля, есть 8. Тогда последняя ненулевая цифра всего данного произведения совпадает с последней цифрой числа

$$8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 8^4 = 2^{12} = 4096,$$

т. е. равна 6.

Ответ: 6. ▲

586. Найдите последнюю ненулевую цифру произведения всех натуральных чисел:

а) от 25 до 100; б) от 1 до 1998.

587. Найдите две последние цифры степени: а) 7^{38}; б) 7^{7^7}.

△ Решим более общую задачу: какие значения могут принимать две последние цифры степени 7^n при натуральном n? Придавая n последовательно значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., будем каждый раз находить две последние цифры этой степени — до тех пор, пока не наступят повторения. (Подумайте, почему повторения рано или поздно наступят.) Получим такую таблицу.

n	1	2	3	4	5	6 ...
Две последние цифры 7^n	07	49	43	01	07	49 ...

Следовательно, эти цифры повторяются при увеличении n на 4, вообще на $4k$ ($k \in N$).

а) Для нахождения двух последних цифр степени 7^{38} разделим 38 на 4 с остатком: $38 = 4 \cdot 9 + 2$. Тогда две последние цифры этой степени совпадают с двумя последними цифрами степени $7^2 = 49$, т. е. образуют число 49.

б) Для определения двух последних цифр степени 7^{7^7} разделим показатель степени, равный 7^7, на 4 с остатком. Здесь это сделать труднее. Получаем:

$$7^7 = (8 - 1)^7 = (8 - 1)(8 - 1)\ldots(8 - 1) = 8k - 1 = (8k - 4) + 3 = 4(2k - 1) + 3.$$

Тогда две последние цифры этой степени совпадают с двумя последними цифрами степени $7^3 = 343$, т. е. составляют число 43.

Ответ: а) 49; б) 43. ▲

588. Найдите две последние цифры степени:

а) 9^{45}; б) 4^{4^4}; в) 2^{1997}.

589. Найдите четыре последние цифры степени 5^{1999}.

590. Последние две цифры десятичной записи квадрата некоторого натурального числа равны и отличны от нуля. Какие это цифры? Найдите все решения.

△ Квадрат натурального числа может оканчиваться цифрами 0, 1, 4, 5, 6 или 9. Цифра 0 в данном случае не подходит. Тогда квадрат может оканчиваться на

$$11, 44, 55, 66, 99.$$

Но случаи, когда квадрат оканчивается на 11, 55 или 99, невозможны, так как если последняя цифра квадрата натурального числа нечетна, то предпоследняя его цифра четна (см. опорную задачу 566). Отпадает и случай, когда квадрат оканчивается на 66, так как на основании признаков делимости на 2 и 4 натуральное число, которое оканчивается на 66, делится на 2, но уже не делится на 4.

Остается вариант 44. То, что квадрат натурального числа может оканчиваться на 44, показывает пример $12^2 = 144$.

Ответ: 4 и 4. ▲

591. Найдите все двузначные числа, квадрат которых оканчивается на три одинаковые цифры, отличные от нуля.

592*. Найдите все двузначные числа, куб которых оканчивается на 44.

593*. Найдите какую-либо степень числа 2 с натуральным показателем, которая оканчивается тремя одинаковыми цифрами.

△ Обозначим количество тысяч у числа 2^k ($k \in N$) через x, а цифру, которая трижды встречается на конце этого числа, — через y. Тогда

$$2^k = 1000x + \overline{yyy} = 1000x + 111y.$$

Отсюда следует, что $2^k > 1000$, а тогда $k \geqslant 10$. Получаем, что в этом равенстве $1000x$ делится на 8 и 2^k делится на 8, а значит:

$$111y \vdots 8, \quad y \vdots 8 \Rightarrow y = 8.$$

Наше равенство принимает вид:

$$2^k = 1000x + 888, \quad 2^{k-3} = 125x + 111,$$

где число x нечетно.

При нечетном x число $125x$ оканчивается на 125, 375, 625 или 875 (проверьте!), а следовательно, сумма $125x + 111$ соответственно на

$$236, 486, 736, 986.$$

Теперь задача сводится к следующему: найти хотя бы одно натуральное k, при котором степень 2^{k-3}, где $k \geqslant 10$, оканчивается на одно из четырех последних трехзначных чисел.

Так как степень 2^{k-3} оканчивается на 6, то показатель степени делится на 4:

$$k - 3 = 4a, \quad k = 4a + 3,$$

где a — натуральное число, не меньшее 2.

Применим перебор по a.

1) Пусть $a = 2$. Тогда

$$k - 3 = 4 \cdot 2 = 8, \quad 2^{k-3} = 2^8 = 256.$$

Но число 256 отсутствует среди записанных выше трехзначных чисел.

2) При $a = 3$

$$k - 3 = 12, \quad 2^{k-3} = 2^{12} = 4096,$$

а этот вариант нас тоже не устраивает.

Аналогичная картина получается при $a = 4$, 5, 6, 7 и 8.

3) Пусть $a = 9$. Тогда

$$k - 3 = 36, \quad k = 39, \quad 2^{k-3} = 2^{36},$$

а 2^{36} оканчивается на 736 (подумайте, как это установить). Число 736 имеется среди четырех трехзначных чисел, следовательно, этот случай подходит.

Ответ: например, 2^{39} оканчивается на 888. ▲

594. Докажите, что никакая степень числа 2 с натуральным показателем не может оканчиваться четырьмя одинаковыми цифрами.

595*. Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на три семерки?

△ Обозначим это трехзначное число через x. Тогда

$$x^3 = 1000a + 777,$$

где a — количество тысяч числа x^3.

Так как x^3 оканчивается цифрой 7, то число x оканчивается цифрой 3: $x = 10k + 3$, причем число k двузначно. Получаем:

$$(10k + 3)^3 = 1000a + 777, \quad 1000k^3 + 900k^2 + 270k + 27 = 1000a + 777,$$

$$100k^3 + 90k^2 + 27k = 100a + 75.$$

Отсюда видно, что число k делится на 5.

Поскольку тогда в левой части последнего равенства слагаемые $100k^3$ и $90k^2$ делятся на 25 и, кроме того, правая часть равенства делится на 25, то и k делится на 25: $k = 25b$, где b — цифра, не превосходящая 3. Получаем:

$$x = 10k + 3 = 250b + 3.$$

Разберем три возможности.

1) Пусть $b = 1$. Тогда:

$$x = 253, \quad x^3 = 253^3 = 16194277.$$

Этот случай не подходит, так как на конце числа x^3 оказались две, а не три семерки.

2) Пусть $b = 2$. Следовательно,

$$x = 503, \quad x^3 = 503^3 = 117263527.$$

И этот случай не подходит.

3) Пусть $b = 3$. Получаем:

$$x = 753, \quad x^3 = 753^3 = 426957777.$$

А этот вариант удовлетворяет условию задачи: на конце числа x^3 даже не три, а четыре семерки.

Ответ: существует и единственно — 753. ▲

596. Существует ли двузначное число, куб которого оканчивается на 432?

597*. Существует ли трехзначное число, куб которого оканчивается на:
а) 1987; б) 1997?

598*. Найдите все двузначные числа, пятая степень которых оканчивается двумя одинаковыми цифрами.

§ 14. Степень с натуральным показателем 7–11

Литература: [8], [48$^{\text{В}}$], [63], [74], [83].

Здесь мы встретимся с задачами на степени целых, главным образом натуральных чисел с натуральными показателями. Такие задачи уже встречались в книге [18] (см. задачи 176–180 из § 7). Встречались они и в данной книге, особенно в последнем § 13, где их количество составляет больше половины. Однако в предыдущем параграфе степени рассматривались только с такой стороны — нахождения одной или нескольких последних их цифр. Здесь мы познакомимся с более разнообразными задачами на степени.

Назовем *точной степенью* степень целого числа с натуральным показателем, большим 1. В частности, квадрат и куб целого числа будем называть *точным квадратом* и *точным кубом*.

Чаще всего мы будем иметь дело с задачами на точные квадраты.

14.1. 7–9

599. Через деревню проходят три автобусных маршрута. Их номера — трехзначные числа, являющиеся точными квадратами, причем все они записываются одними и теми же цифрами. Какие номера у автобусов?

600. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составьте три трехзначных числа, используя каждую цифру по одному разу, так, чтобы все они были точными квадратами.

601. На шхуне капитана Врунгеля «Победа» (а потом «Беда») был четырехзначный номер. Номер был примечателен тем, что являлся точным квадратом. Во время шторма смыло первую цифру, и номер стал точным кубом. Во время следующего шторма смыло следующую цифру, и номер стал точной четвертой степенью. Какой номер был у шхуны?

602. Являются ли точными квадратами числа:

а) 5^{6^7}; б) 5^{7^6}; в) $9^{11^{13}}$?

603. Являются ли точными кубами числа:
а) 4^{5^6}; б) 4^{6^5}; в) $8^{11^{14}}$?

604. Натуральное число, большее 1, является одновременно точным квадратом, точным кубом и точной пятой степенью. Найдите наименьшее такое число.

605. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 840 для того, чтобы полученное число было точным квадратом?

606. На какое наименьшее натуральное число нужно умножить число 1260 для того, чтобы полученное произведение было точным кубом?

607. Сумма двузначного числа и его обращенного — точный квадрат. Найдите все такие числа.

(Определение числа, обращенного данному, см. в § 12, п. 12.4.)

△ Сложим двузначное число $\overline{ab}$ с его обращенным:

$$\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b).$$

Так как число $11(a + b)$ — точный квадрат, то сумма $a + b$ делится на 11. Но поскольку a и b являются цифрами, то она равна 11: $a + b = 11$.

Далее нетрудно перебрать все возможные случаи, связанные с a и b.

Ответ: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92. ▲

608. Может ли разность между трехзначным числом с разными цифрами и его обращенным быть точным квадратом?

609. Могут ли числа: а) $\overline{abab}$; б) $\overline{abba}$ быть точными степенями?

610. Натуральное число записывается с помощью 10 шестерок и нескольких нулей. Может ли оно быть точной степенью?

△ Сумма цифр этого числа равна 60. Тогда на основании признаков делимости на 3 и на 9 число делится на 3, но не делится уже на $3^2 = 9$. Следовательно, оно не является ни точным квадратом, ни точным кубом, ни вообще точной степенью с каким-либо натуральным показателем, большим 1.

Ответ: не может. ▲

611. Может ли натуральное число быть точным квадратом, если сумма его цифр равна: а) 20; б) 10?

△ а) Разделим число 20 на 3 с остатком: $20 = 3 \cdot 6 + 2$. Остаток оказался равным 2. Тогда и само число при делении на 3 дает в остатке 2 (см. утверждение опорной задачи 120 из § 5). Но квадрат натурального числа при делении на 3 не может давать в остатке 2 (см. утверждение задачи 163 из § 6), следовательно, натуральное число с суммой цифр, равной 20, быть точным квадратом не может.

б) Сумма цифр точного квадрата может быть равна 10. Таково, например, число 64.

Ответ: а) не может; б) может. ▲

612. Докажите, что число $7 \cdot 10^n + 4$ ни при каком натуральном n не является точным квадратом.

613. Натуральное число оканчивается на 316. Может ли оно быть точным кубом?

614°. Докажите, что точный квадрат при делении на 4 может давать в остатке только 0 или 1 (и, следовательно, не может давать остаток 2 или 3).

△ В самом деле, если натуральное число a четно: $a = 2k$ ($k \in N$), то $a^2 = 4k^2$, а если a нечетно: $a = 2k - 1$, то

$$a^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 4k(k-1) + 1. \blacktriangle$$

615. Какие остатки могут давать при делении на 4:
а) сумма; б) разность двух точных квадратов?

616. Может ли быть точным квадратом сумма квадратов:
а) двух; б) трех; в) четырех нечетных чисел?

617. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, сложенное с 1, — точный квадрат.

△ Пусть наименьшее из четырех чисел — n. Получаем выражение

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1.$$

Перемножим множители попарно: первый — на четвертый, а второй — на третий. Будем иметь:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1.$$

Если теперь обозначить $n^2 + 3n$ через a, то получим

$$a(a+2)+1 = a^2+2a+1 = (a+1)^2. \blacktriangle$$

618. Докажите, что произведение четырех натуральных чисел, из которых каждое следующее больше предыдущего на 2, сложенное с 16, — точный квадрат.

619. Существует ли такое натуральное n, что $6n$ — точный куб, а $8n$ — точная четвертая степень?

620. Найдите наименьшее натуральное число, которое при умножении на 2 становится точным квадратом, а при умножении на 3 — точным кубом.

△ Искомое число x делится на 2 или на 3. Так как оно является наименьшим из всех натуральных чисел, обладающих указанными свойствами, то его разложение на простые множители состоит *только* из двоек и троек:

$$x = 2^k \cdot 3^l \quad (k \in N,\ l \in N).$$

После умножения числа x на 2 получается точный квадрат, а после умножения на 3 — точный куб, поэтому

$$2x = 2^{k+1} \cdot 3^l = a^2, \quad 3x = 2^k \cdot 3^{l+1} = b^2,$$

где a и b — натуральные. Тогда

$$(k+1)\vdots 2, \quad l\vdots 2,$$

$$k\vdots 3, \quad (l+1)\vdots 3.$$

Найдем минимальные k и l, удовлетворяющие этим отношениям делимости: $k = 3$, $l = 2$. Отсюда $x = 2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Ответ: 72. ▲

621. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный куб, а третья часть — точный квадрат.

622. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный квадрат, третья часть — точный куб и пятая часть — точная пятая степень.

623. Найдите все двузначные числа, квадрат которых записывается цифрами 0, 2, 3 и 5.

624. Найдите все пятизначные числа, являющиеся точными квадратами и записывающиеся только цифрами 2 и 5.

625. Наборщик рассыпал часть набора — набор пятизначного числа, являющегося точным квадратом, записывающимся цифрами 1, 2, 5, 5 и 6. Найдите все такие пятизначные числа.

△ Из указанных цифр точный квадрат может оканчиваться на 1, 5 или 6. Рассмотрим все три случая.

1) Пусть квадрат оканчивается на 1.

Так как предпоследняя цифра точного квадрата в этом случае должна быть четной (см. утверждение опорной задачи 566 из § 13), то она равна 2 или 6. Составим все возможные здесь пятизначные числа:

$$65521,\ 56521,\ 55621,\ 25561,\ 52561,\ 55261.$$

Числовая проверка показывает, что ни одно из них не является точным квадратом.

2) Пусть последняя цифра квадрата равна 5.

Тогда предпоследняя его цифра — 2 (см. утверждение задачи 563 из § 13). Получаем числа

$$15625,\ 16525,\ 61625,\ 56125,\ 61525,\ 65125.$$

Из них точным квадратом является только первое: $15625 = 125^2$.

3) Пусть последняя цифра искомого числа равна 6.

Тогда число делится не только на 2, но и на 4. Следовательно, на основании признака делимости на 4 его предпоследняя цифра — 1 или 5. Составим все соответствующие числа:

$$25516,\ 52516,\ 55216,\ 12556,\ 15256,\ 21556,\ 25156,\ 51256,\ 52156.$$

Ни одно из них не является точным квадратом.

Ответ: $15625 = 125^2$. ▲

626. На пяти фишках проставлено по одной цифре: 0, 2, 4, 6 и 8. Отберите из этих фишек четыре и расположите их в ряд, чтобы получившееся четырехзначное число было точным квадратом. Найдите все такие числа.

627. Найдите все шестизначные числа, являющиеся точными пятыми степенями и записывающиеся цифрами 1, 2, 3, 3, 7 и 9.

628. Найдите такие какие-либо натуральные числа a, b c, и d, что числа

$$a^2 + b^2, \quad a^2 + b^2 + c^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

являлись бы точными квадратами.

629. Докажите, что число

$$1998^2 + 1998^2 \cdot 1999^2 + 1999^2$$

является точным квадратом.

△ Заменим 1998 на a и преобразуем получающееся выражение:

$$a^2 + a^2(a + 1)^2 + (a + 1)^2 = a^2 + a^4 + 2a^3 + a^2 + a^2 + 2a + 1 =$$
$$= a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1 = (a^2 + a + 1)^2.$$

Следовательно, данное число — квадрат числа $1998^2 + 1998 + 1 = 3994003$. ▲

630. Докажите, что число

$$1996 \cdot 1998^3 - 1997 \cdot 1995^3$$

является точным кубом.

631. Докажите, что никакой точный квадрат нельзя записать с помощью ровно пяти различных цифр одинаковой четности.

632. Четырехзначное число — точный квадрат, причем две первые его цифры одинаковы и две последние тоже одинаковы. Найдите все такие числа.

633. Может ли произведение $n(n + 1)$ при каком-либо натуральном n быть точной степенью?

△ Допустим, что

$$n(n + 1) = a^k,$$

где k — натуральное число, большее 1, a — целое. Можно ограничиться случаем, когда a — натуральное (подумайте, почему).

Два последовательных натуральных числа n и $n + 1$ взаимно просты (см. утверждение задачи 454 из § 11), поэтому записанное равенство возможно только тогда, когда каждое из этих чисел — точная k-я степень.

$$n = b^k, \quad n + 1 = c^k,$$

где b и c — натуральные. Вычтем из последнего равенства первое:

$$c^k - b^k = 1.$$

Но последнее равенство невозможно при натуральных b, c и k, где $k > 1$.

Ответ: не может. ▲

634. Может ли произведение четырех последовательных натуральных чисел быть точным квадратом?

635. Какой точный квадрат равен произведению четырех последовательных нечетных чисел?

△ Обозначим наименьшее из нечетных чисел через n. Тогда

$$n(n+2)(n+4)(n+6)=a^2,$$

где a — целое число, причем нечетное. Преобразуем левую часть этого уравнения, умножая первый множитель на четвертый, а второй — на третий:

$$(n^2+6n)(n^2+6n+8)=a^2, \quad (n^2+6n)^2+8(n^2+6n)=a^2.$$

Дополним левую часть последнего уравнения до точного квадрата. Для этого к обеим частям уравнения прибавим по 16:

$$(n^2+6n)^2+8(n^2+6n)+16=a^2+16, \quad (n+6n+4)^2=a^2+16,$$
$$(n^2+6n+4)^2-a^2=16.$$

Когда два точных квадрата отличаются на 16? Для ответа на этот вопрос выпишем последовательность точных квадратов, начиная с 0, до тех пор, пока разность даже соседних квадратов не станет больше 16:

$$0;\ 1;\ 4;\ 9;\ 16;\ 25;\ 36;\ 49;\ 64;\ 81.$$

Отсюда видно, что разность двух точных квадратов равна 16 только в двух случаях:

$$16=16-0=25-9.$$

Но так как a нечетно, то подходит лишь второй вариант:

$$(n^2+6n+4)^2=25, \quad a^2=9.$$

Получаем два уравнения с n:

$$n^2+6n+4=5, \quad n^2+6n+4=-5.$$

У первого из них корни не целые, а из второго находим, что $n=-3$.

Ответ: $9=(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3$. ▲

636*. Найдите все пятизначные числа, которые являются точными квадратами и остаются точными квадратами при зачеркивании первой, двух первых или трех первых цифр.

△ Обозначим искомое число через $\overline{abcde}$. Тогда каждое из чисел

$$\overline{de}, \quad \overline{cde}, \quad \overline{bcde}, \quad \overline{abcde}$$

есть точный квадрат.

Числа $\overline{de}$ и $\overline{cde}$ могут быть одновременно точными квадратами только при $\overline{de}=25$. Тогда цифра c равна 2 или 6.

Число $\overline{bcde}=\overline{bc25}$ по правилу возведения в квадрат натуральных чисел, оканчивающихся цифрой 5 (см. утверждение задачи 563 б) из § 13), является точным квадратом тогда и только тогда, когда число $\overline{bc}$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел.

Возьмем $c = 2$ и рассмотрим число $\overline{b2}$. С помощью перебора по цифре b устанавливаем, что число $\overline{b2}$ равно произведению двух последовательных натуральных чисел при $b = 1$ $(12 = 3 \cdot 4)$, $b = 4$ $(42 = 6 \cdot 7)$ и $b = 7$ $(72 = 8 \cdot 9)$.

Положим $c = 6$. Аналогичным путем устанавливаем, что число $\overline{b6}$ равно такому же произведению только при $b = 5$ $(56 = 7 \cdot 8)$.

Получаем четыре четырехзначных числа:

$$1225, \quad 4225, \quad 7225, \quad 5625,$$

являющихся точными квадратами.

Примерно так же, но длиннее находится цифра a. Каждое из пятизначных чисел

$$\overline{a1225}, \quad \overline{a4225}, \quad \overline{a7225}, \quad \overline{a5625}$$

должно быть точным квадратом. Для этого найдем цифру a так, чтобы каждое из трехзначных чисел

$$\overline{a12}, \quad \overline{a42}, \quad \overline{a72}, \quad \overline{a56}$$

было равно произведению двух последовательных натуральных чисел. В первом случае подходит только $a = 8$ $(812 = 28 \cdot 29)$, во втором $a = 3$ $(342 = 18 \cdot 19)$, в третьем $a = 2$, в четвертом $a = 1$ и $a = 7$.

Ответ: 81225, 34225, 27225, 15625, 75625. ▲

637*. Четырехзначное число является точным квадратом. Если отбросить его последнюю цифру или две первые, то получаются также точные квадраты. Найдите все такие числа.

638*. Найдите все точные степени числа 2, которые встречаются среди чисел вида $6n + 8$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

△ Запишем равенство

$$2^k = 6n + 8.$$

При каких натуральных k степень 2^k можно представить в виде $6n + 8$?

Вычисления показывают, что значения $k = 3, 5, 7$ подходят, а значения $k = 2, 4, 6, 8$ нет. Это наводит на мысль, что, вероятно, все нечетные значения k, начиная с 3, удовлетворяют условию задачи, а все четные — нет. Рассмотрим два случая.

1) Пусть k нечетно: $k = 2a + 1$ $(a \in N)$. Выразим из уравнения n через k:

$$2^k = 6n + 8, \quad 6n = 2^k - 8, \quad 3n = 2^{k-1} - 4 = (2^{k-1} - 1) - 3.$$

$$n = \frac{1}{3}(2^{k-1} - 1) - 1 = \frac{1}{3}(2^{2a} - 1) - 1 = \frac{1}{3}(4^a - 1) - 1.$$

Так как разность $4^a - 1$ при любом натуральном a делится на 3 (см. § 7, первая делимость), то при любом нечетном $k > 1$ такое натуральное n существует. Это значит, что все нечетные k, большие 1, подходят.

2) Пусть k четно: $k = 2a$ $(a \in N)$. Тогда получаем:

$$2^{2a} = 6n + 8, \quad (2^a)^2 = (6n + 6) + 2, \quad (2^a)^2 = 3(2n + 2) + 2.$$

9 Зак. 579

Но квадрат натурального числа при делении на 3 не может давать в остатке 2 (см. утверждение задачи 163 из § 5). Полученное противоречие показывает, что все четные k не подходят.

Ответ: степени числа 2 с любым нечетным натуральным показателем, большим 1. ▲

639*. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не может быть точным кубом.

640. Найдите все натуральные n, при которых числа вида $6n + 3$ являются точными квадратами.

641*. Найдите все натуральные n, при которых числа вида $n^2 - n + 41$ являются точными квадратами.

14.2.

9–11

642. Во фразе

И ВСЕ ЖЕ ОН НЕ ПРАВ

каждая буква означает цифру, одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры (лишь буквы Е и Ё означают одну и ту же цифру). Кроме того, каждое слово означает точный квадрат. Восстановите запись. Найдите все решения.

643. Треугольник имеет целые длины сторон a, b и c, а длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что число $a^2 + b^2 + c^2$ является точным квадратом.

△ Обозначим длины высот треугольника через h_1, h_2 и h_3, где h_1 — длина наибольшей из высот. По формуле площади треугольника получаем:

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}bh_2 = \frac{1}{2}ch_3, \quad ah_1 = bh_2 = ch_3.$$

Выразим отсюда h_2 и h_3:

$$h_2 = \frac{a}{b}h_1, \quad h_3 = \frac{a}{c}h_1.$$

Так как $h_1 = h_2 + h_3$, то

$$h_1 = \frac{a}{b}h_1 + \frac{a}{c}h_1, \quad 1 = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}, \quad bc = ac + ab.$$

Теперь будем иметь:

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(bc - ac - ab) = (b + c - a)^2. \text{ ▲}$$

644. Сумма трех целых чисел a, b и c равна нулю. Докажите, что число

$$2a^4 + 2b^4 + 2c^4$$

есть точный квадрат.

645. Докажите, что число $1000! + 6$ не является точной степенью.

△ Сумма $1000! + 6$ делится на 2, но не делится на $2^2 = 4$: ведь первое слагаемое суммы делится на 4, а второе не делится. Поэтому сумма не является точной степенью ни с каким натуральным показателем, большим 1. ▲

646. Является ли сумма $30! + 40!$ точной степенью?

647. Найдите все натуральные n, при которых число

$$1! + 2! + 3! + ... + n!$$

есть точный квадрат.

648. Найдите все натуральные n, при которых число $2^n + 65$ — точный квадрат.

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть n четно: $n = 2k$ $(k \in N)$. Тогда

$$2^{2k} + 65 = a^2,$$

где a — натуральное. Получаем:

$$a^2 - 2^{2k} = 65, \quad (a + 2^k)(a - 2^k) = 65.$$

Когда произведение двух натуральных чисел равно 65? Могут быть две возможности:

$$\begin{cases} a + 2^k = 65, \\ a - 2^k = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a + 2^k = 13, \\ a - 2^k = 5. \end{cases}$$

Из этих систем уравнений находим 2^k, затем — k и наконец $n = 2k$. Получаем, что $n = 10$ или $n = 4$.

2) Пусть n нечетно.

Тогда степень 2^k оканчивается цифрой 2 или 8 (проверьте), а значит, сумма $2^n + 65$ — цифрой 7 или 3. Но точный квадрат не может оканчиваться на 7 или 3, поэтому все нечетные n нужно отбросить.

Ответ: 10, 4. ▲

649. Найдите все натуральные n, при которых числа:

а) $3^n + 55$; б) $4^n + 5$; в) $8^n + 9$; г) $5^n - 3^n$

являются точными квадратами.

650. Найдите все натуральные k, при которых число

$$2^k + 8k + 5$$

есть точный квадрат.

△ Проверка показывает, что значение $k = 1$ не подходит, значение $k = 2$ подходит, значения $k = 3, 4, 5, 6$ не подходят. По-видимому, никакое $k > 2$ не удовлетворяет условию задачи. Докажем наше предположение.

Предположим, что существует такое $k > 2$, что число $2^k + 8k + 5$ является точным квадратом. Так как это число нечетно, то

$$2^k + 8k + 5 = (2a - 1)^2,$$

где a — целое. Получаем:

$$2^k + 8k + 5 = 4a^2 - 4a + 1, \quad 2^k + 8k + 4 = 4a(a - 1).$$

В последнем равенстве правая часть делится не только на 4, но и на 8. Но левая часть на 8 не делится, поэтому такое равенство невозможно. Мы пришли к противоречию. Следовательно, ни одно $k > 2$ не обладает требуемым свойством.

Ответ: 2. ▲

651*. Найдите все натуральные n, при которых число

$$2^n + 3^n + 4^n$$

является точным квадратом.

652*. Докажите, что среди чисел

$$2^n + 4^k \quad (n \in N, k \in N)$$

содержится бесконечное множество точных квадратов.

△ Преобразуем данную сумму:

$$2^n + 4^k = 2^n + 2^{2k}.$$

Пусть $n > 2k$. Получаем:

$$2^n + 2^{2k} = a^2, \quad 2^{2k}(2^{n-2k} + 1) = a^2,$$

где a — натуральное.

Так как в последнем равенстве правая часть — точный квадрат и множитель 2^{2k} из левой части — точный квадрат, то и сумма $2^{n-2k} + 1$ — точный квадрат:

$$2^{n-2k} + 1 = b^2 \quad (b \in N),$$

откуда

$$2^{n-2k} = b^2 - 1.$$

Если число b не делится на 3, то разность $b^2 - 1$ делится на 3 (см. утверждение задачи 163 из § 6), а это невозможно. Следовательно, b делится на 3.

Тогда сумма $2^{n-2k} + 1$ делится на 9. Это справедливо, например, при $n - 2k = 3$ (вообще при $n - 2k = 3 \cdot (2c + 1)$, где c — целое неотрицательное). Положим $n - 2k = 3$, отсюда $n = 2k + 3$.

Сделаем еще проверку. При $n = 2k + 3$ получаем:

$$2^n + 2^{2k} = 2^{2k+3} + 2^{2k} = 2^{2k} \cdot (2^3 + 1) = 9 \cdot 2^{2k} = (3 \cdot 2^k)^2,$$

где k — любое натуральное число. За счет k и находим бесконечное множество точных квадратов. ▲

653. Докажите, что среди чисел:

а) $2^n + 2^k$; б)* $3^n + 3^k$ $(n \in N, k \in N)$

содержится бесконечное множество точных квадратов.

654*. Имеется ли среди чисел вида

$$5^n + 5^k \quad (n \in N, k \in N)$$

хотя бы один точный квадрат?

655*. Докажите, что среди чисел:

а) $2^k + 2^n \quad (k \in N, n \in N)$; б) $3^k + 3^m + 3^n \quad (k \in N, m \in N, n \in N)$

имеется бесконечное множество точных степеней с любым данным натуральным показателем $p > 1$.

656. Докажите, что все члены бесконечной последовательности

$$16; \quad 1156; \quad 111556; \quad 11115556; \ldots$$

являются точными квадратами.

△ Проверим это утверждение для четырех первых членов последовательности:

$$16 = 4^2, \quad 1156 = 34^2, \quad 111556 = 334^2, \quad 11115556 = 3334^2.$$

Записанные равенства наводят на мысль, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$\overbrace{111\ldots1}^{n+1}\overbrace{55\ldots5}^{n}6 = \overbrace{333\ldots3}^{n}4^2.$$

Для проверки нашей гипотезы в данном случае можно выполнить умножение «столбиком»:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}333\ldots334\\333\ldots334\end{array}\\
\hline
1333\ldots336\\
+\begin{array}{r}10000\ldots02\\100000\ldots2\end{array}\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\\
10\ldots02\\
\hline
11\ldots15555\ldots56.
\end{array}$$

Докажите самостоятельно, что число пятерок в полученном произведении равно числу n троек каждого из сомножителей, а число единиц на 1 больше. ▲

657. Докажите, что все числа вида:

а) $1\overbrace{00\ldots0}^{n}4\overbrace{00\ldots0}^{n}4 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

б) $\overbrace{99\ldots9}^{n}8\overbrace{00\ldots0}^{n}1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

в) $\overbrace{44\ldots4}^{n}\overbrace{88\ldots8}^{n-1}9 \quad (n \in N)$

являются точными квадратами.

658. Докажите, что все члены бесконечной последовательности

$$1331; \quad 1030301; \quad 1003003001; \ldots$$

являются точными кубами.

659. а) Между цифрами числа 484 вставили по n нулей ($n \in N$). Докажите, что получился точный квадрат.

б)* Найдите все трехзначные числа, обладающие тем же свойством.

660*. Все цифры некоторого четырехзначного числа, являющегося точным квадратом, можно уменьшить на одно и то же натуральное число, не большее наименьшей из его цифр, так, что получится четырехзначное число, тоже являющееся точным квадратом. Найдите все такие числа.

△ Очевидно, основания обоих квадратов двузначны.

Обозначим основание второго, меньшего, квадрата через x, первого — через y. Через k обозначим натуральное число, на которое уменьшена каждая из цифр первого квадрата. Получаем:

$$x^2 = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d,$$

$$y^2 = \overline{(a+k)(b+k)(c+k)(d+k)} = 1000(a+k) + 100(b+k) + 10(c+k) + (d+k).$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$y^2 - x^2 = 1000k + 100k + 10k + k = 1111k.$$

Поскольку $1111 = 11 \cdot 101$, то разность $y^2 - x^2$ делится на 101. Но 101 — число простое, а числа x и y двузначны, поэтому $y - x < 101$. Следовательно, на 101 делится сумма $y + x$.

$$(y + x) \vdots 101.$$

Но это возможно только тогда, когда $y + x = 101$. Отсюда $y = 101 - x$. Будем иметь:

$$y^2 - x^2 = (101 - x)^2 - x^2 = 101^2 - 202x.$$

Возьмем равенство

$$101^2 - 202x = 1111k$$

и сократим его на 101:

$$101 - 2x = 11k.$$

Из последнего равенства видно, что k нечетно. Переберем все нечетные значения k, меньшие 9.

1) Пусть $k = 1$. Тогда

$$101 - 2x = 11, \quad x = 45, \quad y = 101 - 45 = 56.$$

2) Пусть $k = 3$. В этом случае

$$101 - 2x = 33, \quad x = 34, \quad y = 67.$$

3) Пусть $k = 5$. Тогда

$$101 - 2x = 55, \quad x = 23.$$

Но это значение x невозможно, так как

$$23^2 = 529 < 1000.$$

4) Пусть $k = 7$. Это значение k не подходит, так как число x получится еще меньше, чем в третьем случае.

Осталось возвести найденные нами значения y в квадрат:

$$56^2 = 3136, \quad 67^2 = 4489.$$

Ответ: 3136, все цифры нужно уменьшить на 1; 4489, все цифры нужно уменьшить на 3. ▲

661. Записали одну за другой четыре последовательные цифры (в порядке возрастания), затем первые две поменяли местами. Полученное четырехзначное число оказалось точным квадратом. Найдите все такие числа.

662*. Если первую цифру четырехзначного числа, являющегося точным квадратом, уменьшить на 3, а последнюю увеличить на 3, то получится четырехзначное число, которое также является точным квадратом. Найдите все такие числа.

663. Найдите все натуральные n, при которых число $n^2 + 3n$ — точный квадрат.

△ При натуральном n справедливо неравенство:

$$(n+1)^2 \leqslant n^2 + 3n < (n+2)^2$$

(проверьте!). Но так как числа $(n+1)^2$ и $(n+2)^2$ являются двумя ближайшими друг к другу точными квадратами, то число $n^2 + 3n$ будет точным квадратом только тогда, когда левое неравенство превратится в равенство:

$$n^2 + 3n = (n+1)^2, \quad n^2 + 3n = n^2 + 2n + 1, \quad n = 1.$$

Ответ: 1. ▲

Метод решения, который мы применили в задаче 663, назовем *методом «вилки»*.

664. Докажите, что число

$$100n^2 - 10n - 3$$

ни при каком натуральном n не является точным квадратом.

665. Разность двух натуральных чисел равна 7, а их произведение — точный квадрат. Найдите все такие пары чисел.

666. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел не является точным кубом.

667*. Существуют ли такие натуральные числа a и b, для которых числа $a^2 + b$ и $b^2 + a$ точные квадраты?

△ Пусть $a \geqslant b$. Применим метод «вилки» для числа $a^2 + b$ в такой форме:

$$a^2 < a^2 + b \leqslant a^2 + a < (a+1)^2.$$

Так как число $a^2 + b$ оказалось зажатым между двумя ближайшими друг к другу точными квадратами и оба неравенства здесь строгие, то это число не может быть точным квадратом.

Ответ: не существуют. ▲

668*. Найдите все пары натуральных чисел a и b, для которых числа $a^2 + 3b$ и $b^2 + 3a$ являются точными квадратами.

669*. Найдите какую-либо 1000 последовательных натуральных чисел, среди которых нет ни одного квадрата.

670*. Имеется бесконечная арифметическая прогрессия, все члены которой натуральные числа. Один из них — точный квадрат. Докажите, что прогрессия содержит бесконечное множество точных квадратов.

△ Обозначим разность арифметической прогрессии через d, а ее член, являющийся точным квадратом, — через a^2 ($a \in N$). Тогда при любом натуральном n получаем:

$$(a + nd)^2 = a^2 + 2and + n^2d^2 = a^2 + d(2an + n^2d).$$

Отсюда следует, что точный квадрат $(a + nd)^2$ — член прогрессии, поскольку n-й член арифметической прогрессии (a_n) вычисляется по формуле.

$$a_n = a_1 + d(n - 1). \blacktriangle$$

671*. Найдите какую-либо арифметическую прогрессию из четырех различных членов, являющихся точными степенями.

672*. Докажите, что сумма квадратов никаких 10 последовательных натуральных чисел не является точным квадратом.

△ Обозначим наименьшее из 10 последовательных натуральных чисел через $n - 4$ (предполагая, что $n > 4$). Тогда наибольшее из них равно $n + 5$. Получаем:

$$(n - 4)^2 + (n - 3)^2 + (n - 2)^2 + (n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2 +$$

$$+ (n + 4)^2 + (n + 5)^2 = 10n^2 + 10n + 85 = 5(2n^2 + 2n + 17) = 5(2(n^2 + n + 1) + 15).$$

Сумма в скобках должна делиться на 5. Для этого нужно, чтобы на 5 делилась сумма $n^2 + n + 1$. Но эта последняя сумма может оканчиваться только цифрами 1, 3 или 7 (проверьте!) и, следовательно, на 5 не делится. ▲

673*. Найдите какие-либо 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых есть точный квадрат.

§ 15. Системы счисления 8–9

Литература: [3], [7], [27[в]], [51], [52], [61[в]], [74].

674. «Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ».
(*А. Стариков.* «Квант», № 8, 1978)

Итак, вопрос: как понимать этот рассказ?

△ Начнем с фразы: «И десять загорелых рук портфель и поводок держали». Как можно два предмета — портфель и поводок — держать десятью руками? По-видимому, «десять рук» означают две руки. С этим согласуется и число ног, и число ушей, и число глаз необыкновенной девочки. Значит, здесь две единицы образуют единицу следующего разряда — подобно тому, как в десятичной системе счисления, которой мы с вами пользуемся, десять единиц составляют единицу следующего разряда — десяток.

Ну а «сто книг», «стоногий щенок», «сто первый класс», «тысяча сто лет»? В нашей десятичной системе числа 100, 101 и 1100 означают соответственно

$$10^2, \quad 10^2 + 1, \quad 10^3 + 10^2.$$

А в задаче, поскольку две единицы каждого разряда образуют единицу следующего, более высокого, разряда слова «сто», «сто один» и «тысяча сто» означают соответственно

$$2^2 = 4, \quad 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \quad 2^3 + 2^2 = 8 + 4 = 12.$$

Вот теперь все становится на свои места: девочке 12 лет, она ходит в пятый класс, носит в портфеле по четыре книги и у нее четвероногий щенок.

Мы столкнулись здесь с системой счисления, в которой две единицы составляют единицу следующего разряда. Такая система называется *двоичной*.

Ответ: все числа приведены в двоичной системе счисления. ▲

Мы с вами используем *десятичную позиционную* систему счисления. Почему десятичную, ясно из предыдущего; при этом число десять называется *основанием* системы. Позиционную — потому, что значение каждой цифры зависит от ее п о з и ц и и, от ее места, как, скажем, в числе 11 или 111. А, например, в римской системе счисления в записи II или III каждая единица означает одно и то же число, а между единицами подразумевается знак сложения — I + I или I + I + I. Римская система счисления — непозиционная (но десятичная).

В истории человечества, в древности и в средние века, у разных народов встречались разные системы счисления — с основаниями 2, 5, 10, 12, 20 и 60 (они и называются соответственно двоичной, пятеричной и т. д.), позиционные или, гораздо чаще, непозиционные.

В десятичной позиционной системе счисления запись

$$\overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}$$

означает сумму

$$a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + a_3 \cdot 10^{n-3} + ... + a_{n-1} \cdot 10 + a_n,$$

где $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ — цифры, т. е. целые числа от 0 до 9.

Примем теперь за *основание* позиционной системы счисления *любое* натуральное число d, большее 1. *Цифрами* этой системы назовем все целые числа от 0 до $d - 1$. Сумму

$$a_1 \cdot d^{n-1} + a_2 \cdot d^{n-2} + a_3 \cdot d^{n-3} + ... + a_{n-1} \cdot d + a_n$$

будем кратко записывать следующим образом:

$$\overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}_d$$

и читать: число $\overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}$ при основании d.

Наиболее простой (и наиболее древней) является двоичная система счисления, так как в ней всего две цифры — 0 и 1, вследствие чего действия над натуральными числами производятся очень быстро. Не случайно в электронных вычислительных машинах обычно используется двоичная система счисления.

Как перевести натуральное число из недесятичной системы счисления в десятичную? Фактически мы уже ответили на этот вопрос. Например:

$$110101_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = 32 + 16 + 4 + 1 = 53,$$

$$2134_8 = 2 \cdot 8^3 + 1 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 + 4 = 2 \cdot 512 + 64 + 24 + 4 = 1116.$$

(Обратите внимание, что если число записано, скажем, в восьмиричной системе счисления, то все цифры должны быть меньше 8.)

А как выполнить обратный перевод — из десятичной системы счисления в данную недесятичную? На такой вопрос мы отвечать не будем, поскольку здесь это мало понадобится. Читатель может найти развернутый ответ на поставленный вопрос, например, в книгах [3] или [27].

Наконец, посмотрим, как производятся действия над натуральными числами в системах счисления, отличных от десятичной. Это делается примерно так же, как и в десятичной системе. Пусть нужно сложить, скажем, числа 3546 и 6345 в семиричной системе. Получаем:

$$\begin{array}{r} {}_{+}3546_7 \\ 6345_7 \\ \hline 13224_7. \end{array}$$

При сложении цифр, например, в последнем столбце складываем 6 и 5, как в десятичной системе: $6 + 5 = 11$, затем 11 мысленно представляем как $7 + 4$, цифру 4 пишем в том же столбце, а вместо 7 добавляем 1 в предыдущем столбце, т. е. в более высоком разряде, так как $11 = 14_7$. И т. д.

675. У учителя математики спросили, сколько человек участвовало в школьной математической олимпиаде. Он ответил: «66 мальчиков и 12 девочек, а всего 100 человек».

Очевидно, эти числовые данные приведены в недесятичной системе счисления. В какой именно?

676. В бумагах одного чудака-математика была найдена его автобиография. Вот ее начало: «Я окончил университет в возрасте 44 лет. Через некоторое время, 100-летним молодым человеком, я женился на 34-летней девушке. Незначительная разница в возрасте — всего 11 лет — благоприятствовала нашей семейной жизни».

В какой системе счисления приведены здесь все числа?

677. Ведущий школьного математического вечера показывает фокус: он четыре раза складывает два одинаковых числа и каждый раз получает новую сумму:

а) $\begin{array}{r} {}_{+}376 \\ 376 \\ \hline 752; \end{array}$ б) $\begin{array}{r} {}_{+}376 \\ 376 \\ \hline 763; \end{array}$ в) $\begin{array}{r} {}_{+}376 \\ 376 \\ \hline 774; \end{array}$ г) $\begin{array}{r} {}_{+}376 \\ 376 \\ \hline 730. \end{array}$

Учитель математики свидетельствует, что все вычисления произведены верно. В какой системе счисления выполнено каждое сложение?

678. Число 43 записано в семиричной системе счисления. В какой системе оно записывается теми же цифрами, но в обратном порядке?

△ Сначала число 43_7 переведем в десятичную систему счисления:

$$43_7 = 4 \cdot 7 + 3 = 28 + 3 = 31.$$

А теперь выясним, при каком основании d системы выполняется равенство $31 = 34_d$. Будем иметь:

$$31 = 3d + 4, \quad 3d = 27, \quad d = 9.$$

Ответ: в девятиричной. ▲

679. На доске сохранилась полустертая запись:

$$\begin{array}{r} {}_{+}\begin{array}{r} 4{*}4{*}{*} \\ 27654 \end{array} \\ \hline {*}6311 \end{array}$$

(стертые цифры обозначены звездочками). В какой системе счисления выполнено сложение? Восстановите запись.

680. В каких системах счисления справедливы равенства:
а) $2 \cdot 2 = 11$; б) $7 \cdot 5 = 38$; в) $4 \cdot 13 = 100$; г) $17^2 = 341$?

681. Найдите цифру, обозначенную звездочкой, если число $51{*}2_6$ делится на 4. Укажите все решения.

682. Найдите цифры a и b, если число $\overline{25ab_8}$ делится на 32. Приведите все решения.

683. Найдите все d, при которых число 12354_d делится на 6.

684. Найдите в десятичной системе счисления трехзначное число, которое в девятиричной системе счисления записывается теми же цифрами, но в обратном порядке.

685. При каком основании системы счисления имеет решение ребус

$$\begin{array}{r} {}_{+}\begin{array}{r} \text{КИТО} \\ \text{КИОТО} \end{array} \\ \hline \text{ТОКИО}, \end{array}$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры? Найдите все решения ребуса.

△ Из последнего столбца видно, что цифра О равна нулю.

Из предпоследнего столбца 2Т = И или 2Т = И + d, где d — основание системы счисления. Но так как в третьем столбце сумма равна К, а не И, то остается только второй вариант.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\text{Т} = \text{И} + d, \\ \text{И} + 1 = \text{К}, \\ \text{К} + \text{И} = d, \\ \text{К} + 1 = \text{Т}. \end{cases}$$

Поскольку это система четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными, то ее можно решить. В данном случае это делается довольно легко.

Ответ: $4350_7 + 43050_7 = 50430_7$. ▲

686. Докажите, что:

а) число 961 — точный квадрат в любой системе счисления с основанием $d > 9$;

б) число 1331 — точный куб в любой системе счисления с основанием $d > 3$;

в) число 14641 — точная четвертая степень в любой системе счисления с основанием $d > 6$.

687. Найдите все системы счисления, в которых являются четными числа:

а) 36_d; б) 53_d.

688. Докажите, что число 534 четно в системе счисления с любым основанием $d > 5$.

689. Найдите признак делимости на 4 в двенадцатиричной системе счисления.

690. Найдите признак делимости на 2 в системе счисления с любым нечетным основанием.

△ Обозначим основание системы через d. Возьмем в этой системе счисления любое число

$$x = \overline{a_1a_2a_3...a_{n-1}a_n}_d = a_1 \cdot d^{n-1} + a_2 \cdot d^{n-2} + a_3 \cdot d^{n-3} + ... + a_{n-1} \cdot d + a_n.$$

Прибавим и отнимем сумму $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ (прием «плюс-минус»).

Получим:

$$x = a \cdot (d^{n-1} - 1) + a_2 \cdot (d^{n-2} - 1) + a_3 \cdot (d^{n-3} - 1) + ...$$

$$... + a_{n-1} \cdot (d - 1) + (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n).$$

Так как d нечетно, то каждая из разностей

$$d^{n-1} - 1, \quad d^{n-2} - 1, ..., \quad d - 1$$

четна. Следовательно, число x делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ делится на 2.

Ответ: число делится на 2 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 2. ▲

691. Сколько всего существует:

а) двузначных; б) трехзначных; в) четырехзначных чисел в системе счисления с основанием d?

692. Докажите, что квадрат любого нечетного числа в восьмиричной системе счисления оканчивается цифрой 1.

693. Два ученика А и Б ведут в школе математический вечер. А выходит из зала, а Б предлагает присутствующим назвать ему любое натуральное число от 1 до 31. Затем он вызывает на сцену пятерых зрителей и выстраивает их в ряд. А возвращается и, взглянув на пятерку зрителей на сцене, сразу называет задуманное число. Как А и Б это делают?

△ Воспользуемся двоичной системой счисления. Каждое натуральное число от 1 до 31 можно представить числом, содержащим пять цифр этой системы; например, число 6 представим в виде 00110_2. Будем обозначать единицу в этой системе мальчиком, а нуль — девочкой, вызванными на сцену. Тогда, например, число 6 Б обозначает таким рядом зрителей:

девочка — девочка — мальчик — мальчик — девочка.

А, взглянув на пятерку зрителей на сцене, мысленно выражает ее числом в двоичной системе счисления, а затем, также мысленно, переводит это число в десятичную систему. ▲

694. Запишем все натуральные числа от 1 до 15 в двоичной системе счисления. На каждое число потребуются четыре цифры (считая и нули в начале числа). Теперь внесем эти числа в таблицу с четырьмя строками, пользуясь следующим правилом. В первую строку запишем в порядке возрастания все числа, у которых первая цифра в двоичной системе равна 1 (очевидно, это все числа от 8 до 15):

$$8 = 1000_2, \quad 9 = 1001_2, \quad 10 = 1010_2$$

и т. д. Во вторую строку запишем, также в порядке возрастания, все числа, у которых вторая цифра равна 1 (независимо от того, какова первая цифра):

$$4 = 0100_2, \quad 5 = 0101_2, \quad 6 = 0110_2$$

и т. д. В третью — все числа, у которых третья цифра равна 1:

$$2 = 0010_2, \quad 3 = 0011_2, \quad 6 = 0110_2$$

и др. В четвертую — все числа, у которых четвертая, последняя, цифра равна 1 (это все нечетные числа):

$$1 = 0001_2, \quad 3 = 0011_2, \quad 5 = 0101_2$$

и т. д. Получаем такую таблицу.

8	9	10	11	12	13	14	15
4	5	6	7	12	13	14	15
2	3	6	7	10	11	14	15
1	3	5	7	9	11	13	15

Теперь вы предлагаете кому-либо из своих товарищей задумать любое натуральное число от 1 до 15. Если он укажет все строки таблицы, в которых оно встречается, вы немедленно его угадываете. Каким образом?

695. Имеются чашечные весы и гири в 1, 2, 4, 8, 16 и 32 кг, по одной каждого веса. Докажите, что с помощью этих гирь можно взвесить любой груз от 1 до 63 кг (с точностью до 1 кг), помещая гири только на одну чашу весов.

△ Давайте посмотрим, как эту задачу можно решить с помощью систем счисления.

Пусть нужно взвесить груз в n кг, где n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \leqslant n \leqslant 63$. Запишем число n в двоичной системе счисления. Для этого понадобится не более шести цифр, так как

$$n < 64 = 2^6 = 1000000_2.$$

Получаем:

$$n = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}_2.$$

Если при этом не равны нулю, например, цифры a_2, a_3 и a_5, т. е.

$$n = 011010_2 = 2^4 + 2^3 + 2 = 26,$$

то для взвешивания груза используем гири в 16, 8 и 2 кг.

Ну а почему этим способом можно взвесить любой груз до 63 кг? Потому, что

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63. \blacktriangle$$

696. Имеются чашечные весы и гири в 1, 3, 9 и 27 кг, по одной каждого веса. Как с помощью этого набора гирь взвесить любой груз от 1 до 40 кг (с точностью до 1 кг), если гири можно ставить на обе чаши весов?

697. Вы задумали натуральное число от 1 до 500. Я берусь угадать его, задав вам не более 9 вопросов, из которых вы будете отвечать правдиво, но только «да» или «нет». Какими должны быть эти вопросы?

△ Возможна такая серия вопросов.

1) Разделите задуманное число на 2. Делится ли оно на 2?

Если получен ответ «да», то я запишу цифру 0, а если «нет», то цифру 1.

2) Разделите частное, полученное при первом делении, на 2. Делится ли оно на 2?

Если ответ «да», то я запишу (непосредственно перед цифрой, которая записана на первом шаге) цифру 0, а если «нет», то цифру 1.

3) Разделите частное, которое получилось на втором шаге, на 2. Делится ли оно на 2?

В зависимости от ответа «да» или «нет» я запишу цифру 0 или 1 (непосредственно перед цифрой, записанной на втором шаге).

И т. д. Остатки, полученные при таких делениях, образуют запись задуманного числа n в двоичной системе счисления. В самом деле, запишем первое деление с остатком в виде

$$n = 2q_1 + r_1,$$

второе — в виде

$$q_1 = 2q_2 + r_2,$$

третье — в виде

$$q_2 = 2q_3 + r_3$$

и т. д. Здесь r_1, r_2, r_3 и др. принимают только значения 0 или 1. Теперь будем иметь:

$$n = 2q_1 + r_1 = 2(2q_2 + r_2) + r_1 = 2^2q_2 + 2r_2 + r_1 = 2^2(2q_3 + r_3) + 2r_2 + r_1 =$$
$$= 2^3q_3 + 2^2r_3 + 2r_2 + r_1 = \ldots .$$

Отсюда видно, что остаток r_1 является последней цифрой в двоичной записи числа n, остаток r_2 — предпоследней цифрой этой записи, r_3 — предпредпоследней цифрой и т. д.

Но почему для определения n достаточно 9 вопросов? Потому, что двоичная запись числа, заключенного в пределах от 1 до 500, содержит не более 9 цифр: ведь такое n меньше числа

$$512 = 2^9 = 100...0_2$$

(девять нулей), которое является наименьшим десятизначным числом в двоичной системе счисления. ▲

С подобными задачами мы уже встречались в книге [18] (§ 5, задачи 107–109). Там при решении применялся метод по форме иной, чем в задаче 697, но по существу совпадающий с ним.

698. Я задумал натуральное число n, удовлетворяющее неравенству:

а) $1 \leqslant n < 2^k \quad (k \in N)$; б) $2^{k-1} \leqslant n < 2^k \quad (k \in N)$.

За какое наименьшее число вопросов вы можете угадать это число, задавая мне вопросы, на которые я буду отвечать правдиво, но только «да» или «нет»?

699*. В какой системе счисления 792_d делится на 297_d?

700*. В какой системе счисления число 11111_d является точным квадратом?

△ Представим это число в виде суммы, разлагая его по степеням d:

$$11111_d = d^4 + d^3 + d^2 + d + 1.$$

Нужно найти такое натуральное $d > 1$, при котором полученная сумма является квадратом квадратного трехчлена с аргументом d и целыми коэффициентами.

Заключим эту сумму в границы между двумя квадратами:

$$\left(d^2 + \frac{d}{2}\right)^2 < d^4 + d^3 + d^2 + d + 1 < \left(d^2 + \frac{d}{2} + 1\right)^2$$

(проверьте неравенство!). Умножим последнее неравенство на 4 для того, чтобы избежать дробей:

$$(2d^2 + d)^2 < 4d^4 + 4d^3 + 4d^2 + 4d + 4 < (2d^2 + d + 2)^2.$$

Поскольку левая и правая части этого двойного неравенства являются квадратами натуральных чисел, отличающихся на 2, а средняя часть также должна быть квадратом натурального числа, то основанием последнего квадрата может быть только $2d^2 + d + 1$. Решим соответствующее уравнение:

$$(2d^2 + d + 1)^2 = 4d^4 + 4d^3 + 4d^2 + 4d + 4,$$
$$4d^4 + d^2 + 1 + 4d^3 + 4d^2 + 2d = 4d^4 + 4d^3 + 4d^2 + 4d + 4,$$
$$d^2 - 2d - 3 = 0, \quad d = 3.$$

Ответ: в троичной системе. ▲

701*. Докажите, что в любой системе счисления числа

$$10101, \quad 101010101, \quad 1010101010101, \ldots$$

(число единиц нечетно) являются составными.

§ 16. Представление целых чисел в некоторой форме 8–11

Литература: [48], [70[в]], [74], [90[в]].

Задачи на представление чисел или выражений в некоторой форме встречаются в школьной математике довольно часто. Например, когда вы разлагаете натуральное число на простые множители, вы фактически представляете это число в виде произведения простых чисел. Когда вы разлагаете многочлен на множители, вы представляете его в виде произведения одночлена на многочлен или многочлена на многочлен.

Здесь мы займемся представлением целых чисел в некоторой специальной форме: в виде суммы или разности квадратов двух целых чисел, в виде некоторого произведения целых чисел и т. д.

702. Докажите, что любое натуральное число, не меньшее 2, можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел.

△ Представим натуральное число $n \geqslant 2$ в виде суммы следующим образом:

$$n = (n - 1) + 1.$$

Натуральные числа $n - 1$ и 1 взаимно просты. ▲

703. Найдите все нечетные натуральные числа, которые можно представить в виде суммы двух составных чисел.

704. Докажите, что любое натуральное число n, большее 7, можно представить в виде $3x + 5y$, где x и y — целые неотрицательные числа.

705. На доске написаны числа 12 и 17. К уже написанным на доске числам разрешается дописать число, равное сумме любых двух из уже написанных. Можно ли, повторяя эту операцию, добиться того, чтобы на доске оказалось написанным число 2000?

706°. Докажите, что любое нечетное число можно представить в виде разности двух точных квадратов.

△ Возьмем любое нечетное число в виде $2a + 1$, где a – целое, и преобразуем его так:

$$2a + 1 = (a^2 + 2a + 1) - a^2 = (a + 1)^2 - a^2. ▲$$

10 Зак. 579

707. Найдите все простые числа, которые нельзя представить в виде разности двух точных квадратов.

708. Докажите, что любое четное число, делящееся на 4, можно представить как разность двух точных квадратов.

709. Докажите, что любое четное число вида $4a + 2$, где a — целое, нельзя представить в виде разности двух точных квадратов.

△ Допустим, что существуют такие целые числа x и y, что

$$4a + 2 = x^2 - y^2, \quad (x + y)(x - y) = 4a + 2.$$

Так как число $4a + 2$ — четное, то числа x и y являются числами одинаковой четности и, следовательно, сумма $x + y$ и разность $x - y$ — числами четными. Но тогда левая часть последнего равенства делится на 4, а правая не делится. Полученное противоречие и доказывает, что таких целых x и y не существует. ▲

(Обратите внимание на задачи 614 и 615, которые близки к задаче 709.)

710. Можно ли представить в виде разности двух точных квадратов числа:
а) 13579; б) 135790; в) 2468?

711. Докажите, что любую точную степень можно представить в виде разности двух точных квадратов.

712. Пусть a — любое натуральное число. Найдите какое-либо представление числа a^3 в виде разности двух точных квадратов.

△ Пусть x и y — такие целые числа, что

$$x^2 - y^2 = a^3, \quad (x + y)(x - y) = a^3.$$

Для того чтобы последнее равенство выполнялось, д о с т а т о ч н о, чтобы выполнялись два равенства

$$\begin{cases} x + y = a^2, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Это значит, что если числа x и y удовлетворяют такой системе уравнений, то они удовлетворяют и уравнению $x^2 - y^2 = a^3$ (но не обратно). Для решения системы сложим и вычтем ее уравнения:

$$2x = a^2 + a, \quad 2y = a^2 - a, \quad x = \frac{a(a+1)}{2}, \quad y = \frac{a(a-1)}{2}.$$

Итак, справедливо равенство:

$$a^3 = \left[\frac{a(a+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{a(a-1)}{2}\right]^2. \ ▲$$

713. Пусть a и b — целые числа. Докажите, что:

а) если ab четно, то сумму $a^2 + b^2$ можно представить в виде разности двух точных квадратов;

б) если ab нечетно, то сумму $a^2 + b^2$ нельзя представить в виде разности двух точных квадратов.

714. Можно ли представить в виде разности кубов двух натуральных чисел числа: а) 1998; б) 1981?

715. Пусть a, b, c, d — целые числа, сумма которых равна нулю. Представьте сумму $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ в виде суммы трех точных квадратов.

716°. Докажите, что натуральное число вида $4n + 3$ ($n = 0, 1, 2, ...$) нельзя представить как сумму двух точных квадратов.

717. Можно ли представить в виде суммы двух точных квадратов числа: а) 137; б) 287; в) 1148?

718. Докажите, что не существует двух последовательных нечетных чисел, каждое из которых можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

719. Найдите все числа вида 222...2, которые можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

△ Пусть

$$222...2 = a^2 + b^2,$$

где a и b — целые. Тогда числа a и b могут быть только нечетными:

$$a = 2k + 1, \ b = 2l + 1 \quad (k \in Z, l \in Z).$$

Следовательно, сумма $a^2 + b^2$ при делении на 8 дает в остатке 2:

$$a^2 + b^2 = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4k(k + 1) + 4l(l + 1) + 2.$$

С другой стороны, из чисел вида 222...2 только число 2 при делении на 8 дает в остатке 2, поскольку если число двоек в этом числе больше 1, то

$$22...2 = 22...2 \cdot 100 + 22,$$

где первое слагаемое полученной суммы делится на 8, а второе при делении на 8 дает в остатке 6.

Ответ: 2. ▲

720. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы двух точных квадратов тогда и только тогда, когда и удвоенное число можно представить в таком же виде.

△ 1) Сначала докажем, что если

$$n = a^2 + b^2,$$

где a и b — целые, то и число $2n$ представимо в такой же форме. Умножим записанное равенство на 2 и преобразуем получающуюся сумму:

$$2n = 2a^2 + 2b^2 = (a^2 + 2ab + b^2) + (a^2 - 2ab + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2.$$

2) Докажем обратное утверждение.

Пусть

$$2n = a^2 + b^2,$$

где n — натуральное, a и b — целые. Тогда числа a и b имеют одинаковую четность.

Разделим последнее равенство на 2, а затем дробь, получающуюся в правой части нового равенства, разделим и умножим на 2:

$$n = \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{2a^2+2b^2}{4} = \frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Очевидно, что при этом числа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ являются целыми. ▲

721. Докажите, что если каждое из двух натуральных чисел можно представить в виде суммы двух точных квадратов, то и их произведение можно представить в таком же виде.

722. Натуральное число можно представить в виде суммы двух точных квадратов. Верно ли, что тогда и куб этого числа можно представить в виде суммы двух точных квадратов?

723. Докажите, что любое натуральное число n можно представить в виде $a^2 + 2b^2$, где a и b — целые, тогда и только тогда, когда числа: а) $2n$; б) $3n$ можно представить в такой же форме.

724. Число 4175892 представьте в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

725. Число 11...122...2 (записывающееся 100 единицами и 100 двойками) представьте в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

△ Сначала попробуем сделать это для чисел 12 и 1122:

$$12 = 3 \cdot 4, \qquad 1122 = 33 \cdot 34.$$

Видимо, и в нашем случае один из множителей записывается одними тройками, а другой — на 1 больше.

Разложим данное число на множители. Но как при этом получить множитель, записывающийся одними тройками? Будем иметь:

$$11...122...2 = 11...1 \cdot 10^{100} + 2 \cdot 11...1 = 11...1 \cdot (10^{100} + 2) =$$

$$= (11...1 \cdot 3)\frac{100...02}{3} = 33...3 \cdot 33...34. \ ▲$$

726. Докажите, что число

$$\frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n)$$

при любом натуральном n можно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

727. Докажите, что число

$$2 \cdot (6^n + 1)$$

ни при каком натуральном n нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

△ Число $6^n + 1$ оканчивается цифрой 7, а следовательно, число $2 \cdot (6^n + 1)$ — цифрой 4. С другой стороны, произведение $k(k + 1)$ при натуральном k может оканчиваться только цифрами 0, 2 или 6 (проверьте!). Поэтому равенство

$$2 \cdot (6^n + 1) = k(k + 1)$$

ни при каких натуральных n и k невозможно. ▲

728. Найдите все натуральные n, при которых число $n! + 4$ можно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

729. Существует ли такое натуральное n, при котором число $3n + 1$ можно представить в виде произведения двух натуральных чисел?

△ Число $3n + 1$ при делении на 3 дает в остатке 1, а число $k(k + 1)$ при натуральном k — остаток 0 или 2 (докажите!). Следовательно, такое натуральное n не существует.

Ответ: не существует. ▲

730. Докажите, что ни при какой перестановке цифр в числе 23456789 нельзя получить число, которое можно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

731*. Можно ли число $n^2 + 7n + 8$ при каком-либо натуральном n представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел?

△ Применим метод «вилки» (см. решение задачи 663 из § 14). Справедливо неравенство:

$$(n + 2)(n + 3) < n^2 + 7n + 8 < (n + 3)(n + 4)$$

(проверьте!).

Так как произведения $(n + 2)(n + 3)$ и $(n + 3)(n + 4)$ являются ближайшими друг к другу произведениями двух последовательных натуральных чисел, а число $n^2 + 7n + 8$ заключено между ними, то это число ни при каком натуральном n нельзя представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел.

Ответ: нельзя. ▲

732*. Найдите все натуральные n, при которых число $n^2 + 2n + 12$ является произведением двух последовательных натуральных чисел.

733. Докажите, что квадрат любого натурального числа, большего 1, можно представить в виде суммы последовательных нечетных натуральных чисел.

△ Сначала проверим это утверждение на примерах:

$$4 = 1 + 3, \quad 9 = 1 + 3 + 5, \quad 16 = 1 + 3 + 5 + 7, \quad 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9.$$

По-видимому, наименьшее из нечетных чисел всегда равно 1, а число слагаемых в случае квадрата n^2, где n — натуральное, равно n. Проверим наше предположение:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = \frac{1 + (2n - 1)}{2}n = n^2.$$

Утверждение доказано. ▲

734. Верно ли, что любую точную степень любого натурального числа, большего 1, можно представить в виде суммы последовательных нечетных натуральных чисел?

735. Докажите, что число 2^n ни при каком натуральном n нельзя представить в виде суммы последовательных натуральных чисел.

736. Найдите все представления числа 1 в виде суммы

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z},$$

где x, y, z — натуральные числа.

△ Имеем:

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}, \quad xyz=yz+xz+xy.$$

Пусть $x \leqslant y \leqslant z$. Тогда из трех произведений xy, xz и yz наибольшим является yz. Пользуясь этим, получаем неравенство:

$$xyz=xy+xz+yz \leqslant yz+yz+yz=3yz.$$

Следовательно, $xyz \leqslant 3yz$, откуда $x \leqslant 3$. Так как $x>1$, то x может принимать только значения 2 и 3. Разберем оба случая.

1) Пусть $x=2$. Тогда уравнение принимает вид

$$2yz=2y+2z+yz, \quad yz=2y+2z.$$

Последнее уравнение можно решать тем же методом — с помощью неравенств (попробуйте сделать это самостоятельно), но возможен и другой путь. Выразим из уравнения, например, z через y:

$$yz-2z=2y, \quad z=\frac{2y}{y-2}.$$

Найдем все значения y, при которых последняя дробь равна целому числу. Как это делается, мы видели в § 8 (п. 8.1.6). Получаем:

$$z=\frac{(2y-4)+4}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}.$$

Отсюда $y-2$ может принимать значения 1, 2 и 4.

Если $y-2=1$, то $y=3$, $z=2+4=6$.

Если $y-2=2$, то $y=4$, $z=2+\frac{4}{2}=4$.

Если $y-2=4$, то $y=6$, $z=2+\frac{4}{4}=3$. Это вариант временно отбросим, так как должно выполняться неравенство $y \leqslant z$.

2) Пусть $x=3$. Тогда

$$3yz=3y+3z+yz, \quad 2yz=3y+3z.$$

Выразим z через y:

$$2yz-3z=3y, \quad z=\frac{3y}{2y-3}.$$

Умножим последнее уравнение на 2 и выделим у получающейся справа дроби целую часть:

$$2z = \frac{6y}{2y-3} = \frac{(6y-9)+9}{2y-3} = 3 + \frac{9}{2y-3}.$$

Следовательно, $2y - 3$ равно 1, 3 или 9.

Если $2y - 3 = 1$, то $y = 2$. Этот вариант отбросим, поскольку должно быть $x \leqslant y$.

Если $2y - 3 = 3$, то $y = 3$, $2z = 3 + \frac{9}{3} = 6$, $z = 3$.

Если $2y - 3 = 9$, то $y = 6$, $2z = 3 + \frac{9}{9} = 4$, $z = 2$. И этот вариант отбросим.

Ответ: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$. ▲

737. Найдите все представления дроби $\frac{1}{5}$ в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y — натуральные числа.

738. Пусть p — простое число, большее 2. Найдите все представления числа $\frac{2}{p}$ в виде $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, где x и y — натуральные числа.

739*. Можно ли число 456 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма квадратов всех этих чисел была также равна 456?

△ Число 456 разложим на простые множители: $456 = 2^3 \cdot 3 \cdot 19$. Перечислим все эти простые множители: 2, 2, 2, 3 и 19.

Теперь запишем равенство

$$456 = 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 19^2 + x,$$

где x — натуральное. Найдем из него x:

$$456 = 4 + 4 + 4 + 9 + 361 + x, \quad 456 = 382 + x, \quad x = 74.$$

Получаем два равенства

$$456 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19 \text{ (74 множителя, равных 1)},$$

$$456 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 19^2 \text{ (74 слагаемых, равных } 1^2\text{)}.$$

Ответ: можно — $456 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 19$ (74 множителя, равных 1). ▲

740*. Можно ли число 128 представить в виде произведения нескольких натуральных чисел так, чтобы сумма кубов всех этих чисел была также равна 128?

741*. Номера каких годов XX века можно представить в виде $2^n - 2^k$, где n и k натуральные числа? Найдите все такие годы.

△ Обозначим искомый год через $\overline{19xy}$. Тогда

$$\overline{19xy} = 2^n - 2^k, \quad 2^n = \overline{19xy} + 2^k.$$

Следовательно, $2^n > \overline{19xy}$, откуда $n > 10$.

Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $n = 11$. Получаем:

$$\overline{19xy} = 2048 - 2^k.$$

Значения $k = 1, 2, 3, 4, 5$ не подходят — слишком малы. Значения $k = 6$ и $k = 7$ подходят:

$$2048 - 2^6 = 2048 - 64 = 1984, \quad 2048 - 2^1 = 2048 - 128 = 1920.$$

А вот значение $k = 8$ слишком велико:

$$2048 - 2^8 = 2048 - 256 = 1792 < \overline{19xy}.$$

2) Пусть $n = 12$. Тогда

$$\overline{19xy} = 4096 - 2^k.$$

Даже значение $k = 11$ слишком мало:

$$4096 - 2^{11} = 2^{12} - 2^{11} = 2^{11} = 2048 > \overline{19xy}.$$

А значение $k = 12$ уже велико.

3) Аналогично доказывается, что и при $n = 13$ решений нет. И т. д.

Ответ: 1984, 1920. ▲

742. Существуют ли в XX веке годы, номера которых можно представить в виде $2^n + 2^k$, где n и k — натуральные числа?

743*. Число 1998 можно представить в виде суммы n составных чисел и нельзя представить в виде суммы $n + 1$ составного числа. Чему равно n?

744*. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы трех натуральных чисел, произведение которых — точный квадрат.

△ Сначала будем искать все натуральные числа, которые м о ж н о представить в такой форме. Рассмотрим два случая.

1) Пусть натуральное число a нечетно: $a = 2k + 1$, где k — натуральное.

Если a представить в виде такой суммы: $a = k + k + 1$, то произведение этих трех слагаемых — квадрат натурального числа: $k \cdot k \cdot 1 = k^2$. Следовательно, все нечетные натуральные числа, начиная с 3, можно представить в требуемом виде.

2) Пусть число a четно: $a = 2k$, где k натуральное.

Как же быть в этом случае?

Вероятно, разбивая a на три слагаемых, нужно выделить слагаемое, равное 4, так как 4 является точным квадратом, и еще два равных слагаемых. Получаем:

$$a = 2k = (2k - 4) + 4 = (k - 2) + (k - 2) + 4.$$

Произведение этих трех слагаемых есть квадрат натурального числа:

$$(k - 2)(k - 2)4 = ((k - 2)2)^2.$$

Проведенное здесь рассуждение годится только при $k > 2$. Поэтому значения $k = 1$ и $k = 2$ нужно рассматривать отдельно; тогда $a = 2$ и $a = 4$. Кроме того, в первом случае еще осталось число $a = 1$.

Проверка показывает, что ни одно из чисел 1, 2 и 4 нельзя представить в виде требуемой суммы.

Ответ: 1, 2, 4. ▲

745*. Найдите все натуральные числа, которые можно представить в виде суммы четырех натуральных чисел, произведение которых есть точный куб.

§ 17. Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах 7–9

Литература: [3], [16], [17], [38[в]], [48], [100[в]].

В §§ 17–20 мы рассмотрим большой цикл задач на решение уравнений с несколькими неизвестными в целых и натуральных числах. Такие задачи играют очень важную роль среди задач с целыми числами. Они уже встречались, и довольно часто, и на страницах этой книги.

В данном параграфе мы займемся решением уравнений первой степени с двумя неизвестными в целых числах. Общий вид такого уравнения:

$$ax + by = c,$$

где a, b, c — данные целые числа, x и y — неизвестные, принимающие только целые значения.

Подобные уравнения имеются в книге [18] (задачи 181–186 из § 7).

17.1. 7–8

Сначала рассмотрим *вводные* задачи. Это задачи на несложные уравнения, которые решаются в натуральных или целых неотрицательных числах, причем при решении используются отношения делимости, неравенства и метод перебора.

746. Имеются контейнеры двух видов: по 130 кг и 160 кг. Сколько было контейнеров первого и сколько второго вида, если вместе они весят 3 тонны? Укажите все решения.

△ Обозначим количество контейнеров первого вида через x, второго — через y. Получаем уравнение

$$130x + 160y = 3000, \qquad 13x + 16y = 300.$$

Попробуем воспользоваться делимостью на 13. Для этого $16y$ представим в виде $13y + 3y$, а 300 разделим на 13 с остатком:

$$13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1, \qquad 3y - 1 = 13 \cdot 23 - 13x - 13y.$$

Правая часть последнего уравнения делится на 13, следовательно, и левая его часть должна делиться на 13. Для того чтобы найти значения y, при которых разность $3y - 1$ делится на 13, применим перебор. При этом проще не придавать y последовательные значения 1, 2, 3 и т. д., а приравнивать $3y - 1$ к числам, делящимся на 13: 13, 26, 39, 52, 65 и т. д., выясняя каждый раз, является ли корень соответствующего уравнения целым или дробным. Целые корни получаются в следующих случаях:

$$3y - 1 = 26, \quad y = 9; \quad 3y - 1 = 65, \quad y = 22$$

и др. Но уже значение $y = 22$ слишком велико, так как в этом случае

$$16y = 16 \cdot 22 = 352 > 300.$$

При $y = 9$ из уравнения можно найти x:

$$13x + 16 \cdot 9 = 300, \quad 13x = 156, \quad x = 12.$$

Ответ: 12 контейнеров по 130 кг и 9 по 160 кг. ▲

747. Если между цифрами двузначного числа вписать это же двузначное число, то получится четырехзначное число, которое больше первоначального в 99 раз. Найдите все такие двузначные числа.

748. Определите день и месяц рождения некоего человека, если у него сумма произведений числа месяца на 12 и номера месяца на 31 равна 436.

749. Найдите все решения уравнений:

а) $7x + 13y = 113$; б) $19x + 99y = 1999$

в натуральных числах x и y.

750. Докажите, что не существует натурального числа, которое при делении на 18 и 21 дает в остатке соответственно 11 и 4.

751. Один мастер делает на длинной ленте пометки синим фломастером от ее начала через каждые 34 см, другой мастер делает на ней пометки красным фломастером через каждые 27 см. Может ли какая-либо синяя пометка оказаться на расстоянии 2 см от какой-либо красной?

752. Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 28, а при делении на 15 дает в остатке 4.

△ Искомое число равно, с одной стороны, $28x$, а с другой — $15y + 4$, где x и y — натуральные числа. Получаем уравнение

$$28x = 15y + 4.$$

Нам не нужно искать все решения этого уравнения в натуральных числах, а только одно решение — то, для которого значения x и y минимальны. Для этой цели преобразуем уравнение, используя соображения делимости на 15:

$$30x - 2x = 15y + 4, \quad 30x - 15y = 4 + 2x,$$

откуда

$$(2x + 4) \vdots 15, \quad (x + 2) \vdots 15.$$

Поскольку нам требуется наименьшее значение x, удовлетворяющее последней делимости, то $x + 2$ приравняем к 15:

$$x + 2 = 15, \quad x = 13.$$

Ответ: 364. ▲

753. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 9 и 14 дает соответственно остатки 7 и 5.

754. Найдите такое наименьшее натуральное n, при котором n делится на 19, а $n + 1$ — на 98.

755. «Шли сорок мышей, несли сорок грошей,
Две мыши поплоше несли по два гроша,
Немало мышей — вообще без грошей.
Большие совсем тащили по семь.
А остальные несли по четыре.
Сколько мышей шли без грошей?»

(*И. Акулич.* «Квант», № 4, 1995)

△ Обозначим количество мышей, которые шли без грошей, через x, количество больших мышей — через y, а количество тех, которые несли по четыре гроша, — через z. Составим систему уравнений с неизвестными x, y и z:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 + 7y + 4z = 40, \\ 2 + x + y + z = 40, \end{cases} \quad \begin{cases} 7y + 4z = 36, \\ x + y + z = 38. \end{cases}$$

Это система двух линейных уравнений с тремя неизвестными.

Для ее решения учтем, что на основании первого уравнения y делится на 4. Кроме того,

$$7y < 7y + 4z, \quad 7y < 36,$$

откуда $y \leqslant 5$. Такое y только одно: $y = 4$. Тогда из первого уравнения находим z, а затем из второго x:

$$7 \cdot 4 + 4z = 36, \quad 4z = 8, \quad z = 2; \quad x + 4 + 2 = 38, \quad x = 32.$$

Ответ: 32. ▲

756. В кучке лежат 100 гирек общей массой 500 г. При этом имеются гирьки массой только в 1 г, 10 г и 50 г. Сколько гирек каждой массы имеется в кучке?

757. Найдите все трехзначные числа, которые в 11 раз больше суммы своих цифр.

△ Обозначим искомое число через $\overline{abc}$. Получаем:

$$\overline{abc} = 11(a + b + c), \quad 100a + 10b + c = 11a + 11b + 11c, \quad 89a = b + 10c.$$

Попробуем использовать делимость на 10 (но можно и на 11):

$$90a - a = b + 10c, \quad 90a - 10c = a + b.$$

Следовательно, сумма $a + b$ делится на 10, т. е. $a + b = 10$. Тогда последнее уравнение принимает вид:

$$90a - 10c = 10, \quad 9a - c = 1, \quad 9a = c + 1.$$

Отсюда $a = 1$, $c = 8$. Найдем еще b, пользуясь тем, что $a + b = 10$: $b = 9$.

Ответ: 198. ▲

758. Найдите трехзначное число, если все его цифры отличны от нуля, а сумма всевозможных двузначных чисел, составленных из них, равна этому числу. Укажите все решения.

759. В магазине имеется мастика в ящиках по 16, 17 и 21 кг. Как одной организации купить ровно 185 кг мастики, не вскрывая ящики? Найдите все способы, которыми можно это сделать.

760. При стрельбе по мишени стрелок выбивает только по 8, 9 и 10 очков. Всего он, сделав более 11 выстрелов, выбил 100 очков. Сколько выстрелов сделал стрелок, и какие были попадания?

761. В городе имеются гостиницы трех типов. В каждой гостинице первого, второго и третьего типа имеются соответственно 17, 37 и 5 номеров «люкс». Всего в гостиницах города 123 номера «люкс». Найдите число гостиниц каждого типа, если их общее число не превосходит 10.

762*. В три магазина привезли 1990 книг. В первые три дня первый магазин продал соответственно $\frac{1}{37}$, $\frac{1}{11}$ и $\frac{1}{2}$ части полученных им книг, второй магазин — $\frac{1}{57}$, $\frac{1}{9}$ и $\frac{1}{3}$, третий — $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{30}$ и $\frac{1}{10}$ полученных книг. Сколько книг получил каждый магазин?

17.2. 8–9

Способ, с помощью которого мы до сих пор решали уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах, не всегда удобен и возможен. Прежде всего у уравнения могут быть большие (по модулю) коэффициенты, и в этом случае перебор вариантов, даже в сочетании с использованием делимости и неравенств, может сильно осложниться. Главное же — при нахождении множества всех решений такого уравнения в целых числах, как правило, оказывается, что это множество бесконечно, а в подобных случаях перебор мало помогает.

Здесь мы познакомимся с более рациональным методом решения таких уравнений.

763. Найдите все решения уравнения

$$5x - 7y = 3$$

в целых числах x и y.

△ Выразим из уравнения то неизвестное, коэффициент при котором *меньше* по модулю — в данном случае x:

$$5x = 7y + 3, \quad x = \frac{7y+3}{5}.$$

В числителе полученной дроби $7y$ разобьем на два слагаемых, одно из которых при любом целом y делится на 5, а у другого коэффициент меньше 5: $7y = 5y + 2y$. Затем числитель дроби разделим почленно на знаменатель:

$$x = \frac{5y + (2y+3)}{5} = y + \frac{2y+3}{5}.$$

Дробь $\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу. Положим

$$\frac{2y+3}{5} = z,$$

где z — целое. Тогда

$$2y + 3 = 5z.$$

Получилось новое уравнение первой степени с двумя неизвестными, но с меньшими по модулю коэффициентами.

Из последнего уравнения выразим то неизвестное, коэффициент которого меньше по модулю, в данном случае y, и проделаем аналогичные преобразования:

$$2y = 5z - 3, \quad y = \frac{5z-3}{2} = \frac{6z - z - 3}{2} = 3z - \frac{z+3}{2}.$$

До каких пор продолжать такую процедуру? В общем случае — до тех пор, пока не получится уравнение, у которого коэффициент при одном из неизвестных равен 1 или −1. В данном случае она уже заканчивается. Дробь $\frac{z+3}{2}$ должна быть целым числом. Обозначим его через t:

$$\frac{z+3}{2} = t, \quad z + 3 = 2t, \quad z = 2t - 3,$$

где, напомним, t — целое.

Теперь выразим y и x через t:

$$y = 3z - \frac{z+3}{2} = 3(2t-3) - t = 5t - 9,$$

$$x = y + \frac{2y+3}{5} = y + z = (5t-9) + (2t-3) = 7t - 12.$$

Мы получили формулы

$$x = 7t - 12, \quad y = 5t - 9.$$

Здесь t — целое число. Но является ли t л ю б ы м целым числом? Для ответа на этот вопрос подставим выражения для x и y в левую часть исходного уравнения:

$$5x - 7y = 5(7t-12) - 7(5t-9) = 35t - 60 - 35t + 63 = 3.$$

Следовательно, эти формулы, где t — любое целое число, дают множество в с е х решений уравнения в целых числах.

Придавая t, например, значения 0, 1 и 2, получаем частные решения уравнения: $(-12; -9)$, $(-5; -4)$, $(2; 1)$.

Ответ: $x = 7t - 12$, $y = 5t - 9$, где t — любое целое число. ▲

764. Решите в целых числах x и y уравнения:
а) $11x + 7y = 1$; б) $11x - 60y = 7$; в) $81x + 25y = 1$.

765. Решите в целых числах x, y и z систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 2z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 7. \end{cases}$$

766. Докажите, что уравнение

$$21x - 35y = 59$$

не имеет решений в целых числах x и y.

△ В самом деле, при целых x и y левая часть уравнения делится на 7, а правая не делится. ▲

Вообще, для уравнения

$$az + by = c,$$

где a, b, c — данные целые числа, возможны только два случая: или оно не имеет решений в целых числах x и y (когда c не делится на наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$), или оно имеет бесконечное множество решений в целых числах. Можно доказать, что второе выполняется всегда, когда число c делится на наибольший общий делитель чисел $|a|$ и $|b|$; в частности, это справедливо, если числа $|a|$ и $|b|$ взаимно просты.

Нередко такие уравнения приходится решать в *натуральных числах*. Если в этом случае нет быстрого решения, подобного тем, которые мы применяли в п. 17.1, то уравнение сначала решают в целых числах, а затем из полученного множества решений выделяют все решения в натуральных числах.

767. Решите в натуральных числах x и y уравнение

$$65x - 43y = 2.$$

△ Вначале решим это уравнение в целых числах знакомым нам способом. Приведем без вывода соответствующие формулы (можете проверить их подстановкой в уравнение):

$$x = 4 - 43t, \quad y = 6 - 65t.$$

Теперь найдем все целые t, при которых x и y положительны. С этой целью решим в целых числах систему неравенств

$$\begin{cases} 4 - 43t > 0, \\ 6 - 65t > 0. \end{cases}$$

Получаем: $t < \frac{6}{65}$. Последнему неравенству удовлетворяют все целые неположительные t.

Ответ: $x = 4 - 43t$, $y = 6 - 65t$, где $t = 0, -1, -2, \dots$. ▲

768. Решите в натуральных числах уравнения:
а) $13x + 20y = 355$; б) $15x + 8y = 1998$; в) $27x - 65y = 34$.

769. Пол шириной 3 м нужно устлать досками шириной 11 и 13 см так, чтобы между ними не оставалось промежутков. Сколько нужно досок того и другого размера?

770. Сколько точек с целочисленными координатами, удовлетворяющими условию $x > 0$, $y > 0$, лежит на прямой:

а) $3x + 4y = 133$; б) $7x + 24y = 1408$?

771. Найдите все натуральные числа в пределах от 1 до 100000, которые делятся на 73, а при делении на 1000 дают в остатке 1.

772. Требуется проложить трассу газопровода на участке длиной 450 м. В распоряжении строителей имеются трубы длиной 9 и 13 м. Сколько труб той и другой длины нужно взять для прокладки трассы, чтобы число сварных швов было минимальным? Трубы резать не следует.

773*. Найдите наименьшую тройку последовательных натуральных чисел, из которых меньшее делится на 4, среднее — на 9, большее — на 25.

774. Сколько решений в натуральных числах x, y, z имеет уравнение

$$x + y + z = 100,$$

если

$$25 \leqslant x \leqslant 40, \quad 30 \leqslant y \leqslant 40, \quad 30 \leqslant z \leqslant 40?$$

775. Докажите, что для любого натурального n существует уравнение вида $ax + by = c$, где a, b и c — натуральные числа, которое имеет ровно n решений в натуральных числах x и y.

776*. Докажите, что уравнение

$$ax + by = ab,$$

где a и b — данные натуральные взаимно простые числа, не имеет решений в натуральных числах x и y.

777*. Решите в натуральных числах x и y уравнение

$$ax + by = ab + a + b,$$

где a и b — данные натуральные взаимно простые числа.

778*. Найдите наименьшее натуральное число, которое можно ровно двумя способами представить в виде $3x + 4y$, где x и y — натуральные числа.

△ Положим

$$3x + 4y = n,$$

где n — натуральное. Решим это уравнение сначала в целых числах:

$$3x = n - 4y, \quad x = \frac{n-4y}{3} = -y + \frac{n-y}{3};$$

$$\frac{n-y}{3} = t \in Z; \quad n - y = 3t, \quad y = n - 3t; \quad x = -(n-3t) + t = 4t - n.$$

Затем найдем все t, при которых x и y положительны:

$$\begin{cases} 4t - n > 0, \\ n - 3t > 0. \end{cases}$$

Отсюда $\frac{n}{4} < t < \frac{n}{3}$.

Теперь учтем, что, во-первых, t должно быть целым, и, во-вторых, интервал $\left(\frac{n}{4}, \frac{n}{3}\right)$ должен содержать ровно две целочисленные точки.

Давайте подумаем: какой может быть длина этого интервала?

Если она больше 3, то, очевидно, интервал содержит не менее трех целочисленных точек. Если длина интервала не превосходит 3, но больше 2, то интервал содержит две или три такие точки (примерами могут служить интервалы (2, 4; 4, 9) и (2, 9; 5, 3)). Если длина интервала не превосходит 2, но больше 1, то он содержит две или одну целочисленную точку (примеры — интервалы (4, 7; 6,1) и (4, 1; 5, 9)). Если же длина не превосходит 1, то интервал содержит одну или даже не содержит ни одной целочисленной точки.

Следовательно, длина интересующего нас интервала должна быть заключена в пределах от 1 до 3, включая 3, но исключая 1.

Длина интервала $\left(\frac{n}{4}, \frac{n}{3}\right)$ равна $\frac{n}{3} - \frac{n}{4} = \frac{n}{12}$. Тогда

$$1 < \frac{n}{12} \leqslant 3, \quad 12 < n \leqslant 36.$$

Теперь выполним перебор значений n, начиная с $n = 13$.

Если $n = 13$, то неравенство $\frac{n}{4} < t < \frac{n}{3}$ принимает вид:

$$\frac{13}{4} < t < \frac{13}{3}, \quad 3\frac{1}{4} < t < 4\frac{1}{3}.$$

Но этот интервал содержит только одно целое число.

Если $n = 14$, то

$$\frac{14}{4} < t < \frac{14}{3}, \quad 3\frac{1}{2} < t < 4\frac{2}{3}.$$

И этот случай нужно отбросить.

Такая же картина получается и при $n = 15, 16, 17, 18$ (проверьте!).

И лишь при $n = 19$ она меняется:

$$\frac{19}{4} < t < \frac{19}{3}, \quad 4\frac{3}{4} < t < 6\frac{1}{3},$$

а этот интервал содержит две целочисленные точки — 5 и 6.

Ответ: 19. ▲

779*. Найдите все натуральные числа, которые можно ровно тремя способами представить в виде $2x + 3y$.

§ 18. Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах 8–11

Литература: [17], [21], [51], [73[в]], [80].

Общий вид уравнения второй степени с двумя неизвестными —

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

где a, b, c, d, e, f — данные числа, причем среди коэффициентов a, b и c по меньшей мере один отличен от нуля.

Пусть все эти шесть коэффициентов — числа целые. Будем заниматься решением таких уравнений в целых числах x и y.

Уравнения второй степени с двумя целочисленными неизвестными уже встречались в книге [18] (задачи 193–196 и 207–209 из § 7).

Нужно сказать, что уравнения второй степени с двумя неизвестными удается решить в целых числах средствами школьной математики далеко не всегда.

18.1. 8–9

Сначала рассмотрим уравнения, ***не содержащие членов с квадратами неизвестных.*** Следовательно, такое уравнение содержит единственный член второй степени — с произведением неизвестных xy.

780°. Докажите, что произведение двух целых чисел x и y равно их сумме только в двух случаях: $x = y = 0$ и $x = y = 2$.

Это наиболее известная из задач подобного рода.

△ Нужно решить уравнение

$$xy = x + y$$

в целых числах x и y.

Рассмотрим два способа решения задачи.

1) Выразим из уравнения y через x:

$$xy - y = x, \quad y(x-1) = x, \quad y = \frac{x}{x-1}.$$

(Проверьте, что при делении на $x-1$ уравнение решений не теряет.)

У последней дроби выделим целую часть:

$$y=\frac{x}{x-1}=\frac{(x-1)+1}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

Отсюда $x-1=1$ или $x-1=-1$.

Если $x-1=1$, то

$$x=2, \quad y=1+\frac{1}{1}=2.$$

Если $x-1=-1$, то

$$x=0, \quad y=1-\frac{1}{1}=0.$$

2) Представим исходное уравнение в следующем виде:

$$xy-x-y=0, \quad x(y-1)-y=0.$$

Нельзя ли левую часть последнего уравнения разложить на множители так, чтобы можно было разность $y-1$ вынести за скобки? Для этого не хватает еще одного слагаемого, а именно 1. Прибавим по 1 к обеим частям уравнения:

$$x(y-1)-y+1=1, \quad (y-1)(x-1)=1.$$

Когда произведение двух целых чисел равно 1? Только в двух случаях: когда они равны 1 и -1. Получаем две системы линейных уравнений, которые нетрудно решить:

$$\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1. \end{cases}$$

Из первой системы $x=y=2$, из второй — $x=y=0$. ▲

В дальнейшем при решении таких уравнений будем в зависимости от уравнения применять или первый, или второй способ, чаще первый. Впрочем, они близки друг другу: так, в задаче 780 можно из равенства

$$(x-1)(y-1)=1$$

выразить сначала $y-1$, потом y; получается равенство

$$y=1+\frac{1}{x-1},$$

с которым мы уже встречались при первом способе решения. Из последнего равенства обратно легко вывести предыдущее.

781. Решите в целых числах x и y уравнения:

а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$; б) $xy=-x-y$; в) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$; г) $x-y=\frac{x}{y}$.

782. Найдите правильную несократимую дробь, большую $\frac{1}{3}$, если при увеличении ее числителя на некоторое натуральное число и умножении знаменателя на то же число значение дроби не изменится. Укажите все такие дроби.

783. Решите в целых числах уравнения:

а) $xy - 3x + 2y = 13$; б) $xy = 5x + 4y + 3$; в) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}$.

784. Длины сторон прямоугольника выражаются целыми числами, а периметр численно равен площади. Найдите все такие прямоугольники.

785. Решите в целых числах уравнение

$$3xy + y = 7x + 3.$$

△ Выразим из уравнения y через x:

$$y = \frac{7x + 3}{3x + 1}.$$

Для того чтобы выделить целую часть полученной дроби, умножим это равенство на 3:

$$3y = \frac{21x + 9}{3x + 1} = \frac{(21x + 7) + 2}{3x + 1} = 7 + \frac{2}{3x + 1}.$$

Отсюда $3x + 1$ может принимать только значения -2, -1, 1 и 2. Переберем все четыре случая.

Ответ: $(0; 3)$, $(-1; 2)$. ▲

786. Решите в целых числах уравнения:
а) $x + y = 2xy$; б) $x + 2y = 3xy + 1$.

787. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{1997}.$$

788. На базе имеются несколько грузовых автомобилей одинаковой грузоподъемности, выражающейся целым числом тонн. Для перевозки груза каждый автомобиль сделал одно и то же число рейсов, а затем 7 машин сделали еще по 12 рейсов каждая. Если бы каждая машина сделала на 6 рейсов больше, то для перевозки в два раза меньшего груза потребовалось бы на 7 машин меньше. Сколько автомобилей было на базе?

789. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

где p — данное простое число.

790. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существуют такие различные натуральные числа x и y, что

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}.$$

791*. Докажите, что уравнение

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n},$$

где n — натуральное, имеет единственное решение в натуральных числах x и y тогда и только тогда, когда число n — простое.

792. Постройте пример уравнения вида:

$$axy + bx + cy + d = 0,$$

где a, b, c, d — данные целые числа, $a \neq 0$, которое:

а) не имеет решений в целых числах;

б) имеет бесконечное множество решений в целых числах.

18.2. 8–9

Перейдем к уравнениям второй степени с двумя неизвестными, которые *содержат член с квадратом только одного из неизвестных.* Такие уравнения в большинстве случаев решаются в целых числах тем же методом, что и в п. 18.1.

793. Решите в целых числах уравнение

$$2x^2 - 2xy + 9x + y = 2.$$

△ Выразим из уравнения то неизвестное, которое входит в него только в первой степени — в данном случае y:

$$2x^2 + 9x - 2 = 2xy - y, \quad y=\frac{2x^2+9x-2}{2x-1}.$$

У последней дроби выделим целую часть — или с помощью правила деления многочлена на многочлен «углом», или с помощью разбиения числителя дроби на слагаемые, которые все за исключением свободного члена делились бы на $2x - 1$. Получаем:

$$y = x + 5 + \frac{3}{2x-1}.$$

Следовательно, разность $2x - 1$ может принимать только значения -3, -1, 1 и 3. Осталось перебрать эти четыре случая.

Ответ: (1; 9), (2; 8), (0; 2), (−1; 3). ▲

794. Решите в целых числах уравнения:

а) $x^2 - xy + x - 2y + 3 = 0$; б) $x + y^2 = xy$; в) $y^2 + 2xy = 2x + 2$;

г) $x^2 - 2xy + 4x + 3y - 2 = 0$.

795. Имеет ли уравнение

$$x^2 + 2xy = 2002$$

решение в целых числах?

△ Представим уравнение в следующем виде:

$$(x + y)^2 - y^2 = 2002.$$

Тогда числа $x + y$ и y имеют одинаковую четность. Но разность квадратов двух целых чисел одинаковой четности делится на 4, а 2002 — не делится.

Ответ: не имеет. ▲

796. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:
а) $x^2 + 3y = 23$; б) $x^2 - 8x + 12y = 51$; в) $y^2 + 4y - 11 = 12x$;
г) $3x^2 + 1 = 5y$; д) $y^2 + 9 = 7x$.

797. В шахматном турнире в один круг участвовали два ученика 9 класса и несколько учащихся 10 класса. Два девятиклассника набрали вместе 8 очков, а все десятиклассники набрали по одинаковому числу очков. Сколько десятиклассников участвовали в турнире? Приведите все ответы.

798. Приведите пример уравнения вида:

$$ax^2 + bxy + cx + dy + e = 0,$$

где a, b, c, d, e — данные целые числа, $a \neq 0$, которое имеет бесконечное множество решений в целых числах x и y.

18.3. 9–11

Перейдем к уравнениям, *которые содержат члены с квадратами обоих неизвестных*. Здесь гораздо больше разнообразия в способах решения; во всяком случае, универсального метода, пригодного во всех таких случаях, при школьных средствах решения нет.

799. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 - y^2 = 1997.$$

△ Запишем уравнение в виде:

$$(x + y)(x - y) = 1997.$$

Число 1997 — простое, поэтому возможны только четыре случая:

1) $\begin{cases} x + y = 1997, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 1997; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x + y = -1997, \\ x - y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -1997. \end{cases}$

Осталось решить каждую из этих систем уравнений.

Ответ: (999; 998), (999; −998), (−999; −998), (−999; 998). ▲

800. Решите в целых числах уравнения:
а) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 11$; б) $3x^2 + 4xy - 7y^2 = 13$; в) $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

801. Решите в целых числах уравнения:
а) $5x^2 + 4xy + y^2 = 121$; б) $x^2 - 6xy + 13y^2 = 100$.

802. Найдите натуральное число, которое становится точным квадратом, если к нему прибавить любое из чисел 145 и 98. Укажите все такие числа.

803. Докажите, что уравнения:

а) $x^2 - y^2 = 4k + 2$ ($k \in N$); б) $x^2 + y^2 = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$)

не имеют решений в целых числах x и y.

804. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 - xy + y^2 = x + y.$$

△ Способы, которые мы применяли при решении задач 799–802, здесь не достигают цели. Попробуем собрать все члены уравнения в левую часть и расположить их по степени x:

$$x^2 - (y + 1)x + (y^2 - y) = 0.$$

Будем последнее уравнение рассматривать как квадратное относительно x. Его дискриминант D зависит от y. Он должен быть квадратом некоторого целого числа t:

$$D = (y + 1)^2 - 4(y^2 - y) = t^2, \quad y^2 + 2y + 1 - 4y^2 + 4y = t^2,$$

$$-3y^2 + 6y + 1 = t^2.$$

Мы получили новое уравнение второй степени с двумя целочисленными неизвестными y и t. Оно проще исходного.

Соберем все члены уравнения в одну часть и преобразуем новое уравнение:

$$3y^2 - 6y - 1 + t^2 = 0, \quad 3(y^2 - 2y) - 1 + t^2 = 0,$$

$$3((y^2 - 2y + 1) - 1) -1 + t^2 = 0, \quad 3(y - 1)^2 - 3 - 1 + t^2 = 0, \quad 3(y - 1)^2 + t^2 = 4.$$

Из последнего уравнения следует, что $t^2 \leqslant 4$, т. е. $|t| \leqslant 2$. Переберем немногие возможные здесь значения t.

1) Если $t^2 = 0$, то $3(y - 1)^2 = 4$, а это невозможно при целом y.

2) Если $t^2 = 1$, то

$$3(y - 1)^2 = 3, \quad (y - 1)^2 = 1, \quad y - 1 = \pm 1, \quad y_1 = 2, \quad y_2 = 0.$$

Возьмем значение $y = 2$ и подставим его в квадратное уравнение:

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Тогда $x = 1$ или $x = 2$. Получаем решения: (1; 2) и (2; 2).

Аналогичным путем находим решения и при $y = 0$:

$$x^2 - x = 0,$$

откуда $x = 0$ или $x = 1$. Получились решения: (0; 0) и (1; 0).

3) Пусть $t^2 = 4$. Тогда

$$3(y - 1)^2 = 0, \quad y = 1.$$

Теперь вычислим x:

$$x^2 - 2x = 0,$$

откуда $x = 0$ или $x = 2$. Мы нашли еще два решения: (0; 1) и (2; 1).

Ответ: (1; 2), (2; 2), (0; 0), (1; 0), (0; 1), (2; 1). ▲

805. Решите в целых числах уравнения:

а) $y^2 = x^2 - x + 1$; б) $3(x^2 + xy + y^2) = x + 8y$; в) $x^2 + y^2 - 2xy + x = 2$.

806. Докажите, что уравнение

$$3x^2 = 16y^2 + 8y + 5$$

не имеет решений в целых числах.

△ Дополним сумму $16y^2 + 8y$ в правой части уравнения до квадрата суммы:

$$3x^2 = (16y^2 + 8y + 1) + 4, \quad 3x^2 = (4y + 1)^2 + 4.$$

Отсюда видно, что сумма $4y + 1$ не делится на 3. Тогда $(4y + 1)^2$ при делении на 3 дает в остатке 1 (см. утверждение задачи 163 из § 6):

$$(4y + 1)^2 = 3k + 1,$$

где k — целое неотрицательное число. Получаем:

$$3x^2 = 3k + 1 + 4, \quad 3x^2 = 3k + 5.$$

Но последнее равенство невозможно ни при каких целых x и k, так как его левая часть делится на 3, а правая не делится. ▲

807. Докажите, что уравнения

а) $x^2 - 1 = 2(4y^2 - 1)$; б) $y^2 = 3x^2 + 8$; в) $6x^2 + 3x + 1 = 2y^2$;

г) $2x^2 - 5y^2 = 7$; д) $2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y - 10 = 0$; е) $5y^2 = x^2 + 7x + 9$

не имеют решений в целых числах.

808. Решите в целых числах уравнение

$$(x + y)^2 = x - y.$$

△ Вряд ли целесообразно раскрывать скобки в выражении $(x + y)^2$, напротив, этим выражением следует воспользоваться.

Положим $x + y = t$, где t — некоторое целое число. Тогда $x - y = t^2$.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = t, \\ x - y = t^2. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения, выразим x и y через t:

$$x = \frac{t(1 + t)}{2}, \quad y = \frac{t(1 - t)}{2}.$$

Может ли здесь t принимать л ю б ы е целые значения? Прежде всего полученные дроби равны целым числам, поскольку их числители четны. Кроме того, если подставить эти значения x и y в исходные уравнения, то получим тождество. Следовательно, они задают множество всех решений уравнения. Так как здесь t — любое целое число, то уравнение имеет бесконечное множество решений в целых числах.

Ответ: $\left(\frac{t(1 + t)}{2}; \frac{t(1 - t)}{2}\right)$, $t \in Z$. ▲

809. Решите в целых числах уравнения:

а) $(x - y)^2 + 2(x + y) = 0$; б) $x^2 + 4xy + 4y^2 = x - 2y$.

810. Докажите, что уравнение

$$x^2 - y^2 = a^5$$

при любом целом a имеет решение в целых числах x и y.

△ Для того чтобы это равенство выполнялось, д о с т а т о ч н о, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} x + y = a^4, \\ x - y = a. \end{cases}$$

Это значит, что если x и y удовлетворяют записанной здесь системе уравнений, то они удовлетворяют и исходному уравнению (но, разумеется, не обратно). Решим систему:

$$x = \frac{a(a^3 + 1)}{2}, \quad y = \frac{a(a^3 - 1)}{2}.$$

Полученное решение уравнения, конечно, не охватывает множества всех его решений. ▲

811. Докажите, что уравнение

$$x^2 - y^2 = a^n$$

при любом целом a и любом натуральном $n > 2$ имеет решение в целых числах x и y.

§ 19*. Разные уравнения с несколькими неизвестными в целых числах 9–11

Литература: [6], [48[в]], [51], [69[в]], [70[в]], [72], [73[в]].

812. Решите в целых числах x, y и z уравнение

$$5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30.$$

△ Преобразуем уравнение, дополняя разность $y^2 - 2yz$ до квадрата разности:

$$5x^2 + (y^2 - 2yz + z^2) + 2z^2 = 30, \quad 5x^2 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30.$$

Отсюда видно, что неизвестные могут принимать только значения, небольшие по модулю. Выясним ограничения для x:

$$5x^2 \leqslant 30, \quad x^2 \leqslant 6, \quad |x| \leqslant 2, \quad -2 \leqslant x \leqslant 2.$$

Возьмем пока неотрицательные значения x. Тогда $0 \leqslant x \leqslant 2$. Рассмотрим три случая.

1) Пусть $x = 0$. Уравнение принимает вид:

$$(y - z)^2 + 2z^2 = 30.$$

Найдем ограничения для z:

$$2z^2 \leqslant 30, \quad z^2 \leqslant 15, \quad |z| \leqslant 3.$$

Если $z^2 = 0, 1, 4, 9$, то из последнего уравнения соответственно

$$(y - z)^2 = 30, 28, 22, 18.$$

Ни в одном из этих четырех случаев решений в целых числах нет.

2) Пусть $x = 1$. Получаем:

$$5 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30, \quad (y - z)^2 + 2z^2 = 25.$$

Аналогичным способом устанавливаем, что подходит только $z = 0$, $y = \pm 5$.

3) Пусть $x = 2$. Тогда

$$20 + (y - z)^2 + 2z^2 = 30, \quad (y - z)^2 + 2z^2 = 10.$$

Точно так же выясняем, что последнее уравнение не имеет решений в целых числах.

При записи ответа учтем, что x может быть и отрицательным. При $x = -1$ получаем те же значения y и z, что и при $x = 1$.

Ответ: (1; 5; 0), (1; –5; 0), (–1; 5; 0), (–1; –5; 0). ▲

813. Решите в целых числах x и y уравнение

$$x^3 + y^3 + 3xy = 10.$$

814. Имеет ли уравнение

$$x^3 + y^3 = 9z + 5$$

решения в целых числах x, y и z?

$\triangle$ Куб целого числа при делении на 9 может давать в остатке только 0, 1 или 8 (с этим мы уже встречались при решении некоторых задач из § 8). Следовательно, сумма двух точных кубов при делении на 9 не может давать остаток 5. Другими словами, данное равенство не выполняется ни при каких целых значениях x, y и z.

Ответ: не имеет. $\blacktriangle$

815. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:
а) $x^3 + y^3 = 9z - 3$; б) $x^3 + 11y^3 = 5$; в) $x^3 + y^3 + z^3 = 9t - 4$.

816. Решите в целых числах x, y, z и t систему уравнений

$$\begin{cases} xy + zt = 1, \\ xz + yt = 1, \\ xt + yz = 1. \end{cases}$$

$\triangle$ Вычтем, например, из первого уравнения системы второе:

$$x(y - z) + t(z - y) = 0, \quad (y - z)(x - t) = 0.$$

Тогда $y - z = 0$ или $x - t = 0$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $y - z = 0$, т. е. $y = z$.

Система уравнений принимает такой вид:

$$\begin{cases} xz + zt = 1, \\ xz + zt = 1, \\ xt + z^2 = 1. \end{cases}$$

Здесь первое и второе уравнения совпадают.

Представим первое уравнение в следующей форме:

$$z(x + t) = 1.$$

Отсюда или $z = 1, x + t = 1$, или $z = -1, x + t = -1$.

Если $z = 1$, $x + t = 1$, т. е. $x = 1 - t$, то третье уравнение последней системы принимает вид:

$$(1 - t)t + 1 = 1, \quad (1 - t)t = 0.$$

Тогда $t = 1$ или $t = 0$. Получаем два решения системы: (0; 1; 1; 1) и (1; 1; 1; 0).

Если $z = -1$, $x + t = -1$, т. е. $x = -1 - t$, то

$$(-1 - t)t + 1 = 1, \quad -(1 + t)t = 0.$$

Отсюда $t = -1$ или $t = 0$. Мы нашли еще два решения: (0; –1; –1; –1) и (–1; –1; –1; 0).

2) Пусть $x - t = 0$, т. е. $x = t$.

Первоначальная система уравнений принимает такой вид:

$$\begin{cases} ty + zt = 1, \\ tz + yt = 1, \\ t^2 + yz = 1. \end{cases}$$

Эту систему можно решать таким же способом, но проще поступить иначе. Она отличается от системы, полученной в первом случае, тем, что t заменяется на z, z — на t, а x — на y (это особенно хорошо видно при сравнении последних уравнений обеих систем). С учетом указанных замен можно с помощью уже найденных четырех решений первоначальной системы получить еще четыре:

$$(1;\ 0;\ 1;\ 1),\ (1;\ 1;\ 0;\ 1),\ (-1;\ 0;\ -1;\ -1),\ (-1;\ -1;\ 0;\ -1).$$

Ответ: $(0; 1; 1; 1)$, $(1; 0; 1; 1)$, $(1; 1; 0; 1)$, $(1; 1; 1; 0)$, $(0; -1; -1; -1)$, $(-1; 0; -1; -1)$, $(-1; -1; 0; -1)$, $(-1; -1; -1; 0)$. ▲

817. Решите в целых числах x, y и z систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + yz = 7. \end{cases}$$

818. Решите в целых числах x, y, z и t уравнение

$$x^2z^2 + 6y^2t^2 = 2y^2z^2 + 3x^2t^2.$$

819. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ z^2 - 2y^2 - 1. \end{cases}$$

820. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} xyzt - x = 2000, \\ xyzt - y = 200, \\ xyzt - z = 20, \\ xyzt - t = 2 \end{cases}$$

не имеет решений в целых числах x, y, z и t.

821. Найдите все такие натуральные числа p и q, при которых квадратное уравнение

$$x^2 - pqx + p + q = 0$$

имеет только целые корни.

△ Обозначим целые корни этого уравнения через x_1 и x_2. Тогда по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = pq, \\ x_1x_2 = p + q. \end{cases}$$

Получилась своеобразная система уравнений: сумма двух неизвестных из четырех равна произведению двух других, а произведение этих двух первых неизвестных равно сумме двух последних.

Так как числа p и q — натуральные, то из системы получаем, что целые числа x_1 и x_2 положительны, а значит, тоже натуральные.

Для решения этой системы вычтем ее уравнения и преобразуем получающееся уравнение следующим образом:

$$x_1 + x_2 - x_1x_2 = pq - p - q, \quad (x_1 + x_2 - x_1x_2 - 1) + 2 = pq - p - q + 1,$$

$$(x_1 - 1)(1 - x_2) + 2 = (p - 1)(q - 1), \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) + (p - 1)(q - 1) = 2.$$

Вот теперь давайте подумаем над последним уравнением: когда сумма двух целых неотрицательных чисел равна 2? В трех случаях:

$$1)\begin{cases}(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 2,\\ (p - 1)(q - 1) = 0,\end{cases} \quad 2)\begin{cases}(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1,\\ (p - 1)(q - 1) = 1,\end{cases} \quad 3)\begin{cases}(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 0,\\ (p - 1)(q - 1) = 2.\end{cases}$$

Решаем каждую из полученных систем уравнений, обращаясь в случае необходимости к первоначальной системе. Проделаем это, например, для первой системы.

Из первого уравнения первой системы $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ или $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; из второго уравнения $p = 1$ или $q = 1$.

Если $p = 1$, то из первого уравнения первоначальной системы найдем q: $q = 5$.

Если $q = 1$, то тем же путем вычислим p: $p = 5$.

Ответ: $p = 1, q = 5$; $p = 5, q = 1$; $p = q = 2$; $p = 2, q = 3$; $p = 3, q = 2$. ▲

822. Найдите все a, при которых уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни.

823. Докажите, что уравнение

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_{10}^3 = 600$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$.

△ Попробуем часть неизвестных пока подбирать. Положим

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 4.$$

Получаем:

$$64 + 64 + \ldots + 64 + x_7^3 + x_8^3 + x_9^3 + x_{10}^3 = 600,$$

$$64 \cdot 6 + x_7^3 + x_8^3 + x_9^3 + x_{10}^3 = 600, \quad x_7^3 + x_8^3 + x_9^3 + x_{10}^3 = 600 - 384 = 216.$$

Теперь положим $x_7 = 0$, $x_8 = 6$.

$$216 + x_9^3 + x_{10}^3 = 216, \quad x_9^3 + x_{10}^3 = 0.$$

Вот теперь пришла пора позаботиться о том, чтобы исходное уравнение имело бесконечное множество решений. Положим в последнем уравнении $x_9 = n$, $x_{10} = -n$, где n — любое целое число.

Получилось, что данное уравнение имеет бесконечное множество решений в целых числах:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_6 = 4, \quad x_7 = 0, \quad x_8 = 6, \quad x_9 = n, \quad x_{10} = -n,$$

где $n \in Z$. ▲

По-видимому, можно составить и другие бесконечные множества решений данного уравнения в целых числах. Попробуйте!

824. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах x, y и z.

825. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 = 2^n$$

при любом данном натуральном n имеет решение в целых числах x и y.

826. Решите в целых числах систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 2. \end{cases}$$

△ Приведем систему к виду:

$$\begin{cases} x + y = 2 - z, \\ x^3 + y^3 = 2 - z^3. \end{cases}$$

Первое из уравнений полученной системы возведем в куб:

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 8 - 12z + 6z^2 - z^3.$$

Вычтем из этого уравнения второе уравнение последней системы и новое уравнение преобразуем:

$$3x^2y + 3xy^2 = 6 - 12z + 6z^2, \quad xy(x + y) = 2(z - 1)^2, \quad xy(x + y) = 2(1 - x - y)^2,$$

$$xy(x + y) = 2(1 - 2(x + y) + (x + y)^2), \quad xy(x + y) = 2 - 4(x + y) + 2(x + y)^2.$$

Из последнего уравнения видно, что 2 делится на $x + y$. Следовательно, сумма $x + y$ может принимать только значения 1, 2, –1 и –2.

Переберите самостоятельно все четыре возникающих здесь случая.

Ответ: (0; 1; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 0). ▲

827. Решите в целых числах x, y, z и t систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \\ x^6 + y^6 + z^6 + t^6 = 1. \end{cases}$$

828. Решите в целых числах уравнение

$$3^x - 5 = 4y.$$

△ Прежде всего x должен быть неотрицательным, иначе степень 3^x превратится в дробь. Тогда вопрос задачи сводится к следующему: при каких целых неотрицательных x разность $3^x - 5$ делится на 4?

С помощью перебора устанавливаем, что $3^x - 5$ делится на 4 при $x = 0, 2, 4$ и не делится при $x = 1, 3, 5$. Это наводит на мысль, что следует рассмотреть два случая — когда x четно и когда нечетно.

1) Пусть x четно: $x = 2n$, где n — целое неотрицательное число.

Получаем:

$$3^x - 5 = 3^{2n} - 5 = (3^{2n} - 1) - 4.$$

Но разность $3^{2n} - 1$ делится на 4 (см. § 7, третья делимость), поэтому правая часть последнего равенства делится на 4. Найдем еще y:

$$y = \frac{1}{4}(3^x - 5) = \frac{1}{4}(3^{2n} - 5).$$

2) Пусть x нечетно: $x = 2n + 1$, где n — целое неотрицательное.

Будем иметь:

$$3^x - 5 = 3^{2n+1} - 5 = 3 \cdot 3^{2n} - 5 = 3((3^{2n} - 1) + 1) - 5 = 3(3^{2n} - 1) - 2.$$

Последняя разность ни при каком целом неотрицательном n не делится на 4, следовательно, уравнение в этом случае не имеет решений в целых числах.

Ответ: $(2n; \frac{1}{4}(3^{2n} - 5))$, где n — любое целое неотрицательное число. ▲

829. Решите в целых числах уравнение

$$x^2 + 1 = 2^y.$$

830. Решите в целых числах x и y уравнение

$$arctg\frac{1}{x} + arctg\frac{1}{y} = arctg\frac{1}{2}.$$

△ Возьмем от обеих частей этого равенства тангенсы, применяя в левой части формулу тангенса суммы двух аргументов.

$$tg\left(arctg\frac{1}{x} + arctg\frac{1}{y}\right) = tg\left(arctg\frac{1}{2}\right),$$

$$\frac{tg\left(arctg\frac{1}{x}\right) + tg\left(arctg\frac{1}{y}\right)}{1 - tg\left(arctg\frac{1}{x}\right) \cdot tg\left(arctg\frac{1}{y}\right)} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{1 - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{x + y}{xy - 1} = \frac{1}{2}, \quad 2x + 2y = xy - 1, \quad 2x + 1 = xy - 2y,$$

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{(2x - 4) + 5}{x - 2} = 2 + \frac{5}{x - 2}.$$

Следовательно, разность $x - 2$ может быть равна только 1, 5, −1 и −5.

Перебираем все четыре случая. В итоге получаем пары чисел: (3; 7), (7; 3), (1; −3), (−3; 1).

Нужна еще проверка. Дело в том, что если тангенсы двух аргументов равны, то сами аргументы могут быть и не равны. Но в данном случае такой неприятности не происходит. Например, если $x = 3$, $y = 7$, то углы $arctg\frac{1}{3}$ и $arctg\frac{1}{7}$ принадлежат первой четверти, а сумма двух таких углов не может принадлежать второй четверти (так как тангенс этой суммы положителен), а также третьей четверти; следовательно, она является углом первой четверти и равна $arctg\frac{1}{2}$.

Ответ: (3; 7), (7; 3), (1; −3), (−3; 1). ▲

831. Решите в целых числах уравнения:

а) $arctg\, x - arctg\, \frac{1}{y} = arctg\, 4$; б) $arcsin\, x + arcsin\, y = \frac{\pi}{2}$;
в) $arcsin\, x + arccos\, y = \pi$.

832. Найдите какие-либо целые числа x, y и z, удовлетворяющие уравнению

$$(x + y \sin z°)^2 = 9 - 8 \sin 50°.$$

§ 20. Уравнения с несколькими неизвестными в натуральных числах **9–11**

Литература: [63], [69[в]], [70[в]], [72[в]], [73], [83].

Как решить уравнение с несколькими неизвестными в натуральных числах? Казалось бы, нужно решить его в целых числах и потом из найденных решений выделить решения в натуральных числах. Так мы и поступали при решении уравнений первой степени с двумя неизвестными в § 17 (впрочем, только в п. 17.2, но не в п. 17.1). К сожалению, это далеко не всегда осуществимо. Возникающее здесь положение напоминает ситуацию из анекдота: как поймать льва в Африке? Оказывается нужно поймать двух львов и одного выпустить... Дело в том, что задача решения уравнения в целых числах, вообще говоря, гораздо более трудная, чем задача решения того же уравнения в натуральных числах. Поэтому при решении уравнений в натуральных числах будем применять обычные средства: свойства делимости, свойства неравенств, перебор и др.

20.1. **8–9**

Сначала займемся такими уравнениями *в цифрах*, у которых неизвестными являются цифры натуральных чисел. То обстоятельство, что неизвестные — это цифры, облегчает дело; например, в затруднительных случаях возможен перебор по одной из цифр.

Задачи подобного рода уже встречались в книге [18] (§ 7, задачи 204–206 и 210–212). Встречались они и в этой книге (§ 17, задачи 757 и 758).

833. Найдите все двузначные числа, равные утроенному произведению своих цифр.

△ Обозначим искомое число через $\overline{ab}$. Тогда

$$\overline{ab} = 3ab, \quad 10a + b = 3ab.$$

Получилось уравнение второй степени с двумя неизвестными того типа, который был рассмотрен в § 18, п. 18.1, с той разницей, что это уравнение нужно решить в целых числах от 0 до 9.

Выразим из уравнения b через a:

$$10a = 3ab - b, \quad 10a = b(3a - 1), \quad b = \frac{10a}{3a - 1}.$$

Умножим последнее уравнение на 3 и выделим у дроби, образующейся в правой его части, целую часть:

$$3b = \frac{30a}{3a - 1} = \frac{(30a - 10) + 10}{3a - 1} = 10 + \frac{10a}{3a - 1}.$$

Отсюда $3a - 1$ может принимать только значения 1, 2, 5 и 10. Переберите все эти четыре случая самостоятельно.

Ответ: 15, 24. ▲

834. Найдите все двузначные числа $\overline{xy}$, которые удовлетворяют равенствам:
а) $\overline{xy} = x + y^2$; б) $\overline{xy} = (x + y)^2$; в) $\overline{xy} = x^2 + y^2$; г) $\overline{xy} = (x + y)^2 + x + y$;
д) $\overline{xy} = x^2 + y^3$.

835. Трехзначное число равно кубу цифры его единиц. Найдите все такие числа.

△ Обозначим трехзначное число через $\overline{xyz}$. Тогда

$$\overline{xyz} = z^3, \quad 10 \cdot \overline{xy} + z = z^3.$$

В каких случаях куб цифры z оканчивается на z? Это возможно при $z = 0, 1, 4, 5, 6$ и 9. Но значения $z = 0$, $z = 1$ и $z = 4$, очевидно, отпадают.

Если $z = 5$, то

$$10 \cdot \overline{xy} + 5 = 125, \quad \overline{xy} = 12.$$

Мы нашли число 125.

Если $z = 6$, то

$$10 \cdot \overline{xy} + 6 = 216, \quad \overline{xy} = 21.$$

Получилось число 216.

Если $z = 9$, то

$$10 \cdot \overline{xy} + 9 = 729, \quad \overline{xy} = 72.$$

Мы нашли еще одно число: 729.

Ответ: 125, 216, 729. ▲

836. Трехзначное число $\overline{xyz}$ удовлетворяет условию:

$$\overline{xyz} = x + y^2 + z^3.$$

Найдите все такие числа.

837. Четырехзначное число равно четвертой степени суммы его цифр. Найдите все такие числа.

838. Четырехзначное число $\overline{xxyy}$ удовлетворяет условию:

$$\overline{xxyy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2.$$

Найдите все значения цифр x и y.

12 Зак. 579

839. Найдите все пятизначные числа, равные кубу числа, образованного двумя их последними цифрами.

840*. Сумма цифр двух двузначных чисел равна первому из них, а сумма этих двузначных чисел равна квадрату суммы цифр первого числа. Найдите все такие пары двузначных чисел.

841*. Натуральное число равно кубу количества его тысяч. Найдите все такие числа.

△ Обозначим искомое число через $1000x + y$, где x — количество его тысяч, а $y < 1000$. Получаем:

$$1000x + y = x^3.$$

Отсюда следует, что y делится на x: $y = kx$, где k — натуральное число. Тогда

$$1000x + kx = x^3, \quad 1000 + k = x^2.$$

Из последнего равенства вытекает, что $x > 31$, так как $31^2 < 1000$. Оценим число k сверху:

$$k = \frac{y}{x} < \frac{1000}{31} < 33.$$

Но ведь сумма $1000 + k$ должна быть квадратом натурального числа. Подходит только $k = 24$:

$$1000 + k = 1024 = 32^2.$$

Поэтому $x = 32$. Найдем еще y: $y = kx = 24 \cdot 32 = 768$.

Ответ: 32768. ▲

842. Какими должны быть цифры x и y для того, чтобы выполнялось равенство

$$\overline{xx}^y = \overline{xyyx}?$$

Найдите все решения.

843*. Найдите все цифры x, y, z и t, для которых выполняется равенство

$$\overline{xyz} + \overline{tyx} = \overline{xx}^2.$$

20.2. 8–9

Теперь рассмотрим уравнения собственно в натуральных числах.

844. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = x + y + 9.$$

△ Соберем все члены в левую часть и умножим получающееся уравнение на 2, выделяя в левой части три квадрата суммы:

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 2x - 2y - 18 = 0,$$

$$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 2 - 18 = 0,$$

$$(x+y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=20.$$

Сумма трех точных квадратов равна 20 только в одном случае: $16+4+0=20$. Возникает несколько возможностей в зависимости от того, какой из квадратов равен 16, какой — 4 и какой — 0. Переберите их самостоятельно.

В § 18 (п. 18.3) мы при решении подобных уравнений с двумя неизвестными в целых числах применяли и другие способы, например, использовали дискриминант квадратного уравнения.

Ответ: (3; 1), (1; 3). ▲

845. Решите в натуральных числах x, y и z систему уравнений

$$\begin{cases} x+y^2-z=124, \\ x^2+y-z=100. \end{cases}$$

846. Решите уравнение

$$x^2-2y^2=1$$

в простых числах x и y.

847. Докажите, что уравнение

$$x^2+y^2=61^3$$

имеет по меньшей мере одно решение в натуральных числах.

△ Положим

$$x=61a, \quad y=61b,$$

где a и b — натуральные. Подставим эти значения x и y в уравнение:

$$61^2a^2+61^2b^2=61^3, \quad a^2+b^2=61.$$

Последнее уравнение имеет решение в натуральных числах: $a=6$, $b=5$. Тогда и исходное уравнение имеет решение:

$$x=61\cdot 6=366, \quad y=61\cdot 5=305. ▲$$

848. Имеют ли решение в натуральных числах уравнения:
а) $x^2+xy+y^2=7^2$; б) $x^2+xy+y^2=7^3$; в) $x^2+xy+y^2=7^{10}$?

849. Найдите все пары натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 16000.

850. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{98}.$$

△ Из уравнения видно, что

$$0\leqslant x\leqslant 98, \quad 0\leqslant y\leqslant 98.$$

Представим его в форме $\sqrt{y}=\sqrt{98}-\sqrt{x}$ и возведем последнее уравнение в квадрат:

$$y=98+x-2\sqrt{98x}, \quad y=98+x-14\sqrt{2x}.$$

Отсюда

$$2x = 4a^2, \quad x = 2a^2,$$

где a — целое неотрицательное число. Так как $x \leqslant 98$, то

$$2a^2 \leqslant 98, \quad a^2 \leqslant 49, \quad 0 \leqslant a \leqslant 7.$$

Следовательно,

$$a = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

и соответственно

$$x = 0, 2, 8, 18, 32, 50, 72, 98.$$

Для каждого из этих значений x находим соответствующее значение y.

Ответ: (0; 98), (2; 72), (8; 50), (18; 32), (32; 18), (50; 8), (72; 2), (98; 0). ▲

851. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 2000?$$

852. Докажите, что уравнение

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \sqrt{2}$$

имеет бесконечное множество решений в целых числах.

853. Решите в целых числах уравнения:

а) $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$; б) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x}}}} = y$ (1998 корней).

854. Решите в натуральных числах уравнение

$$xy^2 - xy - y^2 + y = 94.$$

△ Разложим левую часть уравнения на множители:

$$xy^2 - xy - y^2 + y = y(xy - x - y + 1) = y(y - 1)(x - 1).$$

Кроме того, число 94 разложим на простые множители: $94 = 2 \cdot 47$.

Давайте подумаем, какие делители числа 94 отличаются на 1? Это возможно только тогда, когда $y - 1 = 1$, $y = 2$.

Осталось найти x:

$$2(x - 1) = 94, \quad x - 1 = 47, \quad x = 48.$$

Ответ: (48; 2). ▲

855. Несколько шахматистов провели матч-турнир, в котором каждый участник сыграл с другим несколько партий (одно и то же количество). Всего было сыграно 244 партии. Во сколько кругов прошло это соревнование?

856. Над двумя натуральными числами выполнили следующие действия: их сложили, вычли (из большего меньшее), перемножили, разделили (большее на меньшее). Когда эти результаты сложили, получилось 243. Найдите все такие числа.

857. Решите в натуральных числах уравнение
$$xy^2 + 3y^2 - x = 108.$$

858. Найдите наименьшую пару натуральных чисел x и y, удовлетворяющих уравнению
$$5x^2 = 3y^5.$$

△ Из уравнения видно, что x делится на 3, а y — на 5:
$$x = 3x_1, \quad y = 5y_1,$$
где x_1 и y_1 — натуральные числа. Тогда
$$5 \cdot 3^2x_1^2 = 3 \cdot 5^5y_1^5, \quad 3x_1^2 = 5^4y_1^5.$$

Отсюда следует, что x_1 делится на 5; кроме того, y_1 делится на 3, а в этом случае и x_1 делится на 3:
$$x_1 = 15x_2, \quad y_1 = 3y_2,$$
где x_2 и y_2 — натуральные. Будем иметь:
$$3 \cdot 15^2x_2^2 = 5^4 \cdot 3^5y_2^5, \quad x_2^2 = 3^2 \cdot 5^2y_2^5.$$

Следовательно, y_2^5 должен быть точным квадратом. Наименьшее y_2, удовлетворяющее этому условию, есть $y_2 = 1$. Тогда
$$x_2^2 = 15^2, \quad x_2 = 15.$$
Осталось найти x_1, y_1, x и y:
$$x_1 = 15x_2 = 15^2 = 225, \quad y_1 = 3y_2 = 3; \quad x = 3x_1 = 3 \cdot 225 = 675, \quad y = 5y_1 = 15.$$
Ответ: $x = 675$, $y = 15$. ▲

859. Найдите наименьшие натуральные числа a и b, большие 1, которые удовлетворяют уравнению
$$\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} = b.$$

860. Докажите, что уравнение
$$y^3 = x^2 + x$$
не имеет решений в натуральных числах.

△ Запишем уравнение в виде:
$$y^3 = x(x + 1).$$

Два последовательных натуральных числа x и $x + 1$ взаимно просты (см. утверждение опорной задачи 454 из § 11), поэтому их произведение может быть точным кубом только тогда, когда каждое из этих чисел является точным кубом.
$$x + 1 = a^3, \quad x = b^3,$$
где a и b — натуральные числа. Вычтем эти равенства:
$$1 = a^3 - b^3, \quad a^3 - b^3 = 1.$$

Но разность кубов двух натуральных чисел не может равняться 1. ▲

861. Докажите, что уравнение

$$x^5 + 1 = 4y^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

862. Имеет ли уравнение

$$7x^3 + 2y^3 = 121$$

решение в натуральных числах?

863. Произведение трех простых чисел в 5 раз больше их суммы. Найдите все такие тройки чисел.

△ Обозначим эти простые числа через x, y и z. Тогда

$$xyz = 5(x + y + z).$$

Один из множителей левой части уравнения равен 5, например, $x = 5$:

$$5yz = 5(5 + y + z), \quad yz = y + z + 5.$$

Выразим из последнего уравнения z через y и у получающейся дроби выделим целую часть.

$$yz - z = y + 5, \quad z = \frac{y+5}{y-1} = \frac{(y-1)+6}{y-1} = 1 + \frac{6}{y-1}.$$

Отсюда $(y - 1) \in \{1; 2; 3; 6\}$, а тогда $y \in \{2; 3; 4; 7\}$. Значение $y = 4$ нужно отбросить. В остальных трех случаях найдем соответствующие значения z: $z = 7, 4, 3, 2$. Так как значение $z = 4$ не подходит, то значение $y = 3$ нужно также отбросить.

Ответ: 2, 5, 7. ▲

864. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = t^2$$

не имеет решений в простых числах x, y, z и t.

865*. Решите в натуральных числах x, y и z уравнение

$$xy + yz + zx = 2(x + y + z).$$

△ Соберем все члены уравнения в левой части и приведем его к виду:

$$x(y - 2) + y(z - 2) + z(x - 2) = 0.$$

Из последнего уравнения следует, что не могут одновременно выполняться неравенства

$$x > 2, \quad y > 2, \quad z > 2,$$

иначе левая часть уравнения станет положительной. Значит, по меньшей мере одно из неизвестных не превосходит 2. Допустим, что это x. Рассмотрим две возможности.

1) Пусть $x = 1$.

Тогда исходное уравнение будет таким:

$$y + yz + z = 2 + 2y + 2z, \quad yz = y + z + 2.$$

Выразим отсюда z через y.

$$yz - z = y + 2, \quad z = \frac{y+2}{y-1} = \frac{(y-1)+3}{y-1} = 1 + \frac{3}{y-1}.$$

Следовательно, $y - 1 = 1$ или $y - 1 = 3$. В первом случае $y = 2$, $z = 4$, во втором — $y = 4$, $z = 2$.

2) Пусть $x = 2$.

Получаем:

$$2y + yz + 2z = 4 + 2y + 2z, \quad yz = 4.$$

Отсюда $y = 1$, $z = 4$; $y = 4$, $z = 1$; $y = z = 2$.

Ответ: (1; 2; 4), (1; 4; 2), (2; 1; 4), (2; 4; 1), (2; 2; 2), (4; 1; 2), (4; 2; 1). ▲

866*. Решите в натуральных числах уравнение

$$xyz + xy + yz + zx + x + y + z = 2000.$$

20.3.

9–11

867. Решите в натуральных числах уравнение

$$x + \frac{y}{z} = \frac{x^2 y}{z}.$$

△ Преобразуем уравнение:

$$xz + y = x^2 y, \quad xz = y(x^2 - 1).$$

Отсюда произведение $y(x^2 - 1)$ делится на x. Но числа x и $x^2 - 1$ взаимно простые (подумайте, как это доказать, пользуясь в качестве образцов решениями задач 454 и 466 из § 11). Тогда y делится на x: $y = kx$, где k — натуральное. Получаем:

$$xz = kx(x^2 - 1), \quad z = k(x^2 - 1).$$

В последнем равенстве x должен быть больше 1.

Ответ: $(x; kx; k(x^2 - 1))$, где $k \in N$, $x \in N$, $x > 1$. ▲

868. Существуют ли три натуральных числа, сумма квадратов которых равна 2000?

869*. Докажите, что уравнение

$$x^4 - 2y^2 = 1$$

не имеет решений в натуральных числах.

870*. Может ли уравнение

$$xy = xz + yz$$

иметь бесконечное множество решений в неравных натуральных числах x, y и z?

△ Выразим из уравнения y через x и z.

$$xy - yz = xz, \quad y = \frac{xz}{x-z} = \frac{(xz - z^2) + z^2}{x-z} = z + \frac{z^2}{x-z}.$$

Пусть $x - z = 1$. Тогда

$$x = z + 1, \quad y = z + z^2.$$

Здесь z — любое натуральное число. Поэтому уравнение имеет такое бесконечное множество решений: $(z + 1;\ z(z + 1);\ z)$ $(z \in N)$.

Ответ: может, например, $(z + 1;\ z(z + 1);\ z)$, где z — любое натуральное число. ▲

871*. Имеет ли уравнение

$$x^3 + y^3 = 4(x^2y + xy^2 + 1)$$

решение в натуральных числах?

872. Решите в натуральных числах уравнение

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1998}.$$

△ Возведем это уравнение в куб:

$$x + y + 3\sqrt[3]{x^2y} + 3\sqrt[3]{xy^2} = 1998, \quad x + y + 3\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}) = 1998.$$

Но что дальше? А дальше заменим сумму в скобках на $\sqrt[3]{1998}$:

$$x + y + 3\sqrt[3]{1998xy} = 1998.$$

Разложим число 1998 на простые множители: $1998 = 2 \cdot 3^3 \cdot 37$. Поэтому для того, чтобы корень $\sqrt[3]{1998xy}$ «извлекался», необходимо

$$xy \vdots 2^2 \cdot 37^2.$$

Пусть x делится на 2; тогда из первоначального уравнения видно, что и y делится на 2. Аналогично если x делится на 37, то и y делится на 37. Следовательно,

$$x = 74a, \quad y = 74b,$$

где a и b — натуральные числа. Подставим эти выражения для x и y в последнее уравнение:

$$74a + 74b + 3\sqrt[3]{2 \cdot 3^3 \cdot 37 \cdot 74a \cdot 74b} = 2 \cdot 3^3 \cdot 37,$$

$$74a + 74b + 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37\sqrt[3]{ab} = 2 \cdot 3^3 \cdot 37, \quad a + b + 9\sqrt[3]{ab} = 27.$$

Отсюда вытекает, что

$$9\sqrt[3]{ab} < 27, \quad \sqrt[3]{ab} < 3, \quad ab < 27.$$

Но так как произведение ab должно быть точным кубом, то $ab = 1$ или $ab = 8$

1) Пусть $ab = 1$.

Тогда $a + b = 18$. Однако система уравнений

$$\begin{cases} ab = 1, \\ a + b = 18 \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах.

2) Пусть $ab = 8$.

Тогда $a + b = 9$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} ab = 8, \\ a + b = 9 \end{cases}$$

находим a и b: $a = 1$, $b = 8$ или $a = 8$, $b = 1$. Значит,

$$x = 74,\ y = 74 \cdot 8 = 592 \quad \text{или} \quad x = 592,\ y = 74.$$

Ответ: (74; 592), (592; 74). ▲

873. Имеет ли уравнение

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{100}$$

решение в натуральных числах?

874. Докажите, что уравнение

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{5}$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах.

875. а) Докажите, что уравнение

$$x^3 + y^3 = z^5$$

имеет решение в натуральных числах.

б) Докажите, что оно имеет бесконечное множество решений в натуральных числах.

△ а) Положим в уравнении

$$x = y = 2^k, \quad z = 2^l \quad (k \in N, l \in N).$$

Получим:

$$2^{3k} + 2^{3k} = 2^{5l}, \quad 2^{3k+1} = 2^{5l}.$$

Отсюда показатели степени должны быть равны:

$$3k + 1 = 5l.$$

Это последнее уравнение имеет решения в натуральных числах, например, $k = 3$, $l = 2$. Следовательно, и исходное уравнение имеет решение.

$$x = y = 2^3 = 8, \quad z = 2^2 = 4.$$

2) Для того чтобы убедиться в том, что данное уравнение имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x и y, достаточно доказать, что уравнение первой степени $3k + 1 = 5l$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах k и l. Для этого решим последнее уравнение тем методом, с которым мы познакомились в § 17 (п.17.2).

$$k = \frac{5l - 1}{3} = \frac{6l - (l + 1)}{3} = 2l - \frac{l + 1}{3}.$$

Положим $\frac{l + 1}{3} = t$, где t — натуральное. Выразим l и k через t.

$$l = 3t - 1, \quad k = 2(3t - 1) - t = 5t - 2.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет такое бесконечное множество решений в натуральных числах:

$$x = y = 2^k = 2^{5t-2}, \quad z = 2^l = 2^{3t-1},$$

где t — любое натуральное число.

Разумеется, эти формулы не исчерпывают всего множества решений данного уравнения в натуральных числах: например, уравнение может иметь решения, не связанные со степенью двойки. ▲

876. Докажите, что следующие уравнения имеют бесконечное множество решений в натуральных числах:

а) $x^3 + y^3 = z^4$; б) $x^4 + y^4 = z^3$; в) $x^3 + y^4 = z^5$;

г) $x^4 + y^4 = z^{2k+1}$ (k — данное целое неотрицательное число);

д) $x^3 + y^3 + z^3 = t^5$.

877*. Имеет ли уравнение

$$x^2 + y^3 + z^4 = 10^{25}$$

решение в натуральных числах?

△ Воспользуемся равенством

$$1^2 + 2^3 + 1^4 = 10.$$

Умножим его на 10^{24}. Почему именно на 10^{24}? Во-первых, потому, что $10 \cdot 10^{24} = 10^{25}$, и, во-вторых, потому, что 24 делится на 2, 3 и 4. Сопоставляя получающееся числовое равенство

$$10^{24} + 2^3 \cdot 10^{24} + 10^{24} = 10^{25}$$

с данным уравнением, и находим одно из решений уравнений в натуральных числах.

Ответ: имеет, например, $x = 10^{12}$, $y = 2 \cdot 10^8$, $z = 10^6$. ▲

878*. Докажите, что для любого данного натурального n существует тройка таких натуральных чисел x, y и z, что

$$x^2 + y^2 = z^n.$$

879. Решите в натуральных числах уравнение

$$x! + 12 = y^2.$$

△ При $x > 4$ число $x!$ оканчивается цифрой 0, а значит, число $x! + 12$ — цифрой 2. Но квадрат натурального числа не может оканчиваться цифрой 2, поэтому при $x > 4$ решений у уравнения нет.

Осталось перебрать значения $x = 1$, 2, 3 и 4. Решение получается только при $x = 4$:

$$4! + 12 = y^2, \quad y^2 = 24 + 12 = 36, \quad y = 6.$$

Ответ: (4; 6). ▲

880. Решите в натуральных числах уравнение

$$1! + 2! + 3! + \ldots + x! = y^2.$$

881*. Решите в натуральных числах уравнение

$$x! + y! = z!.$$

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x < y$. Тогда уравнение можно сократить на $x!$:

$$1 + (x+1)(x+2)\ldots y = (x+1)(x+2)\ldots z.$$

Отсюда 1 делится на $x + 1$. Но это невозможно, поскольку сумма $x + 1$ равна по меньшей мере 2.

2) Пусть $x = y$. Получим:

$$x! + x! = z!, \quad 2x! = z!.$$

Это уравнение также можно сократить на $x!$:

$$2 = (x+1)(x+2)\ldots z.$$

Последнее равенство возможно только тогда, когда справа имеется лишь один множитель — $x + 1 = 2$. Отсюда $x = 1$. Находим z:

$$z! = 2x! = 2 \cdot 1! = 2, \quad z = 2.$$

Ответ: (1; 1; 2). ▲

882*. Решите в натуральных числах уравнение

$$\frac{1}{x!} + \frac{1}{y!} = \frac{1}{z!}.$$

883. Решите в натуральных числах уравнение

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

△ Очевидно, x нечетно. Разложим левую часть уравнения на множители

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y.$$

Тогда каждое из чисел $1 + x$ и $1 + x^2$ должно быть степенью двойки. Но при нечетном x

$$\text{НОД}\,(1+x,\ 1+x^2) = 2$$

(подумайте, почему; см. § 11, п. 11.1.1). Поскольку $1 + x^2 \geqslant 1 + x$, то возможен только такой случай:

$$\begin{cases} 1 + x = 2, \\ 1 + x^2 = 2^k. \end{cases}$$

Отсюда $x = 1$, $k = 1$, а тогда $y = k + 1 = 2$.

Ответ: (1; 2). ▲

884. Решите в натуральных числах уравнение

$$3 \cdot 2^x + 1 = y^2.$$

885. Решите в простых числах x, y и z уравнение

$$x^y + 1 = z.$$

△ Число z больше 2, так как если $z = 2$, то $x = 1$, а это невозможно. Тогда z нечетно, а следовательно, число x четно. Но x — простое, поэтому $x = 2$. Получаем уравнение:

$$2^y + 1 = z.$$

Четно или нечетно число y? Если y нечетно, то сумма $2^y + 1$ делится на 3 (см. § 7, третья делимость), причем частное от такого деления больше 1; но в этом случае число z составное. Значит, число y четное, т. е. $y = 2$. Вычислим еще z: $z = 2^2 + 1 = 5$.

Ответ: (2; 2; 5).▲

886. Решите в простых числах x, y и z уравнение

$$x^y + y^x = z.$$

887. Решите в натуральных числах уравнение

$$2^x - 15 = y^2.$$

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть x нечетно: $x = 2k + 1$ ($k \in N$).

Посмотрим, какой остаток дает 2^x при делении на 3.

$$2^x = 2^{2k+1} = 2 \cdot 2^{2k} = 2 \cdot 4^k = 2((4^k - 1) + 1) = 2(4^k - 1) + 2.$$

Так как разность $4^k - 1$ делится на 3 (§ 7, первая делимость), то число 2^x при делении на 3 дает в остатке 2.

$$2^x = 3a + 2 \ (a \in N).$$

Подставим это выражение для 2^x в уравнение

$$3a + 2 - 15 = y^2, \quad 3a = y^2 + 13, \quad 3a = (y^2 + 1) + 12.$$

Отсюда сумма $y^2 + 1$ делится на 3. Но это невозможно (см. § 6, утверждение опорной задачи 163).

2) Пусть x четно: $x = 2k \quad (k \in N)$.

Получаем:

$$2^{2k} - 15 = y^2, \quad 2^{2k} - y^2 = 15, \quad (2^k + y)(2^k - y) = 15.$$

Здесь могут быть две возможности:

$$\begin{cases} 2^k + y = 15, \\ 2^k - y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^k + y = 5, \\ 2^k - y = 3. \end{cases}$$

Осталось решить каждую из этих систем уравнений. Проделайте это самостоятельно.

Ответ: (6; 7), (4; 1). ▲

888. Имеет ли уравнение

$$7^x - 1 = 12(2y + 1)^2$$

решение в натуральных числах?

889. Докажите, что уравнение

$$2^x + 13^y = 19^z$$

не имеет решений в натуральных числах.

△ Представим уравнение в виде:

$$2^x = 19^z - 13^y, \quad 2^x = (19^z - 1) - (13^y - 1).$$

Так как каждая из разностей $19^z - 1$ и $13^y - 1$ делится на 3, то и вся правая часть последнего уравнения делится на 3. Но это невозможно: степень 2^x на 3 не делится. ▲

890. Имеют ли уравнения:

а) $5^x + 2 = 17^y$; б) $5^x = 1 + 2^y$

решение в натуральных числах?

891. Решите в натуральных числах уравнение

$$3^x - 2^y = 1.$$

△ Сначала определим, четны или нечетны числа x и y.

Если записать уравнение в виде:

$$3^x = 2^y + 1,$$

то нетрудно догадаться, что число y нечетно: только при нечетном y сумма $2^y + 1$ делится на сумму оснований степени, т. е. на 3 (см. § 7, вторая делимость).

Теперь представим уравнение в виде $2^y = 3^x - 1$, разлагая правую часть на множители (см. § 7, тождество (2)):

$$2^y = 2 \cdot (3^{x-1} + 3^{x-2} + \ldots + 3 + 1).$$

Напомним, что число слагаемых в скобках в правой части последнего уравнения равно показателю степени, т. е. x.

Если $y > 1$, то после сокращения уравнения на 2 его левая часть, равная 2^{y-1}, останется четной. Тогда и правая часть четна, откуда x четно.

А если $y = 1$? Приходится рассмотреть два случая.

1) Пусть $y = 1$. В этом случае из первоначального уравнения получаем:

$$3^x - 2 = 1, \quad 3^x = 3, \quad x = 1.$$

2) Пусть $y > 1$. Тогда по доказанному выше x четно: $x = 2n$ ($n \in N$). Запишем уравнение в виде:

$$3^x - 1 = 2^y, \quad 3^{2n} - 1 = 2^y, \quad (3^n + 1)(3^n - 1) = 2^y.$$

Следовательно, каждое из чисел $3^n + 1$ и $3^n - 1$ является степенью двойки. Но наибольший общий делитель этих чисел равен 2 (проверьте), поэтому последнее равенство выполняется только в одном случае, когда

$$\begin{cases} 3^n + 1 = 2^k, \\ 3^n - 1 = 2, \end{cases}$$

где k — натуральное число, большее 1. Из второго уравнения системы найдем n: $n = 1$. Затем из первого уравнения найдем k:

$$3 + 1 = 2^k, \quad 2^k = 4 = 2^2, \quad k = 2.$$

Осталось вычислить x и y:

$$x = 2n = 2, \quad y = k + 1 = 3.$$

Ответ: (1; 1), (2; 3). ▲

892. Решите в натуральных числах уравнения:
а) $2^x - 3^y = 1$; б)* $2^x \cdot 3^y = 5^z + 1$; в)* $x^z \cdot y = x + y^z$.

Рассмотрим серию уравнений, при решении которых используются *неравенства*.

893. Докажите, что уравнение

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

△ Пусть $x \leqslant y$. Тогда наибольшим из слагаемых в левой части уравнения является y^2. Получаем:

$$x^2y^2 = x^2 + xy + y^2 \leqslant y^2 + y^2 + y^2 = 3y^2.$$

Следовательно,

$$x^2y^2 \leqslant 3y^2, \quad x^2 \leqslant 3,$$

откуда $x = 1$. Но при $x = 1$ исходное уравнение принимает вид:

$$1 + y + y^2 = y^2,$$

а это равенство при натуральном y невозможно. ▲

894. Найдите три натуральных числа, сумма которых равна их произведению. Укажите все решения.

△ Обозначим искомые числа через x, y и z. Получим уравнение:

$$x + y + z = xyz.$$

При натуральных x, y и z правая часть этого равенства, вообще говоря, больше левой; вероятно, неизвестные числа должны быть небольшими. Наложим ограничения на эти числа в виде неравенств.

Пусть

$$x \leqslant y \leqslant z.$$

Такое ограничение на неизвестные обычно налагают в тех случаях, когда уравнение симметрично относительно неизвестных. Оно не нарушает общности рассуждений, поскольку в конце решения можно от него отказаться.

Получаем:

$$xyz = x + y + z \leqslant z + z + z = 3z, \quad xyz \leqslant 3z,$$

откуда

$$xy \leqslant 3.$$

Рассмотрим несколько случаев, связанных с последним неравенством. При этом нужно помнить, что $x \leqslant y$.

1) Пусть $x = y = 1$.

Подставим эти значения x и y в первоначальное уравнение.

$$1 + 1 + z = z, \quad 2 + z = z.$$

Последнее уравнение не имеет решений.

2) Пусть $x = 1$, $y = 2$.

Тогда

$$1 + 2 + z = 2z, \quad z = 3.$$

3) Пусть $x = 1$, $y = 3$.

Получаем:

$$1 + 3 + z = 3z, \quad z = 2.$$

Но для данного случая это невозможно, поскольку оказалось, что $z < y$, а должно быть $z \geqslant y$.

Очевидно, этим исчерпываются все случаи.

Ответ: 1, 2 и 3. ▲

895. Сумма четырех натуральных чисел равна их произведению. Найдите все такие четверки чисел.

896. Сумма пяти натуральных чисел равна их произведению. Найдите все такие пятерки чисел.

897. Число $\frac{7}{9}$ представьте в виде суммы трех положительных дробей с числителями, равными 1. Найдите все такие представления.

898. Число 1 представьте в виде суммы четырех положительных дробей с числителями, равными 1. Найдите все такие представления.

899. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} = 6$; б) $xy + xz + yz = xyz + 1$.

900. Докажите, что уравнение

$$y^2 = x^2 + x + 1$$

не имеет решений в натуральных числах.

Это задача Л. Эйлера, не так давно найденная в его записной книжке.

△ Применим метод «вилки» (см. решение задачи 663 из § 14).

При натуральном x справедливо неравенство

$$x^2 < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1.$$

Отсюда

$$x^2 < y^2 < (x + 1)^2, \quad x < y < x + 1.$$

Но последнее неравенство при натуральных x и y невозможно: x и $x + 1$ являются ближайшими друг к другу натуральными числами, поэтому не существует натурального числа y, которое заключено между x и $x + 1$. ▲

901. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $y^2 = x^4 + x + 1$; б) $y^2 = x^2 + 5x + 10$; в) $y^2 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
г) $y^3 = x^3 + 4x^2 + 3$; д)* $x^2 + 4x + 3 = 2^{y^2 - y}$.

902*. Решите в натуральных числах уравнение

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x.$$

△ Умножим уравнение на 4 и прибавим к обеим частям полученного уравнения по 1 с тем, чтобы его левая часть стала точным квадратом.

$$(2y + 1)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1.$$

Правая часть последнего уравнения почти при всех натуральных x заключена между $(2x^2 + x)^2$ и $(2x^2 + x + 1)^2$.

$$(2x^2 + x)^2 < 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < (2x^2 + x + 1)^2.$$

В самом деле, левая часть этого неравенства, очевидно, выполняется для всех натуральных x. Присмотримся к правой его части.

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < 4x^4 + x^2 + 1 + 4x^3 + 4x^2 + 2x,$$

$$4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 < 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1, \quad 2x < x^2, \quad 2 < x.$$

Так как при этом получается неравенство

$$(2x^2 + x)^2 < (2y + 1)^2 < (2x^2 + x + 1)^2, \quad 2x^2 + x < 2y + 1 < 2x^2 + x + 1,$$

то оно не имеет решений при $x > 2$.

Остались случаи: $x = 1$ и $x = 2$.

При $x = 1$ первоначальное уравнение принимает вид $y^2 + y = 4$, а это уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Если $x = 2$, то $y^2 + y = 30$, откуда $y = 5$.

Ответ: (2; 5). ▲

903*. Существуют ли такие натуральные числа m и n, при которых выполняется равенство

$$m(m + 1) = n(n + 1)(n + 2)(n + 3)?$$

904. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 = 5(z^2 + t^2)$$

имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z и t.

△ Найдем сначала одно решение этого уравнения. Подходит, например, $x = 3$, $y = 1$, $z = 1$, $t = 1$, поскольку

$$3^2 + 1^2 = 5(1^2 + 1^2).$$

Но тогда уравнение имеет такое бесконечное множество решений в натуральных числах:

$$x = 3n, \quad y = n, \quad z = n, \quad t = n,$$

где n — любое натуральное число. ▲

905. Решите уравнение

$$x^3 = 3y^3 + 9z^3$$

в целых неотрицательных числах x, y и z.

△ Из уравнения видно, что число x делится на 3: $x = 3x_1$, где x_1 — целое неотрицательное число. Получаем:

$$27x_1^3 = 3y^3 + 9z^3, \quad 9x_1^3 = y^3 + 3z^3.$$

Из последнего равенства следует, что y делится на 3: $y = 3y_1$, где y_1 — целое неотрицательное. Тогда

$$9x_1^3 = 21y_1^3 + 3z^3, \quad 3x_1^3 = 9y_1^3 + z^3.$$

Теперь уже z делится на 3: $z = 3z_1$ (z_1 — целое неотрицательное). Получаем:

$$x_1^3 = 3y_1^3 + 9z_1^3.$$

Обратим внимание, что получилось уравнение того же вида, что и первоначальное. Поэтому из него тем же способом находим, что числа x_1, y_1 и z_1 делятся на 3. Следовательно, числа x, y и z делятся на 3^2.

Аналогично находим, что числа x, y и z делятся на 3^3, потом — на 3^4, вообще, на 3^n, где n — любое натуральное число. Но из всех целых неотрицательных (да и вообще целых) чисел этим свойством обладает только нуль. Кроме того, значения

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

удовлетворяют уравнению.

Ответ: (0; 0; 0). ▲

Метод решения, который мы здесь применяли, называется *методом бесконечного спуска*. Его впервые ввел в теорию чисел П. Ферма в XVII в.

906. Имеет ли уравнение

$$x^4 = 2y^4 + 4z^4 + 8t^4$$

решение в натуральных числах x, y, z и t?

907*. Докажите, что уравнения:

а) $x^2 + y^2 = 3(z^2 + t^2)$; б) $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$;

в) $6x^3 + 12y^3 + 1998xyz = 1999z^3$

не имеют решений в натуральных числах.

908*. Имеет ли уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

решение в целых неотрицательных числах?

△ По условию сумма $x^2 + y^2 + z^2$ делится на 2. Тогда среди чисел x, y и z одно четно, два нечетны или все они четны. Рассмотрим обе возможности.

1) Пусть из чисел x, y, z одно четно, а два нечетны.

Но в этом случае правая часть уравнения делится на 4, а вот левая не делится (подумайте, почему). Следовательно, решений здесь нет.

2) Пусть каждое из чисел x, y и z четно:

$$x = 2x_1, \quad y = 2y_1, \quad z = 2z_1,$$

где x_1, y_1 и z_1 — целые неотрицательные числа. Получаем:

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1.$$

Для последнего уравнения могут быть такие же две возможности. Первая из них, как и раньше, отпадает, а во втором случае числа x_1, y_1, z_1 делятся на 2, а следовательно, числа x, y и z — уже на 2^2.

Далее получаем, что каждое из чисел x, y и z делится на 2^3, затем — на 2^4, вообще, на степень двойки с любым натуральным показателем. Последнее возможно только при $x = y = z = 0$.

Ответ: имеет, и притом единственное решение — (0; 0; 0). ▲

909*. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 2xyzt$$

не имеет решений в натуральных числах.

910*. Найдите какое-либо решение уравнения

$$x^2 - 119y^2 = 1$$

в натуральных числах.

△ Справедливо тождество

$$n^2 - (n + 1)(n - 1) = 1.$$

Может возникнуть вопрос: при чем здесь это тождество? А кто его знает... Захотелось автору — взял и написал.

Ответ: например, $x = 120$, $y = 11$. ▲

911. Пользуясь тождеством из предыдущей задачи, составьте какое-либо уравнение вида $x^2 - ay^2 = 1$ (a — данное натуральное число), отличное от уравнения из этой задачи, которое имеет решение в натуральных числах.

912. Докажите, что уравнение

$$x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{1999}^3 = 2000$$

не имеет решений в натуральных числах $x_1, x_2, ..., x_{1999}$.

913*. Решите в натуральных числах $x_1, x_2, ..., x_n$ уравнение

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 2^2)(x_3^2 + 3^2)...(x_n^2 + n^2) = 2^n \cdot n! \cdot x_1x_2x_3...x_n.$$

△ Воспользуемся n раз неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел. Известно, что оно обращается в равенство только при равенстве этих чисел между собой. Заменяя каждый раз неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$ неравенством $a + b \geqslant \sqrt{ab}$, получаем:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + 1 \geqslant 2x_1 \\ &x_2^2 + 2^2 \geqslant 2 \cdot 2x_2 \\ &x_3^2 + 3^2 \geqslant 2 \cdot 3x_3 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x_n^2 + n^2 \geqslant 2 \cdot nx_n. \end{aligned}$$

Перемножим эти неравенства почленно:

$$(x_1^2+1)(x_2^2+2^2)(x_3^2+3^2)\dots(x_n^2+n^2)\geqslant 2\cdot n!\cdot x_1x_2x_3\dots x_n.$$

Последнее неравенство по условию должно превратиться в равенство. Это достигается только в том случае, когда к а ж д о е из перемноженных неравенств превращается в равенство, т. е. при

$$x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3,\dots,\ x_n=n.$$

Ответ: (1; 2; 3;...; n). ▲

Приведенное здесь решение задачи 913 напоминает *правило крайнего* (см., например, [18], § 12), когда в ходе решения рассматривается некоторый крайний случай.

914*. Сумма и произведение 10 натуральных чисел равны 20. Найдите все такие числа.

915*. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2+y^2=z^2. \tag{1}$$

Формулы для неизвестных x, y и z, которые мы получим, известны в математике более 3000 лет (впервые они появились в Древнем Вавилоне). Эти формулы, как мы увидим дальше, полезно знать, да и метод решения задачи поучителен.

Равенство (1) напоминает теорему Пифагора. Прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами называются ***пифагоровыми треугольниками***. Поэтому нашу задачу можно переформулировать так: найти все пифагоровы треугольники.

△ Пока ограничимся случаем, когда числа x, y и z попарно взаимно просты: ведь если два числа из этих трех имеют наибольший общий делитель d, больший 1, то для того чтобы уравнение (1) имело решение в натуральных числах, необходимо, чтобы и третье неизвестное делилось на d, а тогда равенство (1) можно разделить почленно на d^2.

Давайте подумаем: какими тогда могут быть числа x, y и z в отношении четности? Очевидно, одно из них четно, два нечетны. Какое же из них четно? Если четным является z, то правая часть равенства делится на 4, а левая не делится, поэтому такой случай невозможен. Следовательно, четным может быть только один из «катетов», пусть для определенности это x.

Равенство (1) запишем в виде $x^2=z^2-y^2$ и разделим последнее равенство на 4:

$$\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}(z^2-y^2),\quad \left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{z+y}{2}\cdot\frac{z-y}{2}. \tag{2}$$

Так как число x четно, а числа z и y, где $z>y$, нечетны, то числа $\frac{x}{2}$, $\frac{z+y}{2}$ и $\frac{z-y}{2}$ являются натуральными. При этом числа $\frac{z+y}{2}$ и $\frac{z-y}{2}$ взаимно просты, поскольку если они имеют наибольший общий делитель d, то, складывая и вычитая соотношения

$$\frac{z+y}{2}\vdots d,\quad \frac{z-y}{2}\vdots d,$$

получаем:

$$z \vdots d, \quad y \vdots d,$$

а это возможно лишь при $d = 1$.

Теперь присмотримся к равенству (2): когда произведение двух взаимно простых чисел $\frac{z+y}{2}$ и $\frac{z-y}{2}$ равно квадрату натурального числа? Только тогда, когда оба эти числа являются квадратами натуральных чисел:

$$\frac{z+y}{2} = a^2, \quad \frac{z-y}{2} = b^2,$$

где a и b — натуральные.

Для нахождения z и y сложим и вычтем эти равенства:

$$z = a^2 + b^2, \quad y = a^2 - b^2.$$

Теперь из равенства (2) найдем x:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 = a^2b^2, \quad \frac{x}{2} = ab, \quad x = 2ab.$$

Итак, получились формулы:

$$x = 2ab, \quad y = a^2 - b^2, \quad z = a^2 + b^2. \tag{3}$$

Для проверки этих формул подставим значения x и y в левую часть равенства (1):

$$x^2 + y^2 = 4a^2b^2 + (a^2 - b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = z^2.$$

Получилось тождество.

При применении формул (3) в случае, когда числа x, y и z попарно взаимно просты, на натуральные числа a и b нужно наложить следующие ограничения:

1) $a > b$;

2) числа a и b взаимно просты;

3) a и b — разной четности.

(Подумайте, чем вызвано каждое из них.)

Приведем примеры. При $a = 2$, $b = 1$ по формулам (3) получаем:

$$x = 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4, \quad y = 4 - 1 = 3, \quad z = 4 + 1 = 5.$$

Это треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — так называемый *египетский треугольник*.

При $a = 3$, $b = 2$ будем иметь:

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 2 = 12, \quad y = 9 - 4 = 5, \quad z = 9 + 4 = 13.$$

Теперь учтем, что числа x, y и z могут иметь общий делитель $k > 1$. Тогда формулы (3) нужно заменить следующими, наиболее общими:

$$x = 2abk, \quad y = (a^2 - b^2)k, \quad z = (a^2 + b^2)k. \tag{4}$$

Здесь натуральные числа а и b должны удовлетворять тем же ограничениям, что и раньше, k — любое натуральное число.

Формулы (4) и дают ответ на вопрос задачи. ▲

916. Найдите по формулам (3) пифагоровы треугольники при:

а) $a = 4$, $b = 1$; б) $a = 4$, $b = 3$; в) $a = 6$, $b = 5$.

917. Найдите все пифагоровы треугольники, у которых длина одной из сторон равна:

а) 17; б) 50.

918. Найдите все пифагоровы треугольники с периметром, равным 144.

919*. Решите в натуральных числах уравнение

$$x^2 + y^2 = 2z^2.$$

В связи с задачей 915 возникает естественный вопрос: а имеют ли решение в натуральных числах уравнения

$$x^3 + y^3 = z^3, \quad x^4 + y^4 = z^4, \quad x^5 + y^5 = z^5$$

и другие, подобные этим? П. Ферма еще в XVII веке высказал утверждение: уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

при любом данном натуральном n, большем 2, не имеет решений в натуральных числах x, y и z. Это утверждение позднее получило название большой или великой теоремы Ферма.

Сам Ферма сделал на полях «Арифметики» древнегреческого математика Диофанта примечание: «Я открыл этому поистине чудесное доказательство, которое из-за недостатка места не может поместиться на этих полях». До сих пор не ясно, не ошибался ли он. Достоверно известно, что Ферма дал доказательство своей теоремы при $n = 4$ методом бесконечного спуска, с помощью формул (3) из задачи 915. В XVIII веке Л. Эйлер доказал ее при $n = 3$. Позднее большая теорема Ферма была доказана для многих значений n, но общего доказательства для любого $n > 2$ найти никому не удалось. Кроме ученых, за доказательство взялись многочисленные любители, не очень разбирающиеся в математике, но убежденные, что если проблема просто формулируется, то она просто и решается. С такими «ферматистами», представляющими свои доказательства, до недавних пор приходилось иметь дело ученым и преподавателям математических кафедр многих вузов, и не только в нашей стране.

В самом конце XX века, в 1995 г., эта проблема была решена. Профессор из США Э. Уайлс, разбив ее на части и заложив соответствующие программы большого объема в ЭВМ, сумел доказать большую теорему Ферма.

Справедливости ради нужно сказать, что малая теорема Ферма, знакомая нам по § 6, оказалась гораздо более полезной в теории чисел, чем большая теорема Ферма: последняя занимает в теории чисел изолированное положение.

§ 21. Неравенства в целых числах 8–11

Литература: [34], [46].

Иногда приходится решать в целых числах не уравнения, а неравенства. Так, при решении уравнений первой степени с двумя неизвестными в натуральных числах мы нередко решали эти уравнения в целых числах, а затем для выделения решений в натуральных числах решали систему двух неравенств первой степени с одним неизвестным в целых числах (см. задачи 767–771 из § 17). Необходимость в этом возникает и при решении некоторых других уравнений в целых числах. Например, при решении в натуральных числах уравнения $z = x + y - xy$ приходится решать в натуральных числах неравенство $x + y - xy > 0$. Наконец, встречаются текстовые задачи, решение которых сводится к решению в целых (а чаще натуральных) числах неравенств или систем неравенств.

Кроме неравенств с несколькими целочисленными неизвестными, мы встретимся здесь и с неравенствами с одним таким неизвестным.

21.1. 8–9

920. Миша на год старше Сережи, а Сережа на год старше Олега. Сумма их лет больше 40, но меньше 45. Сколько лет каждому?

△ Самым младшим из трех мальчиков является Олег. Пусть ему x лет. Тогда Сереже $x + 1$, а Мише — $x + 2$ лет. Получаем:

$$40 < x + (x + 1) + (x + 2) < 45, \quad 40 < 3x + 3 < 45.$$

$$37 < 3x < 42, \quad 12\frac{1}{3} < x < 14.$$

Отсюда $x = 13$. Следовательно, $x + 1 = 14$, $x + 2 = 15$.
Ответ: Олегу 13 лет, Сереже — 14, Мише — 15. ▲

921. Существует ли дробь со знаменателем 17, которая больше $\frac{2}{11}$, но меньше $\frac{3}{11}$?

922. Найдите дробь с наименьшим из всех возможных знаменателем, которая заключена между $\frac{7}{25}$ и $\frac{8}{25}$. Укажите все решения.

△ Обозначим искомую дробь через $\frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа. Тогда

$$\frac{7}{25} < \frac{a}{b} < \frac{8}{25}.$$

Теперь переберем несколько случаев в зависимости от b.

1) Случаи $b = 1$ и $b = 2$ нужно отбросить, так как здесь дробь $\frac{a}{b}$ будет слишком велика.

2) Пусть $b = 3$. Тогда $a = 1$. Выполняется ли неравенство

$$\frac{7}{25} < \frac{1}{3} < \frac{8}{25}?$$

Нет, поскольку оно сводится к неверному неравенству $21 < 25 < 24$.

3) Пусть $b = 4$. Тогда $a = 1$. Но неравенство

$$\frac{7}{25} < \frac{1}{4} < \frac{8}{25}$$

также не выполняется (проверьте).

4) Пусть $b = 5$. В этом случае $a = 2$. Но и неравенство

$$\frac{7}{25} < \frac{2}{5} < \frac{8}{25}$$

несправедливо.

5) Пусть $b = 6$. Но тогда значение $a = 1$ слишком мало, а при $a = 2$ получаем дробь $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, которую мы уже рассматривали.

6) Пусть $b = 7$. Здесь нужно взять $a = 2$. Проверим соответствующее неравенство:

$$\frac{7}{25} < \frac{2}{7} < \frac{8}{25}, \quad 49 < 50 < 56.$$

Так как последнее неравенство справедливо, то дробь $\frac{2}{7}$ удовлетворяет требованию задачи.

Ответ: $\frac{2}{7}$. ▲

923. Найдите все дроби с наименьшим из всех возможных знаменателем, которые заключены между $\frac{10}{19}$ и $\frac{11}{19}$.

924. Найдите все дроби с наименьшим из всех возможных числителем, которые заключены между:

а) $\frac{4}{17}$ и $\frac{5}{17}$; б) $\frac{9}{17}$ и $\frac{10}{17}$.

925. Каково наименьшее количество членов в математическом кружке, если девочек в нем больше 40 %, но менее 50 % ?

△ Пусть в кружке a девочек, а всего членов кружка b. Тогда отношение числа девочек к общему числу членов кружка равно $\frac{a}{b}$.

Так как 40 % составляют $\frac{2}{5}$, а 50 % — $\frac{1}{2}$ членов кружка, то по условию

$$\frac{2}{5} < \frac{a}{b} < \frac{1}{2}.$$

Нужно найти наименьшее натуральное число b, для которого существует такое натуральное число a, при котором справедливо записанное неравенство.

Получилась задача того же типа, что и задача 922. Поэтому и дальнейшее решение выполняется так же. Проделайте его самостоятельно.

Ответ: 7. ▲

926. В отчете о лыжных соревнованиях говорится, что процент участников, прошедших дистанцию до конца, заключен в пределах от 94,2 % до 94,4 % участников. (Некоторая неопределенность этих данных объясняется неясностью с выступлениями отдельных участников.) Каково наименьшее число участников соревнований?

927*. Среди всех таких дробей $\frac{m}{n}$ ($m \in N$, $n \in N$), при которых

$$\frac{1}{2001} < \frac{m}{n} < \frac{1}{2000},$$

найдите дробь с наименьшим знаменателем.

928. Решите в целых числах x и y систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < y + 0{,}5, \\ y + |x - 1| < 2. \end{cases}$$

△ Из первого неравенства системы видно, что $y \geqslant 0$, а из второго — что $y < 2$. Значит, $0 \leqslant y < 2$. Так как последнему неравенству удовлетворяют только два целых значения y — $y = 0$ и $y = 1$, то рассмотрим два случая.

1) Пусть $y = 0$.

Тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < 0{,}5, \\ |x - 1| < 2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} -0{,}5 < x^2 - 2x < 0{,}5, \\ -1 < x < 3. \end{cases}$$

Последнему неравенству из целых x удовлетворяют $x = 0, 1, 2$. Подставляя каждое из этих значений x в первое неравенство, устанавливаем, что ему удовлетворяют только $x = 0$ и $x = 2$. Получаем два решения первоначальной системы: (0; 0) и (2; 0).

2) Пусть $y = 1$.

Тогда

$$\begin{cases} |x^2 - 2x| < 1{,}5, \\ |x - 1| < 1, \end{cases} \quad \begin{cases} -0{,}5 < x^2 - 2x < 1{,}5, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Последнему неравенству удовлетворяет только одно целое x: $x = 1$. Оно удовлетворяет и первому неравенству системы. Получаем еще одно решение: (1; 1).

Ответ: (0; 0), (2; 0), (1; 1). ▲

929. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x + y < 4, \\ 2x + 5y > 10 \end{cases}$$

в натуральных числах x и y.

930. Сколько решений в целых числах x и y имеет неравенство

$$|x| + |y| < 10?$$

△ Из условия видно, что

$$|x| < 10, \text{ т. е. } -10 < x < 10.$$

Переберем все случаи.

Если $x = \pm 9$, то $y = 0$. Имеем два решения: $(9; 0)$ и $(-9; 0)$.

Если $x = \pm 8$, то $y = 0, \pm 1$. Получаем шесть решений: $(8; 0)$, $(-8; 0)$, $(8; 1)$, $(-8; 1)$, $(8; -1)$ и $(-8; -1)$.

При $x = \pm 7$ неизвестное y принимает значения $0, \pm 1, \pm 2$. Это дает еще 10 решений.

Аналогично при $x = \pm 6, \pm 5, \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$ получаем соответственно 14, 18, 22, 26, 30 и 34 решения.

Наконец, если $x = 0$, то y принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm 9$. Это дает еще 19 решений неравенства.

Осталось подсчитать общее количество решений:

$$(2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 + 26 + 30 + 34) + 19 = 162 + 19 = 181.$$

Ответ: 181. ▲

931. Сколько решений в целых числах имеет неравенство

$$|x^2 - 1| + |y^2 - 1| < 6?$$

932. Найдите два натуральных числа, если их произведение заключено между 120 и 130, а отношение — между 2 и 3. Укажите все решения.

△ Обозначим искомые числа через k и n. Тогда

$$\begin{cases} 120 < kn < 130, \\ 2 < \dfrac{k}{n} < 3. \end{cases}$$

Перемножим эти неравенства: $240 < k^2 < 390$. Кроме того, разделим неравенства, при этом в правой части нужно делить 130 на 2 (но не на 3), а в левой нужно 120 делить на 3 (а не на 2). Тогда $40 < n^2 < 65$.

Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 240 < k^2 < 390, \\ 40 < n^2 < 65. \end{cases}$$

Она является лишь следствием исходной системы, так как любое решение первой системы удовлетворяет второй системе, но вторая система имеет решения, которые не удовлетворяют первоначальной системе, например, $k = 16$, $n = 7$.

Из второго неравенства последней системы следует, что $n = 7$ или $n = 8$. Рассмотрим оба случая, находя k, причем обязательно из исходной системы неравенств.

1) Пусть $n = 7$. Получаем:

$$\begin{cases} 120 < 7k < 130, \\ 2 < \dfrac{k}{7} < 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 17\frac{1}{7} < k < 18\frac{4}{7}, \\ 14 < k < 21. \end{cases}$$

Отсюда $k = 18$.

2) Пусть $n = 8$. Будем иметь:

$$\begin{cases} 120 < 8k < 130, \\ 2 < \dfrac{k}{8} < 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 15 < k < 16\frac{1}{4}, \\ 16 < k < 24. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений в целых числах.

Ответ: 18 и 7. ▲

933. Найдите два натуральных числа, если их произведение заключено между 200 и 240, а отношение — между 20 и 24. Укажите все решения.

934. Три одноклассника купили 13 пирожков, причем Костя купил в два раза меньше Толи, а Володя — больше Кости, но меньше Толи. Сколько пирожков купил каждый из них?

△ Пусть Костя купил x пирожков, а Володя — y. Тогда Толя купил $2x$ пирожков. Получаем смешанную систему, составленную из уравнения и неравенства:

$$\begin{cases} 3x + y = 13, \\ x < y < 2x. \end{cases}$$

Так как $x < y < 2x$, то, прибавляя ко всем частям этого неравенства по $3x$, будем иметь:

$$4x < y + 3x < 5x, \quad 4x < 13 < 5x.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{cases} 4x < 13, \\ 5x > 13. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, получаем:

$$2\frac{3}{5} < x < 3\frac{1}{4}.$$

Тогда $x = 3$, $2x = 6$. Найдем y:

$$3x + y = 13, \quad 9 + y = 13, \quad y = 4.$$

Проверим еще, выполняется ли неравенство $x < y < 2x$: $3 < 4 < 6$.

Следовательно, неравенство выполняется.

Ответ: 3, 4, 6. ▲

935. В гараже 40 автомобилей разных типов: грузовые, легковые и автобусы. Автобусов меньше, чем легковых машин, а легковых машин в 12 раз меньше, чем грузовых. Найдите число автомобилей каждого типа.

936. На одинаковых грузовиках перевезли 10 560 кг груза. Легковых автомобилей было на 6 меньше, чем грузовиков, и они перевезли 560 кг груза. Сколько было легковых автомобилей, если каждый из них перевозил груза меньше, чем грузовик, более чем на 1 т и машины грузились равномерно?

937. Партию одинаковых деталей решили разложить поровну по ящикам. Сначала в каждый ящик положили по 12 деталей, но при этом осталась одна деталь. Тогда из одного ящика вытащили все детали, и в остальные ящики удалось разложить все детали поровну. Сколько деталей было в партии, если в каждый ящик помещается не более 20 деталей?

938*. Два автохозяйства отправили автомобили для перевозки сельскохозяйственной продукции общим числом менее 18. Число машин, отправленных вторым автохозяйством, меньше удвоенного числа машин, отправленных первым автохозяйством. Если бы первое автохозяйство отправило на 4 машины больше, то число машин, отправленных первым автохозяйством, было бы меньше числа машин, отправленных вторым автохозяйством. Сколько машин отправило каждое автохозяйство?

△ Пусть x и y — число автомобилей, отправленных соответственно первым и вторым автохозяйствами. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x + y < 18, \\ y < 2x, \\ x + 4 < y. \end{cases}$$

Так как $x + 4 < y$, $y < 2x$, то

$$x + 4 < 2x, \quad x > 4.$$

Так как $x + 4 < y$, $y < 18 - x$ (из первого неравенства системы), то

$$x + 4 < 18 - x, \quad 2x < 14, \quad x < 7.$$

Тогда $4 < x < 7$. Следовательно, $x = 5$ или $x = 6$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $x = 5$. Система неравенств принимает такой вид:

$$\begin{cases} 5 + y < 18, \\ y < 10, \\ 5 + 4 < y. \end{cases}$$

Отсюда $9 < y < 10$, а это невозможно.

2) Пусть $x = 6$. Получаем:

$$\begin{cases} 6 + y < 18, \\ y < 12, \\ 6 + 4 < y. \end{cases}$$

Тогда $10 < y < 12$. Следовательно, $y = 11$.

Ответ: 6 и 11. ▲

939. В двух ящиках вместе находится более 27 деталей. Если бы в первом ящике было на 24 детали больше, то число деталей в нем более чем в два раза превышало бы число деталей во втором ящике. Если бы в первом ящике было на 10 деталей меньше, чем вначале, то число деталей во втором ящике превышало бы число деталей в первом ящике более чем в 9 раз. Сколько деталей находится в каждом ящике?

940. На автостоянке находятся автомобили марок «Жигули» и «Москвич» общим числом менее 30. Если увеличить число «Жигулей» вдвое, а число «Москвичей» — на 27, то «Жигулей» будет больше. Если увеличить число «Москвичей» вдвое, не меняя числа «Жигулей», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Жигулей» и сколько «Москвичей» находится на автостоянке?

941*. Сколько пар целых чисел x и y удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} 2x \geqslant 3y, \\ 3x \geqslant 4y, \\ 5x - 7y \leqslant 20? \end{cases}$$

942. Решите в целых числах x, y и z систему неравенств

$$x^2 \leqslant y, \quad y^2 \leqslant z, \quad z^2 \leqslant x.$$

21.2. 9—11

943. Решите в целых числах x, y и z неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3 < xy + 3y + 2z.$$

△ Соберем все члены неравенства в левой части:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 3 < 0.$$

Заменим это неравенство следующим:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 3y - 2z + 4 \leqslant 0.$$

Полученное неравенство при целых x, y и z равносильно предыдущему (подумайте, почему).

Теперь выделим в левой части квадраты сумм. Полезно предварительно умножить неравенство на 4.

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy - 12y - 8z + 16 \leqslant 0,$$

$$(4x^2 - 4xy + y^2) + (4z^2 - 8z + 4) + (3y^2 - 12y + 12) \leqslant 0,$$

$$(2x - y)^2 + (2z - 2)^2 + 3(y - 2)^2 \leqslant 0.$$

Ясно, что сумма в левой части последнего неравенства отрицательной быть не может, она может только равняться нулю. Тогда

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ 2z - 2 = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$$

Находим отсюда x, y и z:

$$y = 2, \quad x = 1, \quad z = 1.$$

Ответ: (1; 2; 1). ▲

944. Решите в целых числах x и y неравенство

$$(y - x)(y - x + 2) + 1 \leqslant 0.$$

945. Решите в натуральных числах неравенство

$$x^2 + xy + y^2 > 3(x + y - 1).$$

946. Найдите два натуральных числа, произведение которых не превосходит их суммы. Укажите все решения.

△ Обозначим искомые числа через x и y. Тогда

$$xy \leqslant x + y.$$

Пусть $x \leqslant y$. Получаем:

$$xy \leqslant x + y \leqslant y + y = 2y.$$

Отсюда

$$xy \leqslant 2y, \quad x \leqslant 2.$$

Теперь рассмотрим два случая.

1) Пусть $x = 1$.

Первоначальное неравенство принимает вид:

$$y \leqslant 1 + y.$$

Это неравенство выполняется при любом натуральном y.

2) Пусть $x = 2$.

Тогда

$$2y \leqslant 2 + y, \quad y \leqslant 2.$$

Так как при этом должно выполняться неравенство $y \geqslant x = 2$, то $y = 2$.

Ответ: одно число равно 1, другое — любое натуральное; 2, 2. ▲

Обратите внимание, что при решении задачи 946 мы применяли метод, близкий тому, которым пользовались при решении некоторых уравнений в натуральных числах (см. задачи 894–899 из § 20).

947. Найдите: а) три; б) четыре натуральных числа, произведение которых не превосходит их суммы. Укажите все решения.

948. Найдите четыре натуральных числа, произведение которых меньше их суммы, если сумма трех из них равна 6. Укажите все решения.

949. Найдите три натуральных числа, произведение которых меньше суммы их попарных произведений. Укажите все решения.

950. Решите в натуральных числах неравенство

$$xy < x + 2y.$$

△ Здесь ограничение типа $x \leqslant y$ на неизвестные x и y (вроде того, что мы применяли при решении задачи 946) применять не стоит, поскольку неравенство несимметрично относительно x и y.

Соберем все члены неравенства в левую часть и прибавим к обеим частям получающегося неравенства число 2:

$$xy - x - 2y < 0, \quad xy - x - 2y + 2 < 2, \quad (y - 1)(x - 2) < 2.$$

Теперь переберем несколько случаев.

Если $y - 1 = 0$, т. е. $y = 1$, то x — любое натуральное число.

Если $x = 1$ или $x = 2$, то y — любое натуральное число.

Кроме того, подходит случай $y - 1 = 1$, $x - 2 = 1$, т. е. $x = 3$, $y = 2$.

Ответ: $(x; 1)$ $(x \in N)$; $(1; y)$ $(y \in N, y \neq 1)$; $(2; y)$ $(y \in N, y \neq 1)$; $(3; 2)$. ▲

951. Решите в натуральных числах неравенство

$$xy - 1 < 2x + y.$$

952. Решите в натуральных числах неравенство

$$\frac{x + y}{x - y} > xy.$$

△ Очевидно, $x > y$. Приведем неравенство к виду:

$$x + y > xy(x - y).$$

Так как $x - y \geqslant 1$, то $xy(x - y) \geqslant xy$. Кроме того, $x + y < x + x = 2x$. Получаем:

$$2x > x + y > xy(x - y) \geqslant xy.$$

Отсюда

$$xy < 2x, \quad y < 2.$$

Следовательно, $y = 1$. Подставим это значение y в исходное неравенство:

$$x + 1 > x(x - 1), \quad x + 1 > x^2 - x, \quad x^2 - 2x - 1 < 0.$$

Можно решить квадратное неравенство обычным способом, но можно и преобразовать его следующим образом:

$$x^2 - 2x < 1, \quad x^2 - 2x + 1 < 2, \quad (x - 1)^2 < 2.$$

Тогда $x = 1$ или $x = 2$. Но значение $x = 1$ не подходит, поскольку должно выполняться неравенство $x > y$.

Ответ: $(2; 1)$. ▲

953. Первое целое число больше второго на 4, а число, обратное первому, более чем на $\frac{5}{4}$ превосходит число, обратное второму. Найдите все такие пары чисел.

954. Решите в натуральных числах x и y неравенство

$$x^2 + 1 < y^2 < x^2 + x + 1.$$

△ Справедливо неравенство

$$x^2 < x^2 + 1 < y^2 < x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

Отсюда

$$x^2 < y^2 < (x + 1)^2, \quad x < y < x + 1.$$

Но последнее неравенство не имеет решений в натуральных числах x и y.
Ответ: нет решений. ▲

Здесь мы применяли метод «вилки», знакомый нам по § 20.

955. Решите в натуральных числах неравенство

$$x^2 + 2 < y^2 < x^2 + 4x.$$

956*. Решите в целых числах систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2 + 2y^2 + 12x - 20y + 63 < 0, \\ 3x + y + 3 < 0. \end{cases}$$

△ Преобразуем первое неравенство, выделяя в левой части неотрицательные слагаемые:

$$2(x^2 + 6x) + 2(y^2 - 10y) + 63 < 0,$$

$$2(x^2 + 6x + 9) + 2(y^2 - 10y + 25) + 63 - 18 - 50 < 0,$$

$$2(x + 3)^2 + 2(y - 5)^2 < 5.$$

С помощью перебора находим все решения последнего неравенства в целых числах:

$$(-3; 5), (-3; 6), (-3; 4), (-2; 5), (-4; 5).$$

Требуется еще проверка полученных решений по второму неравенству системы $3x + y + 3 < 0$ (проделайте это самостоятельно).
Ответ: $(-3; 5)$, $(-3; 4)$, $(-4; 5)$. ▲

957*. Решите в целых числах системы неравенств:

а) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 8x + 16y + 41 < 0, \\ 2x + y - 4 > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 6y + 9 < 0, \\ x^2 + y^2 - 2x + 4y < 0. \end{cases}$

958*. Решите в целых числах неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x - 2y + z + 1}} + \frac{2}{\sqrt{2x - y + 3z - 1}} + \frac{3}{\sqrt{3y - 3x - 4z + 3}} > x^2 - 4x + 3.$$

△ Числа $x - 2y + z + 1$, $2x - y + 3z - 1$ и $3y - 3x - 4z + 3$ являются не только целыми, но и положительными. Их сумма равна 3.

$$(x - 2y + z + 1) + (2x - y + 3z - 1) + (3y - 3x - 4z + 3) = 3.$$

Но когда сумма трех натуральных чисел равна 3? Только в одном случае — когда каждое из них равно 1.

$$\begin{cases} x - 2y + z + 1 = 1, \\ 2x - y + 3z - 1 = 1, \\ 3y - 3x - 4z + 3 = 1. \end{cases}$$

В полученной системе уравнений одно из них (любое) есть следствие остальных, так как при сложении всех уравнений системы получаем тождество: $3 = 3$. Поэтому найти однозначно из нее неизвестные нельзя.

Воспользуемся неравенством

$$1 + 2 + 3 > x^2 - 4x + 3, \quad x^2 - 4x - 3 < 0.$$

Отсюда

$$2 - \sqrt{7} < x < 2 + \sqrt{7}.$$

Поскольку $2{,}6 < \sqrt{7} < 2{,}7$, то

$$2 + \sqrt{7} < 2 + 2{,}7 = 4{,}7, \quad 2 - \sqrt{7} > 2 - 2{,}7 = -0{,}7.$$

Следовательно,

$$-0{,}7 < x < 4{,}7.$$

Тогда $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Теперь нужно перебрать все полученные значения x, подставляя их по очереди в два из трех уравнений системы и находя оттуда соответствующие значения y и z. Проделайте это самостоятельно.

Ответ: $(3; 1; -1)$. ▲

959*. Решите в целых числах неравенство

$$\frac{5}{\sqrt{3x - 4y + 1}} > \frac{1}{\sqrt{4y - 3x + 2}} + x^2 + y^2.$$

960*. Решите в натуральных числах неравенство

$$3^x + 4^x < 5^x.$$

△ Вычисления показывают, что при $x = 1$ и $x = 2$ это неравенство не выполняется, а при $x = 3, 4, 5$ выполняется.

Докажем, что неравенство справедливо при всех натуральных $x \geqslant 3$. Применим метод математической индукции.

1) При $x = 3$ это неравенство справедливо.

2) Допустим, что оно справедливо при некотором натуральном $x = k$, где $k \geqslant 3$:

$$3^k + 4^k < 5^k.$$

Докажем, что тогда оно справедливо и при $x = k + 1$.

Приведем последнее неравенство к виду:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k < 1.$$

Что больше $\left(\frac{3}{5}\right)^k$ или $\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1}$? $\left(\frac{3}{5}\right)^k$, так как, умножая неравенство $\frac{3}{5} < 1$ на $\left(\frac{3}{5}\right)^k$, получаем:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} < \left(\frac{3}{5}\right)^k.$$

(Если вы знакомы с показательной функцией, можно воспользоваться ее убыванием при основании, меньшем 1.)

Складывая почленно неравенства

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} < \left(\frac{3}{5}\right)^k, \quad \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} < \left(\frac{4}{5}\right)^k,$$

будем иметь:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} < \left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k < 1.$$

Отсюда

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{k+1} + \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1} < 1, \quad 3^{k+1} + 4^{k+1} < 5^{k+1}.$$

Мы доказали, что если исходное неравенство справедливо при $x = k \geqslant 3$, то оно справедливо и при $x = k + 1$. Тогда на основании принципа математической индукции оно справедливо при любом натуральном $x \geqslant 3$.

Ответ: все натуральные x, не меньшие 3. ▲

961*. Решите в натуральных числах неравенства:

а) $4^n + 5^n > 6^n$; б) $3^n \cdot n < 4^n$.

§ 22. Разные задачи с целыми числами

В этом, завершающем, параграфе книги мы рассмотрим или задачи с небольшим циклом — не более чем 12–13 задач, или одиночные задачи, подобно тому, как поступали в § 8 «Разные задачи на делимость».

22.1. 7–9

Литература: [37^{В}], [40^{В}], [47], [61^{В}], [62].

Здесь мы займемся *фокусами на угадывание неизвестных натуральных чисел*. Такие задачи понемногу встречались в книге, например, в § 15, посвященном системам счисления.

962. Приведем отрывок из повести известного писателя В. Я. Шишкова «Странники».

«— А хочешь, я покажу тебе арифметический фокус-покус? Ахнешь.

— Ой! А ну покажите, миленький.

Иван Петрович вырвал из блокнота страничку, подал мальчонке, спросил:

— Карандаш есть? Пиши любое пятизначное число.

Мальчонка написал. Иван Петрович мельком взглянул на это число, написал на отдельном клочке бумаги свое какое-то число, сунул бумажку в солому и прикрыл шляпой.

— Пиши под ним другое. Написал? Теперь я сам напишу третье. Теперь все три числа складывай. Только тщательней, не ври.

Через две минуты был готов проверенный ответ. Инженер Вошкин подал свои выкладки:

$$\begin{array}{r} 46853 \\ +\,21398 \\ 78601 \\ \hline 146852. \end{array}$$

— Сто сорок шесть тысяч восемьсот пятьдесят два, Иван Петрович.

— Долго считаешь. А у меня — вот он ответ. Я уж знал его, когда ты еще первое число написал. Вот. Тяни из-под шляпы.

Мальчонка выхватил бумажку. Там значилось: 146852. Удивленное лицо инженера Вошкина вытянулось, и волосы на голове встопорщились. С боязнью, с удивлением он таращил глаза на Ивана Петровича.

— Ну... вот... как же?.. А?»

В самом деле, как же это, а?

963. Алеша говорит Боре: «Задумай двузначное число. Умножь его на 2, к произведению прибавь 5, полученную сумму умножь на 5. Сколько у тебя получилось? 715? Ты задумал 69». Как он угадал?

△ Обозначим задуманное Борей число через $\overline{ab}$. Проделаем все указанные действия.

$$(\overline{ab} \cdot 2 + 5) \cdot 5 = \overline{ab} \cdot 10 + 25.$$

Для того чтобы добраться до числа $\overline{ab}$, сначала отбросим у полученного числа цифру 5; оно превратится в число $\overline{ab} + 2$. Осталось отнять 2 от последнего числа.

Итак, Алеше для нахождения задуманного числа нужно мысленно проделать следующее: в сообщенном ему числе отбросить последнюю цифру 5 (а она всегда равна 5) и от полученного числа отнять 2. ▲

964. Фокусник предлагает человеку из публики: «Задумайте однозначное или двузначное число. Прибавьте к нему 1, результат умножьте на 4, от произведения отнимите задуманное число и отнимите 3, полученное число умножьте на 2. Что у вас получилось? 140? Вы задумали число 23». Как он это узнал?

965. Толя сказал мне: «Задумай трехзначное число. Первую его цифру умножь на 5, к полученному произведению прибавь 9, результат умножь на 2 и к произведению прибавь вторую цифру задуманного числа. Сколько получилось? 656? Ты задумал 476». Как он угадал?

966. Вася написал на листке бумаги какое-то число, вложил листок в конверт и конверт отдал Грише. А потом сказал: «Задумай такое трехзначное число, чтобы первая его цифра отличалась от последней больше, чем на 1. Переставь его цифры в обратном порядке и из большего числа вычти меньшее. В полученной разности также переставь цифры в обратном порядке и сложи разность с последним числом. А теперь загляни в конверт». Гриша с изумлением увидел, что на листке из конверта написано то самое число 1089, которое у него получилось после всех операций. Каким образом Вася его узнал?

967. Я говорю приятелю: «Задумай натуральное число. Умножь его на 2, к результату прибавь 16, полученную сумму раздели на 2, к результату прибавь 3 и отними задуманное число. У тебя получилось 11». Почему?

22.2. 7–9

Литература: [48], [83].

Эта часть параграфа является продолжением п. 14.3 из книги [18], посвященного таблицам. Отличие в том, что здесь рассматриваются только *числовые таблицы*, причем все числа в клетках таблиц должны быть целыми.

968. Можно ли в клетки прямоугольной таблицы с 3 строками и 4 столбцами вписать 12 последовательных натуральных чисел, расположив их так, чтобы:

а) сумма чисел в каждой строке делилась на 6;

б) сумма чисел в каждом столбце делилась на 4;

в) сумма чисел в каждом столбце делилась на 2, но не делилась на 4?

△ а) Возьмем натуральные числа от 1 до 12 и расположим их в таблицу 3×4 следующим образом.

1	2	3	6
4	5	7	8
9	10	11	12

Так как здесь сумма чисел каждой строки делится на 6, то расположить их в таблицу требуемым способом можно.

(Можно доказать, что таким же способом возможно разместить в клетках таблицы любые 12 последовательных натуральных чисел.)

б) Для ответа на следующий вопрос задачи возьмем любые 12 последовательных натуральных чисел

$$n, n+1, n+2, ..., n+11$$

и найдем их сумму:

$$n+(n+1)+(n+2)+...+(n+11)=6\cdot(2n+11)$$

(проверьте!). Если бы сумма чисел в каждом столбце делилась на 4, то и сумма всех чисел таблицы делилась на 4. Но последнее неверно. Значит, расположить числа в таблице подобным образом нельзя.

в) Предположим, что сумма чисел в каждом столбце таблицы делится на 2, но не делится на 4. Тогда эта сумма в первом, втором, третьем и четвертом столбцах равна соответственно

$$2a, 2b, 2c, 2d,$$

где a, b, c, d — нечетные числа. Найдем сумму всех чисел таблицы.

$$2a+2b+2c+2d=2(a+b+c+d).$$

Поскольку сумма $a+b+c+d$ четна как сумма четырех нечетных чисел, то опять получается, что сумма всех чисел таблицы делится на 4, а это невозможно.

Ответ: а) можно; б) нельзя; в) нельзя. ▲

969. Можно ли в клетки таблицы 2×3 записать шесть целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом из двух квадратов 2×2 делилась на 3, а сумма всех чисел таблицы не делилась на 3?

970. Можно ли в клетки таблицы 3×3 записать девять целых чисел так, чтобы сумма чисел в каждом квадрате 2×2 делилась на 3, а сумма всех чисел таблицы не делилась на 3?

971. В клетки таблицы 5×5 записываются все натуральные числа от 1 до 25. Можно ли сделать это так, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце таблицы:

а) были нечетными;

б) не делились на 5?

972*. Можно ли в клетки таблицы 3×3 записать числа 1, -1 и 0 так, чтобы все шесть сумм чисел по строкам и столбцам были различны?

△ Суммы чисел в каждой из строк и в каждом из столбцов таблицы в данном случае могут принимать только целые значения от -3 до 3. Целых чисел от -3 до 3 всего 7. Но все ли они могут быть значениями такой суммы?

Допустим, что в таблице имеется сумма, равная -3, например, в строке. Она может получиться только тогда, когда каждое из трех ее слагаемых равно -1.

-1	-1	-1	-3
1	1	1	3
1	-1	0	0

А встретится ли в этом случае сумма, равная 3? Если да, то тоже только в строке (но не в столбце, так как тогда три числа столбца равны 1, а это невозможно). Осталось заполнить третью строку. Но для того чтобы все три суммы в столбцах были различны, нужно третью строку заполнить р а з н ы м и числами: 1, -1 и 0.

Получилось, что суммы в одной из строк и в одном из столбцов таблицы равны 0, а следовательно, равны между собой. Однако по условию последнее невозможно.

Мы установили следующее: если в таблице встречается сумма, равная -3, то не может встретиться сумма, равная 3. Аналогично доказывается, что если имеется сумма, равная 3, то не может быть суммы, равной -3. Значит, эти суммы могут принимать самое большее 6 различных значений — или от -3 до 2, или от -2 до 3.

Теперь рассмотрим два случая.

1) Пусть сумма, равная -3, в таблице встречается. Тогда суммы в строках и столбцах принимают в с е целые значения от -3 до 2. Найдем сумму этих 6 чисел:

$$-3-2-1+0+1+2=3.$$

Но, с другой стороны, эта последняя сумма равна удвоенной сумме всех чисел таблицы, а следовательно, должна делиться на 2. Поэтому такой случай невозможен.

2) Пусть в таблице встречается сумма, равная 3. Подобным же образом доказывается, что и этот случай невозможен.

Ответ: нельзя. ▲

973*. В каждую клетку квадрата 9×9 вписано одно из чисел 1 или -1. Справа от каждой строки записывается произведение всех чисел этой строки. Под каждым столбцом записывается произведение всех чисел этого столбца. Найдите произведение всех 18 произведений. Докажите, что их сумма не равна нулю.

22.3. 8–11

Литература: [25[в]], [26[в]], [40], [50], [60], [66[в]], [99].

Займемся задачами на числовые таблицы специального вида — магические квадраты.

Магическим квадратом называется квадратная таблица, в клетках которой записаны различные натуральные числа так, что суммы всех чисел, расположенных в каждой строке, в каждом столбце и на каждой диагонали, равны между собой. Эта сумма называется *суммой магического квадрата*, а число строк (или столбцов) квадрата — его *порядком*.

Магические квадраты известны человечеству очень давно. Впервые они появились в глубокой древности на Востоке — по-видимому, сначала в Китае, потом в Индии. В Западной Европе они появились в XV–XVI вв. В XVII–XX вв. не только популяризаторы математики, но и серьезные ученые, скажем, Л. Эйлер, посвящают им специальные статьи и даже книги.

Большей частью магический квадрат n-го порядка заполняется натуральными числами от 1 до n^2. Например, доказано, что число магических квадратов четвертого порядка равно 880; этот результат справедлив только в случае, когда клетки такого квадрата заполняются натуральными числами от 1 до 16. Здесь мы не будем придерживаться этого ограничения.

974. Докажите, что магический квадрат второго порядка не существует.

975. Натуральные числа от 1 до 9 расположены в клетках магического квадрата третьего порядка. Какое число стоит в середине квадрата? Где может стоять 1? А 8? Восстановите хотя бы один такой магический квадрат.

△ Сначала найдем сумму магического квадрата. Она равна сумме всех натуральных чисел от 1 до 9, деленной на 3.

$$S = (1 + 2 + 3 +...+ 9) : 3 = 45 : 3 = 15.$$

Теперь найдем все способы, которыми число 15 можно представить в виде суммы трех различных натуральных чисел от 1 до 9.

$$15 = 1 + 5 + 9 = 1 + 6 + 8 = 2 + 4 + 9 = 2 + 5 + 8 = 2 + 6 + 7 =$$

$$= 3 + 4 + 8 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6.$$

Этих способов оказалось 8. Но и общее число строк, столбцов и диагоналей квадрата тоже равно 8. Следовательно, каждое из полученных представлений числа 15 должно войти в искомый квадрат, причем только один раз.

Какое число стоит в центре квадрата? Это число входит в четыре суммы: в строке, в столбце и по двум диагоналям. Посмотрим все представления числа 15 в виде суммы: какое же число входит в четыре такие суммы? Только число 5. Оно и будет стоять в центре.

Займемся числом 1: во сколько сумм оно входит? Оказывается, в две. Но какие числа квадрата входят в две такие суммы? Только те, которые стоят в середине крайней строки или крайнего столбца. Напишем 1 в одну из подобных клеток.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Число 8 входит в три суммы. Значит, 8 стоит в одном из углов квадрата, но только на нашем рисунке не в нижнем, а в верхнем (подумайте, почему).

Остальные клетки квадрата заполняются однозначно. Магический квадрат восстановлен. ▲

976. Докажите, что:

а) число магических квадратов третьего порядка из натуральных чисел от 1 до 9 равно 8;

б) 7 из этих квадратов могут быть образованы из квадрата, полученного при решении задачи **975**, или с помощью преобразования симметрии относительно горизонтальной или вертикальной прямой, проходящей через центр квадрата, или с помощью поворотов вокруг центра на **90°**, 180° или 270°.

Последнее утверждение означает, что магический квадрат третьего порядка из натуральных чисел от 1 до 9 по существу только один; остальные 7 не имеют самостоятельного значения.

977. Составьте какой-либо магический квадрат третьего порядка из:

а) натуральных чисел от 3 до 11; б) из нечетных чисел от 1 до 17.

978. Можно ли составить магический квадрат третьего порядка из квадратов натуральных чисел от 1 до 9?

979*. Докажите, что сумма магического квадрата третьего порядка делится на 3.

△ Обозначим числа в клетках магического квадрата в последовательном порядке от a_1 до a_9, а сумму квадрата — через S.

Будем считать числа a_1, a_2, a_4 и S как бы известными, а остальные числа квадрата выражать через них. Зачем? Для того, чтобы одно и то же число — a_6, a_8 или a_9 выразить двумя способами и эти выражения приравнять. Получаем:

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

$$a_3 = S - a_1 - a_2, \quad a_7 = S - a_1 - a_4,$$

$$a_5 = S - a_3 - a_7 = S - (S - a_1 - a_2) - (S - a_1 - a_4) = 2a_1 + a_2 + a_4 - S,$$

$$a_9 = S - a_1 - a_5 = S - a_1 - (2a_1 + a_2 + a_4 - S) = 2S - 3a_1 - a_2 - a_4,$$

$$a_6 = S - a_4 - a_5 = S - a_4 - (2a_1 + a_2 + a_4 - S) = 2S - 2a_1 - a_2 - 2a_4,$$

$$a_6 = S - a_3 - a_9 = S - (S - a_1 - a_2) - (2S - 3a_1 - a_2 - a_4) = 4a_1 + 2a_2 + a_4 - 2S.$$

Приравняем два выражения для a_6 и в образующемся равенстве члены с S соберем в одной части, остальные — в другой.

$$2S - 2a_1 - a_2 - 2a_4 = 4a_1 + 2a_2 + a_4 - 2S, \quad 4S = 6a_1 + 3a_2 + 3a_4.$$

В последнем равенстве правая часть делится на 3, следовательно, и левая часть делится на 3, т. е. S делится на 3. ▲

980*. Верно ли, что сумма магического квадрата третьего порядка в 3 раза больше числа, стоящего в его центре?

981*. Верно ли, что все 9 чисел магического квадрата третьего порядка при записи их в порядке возрастания всегда образуют арифметическую прогрессию?

982. Чему равна сумма магического квадрата четвертого порядка, составленного из натуральных чисел от 1 до 16?

983. Докажите, что для построения одного из магических квадратов четвертого порядка из натуральных чисел от 1 до 16 достаточно:

1) записать эти числа в клетки квадрата в порядке возрастания;

2) поменять местами числа пар 2 и 15, 3 и 14, 5 и 12, 8 и 9.

984. Постройте еще один магический квадрат четвертого порядка из натуральных чисел от 1 до 16, записав эти числа в клетки квадрата в порядке возрастания и меняя местами числа некоторых пар.

22.4. 9–11

Литература: [22], [23], [45].

Здесь мы займемся задачами на факториалы, связанными с делимостью. Они близки к задачам из § 8.

985. На какую наибольшую степень числа 3 делится 100! ?

△ Прежде всего по одной тройке имеется в каждом из множителей.

$$3, 6, 9, \ldots, 99.$$

Таких множителей 33. Следовательно, их произведение делится на 3^{33}. Некоторые из этих множителей делятся на 9.

$$9, 18, 27, \ldots, 99.$$

Всего их 11. Значит, получаем еще степень 3^{11}.

Некоторые из последних множителей делятся на 3^3: 27, 54, 81. Их 3. Это дает еще 3^3. Наконец, число 81 делится на 3^4. Получаем дополнительно еще одну тройку. Осталось степени 3 перемножить.

$$3^{33} \cdot 3^{11} \cdot 3^3 \cdot 3 = 3^{48}.$$

Ответ: на степень с показателем 48. ▲

986. На какую наибольшую степень числа 7 делится 500! ?

987. На какую наибольшую степень числа 13 делится 1000! ?

988. При каком минимальном n число $n!$ делится на 11^{100}?

989. Существует ли такое натуральное n, что $n!$ оканчивается ровно 29 нулями?

990. Разложите на простые множители числа: а) 30!; б) 40!; в) 50!.

991. Делится ли 256! на $(18!)^{16}$?

992*. Найдите все натуральные n, при которых дробь $\frac{n!}{n+1}$ сократима.

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть число n — нечетное, большее 1.

Тогда дробь сократима на 2.

2) Пусть n четно.

Если при этом число $n + 1$ — простое: $n + 1 = p$, где p — простое, то дробь несократима.

Если же $n + 1$ — составное: $n + 1 = a \cdot b$, где a и b — натуральные числа, большие 1, то дробь сократима, например, на a.

Ответ: все нечетные n, большие 1, и все четные $n \neq p - 1$, где p — простое. ▲

993*. На какую наибольшую степень числа 3 делится сумма

$$1! + 2! + 3! + \ldots + n!\ ?$$

22.5. 9–11

Литература: [23], [45], [60], [95].

Здесь мы познакомимся с задачами на *число делителей* натурального числа.

994. Простое число p имеет только два различных делителя — 1 и p. А когда натуральное число имеет: а) 3; б) 4; в) 5 различных делителей? Укажите все такие случаи.

Для того чтобы решать подобные задачи в более сложных случаях, полезно вывести формулу числа делителей натурального числа.

995°. Докажите, что число всех различных делителей натурального числа

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$$

($p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — натуральные) вычисляется по формуле:

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1)$$

(τ — греческая буква «тау»).

△ Любой делитель натурального числа a имеет вид:

$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n},$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа, не превосходящие соответственно чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. (В частности, при $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$ получаем делитель $d = 1$.)

Переменная $p_1^{\beta_1}$ принимает $\alpha_1 + 1$ значений, так как показатель степени β_1 может принимать все целые значения от 0 до α_1, а число таких значений равно $\alpha_1 + 1$.

Аналогично переменные

$$p_2^{\beta_2}, p_3^{\beta_3}, \ldots, p_n^{\beta_n}$$

принимают соответственно $\alpha_2 + 1, \alpha_3 + 1, \alpha_n + 1$ значений. Отсюда по правилу произведения (см., например, [18], § 6, п. 6.2) число значений переменной d равно

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1). \blacktriangle$$

996. Найдите все случаи, когда натуральное число имеет 8 различных делителей.

△ На основании утверждения задачи 995 (при тех же обозначениях) получаем:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_n + 1) = 8.$$

С другой стороны, найдем все разложения числа 8 в произведении натуральных чисел:

$$8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Соответственно этому разберем три случая.

1) В первом случае

$$\alpha_1 + 1 = 1, \quad \alpha_2 + 1 = 8,$$

откуда $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 7$. Искомое число a принимает вид $a = p^7$, где p — простое.

2) Во втором случае

$$\alpha_1 + 1 = 2, \quad \alpha_2 + 1 = 4.$$

Тогда

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 3, \quad a = p_1 p_2^3,$$

где p_1 и p_2 — различные простые числа.

3) В третьем случае

$$\alpha_1 + 1 = 2, \quad \alpha_2 + 1 = 2, \quad \alpha_3 + 1 = 2.$$

Следовательно,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1, \quad a = p_1 p_2 p_3,$$

где p_1, p_2 и p_3 — различные простые числа.

Ответ: $a = p^7$, где p — простое; $a = p_1p_2^3$, где p_1 и p_2 — различные простые числа; $a = p_1p_2p_3$, где p_1, p_2 и p_3 — различные простые числа. ▲

997. Укажите все случаи, когда натуральное число имеет: а) 10; б) 12 различных делителей.

998. Найдите натуральное число, если оно делится на 9 и 5 и имеет 14 различных делителей.

△ Обозначим искомое число через

$$a = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3}...p_n^{\alpha_n},$$

где $p_3, p_4, ..., p_n$ — различные простые числа (отличные от 3 и 5), α_1, α_2 — натуральные, $\alpha_3, \alpha_4, ..., \alpha_n$ — целые неотрицательные.

По условию

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_n + 1) = 14,$$

причем $\alpha_1 \geqslant 2, \alpha_2 \geqslant 1$.

Если $\alpha_1 = 2$, то $\alpha_1 + 1 = 3$. Но поскольку 14 на 3 не делится, то этот случай невозможен.

Пусть $\alpha_1 > 2$. Тогда уже при $\alpha_1 = 3$ получаем:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 4(\alpha_2 + 1) \geqslant 8.$$

Следовательно, произведение

$$(\alpha_3 + 1)(\alpha_4 + 1)...(\alpha_n + 1)$$

может быть равным только 1, иначе в противном случае

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)...(\alpha_n + 1) > 14.$$

Отсюда

$$\alpha_3 = \alpha_4 = ... = \alpha_n = 0,$$

т. е. число a не имеет других простых делителей, кроме 3 и 5. Имеем:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) = 14.$$

Тогда

$$\alpha_1 + 1 = 7, \quad \alpha_2 + 1 = 2; \quad \alpha_1 = 6, \quad \alpha_2 = 1; \quad a = 3^6 \cdot 5 = 729 \cdot 5 = 3645.$$

Ответ: 3645. ▲

999. Найдите натуральное число, если оно делится на 8 и 3 и имеет 15 различных делителей.

1000. Некоторое натуральное число имеет только два простых делителя (в некоторых степенях), а его квадрат имеет 35 различных делителей. Сколько различных делителей у куба этого числа?

△ Пусть исходное число имеет вид:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2},$$

где p_1 и p_2 — различные простые числа, α_1 и α_2 — натуральные. Тогда

$$a^2 = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2}, \quad a^3 = p_1^{3\alpha_1} \cdot p_2^{3\alpha_2}.$$

Так как a^2 имеет 35 различных делителей, то

$$(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) = 35.$$

Отсюда получаем:

$$2\alpha_1 + 1 = 5, \quad 2\alpha_2 + 1 = 7; \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3.$$

Следовательно,

$$\tau(a^3) = (3\alpha_1 + 1)(3\alpha_2 + 1) = 7 \cdot 10 = 70.$$

Ответ: 70. ▲

1001°. Докажите, что натуральное число имеет нечетное число различных делителей тогда и только тогда, когда оно является квадратом натурального числа.

△ Применим утверждение задачи 995 (при тех же обозначениях). Произведение

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$$

нечетно тогда и только тогда, когда все его множители нечетны, т. е. когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ четны, т. е. когда исходное число

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$$

есть квадрат натурального числа. ▲

1002. Найдите все натуральные числа, которые заключены между 1000 и 2000 и имеют 25 различных делителей.

1003. Одного математика спросили: «Сколько вам лет?» Он ответил замысловато: «Число моих лет имеет нечетное число различных делителей, а число этих делителей также имеет нечетное число различных делителей». Так сколько же ему лет?

△ На основании утверждения задачи 1001 число лет математика должно быть точным квадратом. Выпишем все такие числа:

$$4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169$$

(идти дальше, видимо, нереально). Подсчитаем число делителей каждого из этих чисел, пользуясь утверждением задачи 995. Получим соответственно:

$$3, 3, 5, 3, 9, 3, 7, 5, 9, 3, 15, 3.$$

Среди них, в свою очередь, найдем числа, являющиеся точными квадратами. Такое число одно — 9. Оно встречается в двух местах, поэтому и число лет математика принимает два значения, которые можно найти на соответствующих местах первой строки.

Ответ: 36 или 100. ▲

1004. Докажите, что если a и k — натуральные числа, то числа $\tau(a^k)$ и k взаимно просты.

1005. Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно просты, то

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b).$$

△ Разложим числа a и b на простые множители:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m}, \quad b = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_n^{\beta_n},$$

где $p_1, p_2, ..., p_m, \quad q_1, q_2, ..., q_n$ — различные простые числа, а все показатели степени натуральные. Тогда

$$\tau(a) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_m + 1),$$

$$\tau(b) = (\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)...(\beta_n + 1),$$

$$\tau(a)\tau(b) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_m + 1)(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)...(\beta_n + 1).$$

С другой стороны, получаем:

$$ab = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_m^{\alpha_m} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_n^{\beta_n},$$

отсюда $\tau(ab)$ равно тому же самому числу:

$$\tau(ab) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_m + 1)(\beta_1 + 1)(\beta_2 + 1)...(\beta_n + 1).$$ ▲

1006*. Докажите, что если натуральные числа a и b не взаимно просты, то

$$\tau(ab) < \tau(a)\tau(b).$$

22.6. 8–11

Список литературы по рассматриваемой здесь теме не приводится ввиду ее отсутствия.

Рассмотрим задачи на *сумму цифр* натурального числа, записанного в десятичной системе счисления. Вспомним, что сумма цифр числа у нас встречалась в признаках делимости на 3, 9 и 11.

1007. Из натурального числа вычли сумму его цифр, а из полученной разности вычли сумму ее цифр. Если так продолжать и дальше, каким числом закончатся вычисления?

△ Разность между натуральным числом и суммой его цифр делится на 9 (см. опорную задачу 120 из § 5), и это свойство сохраняется на каждом шаге процесса вычислений. Но такая разность неотрицательна и при дальнейшем продолжении вычислений уменьшается, поэтому последнее ее значение — нуль.

Ответ: 0. ▲

1008. Существует ли такое натуральное число n, при котором

$$n + S(n) = 125,$$

где $S(n)$ — сумма цифр числа n?

△ Число n может быть только трехзначным, причем первая его цифра равна 1. Положим $n = \overline{1ab}$. Получаем:

$$\overline{1ab} + 1 + a + b = 125, \quad 100 + 10a + b + 1 + a + b = 125, \quad 11a + 2b = 24.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение в цифрах: $a = 2$, $b = 1$.

Ответ: существует и единственно — 121. ▲

1009. Существует ли такое натуральное число n, при котором

$$n + S(n) = 2000?$$

1010. Найдите все трехзначные числа, делящиеся на 13, если сумма их цифр делится на 13.

1011. Докажите, что если из трехзначного числа, у которого первая цифра больше третьей, вычесть число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, то получится число, сумма цифр которого равна 18.

1012. Существуют ли два последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 3?

1013. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 7.

△ Очевидно, это возможно только при «перескакивании» через девятку.

Обозначим меньшее из искомых чисел через

$$x = \overline{abc...kl99...9}$$

(n девяток), где цифра l меньше 9. Тогда

$$x + 1 = \overline{abc...k(l+1)00...0}$$

(n нулей).

По условию каждая из сумм цифр

$$a + b + c + ... + k + l + 9n, \quad a + b + c + ... + k + (l + 1)$$

делится на 7. Значит, и разность этих сумм делится на 7:

$$(9n - 1) \vdots 7.$$

Минимальное значение n, которое удовлетворяет последнему соотношению, — $n = 4$. Тогда $9n = 36$.

В качестве числа $\overline{abc...kl}$ нужно взять однозначное число, сумма которого с 36 делится на 7. Очевидно, это однозначное число 6. Следовательно,

$$x = 69999, \quad x + 1 = 70000.$$

Ответ: 69999, 70000. ▲

1014. Найдите два наименьших последовательных натуральных числа, у каждого из которых сумма цифр делится на 11.

1015*. Найдите трехзначное число, если его произведение на 6 является трехзначным числом с той же суммой цифр. Укажите все такие решения.

△ Обозначим искомое число через $\overline{abc}$, новое число — через $\overline{klm}$.

Тогда

$$\overline{abc} \cdot 6 = \overline{klm},$$

где по условию

$$a + b + c = k + l + m.$$

Отсюда видно, что $\overline{abc} \leqslant 166$, так как уже произведение $167 \cdot 6 = 1002$.

Число $\overline{klm}$ делится на 3, т. е. по признаку делимости на 3 сумма $k + l + m$ делится на 3. Следовательно, сумма $a + b + c$ делится на 3, т. е. число $\overline{abc}$ делится на 3. Но в этом случае число $\overline{klm}$ делится уже на 9. Тогда

$$(k + l + m)\vdots 9, \quad (a + b + c)\vdots 9, \quad \overline{abc}\vdots 9.$$

Найдем все значения числа $\overline{abc} = \overline{1bc}$, помня, что оно не превосходит 166:

$$108, 117, 126, 135, 144, 153, 162.$$

Число $\overline{klm}$ в 6 раз больше, поэтому оно принимает соответственно значения:

$$648, 702, 756, 810, 864, 918, 972.$$

Теперь сравним суммы цифр чисел первой строки с суммами цифр соответствующих чисел нижней строки. Когда они равны? Только в двух случаях: когда $\overline{abc} = 117$ и когда $\overline{abc} = 135$.

Ответ: 117, 135. ▲

1016*. Сумма цифр натурального числа x равна y, а сумма цифр числа y равна z. Найдите все числа x, если $x + y + z = 90$.

1017*. Докажите, что сумма цифр всех чисел

$$1, 2, 3, ..., 999...9$$

(n девяток) равна $\frac{1}{2}9n \cdot 10^n$.

△ Сумма цифр двух натуральных чисел a и $99...9 - a$ (n девяток), где $a < 99...9$, равна $9n$. В частности, сумма цифр чисел 1 и 99...98 ($n - 1$ девяток) равна

$$1 + 9 + 9 + ... + 9 + 8 = 9n.$$

Сумма цифр чисел 2 и 99...97 — также $9n$, 11 и 99...988 ($n - 2$ девяток) — тоже $9n$ и т. д. (При этом существенно, что при сложении чисел a и $99...9 - a$ не превосходит «перескакивания» через девятку.)

На участке от 1 до 99...98 ($n - 1$ девяток) числа разбиваются на пары: первое — с последним, второе — с предпоследним и т. д. так, что сумма цифр двух чисел каждой пары равна $9n$. Подсчитаем количество таких пар. Оно равно

$$\frac{1}{2}99...98 = \frac{1}{2}(10^n - 2) = \frac{1}{2}10^n - 1.$$

Кроме того, есть еще число 99...9 (n девяток), у которого сумма цифр также равна $9n$. Следовательно, общая сумма цифр всех чисел равна

$$9n((\frac{1}{2}10^n - 1) + 1) = \frac{1}{2}9n \cdot 10^n. ▲$$

1018. Все натуральные числа от 1 до 1000000 выписаны подряд:

$$12345678910111213...1000000.$$

Чему равна сумма цифр этого многозначного числа?

1019*. Двузначное число x имеет сумму цифр a, а числа x^2 и x^3 — соответственно суммы цифр a^2 и a^3. Найдите все такие числа x.

22.7. 9–11

Литература: [35], [83].

Займемся задачами на *последовательности с целыми членами*. При этом будем рассматривать главным образом теоретико-числовые свойства таких последовательностей.

Подобные задачи уже встречались в книге [18] (см. § 7, задачи 215–219).

1020. Из последовательности всех простых чисел построены две другие последовательности:

$$5 = 2 + 3, \quad 8 = 3 + 5, \quad 12 = 5 + 7, \quad 14 = 7 + 11, \ldots;$$
$$6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 35 = 5 \cdot 7, \quad 77 = 7 \cdot 11, \ldots .$$

В первом случае два последовательных простых числа складываются, во втором перемножаются. Может ли какой-либо член первой последовательности равняться некоторому члену второй последовательности?

1021. Выпишем цифры от 0 до 9 подряд: 0, 1, 2, 3, ..., 9 и рассмотрим последовательность сумм двух соседних цифр:

$$1;\ 3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ 13;\ 15;\ 17.$$

В этой последовательности каждый член, начиная со второго, больше предыдущего на 2. Расположите цифры 0, 1, 2, ..., 9 так, чтобы в новой образовавшейся последовательности сумм двух соседних цифр каждый член, начиная со второго, был больше предыдущего на 1.

△ Обозначим искомую последовательность цифр через

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{10}.$$

Тогда новая последовательность попарных сумм

$$a_1 + a_2; \quad a_2 + a_3; \quad a_3 + a_4; \quad a_4 + a_5; \ldots; \quad a_9 + a_{10}$$

есть арифметическая прогрессия с разностью, равной 1.

Сумма членов первоначальной последовательности цифр равна

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 9 = \frac{1 + 9}{2} 9 = 45,$$

следовательно, и сумма членов новой последовательности цифр равна 45.

Выразим сумму S членов новой последовательности сумм двумя способами. Во-первых, следующим образом:

$$S = (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_9 + a_{10}) =$$
$$= (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}) + (a_2 + a_3 + \ldots + a_9) =$$
$$= 45 + (45 - a_1 - a_{10}) = 90 - a_1 - a_{10}.$$

Во-вторых, пользуясь формулой суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n - 1)}{2} n.$$

Здесь $d = 1$, $n = 9$, а роль первого члена прогрессии играет $a_1 + a_2$. Получаем:

$$S = \frac{2(a_1 + a_2) + 8}{2} \cdot 9 = (a_1 + a_2 + 4) \cdot 9.$$

Теперь приравняем два выражения для S:

$$90 - a_1 - a_{10} = (a_1 + a_2 + 4) \cdot 9.$$

Отсюда сумма $a_1 + a_{10}$ делится на 9, т. е. она равна 9. Тогда

$$90 - 9 = (a_1 + a_2 + 4) \cdot 9, \quad 9 = a_1 + a_2 + 4, \quad a_1 + a_2 = 5.$$

Итак, сумма $a_1 + a_2$ равна 5. Но эта сумма является **наименьшей** из всех попарных сумм, значит, одно из чисел a_1 и a_2 равно нулю. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a_1 = 0$.

Тогда

$a_2 = 5$, $a_3 = 1$ (так как сумма $a_2 + a_3$ на 1 больше суммы $a_1 + a_2 = 5$),

$a_4 = 6$, $a_5 = 2$, $a_6 = 7$, $a_7 = 3$, $a_8 = 8$, $a_9 = 4$, $a_{10} = 9$.

Получаем последовательность цифр:

$$0; 5; 1; 6; 2; 7; 3; 8; 4; 9.$$

2) Пусть $a_2 = 0$.

Тем же способом находим последовательность:

$$5; 0; 6; 1; 7; 2; 8; 3; 9; 4.$$

(Попробуйте еще самостоятельно разобрать случай, когда, скажем, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$.)

Ответ: 0; 5; 1; 6; 2; 7; 3; 8; 4; 9 или 5; 0; 6; 1; 7; 2; 8; 3; 9; 4. ▲

1022. Дана последовательность:

$$1; 1; 2; 3; 7; 22; \ldots,$$

у которой первый и второй члены равны 1, а каждый следующий, начиная с третьего, произведению двух предыдущих членов, сложенному с 1. Докажите, что ни один член этой последовательности не делится на 4.

△ В этой последовательности после каждых двух нечетных членов идет один четный. Рассмотрим пять любых последовательных членов

$$a; b; c; d; e,$$

таких, что числа b и e — четные, а числа a, c и d — нечетные. По определению последовательности получаем:

$$e = cd + 1 = (ab + 1)(bc + 1) + 1 = ab^2c + b(a + c) + 2.$$

Здесь слагаемое ab^2c делится на 4, слагаемое $b(a + c)$ — тоже, а 2 на 4 не делится, поэтому и вся сумма, т. е. число e, на 4 не делится. ▲

1023. Последовательность (a_n) задана соотношениями:

$$a_1 = 3, \quad a_n = na_{n-1} + (-1)^n \quad (n > 1).$$

Докажите, что при любом n, большем 1, a_n делится на $n - 1$.

1024. Существуют ли у последовательности с общим членом

$$a_n = \sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}$$

члены, являющиеся натуральными числами?

Рассмотрим группу задач на последовательность Фибоначчи.

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность, два первых члена которой равны 1, а каждый следующий, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n > 2).$$

Первые ее члены таковы:

$$1;\ 1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 8;\ 13;\ 21;\ 34;\ 55;\ \ldots .$$

Эту последовательность ввел итальянский математик Л. Фибоначчи (1180–1240). Она широко применяется в теории чисел. Последовательность Фибоначчи упоминается в книге [18] (см. решения задач 12 и 124).

1025. Докажите, что член последовательности Фибоначчи является четным тогда и только тогда, когда его номер делится на 3.

△ Рассмотрим остатки от деления членов последовательности на 2. Для двух первых членов они равны 1, для третьего — 0, для четвертого и пятого — снова 1, для шестого — 0 и т. д. Остатки образуют следующую последовательность:

$$1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 0;\ \ldots .$$

Делимость или неделимость на 2 суммы двух соседних членов последовательности Фибоначчи сводится к делимости на 2 суммы их остатков. Так как здесь периодически повторяется группа 1, 1, 0, то ясно, что на 2 делятся те и только те члены последовательности Фибоначчи, номер которых делится на 3. ▲

1026. Найдите номера всех членов последовательности Фибоначчи, которые делятся на 3.

△ Вычисления показывают, что на 3 делятся члены последовательности с номерами 4, 8 и 12. По-видимому, так будет всегда, если номер члена делится на 4.

Для доказательства этой гипотезы составим последовательность остатков от деления членов данной последовательности на 3:

$$1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 2;\ 2;\ 1;\ 0;\ 1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 2;\ 2;\ 1;\ 0;\ \ldots .$$

А здесь периодически повторяется группа из 8 остатков:

$$1;\ 1;\ 2;\ 0;\ 2;\ 2;\ 1;\ 0.$$

Повторение связано с тем, что при сложении $1 + 2$ или $2 + 1$ сумма 3 заменяется на 0, а сумма $2 + 2 = 4$ — на 1 (в связи с тем, что $4 = 3 + 1$).

Ответ: все натуральные числа, делящиеся на 4. ▲

1027. Докажите, что член последовательности Фибоначчи делится на 4 тогда и только тогда, когда его номер делится на 6.

1028. Найдите номера всех членов последовательности Фибоначчи, которые делятся на 5.

1029. Докажите, что два любых соседних члена последовательности Фибоначчи взаимно просты.

1030. Рассмотрим последовательность

$$2;\ 6;\ 30;\ 210;\ \ldots,$$

в которой любой n-й член равен произведению n первых простых чисел. Найдите два члена последовательности, разность которых равна 30000.

1031*. Докажите, что любая бесконечная арифметическая прогрессия, составленная из натуральных чисел, содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

△ Пусть a — любой член арифметической прогрессии, d — ее разность. Тогда число

$$a + ad = a(1 + d)$$

также является членом этой прогрессии, поскольку n-й член арифметической прогрессии вычисляется по формуле

$$a_n = a_1 + d(n - 1).$$

Получилось, что прогрессия вместе с каждым a содержит и член $a(1 + d)$, а следовательно, и члены

$$a(1 + d)(1 + d) = a(1 + d)^2, \quad a(1 + d)^3, \ldots, a(1 + d)^n \quad (n \in N).$$

Но эти последние члены образуют бесконечную геометрическую прогрессию. ▲

1032*. У числовых последовательностей (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ b_1 = 2,\ b_2 = 1.$$

Найдите все числа, которые встречаются как в первой, так и во второй последовательности.

В следующем и двух последних пунктах мы рассмотрим или совсем короткие серии в две-три задачи, или одиночные задачи.

22.8. 5–7

Литература: [33], [36[В]], [39[В]], [41], [42], [43[В]], [48], [52], [57], [61], [62], [78], [101[В]].

1033. Какой цифрой оканчивается произведение любых пяти последовательных натуральных чисел?

1034. Произведение нескольких последовательных нечетных натуральных чисел оканчивается цифрой 7. Сколько в этом произведении множителей?

1035. Коля переехал в пятиэтажный дом, у которого первый и второй этажи во втором и третьем подъездах заняты под магазин. На каждой лестничной площадке 4 квартиры. Номер квартиры Коли — 37. На каком этаже живет Коля?

1036. Вдоль сторон квадратной площадки через каждые 2 м установлены столбики. Вдоль одной стороны установлено 36 столбиков. Каков периметр площадки? Сколько столбиков установлено вокруг всей площадки?

1037. Цифра десятков у двузначного числа в два раза меньше цифры единиц. Если эти цифры переставить, то получится число, большее первоначального на 36. Найдите это число.

1038. Из книги выпал ее кусок. Первая страница куска имеет номер 163, а номер последней состоит из тех же цифр, но записанных в другом порядке. Сколько листов выпало из книги?

△ Последняя страница куска имеет номер 316, так как он должен оканчиваться четной цифрой. Теперь находим число страниц, а затем и число листов куска:

$$316 - 162 = 154, \quad 154 : 2 = 77.$$

Ответ: 77. ▲

1039. Ученики седьмого класса получили 217 учебников. Каждый получил одинаковое количество книг. Сколько было семиклассников, и сколько учебников получил каждый из них?

1040. Сколько существует натуральных чисел, не превосходящих: а) 100; б) 1000, в записи которых имеется по меньшей мере одна тройка?

1041. В стозначном числе

$$12345678901234567890...1234567890$$

вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. В полученном пятидесятизначном числе вновь вычеркнули все цифры на нечетных местах. Вычеркивание продолжается до тех пор, пока не останется одна цифра. Какая это цифра?

1042. Существует ли натуральное число, произведение цифр которого равно 1560?

△ Разложим число 1560 на простые множители:

$$1560 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13.$$

Число 13 не является цифрой, поэтому такого натурального числа не существует.

Ответ: не существует. ▲

1043. Составлены все возможные суммы из пар двузначных чисел. Сколько среди этих сумм двузначных чисел и сколько трехзначных?

1044. В спортивном празднике участвуют ученики двух школ. Праздник состоит из соревнований в нескольких видах спорта. За победу в соревновании команда получает 3 очка, за ничью — 2 очка, за поражение — 1 очко. С каким счетом могли и с каким не могли закончиться соревнования:

$$21:17, \quad 22:18, \quad 18:17, \quad 19:13?$$

1045. Часы бьют по одному разу каждые полчаса и каждый час — число часов. Утром часы пустили. Сделав 37 ударов, они остановились. В котором часу это произошло?

1046. 21 шарик можно сложить в виде равностороннего треугольника:

$$21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6,$$

но нельзя сложить в виде квадрата. Из какого количества шариков, не превосходящего 50, можно сложить как равносторонний треугольник, так и квадрат?

1047. На одной трамвайной линии трамваи отправляются регулярно каждые 10 минут. Трамвай проходит линию из одного конца в другой за один час. Пассажир садится в вагон трамвая на одной конечной остановке и едет до другой конечной остановки. По дороге он считает встречные трамваи того же маршрута. Сколько трамваев он насчитает?

1048. Что больше и на сколько: сумма всех четных двузначных чисел или сумма всех нечетных двузначных чисел?

△ Сначала подсчитаем количество всех двузначных чисел. Однозначных и двузначных чисел всего 99 — от 1 до 99. Из них однозначных чисел 9. Следовательно, количество двузначных чисел равно $99 - 9 = 90$.

Из 90 двузначных чисел 45 четных и 45 нечетных. Разобьем все двузначные числа на пары:

$$10 \text{ и } 11, \quad 12 \text{ и } 13, \quad 14 \text{ и } 15, \ldots, 98 \text{ и } 99.$$

В каждой паре нечетное число больше четного на 1. Но так как таких пар 45, то сумма всех нечетных двузначных чисел больше суммы всех четных двузначных чисел на 45.

Ответ: вторая сумма больше на 45. ▲

1049. Найдите все такие натуральные числа x, не превосходящие 100, при которых числа x и $x + 1$ имеют нечетную сумму цифр.

1050. Некоторое натуральное число возвели в квадрат. Полученное трехзначное число записали в обратном порядке, получили простое число. Найдите все такие исходные числа.

1051. Произведение двух натуральных чисел — трехзначное число, записывающееся одинаковыми цифрами, а сумма — двузначное число, записывающееся одинаковыми цифрами. Найдите все такие пары чисел.

1052. В трех кучках находится по 22, 14 и 12 конфет. Как с помощью трех перекладываний уравнять число конфет во всех кучках, соблюдая при этом условие: из одной кучки в любую другую перекладывать лишь столько конфет, сколько их в этой другой кучке имеется?

1053. Продавщица продавала яйца. Одному покупателю она продала половину всех имевшихся у нее яиц и еще пол-яйца, второму — половину остатка и еще пол-яйца, третьему — половину нового остатка и еще пол-яйца, четвертому — половину последнего остатка и еще пол-яйца. После этого яиц у нее не осталось. Сколько яиц было у нее первоначально?

△ Будем решать задачу с конца.

После третьего покупателя у продавщицы осталось одно яйцо.

После второго — $2 \cdot 1 + 1 = 3$. Проверим: она продала третьему покупателю половину предыдущего остатка и еще пол-яйца, т. е. $3/2 + 1/2 = 2$, а осталось у нее $3 - 2 = 1$ яйцо. После первого покупателя у продавца осталось $2 \cdot 3 + 1 = 7$ яиц. (Проверьте!) Наконец, вначале у нее было $2 \cdot 7 + 1 = 15$ яиц.

Ответ: 15. ▲

1054. Магазин продал партию ткани в течение четырех дней. В первый день было продано 1/3 всего куска и еще 8 м, во второй — 1/4 остатка и еще 9 м, в третий — 1/5 нового остатка и еще 12 м, в четвертый — 1/6 последнего остатка и остальные 20 м. Сколько метров ткани было во всей партии?

1055. Четырехзначное число записано цифрами 0, 1, 2 и 3. Если к учетверенной первой цифре числа прибавить вторую, к учетверенной сумме прибавить третью цифру, эту сумму умножить на 4 и прибавить к произведению четвертую цифру, то получится 177. Найдите это число.

22.9. 7–9

Литература: [3], [17], [22], [29], [36], [44], [48], [52], [61], [62], [64], [78[в]], [101].

1056. Натуральные числа x и $x + 1$ имеют четные суммы цифр. Найдите все такие числа x среди первой тысячи натуральных чисел.

1057. Напишите два пятизначных числа, использовав все 10 цифр так, чтобы разность между ними была: а) наибольшей; б) наименьшей.

1058. Одно четырехзначное число составлено из последовательных цифр, идущих в порядке возрастания, второе — из тех же цифр, но идущих в порядке убывания, третье четырехзначное число записывается теми же цифрами. Найдите первое число, если сумма всех трех чисел равна 14364.

△ Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть исходное число равно 1234. Тогда нужно восстановить запись:

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\,4321 \\ \overline{abcd} \\ \hline 14364, \end{array}$$

где a, b, c, d — это те же цифры 1, 2, 3, 4, но расположенные в ином порядке.

Очевидно, здесь решений нет.

2) Пусть первое число равно 2345. Тем же способом устанавливаем, что и в этом случае решений нет.

3) Пусть первое число равно 3456. Получаем:

$$\begin{array}{r} 3456 \\ +\,6543 \\ \overline{abcd} \\ \hline 14364. \end{array}$$

Отсюда

$$\overline{abcd} = 14364 - (3456 + 6543) = 4365.$$

Так как число 4365 записывается теми же цифрами, что и два других слагаемых, то здесь решение есть.

4) Пусть первое число равно 4567, 5678 или 6789. Аналогичным путем выясняем, что ни в одном из этих трех случаев решений нет.

Ответ: 3456. ▲

1059. Сумма двух натуральных чисел равна 1465. Если к первому из них приписать справа цифру 5, а у второго зачеркнуть последнюю цифру, то получатся равные числа. Найдите эти числа.

1060. Каких натуральных чисел в пределах от 1 до 10000 больше: делящихся на 7, но не делящихся на 11, или делящихся на 11, но не делящихся на 7?

△ Сначала подсчитаем количество натуральных чисел от 1 до 10000, делящихся на 7, а также количество натуральных чисел в тех же границах, делящихся на 11. Первые из них образуют множество

$$7; \quad 14 = 7 \cdot 2; \quad 21 = 7 \cdot 3; \quad \ldots; \quad 7 \cdot 1428$$

(1428 получилось как частное от деления 10000 на 7 с остатком), а значит, количество таких чисел равно 1428. Вторые образуют множество

$$11; \quad 22 = 11 \cdot 2; \quad 33 = 11 \cdot 3; \ldots; 9999 = 11 \cdot 909,$$

а, следовательно, их количество равно 909.

Чисел, делящихся на 7, оказалось больше.

Если теперь отнять от тех и других те числа, которые делятся на 7 и на 11, то количество первых, т. е. таких, которые делятся на 7, но не делятся на 11, и останется большим.

Ответ: больше чисел, делящихся на 7, но не делящихся на 11. ▲

1061. В трех ящиках лежат конфеты. В первом ящике на 8 конфет меньше, чем в двух других вместе, а во втором — на 12 меньше, чем в первом и третьем вместе. Сколько конфет в третьем ящике?

△ Обозначим количество конфет в первом, втором и третьем ящиках соответственно через a, b и c. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a = b + c - 8, \\ b = a + c - 12. \end{cases}$$

Сложим эти уравнения почленно:

$$a + b = (a + b) + 2c - 20.$$

Тогда

$$2c - 20 = 0, \quad c = 10.$$

Ответ: 10. ▲

1062. Толя, Петя и Миша решали 50 задач, причем каждый из них решил 20 задач. Назовем задачу трудной, если ее решил только один из мальчиков, и легкой, если ее решили все трое. На сколько число трудных задач больше, чем число легких?

1063. Я и мой друг за три дня купили 24 марки. Сегодня я купил столько марок, сколько мой друг вчера и сегодня, зато позавчера он купил на 4 марки больше, чем я вчера и позавчера. Сколько марок купил каждый из нас?

1064. По окружности записано больше трех натуральных чисел, сумма которых равна 19. Суммы любых трех последовательных чисел равны между собой. Какие числа были записаны по окружности?

△ Обозначим эти числа в последовательном порядке через a_1, a_2, a_3, ..., a_n, где n — общее количество чисел. Тогда

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 + a_3 + a_4.$$

Отсюда $a_1 = a_4$.

Аналогично из равенств

$$a_2 + a_3 + a_4 = a_3 + a_4 + a_5, \quad a_3 + a_4 + a_5 = a_4 + a_5 + a_6$$

следует, что $a_2 = a_5$ и $a_3 = a_6$. И т. д.

Пусть

$$a_1 = a, \quad a_2 = b, \quad a_3 = c.$$

Рассмотрим три случая.

1) Пусть последнее из n чисел — a: $a_n = a$.

Тогда числа располагаются в следующем порядке:

$$a, b, c, a, b, c, ..., a, b, c, a.$$

По условию получаем:

$$a + b + c = c + a + a = a + a + b,$$

так как последнее число стоит на окружности рядом с первым.

Отсюда $a = b = c$.

2) Пусть $a_n = b$. Тогда числа располагаются таким образом:

$$a, b, c, a, b, c, ..., a, b, c, a, b.$$

Тем же способом устанавливаем, что $a = b = c$.

3) Пусть $a_n = c$. А этот случай невозможен, поскольку тогда сумма всех чисел делилась бы на 3.

Получилось, что все числа на окружности равны между собой. Так как число 19 — простое, то это возможно только тогда, когда каждое из чисел равно 1, а $n = 19$.

Ответ: 19 чисел, каждое из которых равно 1. ▲

1065. Сумма двух двузначных чисел вдвое больше третьего числа, у которого цифра десятков равна цифре десятков первого числа, а цифра единиц — цифре единиц второго. Докажите, что все три числа равны между собой.

1066. Сумма 13 различных натуральных чисел равна 92. Найдите эти числа.

1067. Коле в домашнем задании нужно было возвести некоторое натуральное число в квадрат. Вместо этого он по ошибке удвоил это число и получил двузначное число, записанное теми же цифрами, что и квадрат числа, но в обратном порядке. Каким должен быть верный ответ?

△ Обозначим первоначальное число через x, его квадрат — через $\overline{ab}$. Тогда

$$\begin{cases} x^2 = 10a + b, \\ 2x = 10b + a. \end{cases}$$

Отсюда видно, что число x однозначно.

Сложим уравнения этой системы:

$$x(x + 2) = 11(a + b).$$

Тогда или x, или $x + 2$ равно 11. Но равенство $x = 11$ невозможно, а при $x + 2 = 11$ находим:

$$x = 9, \quad \overline{ab} = 81.$$

Нужна еще проверка по второму уравнению системы. При $x = 9$, $a = 8$, $b = 1$ равенство выполняется.

Ответ: 81. ▲

1068. На доске написаны три различных двузначных числа. Нужно было два первых числа перемножить и произведение разделить на третье число. Школьник перепутал действия: первое число разделил на второе и частное умножил на третье число. В результате вместо верного ответа 96 он получил второе число. Какие три числа написаны на доске?

1069. Два двузначных простых числа получаются друг из друга перестановкой цифр, а их разность — точный квадрат. Какие это числа?

1070. Найдите три последовательных нечетных натуральных числа, сумма квадратов которых есть четырехзначное число, записывающееся одинаковыми цифрами.

1071. Пусть p — простое число. Сколько существует натуральных чисел:

а) меньших p и взаимно простых с p;

б) меньших p^2 и взаимно простых с p^2?

△ а) Количество натуральных чисел, меньших p и взаимно простых с p, равно $p - 1$ — это все натуральные числа, меньшие p.

б) Сначала подсчитаем количество натуральных чисел, не превосходящих p^2 и не взаимно простых с p^2. Это числа

$$p,\ 2p,\ 3p,\ \dots,\ (p-1)p,\ p^2.$$

Очевидно, таких чисел p. Тогда количество натуральных чисел, меньших p^2 и взаимно простых и с числом p, и с числом p^2, равно

$$p^2 - p = p(p-1).$$

Ответ: а) $p - 1$; б) $p(p - 1)$. ▲

1072. Пусть p_1 и p_2 — различные простые числа. Сколько существует натуральных чисел, меньших p_1p_2 и взаимно простых с p_1p_2?

1073. Найдите на плоскости какие-либо четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой, и такие, что все попарные расстояния между ними выражаются натуральными числами.

1074*. Найдите все такие рациональные числа x и y, для которых числа $x + \frac{1}{y}$ и $y + \frac{1}{x}$ являются натуральными.

△ Так как числа

$$x + \frac{1}{y} = \frac{xy+1}{y} \quad \text{и} \quad y + \frac{1}{x} = \frac{xy+1}{x}$$

положительны, то положительно и число

$$\frac{xy+1}{y} \cdot \frac{xy+1}{x} = \frac{(xy+1)^2}{xy},$$

откуда xy положительно. Но тогда число $xy + 1$ положительно, а следовательно, положительны и числа x и y.

Положим

$$x = \frac{a}{b}, \quad y = \frac{k}{n},$$

где a, b, k, n — натуральные числа, а дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{k}{n}$ несократимы.

Получаем:

$$\frac{xy+1}{y} = \left(\frac{ak}{bn} + 1\right) : \frac{k}{n} = \frac{ak+bn}{bk},$$

$$\frac{xy+1}{x} = \left(\frac{ak}{bn} + 1\right) : \frac{k}{n} = \frac{ak+bn}{ak}.$$

Последние дроби должны быть равны натуральным числам. Займемся первой из них.

Так как сумма $ak + bn$ делится на b, то ak делится на b. Но числа a и b взаимно простые, а тогда k делится на b.

Аналогично, так как сумма $ak + bn$ делится на k, то bn делится на k, откуда b делится на k.

Из делимостей $k \vdots b$ и $b \vdots k$ следует, что $k = b$.

Подобным же путем из того, что вторая дробь равна натуральному числу, выводим, что $n = a$.

Тогда эти дроби принимают следующий вид:

$$\frac{ak+bn}{bk} = \frac{ab+ba}{b^2} = \frac{2a}{b}, \quad \frac{ak+bn}{an} = \frac{ab+ba}{a^2} = \frac{2b}{a}.$$

Так как полученные дроби $\frac{2a}{b}$ и $\frac{2b}{a}$ равны натуральным числам, а числа a и b взаимно просты, то $2 \vdots a$ и $2 \vdots b$. Значит, числа a и b могут быть равны только 1 или 2.

Ответ: 1, 1; 2, 1/2; 1/2, 2. ▲

1075*. a и b — целые числа, отличные от нуля. Найдите все случаи, когда сумма $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ — число целое.

1076*. Найдите две несократимые положительные дроби, сумма которых равна их произведению. Укажите все решения.

1077*. Найдите все натуральные числа k и n, для которых число

$$\frac{7k+15n-1}{3k+4n}$$

является натуральным.

△ При натуральных k и n справедливо неравенство

$$2 < \frac{7k+15n-1}{3k+4n} < 4$$

(проверьте!). Следовательно, эта дробь может быть равной только 3:

$$\frac{7k+15n-1}{3k+4n} = 3, \quad 7k + 15n - 1 = 9k + 12n, \quad 3n - 2k = 1.$$

Для решения последнего уравнения выразим из него k:

$$k = \frac{3n-1}{2}.$$

Отсюда видно, что для числа n имеется единственное ограничение — оно должно быть нечетным: $n = 2a - 1$ ($a \in N$). Тогда

$$k = \frac{3(2a-1)-1}{2} = \frac{6a-4}{2} = 3a - 2.$$

Ответ: $k = 3a - 2$, $n = 2a - 1$ ($a \in N$). ▲

1078*. Найдите все натуральные x и y, для которых число

$$\frac{8x+4y+17}{5x+3y-3}$$

является натуральным.

1079*. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком, причем Оля выпила четверть всего молока и шестую часть всего кофе. Сколько человек в семье?

1080. Постройте пример бесконечной арифметической прогрессии с целочисленными членами, не содержащей ни одного числа, составленного из одинаковых цифр.

1081. Найдите такое трехзначное число, что если к нему прибавить 990, то получится число с разными цифрами, образующими геометрическую прогрессию.

1082. Сколько нужно взять слагаемых суммы

$$1 + 2 + 3 + ... + n$$

для того, чтобы получилось трехзначное число, записывающееся одинаковыми цифрами?

△ Обозначим это трехзначное число через $\overline{aaa}$. Применяя формулу суммы n членов арифметической прогрессии, получаем:

$$\frac{n(n+1)}{2} = \overline{aaa} = a \cdot 111, \quad n(n+1) = 2 \cdot a \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a.$$

Отсюда или n, или $n + 1$ делится на 37, а точнее, равно 37, так как если, скажем, $n + 1$ равно хотя бы $2 \cdot 37 = 74$, то $n = 3a \leqslant 27$, а это невозможно.

Пусть $n + 1 = 37$, т. е. $n = 36$. Тогда

$$36 \cdot 37 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a, \quad 36 = 6a, \quad a = 6.$$

Пусть $n = 37$. Получаем:

$$37 \cdot 38 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a, \quad 3a = 19.$$

Но последнее равенство невозможно.

Ответ: 36. ▲

1083. Может ли число

$$1 + 2 + 3 + ... + n$$

при каком-либо n оканчиваться: а) на 1999; б) на 2000?

1084. Можно ли из натуральных чисел от 1 до 100 выбрать 72 числа так, чтобы их сумма равнялась сумме остальных 28 чисел?

1085*. Несколько натуральных чисел образуют арифметическую прогрессию, начиная с четного числа. Сумма нечетных членов прогрессии равна 33, четных — 44. Найдите прогрессию и число ее членов. Укажите все решения.

△ Обозначим первый член арифметической прогрессии через $2a$ ($a \in N$), разность — через d, число членов — через n. Применим формулу

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} n$$

для суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$\frac{4a+d(n-1)}{2}n=77, \quad (4a+d(n-1))n=2\cdot 7\cdot 11.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть n нечетно.

Тогда n равно 7, 11 или 77. Последняя возможность отпадает сразу, так как в этом случае сумма в скобках равна 2, а это исключается.

Пусть $n=7$. Получаем:

$$(4a+6d)\cdot 7=2\cdot 7\cdot 11, \quad 2a+3d=11.$$

Отсюда или $a=1$, $d=3$, или $a=4$, $d=1$. Имеем две арифметические прогрессии:

$$2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ 17;\ 20,$$

$$8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12;\ 13;\ 14.$$

Для каждой из них сумма нечетных членов равна 33, а значит, сумма четных — 44, поэтому обе они удовлетворяют условиям задачи.

Пусть $n=11$. Тогда

$$(4a+6d)\cdot 11=2\cdot 7\cdot 11, \quad 2a+3d=7.$$

Отсюда $a=2$, $d=1$. Получаем прогрессию из 11 членов:

$$4;\ 5;\ 6;\ \ldots;\ 14.$$

Но здесь сумма нечетных членов больше 33:

$$5+7+9+11+13=45>33,$$

следовательно, этот случай невозможен.

2) Пусть n четно.

Тогда n равно 14, 22 или 154. Проверьте самостоятельно, что ни в одном из этих трех случаев решений нет.

Ответ: 2; 5; 8; 11; 14; 17; 20 или 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14. Число членов обеих прогрессий равно 7. ▲

1086*. Чемпионат страны по футболу проходил в два круга. По его окончании выяснилось, что количество очков, набранных командами, составляет арифметическую прогрессию и команда, занявшая последнее место, набрала 17 очков. Сколько команд участвовало в чемпионате?

22.10. 9–11

Литература: [6], [14], [16], [19], [22], [35], [40], [48], [49], [63], [67], [70[в]], [77], [83].

1087. Рассмотрим некоторое двузначное число, например, 17. Умножим это число на 20 и произведение сложим с исходным числом, получим число 357. Это число умножим на 481, получим число 171717, в записи которого трижды повторяется исходное число 17. Это удивительное свойство выполняется для любого двузначного числа. Почему?

1088. Докажите, что если a, b, c — целые числа и $ab + bc + ca = 1$, то число

$$(1 + a^2)(a + b^2)(1 + c^2)$$

есть точный квадрат.

1089. Дана бесконечная арифметическая прогрессия 3; 16; 29; 42; ... . Найдите:

а) наименьший член последовательности, записывающийся с помощью одних семерок;

б) все такие члены.

△ а) Для того чтобы найти наименьший член последовательности, обладающий этим свойством, нужно делить число, записывающееся одними семерками, на разность прогрессии 13 до тех пор, пока в первый раз не получится остаток, равный 3. Таким числом является 7777:

$$7777 = 13 \cdot 598 + 3.$$

б) Найдем следующий член последовательности с тем же свойством аналогичным образом. Он записывается 10 семерками:

$$7777777777 = 13 \cdot 598290598 + 3.$$

Очевидно, следующие члены с таким же свойством записываются 16, 22, 28, ... семерками.

Ответ: а) 7777; б) 777...7, где количество семерок равно $6k + 4$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). ▲

1090. Существуют ли члены бесконечной арифметической прогрессии 2; 9; 16; 23; ..., которые записываются одними тройками?

1091. Дан многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами. Известно, что $f(0) = p$, где p — простое число, и при некотором натуральном a, меньшем p, $f(a) = a$. Найдите a.

1092. Решите уравнение

$$ax^2 + bx + b = 0$$

при всевозможных значениях параметров a и b, если известно, что все его корни — числа целые.

△ Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$.

Обозначим корни квадратного уравнения через x_1 и x_2. По теореме Виета получаем:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{b}{a}. \end{cases}$$

Сложим уравнения этой системы:

$$x_1 + x_2 + x_1 x_2 = 0.$$

Решим последнее уравнение. Для этого выразим x_2 через x_1:

$$x_2 = -\frac{x_1}{x_1+1} = -\frac{(x_1+1)-1}{x_1+1} = -1 + \frac{1}{x_1+1}.$$

Тогда или $x_1 + 1 = 1$, т. е. $x_1 = 0$, или $x_1 + 1 = -1$, т. е. $x_1 = -2$. Значение $x_1 = 0$ нужно отбросить, иначе $b = 0$. При $x_1 = -2$ найдем x_2: $x_2 = -2$.

Так как

$$\frac{b}{a} = x_1 \cdot x_2 = (-2) \cdot (-2) = 4,$$

то для того, чтобы это решение существовало, необходимо, чтобы $b = 4a$. При $b \neq 4a$ неверно, что оба корня квадратного уравнения целые числа.

2) Пусть $a = 0$, $b \neq 0$.

В этом случае данное уравнение превращается в линейное:

$$bx + b = 0.$$

Находим из него x: $x = -1$.

3) Пусть $a \neq 0$, $b = 0$.

Тогда уравнение имеет единственный корень: $x = 0$.

4) Пусть $a = 0$, $b = 0$.

Уравнение принимает вид:

$$0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 0 = 0.$$

Ему удовлетворяют любые значения x, в том числе и нецелые, значит, этот случай не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: если $ab \neq 0$ и $b = 4a$, то $x_1 = x_2 = -2$; если $ab \neq 0$ и $b \neq 4a$ или $a = b = 0$, то решений нет; если $a = 0$, $b \neq 0$, то $x = -1$; если $a \neq 0$, $b = 0$, то $x = 0$. ▲

1093. Корни уравнения

$$x^2 + ax + b + 1 = 0,$$

где a и b — параметры, являются натуральными числами. Докажите, что число $a^2 + b^2$ составное.

1094. Докажите, что многочлен $y = 2x^{1998} + 5$ нельзя представить в виде суммы квадратов: а) двух; б) трех многочленов с целыми коэффициентами.

1095. Существует ли многозначное число, равное произведению своих цифр?

1096. Пусть $2a$, $a + b$ и c — целые числа. Докажите, что квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

при любом целом x принимает целое значение.

△ Достаточно доказать, что выражение $ax^2 + bx$ принимает только целые значения. Преобразуем его следующим образом:

$$ax^2 + bx = (ax^2 - ax) + (ax + bx) = 2a\frac{x(x-1)}{2} + (a+b)x.$$

Так как $2a$, $\frac{x(x-1)}{2}$, $a + b$ и x принимают целые значения, то и $ax^2 + bx$ принимает только целые значения. ▲

1097*. Докажите, что если квадратный трехчлен с переменной x принимает целые значения при каких-либо трех последовательных целых значениях x, то он принимает целое значение при любом целом значении x.

1098. Найдите все натуральные n, при которых число $n^4 + n^2$ делится на $2n + 1$.

1099. Может ли сумма 1000 последовательных нечетных чисел быть шестой степенью натурального числа?

1100. В записи

$$* 1 * 2 * 3 * ... * 2001 = 3$$

расставьте хотя бы одним способом вместо звездочек плюсы и минусы так, чтобы получилось верное равенство.

1101*. Найдите все натуральные n, при которых в выражении

$$* 1 * 2 * 3 * ... * n = n + 1$$

можно вместо звездочек расставить знаки плюс и минус так, чтобы получилось верное равенство.

△ Сначала заменим все звездочки знаком плюс. Получим:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

При замене в дальнейшем части знаков плюс на минус четность суммы не меняется. Следовательно, число $\frac{n(n+1)}{2}$ должно иметь ту же четность, что и число $n + 1$. Но тогда разность этих чисел четна. Найдем ее:

$$\frac{n(n+1)}{2} - (n+1) = \frac{(n+1)(n-2)}{2}.$$

В таком случае произведение $(n + 1)(n - 2)$ будет делиться на 4. Поскольку множители $n + 1$ и $n - 2$ имеют разную четность, то на 4 делится только один из них.

Пока что мы с вами установили следующее: если выполняется исходное равенство, то $n + 1$ или $n - 2$ делится на 4.

Докажем обратное утверждение. При этом разберем две возможности.

1) Пусть $n + 1$ делится на 4:

$$n + 1 = 4k, \quad n = 4k - 1 \quad (k \in N).$$

Преобразуем n следующим образом:

$$n = (4k - 4) + (4 - 1) = 4(k - 1) + 3 = 4m + 3,$$

где $m = k - 1$ и m принимает целые неотрицательные значения.

Случай $m = 0$ очевиден: $-1 + 2 + 3 = 4$. Пусть $m \geqslant 1$. Расставим знаки плюс и минус следующим образом:

$$(-1 + 2 + 3 - 4) + (-5 + 6 + 7 - 8) + ... + (-(4m - 3) + (4m - 2) + (4m - 1) - 4m) -$$
$$- (4m + 1) + (4m + 2) + (4m + 3) = 0 \cdot m + 4 \cdot m + 4 = n + 1.$$

2) Пусть $n - 2$ делится на 4:

$$n - 2 = 4k, \quad n = 4k + 2, \quad (k = 0, 1, 2, ...).$$

Случай $k = 0$ очевиден. Пусть k — натуральное число. Расставим знаки плюс и минус в исходном выражении так:

$$(1 + 2 - 3 - 4) + (5 + 6 - 7 - 8) + \ldots + ((4k - 3) + (4k - 2) - (4k - 1) - 4k) +$$

$$+ (4k + 1) + (4k + 2) = -4k + (4k + 1) + (4k + 2) = 4k + 3 = n + 1.$$

Ответ: $n = 4k + 2$ или $n = 4k + 3$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$. ▲

1102*. Имеется n гирек с массами 1, 2, 3, ..., n г. Найдите все натуральные n, при которых гирьки можно разложить на три равные по массе кучки.

1103*. Найдите все натуральные n, при которых множество натуральных чисел от 1 до n можно разбить на две группы с одинаковыми суммами чисел.

1104*. Пусть a — любое натуральное число, большее 1. Существует ли такое натуральное число $n > 1$, что множество чисел

$$a, a^2, a^3, \ldots, a^n$$

можно разбить на два подмножества с одинаковыми суммами чисел?

1105. Найдите все натуральные $n > 2$, при которых число n^{n-2} записывается $n - 2$ цифрами.

1106*. ЭВМ напечатала два числа: 2^{1999} и 5^{1999}. Сколько всего цифр она при этом напечатала?

1107. Докажите, что среди дробей

$$\frac{1}{1000}, \frac{2}{1000}, \frac{3}{1000}, \ldots, \frac{99}{1000}$$

число несократимых дробей четно.

1108*. Загаданы два натуральных числа. Математику A сообщили их сумму, а математику B — сумму их квадратов. Если они соединят свои сведения, то, разумеется, найдут оба числа. Но они узнали эти числа в результате следующего разговора:

B: — Я не знаю, какие это числа.

A: — Их сумма не меньше 10.

B: — Тогда я знаю, какие это числа.

Что это за числа?

△ Обозначим искомые натуральные числа через x и y.

Так как математик B первоначально не знал, какие это числа, то существует еще одна такая пара натуральных чисел a и b, что

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Эти пары отличаются друг от друга тем, что

$$x + y \geqslant 10, \quad a + b < 10.$$

16 Зак. 579

Тогда $(x + y)^2 \geqslant 100$. Получаем:

$$(x^2 + y^2) + (x^2 + y^2) \geqslant x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2 \geqslant 100,$$

$$2(x^2 + y^2) \geqslant 100, \quad x^2 + y^2 \geqslant 50.$$

С другой стороны, $(a + b)^2 < 100$. Будем иметь:

$$50 \leqslant x^2 + y^2 = a^2 + b^2 < (a + b)^2 < 100.$$

Из полученного неравенства

$$50 \leqslant (a + b)^2 < 100$$

следует, что

$$5\sqrt{2} \leqslant a + b < 10.$$

Поэтому $a + b = 8$ или $a + b = 9$. Рассмотрим обе возможности.

1) Пусть $a + b = 8$.

Тогда a может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, а b — соответственно значения 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Значит, сумма $a^2 + b^2$ может принимать только значения 50, 40, 32 и 32. Но так как $x^2 + y^2 \geqslant 50$, то $a^2 + b^2 \geqslant 50$, поэтому подходит только $a^2 + b^2 = 50$. Однако число 50 можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел лишь одним способом: $50 = 7^2 + 1^2$. (Случай $50 = 5^2 + 5^2$ невозможен, поскольку в этом случае $a = b = 5$, а должно выполняться неравенство $a + b < 10$.) Следовательно, возможность $a + b = 8$ отпадает.

2) Пусть $a + b = 9$.

Тем же способом находим, что $a = 8$, $b = 1$ (или $a = 1$, $b = 8$). При этом

$$8^2 + 1^2 = 65 = 7^2 + 4^2.$$

Значит, числа 7 и 4 и являются искомыми.

Ответ: 7 и 4. ▲

1109*. Натуральное число n таково, что число $n^2 + 1$ десятизначно. Докажите, что в записи этого десятизначного числа имеются две одинаковые цифры.

1110*. Докажите, что число

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

ни при каком натуральном $n > 1$ не является целым.

△ Возьмем слагаемое суммы с наибольшей степенью двойки в знаменателе. Такое слагаемое единственно, поскольку для любого данного натурального $n > 1$ существует единственное натуральное число k, которое удовлетворяет неравенству

$$2^k \leqslant n < 2^{k+1}.$$

После приведения суммы к общему знаменателю знаменатель получающейся дроби будет четным, а числитель нечетным, так как числитель содержит только одно нечетное слагаемое, соответствующее дроби $\frac{1}{2^k}$, поэтому числитель не может делиться без остатка на знаменатель. ▲

1111*. Докажите, что число

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}$$

ни при каком натуральном n не является целым.

1112*. Докажите, что сумма всех дробей вида $\frac{1}{kn}$, где k и n — натуральные числа, удовлетворяющие неравенству

$$1 \leqslant k < n \leqslant 2000,$$

не является целым числом.

1113*. Число

$$1010101\ldots0101$$

делится на 9999. Сколько единиц может быть в записи этого числа? Укажите все случаи.

△ Разложим число 9999 на простые множители:

$$9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101.$$

По признакам делимости на 9 и 11 число единиц в записи исходного числа должно делиться на 9 и 11.

На 101 это число делится тогда и только тогда, когда без учета первых трех цифр в его записи повторяется набор 0101, а значит, общее число единиц четно. Следовательно, число единиц должно делиться на произведение $2 \cdot 99 = 198$.

Ответ: $198k$ ($k \in N$). ▲

1114*. Найдите все простые числа, которые могут быть делителями чисел вида 111...1.

△ Числа вида 11...1 не делятся ни на 2, ни на 5. Пусть p — любое простое число, отличное от 2 и 5. Выпишем последовательность из $p+1$ чисел

$$1, 11, 111, \ldots, 111\ldots1$$

(последнее число записывается $p+1$ единицей).

По принципу Дирихле среди этих чисел найдутся два числа, которые при делении на p дают одинаковые остатки, т. е. такие, что их разность делится на p (см., например, [18], утверждение задачи 262). Обозначим эти числа через 111...1 (k единиц, где $k \in N$) и 111...1 ($k+l$ единиц, где $l \in N$).

Вычтем из второго, большего, числа меньшее, получим число

$$111\ldots1000\ldots0 \quad (l \text{ единиц, } k \text{ нулей}),$$

которое по-предыдущему делится на p. Отсюда число 111...1 (l единиц) делится на p.

Ответ: все простые числа, кроме 2 и 5. ▲

1115*. Докажите, что число

$$\frac{(3n)!}{n! \cdot 6^n}$$

при любом натуральном n является целым.

1116*. Найдите все натуральные числа $n > 1$, для которых оба числа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражаются конечными десятичными дробями.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1. Восстановление знаков действий

1. $888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000$. **2.** $21 : (8 - 5) \cdot 2 + 6 : 3 = 16$. **3.** $9 \cdot (6 + 14) : (2 + 2) : 3 + 7 = 22$. **5.** $999 + 999 + 9 - 9 = 1998$. **6.** Например, $1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100$. **7.** $9 + 7 - 3 - 5 + 2 = 10$. **8.** 2, 4, 9, 11, 13, 22, 110, 112. **9.** Например, $123 + 4 - 5 - 67 = 55$. **11.** $333 \cdot 3 + 3 : 3 = 1000$. **12. а)** Например, $5 \cdot 5 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100$; **б)** $(5 + 5) \cdot (5 + 5) = 100$. **14.** Например, $98 - 7 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 100$. **15. а)** Можно: $33 \cdot 3 + 3 : 3$; **б)** нельзя. **16. а)** $2 - 2 : 2 = 1$; **б)** $2 \cdot 2 : 2 = 2$; **в)** $2 + 2 : 2 = 3$. **17. а)** Например, $22 : 22 = 1$; **б)** $2 : 2 + 2 : 2 = 2$; **в)** например, $2 \cdot 2 - 2 : 2 = 3$; **г)** например, $2 + 2 + 2 - 2 = 4$; **д)** $2 + 2 + 2 : 2 = 5$; **е)** $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 = 6$; **ж)** например, $2 + 2 + 2 + 2 = 8$; **з)** $22 : 2 - 2 = 9$; **и)** $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 = 10$. **18. а)** $222 - 22 = 200$; **б)** $(2 \cdot 2 \cdot 2 + 2) \cdot (22 - 2) = 200$; **в)** например, $2222 : 22 \cdot 2 - 2 = 200$; **г)** например, $(22 + 2 + 2 : 2) \cdot (2 + 2 + 2 + 2) = 200$. **19. а)** Например, $77 : 77 = 1$; **б)** $7 : 7 + 7 : 7 = 2$; **в)** $(7 + 7 + 7) : 7 = 3$; **г)** $77 : 7 - 7 = 4$; **д)** $7 - (7 + 7) : 7 = 5$; **е)** $(7 \cdot 7 - 7) : 7 = 6$; **ж)** $7 + (7 - 7) \cdot 7 = 7$; **з)** $(7 \cdot 7 + 7) : 7 = 8$; **и)** $7 + (7 + 7) : 7 = 9$; **к)** $(77 - 7) : 7 = 10$. **21.** $4^4 = 256$. **22. а)** 2^{22}; **б)** 3^{33}; **в)** 5^{5^5}. **23.** 11^{11}.

§ 2. Восстановление цифр натуральных чисел

25. $100 - 99 = 1$. **26.** $91 \cdot 10 = 910$. **27.** Не существуют. **29.** $10 \cdot 1 - 9 = 1$. **30.** $101 \cdot 9 = 909$, $111 \cdot 9 = 999$. **31.** 12. **32. а)** $643 \cdot 11 = 7073$; **б)** $37 \cdot 26 = 962$. **34. а)** $45 \cdot 62 = 2790$; **б)** $66 \cdot 11 = 726$; **в)** $124 \cdot 97 = 12028$. **36. а)** $115 \cdot 98 = 11270$ или $120 \cdot 98 = 11760$; **б)** $97 \cdot 11 = 1067$; **в)** $115 \cdot 98 = 11270$. **37.** Вторая цифра второго множителя равна 9. Но его первая цифра должна быть больше 9, а это невозможно. **39.** $11868 : 12 = 989$. **41.** 2664. **42.** 45. **44. а)** $97 \cdot 11 = 1067$; **б)** $23 \cdot 34 = 782$; **в)** $58 \cdot 91 = 5278$; **г)** $19 \cdot 59 = 1121$. Так как произведение оканчивается на 1, то последние цифры множителей равны 1 и 1, или 3 и 7, или 7 и 3, или 9 и 9. Далее нужно перебрать все четыре случая. **46. а)** $124 \cdot 97 = 12028$; **б)** $19 \cdot 53 = 1007$; **в)** $505 \cdot 101 = 51005$ или $101 \cdot 505 = 51005$. **48. а)** $1431 : 27 = 53$; **б)** $100034 : 11 = 9094$. Первая цифра делимого — 1, а первая цифра первого произведения — 9. Аналогично первая цифра трехзначного числа, полученного после первого вычитания и сноса двух цифр, равна 1, а первая цифра второго произведения — 9. Тогда первые три цифры делимого образуют число 100, а первое произведение равно 99. Но число 99 получилось при умножении двузначного делителя на первую цифру частного. Далее нужно рассмотреть случаи $99 \cdot 1$, $33 \cdot 3$ и $11 \cdot 9$. **49.** $\begin{array}{r|l} -\,103 & 48 \\ \underline{96} & 2 \\ 7 & \end{array}$. Первая цифра делимого равна 1, вторая — 0, а первая цифра произведения делителя на частное — 9. Тогда это произведение является одним из чисел 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99. При этом числа 90 и 91 отпадают, поскольку все цифры записи должны быть различны, а цифры 0 и 1 уже встречались; число 99 — тоже (две равные цифры). Возьмем число 92 и представим его в виде произведения двузначного числа на однозначное всеми возможными способами: $92 = 46 \cdot 2 = 23 \cdot 4$. Но оба варианта невозможны, так как в каждом из них цифра 2 встречается дважды. Аналогично разбираются остальные случаи.

§ 3. Числовые ребусы

51. а) $99 + 99 = 198$; **б)** $495 + 459 = 954$. Представим ребус в виде $\begin{array}{r} КИС \\ +\,КСИ \\ \hline ИСК \end{array}$. Присмотримся ко второму столбцу: при каком И сумма И + С (плюс, возможно, еще 1) оканчивается цифрой С, равной одному из слагаемых? Только при И = 0 или И = 9. Но случай И = 0 невозможен, поскольку первая цифра суммы не должна быть равна нулю. Остается И = 9. Теперь из первого столбца можно найти К. **52. а)** $37 \times 3 = 111$; **б)** $3 \times 7 \times 37 = 777$; **в)** $77 \times 713 \times 13 = 713713$. Число ABCABC делится на число ABC : ABCABC = ABC × 1001, а $1001 = 7 \times 11 \times 13$. **54.** $27 \times 37 = 999$. **55. а)** $90909 + 10101 = 101010$; **б)** $8126 + 8126 = 16252$. **56.** Всего различных цифр — 10 (от 0 до 9), а в ребусе их 11. **57. а)** Имеет, и даже 8 решений: ABC = 210, 310, 410, 510, 610, 710, 810, 910; **б)** не имеет. Представим число ABCK в виде 100 × AB + CK. Тогда 100 × AB + + CK = AB × CK, (100 × AB – AB × CK) + CK = 0, AB × (100 – CK) + CK = 0. Но последнее равенство невозможно, поскольку его левая часть положительна. **58. а)** $1402 \times 7 = 9814$; **б)** $23958 \times 4 = 95832$; **в)** $10295 \times 8 = 82360$. Очевидно, О = 1, а цифра К четна. При этом цифра К не превосходит 2; даже при К = 3 число ОК = 13 при умножении на 8 дает не двузначное, а трехзначное число. Следовательно, К = 2 или К = 0. Далее нужно разобрать оба случая. **59.** $12345679 \times 9 = 111111111$. Так как А — последняя цифра квадрата числа К, то А может принимать значения 0, 1, 4, 5, 6, 9. Но значения А = 0 и А = 5 исключаются. Далее можно проверить каждое из произведений 111111111, 444444444, 666666666, 999999999: делится ли первое из них на 9, второе — на 2 и 8, третье — на 4, четвертое — на 3 и 7, а если делится, то получается ли в частном восьмизначное число. **61. а)** $128^2 = 16384$; **б)** $264^2 = 69696$. **62.** $333^3 = 36926037$. **63. а)** $19^2 = 361$; **б)** $2^7 = 128$; **в)** $7^4 = 2401$. **64.** $2^{2^{2^1}} = 16$. **66. а)** $6823 + 6823 = 13646$; **б)** $18969 + 18969 = 37938$; **в)** $649750 \times 3 = 1949250$. **67.** $23674 + 23674 = 47348$. Присмотритесь к сложениям в первом и четвертом столбцах. Докажите, что в этих столбцах может быть только одна возможность: Б + Б = Т, Е + Е = Т + 10. **68.** Из трех. **70. а)** $69730 + 69730 = 139460$; **б)** $85679 + 85679 = 171358$; **в)** $35977 + 35977 = 71954$;

г) 53864 + 53864 = 107728. **71.** ТРИ = 639, ПЯТЬ = 1065 или ТРИ = 891, ПЯТЬ = 1485. **72.** 125 и 521. **73.** ТРИ = 169, СТИХ = 2197, СПОРТ = 28561. **74.** ДВА $\times$ ШЕСТЬ < ДВА $\times$ 10^5 < ДВА $\times$ 10^5 + ДЦАТЬ = ДВАДЦАТЬ. **75.** 910919. Нужно разложить число БАОБАБ по степеням 10 и в полученной сумме выделить слагаемые, делящиеся на 101, например, 10^2 представить в виде $(10^2 + 1) - 1$, 10^3 — в виде $(10^3 + 10) - 10$ и т. д., а затем эти слагаемые из суммы выбросить.

§ 4. Четные и нечетные числа

76. По разные. **77.** Четно. **78.** Нечетна. **79.** Верно. **80.** Нельзя. **81.** Не может. **82.** Четно. **84. а)** Нечетна; **б)** четна. **85.** Всегда. Нужно рассмотреть два случая: когда сумма 11 чисел четна и когда она нечетна. В первом случае нужно вычеркнуть четное число (подумайте, почему оно существует), во втором — нечетное. **87. а)** Можно; **б)** нельзя. **88.** Ошибся. Одна из двух сумм является четной. **89.** Обозначим число матчей, проведенных первой, второй, третьей и т. д. командами, через a_1, a_2, a_3, ..., a_{15}. Допустим, что все эти 15 чисел нечетны. Подсчитаем общее число матчей, проведенных командами. Оно равно $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{15}}{2}$. Но числитель дроби — число нечетное как сумма нечетного числа нечетных слагаемых. Тогда общее число матчей — число дробное. Получили противоречие. Утверждение задачи — частный случай одной из теорем теории графов (см. например, [18], задача 36). **91.** Не может. **92.** Сумма 25 слагаемых $a_1 - b_1$, $a_2 - b_2$, ..., $a_{25} - b_{25}$ равна нулю, следовательно, среди них имеется четное. **95. а)** Нечетно; **б)** четно. **98.** Не может. Может получиться только нечетное число. **100.** Нельзя. **101.** Если имеется n точек и к ним добавляется еще $n - 1$ промежуточных точек, то общее число точек становится нечетным, так как $n + (n - 1) = 2n - 1$. **102.** Все четные a. Сумма $x^3 + 5x + 9$ при всех целых x нечетна (проверьте!). В таком случае произведение ax^2 должно быть четным при всех целых x. **104.** Обозначим число людей, которые имеют в компании нечетное число знакомых, через k, а число знакомых этих людей соответственно через a_1, a_2, ..., a_k. Кроме того, число людей, знакомых с четным числом членов компании, обозначим через n, а число знакомых этих людей соответственно через b_1, b_2, ..., b_n. Тогда общее число знакомств равно $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_k + b_1 + b_2 + ... + b_n}{2}$. Сумма $b_1 + b_2 + ... + b_n$ четна, так как все ее слагаемые четны. Тогда для того, чтобы эта дробь была равна целому числу, сумма $a_1 + a_2 + ... + a_k$ должна быть четной. Но все слагаемые последней суммы нечетны, поэтому число k слагаемых суммы может быть только четным. Утверждение задачи является частным случаем одной из теорем теории графов (см., например, [18], задача 36). Об этой теореме уже упоминалось выше в связи с решением задачи 89. **105.** Нельзя. **106.** Сумма номеров всех страниц нечетна. **107. а)** Не смогут; **б)** смогут. **112.** 31, 33, 35, 37, 39, 41. **115. а)** p нечетно, q четно; **б)** p и q нечетны. Значения функции $f(x)$ при всех целых x имеют одинаковую четность тогда и только тогда, когда каждое из чисел $f(x + 1) - f(x) = (x + 1)^2 + p(x + 1) + q - x^2 - px - q = 2x + 1 + p$ четно. Отсюда p нечетно. Дальнейшее зависит от четности или нечетности одного из значений $f(x)$, лучше всего $f(0) = q$.

§ 5. Признаки делимости

122. 2. **123.** Существует и единственна — 1. **125.** $x = 5$, $y = 0$. **126.** 11111111100. **127.** Уменьшаемое и вычитаемое состоят из одинаковых цифр, поэтому их разность делится на 3 (см. задачу 120), а 1999 не делится на 3. **128.** На 3 делится, на 9 не делится. **135.** 2 и 5. **136.** 1, 3, 5, 7 или 9. **138.** $a = 2$, $b = 3$ или $a = 7$, $b = 7$. **139.** 2, 3; 9, 3 или 6, 7. **144.** 0, 3 или 7, 7. **145.** $x = 1$, $y = 0$. **149.** 135, 630 или 765. **150.** 209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902. **153.** **а)** 888888888; **б)** 333333. **155.** 44415. **157.** 999. **159.** Нельзя. **160.** Можно, например, 9876523140.

§ 6. Задачи на делимость, связанные с теоремой Ферма

165. **а)** Все целые a, делящиеся на 3; **б)** все целые a; **в)** все целые a. **167.** Верно. **172.** Не делится. **174.** Верно. **175.** Все n, делящиеся на 3. **176.** По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = z^2$, где x и y — длины катетов, z — длина гипотенузы треугольника. Допустим, что числа x и y не делятся на 3. Тогда $z^2 = x^2 + y^2 = (3k + 1) + (3l + 1) = 3(k + l) + 2$, где k и l — целые неотрицательные числа. Но квадрат натурального числа z при делении на 3 не может давать в остатке 2. **182.** **а)** Неверно; **б)** верно; **в)** неверно; **г)** верно. **183.** Существуют: это все целые n, делящиеся на 5. **184.** Преобразуем данную сумму следующим образом: $(a - b)^5 + (b - c)^5 + (c - a)^5 = ((a - b)^5 - (a - b)) +$ $+ ((b - c)^5 - (b - c)) + ((c - a)^5 - (c - a))$. **186.** Все целые a. **187.** Верно. **188.** Утверждение верно. **190.** Верно. **192.** Утверждение верно.

§ 7. Задачи на делимость, связанные с разложением выражений $a^n \pm b^n$ на множители

200. Представьте 2^{n+1} в виде $2^n + 2^n$. **204.** Суммы $1^{1997} + 30^{1997}$, $2^{1997} + 29^{1997}$ и т. д. делятся на 31. **205.** Такие k существуют, это все нечетные k. **206.** Разложим данную сумму на множители: $12^m + 9^m + 8^m + 6^m = (4^m + 3^m) \times (3^m + 2^m)$. Кроме того, число 1991 разложим на простые множители: $1991 = 181 \cdot 11$. По условию m делится на 5 и нечетно, поэтому $(4^m + 3^m) \vdots (4^5 + 3^5)$, $(3^m + 2^m) \vdots (3^5 + 2^5)$. Кроме того, число $4^5 + 3^5$ делится на 181 (проверьте), а число $3^5 + 2^5$ — на 11. **209.** Все четные n. **210.** Все четные n. **212.** Делится. **213.** **а)** Не делится; **б)** делится. **215.** Все n, делящиеся на 9. **217.** Все нечетные n. **218.** Не существуют. **220.** Не существует. **221.** $-2, -1, 1, 2$. **223.** Все четные n. **224.** Все нечетные n. **226.** Верно. **227.** Все четные n. Так как $1972 = 68 \cdot 29$, то нужно исследовать делимость на 68 и на 29. **228.** Не существует. **231.** Делится. **234.** Все натуральные n. **237.** Делится. **238.** Не делится. **240.** Не существует. **241.** Все n, не делящиеся на 3. Рассмотрите случаи $n = 3k$, $n = 3k + 1$ и $n = 3k + 2$. **242.** Все n, делящиеся на 3. **243.** Все n, делящиеся на 4. **246.** Не существуют. **248.** $k = 1$, n — любое натуральное; $k = 2$, n нечетно. Разделим n на k с остатком: $n = ak + r$, где a — целое неотрицательное число, r — целое, причем $0 \leqslant r < k$. Получаем: $2^n + 1 = 2^{ak+r} + 1 =$ $= 2^r \cdot 2^{ak+1} + 1 = 2^r((2^{ak} - 1) + 1) + 1 = 2^r(2^{ak} - 1) + (2^r + 1)$. Так как $2^n + 1$ делится на $2^k - 1$ и $2^{ak} - 1$ делится на $2^k - 1$, то и $2^r + 1$ делится на $2^k - 1$. Отсюда число $2^r + 1$ не меньше $2^k - 1$. Следовательно, $2^k - 1 \leqslant 2^r + 1 \leqslant 2^k + 1$. Поскольку числа $2^k + 1$ и $2^k - 1$

отличаются на 2, то отсюда $2^r + 1 = 2^k - 1$ или $2^r + 1 = 2^k$. Далее нужно разобрать обе эти возможности.

§ 8. Разные задачи на делимость

250. Всегда. **252.** Это число делится на 11111. **253.** 142. Нужно перебрать все делители числа 1001. **255.** Составьте сумму $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ и преобразуйте ее. **259.** $n = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). **260. а)** $n = 6k$ ($k \in N$); **б)** $n = 5k$ ($k \in N$). **262.** Все $n > 1$. При $n = 2k$ (четном) составим число 10011001...1001, а при $n = 2k + 1$ (нечетном) — число 10101010011001...1001. **264.** Верно. **266.** Верно. **267.** Все целые x и y, делящиеся на 17. **269.** 7 и 8. **270.** Такие цифры не существуют. **271.** $\overline{abc} = 843$. **272.** $a = 4$, $b = 0$ или $a = b = 5$. **273.** $a = b = 3$ или $a = 7$, $b = 2$. **275.** 333. **276.** 734. **277.** 5105. **278. а)** 333336; **б)** 73190. **279. а)** 271; **б)** 488. **280.** 162. **282.** Не существует. **284.** Так как $a^2 - b^2 = (a^2 - 1) - (b^2 - 1)$, то далее достаточно применить утверждение задачи 281. **286.** Верно. **288.** Разделите многочлен $n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36$ на $n^2 - 1$. **290.** $-4, -1, 0, 1, 2, 5$. **292. а)** $-10, 2, 4, 16$; **б)** $-13, -3, -1, 9$. **294. а)** $-1, 0$; **б)** $-28, 2, 4, 34$. **296. а)** 2; **б)** 2. **298. а)** $0, 2, 7/3, 3, 7/2, 3 \pm \sqrt{2}$; **б)** $-6, -1, 2$. **299.** $-8, 57$. **300.** 1, 2. **301.** Например, 48, 49, 50. **302.** На 48. **303.** На 15. **306.** 329, 392, 518, 581. **307.** 19899999. Наименьшим числом с суммой цифр, равной 63, является семизначное число 9999999, но оно не делится на 7. Возьмем восьмизначное число с первой цифрой 1. Оно должно содержать одну цифру, равную 8, и шесть цифр, равных 9. С помощью перебора выясните, на каком месте будет стоять цифра 8. **308.** Перемножим числа $a + b$, $a - b$ и ab: $(a + b)(a - b)ab = ab(a^2 - b^2)$. С помощью утверждений опорных задач 162 и 163 из § 6 докажите, что полученное произведение делится на 3. **311.** $n = 5k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$). **312.** Так как сумма $a^2 + ab + b^2$ делится на 3, то и произведение $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ делится на 3. С другой стороны, разность $(a^3 - a) - (b^3 - b) = (a^3 - b^3) - (a - b)$ также делится на 3. Отсюда разность $a - b$ делится на 3: $a - b = 3k$, $a = b + 3k$ ($k \in Z$). Теперь получаем: $a^2 + ab + b^2 = (b + 3k)^2 + (b + 3k)b + b^2 = 3b^2 + 9bk$. Так как эта сумма по условию делится на 9, то $3b^2$ делится на 9, откуда b делится на 3. Но тогда и a делится на 3. **315.** Не может. Умножьте данную сумму на 2 и положите $2^n = a$. Теперь с помощью таблицы, подобной таблице из задачи 314, выясните, какие остатки может давать полученная сумма $a^2 + 2a + 2$ при делении на 7. **316. а)** Положите $n = 2k$; **б)** положите $n = 2k + 3$. **317.** Все n, не делящиеся на 4. **318.** Сначала докажите, что если, например, сумма $10a + 192b$ делится на число 101, являющееся простым, то разность $a - b$ делится на 101. **320.** Не существует. **322.** Существует, например, $a = -1$. **324.** 224, 624. **325.** 1352, 1734. **326.** 143, 143 или 167, 334. **327.** 166667333334. **331.** Например, $P(x) = \frac{1}{6}x(x + 1)(x + 2)$. **332.** Полагая $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, рассмотрите, например, значения $P(0)$, $P(1)$, $P(-1)$ и $P(2)$. **334.** q делится на 3, $p = 3k + 2$ ($k \in Z$). **336.** 1, 1; 1, 3; 3, 7. **337.** 1, 1; 1, 2; 2, 5; 4, 11; 5, 7. **339.** 2, 3, 7. **340.** 1, 1, 2. **341.** 2, 3, 7, 43. **342.** 102000564. **345.** Верно. **348.** Всегда. **353.** Не существует. **354.** Рассмотрите два случая: когда числа x, y и z дают разные остатки 0, 1 и 2 при делении на 3 и когда два из них, скажем, x и y, дают одинаковые остатки при делении на 3. **355.** 1, 2; 1, 4; 2, 4. **356.** Упростите разность $b(a^2 + ab + 1) - a(b^2 + ba + 1)$ и используйте тот факт, что она делится на $b^2 + ba + 1$.

§ 9. Простые и составные числа

357. Книг по туризму — 8, по шахматам — 14. Книг по шахматам больше. **358.** Не может. **360.** Может, если $a = 32$, $b = 15$. **362. а)** Не может; **б)** может, если остаток равен 49. **365.** 3, 4. **366. а)** 2; **б)** 3. **368. а)** Все a; **б)** все $a \neq 1$; **в)** все a. Прибавить и отнять a^2. **369.** $a = b = 1$. **370.** 6. **371.** Например, 18. **372.** Неверно, например, при $n = 4$ получаем составное число 841. **373. б)** Рассмотрите члены последовательности $34^2 + 1$, $164^2 + 1$, $294^2 + 1$, ... **374.** Составное. **375.** Отнимите и прибавьте 2. **377.** Данные числа принимают вид $1 + 10^4 + 10^8 + ... + 10^{4k}$. Преобразуем эту сумму, обозначая ее через S:

$$S = 10^{4k} + 10^{4(k-1)} + ... + 10^4 + 1 = \frac{1}{10^4 - 1}(10^4 - 1)(10^{4k} + 10^{4(k-1)} + ... + 10^4 + 1) =$$

$$= \frac{1}{10^4 - 1}(10^{4k+4} - 1) = \frac{1}{101} \cdot \frac{10^{2k+2} - 1}{99}(10^{2k+2} + 1).$$

Здесь число $10^{2k+2} - 1$ делится на $10^2 - 1 = 99$. При исследовании делимости на 101 рассмотрим два случая. 1) Пусть k четно. Тогда $k + 1$ нечетно. В этом случае $10^{2k+2} + 1 = ((10^2)^{k+1} + 1)\vdots(10^2 + 1)$. Следовательно, число S равно произведению двух натуральных чисел: $S = \dfrac{10^{2k+2} - 1}{99} \cdot \dfrac{10^{2k+2} + 1}{101}$, причем каждое из них больше 1. 2) Пусть k нечетно. Тогда $k + 1$ четно, откуда $10^{2k+2} - 1 = ((10^2)^{k+1} - 1)\vdots(10^2 + 1)$. В этом случае число S также равно произведению двух натуральных чисел: $S = \dfrac{10^{2k+2} - 1}{99 \cdot 101} \times (10^{2k+2} + 1) = \dfrac{10^{2k+2} - 1}{10^4 - 1}(10^{2k+2} + 1)$. Верно ли, что первое из них больше 1? Для этого нужно, чтобы $2k + 2 > 4$, т. е. $k > 1$. Следовательно, осталось рассмотреть еще случай $k = 1$. При $k = 1$ второй множитель равен $10^4 + 1 = 10001$. Но число 10001 — составное, так как делится на 73 (проверьте!). **378.** Данное число делится на 11. Выясните, какие остатки дают каждое из чисел 3^5 и 5^5 при делении на 11. **380.** 5, 11, 17, 23, 29. Из пяти натуральных чисел a, $a + 6$, $a + 12$, $a + 18$, $a + 24$ одно и только одно делится на 5 (докажите!), поэтому в качестве наименьшего члена арифметической прогрессии нужно взять число 5, являющееся простым. Отсюда следует, что арифметическая прогрессия уже с 6 членами, удовлетворяющая условиям задачи, не существует, а прогрессия с 5 членами единственна. **383.** 3. **384. а)** 2; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 5; **д)** 5. **385.** 3 или 7. **386. а)** 3; **б)** 3. **388.** $5 = 3 + 2 = 7 - 2$. **389. а)** $p = 2$, $q = 3$; $p = 3$, $q = 2$; **б)** 2 и 2; 2 и 3; **в)** 2 и 3. **390.** p — любое простое, $q = 2$; $p = 3$, q — любое простое. **392. а)** 2, 3, 5; **б)** 2, 3, 19. **395.** Утверждение верно. **396.** Число n делится на 3. **397.** Обратное утверждение неверно. Примером может служить число 111. **399. а)** Верно; **б)** верно. **400.** Преобразуем данное выражение: $(7n + a)^2 + 3 = 49n^2 + 14na + a^2 + 3 = n(49n + 14a) + (a^2 + 3)$. Если теперь взять любое значение n, делящееся на $a^2 + 3$, то полученное число будет составным. **403. а)** Предположим, что множество всех простых чисел вида $4k + 3$ конечно. Обозначим через n произведение всех таких чисел, положим $a = 4n + 3$.

Среди простых делителей числа a имеется по меньшей мере один того же вида. В самом деле, если бы все простые делители a имели вид $4k + 1$ (а простые числа, большие 2, при делении на 4 могут давать в остатке только 1 или 3), то и число a имело бы такой же вид, поскольку $(4k_1 + 1)(4k_2 + 1) = (16k_1k_2 + 4k_1 + 4k_2) + 1$. Обозначим этот простой делитель числа a через $b = 4c + 3$ ($c \in N$). Тогда $a\vdots b$, т. е. $(4n + 3)\vdots b$, и, кроме того, $n\vdots b$, так как n равно произведению всех чисел этого вида. Получаем:

$$\begin{array}{r} _{-}(4n+3)\vdots b \\ \underline{4n\vdots b} \\ 3\vdots b. \end{array}$$

Отсюда $b = 1$ или $b = 3$. Но в этом случае ни одно из равенств $4c + 3 = 1$ и $4c + 3 = 3$ при натуральном c невозможно. Мы пришли к противоречию.

§ 10. Деление с остатком

406. 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89. **407.** Остаток равен 5, частное — 103682. **409.** 332, 9, 36. **411.** Остаток равен 8, частное — $10q + 1$, где q — старое частное. **412.** Остаток равен 6, частное — $6q + 1$, где q — старое частное. **413.** 4 и 5. **417.** Верно. Докажите, что разность данных чисел делится на 281. **419.** 235. **421.** 89. **423.** 5075. **424.** 3988106. **426.** 38. Получается уравнение $(4q + r)^2 + 5 = 161q$. Далее перебор по r, где $r \in \{0; 1; 2; 3\}$. **428.** 1, 3, 599, 1797. **429.** 23. **430.** 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. Вычтем равенства $2k + 1 = nq_1 + r$ и $(2k + 1)^3 = nq_2 + r$ ($k = 0, 1, 2, ...$): $(2k + 1)^3 - (2k + 1) = n(q_2 - q_1)$, $(2k + 1) \cdot 4k(k + 1) = n(q_2 - q_1)$. Число в левой части последнего равенства делится на 3 и на 8. **432.** 22. **433.** 4. **435.** 1. **436.** 5. **437. а)** 1; **б)** 5; **в)** 12. **439. а)** 25; **б)** 5; **в)** 1944. **440.** При $p = 2, r = 3$, при $p = 3, r = 5$, при $p > 3, r = 2$. Рассмотрите случаи $p = 2$, $p = 3$ и $p > 3$. Докажите, что при $p > 3$ выполняется равенство $p^2 = 12a + 1$. **441.** 3. Число 2001 делится на 3. Если $2001^{2001} = a_1 + a_2 + ... + a_n$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ — натуральные, то получаем:

$$a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + ... + (a_n^3 - a_n) + (a_1 + a_2 + ... + a_n) =$$
$$= (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + ... + (a_n^3 - a_n) + 2001^{2001}.$$

Каждая из разностей в скобках делится на 6, а степень 2001^{2001} на 3 делится, а на 2 — нет, т. е. она имеет вид $3 \cdot (2k + 1) = 6k + 3$. Поэтому остаток от деления на 6 суммы кубов равен 3. **442.** 2.

§ 11. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

443. 49 и 98. **444.** 666, 1332 и 1998. **446.** 420, 20 или 140, 60. **448.** 121212. **450.** 3. **451.** На 56. **453.** 1. **455.** Из равенства НОД $(n, n + 1) = 1$ (см. утверждение задачи 454) следует равенство НОД $(2n, 2n + 2) = 2$. **457.** 1 или 3. **458. а)** Искомым является среднее число; **б)** подходит то из двух средних чисел, которое нечетно; **в)** если обозначить пять последовательных натуральных чисел через n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, то при n нечетном искомым является среднее число $n + 2$, а при n четном — то из чисел $n + 1$ и $n + 3$, которое не делится на 3. **460.** 1 или 19. **463.** На 5 при $a = 5k + 3$ ($k = 0, 1, 2, ...$). **464.** Введем обозначения: НОД $(k, n) = d_1$, НОД $(5k + 3n, 13k + 8n) = d_2$. Так как числа k и n делятся на d_1, то и числа $5k + 3n$ и $13k + 8n$ делятся на d_1. Тогда $d_2 \geqslant d_1$: ведь d_1 является общим делителем чисел $5k + 3n$ и $13k + 8n$, а d_2 — их наибольшим общим делителем. Так как числа $5k + 3n$ и $13k + 8n$ делятся на d_2, то на d_2 делятся числа

$5(13k + 8n) = 65k + 40n$, $13(5k + 3n) = 65k + 39n$, а следовательно, и их разность, равная n. Аналогично доказывается, что $k \vdots d_2$. Тогда $d_1 \geqslant d_2$. Из неравенств $d_2 \geqslant d_1$ и $d_1 \geqslant d_2$ следует, что $d_1 = d_2$. **465.** 7. **467.** Дробь несократима ни при каких натуральных n. **469.** 1. **470.** 1 или 3. **472. а)** На 3 при $a = 3k + 1$ ($k \in N$); **б)** дробь несократима ни при каких натуральных a. **475. а)** 319; **б)** 2142; **в)** 5148. **476. а)** На 3 при $n = 3k$ ($k \in N$); **б)** на 5 при $n = 5k$ ($k \in N$); **в)** на 7 при $n = 7k + 5$ ($k = 0, 1, 2, ...$). **480.** 91, когда девять чисел равны 91, а десятое — 182. **481.** 999 и 1000. **482.** 97, 99, 100. **483.** Через 36 дней. **484.** 11. **486.** 331,5 м. **488. а)** 419; **б)** $420n - 1$ ($n \in N$). **489.** 999. **490. а)** 119; **б)** $420a + 119$ ($a = 0, 1, 2, ...$). **493. а)** $n(n + 1)(n + 2)$, если n нечетно; $\frac{1}{2}n(n + 1)(n + 2)$, если n четно; **б)** $\frac{1}{2}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, если n не делится на 3; $\frac{1}{6}n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$, если n делится на 3. **494.** 9 и 25. **496.** 20 и 28. **497.** 2, 20 или 4, 10. **498.** 96 и 36. Переберите делители числа 288, большие 60. **500.** 54, 324 или 108, 162. **501.** 30, 60, 90 или 60, 90, 180. **503.** $\frac{700}{33}$. **504.** $\frac{77}{780}$. **506.** Неверно. Пример — числа 4, 6 и 9. **507.** 3, 36 или 9, 12. **508.** Верно.

§ 12. Перестановка и зачеркивание цифр в натуральном числе

511. 454 и 45. **512.** 1951, 951; 2451, 451. **513.** 672 и 67. **514.** 157, 57 и 15. **516.** 31, 62, 93; в каждом числе нужно зачеркивать первую цифру. **517.** 105, зачеркивать нужно среднюю цифру; 350, зачеркивать нужно первую цифру. **519. а)** Существует, например, 1999; **б)** не существует. **520.** 191, 791, 1391, 9191. **521.** 100, 200, 300, ..., 900, 105, 108, 405. По условию $\overline{a0b} = k \cdot \overline{ab}$, $100a + b = 10ka + kb$, где k — натуральное, $1 < k \leqslant 10$. Тогда $kb - b = b(k - 1) \vdots 10$. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от цифры b. 1) Пусть $b = 0$. Тогда трехзначное число принимает вид $\overline{a00}$. Оно больше числа $\overline{a0}$ в 10 раз; следовательно, здесь $k = 10$. Получаем девять чисел: 100, 200, 300, ..., 900. 2) Пусть b четно и отлично от нуля. Для того чтобы делимость $(k - 1)b \vdots 10$ выполнялась, нужно, чтобы $k - 1 = 5$, $k = 6$. Получаем: $100a + b = 60a + 6b$, $40a = 5b$, $b = 8a$, откуда $a = 1$, $b = 8$. Мы нашли число 108. 3) Пусть $b = 5$. Тогда $k - 1$ должно быть четным, т. е. k — нечетным. Получаем: $100a + 5 = 10ka + 5k$, $20a + 1 = 2ka + k$, $k = \frac{20a + 1}{2a + 1} = 10 - \frac{9}{2a + 1}$. Так как 9 делится на $2a + 1$, то $2a + 1 = 3$ или $2a + 1 = 9$, откуда $a = 1$ или $a = 4$. Находим числа 105 и 405. **522.** Все трехзначные числа, оканчивающиеся на нуль. **523.** 975. **525.** 103. **527.** 102564. **528.** 153846. **529.** 1012658227848. **530.** 157894736842105263. **531.** 421052631578947368. Это по существу задача того же типа, что и задачи 526—530, так как перенос первой цифры числа в конец можно заменить переносом последней цифры другого числа в начало, а уменьшение в 2 раза — увеличением в 2 раза. **533.** 142857. **534.** 285714. **535.** 142857 и 285714. **542.** 1782, 2673, 3564, 4455, 5346, 6237, 7128, 8019. **544.** Не существует. **545.** Не может. **546.** 1080, 1188, 1296. **547.** 157894736842105263. Обозначим искомое число через $15 \cdot 10^k + a$. Тогда $(15 \cdot 10^k + a) \cdot 5 = 100a + 15$, $3 \cdot (5 \cdot 10^k - 1) = 19a$. Нужно выяснить, при каком наименьшем k число $5 \cdot 10^k - 1 = 499...9$ (k девяток) делится на 19. Для этого нужно делить указанное число на 19 до тех пор, пока деление нацело не будет выполняться впервые. **548.** 469. **551. а)** Верно; **б)** неверно, например, для числа 21. **553. а)** Существует и единственно — 8712; **б)** не существует. **554.** Может, такое число единственно — 98901. **555.** Существует и единственно — 989901. **556. а)** 54; **б)** 594; **в)** 5994 или 5454. **557.** 954. Обозначим искомое число через $\overline{abc}$. Тогда $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$, где $a > c$. С другой стороны, эта разность равна одному из чисел $\overline{acb}$, $\overline{bca}$, $\overline{bac}$, $\overline{cba}$, $\overline{cab}$. Так как это последнее число делится на 9, то сумма $a + b + c$ делится на 9, т. е. равна 9, 18 или 27. Кроме того, то же число должно делиться на 11, а тогда делится на 11 соответственно одно из чисел $a + b - c$, $b + c - a$ или $a + c - b$, т. е. оно равно 0 или 11. Теперь нужно сопоставить каждое значение каждой из последних сумм со всеми значениями суммы $a + b + c$. При этом нужно учитывать, что сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность.

§ 13. Последние цифры натурального ряда

558. а) 0; **б)** 5; **в)** 9. **559. а)** 0; **б)** 6. **561. а)** 24; **б)** 80. **562.** 2000. **565. а)** 95; **б)** 115; **в)** 155. **568. а)** Не может; **б)** может; **в)** не может; **г)** может; **д)** не может; **е)** не может. **570. а)** 9; **б)** 3; **в)** 4. **571.** Не делится. **572.** 4. **573.** Не существуют. **575.** 76. **576. а)** $25 \times 25 = 625$; **б)** $625 \times 25 = 15625$. **578.** 625, 376. **579. а)** $376 \times 376 = 141376$; **б)** $625 \times 625 = 390625$; **в)** не существует; **г)** $425 \times 425 = 180625$. **580.** 9376 или 0625. **581.** 1 или 6. **583.** 0. **584.** В разложении этого произведения на простые множители содержится больше двоек, чем пятерок. Следовательно, те двойки, которые не вошли в пары с пятерками, при умножении на другие простые множители 3, 7, 11 и т. д. дадут в произведении четное число. **586. а)** 8; **б)** 4. **588. а)** 49; **б)** 96; **в)** 72. **589.** 8125. **591.** $38^2 = 1444$. **592.** $14^3 = 2744$, $64^3 = 262144$. **596.** Существует и единственно — $68^3 = 314432$. **597. а)** Существует и единственно — $683^3 = 318611987$; **б)** не существует. **598.** 19, 39, 59, 79, 99. Справедливо равенство $\overline{xy}^5 = (10x + y)^5 = (10x + y)(10x + y)(10x + y)(10x + y)(10x + y) = 100a + 50xy^4 + y^5$, где a — количество сотен числа $\overline{xy}^5$, а $50xy^4$ получается при сложении пяти слагаемых, каждое из которых равно $10x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 10xy^4$. Рассмотрите случаи: x четно, x нечетно, а во втором случае — подслучаи: y четно, y нечетно.

§ 14. Степень с натуральным показателем

599. 169, 196, 961. **600.** 361, 784, 529. **601.** 9216. Нужно начать с двузначного числа, являющегося точной четвертой степенью. **602. а)** Является; **б)** не является; **в)** является. **603. а)** Не является; **б)** является; **в)** является. **604.** 2^{60}. **605.** На 210. **606.** На 7350. **608.** Не может. **609. а)** Не может; **б)** может: $1331 = 11^3$. **613.** Не может. Это число делится на 2^2, но не делится на 2^3. **615. а)** 0, 1 или 2; **б)** 0, 1 или 3. **616. а)** Не может; **б)** не может; **в)** может, например, $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = 4$. **619.** Существует, например, $n = 209952$. **621.** 432. **622.** $2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^6$. **623.** $3025 = 55^2$. **624.** $55225 = 235^2$. **626.** $6084 = 78^2$. **627.** $371293 = 13^5$.

628. Например, 3, 4, 12, 84. Рассмотрим равенства $3^2 + 4^2 = 5^2$ и $5^2 + 12^2 = 13^2$. Из них следует, что $3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$. Теперь найдем такие натуральные числа x и y, что $13^2 + x^2 = y^2$, $y^2 - x^2 = 169$. **631.** Случай, когда все пять цифр числа нечетны, невозможен потому, что если последняя цифра точного квадрата нечетна, то предпоследняя должна быть четной (см. утверждение задачи 566 из § 13). Если же все они четны, т. е. равны 0, 2, 4, 6 и 8, то сумма цифр числа равна 20. Но 20 при делении на 3 дает в остатке 2, следовательно, и само число при делении на 3 дает остаток 2 (см. утверждение задачи 120 из § 5), а точный квадрат при делении на 3 не может давать в остатке 2 (см. утверждение задачи 163 из § 6). **632.** $7744 = 88^2$. Обозначим искомое число через $\overline{aabb}$. Тогда $\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11(100a + b) = 11(99a + (a + b))$. Так как оно является точным квадратом, то делится не только на 11, но и на 11^2. Отсюда $(a + b) \vdots 11$, т. е. $a + b = 11$. Далее нужно провести перебор всех значений цифр a и b, пользуясь равенством $a + b = 11$. **634.** Не может. **637.** $3249 = 57^2$. Обозначим искомый точный квадрат через $\overline{abcd}$. Тогда числа $\overline{abc}$ и $\overline{cd}$ также являются точными квадратами. Так как цифры c и d — последние цифры квадратов, то они могут принимать значения 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Отсюда число $\overline{cd}$ может принимать значения 00, 01, 04, 09, 16, 49, 64. Далее нужно перебрать все семь случаев в зависимости от $\overline{cd}$. **639.** Из равенства $(n - 1)^2 + n^2 + (n + 1)^2 = a^3$ $(n \in N, n > 1, a \in N)$ следует, что $3n^2 + 2 = a^3$. Тогда $a^3 - 2$ делится на 3, откуда $a = 3k + 2$, где k — целое неотрицательное. Подставьте значение $a = 3k + 2$ в равенство $a^3 = 3n^2 + 2$. **640.** $n = 6a^2 + 6a + 1$, где a — целое неотрицательное число. **641.** $n = 41$. Умножим равенство $n^2 - n + 41 = k^2$ $(k \in N)$ на 4 и преобразуем его следующим образом: $4n^2 - 4n + 164 = 4k^2$, $(2n - 1)^2 + 163 = 4k^2$, $4k^2 - (2n - 1)^2 = 163$. Разложите левую и правую части последнего равенства на множители. **642.** 4 576 36 81 16 9025. Нужно начать с чисел ЖЕ и НЕ и выяснить, когда два двузначных числа, являющихся точными квадратами, оканчиваются одной и той же цифрой. **646.** Не является. Данная сумма делится на 17, но не делится уже на 17^2. **647.** 1, 3. При $n \geqslant 4$ данная сумма оканчивается на 3, так как все ее слагаемые, начиная с пятого, оканчиваются нулем; следовательно, в этом случае решений нет. Осталось проверить значения $n = 1, 2, 3$. **649. а)** 2, 6; **б)** 1; **в)** не существует; **г)** 2. **651.** 1. Сначала убеждаемся, что $n = 1$ подходит. Пусть $n > 1$. Если n четно, то при делении на 3 число 2^n дает остаток 1 (проверьте), 3^n — остаток 0 и 4^n – 1. Тогда вся сумма при делении на 3 дает в остатке 2. Но точный квадрат при делении на 3 не может давать остаток 2. Пусть n нечетно. В этом случае степени 2^n и 4^n делятся на 4, а степень 3^n при делении на 4 дает в остатке 3, так как $3^n = (3^n + 1) - 1 = (3^n + 1) - 4 + 3$, где $(3^n + 1) \vdots 4$. Тогда вся сумма при делении на 4 дает остаток 3. Но точный квадрат при делении на 4 не может давать в остатке 3. Следовательно, все $n > 1$ не удовлетворяют требованию задачи. **653. а)** Положим $n = k = 2a + 1$, где a — целое неотрицательное. Тогда $2^n + 2^k = 2^{2a+1} + 2^{2a+1} = 2 \cdot 2^{2a+1} = 2^{2a+2}$. **б)** Пусть $n > k$. Преобразуем данную сумму: $3^n + 3^k = 3^k \cdot (3^{n-k} + 1)$. Числа 3^k и $3^{n-k} + 1$ взаимно просты (подумайте, почему), поэтому их произведение является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждое из них — точный квадрат: $k = 2a$, $3^{n-k} + 1 = b^2$ $(a \in N, b \in N)$. Отсюда $3^{n-k} = b^2 - 1 = (b + 1)(b - 1)$. Число b четно, а значит, числа $b + 1$ и $b - 1$ нечетны. Но два последовательных нечетных числа взаимно просты (см. утверждение задачи 456 из § 11), поэтому последнее равенство может выполняться лишь в том случае, когда $\begin{cases} b+1=3^{n-k}, \\ b-1=1. \end{cases}$ Следовательно, получаем: $b = 2$, $2 + 1 = 3^{n-k}$, $3^{n-k} = 3$, $n - k = 1$, откуда $n = k + 1 = 2a + 1$. Итак, мы нашли, что $k = 2a$, $n = 2a + 1$, где a — любое натуральное число. Сделаем проверку: $3^n + 3^k = 3^{2a+1} + 3^{2a} = 3^{2a} \cdot (3 + 1) = 3^{2a} \cdot 2^2$. **654.** Не имеется. **655. а)** Положим $k = n$: $2^k + 2^n = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$. Выберем n так, чтобы $n + 1 = ap$, $n = ap - 1$ ($a \in N$); **б)** положим $k = m = n$. **659. б)** 100, 121, 144, 169, 400, 441, 484, 900, 961. **661.** 3456, $4356 = 66^2$. **662.** $4761 = 69^2$. **665.** 16, 9. **668.** 1, 1 или 11, 16. **669.** Например, $1000^2 + 1$, $1000^2 + 2$, $1000^2 + 3$, ..., $1000^2 + 1000$. Все члены этой последовательности заключены между 1000^2 и 1001^2 (проверьте, что $1000^2 + 1000 < 1001^2$), поэтому ни один из них точным квадратом не является. **671.** Например, 73^2, $5^2 \cdot 73^2$, $7^2 \cdot 73^2$, 73^3. Начнем, скажем, с арифметической прогрессии из трех членов 1, 25, 49. Умножим все ее члены на a^2 ($a \in N$) и подберем a так, чтобы число $49a^2 + 24a^2 = 73a^2$ было точной степенью, например, точным кубом. **673.** Например, 38, 39, 40, ..., 48.

§ 15. Системы счисления

675. В восьмиричной. **676.** В пятиричной. **677. а)** В десятичной; **б)** в девятиричной; **в)** в восьмиричной; **г)** в двенадцатиричной. **679.** $47435_8 + 27654_8 = 77311_8$. **680. а)** В троичной; **б)** в девятиричной; **в)** в шестиричной; **г)** в восьмиричной. **в)** Нужно решить уравнение $4(d + 3) = d^2$. **681.** 1, 3 или 5. **682.** $a = 4$, $b = 0$. **683.** $6n + 4$ ($n \in N$). **684.** 445. **687. а)** Система с любым четным основанием $d > 6$; **б)** система с любым нечетным основанием $d > 5$. **689.** Последняя цифра числа должна быть равна 0, 4 или 8. **691. а)** $d(d - 1)$; **б)** $d^2(d - 1)$; **в)** $d^3(d - 1)$. См. правило произведения (например, в [18], § 6, п. 6.2. и решение задачи 129). **692.** Воспользуйтесь тем, что квадрат любого нечетного числа при делении на 8 дает в остатке 1 (см. утверждение задачи 281 из § 8). **696.** Пусть нужно взвесить груз в n кг, где n — такое натуральное число, при котором $1 \leqslant n \leqslant 40$. Запишем число n в троичной системе счисления. Если цифра некоторого разряда в полученной записи равна нулю, то соответствующую гирю не берем, а если она равна 1, то ставим гирю на пустую чашу весов. Если же эта цифра равна 2, то на пустую чашу весов ставим гирю, соответствующую следующему, более высокому разряду, а на другую чашу поставим гирю данного разряда – в связи с тем, что $3 - 1 = 2$. Например, если мы взвешиваем груз в 6 кг, то, учитывая равенство $6 = 2 \cdot 3 = 20_3$, ставим на пустую чашу весов гирю в 9 кг, а на ту чашу, где груз, — гирю в 3 кг. **698. а)** $k + 1$; **б)** k. **699.** В девятнадцатиричной. **701.** Сумму $d^{2(n-1)} + d^{2(n-2)} + \ldots + d^2 + 1$ умножьте и разделите на $d^2 - 1$ и воспользуйтесь тождеством для $a^n - b^n$ из § 7.

§ 16. Представление целых чисел в некоторой форме

703. Все нечетные числа, начиная с 13. **704.** Рассмотрите случаи $n = 8$, $n = 9$ и $n = 10$. Случаи $n = 11$, 12, 13, 14 и др. сводятся соответственно к случаям $n = 8$, 9, 10, опять $n = 8$ и т. д. **705.** Можно. Вопрос задачи сводится к следующему: можно ли число 2000 представить в виде $12x + 17y$, где x и y — натуральные числа? Для решения этой задачи преобразуем уравнение: $12x + 17y = 2000$, $12x + 12y + 5y = 12 \cdot 166 + 8$, $5y - 8 = 12(166 - x - y)$. Отсюда $5y - 8$ делится на 12. С помощью перебора находим, что подходит, например, $y = 4$. **707.** 2. **710. а)** Можно; **б)** нельзя; **в)** можно. **714. а)** Нельзя; **б)** можно. **716.** Если $4n + 3 = x^2 + y^2$, где x и y — целые, то числа x и y — разной четности. Пусть $x = 2a$, $y = 2b + 1$ ($a \in Z$, $b \in Z$). Тогда $(2a)^2 + (2b + 1)^2 = 4n + 3$, $4a^2 + 4b^2 + 4b + 1 = 4n + 3$, $2a^2 + 2b^2 + 2b = 2n + 1$. Но последнее равенство невозможно при целых a, b и n, так как его левая часть — число четное, а правая — нечетное. **717. а)** Можно; **б)** нельзя; **в)** нельзя. **722.** Верно. **724.** $2043 \cdot 2044$. **728.** 2. **730.** Число 23456789 при делении на 9 дает в остатке 8, а число $k(k + 1)$ – 0, 2, 3 или 6 (проверьте!). **732.** 2, 10. **734.** Верно. **737.** $\frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10}$. **738.** $\frac{1}{(p+1)/2} + \frac{1}{p(p+1)/2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p}$. **740.** Можно: $128 = 1 \cdot 1 \cdot ... \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ (72 единицы). **742.** Не существуют. **743.** 499. **745.** 4, 7, 8 и все натуральные числа, большие 9.

§ 17. Уравнения первой степени с двумя неизвестными в целых числах

747. 45. **748.** 26 апреля. **749. а)** (5; 6); **б)** (100; 1), (1; 20). **751.** Может, если, например, синим фломастером сделать 8 пометок, красным — 10. **753.** 61. **754.** 1273. **756.** 60 гирек по 1 г, 39 — по 10 г, 1 — в 50 г. **758.** 132, 264, 396. **759.** (6; 4; 1), (1; 5; 4), (5; 0; 5), (0; 1; 8), где первый элемент каждой тройки означает количество ящиков по 16 кг, второй — по 17, третий — по 21 кг. **760.** 12 выстрелов, 9 попаданий по 8 очков, 2 — по 9, 1 — 10 очков. **761.** 2, 2 и 3. **762.** 814, 1026, 150. Число книг, полученных первым магазином, делится на 37, 11 и 2, а значит, делится на $37 \cdot 11 \cdot 2 = 814$. Аналогично число книг, полученных вторым и третьим магазинами, делится соответственно на 171 и 150. **764. а)** $x = 2 - 7t$, $y = 11t - 3$ ($t \in Z$); **б)** $x = 60t + 17$, $y = 11t + 3$ ($t \in Z$); **в)** $x = 25t - 4$, $y = 13 - 81t$ ($t \in Z$). **765.** $x = 12t + 11$, $y = 26t + 23$, $z = 29t + 25$ ($t \in Z$). **768. а)** (15; 8); **б)** $x = 8t - 6$, $y = 261 - 15t$, где $t \in \{1; 2; 3; ...; 17\}$; **в)** $x = 65t - 83$, $y = 27t - 35$ ($t \in N$, $t > 1$). **769.** 19 досок первого размера, 7 — второго или 6 досок первого размера, 18 — второго. **770. а)** 11; **б)** 8. **771.** 10001, 83001. **772.** 11 9-метровых и 27 13-метровых труб. **773.** 548, 549, 550. **774.** 106. **775.** Например, подходит уравнение $x + y = n + 1$. **776.** Из уравнения видно, что by делится на a, т. е. y делится на a. **777.** $(1; a + 1)$, $(b + 1; 1)$. **779.** 17, 19, 20, 21, 22, 24.

§ 18. Уравнения второй степени с двумя неизвестными в целых числах

781. а) (2; 2); **б)** (–2; –2), (0; 0); **в)** (2; –2); **г)** (4; 2). **а)** Используйте опорную задачу 780; **б)** положите $-x = z$, $-y = t$; **в)** положите $-y = t$; **г)** нужно положить $\frac{x}{y} = t$, где $t \in Z$. **782.** $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$. **783. а)** (5; 4), (–1; 10), (–9; 2), (–3; –4); **б)** (5; 28), (3; –18), (27; 6), (–19; 4); **в)** (6; 30), (30; 6), (4; –20), (10; 10), (–20; 4). **784.** Длины сторон прямоугольника равны 6, 3 или 4, 4. **786. а)** (1; 1), (0; 0); **б)** (1; 0). **787.** $(999; 999 \cdot 1997)$, $(999 \cdot 1997; 999)$, (1997; 1997). **788.** 14. **789.** $(p + 1; p(p + 1))$, $(p(p + 1); p + 1)$, $(2p; 2p)$. **792. а)** Например,

$2xy - 4x + 6y - 5 = 0$; **б)** например, $(x - 1)(y + 2) = 0$. **794. а)** $(-1; 3)$, $(-3; -9)$, $(3; 3)$, $(-7; -9)$; **б)** $(4; 2)$, $(0; 0)$; **в)** $(-1; 2)$, $(-1; 0)$; **г)** $(2; 10)$, $(1; -3)$, $(4; 6)$, $(-1; 1)$, $(14; 10)$, $(-11; -3)$. **796. б)** Точный квадрат при делении на 4 не может давать в остатке 3; **в)** докажите, что $3x^2 + 1$ при целом x не делится на 5. **797.** 7 или 14. **798.** Например, $(x - y - 1)(x + 3) = 0$. **800. а)** $(21; 10)$, $(9; 10)$, $(-21; -10)$, $(-9; -10)$; **б)** $(2; 1)$, $(-2; -1)$; **в)** $(4; 1)$, $(4; -3)$, $(-4; 1)$, $(-4; -3)$. **801. а)** $(0; 11)$, $(0; -11)$, $(11; -22)$, $(-11; 22)$; **б)** $(10; 0)$, $(-10; 0)$, $(17; 3)$, $(-17; -3)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$, $(18; 4)$, $(-18; -4)$, $(6; 4)$, $(-6; -4)$. **а)** Приведите уравнение к виду: $x^2 + (2x + y)^2 = 121$ и подумайте, когда сумма двух точных квадратов равна 121? **802.** 431. **805. а)** $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(1; 1)$, $(1; -1)$; **б)** $(0; 0)$, $(1; 1)$; **в)** $(2 - t^2; 2 - t - t^2)$, $t \in Z$. **807. б)** Квадрат целого числа при делении на 3 не может давать в остатке 2. **г)** Из уравнения видно, что y нечетно. Полагая $y = 2a + 1$, подставьте это выражение для y в уравнение. **д)** Уравнение сводится к уравнению из задачи **г)**. **809. а)** $(t(1 - t); -t(1 + t))$, $t \in Z$; **б)** $(2t(1 + 4t); t(1 - 4t))$, $((1 - 4t)(1 - 2t); (1 - 4t)t)$, $t \in Z$.

§ 19. Разные уравнения с несколькими неизвестными в целых числах

813. Нет решений. Рассмотрите три случая: x и y четны; x и y нечетны; x чётно, y нечетно. **817.** $(7; -1; 0)$, $(7; 0; -1)$, $(1; 3; 2)$, $(1; 2; 3)$. Вычтите уравнения. **818.** $(0; 0; 0; 0)$. **819.** Нет решений. Докажите последовательно, что z нечетно, y четно, x нечетно. Положите в первом уравнении $x = 2a + 1$, $y = 2b$, где a и b — целые числа. **820.** Приведите систему уравнений к виду $\begin{cases} x = xyzt - 2000, \\ y = xyzt - 200, \\ z = xyzt - 20, \\ t = xyzt - 2 \end{cases}$ и перемножьте все уравнения этой системы. **822.** $0, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. **824.** Можно положить $z = -x$. В получающемся уравнении выберем y так, чтобы $y - 1 = 2n^2$ $(n \in N)$. **825.** Если n четно: $n = 2k$ $(k \in N)$, то можно положить $x = 2^k$, $y = 0$. Если n нечетно: $n = 2k + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, то можно положить $x = y = 2^k$. **827.** $(\pm 1; 0; 0; 0)$, $(0; \pm 1; 0; 0)$, $(0; 0; \pm 1; 0)$, $(0; 0; 0; \pm 1)$. Из первого уравнения системы видно, что $x^2 \leqslant 1$, $y^2 \leqslant 1$, $z^2 \leqslant 1$, $t^2 \leqslant 1$. Отсюда каждое из неизвестных x, y, z и t по модулю не превосходит 1. Тогда $x^6 \leqslant x^2$, $y^6 \leqslant y^2$, $z^6 \leqslant z^2$, $t^6 \leqslant t^2$. Сложите почленно все эти неравенства. **829.** $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$. **831. а)** $(5; 21)$, $(21; 5)$, $(3; -13)$; **б)** $(1; 0)$, $(0; 1)$; **в)** $(1; 0)$, $(0; -1)$. **832.** Например, $x = 1$, $y = 4$, $z = 10$.

§ 20. Уравнения с несколькими неизвестными в натуральных числах

834. а) 89; **б)** 81; **в)** не существует; **г)** 12, 42, 90; **д)** 43, 63. **836.** 135, 175, 518, 595. **837.** 2401. **838.** $x = 8$, $y = 3$. **839.** 15625, 13824. **840.** 18, 63; 19, 81. **842.** $x = 1$, $y = 3$. **843.** $x = z = t = 2$, $y = 4$; $x = z = 2$, $y = 9$, $t = 1$; $x = 3$, $y = 4$, $z = 6$, $t = 7$; $x = 3$, $y = 9$, $z = t = 6$. Из уравнения видно, что $x \leqslant 4$, так как уже $55^2 = 3025$. Далее нужно проделать перебор по x. **845.** $(12; 13; 57)$. **846.** $(3; 2)$. **848. а)** Имеет, например, $(3; 5)$; **б)** имеет, например, $(7; 14)$; **в)** имеет, например, $(3 \cdot 7^4; 5 \cdot 7^4)$. **849.** 40, 120; 72, 104. В уравнении

$x^2 + y^2 = 16000$ числа x и y должны быть четными, причем делиться на одну и ту же степень двойки. Далее нужно рассмотреть три возможности: $x = 2a$, $y = 2b$; $x = 4a$, $y = 4b$; $x = 8a$, $y = 8b$, где в каждом из этих случаев числа a и b нечетны. **851.** 2001. **852.** Можно положить $x = 2(a + 1)^2$, $y = 2a^2$, где $a \in N$. **853. а)** (0; 0); **б)** (0; 0). Приведем уравнение $\sqrt{x + \sqrt{x}} = y$ к виду $x + \sqrt{x} = y^2$. Тогда $\sqrt{x} = a$, $x = a^2$, где a — целое неотрицательное число. Получаем: $a^2 + a = y^2$, $4a^2 + 4a = 4y^2$, $4a^2 + 4a + 1 = 4y^2 + 1$, $(2a + 1)^2 = 4y^2 + 1$, $(2a + 1)^2 - 4y^2 = 1$. Два точных квадрата могут отличаться друг от друга на 1 только в одном случае: $1 - 0 = 1$. **855.** 8. **856.** 24, 8; 54, 27. **857.** (4; 4), (32; 2). Выразите из уравнения y^2 через x. **859.** $a = 256$, $b = 128$. **862.** Не имеет. **864.** Рассмотрите два случая: когда все четыре неизвестных нечетны и когда два из них равны 2. **866.** (2; 22; 28) и еще пять решений, получающихся отсюда всевозможными перестановками чисел. Прибавьте к обеим частям уравнения по 1 и разложите левую часть полученного уравнения на множители, а правую — на простые множители. **868.** Существуют, например, 40, 16 и 12. **869.** Число x нечетно. Кроме того, так как разность $x^4 - 1$ делится на 8, то y четно. Положим $x = 2a - 1$, $y = 2b$, где a и b натуральные, и преобразуем уравнение: $2y^2 = (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)$, $8b^2 = 2a(2a - 2)(4a^2 - 4a + 2)$, $b^2 = a(a - 1)(2a^2 - 2a + 1)$. В правой части последнего равенства стоят три множителя, попарно взаимно простых, поэтому каждый из них является квадратом натурального числа. Возьмем первый и второй множители. Вычитая равенства $a = m^2$, $a - 1 = n^2$, где m и n — натуральные числа, получаем: $m^2 - n^2 = 1$, а это невозможно. **871.** Не имеет. Приведем уравнение к виду: $(x + y)^3 = 7(x^2y + xy^2) + 4$. Куб натурального числа при делении на 7 не может давать в остатке 4. **873.** Не имеет. **876. д)** Положите $x = y = z = 3^k$, $t = 3^n$ ($k \in N$, $n \in N$). **878.** Нужно рассмотреть два случая — когда n четно и когда n нечетно. Если n четно: $n = 2k$ ($k \in N$), то можно равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$ умножить на 5^{2k-2}. **880.** (1; 1), (3; 3). **882.** (2; 2; 1). **884.** (3; 5), (4; 7). **886.** (2; 3; 17), (3; 2; 17). **888.** Не имеет. Нужно рассмотреть случаи, когда x четно и когда оно нечетно. Если x четно, то разность $7^x - 1$ делится на 8, а правая часть уравнения на 8 не делится. Если x нечетно, то $7^x - 1$ не делится на 4, поскольку $7^x - 1 = (7^x + 1) - 2$, а правая часть уравнения делится на 4. **890. а)** Не имеет; **б)** имеет, и притом единственное решение: (1; 2). **892. а)** (2; 1); **б)** (1; 1; 1); **в)** (2; 2; 1). **б)** Пусть $z = 1$. Тогда $2^x \cdot 3^y = 6$, откуда $x = y = 1$. Пусть $z > 1$. В этом случае степень 5^z оканчивается на 25, а сумма $5^z + 1$ — на 26. Значит, правая часть уравнения не делится на 4. Отсюда $x = 1$. Присмотримся к уравнению $2 \cdot 3^y = 5^z + 1$. Пусть $y \geqslant 2$ (случай $y = 1$, $z = 1$ уже был). Левая часть последнего уравнения делится на 9, следовательно, и правая его часть делится на 9. Но $5^z + 1$ делится на 9 только при $z = 3, 9, 15, \ldots$, вообще при $z = 6k + 3$, где k — целое неотрицательное число (проверьте!). Тогда $5^z + 1 = 5^{6k+3} + 1 = 125^{2k+1} + 1$. Полученное выражение делится на $125 + 1 = 126$, а, следовательно, и на 7. Но левая часть $2 \cdot 3^y$ уравнения на 7 не делится. **в)** Из уравнения видно, что x делится на y: $x = ky$ ($k \in N$). Подставьте это выражение для x в уравнение и выразите из получающегося уравнения степень y^z.

895. 1, 1, 2, 4. **896.** 1, 1, 1, 2, 5 или 1, 1, 1, 3, 3. **897.** $\frac{7}{9} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} =$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$. **898.** $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$.
899. а) (1; 2; 2), (2; 2; 2); **б)** (2; 3; 5), (2; 5; 3), (3; 2; 5), (3; 5; 2), (5; 2; 3), (5; 3; 2). **901. а)** Нет решений; **б)** (1; 4); **в)** (3; 11); **г)** (1; 2); (2; 3); **д)** нет решений. **е)** Так как число $y^2 - y$ четно, то степень 2^{y^2-y} является точным квадратом. **903.** Не существуют. В правой части уравнения нужно перемножить первый множитель на четвертый, второй — на третий, а затем прибавить к обеим частям уравнения по 1 для того, чтобы в правой части получить квадрат суммы. **906.** Не имеет. **907. а)** Нужно воспользоваться тем, что если сумма $x^2 + y^2$ делится на 3, то x и y делятся на 3 (см. опорную задачу 177 из § 6). **б)** Докажите, что если $x^2 + y^2$ делится на 7, то x и y делятся на 7. **914.** 1, 1, ..., 1 (8 единиц), 2, 10. Запишем систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20, \\ x_1x_2 ... x_{10} = 20. \end{cases}$
Из второго уравнения системы видно, что большинство неизвестных равны 1. Рассмотрите случаи: $x_1 = x_2 = ... = x_9 = 1$; $x_1 = x_2 = ... = x_8 = 1$; $x_1 = x_2 = ... = x_7 = 1$.

§ 21. Неравенства в целых числах

921. Существует и единственна — $\frac{4}{17}$. **923.** $\frac{4}{7}$. **924. а)** $\frac{1}{4}$; **б)** $\frac{4}{7}$. **926.** 35. **927.** $\frac{4001}{8004000}$. Исходное неравенство приведем к виду $\frac{2 \cdot 2000}{2 \cdot 2000 \cdot 2001} < \frac{m}{n} < \frac{2 \cdot 2001}{2 \cdot 2000 \cdot 2001}$. Тогда $n = 2 \cdot 2000 \cdot 2001 = 8004000$, $m = 4001$. **929.** (1; 2). **931.** 21. **933.** (67; 3), (68; 3), (69; 3), (70; 3), (71; 3). **935.** 36 грузовых автомобилей, 3 легковых, 1 автобус. **936.** 2. **937.** 169. Обозначим число ящиков через x. Тогда число деталей равно $12x + 1$. Отсюда $\frac{12x+1}{x-1} \in N$ и $\frac{12x+1}{x-1} \leqslant 20$. Выделим у дроби $\frac{12x+1}{x-1}$ целую часть: $\frac{12x+1}{x-1} = 12 + \frac{13}{x-1}$. Следовательно, $\frac{13}{x-1} \leqslant 8$, где $x - 1$ является делителем числа 13. **939.** В первом ящике 11 деталей, во втором — 17. **940.** 19 «Жигулей», 10 «Москвичей». **941.** 231. Приведем систему к виду $\begin{cases} 2x - 3y \geqslant 0, \\ 3x - 4y \geqslant 0, \\ 5x - 7y \leqslant 20. \end{cases}$ Положим $2x - 3y = z$, $3x - 4y = t$. Отсюда $x = 3t - 4z$, $y = 2t - 3z$. Получаем систему неравенств $\begin{cases} z \geqslant 0, \\ t \geqslant 0, \\ t + z \leqslant 20. \end{cases}$ Вопрос задачи сводится к следующему: сколько точек координатной плоскости zOt с целочисленными неотрицательными координатами лежит не выше прямой $t + z = 20$? **942.** (0; 0; 0), (1; 1; 1). **944.** Множество всех пар $(x; x - 1)$, где $x \in Z$. **945.** Неравенство справедливо при всех натуральных x и y, кроме $x = y = 1$. **947. а)** 1, 1, z ($z \in N$); 1, 2, 2; 1, 2, 3; **б)** 1, 1, 1, t ($t \in N$); 1, 1, 2, 2; 1, 1, 2, 3; 1, 1, 2, 4. **948.** 1, 1, 1, 4; 1, 1, 2, 4. **949.** 1, y, z ($y \in N$, $z \in N$); 2, 2, z ($z \in N$); 2, 3, 3; 2, 3, 4; 2, 3, 5. **951.** $(1; y)$ ($y \in N$), $(x; 1)$ ($x \in N, x \neq 1$), $(x; 2)$ ($x \in N, x \neq 1$), (2; 3), (3; 3), (2; 4). **953.** (1; −3), (3; −1). **955.** $(x; x + 1)$ ($x \in N$). **957. а)** (5; −4), (6; −4), (6; −5), (6; −3); **б)** (2; −2), (2; −3). **959.** (0; 0), (−1; −1). **961. а)** 1, 2; **б)** $n = 1$ и все $n \geqslant 7$.

§ 22. Разные задачи с целыми числами

962. Иван Петрович, записывая сумму трех слагаемых, приписывает к первому слагаемому слева цифру 1, а последнюю цифру уменьшает на 1, а значит, увеличивает первое слагаемое на $100000 - 1 = 99999$. Поэтому третье слагаемое у него получается такое, чтобы оно в сумме со вторым давало 99999. Фокус проходит только тогда, когда у второго слагаемого не более пяти цифр. **964.** Обозначим искомое число через $\overline{ab}$. Проделаем с ним все указанные операции: $((\overline{ab} + 1) \cdot 4 - \overline{ab} - 3) \cdot 2 = 6 \cdot \overline{ab} + 2$. Для того чтобы по полученному результату определить задуманное число, нужно от него отнять 2 и разность разделить на 6. **966.** Возьмем трехзначное число $\overline{abc}$, где $a - c > 1$, вычтем из него число $\overline{cba}$ и преобразуем разность так, чтобы ее можно было записать в виде трехзначного числа: $\overline{abc} - \overline{cba} = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 100(a - c) - (a - c) = 100(a - c - 1) + 100 - (a - c) = 100(a - c - 1) + 90 + (10 - a + c) = \overline{(a - c - 1)9(10 - a + c)}$. Теперь сложим полученное трехзначное число с его обращенным:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} \overline{(a-c-1)9(10-a+c)} \\ \overline{(10-a+c)9(a-c-1)} \end{array} \\ \hline 1\;\;0\;\;8\;\;9 \end{array}$$

. **969.** Можно. **970.** Можно. **971. а)** Можно; **б)** можно. **973.** Произведение 18 произведений равно 1. Сумма этих произведений может быть равна нулю только тогда, когда 9 произведений равны 1, а остальные 9 равны -1. Но последнее невозможно по-предыдущему. **976. а)** Нужно проанализировать ход решения предыдущей задачи. Число 5 может занимать только одно место — в центре квадрата. Число 1 может занять любое из 4 мест. После этого число 8 может занимать 2 из 4 угловых клеток. Остальные клетки заполняются однозначно. Тогда по правилу произведения число таких магических квадратов равно $4 \cdot 2 = 8$. **978.** Нельзя. **980.** Верно. Используйте равенства $a_5 = 2a_1 + a_2 + a_4 - S$, $4S = 6a_1 + 3a_2 + 3a_4$ из решения задачи 979. **981.** Неверно. См. контрпример

11	4	12
10	9	8
6	14	7

. **986.** С показателем 32. **987.** С показателем 81. **988.** 1012. **989.** Не существует. **990. а)** $2^{26} \cdot 3^{14} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$; **б)** $2^{38} \cdot 3^{18} \cdot 5^9 \cdot 7^5 \cdot 11^3 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$; **в)** $2^{47} \cdot 3^{22} \cdot 5^{12} \cdot 7^8 \cdot 11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19^2 \cdot 23^2 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37 \cdot 41 \cdot 43 \cdot 47$. **991.** Не делится. **993.** На $3^4 = 81$ при $n = 7$. При значениях n от 1 до 7 данная сумма принимает соответственно значения 1, 3, 6, 33, 153, 873, 5913. Из них на наибольшую степень числа 3 — на 3^4 — делится последнее. При $n > 7$ данную сумму представим в виде $5913 + 8! + (9! + 10! + ... + n!)$. Здесь 5913 делится на 3^4, сумма в скобках — тоже, а 8! делится на 3^2, но не делится уже на 3^3. Поэтому вся сумма делится только на 3^2, но не на 3^3. **994. а)** $n = p^2$, где p — простое число; **б)** $n = p^3$, где p — простое, или $n = p_1p_2$, где p_1 и p_2 — различные простые числа; **в)** $n = p^4$, где p — простое. **997. а)** $n = p_1p_2^4$, где p_1 и p_2 — различные простые числа; **б)** $n = p_1^2p_2^3$, где p_1 и p_2 — различные простые числа; $n = p_1p_2^5$; $n = p^{11}$, где p — простое. **999.** 144. **1002.** 1296. **1004.** Пусть число a имеет разложение на простые множители:

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n}$. Тогда $a^k = p_1^{\alpha_1 k} \cdot p_2^{\alpha_2 k} \cdot ... \cdot p_n^{\alpha_n k}$, $\tau(a^k) = (\alpha_1 k + 1)(\alpha_2 k + 1)...(\alpha_n k + 1)$. Каждый из множителей последнего произведения взаимно прост с k, тогда и все произведение взаимно просто с k. **1009.** Существует и единственно — 1981. **1010.** 247, 364, 481, 715, 832. **1012.** Не существуют. **1014.** 2899999, 2900000. **1016.** 69, 72, 75. Число x двузначно: $x = \overline{ab}$. Рассмотрите два случая: $a + b \leqslant 9$ и $a + b > 9$. **1018.** 27000001. **1019.** 10, 11, 20. Квадрат двузначного числа записывается 3 или 4 цифрами, а куб — 4, 5 или 6 цифрами (см., например, [18], утверждение задачи 120 из § 6). Если $x^3 = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, то сумма его цифр $a^3 \leqslant 9 \cdot 6 = 54$, откуда $a \leqslant 3$. Осталось перебрать случаи $x = 10, 20, 30, 11, 12, 21, 30$. **1020.** Не может. **1023.** Сложите равенства $a_n = na_{n-1} + (-1)^n$ и $a_{n-1} = (n-1)a_{n-2} + (-1)^{n-1}$. **1024.** Не существуют. Примените метод «вилки» к подкоренному выражению. **1028.** Все номера, делящиеся на 5. **1029.** Обозначим наибольший общий делитель членов a_n и a_{n-1} последовательности Фибоначчи через d. Тогда из равенства $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ следует, что и a_{n-2} делится на d, откуда из равенства $a_{n-1} = a_{n-2} + a_{n-3}$ получаем, что и a_{n-3} делится на d. И т. д. В итоге приходим к делимости $a_2 \vdots d$, т. е. $1 \vdots d$. Значит, $d = 1$. **1030.** $a_6 = 30030$ и $a_2 = 30$. **1032.** 1, 2, 3. Напишем несколько первых членов обеих последовательностей: 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; ...; 2; 1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ... . Их вид наводит на мысль, что в обе последовательности (a_n) и (b_n) входят только числа 1, 2 и 3, а при любом натуральном $n > 3$ справедливо неравенство $a_{n-1} < b_n < a_n$. Применим метод математической индукции. При $n = 4$ это неравенство выполняется. Допустим, что оно выполняется при всех $3 < n < k + 1$. Докажем, что тогда оно выполняется и при $n = k + 1$. Складывая почленно неравенства $a_{k-2} < b_{k-1} < a_{k-1}$ и $a_{k-1} < b_k < a_k$, получаем: $a_{k-2} + a_{k-1} < b_{k-1} + b_k < a_{k-1} + a_k$, $a_k < b_{k+1} < a_{k+1}$. Отсюда и следует, что рассматриваемое неравенство справедливо при всех $n > 3$. (Обратите внимание, что здесь принцип математической индукции на втором шаге доказательства применялся в форме, отличной от обычной, а именно: если утверждение справедливо при всех $n < k + 1$, то оно справедливо и при $n = k + 1$.) **1033.** 0. **1034.** 3. **1035.** На четвертом этаже. **1036.** 280 м, 140 столбиков. **1037.** 48. **1039.** 31 ученик, 7 учебников. **1040.** **а)** 19; **б)** 290. **1041.** 4. **1043.** 80, 99. **1044.** Могли окончиться со счетом 22:18 или 19:13. **1045.** Часы пустили в 7 (или незадолго до 7) часов. Остановились они в 10 часов. **1046.** 36. **1047.** 12, если считать и тот трамвай, который начинает двигаться с последней конечной остановки в тот момент, когда туда прибывает трамвай с пассажиром. **1049.** 9, 29, 49, 69, 89. **1050.** 18, 19, 28. **1051.** 3, 74; 18, 37. **1052.** Нужно получить последовательно положения 8, 28, 12; 8, 16, 24; 16, 16, 16. **1054.** 120. **1055.** 2301. **1056.** 19, 39, 59, 79. **1057.** **а)** 98765 – 10234; **б)** 50123 – 49876. **1059.** 14, 1451. **1062.** На 40. **1063.** Я — 10, мой друг — 14. **1066.** 1, 2, 3, ..., 12, 14. **1068.** 48, 24, 12. **1069.** 73, 37. **1070.** 41, 43, 45. Пусть меньшее из искомых чисел равно $2n - 1$, а четырехзначное число — $\overline{aaaa}$. Получаем:

$$(2n-1)^2 + (2n+1)^2 + (2n+3)^2 = \overline{aaaa},$$

$$4n^2 - 4n + 1 + 4n^2 + 4n + 1 + 4n^2 + 12n + 9 = 1111a,\ 12n^2 + 12n + 11 = 11 \cdot 101 \cdot a.$$

Отсюда число $n^2 + n = n(n + 1)$ делится на 11, т. е. или n, или $n + 1$ делится на 11. 1) Пусть n делится на 11: $n = 11k$ ($k \in N$). Тогда

$$12 \cdot 11k(11k + 1) + 11 = 11 \cdot 101 \cdot a,\ 132k^2 + 12k + 1 = 101a.$$

Но a — цифра, поэтому $101a \leqslant 101 \cdot 9 = 909$. Следовательно, $132k^2 < 909$, откуда k не превосходит 2, т. е. $k = 1$ или $k = 2$. Но значения $k = 1$ или $k = 2$ не удовлетворяют последнему уравнению. 2) Пусть $n + 1$ делится на 11: $n + 1 = 11k$ ($k \in N$). Тогда $12(11k-1)^2 + 12(11k-1) + 11 = 11 \cdot 101 \cdot a$, $12 \cdot 11^2 \cdot k^2 - 12 \cdot 2 \cdot 11k + 12 + 12 \cdot 11k - 12 + 11 = 11 \cdot 101 \cdot a$, $132k^2 - 12k + 1 = 101a$. Отсюда также $k = 1$ или $k = 2$. При $k = 1$ решений нет, а при $k = 2$ получаем: $132 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 1 = 101a$, $505 = 101a$, $a = 5$. В этом случае $n + 1 = 22$, $n = 21$; $2n - 1 = 42 - 1 = 41$. **1072.** $(p_1 - 1)(p_2 - 1)$. **1073.** Например, вершины ромба с диагоналями, равными 6 и 8. **1075.** $a = \pm b$. **1076.** $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{a-b}$, где a и b — натуральные взаимно простые числа, $a > b$. **1078.** $x = 3$, $y = 1$. **1079.** 5. **1080.** Например, 10, 30, 50, ... **1081.** 258. **1083. а)** Не может; **б)** может, например, $n = 4000$. **1084.** Нельзя. **1086.** 18. **1090.** Не существуют. **1091.** 1. **1094. а)** Пусть $2x^{1998} + 5 = P^2(x) + Q^2(x)$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Положим в этом тождестве $x = 1$: $P^2(1) + Q^2(1) = 7$. Но сумма двух точных квадратов не может равняться 7. **1095.** Не существует. **1097.** Пусть квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет целые коэффициенты и $n - 1$, n, $n + 1$ — три последовательных целых числа. Тогда по условию являются целыми числа: $f(n-1) = a(n-1)^2 + b(n-1) + c = an^2 - 2an + bn + (a - b + c)$, $f(n) = an^2 + bn + c$, $f(n+1) = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = an^2 + 2an + bn + (a + b + c)$. Сложим первое равенство с третьим и вычтем удвоенное второе. Получим, что число $f(n-1) + f(n+1) - 2f(n) = 2a$ является целым. Тогда целым будет и число $f(n+1) - f(n) - 2an = a + b$. Теперь преобразуем выражение для $f(n)$:

$$f(n) = an^2 + bn + c = 2a\frac{n(n-1)}{2} + (a+b)n + c.$$

Отсюда следует, что число c — целое. Далее можно применить утверждение задачи 1096. **1098.** 2. **1099.** Может, например, $1 + 3 + 5 + ... + 1999 = 10^6$. **1100.** Например, $(+1 - 2 + 3 - 4 + 5) + (-6 + 7) + (8 - 9) + (-10 + 11) + (12 - 13) + ... + (-1998 + 1999) + (2000 - 2001)$. **1102.** $n > 3$, $n \neq 3k + 1$ ($k \in N$). **1103.** $n = 4k$ ($k \in N$) или $n = 4k + 3$ ($k = 0, 1, 2, ...$). **1104.** Не существует. Докажите, что $a^n > a + a^2 + ... + a^{n-1}$. **1105.** $3 \leqslant n \leqslant 9$. При $n \geqslant 10$ $n^{n-2} \geqslant 10^{n-2}$, а поэтому n^{n-2} записывается по меньшей мере $n - 1$ цифрой. Далее проверьте все случаи $n = 3, 4, 5, ..., 9$. **1106.** 2000. Перемножьте почленно неравенства $10^{k-1} < 2^{1999} < 10^k$ и $10^{n-1} < 5^{1999} < 10^n$, где k и n — некоторые натуральные числа, и, пользуясь полученным неравенством, найдите $k + n$. **1107.** Если дробь $\frac{k}{1000}$ несократима, то и дробь $\frac{1000-k}{1000}$ несократима. **1109.** Допустим, что в записи десятизначного числа все 10 цифр различны. Найдем сумму этих цифр: $0 + 1 + 2 + ... + 9 = 45$. Следовательно, число $n^2 + 1$ делится на 3. Но, с другой стороны, число $n^2 + 1$ при делении на 3 может давать в остатке только 1 (если n делится на 3) или 2 (если n не делится на 3). Получаем противоречие. **1111.** См. решение задачи 1110. Вместо степеней двойки в решении нужно использовать, например, степени тройки. **1112.** Среди натуральных чисел от 1 до 2000 ровно два — $729 = 3^6$ и $1458 = 2 \cdot 3^6$ делятся на 3^6. Приведем сумму всех дробей, кроме $\frac{1}{729 \cdot 1458}$, к общему знаменателю; получим дробь $\frac{a}{3^{11} \cdot b}$, где a и b — некоторые натуральные взаимно простые числа, b не делится на 3. Тогда сумма всех дробей равна $\frac{1}{2 \cdot 3^{12}} + \frac{a}{3^{11} \cdot b} = \frac{b + 6a}{2 \cdot 3^{12} \cdot b}$. Но полученная сумма равна дробному числу, так как числитель $b + 6a$ этой дроби не делится на 3. **1116.** 4. Числа n и $n + 1$ в разложении на простые множители должны содержать только двойки и пятерки. Но так как эти числа взаимно просты, то двойки могут входить в разложение только одного из чисел n и $n + 1$, а пятерки — в разложение другого: $n + 1 = 2^x$, $n = 5^y$ или $n + 1 = 5^x$, $n = 2^y$, где x и y — натуральные числа. Далее нужно решить в натуральных числах уравнения: $2^x - 5^y = 1$ и $5^x - 2^y = 1$. Докажите, что первое из них не имеет решений в натуральных числах, а второе — единственное решение: $x = 1$, $y = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. 3-е изд. М.: Просвещение, 1993. 239 с. (Раздел «Задачи повышенной трудности».)
2. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1991. 238 с. (Раздел «Задачи повышенной трудности».)
3. Алгебра для 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, А. Н. Виленкин, Г. С. Сурвилло и др.; Под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1995. 256 с.
4. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 1994. 239 с. (Раздел «Задачи для внеклассной работы».)
5. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1992. 270 с. (Раздел «Задачи повышенной трудности».)
6. *Бабинская И. А.* Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975. 111 с.
7. *Балк М. Б., Балк Г. Д.* Математика после уроков: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 462 с.
8. *Бартенев Ф. А.* Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. 95 с.
9. *Басова Л. А., Шубин М. А., Эпштейн Л. А.* Лекции и задачи по математике: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1981. 96 с.
10. *Березин В. Н., Березина Л. Ю., Никольская И. Л.* Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1985. 175 с.
11. *Беррондо М.* Занимательные задачи / Пер. с фр.; Под ред. И. М. Яглома. М.: Мир, 1983. 230 с.

12. *Болл У., Коксетер Г.* Математические эссе и развлечения / Пер. с англ. М.: Мир, 1986. 472 с.

13. *Василевский А. Б.* Задания для внеклассной работы по математике: 9–11 классы: Книга для учителя. Минск: Народная асвета, 1988. 175 с.

14. *Васильев Н. Б., Егоров А. А.* Задачи всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988. 288 с.

15. *Воробьев Н. Н.* Признаки делимости. 3-е изд., исправл. и дополн. М.: Наука, 1980. 96 с. (Популярные лекции по математике.)

16. Всероссийские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся / Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. М.: Просвещение, 1992. 383 с.

17. *Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И.* Сборник задач по алгебре для 8–9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. 2-е изд. М.: Просвещение, 1994. 272 с.

18. *Галкин Е. В.* Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера: Книга для учащихся 5–11 классов. М.: Просвещение, 1996. 160 с.

19. *Гальперин Г. А., Толпыго А. К.* Московские математические олимпиады: Книга для учащихся / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986. 303 с.

20. *Гарднер М.* Математические чудеса и тайны. Математические фокусы и развлечения / Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 128 с.

21. *Гельфонд А. И.* Решение уравнений в целых числах. 3-е изд. М.: Наука, 1978. 60 с. (Популярные лекции по математике.)

22. *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994. 270 с.

23. *Грибанов В. У., Титов В. И.* Сборник упражнений по теории чисел. М.: Просвещение, 1964. 144 с.

24. *Грицаенко Н.* Ну-ка реши! Киев: Радянська школа, 1991. 78 с.

25. *Гуревич Е. А.* Тайна древнего талисмана. М.: Наука, 1969. 150 с.

26. *Доморяд А. П.* Математические игры и развлечения. М.: Физматгиз, 1961. 268 с.

27. Дополнительные главы по курсу математики 7–8 классов для факультативных занятий: Пособие для учащихся / Сост. К. П. Сикорский. М.: Просвещение, 1969. 320 с.

28. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий: Пособие для учащихся / Сост. З. А. Скопец. М.: Просвещение, 1970. 256 с.

29. *Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К.* Математические задачи. 3-е изд., перераб. М.: Наука, 1971. 79 с. (Библиотечка физико-математической школы.)

30. *Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л.* Математические соревнования. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1970. 95 с. (Библиотечка физико-математической школы.)

31. *Дышинский Е. А.* Игротека математического кружка. М.: Просвещение, 1972. 144 с.

32. *Дьюдени Г. Э.* 520 головоломок / Пер. с англ. М.: Мир, 1975. 342 с.

33. Задачи для внеклассной работы по математике в 5–6 классах: Пособие для учителей / Сост. В. Ю. Сафонова; Под ред. Д. Б. Фукса, А. Л. Гавронского. М.: Мирос, 1993. 72 с.

34. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Работ, А. Л. Тоом. М.: Наука, 1981. 128 с.

35. Зарубежные математические олимпиады / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. М.: Наука, 1987. 416 с.

36. *Зубелевич Г. И.* Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): Пособие для учителей 5–8 классов / Под ред. К. П. Сикорского. 3-е изд., перераб. М.: Просвещение, 1971. 304 с.

37. *Игнатьев Е. И.* В царстве смекалки / Под ред. М. К. Потапова. 2-е изд. М.: Наука, 1978. 191 с.

38. *Киселев А. П.* Алгебра. Часть вторая: Учебник для 9–10 классов средней школы. 42-е изд. М.: Просвещение, 1965. 232 с.

39. *Клименченко Д. В.* Задачи по математике для любознательных: Книга для учащихся 5–6 классов средней школы. М.: Просвещение, 1992. 192 с.

40. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. 9-е изд. М.: Наука, 1991. 574 с.

41. *Кордемский Б. А.* Увлечь школьников математикой: Материал для классных и внеклассных занятий. М.: Просвещение, 1981. 112 с.

42. *Кордемский Б. А., Ахадов А. А.* Удивительный мир чисел. Математические головоломки и задачи для любознательных: Книга для учащихся. М.: Просвещение, 1986. 144 с.

43. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе математики 4–5 классов: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1986. 94 с.

44. *Кострикина Н. П.* Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7–9 классов: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1991. 237 с.

45. *Кудреватов Г. А.* Сборник задач по теории чисел. М.: Просвещение, 1970. 128 с.

46. *Леман И.* Увлекательная математика / Пер. с нем. М.: Знание, 1985. 270 с.

47. *Литцман В.* Веселое и занимательное о числах и фигурах / Пер. с нем. М.: Физматгиз, 1963. 264 с.

48. *Лоповок Л. М.* Математика на досуге: Книга для учащихся среднего школьного возраста. М.: Просвещение, 1981. 158 с.

49. *Лоповок Л. М.* 1000 проблемных задач по математике: Книга для учащихся. М.: Просвещение, 1995. 240 с.

50. *Лэнгдон Н., Снайп Ч.* С математикой в путь / Пер. с англ. М.: Педагогика, 1987. 47 с.

51. *Ляпин С. Е., Баранова И. В., Борчугова З. Г.* Сборник задач по элементарной алгебре: Учебное пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Просвещение, 1973. 352 с.

52. *Мазаник А. А.* Реши сам: Пособие для учащихся. 2-е изд., перераб. Минск: Народная асвета, 1980. 239 с.

53. *Мазаник А. А.* Делимость чисел и сравнения: Пособие для учащихся. Минск: Народная асвета, 1971. 105 с.

54. *Морозова Е. А., Петраков И. С.* Международные математические олимпиады: Пособие для учащихся. 3-е изд., исправл. и дополн. М.: Просвещение, 1971. 256 с.

55. *Мочалов Л. П.* Головоломки / Под ред. А. П. Савина. М.: Просвещение, 1980. 126 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 6.)

56. *Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4—8 классов средней школы. 5-е изд. М.: Просвещение, 1988. 159 с.

57. *Нурк Э. Р., Тельгмаа А. Э.* Математика: Учебник для 5 класса средней школы. 3-е изд. М.: Просвещение, 1992. 303 с. (Раздел «Для любителей математики».)

58. *Нурк Э. Р., Тельгмаа А. Э.* Математика. Учебник для 6 класса средней школы. 2-е изд. М.: Просвещение, 1991. 224 с.

59. Олимпиады. Алгебра. Комбинаторика / Отв. ред. Л. Ф. Савельев. Новосибирск: Наука, 1979. 176 с.

60. *Оре О.* Приглашение в теорию чисел / Пер. с англ. М.: Наука, 1980. 127 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 3.)

61. *Перельман Я. И.* Занимательная арифметика. 9-е изд. М.: Физматгиз, 1959. 167 с.

62. *Перельман Я. И.* Живая математика: Математические рассказы и головоломки / Под ред. В. Г. Болтянского. 11-е изд. М.: Наука, 1978. 174 с.

63. *Перельман Я. И.* Занимательная алгебра / Под ред. В. Г. Болтянского. 13-е изд. М.: Наука, 1975. 200 с.

64. *Петраков И. С.* Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1987. 96 с.

65. *Петраков И. С.* Математические кружки в 8–10 классах: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1987. 233 с.

66. *Постников М. М.* Магические квадраты. М.: Наука, 1964. 84 с. (Математическая библиотечка.)

67. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. Киев: Вища школа, 1984. 239 с.

68. Сборник задач республиканских математических олимпиад / В. И. Михайловский, М. И. Ядренко, Г. Й. Призва, В. А. Вышенский. Киев: Вища школа, 1979. 318 с.

69. *Серпинский В.* О решении уравнений в целых числах / Пер. с польск. М.: Физматгиз, 1961. 88 с.

70. *Серпинский В.* 250 задач по элементарной теории чисел / Пер. с польск. М.: Просвещение, 1968. 160 с.

71. *Сивашинский И. Х.* Задачи по математике для внеклассных занятий. 9–10 классы / Под ред. В. Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1968. 312 с.

72. *Сивашинский И. Х.* Теоремы и задачи по алгебре и элементарным функциям. М.: Наука, 1971. 368 с.

73. *Смышляев В. К.* Практикум по решению задач школьной математики: Учебное пособие для студентов-заочников пятого курса физико-математических факультетов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1978. 96 с.

74. *Тригг Ч.* Задачи с изюминкой / Пер. с англ.; Под ред. В. М. Алексеева. М.: Мир, 1975. 302 с.

75. *Туманов С. И.* Поиски решения задачи: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1969. 280 с.

76. Факультативный курс по математике: Для 7–9 классов средней школы / Сост. И. Л. Никольская. М.: Просвещение, 1991. 383 с.

77. *Фомин Д. В.* Задачи ленинградских математических олимпиад: Методическое пособие. Л., 1990. 80 с.

78. *Хамзин Х. Х.* Материал для школьных математических олимпиад. Уфа, 1962. 83 с.

79. *Хонсбергер Р.* Математические изюминки / Пер с англ. М.: Наука, 1992. 174 с. (Библиотечка «Квант». Вып. 83.)

80. *Шарыгин И. Ф.* Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. М.: Просвещение, 1989. 252 с.

81. *Шарыгин И. Ф.* Математический винегрет. М.: Орион, 1991. 64 с.

82. *Шарыгин И. Ф., Шевкин А. В.* Математика. Задачи на смекалку: Учебное пособие для 5–6 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1995. 80 с.

83. *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики: Арифметика и алгебра. 5-е изд., перераб. М.: Наука, 1976. 384 с.

84. Школа в «Кванте»: Арифметика и алгебра. М.: Бюро «Квантум», 1994. 128 с. (Приложение к журналу «Квант», № 2. 1994.)

85. Журнал «Квант», 1970–1996. (Разделы «Задачник «Кванта», «Квант» для младших школьников», «Математический кружок».)

86. Журнал «Математика в школе», 1934–1996. (Раздел «Задачи».)

87. *Башмаков М. И.* Нравится ли вам возиться с целыми числами? // Квант. 1971. № 3. С. 15–20.

88. *Булавко И. Г.* Делимость чисел // Квант. 1974. № 9. С. 70–73.

89. *Гейн А. Г.* Перед школьной олимпиадой // Квант. 1983. № 10. С. 28–30.

90. *Губа С. Г.* Произведение двух последовательных натуральных чисел // Математика в школе. 1983. № 4. С. 51–52.

91. *Егоров А.* Деление с остатком и сравнения по модулю // Квант. 1991. № 6. С. 36–39, 49.

92. *Ионин Ю. И., Плоткин А. И.* Выбор модуля // Квант. 1984. № 6. С. 28–30.

93. Каникулярный калейдоскоп // Квант. 1993. № 11–12. С. 48.

94. *Кордемский Б.* Спрятанная арифметика // Квант. 1978. № 3. С. 42–43.

95. *Котляр Б.* Сколько у числа делителей? // Квант. 1994. № 4. С. 15–18.

96. *Курляндчик Л., Розенблюм Г.* Метод бесконечного спуска // Квант. 1978. № 1. С. 24–27.

97. Ребусы, ребусы, ребусы... // Квант. 1992. № 7.

98. *Савин А., Семенов Е.* Сеанс парапсихологии // Квант. 1992. № 10. С. 37–39.

99. *Савин А.* Магические квадраты // Квант. 1995. № 4. С. 32–33.

100. *Соловьев Ю.* Неопределенные уравнения первой степени // Квант. 1992. № 4. С. 42–46, 55.

101. *Хамзин Х. Х.* Задачи для внеклассной работы по математике в средней школе // В помощь учителю математики. Вып. 2. Челябинск. 1969. С. 73–99.

Оглавление

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задачи с целыми числами

Учебное пособие
для учащихся 7—11 классов

Автор-составитель *Галкин Евгений Васильевич*

Редактор *Калинина Ю. А.*
Корректор *Ильина В. В.*
Дизайн обложки — *Андрусенко С. В.*
Компьютерная верстка — *Чигинцева Т. В.*

ИД № 01459 от 05.04.2000.
Подписано в печать 3.12.2004. Формат 70x90/16.
Гарнитура NewtonC. Бумага Гознак для ВХИ 65 г/м^2.
Усл. п. л. 19,89. Тираж 3 000 экз.
Цена свободная.
Заказ № 579.

Издательский центр «Взгляд»
454048, г. Челябинск, ул. Худякова, 10
Тел.: (3512) 60-71-55
E-mail: sales@vzglyad.e7.ru

Отпечатано с готового оригинал-макета в ГУП ЧПО «Книга
454000, г. Челябинск, ул. Постышева, 2

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЗГЛЯД»