Е.В. ГАЛКИН

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

5–11

Е. В. ГАЛКИН

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

Книга для учащихся 5-11 классов

«ПРОСВЕЩЕНИЕ» — «УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА»
МОСКВА 1996

УДК 087.5
ББК 22.1
Г-16

Рецензенты:
учитель-методист школы № 420 Москвы ***Б. П. Пигарев***
учитель школы № 324 Москвы ***Т. Я. Додзина***

Галкин Е. В.
Г-16 Нестандартные задачи по математике: Задачи логич. характера: Кн. для учащихся 5-11 кл. М.: Просвещение; Учебная литература, 1996. — 160 с.: ил. — ISBN 5-09-007092-X

Книга содержит задачи логического характера, систематизированные по классам, темам, методам их решения, степени трудности. Среди них много задач, имеющих необычную формулировку, неожиданное решение, иногда довольно простое, но требующее значительных умственных усилий, что будет способствовать развитию математической интуиции, нестандартного мышления учащихся. Часть задач приведена с решениями и ответами.

Кроме учащихся, книга будет полезна учителям математики, студентам и преподавателям педвузов и всем интересующимся математикой.

Г $\frac{4306020000 - 586}{103(03) - 96}$ План выпуска 1996 г., № 196 **ББК 22.1**

ISBN 5-09-007092-X

СЛОВО К ЧИТАТЕЛЮ

Эта книга предназначена для разных категорий читателей: для школьников, учителей математики, студентов и преподавателей педагогических вузов, наконец, для всех интересующихся математикой на школьном уровне. Она, надеюсь, будет полезна для подготовки учащихся к математическим олимпиадам и проведения таких олимпиад учителями, для кружковых занятий в школах, для проведения в педагогических вузах практикума по решению школьных математических задач повышенной трудности. Основное назначение книги — олимпиады школьников.

К настоящему времени в центральных и местных издательствах выпущены десятки, если не сотни, сборников олимпиадных задач. Таким задачам посвящено немало статей. Журналы "Квант" и "Математика в школе" систематически печатают нестандартные задачи. Кроме того, задачи повышенной трудности имеются в некоторых школьных учебниках по математике. Авторы составили большое количество интересных нестандартных задач, однако зачастую опубликованные задачи слишком трудны для начинающих. Главное же — в них почти нигде нет системы: в сборниках очень часто рядом помещаются задачи, существенно отличающиеся друг от друга не только по степени трудности, но и по методу решения.

По мнению И. С. Рубанова, заведующего кафедрой геометрии Кировского педагогического института, энтузиаста и мастера работы со школьниками, мнению, которое я полностью разделяю, олимпиадные задачи по степени трудности можно разбить на следующие три группы:

1) задачи первого уровня, которые примерно соответствуют школьным и районно-городским олимпиадам,

2) второго уровня — областным и многим задачам всероссийских олимпиад (четвертого и пятого этапов российских олимпиад),

3) третьего — это некоторые задачи всероссийских, а также задачи межреспубликанских и международных олимпиад.

Естественно, начинать нужно с задач первого уровня. Но как раз сборников таких задач немного, а в имеющихся мало разнообразия. Надеюсь, эта книга в какой-то мере восполнит указанный пробел в нашей литературе. Здесь рассматриваются а з ы олимпиадных задач.

Во время многочисленных поездок по школам Челябинской области мне приходилось видеть значительное число учащихся, подающих большие надежды по математике, с которыми следовало бы заниматься решением нестандартных задач для того, чтобы развить их способности и интерес к математике. Однако, как правило, выяснялось, что в школе это делать некому, а в библиотеке школы мало сборников задач повышенной трудности и их подбор случаен. Выход в том, чтобы обеспечить возможность учителю и ученику обучаться решению таких задач, главным образом, самостоятельно. Задачи данного сборника и предназначены для с а м о с т о я т е л ь н о г о решения.

Важный, но и трудный вопрос: что такое нестандартная задача? Авторы сборников олимпиадных задач на этот вопрос, как правило, не отвечают. Привожу свой ответ, не претендуя на исчерпывающую полноту. Самое главное: для хорошей нестандартной задачи характерно отнюдь не лежащее на поверхности, необычное, зачастую неожиданное решение. Сюда же следует отнести и задачи с необычной формулировкой, порой с довольно простым решением, но требующие значительных умственных усилий для того, чтобы понять их условие. Добавлю, что при решении таких задач применяются, кроме известных средств, понятия и методы, которые не входят в программу по математике средней школы.

Каждый параграф книги снабжен списком литературы по данной теме и указанием классов, для которых он предназначен. Последнее носит лишь приблизительный характер и может быть, в зависимости от обстоятельств, несколько изменено в ту или другую сторону. Представим себе, например, такую ситуацию: какой-либо параграф рекомендован для учащихся 9—11-х классов, но задачами из него заинтересовался восьмиклассник. Он вполне может решать подобные задачи, если только он знаком, скажем, с материалом по алгебре, который используется в решениях. Похожее положение возникает и в том случае, когда учитель, начиная занятия в кружке или на факультативе, обнаруживает, что группа школьников, с которой ему предстоит заниматься, сильнее обычной. Напротив, может оказаться, что школьник впервые увлекся олимпиадными задачами в девятом или даже десятом классе и хочет решать их самостоятельно; в этом случае ему сначала нужно проработать некоторые параграфы, предназначенные для предшествующих классов.

Наиболее важными в данной книге являются темы “Графы” (§ 3), “Комбинаторные задачи” (§ 6), “Принцип Дирихле” (§ 10) и “Разные задачи логического характера” (§ 14).

Рассматривая задачи из какого-либо параграфа, лучше решать их в последовательном порядке. Лишь в случае, если вы ощутите, что некоторые задачи для вас слишком легки, можно их пропустить. Если же это ощущение относится ко всей книге, следует перейти к сборникам задач второго уровня, например: книге И. Л. Бабинской [4], сборнику задач всероссийских олимпиад [17], книгам Е. Б. Дынкина и др. [28] и [29], сборникам задач украинских и киевских олимпиад [58] и [59], ленинградских олимпиад [63].

Не нужно стремиться проработать эту книгу в течение одного учебного года. Рациональнее для работы на год отобрать олимпиадные задачи из разных крупных тем: задачи логического характера, задачи по алгебре, геометрии, наконец, задачи с целыми числами.

Задачи логического характера, пожалуй, наиболее важны среди олимпиадных задач, так как в них дух нестандартности, необычности проявляется ярче, четче всего. Но что такое задача логического характера?

Задачи логического характера большей частью связаны с теорией множеств, одни — непосредственно: задачи на логические таблицы (§ 2), на графы (§ 3), операции над множествами (§ 4), выделение элемента множества (§ 5), комбинаторные задачи (§ 6), правило крайнего (§ 12), другие — косвенно. Многие задачи логического характера связаны с определенным образом действий: можно ли и каким путем получить такой-то результат? Здесь под эту рубрику подходят параграфы 1, 3 (3.3 и 3.4), 8, 9, 11, 13, часть задач из § 14. Для некоторых задач логического характера принципиально важны логические связи между предложениями; типичны в этом отношении § 8 “Правдолюбцы и лжецы” и § 9 “Истинные и ложные утверждения”. Задачи логического характера, как правило, не привязаны к определенным темам школьной программы, а один и тот же метод решения нередко можно применять к большому числу разнообразных задач; примерами здесь могут служить § 3 “Графы” и § 10 “Принцип Дирихле”. При таком толковании термина (“задача логического характера") он охватывает гораздо более широкий круг задач, чем те, которые обычно принято связывать со словами "логические задачи".

В параграфах 1—13 (за исключением § 7) рассматриваются типовые задачи — задачи, связанные с определенным методом решения, в § 14 — разные задачи логического характера.

Несколько выпадает из общего стиля книги § 7 "Метод перебора", поскольку в этом параграфе метод перебора демонстрируется главным образом на задачах с целыми числами. Но такой метод следует применять и при решении многих задач логического характера. Здесь он используется в большинстве параграфов книги.

Пусть не сетует читатель, что в данном сборнике решена лишь меньшая часть помещенных в нем задач. Научиться решать нестандартные задачи можно только одним способом — решать их, и притом самостоятельно. Успехов вам в этом интерсеном и важном деле!

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

V-IX — в заголовке параграфа (или части параграфа): он предназначен для учащихся V-IX классов

в — в номере источника из списка литературы к параграфу: важный источник, который нужно использовать в данном параграфе в первую очередь

о — в номере задачи: опорная задача, утверждение которой следует использовать при решении нескольких последующих задач

***** — в номере задачи (или параграфа): задача (или задачи) повышенной трудности

△ — начало решения задачи

▲ — окончание решения задачи

§ 1. ПЕРЕЛИВАНИЯ V—IX

Большинство задач данного параграфа предназначено для V-VII классов. Но задачи 8-10 лучше решать в VII-VIII классах, а задачи 11-14 — в VIII-IX.

Литература: [4], [6], [16], [24[в]], [49], [75[в]].

Рассмотрим задачи на наливание определенного количества жидкости с помощью двух (иногда трех) пустых сосудов. При этом разрешаются только две операции: опорожнить один сосуд и наполнить до краев другой.

1. Один человек имеет в бочонке 12 пинт вина (пинта — старинная французская мера объема, 1 пинта ≈ 0,568 л) и хочет подарить половину вина, но у него нет сосуда в 6 пинт, однако имеются два пустых сосуда объемом 8 пинт и 5 пинт. Как с их помощью отлить ровно 6 пинт вина?

Это наиболее известная из задач такого рода; она называется задачей Пуассона. Знаменитый французский математик, механик и физик Симеон Дени Пуассон (1781-1840) решил ее в юности и впоследствии говорил, что именно она побудила его стать математиком.

△ Решение задачи можно записать следующим образом:

Сосуд объемом 8 пинт	0	8	3	3	0	8	6	6
Сосуд объемом 5 пинт	0	0	5	0	3	3	5	0

Понимать это нужно так. Сначала оба сосуда пусты (первый столбец). Наполним сосуд объемом 8 пинт (второй столбец), затем из него наполним сосуд объемом 5 пинт (третий столбец), потом эти 5 пинт из меньшего сосуда выльем в бочонок, содержавший 12 пинт (четвертый столбец), затем 3 пинты вина из сосуда объемом 8 пинт перельем в сосуд емкостью 5 пинт (пятый столбец) и т. д. до тех пор, пока в большем из двух сосудов не окажется 6 пинт вина. ▲

Попробуйте решить задачу иначе, наполнив сначала сосуд емкостью 5 пинт. Не получится ли решение короче?

Несколько иной метод решения подобных задач — с помощью графов рассмотрен в пособии [16].

2. Имеются два пустых бидона — трехлитровый и пятилитровый. Как, пользуясь этими бидонами, набрать из реки ровно 1 л воды?

3. Как налить ровно 4 л воды, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 5 л и 7 л, водопроводным краном для наливания воды и раковиной для ее выливания?

4. Как из бочки с квасом налить ровно 3 л кваса, пользуясь пустыми девятилитровым ведром и пятилитровым бидоном?

5. Можно ли, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 л и 9 л, набрать из речки ровно 4 л воды?

△ Так как начальные емкости ведер делятся на 3, то при любом переливании из одного ведра в другое и набирании воды из речки в каждом из них будет находиться количество воды с объемом, делящимся на 3. Но поскольку 4 на 3 не делится, то 4 литра воды получиться не могут.

Ответ: нельзя. ▲

Подумаем над обобщением этой задачи. Пусть имеются два пустых сосуда объемом a л и b л и требуется набрать из реки ровно c л воды (где a, b и c — натуральные числа, причем c не превосходит большего из чисел a и b). Если число c не делится на наибольший общий делитель чисел a и b, то, аналогично предыдущему, это сделать невозможно.

Ну а если c делится на наибольший общий делитель чисел a и b? Можно доказать, что в таком случае задача всегда имеет решение. В частности, это всегда возможно, если числа a и b взаимно просты.

6. Как с помощью двух пустых бидонов емкостью 17 л и 5 л отлить из молочной цистерны ровно 13 л молока?

7. Как, пользуясь двумя пустыми ведрами объемом 12 л и 7 л, а также водопроводным краном и раковиной, налить ровно 1 л воды?

8. В бидоне не менее 10 л молока. Как отлить из него ровно 6 л молока с помощью пустых девятилитрового ведра и пятилитрового бидона?

△ Обозначим начальное количество молока в первом бидоне через a л. Поразмышляем, как использовать тот факт, что число a не меньше 10? Разностью $a-10$ пользоваться можно, а разностью $a-11$ уже нельзя. Решение записывается так:

Бидон объемом a л	a	$a-5$	$a-5$	$a-10$	$a-10$	$a-1$	$a-1$	$a-6$	$a-6$
Ведро объемом 9 л	0	0	5	5	9	0	1	1	6
Бидон объемом 5 л	0	5	0	5	1	1	0	5	0

▲

9. В бочке находится не менее 13 ведер бензина. Как отлить из нее ровно 8 ведер бензина с помощью двух пустых девятиведерного и пятиведерного бидонов?

10. В бидоне находится 18 л подсолнечного масла. Имеются два пустых ведра объемом по 7 л, в которые нужно налить по 6 л масла. Кроме того, есть черпак объемом 4 л. Как можно выполнить разлив?

11. Три мошенника украли в магазине бутыль с бальзамом и три пустых флакона для дележа добычи. В укромном месте они прочитали надписи, сделанные на бутыли и флаконах, и узнали, что бутыль вмещает 30 унций, а флаконы — 14, 12 и 6 унций соответственно (одна унция приближенно равна 31,1 г). Как им разделить добычу поровну?

12*. Сколькими способами можно из бидона объемом 12 л, наполненного молоком, перелить молоко в другой пустой бидон того же объема с помощью двух пустых банок объемом 1 л и 2 л? Переливание из банки в банку не допускается.

Обратим внимание, что здесь вопрос задачи иной, чем в предыдущих задачах.

△ Обозначим через a_n число способов, которыми можно перелить молоко из наполненного бидона емкостью n л (где $n \in \boldsymbol{N}$) с помощью двух пустых банок емкостью 1 л и 2 л.

Если вначале использовать банку емкостью 1 л, то в первом бидоне останется $n-1$ л молока, и перелить его можно a_{n-1} способами.

Если же сначала использовать банку емкостью в 2 л, то останется $n-2$ л, и перелить их можно a_{n-2} способами. Следовательно, получаем:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Этой формулой можно пользоваться только при $n > 2$. (В математике формулу, выражающую общий член последовательности через один или несколько предыдущих ее членов, называют **рекуррентной** формулой.)

Если бы вначале в бидоне было не 12, а 1 или 2 л молока, то перелить его в другой бидон можно соответственно одним или двумя способами:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2.$$

Введем еще нулевой член последовательности, полагая $a_0 = 1$. Тогда полученной формулой можно пользоваться и при $n = 2$:

$$a_2 = a_1 + a_0 = 1 + 1 = 2.$$

Теперь вычислим в последовательном порядке все члены от a_3 до a_{12} включительно:

$$a_3 = a_2 + a_1 = 2+1=3, \quad a_4 = a_3 + a_2 = 3+2=5, \quad a_5 = a_4 + a_3 = 5+3 = 8,$$
$$a_6 = a_5 + a_4 = 8+5 = 13, \quad a_7 = 21, \ a_8 = 34,$$
$$a_9 = 55, \quad a_{10} = 89, \quad a_{11} = 144, \quad a_{12} = 233.$$

Ответ: 233. ▲

При решении этой задачи получилась последовательность

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots,$$

у которой два первых члена равны 1, а каждый последующий, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Она играет важную роль в теории чисел и называется **последовательностью Фибоначчи** по имени итальянского ученого Леонардо Фибоначчи (1180-1240).

13*. В бидон емкостью более 10 л нужно налить из реки ровно 10 л воды, пользуясь двумя пустыми банками емкостью 2 л и 3 л. Сколькими способами можно это сделать? Переливание из банки в банку не допускается.

В заключение рассмотрим еще одну задачу, где допускаются иные переливания, чем до сих пор.

14*. Имеются два сосуда объемом 1 л каждый, один из них наполнен кофе, другой — пустой. Кофе последовательно переливают из первого сосуда во второй, из второго — в первый, из первого — снова во второй и т. д., причем доля отливаемого кофе составляет соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ и т. д. от количества кофе в сосуде, из которого оно отливается. Сколько кофе будет в каждом из сосудов после 125 переливаний?

§ 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ V—VIII

Литература: [10в], [46в], [47], [51].

Задачи на логические таблицы — это задачи на соответствие (взаимно однозначное) между двумя множествами, где нахождение такого соответствия производится с помощью специальных таблиц. Применение таблиц значительно ускоряет, почти автоматизирует решение задачи.

15. Встретились три друга — Белов, Серов и Чернов. Чернов сказал другу, одетому в серый костюм: “Интересно, что на одном из нас белый костюм, на другом — серый и на третьем — черный, но на каждом костюм цвета, не соответствующего фамилии”. Какой цвет костюма у каждого из друзей?

△ Возьмем таблицу 4×4. В левом столбце таблицы напишем фамилии друзей (обозначив каждую своей первой буквой), в верхней строке — цвета их костюмов. По условию на Белове — не белый костюм, на Серове — не серый и на Чернове — не черный. Поставим три минуса на пересечении соответствующих строк и столбцов таблицы (см. таблицу слева).

	б	с	ч
Б	–		
С		–	
Ч			–

	б	с	ч
Б	–	+	–
С	–	–	+
Ч	+	–	–

Далее, на Чернове — не серый костюм, так как из условия видно, что в серый костюм одет один из его друзей; ставим минус в соответствующей клетке. Следовательно, на нем может быть только костюм белого цвета; поставим в соответствующей клетке таблицы плюс.

Тогда на Серове — не белый костюм; значит, на нем может быть лишь черный костюм. Наконец, на Белове — серый костюм (см. таблицу справа). ▲

Эту задачу нетрудно было бы решить и без помощи таблицы — непосредственным перебором. Но если в подобной задаче нужно установить соответствие между двумя множествами, каждое из которых содержит не по три, а по четыре, пять или шесть элементов, то ее решение с помощью таблицы гораздо проще.

Обратим внимание на следующее свойство таблицы, которое остается справедливым в аналогичных задачах на соответствие между двумя множествами, но только лишь в тех случаях, когда эти множества содержат элементов поровну: в каждой строке таблицы имеется только один плюс, в каждом столбце также имеется только один плюс. Следовательно, если в какой-либо клетке таблицы стоит плюс, то в остальных клетках, стоящих в той же строке или в том же столбце, может быть только минус.

16. А, Б, В и Г — друзья. Один из них — врач, другой — журналист, третий — тренер спортивной школы и четвертый — строитель. Журналист написал статьи об А и Г. Тренер и журналист вместе с Б ходили в туристический поход. А и Б были на приеме у врача. У кого какая профессия?

17. Написав контрольную работу по математике, три сестры сообщили родителям следующее.

Ира: “Я написала не на 5.”

Светлана: “На этот раз я написала на 5.”

Лиза: “Я написала не на 3.”

После проверки работ выяснилось, что сестры получили разные положительные оценки и из трех высказываний сестер только одно верное. Какую оценку получила за контрольную работу каждая из сестер?

(Указание: рассмотрите все возможные случаи в зависимости от того, кто получил оценку 5, или от того, чье высказывание оказалось верным.)

18. В бутылке, стакане, кувшине и банке налиты молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко находятся не в бутылке, в банке — не лимонад и не вода, а сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Определите, где какая жидкость.

19. В одном дворе живут четыре друга. Вадим и шофер старше Сергея; Николай и слесарь занимаются боксом; электрик — младший из друзей; по вечерам Антон и токарь играют в домино против Сергея и электрика. Определите профессию каждого из друзей.

20. В розыгрыше первенства по волейболу команда А отстала от команды Б на три места, команда Е опередила Б, но отстала от Д, команда В опередила команду Г. Какое место заняла каждая из этих шести команд?

△ Рассмотрим таблицу 7×7.

По первому условию команда А не могла занять первое, второе или третье место. Значит, она заняла четвертое, пятое или шестое место. Тогда команда Б заняла соответственно первое, второе или третье место.

Так как команда Б отстала не только от команды Е, но и от команды Д, то она могла занять лишь третье место. Тогда у команды Е — второе, а у команды Д — первое место. Поскольку команда А отстала от команды Б на три места, то она заняла шестое место. Остались команды В и Г, а также четвертое и пятое места. Так как команда В опередила команду Г, то она заняла четвертое, а команда Г — пятое место.

Ответ: команды, начиная с первого места, расположились соответственно в порядке Д, Е, Б, В, Г, А. ▲

21. Восемь школьников выстроились так, что А был впереди Б и В; Б — после К через одного; Л — впереди А, но после Д; В — после М через одного; Д — между Б и Г; К — сразу за М, но впереди В. В каком порядке выстроились школьники?

22. На каждой из четырех коробок написан цвет вложенных в нее двух мотков пряжи: ББ, БЗ, БК, ЗК (Б — белый, З — зеленый, К — красный), но каждая надпись соответствует содержимому другой коробки. Какие мотки вложены в каждую из коробок?

	1	2	3	4	5	6
А	–	–	–	–	–	+
Б	–	–	+	–	–	–
В	–	–	–	+	–	–
Г	–	–	–	–	+	–
Д	+	–	–	–	–	–
Е	–	+	–	–	–	–

23. Журавлев, Данилов и Никольский — друзья и владеют каждый двумя из следующих шести иностранных языков: английским, французским, немецким, итальянским, испанским и арабским. Каждым из этих языков владеет только один из них.

Знающие французский и испанский языки — любители хоккея. Журавлев — самый младший из друзей. Никольский чаще ходит в гости к знающему немецкий язык, чем к знающему испанский язык. Знающий немецкий язык старше знающего арабский язык. Журавлев и владеющий английским языком часто играют в шахматы, а владеющий арабским языком нс умеет играть в шахматы. Какими языками владеет каждый из друзей?

(Указание: используйте таблицу 4×7.)

24*. Разбирается дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В ходе слсдствия каждый из них сделал по два заявления.

Браун: "Я не делал этого. Джонс не делал этого".

Смит: "Я не делал этого. Это сделал Браун".

Джонс: "Браун не делал этого. Это сделал Смит".

Потом оказалось, что один из них дважды сказал правду, другой — дважды солгал, третий — раз сказал правду, раз солгал. Кто совершил преступление?

△ Трудность в том, что мы не знаем, кто оба раза сказал правду, кто солгал дважды и кто — только один раз. Рассмотрим три случая.

1) Пусть оба раза правду сказал Браун.

Так как, согласно его заявлениям, он и Джонс не совершали преступления, то совершить его мог только Смит. Заполним следующую таблицу (табл. 1).

Условимся ставить плюсы лишь в клетках столбца, соответствующего преступнику, минусы — в остальных клетках. Буквами "п" и "л" справа от плюсов и минусов будем обозначать, правдиво или ложно данное заявление.

Получилось, что не только Браун, но и Джонс оба раза сказали правду. Но это противоречит условиям задачи.

2) Пусть оба раза правду сказал Джонс.

Составим таблицу (табл. 2). И здесь получилось, что и Джонс, и Браун оба раза сказали правду.

3) Пусть теперь оба раза правду сказал Смит.

Заполним таблицу (табл. 3). Получилось, что этот случай возможен. Так как такой случай только один, то преступником является Браун.

Ответ: Браун. ▲

Таблица 1

Преступник / Имя	Б	Д	С
Браун	–п	–п	+
Джонс	–п		+п
Смит			

Таблица 2

Преступник / Имя	Б	Д	С
Браун	–п	–п	+
Джонс	–п		+п
Смит			

Таблица 3

Преступник / Имя	Б	Д	С
Браун	–л	–п	
Джонс	+л		+л
Смит	+п		–п

25*. Милиционер обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от окна, разбитого футбольным мячом. Через несколько минут они были в отделении милиции. При расспросах они сказали следующее.

Андрей: “Это не я. Это Григорий предложил играть в футбол. Виктор не виноват”.

Виктор: “Это не я. Это не Андрей. Если бы я знал, чем это кончится, не стал бы играть в футбол”.

Борис: “Это не я. Это сделал Виктор. Я играю в футбол лучше Григория”.

Григорий: “Это не я. Это сделал Виктор. Когда я пришел, игра была в полном разгаре”.

Из дальнейшего разговора выяснилось, что каждый два раза сказал правду, а один раз солгал. Кто разбил окно?

С другим методом решения подобных задач — с помощью графов, мы познакомимся позднее (см. § 3, п. 3.1).

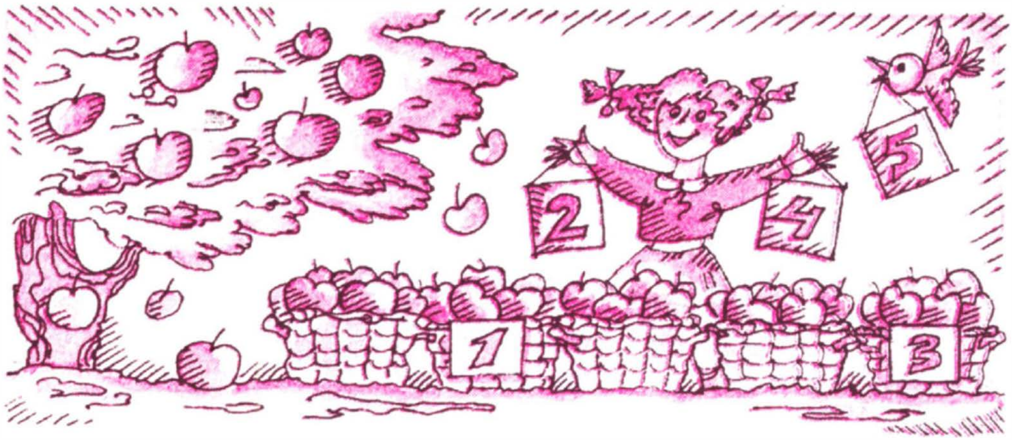
§ 3. ГРАФЫ VII—XI

Литература: [8в], [25], [33], [46в], [47], [52в], [78].

Графом на плоскости называется конечное множество точек плоскости, некоторые из которых соединены линиями. Эти точки называются вершинами графа, а соединяющие их линии — ребрами. Число ребер, исходящих из вершины графа, называется степенью этой вершины.

С графами мы встречаемся чаще, чем это, возможно, кажется на первый взгляд. Примерами графов могут служить любая карта дорог, электросхема, чертеж многоугольника и т. д.

Теория графов возникла в 1736 г., когда Леонард Эйлер (1708—1783), знаменитый швейцарский ученый, пожалуй,



самый крупный математик XVIII столетия, который более 30 лет проработал в России, опубликовал первую статью о графах. Начиналась она с разбора широко известной теперь задачи о кенигсбергских мостах (см. задачу 40). Долгое время считалось, что теория графов применяется главным образом при решении логических задач, а сама теория рассматривалась как часть геометрии. Однако в XX веке были найдены широкие приложения теории графов в экономике, биологии, химии, электронике, сетевом планировании, комбинаторике и других областях науки и техники. В результате она стала бурно развиваться и превратилась в самостоятельную разветвленную теорию.

Теория графов — прекрасная тема для кружковых занятий в VIII-IX классах (см. [8] и [52]).

3.1. VII—VIII

Рассмотрим задачи на соответствие между двумя множествами. По существу это те же задачи, которые мы в § 2 решали с помощью таблиц.

26. В пяти корзинах А, Б, В, Г и Д лежат яблоки пяти разных сортов. В каждой из корзин А и Б находятся яблоки 3-го и 4-го сорта, в корзине В — 2-го и 3-го, в корзине Г — 4-го и 5-го, в корзине Д — 1-го и 5-го. Занумеруйте корзины так, чтобы в корзине № 1 имелись яблоки 1-го сорта (по меньшей мере одно), в корзине № 2 — яблоки 2-го сорта и т. д.

△ Изобразим два множества — множество корзин и множество их номеров. В каждом из этих множеств по пять элементов; обозначим их точками (рис. 1).

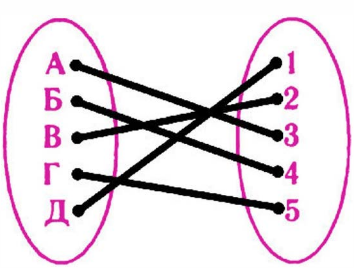


Рис. 1

Установим соответствие между этими двумя множествами так, чтобы условия задачи выполнялись. Будем соответствующие элементы двух множеств соединять сплошными линиями, а не соответствующие — пунктирными или совсем не соединять.

Так как яблоки первого сорта лежат только в корзине Д, то именно этой корзине и нужно дать номер 1; проведем сплошную линию между точками Д и 1. Далее, номер 2 можно присвоить только корзине В, а после этого номер 5 — лишь корзине Г. Наконец, номера 3 и 4 дадим корзинам А и Б (в любом порядке).

Ответ: корзины расположились, начиная с № 1, в последовательном порядке Д, В, А, Б, Г или в порядке Д, В, Б, А, Г. ▲

27. Петр, Геннадий, Алексей и Владимир занимаются в одной детской спортивной школе в разных секциях: гимнастики, легкой атлетики, волейбола и баскетбола. Петр, Алексей и волейболист учатся в одном классе. Петр и Геннадий на тренировки ходят пешком вместе, а гимнаст ездит на автобусе. Легкоатлет не знаком ни с волейболистом, ни с баскетболистом. Кто в какой секции занимается?

28. Команды А, Б, В, Г и Д участвовали в эстафете. До соревнований пять болельщиков высказали такие прогнозы.

1) Команда Д займет 1-е место, команда В — 2-е;
2) команда А займет 2-е место, Г — 4-е;
3) В — 3-е место, Д — 5-е;
4) В — 1-е место, Г — 4-е;
5) А — 2-е, В — 3-е.

В каждом прогнозе одна часть подтвердилась, другая — нет. Какое место заняла каждая из команд?

29. Футбольные команды пяти школ города участвуют в розыгрыше кубка. В финал кубка выходят две команды. До соревнований пять болельщиков высказали прогнозы, что в финал выйдут команды:

1) Б и Г, 2) В и Д, 3) Б и В, 4) А и Г, 5) Г и Д.

Один прогноз оказался полностью неверным, в остальных была правильно названа только одна из команд-финалисток. Какие команды вышли в финал?

3.2. VIII—IX

Займемся задачами на соответствие между несколькими (обычно тремя) множествами.

30. Три подруги были в белом, красном и голубом платьях. Их туфли были тех же трех цветов. Только у Тамары цвета платья и туфель совпадали. Валя была в белых туфлях. Ни платье, ни туфли Лиды не были красными. Определите цвет платья и туфель каждой из подруг.

△ Изобразим три множества: множество подруг, множество их платьев и множество их туфель (рис. 2).

Проведем на рисунке сплошные и пунктирные линии, отвечающие условиям задачи (аналогично тому как это было в задаче 26.

Ответ должен получиться в виде трех треугольников со сплошными сторонами.

Теперь ясно, что у Лиды голубые туфли, у Тамары — красные туфли и, следовательно, красное платье. Далее, у Лиды — белое платье, у Вали — голубое.

Ответ: Тамара — в красном платье и красных туфлях, Валя — в голубом платье и белых туфлях, Лида — в белом платье и голубых туфлях. ▲

31. Три товарища — Владимир, Игорь и Сергей — окончили один и тот же педагогический институт и преподают математику,

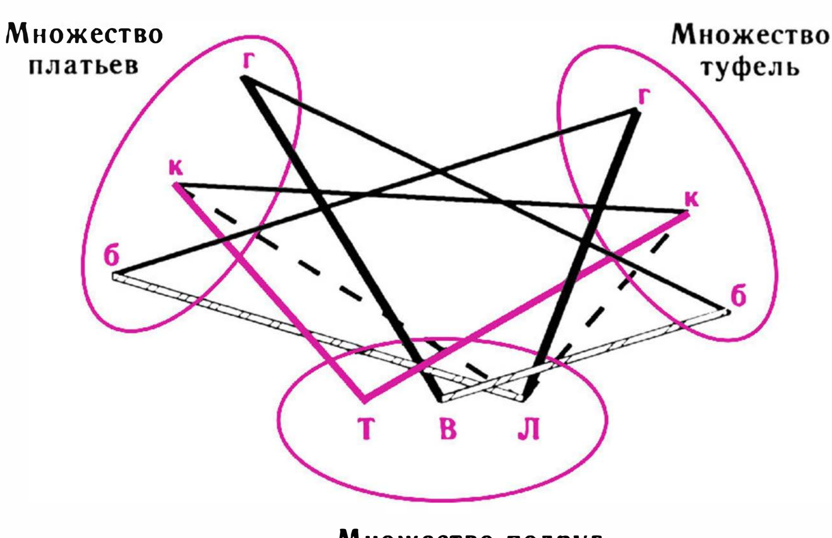


Рис. 2

физику и литературу в школах Тулы, Рязани и Ярославля. Владимир работает не в Рязани, Игорь — не в Туле. Рязанец преподает не физику, Игорь — не математику, туляк преподает литературу. Какой предмет и в каком городе преподает каждый из них?

32. Среди офицеров А, Б, В и Г — майор, капитан и два лейтенанта. А и один из лейтенантов — танкисты, Б и капитан — артиллеристы, А младше по званию, чем В. Определите род войск и воинское звание каждого из них.

3.3. VIII—XI

Рассмотрим задачи, при решении которых используются *вершины, стороны и диагонали многоугольника*.

33. Можно ли организовать футбольный турнир девяти команд так, чтобы каждая команда провела по четыре встречи?

На практике возникает необходимость провести соревнования довольно большого числа участников за короткое время; так бывает, например, при проведении футбольных турниров на приз открытия сезона и при организации шахматных турниров. В этом случае каждый участник соревнуется не со всеми остальными, а с меньшим числом участников.

△ Изобразим каждую команду точкой, а проведенную ею встречу — отрезком, исходящим из этой точки. Девять точек лучше расположить так, чтобы при последовательном соединении их отрезками образовался выпуклый девятиугольник.

Задача сводится к следующей: можно ли девять точек соединить отрезками так, чтобы из каждой точки выходили четыре отрезка? Другими словами, существует ли граф с девятью вершинами, у которого степень каждой вершины равна 4?

Прежде всего проведем все стороны девятиугольника; они будут означать, что каждая команда провела две встречи. Для

того чтобы получить еще по две встречи, будем, например, соединять все вершины диагоналями через одну (рис. 3). (Целесообразно для всех вершин держаться одной и той же системы проведения из них отрезков, иначе решение усложнится.) После этого все получается.

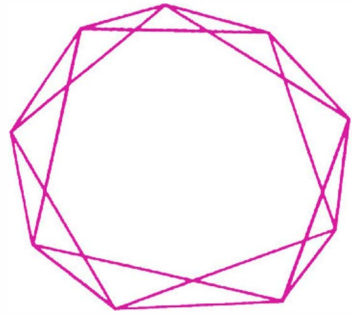


Рис. 3

Ответ: можно. ▲

34. Можно ли провести футбольный турнир восьми команд так, чтобы каждая команда провела:

а) по четыре встречи; б) по пять встреч?

35. Можно ли провести футбольный турнир семи команд так, чтобы каждая команда провела по три встречи?

△ Попытки решить эту задачу тем же методом, что и в задачах 33 и 34, приводят к неудаче. Возникает подозрение, что провести турнир таким образом нельзя.

Для того чтобы доказать нашу гипотезу, попробуем вместо рисунка подсчитать общее число встреч, которые нужно провести командам. Оно равно $7 \cdot \frac{3}{2}$. Но это число не является целым.

Ответ: нельзя. ▲

36°. Докажите, что общее число вершин графа, которые имеют нечетную степень, четно.

Это предложение является одной из теорем теории графов.

△ Обозначим число вершин графа, имеющих нечетную степень, через k, а степени таких вершин — соответственно через $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Кроме того, у графа могут быть вершины с четной степенью; обозначим степени этих вершин соответственно через $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Допустим, что число k нечетно. Подсчитаем общее число ребер графа. Оно равно

$$\frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_k) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{2}.$$

Сумма в первых скобках числителя полученной дроби есть число нечетное, как сумма нечетного числа нечетных слагаемых, а сумма во вторых скобках — число четное. Но тогда весь числитель — число нечетное, а значит, дробь не является натуральным числом. Мы пришли к противоречию. ▲

37. Можно ли 15 телефонов соединить между собой так, чтобы каждый из них был связан ровно с 11 другими?

38. Девять школьников, разъезжаясь на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки пятерым из остальных. Может ли оказаться, что каждый из них получит открытки именно от тех друзей, которым напишет сам?

39. В шахматном турнире в один круг участвуют 17 шахматистов. Верно ли, что в любой момент турнира найдется шахматист, сыгравший к этому моменту четное число партий (может быть, ни одной)?

3.4. IX—XI

Займемся задачами на обведение контура фигуры непрерывной линией.

40°. В XVIII веке город Кенигсберг (ныне Калининград в составе нашей страны) был расположен на берегах реки и двух островах. Различные части города были соединены семью мостами, как показано на рисунке 4. Можно ли обойти все эти мосты так, чтобы побывать на каждом из них ровно один раз?

Это и есть *задача Эйлера о кенигсбергских мостах*, о которой упоминалось в начале параграфа.

С ситуацией, указанной в задаче, мы можем встретиться, например, при обходе большого предприятия, выставки, при объезде района и т. д.

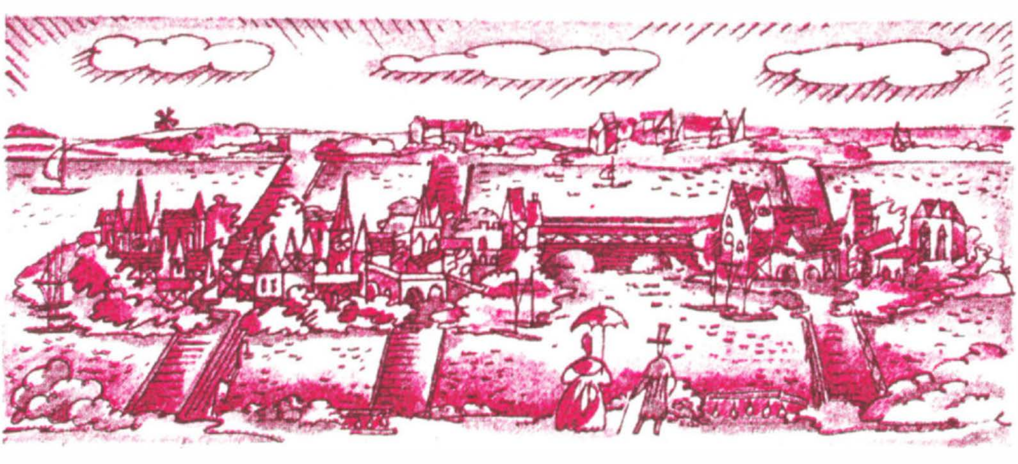
△ Обозначим различные части города буквами A, B, C и K и изобразим их точками. Мосты изобразим линиями, соединяющими эти точки. Получим граф (рис. 5).

Задача сводится к следующей: существует ли путь, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому ребру только один раз?

Рассмотрим два случая.

1) Предположим, что существует такой замкнутый путь.

Тогда степень каждой вершины графа должна быть четной, так как, входя в какую-либо вершину, мы затем должны из нее выйти, причем по другому ребру. Что касается начала пути, то после выхода из него мы должны в конце концов в него и вернуться, поскольку путь замкнутый. Однако на рисунке 5



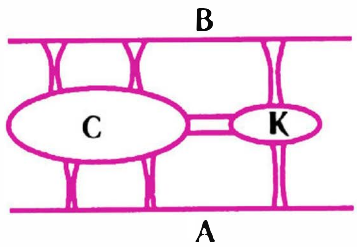


Рис. 4

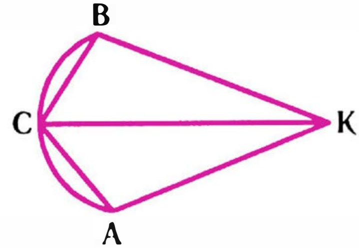


Рис. 5

нет ни одной вершины, степень которой была бы четной. Значит, этот случай невозможен.

2) Пусть существует такой незамкнутый путь; например, пусть он начинается в вершине A, а заканчивается в C.

Тогда из вершин A и C должно выходить уже нечетное число ребер, а из промежуточных вершин B и K — по-прежнему четное число. Но на рисунке степени вершин B и K нечетны. Следовательно, и этот случай отпадает.

Ответ: нельзя. ▲

Хотя рассуждение, проведенное при решении задачи 40, выполнено для частного случая, оно носит общий характер:

1) если существует **замкнутый** путь, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому ребру только один раз, то степени всех вершин графа **четные**,

2) если существует аналогичный **незамкнутый** путь, то степени начала и конца пути **нечетные**, а остальных вершин — **четные**.

Эйлер в своей статье доказал и обратные утверждения. Пусть граф **связный**, т. е. любые две его вершины можно связать путем, проходящим по его ребрам. Тогда **путь, проходящий по всем ребрам графа, причем по каждому ребру только один раз, существует лишь в следующих двух случаях:**

1) **когда степень каждой вершины четная** (в этом случае путь замкнут),

2) **когда граф имеет только две вершины А и В с нечетной степенью** (тогда путь не замкнут и имеет своими концами вершины А и В).

Доказательства обратных утверждений можно найти, например, в книге Л. Ю. Березиной [8].

41. Можно ли обвести карандашом, не отрывая его от бумаги и не проходя по одной линии дважды:

а) квадрат с диагоналями;

б) правильный пятиугольник с диагоналями?

42. Можно ли из проволоки длиной 12 дм изготовить каркас куба с ребром длины 1 дм, не ломая проволоку на части?

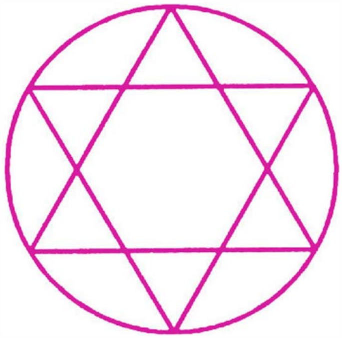


Рис. 6

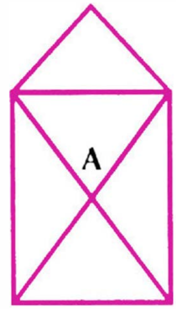


Рис. 7

43. Можно ли граф, изображенный на рисунке 6, обвести карандашом, не отрывая его от бумаги и не проходя ни одной линии дважды? Если можно, то как?

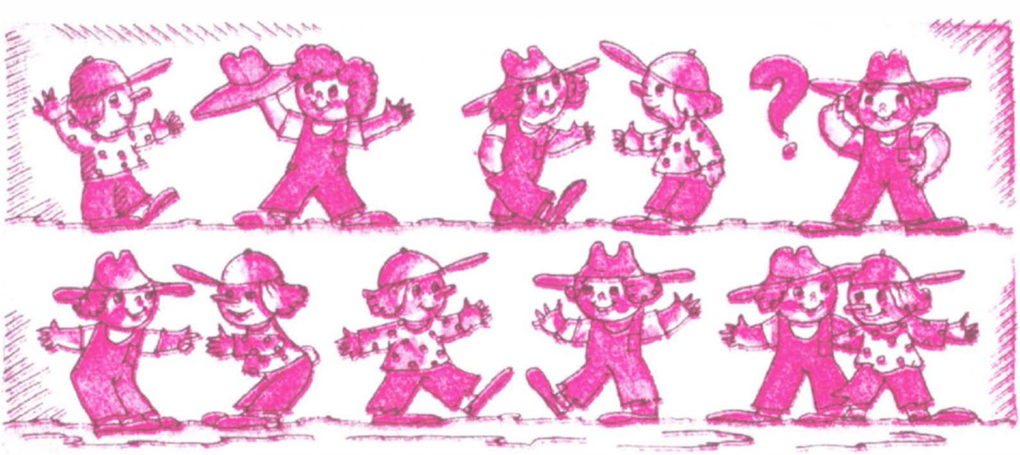
44. В точке *A* расположен гараж для снегоочистительной машины (рис. 7). Водителю машины было поручено убрать снег с улиц части города, изображенной на рисунке. Может ли он закончить свою работу на том перекрестке, где находится гараж, если по каждой улице своего участка города водитель будет проезжать только один раз?

3.5. VII—XI

Рассмотрим разные задачи на графы.

45. В школьном турнире в один круг играют шесть шахматистов: Алеша, Боря, Витя, Гриша, Дима и Костя. Ежедневно игрались три партии, и весь турнир окончился в пять дней. В первый день Боря играл с Алешей, а во второй — с Костей. Витя в четвертый день играл с Костей, а в пятый — с Димой. Кто с кем играл в каждый день турнира?

△ Обозначим шахматистов соответственно точками А, Б, В, Г, Д и К, а сыгранные ими партии — отрезками, соединяющими



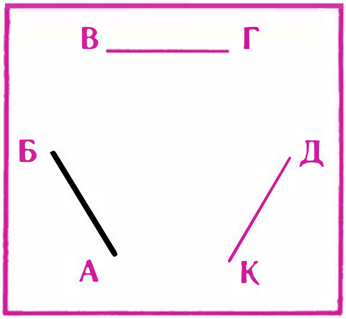


Рис. 8

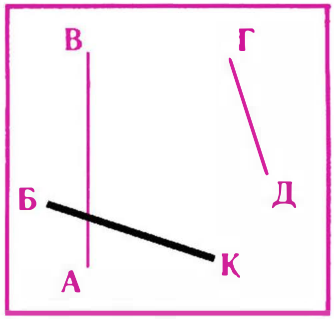


Рис. 9

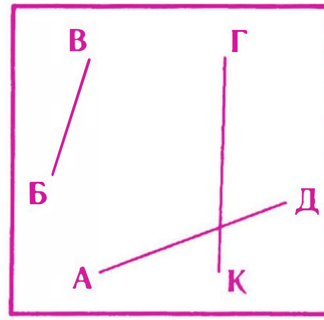


Рис. 10

эти точки. Точки лучше располагать так, чтобы при последовательном их соединении они стали вершинами выпуклого шестиугольника.

1) Займемся первым днем турнира. По условию в этот день Боря играл с Алешей. С кем играл Витя? Только с Гришей, так как с Димой и Костей он играл в другие дни. Следовательно, третью партию в первый день играли Дима с Костей. Построим соответствующий граф (рис. 8).

2) Перейдем ко второму дню. В этот день по условию Боря играл с Костей, поэтому Витя, учитывая первый и пятый дни, мог играть лишь с Алешей (рис. 9). Тогда Гриша играл с Димой.

3) Рассмотрим третий день. Витя, с учетом всех предыдущих и последующих дней турнира, мог играть только с Борей. Так как Дима уже играл с Костей и Гришей, то в этот день он играл с Алешей (рис. 10). Значит, Гриша играл с Костей.

4) Займемся четвертым днем. Здесь нетрудно определить, кто с кем играл: Витя — с Костей, Алеша — с Гришей, Боря — с Димой (рис. 11).

5) Рассмотрим пятый день турнира (рис. 12). ▲

46. В одном купе поезда ехали четыре пассажира. Среди них не было трех человек, которые прежде были знакомы друг с другом, но один был знаком с тремя остальными. Докажите, что эти три последних пассажира прежде не были знакомы друг с другом.

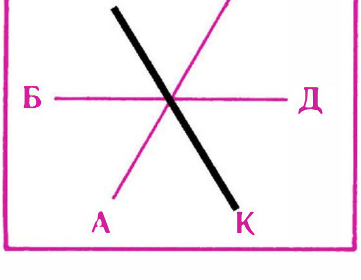


Рис. 11

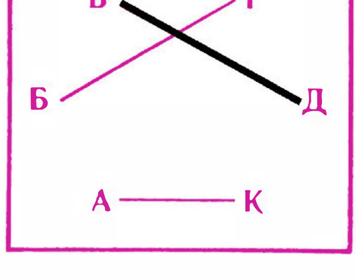


Рис. 12

47. В спортивном лагере пять юношей поселились вместе. Среди них не было трех таких, которые прежде были знакомы друг с другом, но один был знаком с тремя. Докажите, что среди них есть группа из трех юношей, которые прежде не были знакомы друг с другом.

48. Каждые две из шести ЭВМ соединены проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходили пять проводов разного цвета?

△ Для решения начертим выпуклый шестиугольник и проведем в нем все диагонали (рис. 13). Пусть каждая вершина шестиугольника означает одну из ЭВМ, а каждый отрезок — провод, соединяющий две ЭВМ. Занумеруем различные цвета натуральными числами от 1 до 5 для того, чтобы отличать их друг от друга.

Начнем, например, с вершины *A*; проведем из нее отрезки всех пяти цветов. Перейдем к вершине *B* и из нее проведем четыре отрезка всех цветов с № 2 по № 5, учитывая, что отрезок *BA*, выходящий из этой вершины, уже окрашен в цвет № 1. Затем займемся вершиной *C*. И т. д. В итоге получаем положительный ответ на вопрос задачи.

Ответ: можно. ▲

На рисунке 13 каждые две вершины графа соединены своим ребром. Такой граф называется **полным**.

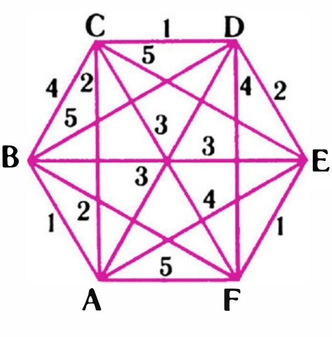


Рис. 13

49. Каждые две из 15 ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли все эти провода раскрасить в один из 14 цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 14 проводов разного цвета?

50. В Цветочном городе каждый коротышка знаком с 6 малышками, а каждая малышка знакома с 6 коротышками. Докажите, что число коротышек в этом городе равно числу малышек.

△ Изобразим два множества: множество коротышек *A* и множество малышек *B* (рис. 14). Отношение знакомства коротышки с малышкой будем обозначать линией, которая соединяет соответствующие точки множеств *A* и *B*. Обозначим число коротышек через k, а число малышек — через m.

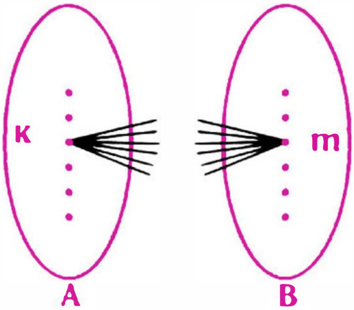


Рис. 14

Так как каждый коротышка знаком с 6 малышками, то из каждой точки множества *A* выходит 6 ребер, а следовательно, из точек этого множества выходит всего $6k$ ребер. Аналогично, из точек множества *B* выходит всего $6m$ ребер. Но число тех и других ребер должно быть одинаково:

$6k = 6m$, поскольку общее число ребер, выходящих из точек множества A, равно общему числу ребер, входящих в точки множества B. Отсюда $k = m$. ▲

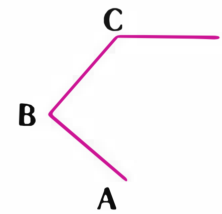


Рис. 15

51. На туристском слете выяснилось, что каждый юноша знаком с 8 девушками, а каждая девушка знакома с 6 юношами. Кого на слете больше: юношей или девушек?

52. На кружке, в котором участвуют шесть школьников, было дано шесть задач. Каждый школьник решил две задачи, и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что разбор задач можно организовать так, чтобы каждый школьник изложил решение одной из решенных им задач и все задачи были разобраны.

△ Изобразим школьника точкой, а решенную им задачу — линией, исходящей из этой точки. Пусть один из школьников обозначен точкой A. Проведем из нее линию. Так как каждую задачу решили два школьника, то проведенная линия соединяет точку A с другой точкой B, которая обозначает второго школьника, решившего ту же задачу. Так как каждый школьник решил две задачи, то из точки B должна выходить еще одна линия, которая соединяет точку B с еще одной точкой C и т. д. (рис. 15).

Возможны следующие случаи.

1) Может получиться шестиугольник (рис. 16). Тогда утверждение задачи выполняется.

2) Может получиться четырехугольник и “двуугольник” (рис. 17); последнее возможно тогда, когда два школьника решили одни и те же две задачи.

3) Могут образоваться два треугольника (рис. 18).

4) Могут получиться три “двуугольника” (рис. 19).

Этим исчерпываются все возможности. В каждом из рассмотренных случаев утверждение задачи выполняется. ▲

53. На столе в приемной парикмахерской лежат журналы. Каждый клиент парикмахерской просмотрел два журнала; каждый журнал просмотрели три человека; для каждой пары жур-

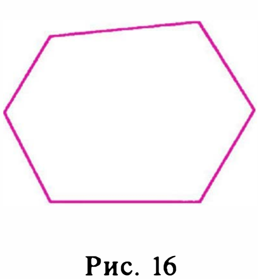


Рис. 16

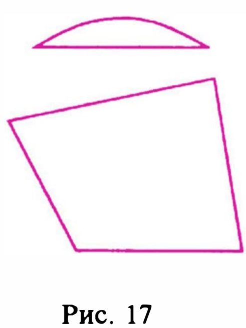


Рис. 17

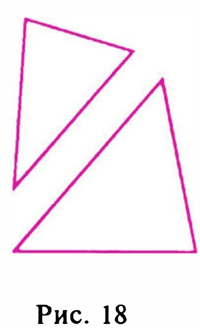


Рис. 18

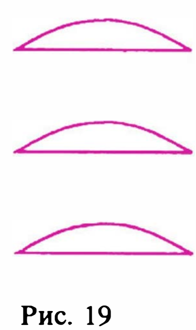


Рис. 19

налов имеется только один клиент, который их просмотрел. Сколько журналов и сколько клиентов в приемной парикмахерской?

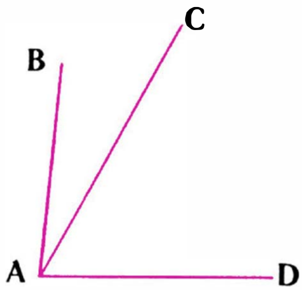


Рис. 20

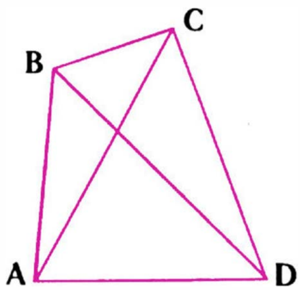


Рис. 21

△ Обозначим журнал точкой, а клиента, просмотревшего этот журнал, — отрезком, выходящим из этой точки.

Возьмем одну такую точку A. Так как каждый журнал просмотрели три человека, то из точки A должны выходить три отрезка. Так как каждый клиент просмотрел два журнала, то каждый отрезок соединяет две точки (рис. 20).

Поскольку каждую пару журналов просмотрел один человек, то нужно каждую пару точек соединить отрезком. Получаем четырехугольник с диагоналями (рис. 21). Проверьте еще сами, что здесь все три условия задачи выполняются.

Может возникнуть вопрос: а не существует ли еще хотя бы одна, пятая точка E, такая, что все условия задачи также выполняются? Тогда из каждой из пяти точек будет выходить не по три, а по четыре отрезка, а это противоречит условиям задачи.

Ответ: 4 журнала, 6 клиентов. ▲

54. Каждый из районов города имеет на центральной телефонной станции четыре телефонных аппарата. Каждый аппарат соединяет телефонные линии двух районов. Каждая пара районов имеет только один соединяющий их аппарат. Сколько в городе районов и сколько телефонных аппаратов на станции?

55. В одном учреждении каждый сотрудник выписывает две газеты, каждую газету выписывают пять человек и каждую пару газет выписывает только один человек. Сколько человек в учреждении и сколько они выписывают газет?

56°. Шесть точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, соединены всевозможными отрезками и каждый отрезок окрашен в черный или красный цвет. Докажите, что найдется треугольник с вершинами в данных точках, у которого все стороны черные, или треугольник, у которого все стороны красные.

△ Возьмем одну из шести точек A_1. Из нее выходят пять отрезков, окрашенных в черный или красный цвет (рис. 22). Тогда среди них найдутся три отрезка одного цвета, например красного: ведь если бы отрезков каждого цвета было не более двух, то из точки A_1 выходило бы не более четырех отрезков. (Фактически здесь применяется обобщенный принцип Дирихле — см. § 10.)

Пусть отрезки A_1A_2, A_1A_3 и A_1A_4 — красные. Рассмотрим два случая.

1) Допустим, что среди отрезков A_2A_3, A_2A_4 и A_3A_4 имеется красный, например отрезок A_2A_3. Тогда у треугольника $A_1A_2A_3$ все стороны красные. Именно этот вариант изображен на рисунке 22.

2) Если допустим, что среди отрезков A_2A_3, A_2A_4 и A_3A_4 нет красного, тогда все эти отрезки — черные, а следовательно, у треугольника $A_2A_3A_4$ все стороны черные. ▲

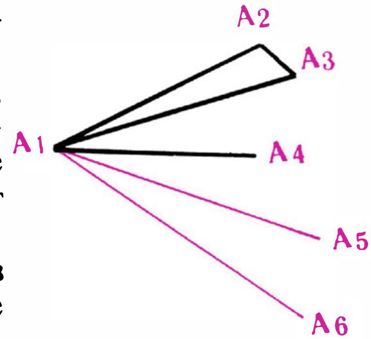


Рис. 22

57. Докажите, что если в задаче 56 вместо шести точек взять пять, то треугольник с одноцветными сторонами может и не найтись.

58. Докажите, что в любой компании из n человек, где $n \geq 6$, имеются либо трое попарно знакомых, либо трое, из которых никакие два не знакомы друг с другом.

59. В международном туристическом лагере шесть туристов познакомились между собой. Выяснилось, что среди любых трех из них имеются двое, которые могут разговаривать друг с другом на каком-нибудь языке. Верно ли, что среди них найдутся трое, каждый из которых может разговаривать с каждым из двух других на каком-нибудь языке?

60*. 17 ученых из разных стран переписываются между собой на одном из трех языков: английском, французском или русском. Докажите, что среди них найдутся трое, которые переписываются между собой на одном и том же языке.

△ Обозначим каждого из ученых точкой и соединим эти точки всевозможными отрезками. Точки расположим так, чтобы никакие три из них не лежали на одной прямой. Так как каждый ученый переписывается с 16 остальными, то из каждой точки выходит 16 отрезков. Каждый из отрезков, означающих переписку ученых на английском языке, окрасим в черный цвет, на французском — в красный, на русском — в белый.

Возьмем одну из точек A_1. Пусть из нее выходит a черных, b красных и c белых отрезков. Тогда $a+b+c = 16$. В последнем уравнении по меньшей мере одно из неизвестных не меньше 6, так как если бы

$$a \leq 5, \quad b \leq 5, \quad c \leq 5,$$

то, складывая записанные неравенства почленно, получим: $a+b+c \leq 15$, а это невозможно.

Пусть $a \geq 6$. Следовательно, из точки A_1 выходит не менее 6 черных отрезков (рис. 23); обозначим их через A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6 и A_1A_7.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть среди отрезков, соединяющих точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и A_7 попарно между собой, имеется черный, скажем, A_2A_3. Тогда у треугольника $A_1A_2A_3$ все стороны черные, т. е. соответствующая тройка ученых переписывается между собой на английском языке.

2) Пусть среди этих отрезков нет черного. В этом случае отрезки между шестью точками A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 и A_7 окрашены не более чем в два цвета — красный и белый. Тогда на основании утверждения задачи 56 среди отрезков, соединяющих эти точки, имеются три, составляющие треугольник со сторонами одного цвета. ▲

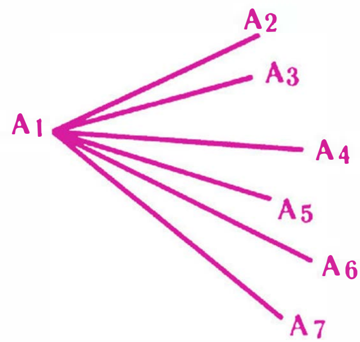


Рис. 23

61*. На плоскости даны n точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Они соединены всевозможными отрезками, и каждый отрезок окрашен в один из четырех различных цветов. При каком наименьшем n обязательно найдется треугольник с одноцветными сторонами с вершинами в трех из данных точек?

§ 4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ VI—XI

Литература: [15], [16], [25в], [27], [46в], [47].

Возможно, читатель уже знает, что такое пересечение и объединение множеств. На всякий случай приведем соответствующие определения.

Пересечением двух множеств A и B называется множество всех элементов, которые входят и во множество A, и во множество B. Обозначение пересечения: $A \cap B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество всех элементов, которые входят по меньшей мере в одно из множеств A и B. Обозначение объединения: $A \cup B$.

В случае когда множеств не два, а любое конечное число, эти определения вводятся аналогично.

Приведем пример. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$. Тогда

$$A \cap B = \{2; 4\}, \; A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6; 8\}.$$

Для решения задач на пересечение и объединение множеств часто изображают множества кругами (иногда используют и другие фигуры, например прямоугольники или овалы). Эти круги называются **кругами Эйлера** по имени широко пользовавшегося ими Леонарда Эйлера. Тогда пересечение множеств A и B изобразится как общая часть этих кругов (рис. 24), а объединение — как множество, состоящее из всех элементов множества A и всех элементов множества B (рис. 25).

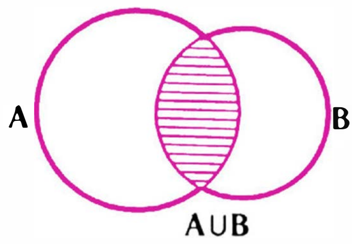


Рис. 24

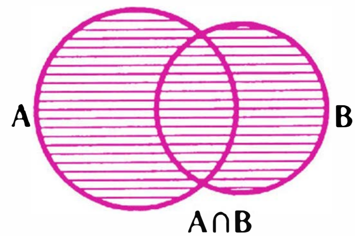


Рис. 25

Рассмотрим некоторые свойства операций над множествами.

1) **Для любого множества A выполняются равенства:**

$$A \cap A = A, \quad A \cup A = A.$$

2) **Пересечение любых множеств A и B включается в каждое из них, а каждое из этих множеств включается в их объединение:**

$$A \cap B \subset A, \qquad A \subset A \cup B.$$

Убедиться в справедливости свойства 2 легко, присмотревшись к рисункам 24 и 25. Но возможно и аналитическое его доказательство.

3) **Для любых множеств A и B, где A есть подмножество множества B, их пересечение равно более узкому, а объединение — более широкому из них:**

$$A \cap B = A, \quad A \cup B = B.$$

4.1. VI—VIII

Рассмотрим вводные задачи на операции над множествами.

62. Найдите пересечение множеств

$$A = \{1;\ 4;\ 7;\ldots;\ 898\},\ B = \{1;\ 5;\ 9;\ldots;\ 897\},\ C = \{1;\ 6;\ 11;\ldots;\ 896\}.$$

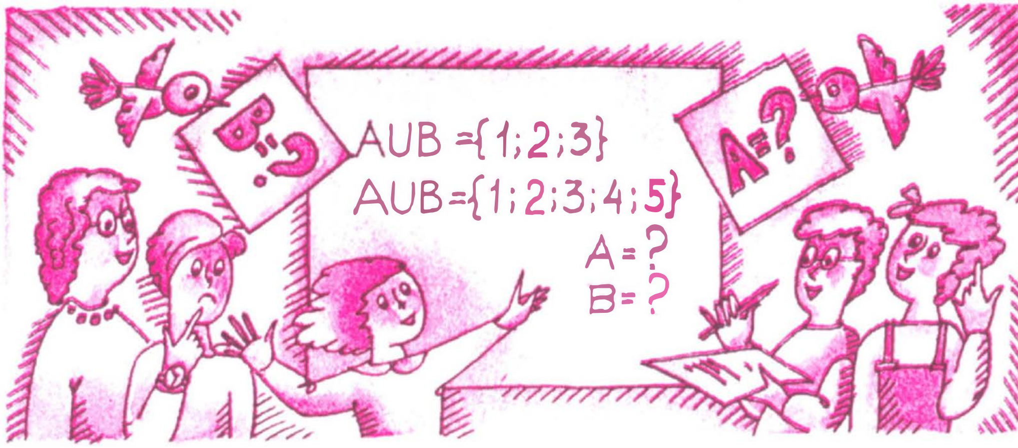
(Указание: отнимите от каждого элемента каждого из трех данных множеств по 1).

63. Найдите множества A и B, если

$$A \cap B = \{1;\ 2;\ 3\},\ A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}.$$

△ Из определений пересечения и объединения множеств следует, что элементы 1, 2 и 3 входят в оба множества A и B, а элементы 4 и 5 — только в одно из них. Отсюда и получаем ответ, перебирая все случаи.

Ответ: $A = \{1;\ 2;\ 3\}$, $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$ (или наоборот, т. е. с перестановкой A и B местами); $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 5\}$ (или наоборот). ▲



64. Известно, что $A \cap B = \{1;\ 2\}$, $A \cap C = \{2;\ 5\}$, $A \cup B = \{1;\ 2;\ 5;\ 6;\ 7;\ 9\}$, $B \cup C = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 7;\ 8\}$. Найдите множества A, B и C.

△ При решении будем составлять таблицу. Заполнять ее удобнее не по строкам, а по столбцам. Если, например, элемент 5 входит во множество B, то на пересечении соответствующих строки и столбца таблицы условимся ставить плюс, в противном случае — минус.

1) Начнем с числа 1. Так как 1 принадлежит пересечению множеств A и B, то $1 \in A$ и $1 \in B$. Но 1 не принадлежит C, поскольку, если бы 1 принадлежала C, то она принадлежала бы и пересечению множеств A и C, а это противоречит условию.

2) Возьмем число 2. Аналогично предыдущему $2 \in A$, $2 \in B$, $2 \in C$.

3) Возьмем число 3. С чего здесь начать? Обратим внимание, что 3 не принадлежит объединению множеств A и B. Следовательно, это число не принадлежит ни одному из множеств A и B. Но так как $3 \in B \cup C$, то 3 принадлежит C.

Таблица 4

Элемент / Множество	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	+	+	–	–	+	+	–	–	+
B	+	+	–	–	–	–	+	–	–
C	–	+	+	+	+	–	–	+	–

4) Для числа 4 аналогично получаем: $4 \notin A$, $4 \notin B$, $4 \in C$.

5) Рассмотрим число 5: $5 \in A$, $5 \in C$, $5 \notin B$.

6) Для числа 6: $6 \notin B$, $6 \notin C$, $6 \in A$.

7) Сложнее обстоит дело с числом 7. Принадлежит ли это число множеству A? Допустим, что $7 \in A$. Поскольку $7 \in B \cup C$, то $7 \in B$ или $7 \in C$, а тогда соответственно $7 \in A \cap B$ или $7 \in A \cap C$. Однако и то и другое противоречит условиям задачи. Остается принять, что число 7 не принадлежит A.

Так как $7 \in A \cup B$, $7 \notin A$, то 7 принадлежит B.

Что касается C, то 7 может принадлежать, а может и не принадлежать C.

8) Возьмем число 8: $8 \notin A$, $8 \notin B$, $8 \in C$.

9) Наконец, для числа 9 получаем: $9 \notin B$, $9 \notin C$, $9 \in A$.

Ответ: $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 7; 8\}$, или $A = \{1; 2; 5; 6; 9\}$, $B = \{1; 2; 7\}$, $C = \{2; 3; 4; 5; 8\}$. ▲

65. Известно, что $A = \{1;\ a\}$, $B = \{a;\ b;\ 3\}$, $C = \{2;\ 4;\ c\}$, $D = \{a;\ b;\ 4\}$, $E = \{a;\ b;\ c;\ e\}$, причем $A \subset D$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D \subset E$. Найдите элементы a, b, c и e (т. е. сами множества A, B, C, D и E).

4.2. VI—IX

А здесь познакомимся с задачами, при решении которых используются круги Эйлера.

66. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках. 912 жителей села говорят по-башкирски, 653 — по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?

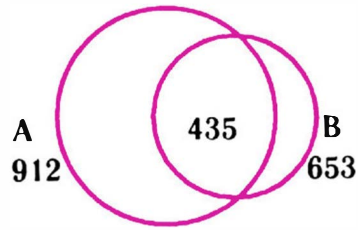


Рис. 26

△ Применим круги Эйлера. Через A обозначим множество жителей села, которые говорят по-башкирски, через B — множество жителей, которые говорят по-русски (рис. 26).

Будем обозначать число элементов любого конечного множества A через $n(A)$. Тогда по условию

$$n(A)=912,\ n(B)=653,\ n(A\cap B)=435.$$

Нам нужно найти число элементов в объединении множеств A и B.

Прежде всего сложим числа $n(A)$ и $n(B)$. Но при этом элементы, входящие в пересечение множеств A и B, считаются дважды. Следовательно, из этой суммы нужно вычесть $n(A\cap B)$. Получаем:

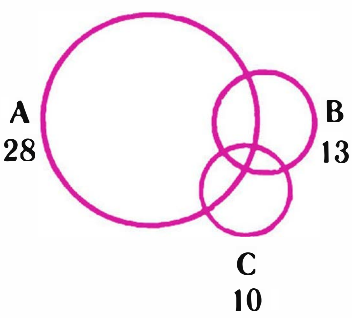


Рис. 27

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B). \qquad (1)$$

Подставим в формулу (1) значения $n(A)$, $n(B)$ и $n(A\cap B)$:

$$n(A\cup B) = 912+653-435 = 1130.$$

Ответ: 1130. ▲

Очевидно, формула (1) справедлива не только при условиях задачи 66, но и для любых конечных множеств A и B.

67. Множество A имеет 100 элементов, являющихся натуральными числами, каждое из которых делится или на 2, или на 3, причем 70 элементов из A делятся на 2 и 48 — на 3. Сколько элементов множества A делятся на 6?

68. Большая группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским — 13, немецким — 10, английским и французским — 8, английским и немецким — 6, французским и немецким — 5, всеми тремя языками — 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько туристов в группе?

△ Обозначим множество туристов группы, которые владеют английским, французским или немецким языком, соответственно через A, B и C. По условию

$$n(A) = 28,\ n(B) = 13,\ n(C) = 10,\ n(A\cap B) = 8,$$
$$n(A\cap C) = 6,\ n(B\cap C) = 5,\ n(A\cap B\cap C) = 2.$$

Сначала найдем число туристов, которые владеют по меньшей мере одним из трех иностранных языков, т. е. $n(A\cup B\cup C)$. Для этого применим круги Эйлера (рис. 27).

Подсчитаем сумму $n(A)+n(B)+n(C)$. Так как в нее каждое из чисел $n(A\cap B)$, $n(A\cap C)$ и $n(B\cap C)$ вошло слагаемым два раза, то от этой суммы нужно отнять сумму $n(A\cap B)+n(A\cap C)+n(B\cap C)$.

Теперь выясним, сколько раз в полученное выражение

$$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)$$

входит слагаемым число $n(A\cap B\cap C)$. Оно входит в эту сумму три раза со знаком плюс (в каждое из слагаемых $n(A)$, $n(B)$ и $n(C)$ и три раза со знаком минус (в каждое из слагаемых $n(A\cap B)$, $n(A\cap C)$ и $n(B\cap C)$). Следовательно, для того чтобы не потерять тех туристов, которые входят во множество $A\cap B\cap C$, нужно еще прибавить число $n(A\cap B\cap C)$. Получаем:

$$n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-$$
$$-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C). \qquad (2)$$

Тогда будем иметь:

$$n(A\cup B\cup C) = 28+13+10-8-6-5+2 = 34.$$

Значит, общее число туристов группы равно 34+41 = 75.

Ответ: 75. ▲

Формула (2) справедлива для любых трех конечных множеств A, B и C.

Теперь с помощью формул (1) и (2) попробуем догадаться, как в общем случае для любых конечных множеств A_1, A_2, A_3,..., A_k вычисляется $n(A_1\cup A_2\cup...\cup A_k)$.

Справедлива следующая формула:

$$n(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_k) = n(A_1)+n(A_2)+...+n(A_k)-n(A_1\cap A_2)-$$
$$-n(A_1\cap A_3)-\ldots-n(A_{k-1}\cap A_k)+n(A_1\cap A_2\cap A_3)+$$
$$+n(A_1\cap A_2\cap A_4)+\ldots+(-1)^{k-1}\cdot n(A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_k). \qquad (3)$$

Эта формула называется **формулой включений и исключений.**

В частности, при k четном последнее слагаемое в правой части формулы (3) имеет знак минус (как в формуле (1)), а при k нечетном — знак плюс (как в формуле (2)).

69. В течение некоторого времени число дождливых дней было равно 10, ветреных — 8, холодных — 6, дождливых и ветреных — 5, дождливых и холодных — 4, ветреных и холодных — 3 и, наконец, дождливых, ветреных и холодных — 1. Сколько было всего дней с плохой погодой?

70. Контрольная работа по математике в пятом классе состояла из задачи, уравнения и числового примера. Работу писали 36 учеников. Правильно решили только задачу 2 человека, только уравнение — 4, только пример — 7. Не решили только задачу 8 человек, только уравнение — 5, только пример — 3. Остальные ученики выполнили всю работу правильно. Сколько таких учеников?

71. Пол комнаты площадью 18 м^2 покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра — 6 м^2, другого — 5 м^2 и третьего — 4 м^2. Каждые два ковра перекрываются на площади 1 м^2, причем все три ковра перекрываются на площади 0,5 м^2. Какова площадь части пола, не покрытой коврами?

72. Имеется 500 различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 2, 3, 5 или 7. При этом делятся: на 2, 3, 5, 7 соответственно 320, 206, 140 и 77 чисел; на 6, 10, 14, 15, 21, 35 — соответственно 98, 69, 45, 40, 35, 21; на 30, 42, 70, 105 — 25, 18, 16 и 14 чисел соответственно. Сколько чисел из первоначальных пятисот делятся на 210?

73. В отчете о работе одного отдела научно-исследовательского института указывалось, что в отделе работают 17 человек, причем 10 из них знают немецкий язык, 13 — английский и французский, 2 — немецкий, английский и французский языки. Докажите, что в этих данных имеется ошибка.

74. Члены математического кружка решали две задачи. В конце занятия руководитель кружка составил четыре списка:

1) решивших первую задачу,
2) решивших только одну задачу,
3) решивших по меньшей мере одну задачу,
4) решивших обе задачи.

Какой из списков самый длинный? Могут ли два списка совпадать по составу? Если да, то какие?

Иногда при решении задач на операции над множествами приходится рассматривать уравнения или системы уравнений.

75. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "отлично" получили: по математике — 48 человек, по физике — 37, по литературе — 42, по математике или физике — 75, по математике или литературе — 76, по физике или литературе — 66, по всем трем предметам — 4. Сколько абитуриентов получили только одну оценку "отлично"? Ровно два "отлично"? По меньшей мере одно "отлично"?

△ Применим круги Эйлера. Через М, Ф и Л обозначим множества абитуриентов, сдавших на "отлично" соответственно математику, физику или литературу; эти множества по условию имеют соответственно 48, 37 и 42 элемента. Общая часть всех трех множеств имеет 4 элемента. Обозначим через a, b, c, x, y, z число абитуриентов, которые получили оценку "отлично" по одному или двум из трех предметов (рис. 28).

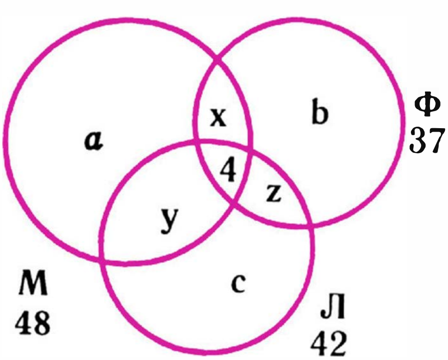


Рис. 28

С помощью рисунка условия задачи можно представить следующими уравнениями:

$$\begin{cases} a + x + y = 44, \\ b + x + z = 33, \\ c + y + z = 38, \\ a + b + x + y + z = 71, \\ a + c + x + y + z = 72, \\ b + c + x + y + z = 62. \end{cases}$$

Получилась система шести уравнений с шестью неизвестными. Но нам нужны не неизвестные a, b, c,

x, y, z, а *суммы* $a+b+c$ и $x+y+z$. Для их нахождения сложим сначала три первых, а затем три последних уравнения системы:

$$\begin{cases} a+b+c+2(x+y+z)=115, \\ 2(a+b+c)+3(x+y+z)=205. \end{cases}$$

Рассматривая последнюю систему уравнений как систему с двумя неизвестными, найдем из нее интересующие нас суммы:

$$a+b+c=65,\ x+y+z=25.$$

Ответ: 65, 25, 94. ▲

76. На занятии физического кружка, насчитывавшего 10 членов, учитель спросил, выписывают ли члены кружка журналы “Квант” (К), “Техника молодежи" (Т) и “Юный техник” (Ю). Оказалось, что 6 человек выписывают К, 5 — Т, 5 — Ю, 3 — К и Т, 3 — К и Ю, 2 — Т и Ю, а один человек не выписывает ни одного из трех журналов. Сколько членов кружка выписывают только один журнал? Два? Все три журнала?

4.3. VIII—XI

Займемся уравнениями с множествами.

77. Найдите множество X, если $X\cap A = X\cup A$, где A — данное множество.

△ Данное равенство и есть пример **уравнения с множеством**. В дальнейшем мы встретимся и с системами таких уравнений.

На основании свойства 2 операций над множествами (с. 29)

$$X\cap A\subset X\subset X\cup A.$$

Но так как здесь крайние множества $X\cap A$ и $X\cup A$ совпадают, то совпадают все три множества:

$$X\cap A = X = X\cup A.$$

Когда выполняется равенство $X\cap A = X$? Так как $X\cap A\subset A$, то, подставляя сюда вместо $X\cap A$ множество X, получим, что $X\subset A$.

А когда выполняется равенство $X \cup A = X$? Так как $A \subset X \cup A$, то $A \subset X$. Но включения $X \subset A$ и $A \subset X$ выполняются одновременно только тогда, когда $X = A$.

Строго говоря, нужно еще сделать проверку полученного ответа. При $X = A$ на основании свойства 1

$$X \cap A = A, \quad X \cup A = A,$$

а тогда данное уравнение превращается в тождество.

Ответ: $X = A$. ▲

78. Найдите множество X, если $X \cap (X \cup A) = \varnothing$, где A — данное множество, $\varnothing$ — пустое множество (т. е. множество, не имеющее элементов).

79. Найдите множество X, если $A \cup (X \cap A) = \varnothing$, где A — данное множество.

80. Найдите подмножества X и Y данного множества A, если для любого подмножества B множества A выполняется равенство

$$X \cap B = Y \cup B.$$

81. Найдите множества X и Y из системы уравнений

$$\begin{cases} X \cup Y = A, \\ X \cap A = Y, \end{cases}$$

где A — данное множество.

△ Из первого уравнения системы следует, что $X \subset A$. Но тогда $X \cap A = X$, а значит, второе уравнение принимает вид $X = Y$. В таком случае из первого уравнения получаем: $X = Y = A$.

Проверка показывает, что найденные нами значчния $X = A$ и $Y = A$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Ответ: $X = Y = A$. ▲

82. Найдите множества X и Y, если

$$\begin{cases} X \cap Y = A, \\ X \cup A = Y, \end{cases}$$

где A — данное множество.

83. Найдите множества X и Y из системы уравнений

$$\begin{cases} X \cup (Y \cap A) = A, \\ X \cap (Y \cup A) = A, \end{cases}$$

где A — данное множество.

84. Найдите множества X и Y, если

$$\begin{cases} (X \cap A) \cup B = Y, \\ (Y \cap B) \cup A = X, \end{cases}$$

где A и B — данные множества.

85*. Найдите множества X и Y, если

$$\begin{cases}(X \cup A) \cap (Y \cup B) = \varnothing, \\ X \cup Y = A \cup B,\end{cases}$$

где A и B — данные множества.

4.4. IX—XI

Рассмотрим задачи, связанные с условными соотношениями между множествами.

86. Известно, что для множеств A, B и C выполняются включения

$$A \cup B \subset C, \quad A \cup C \subset B, \quad B \cup C \subset A.$$

Следует ли отсюда, что $A = B = C$?

△ Так как $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cup B \subset C$, то отсюда $A \subset C$, $B \subset C$.

Так как $A \subset A \cup C$, $C \subset A \cup C$, $A \cup C \subset B$, то $A \subset B$, $C \subset B$.

Поскольку $B \subset B \cup C$, $C \subset B \cup C$, $B \cup C \subset A$, то $B \subset A$, $C \subset A$.

Из включений $A \subset B$ и $B \subset A$ вытекает, что $A = B$, а из включений $C \subset A$ и $A \subset C$ — что $A = C$. Значит, все три множества A, B и C равны.

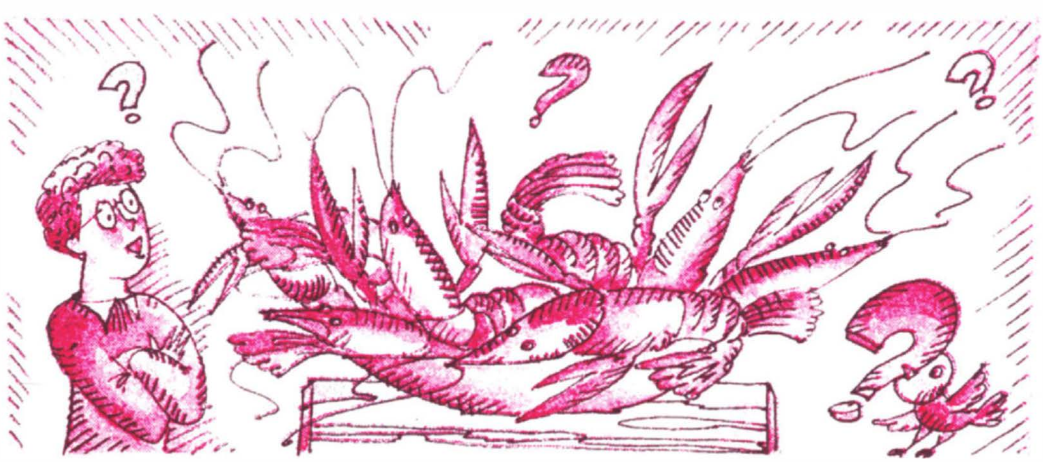
Ответ: следует. ▲

87. Известно, что для множеств A, B и C

$$A \subset B \cup C, \quad B \subset A \cup C, \quad C \subset A \cup B.$$

Докажите, что отсюда не следуют равенства $A = B = C$.

88. Все вареные красные раки мертвы, а все вареные мертвые раки красны. Следует ли отсюда, что все красные мертвые раки варены?



89*. Множество A состоит из натуральных чисел, причем:
1) 1 принадлежит A,
2) если n принадлежит A то $2n+1$ принадлежит A,
3) если $3n+1$ принадлежит A, то n принадлежит A.
Верно ли, что 8 принадлежит A?

§ 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МНОЖЕСТВА V—IX

Литература: [5[в]], [11], [25[в]], [38[в]], [66], [80[в]].

Прежде всего это задачи, вероятно, знакомые многим читателям, на нахождение фальшивой монеты в куче настоящих с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь.

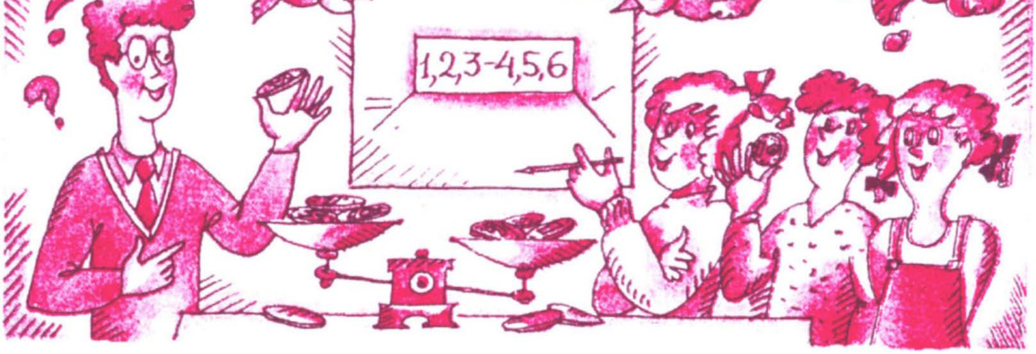
Введем условные обозначения:
= — весы находятся в равновесии;
≠ — весы в неравновесии;
/ — левая чашка весов тяжелее;
\ — правая чашка тяжелее.

5.1. V—VII

Рассмотрим задачи, в которых *известно, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящие.*

90. Имеется три монеты, внешне неразличимые, из них две настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, легче настоящих. Можно ли найти фальшивую монету с помощью одного взвешивания на правильных чашечных весах без гирь?

△ Занумеруем монеты числами 1, 2, 3. Положим первую монету на левую чашку весов, вторую — на правую чашку. Возможны два исхода.



Весы могут оказаться в равновесии (рис. 29). Тогда первая и вторая монеты — настоящие. Следовательно, фальшивой является третья монета.

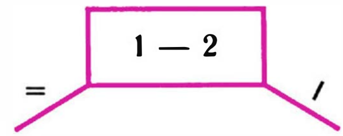


Рис. 29

Весы могут оказаться в неравновесии. В этом случае фальшивой является или первая, или вторая монета. Какая же именно? Та, которая легче.

Ответ: можно. ▲

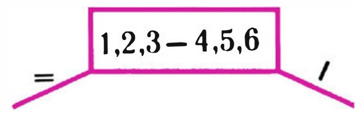


Рис. 30

91. Имеется 4 монеты, внешне неразличимые, из них три настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, тяжелее остальных. Как найти фальшивую монету с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь? А можно ли ее найти за одно взвешивание?

92. Имеется 9 монет, из них 8 настоящих, одинаковой массы, одна фальшивая, тяжелее остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

△ Занумеруем монеты натуральными числами от 1 до 9. Здесь монеты лучше взвешивать, кладя на каждую чашку весов по три. Положим на левую чашку монеты с номерами 1, 2, 3, на правую — монеты с номерами 4, 5, 6. Возможны два исхода, как в задаче 90.

Пусть весы находятся в равновесии (рис. 30). Тогда фальшивая монета находится в тройке с номерами 7, 8, 9, и найти ее можно с помощью еще одного взвешивания (см. решение задачи 90).

Пусть весы находятся в неравновесии. В этом случае фальшивая монета находится в той из двух первых троек, которая тяжелее, и найти ее можно также с помощью еще одного взвешивания.

Итак, понадобилось два взвешивания. А нельзя ли было достичь цели за одно? Для ответа на этот вопрос нужно изменить систему взвешиваний, положив на каждую чашку весов не по три, а по четыре, или по две, или даже по одной монете. Но каждый из указанных вариантов менее выгоден, чем тот, который мы разобрали.

Ответ: за два. ▲

93. Имеется 10 монет, из них 9 настоящих, одинаковой массы, одна фальшивая, легче остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

△ Занумеруем монеты. На левую чашку весов положим монеты с номерами 1, 2, 3, а на правую — с номерами 4, 5, 6. Дальше можно использовать рисунок 30.

Если весы окажутся в равновесии, то фальшивая монета находится в оставшейся четверке. На четыре монеты требуется еще два взвешивания (см. задачу 91).

Если весы будут в неравновесии, то фальшивая монета находится в той из этих двух троек, которая легче. Тогда для ее определения нужно еще одно взвешивание.

В общем случае здесь понадобилось три взвешивания. Но нельзя ли было обойтись двумя? Попробуем положить на каждую чашку весов по четыре монеты (другие варианты явно хуже). Но фальшивая монета может оказаться в одной из этих четверок, а тогда потребуется еще два взвешивания — итого тоже три.

Ответ: за три. ▲

94. Имеется а) 27, б) 28 колец, из них одно фальшивое, легче остальных, остальные настоящие, одинаковой массы. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивое кольцо?

Подведем итог задачам 90-94; будем говорить только о монетах.

Если монет 2 или 3, то для нахождения среди них фальшивой монеты требуется 1 взвешивание.

Если монет в кучке от 4 до 9 включительно, то наименьшее число взвешиваний для нахождения фальшивой монеты равно 2.

Если монет от 10 до 27 включительно, то оно равно 3.

Если монет от 28 до 81 включительно (в связи с тем, что $81 = 3 \cdot 27$), то наименьшее число взвешиваний равно 4.

Теперь попробуем догадаться, какова общая закономерность. Числа 9, 27, 81 являются последовательными степенями тройки, а числа 4, 10, 28 — соответственно предыдущими степенями тройки, увеличенными на 1:

$$4 = 3+1, \; 10 = 3^2+1, \; 28 = 3^3+1.$$

Вообще, пусть число монет k удовлетворяет неравенству

$$3^{n-1} < k \leq 3^n \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно, легче она или тяжелее, чем настоящие. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, необходимых для нахождения фальшивой монеты, равно n.

5.2. VI—VIII

Перейдем к похожим задачам на нахождение фальшивой монеты, когда фальшивая монета отличается по массе от настоящих, но неизвестно, в какую сторону — легче она или тяжелее, чем настоящие.

Очевидно, что если монет в кучке всего две, то найти фальшивую монету с помощью взвешиваний в этом случае не удастся.

95. Имеется 3 монеты, внешне неразличимые, из них 2 настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

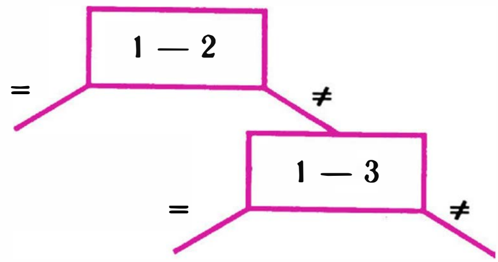


Рис. 31

△ Занумеруем монеты. При первом взвешивании положим на левую чашку весов первую монету, на правую — вторую. Рассмотрим следующую систему взвешиваний (рис. 31). Понимать ее нужно так.

В случае равновесия фальшивой является третья монета.

В случае неравновесия взвешиваем одну из "старых" монет — первую или вторую с третьей. Если при втором взвешивании, например, первой монеты с третьей получится равновесие, то фальшивая монета — вторая. Если же будет неравновесие, то фальшивой является первая монета, так как неравновесие при обоих взвешиваниях можно объяснить только участием в каждом из них первой монеты.

Ответ: за два. ▲

96. Имеется 4 монеты, из них 3 настоящие, одинаковой массы, одна фальшивая, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти фальшивую монету?

97. Имеется 5 деталей, внешне неразличимых, из них 4 стандартных, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти бракованную деталь?

△ Занумеруем детали. А теперь попробуйте разобраться в приводимой ниже схеме взвешиваний (рис. 32).

Как видно отсюда, для нахождения бракованной детали потребовалось три взвешивания.

Ответ: за три. ▲

98. Имеется k деталей, из них $k-1$ стандартных, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти бракованную деталь, если:

а) $k = 8$; б) $k = 9$; в) $k = 16$?

Какой общий результат стоит за этими задачами? Сформулируем его без доказательства. Для единообразия будем говорить о монетах.

Пусть число монет k удовлетворяет неравенству

$$\frac{3^{n-1}-3}{2} < k \le \frac{3^n-3}{2} \quad (n \in \boldsymbol{N})$$

и среди них имеется одна фальшивая, о которой известно только, что она отличается по массе от остальных. Тогда наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь, с помощью которых можно найти фальшивую монету и одновременно определить, легче она или тяжелее, чем настоящие, равно *n*.

Например, положим в последнем неравенстве $n = 3$; получим $3<k\leq 12$. Следовательно, для любого числа монет в пределах от 4 до 12 включительно наименьшее число взвешиваний, позволяющих найти фальшивую монету и установить, легче она или тяжелее, чем настоящие, равно 3. В случае, когда монет 12, решение приведено в [66] (задача 15); оно довольно сложно.

Возникает вопрос: а не противоречит ли только что сформулированное общее предложение, например, решению задачи 97? Ведь в этой задаче в одном из случаев, когда бракованной оказывается пятая деталь (см. рис. 32), мы так и не узнали, является ли

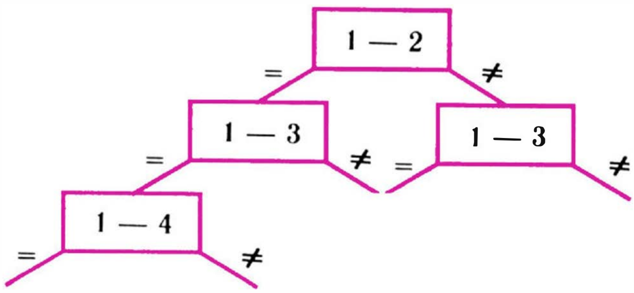


Рис. 32

она более легкой или более тяжелой, чем стандартная. Подумайте сами, как здесь изменить систему взвешиваний для того, чтобы за три взвешивания не только найти бракованную деталь, но и ответить на последний вопрос.

5.3. VII—IX

Рассмотрим **другие задачи на нахождение предмета с помощью взвешиваний**, когда, например, в куче монет имеется более одной фальшивой монеты, а также задачи, где при решении используются весы с гирями или со стрелкой.

99. Имеется 6 одинаковых по виду монет, но из них 4 настоящие, одинаковой массы, а 2 фальшивые, более легкие, они также весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно найти обе фальшивые монеты?

△ Как обычно, занумеруем монеты. При первом взвешивании на левую чашку весов положим монеты с номерами 1, 2, 3, на правую — все остальные (рис. 33).

Весы могут оказаться в равновесии. Тогда каждая из троек содержит по одной фальшивой монете. Для того чтобы их найти, нужно еще два взвешивания (см. решение задачи 90).

Весы могут быть в неравновесии. Здесь обе фальшивые монеты содержатся в одной тройке — той, которая легче (в данном случае — на левой чашке). Потребуется еще одно взвешивание.

Ответ: за три. ▲

100. Имеется 6 кубов, внешне одинаковых. Три из них весят одинаково, три остальных — более легкие, они также весят одинаково. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно определить, какие кубы имеют одинаковую массу?

101. Среди 5 деталей 4 стандартных, одинаковой массы, одна бракованная, отличающаяся по массе от остальных. Имеется еще одна отмеченная стандартная деталь (эталон). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти бракованную деталь?

102. Контролер разложил 90 стандартных деталей в 9 коробок поровну и в одну коробку — 10 бракованных деталей. Он не может вспомнить, в какой коробке лежат бракованные детали, но знает, что стандартная деталь весит 100 г, а бракованная 101 г. Как он может за одно взвешивание на весах с гирями найти коробку с бракованными деталями?

△ Занумеруем коробки. Из первой коробки возьмем одну деталь, из второй — две и т. д., из десятой — 10 деталей. Всего, таким образом, взято $1+2+3+...+10 = 55$ деталей.

Взвесим эти детали вместе. Если бы все они были стандартными, то весы показали бы $55\cdot 100 = 5500$ г. Но в действительности они покажут больше — $5500+n$ г, где $1\leq n\leq 10$. Откуда взялись лишние n грамм? Из-за того, что в этой куче деталей имеются бракованные, а именно n деталей. Следовательно, бракованные детали находятся в n-й коробке. ▲

103*. В коробке лежали 10 настоящих монет и 11 фальшивых, причем каждая фальшивая монета на 1 г легче каждой из настоящих. Из коробки взяли одну монету. Как за одно взвешивание на весах со стрелкой и гирями определить, какая это монета — настоящая или фальшивая?

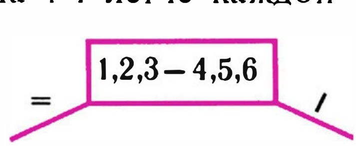


Рис. 33

104. Имеется 4 предмета разной массы. За какое наименьшее число взвеши-

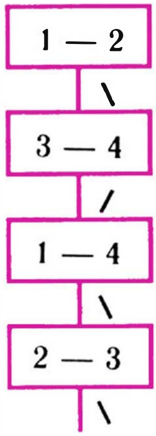


Рис. 34

ваний на рычажных весах без гирь можно найти самый тяжелый и самый легкий из этих предметов?

△ Занумеруем предметы. При первом взвешивании положим на одну чашку весов первый предмет, на другую — второй; при втором сравним массы двух оставшихся предметов (рис. 34). При третьем взвешивании сравним массы двух более легких предметов этих пар (в данном случае — первого и четвертого), при следующем — двух более тяжелых (второго и третьего). Получилось, что самый легкий предмет — первый, самый тяжелый — третий.

При любой другой системе взвешиваний их число увеличивается, поэтому наименьшее число взвешиваний равно 4.

Ответ: за четыре. ▲

105*. Имеется 6 камней разной массы. Как за 8 взвешиваний на рычажных весах без гирь можно найти самый тяжелый и самый легкий из этих камней?

106. Из 11 шаров два радиоактивных. За одну проверку про любую кучку шаров можно узнать, есть ли в ней радиоактивный шар, но при наличии такого шара нельзя узнать, сколько их — один или два. Как за семь проверок найти оба радиоактивных шара?

△ Занумеруем шары. Разделим их на три кучки: в одну включим шары 1—4, в другую — шары 5—8, в третью — 9—11. За три проверки для каждой из этих кучек установим, есть ли в ней радиоактивный шар; если при проверке двух кучек окажется, что в каждой из них имеется радиоактивный шар, то можно обойтись и двумя проверками. Теперь рассмотрим две возможности.

Пусть радиоактивные шары находятся в разных кучках.

Для того чтобы найти радиоактивный шар в каждой из этих двух кучек, требуется не более двух проверок, а значит, для обеих кучек — не более четырех.

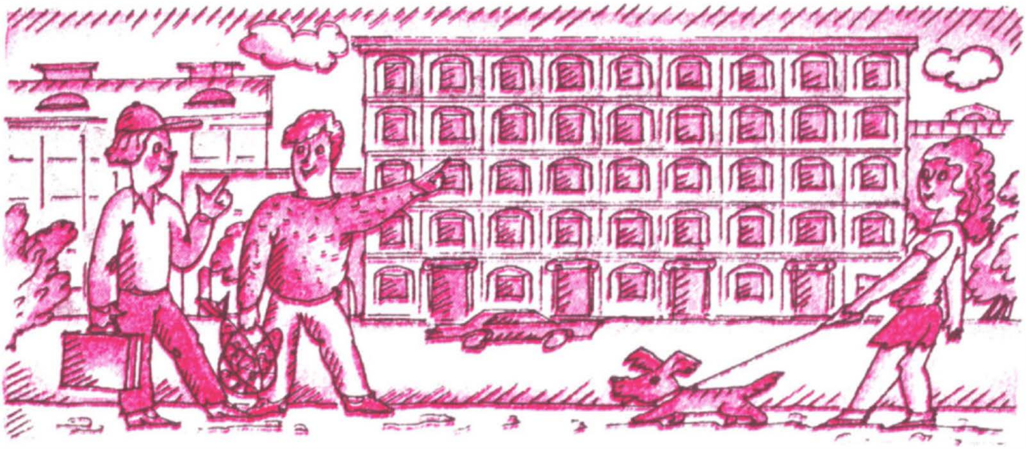
Пусть радиоактивные шары находятся в одной кучке.

А здесь хватит не более трех проверок. ▲

5.4. VIII—IX

В заключение займемся задачами на нахождение элемента множества с помощью системы вопросов. При этом используется **метод половинного деления.**

107. Я живу в пятиэтажном доме с четырьмя подъездами, с четырьмя квартирами на каждой лестничной площадке. За какое



наименьшее число вопросов вы можете определить, в какой квартире я живу, если на все ваши вопросы я буду отвечать правдиво, но только "да" или "нет"?

△ Легко подсчитать, что всего в доме $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ квартир.

Вопросы лучше ставить так, чтобы после ответа на очередной ваш вопрос число элементов множества, содержащего номер моей квартиры, уменьшилось вдвое или, в случае нечетного числа элементов, "почти вдвое". Это и есть метод половинного деления.

Будем ставить вопросы, а в скобках указывать один из двух возможных моих ответов.

1) Номер вашей квартиры больше 40? (Нет.)
2) Он больше 20? (Нет.)
3) Он больше 10? (Да.)
4) Он больше 15? (Да.)
5) Номер вашей квартиры больше 18? (Нет.)
6) Вы живете в 16-й квартире? (Нет.)
7) Вы живете в 17-й квартире? (Нет.)

Следовательно, я живу в 18-й квартире.

Итак, для решения задачи потребовалось 7 вопросов, а в благоприятном случае, если бы, например, я жил в 16-й квартире, и 6.

Можно изменить систему вопросов: сначала определить подъезд, в котором я живу (на это понадобится 2 вопроса), затем — этаж (3 вопроса), наконец, квартиру на лестничной площадке (еще 2).

Сложнее доказать, что 6 вопросов для определения номера моей квартиры недостаточно. Допустим, что вы можете узнать его за 6 вопросов. Мои ответы можно представить в виде упорядоченного набора *abcdef*, где каждая из букв *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* принимает два значения — "да" и "нет". Сколько значений принимает сам набор? Если бы он содержал всего две буквы, то принимал бы 4 значения, а если три, то 8, так как каждое значение пары букв нужно комбинировать с каждым значением третьей буквы, а это дает $4 \cdot 2 = 8$ значений тройки букв. В данном случае общее число значений набора из 6 букв равно произведению $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2 = 64$. (Фактически здесь применялось правило произведения — см. § 6.)

Но поскольку число квартир в доме больше 64, то два различных номера квартир приведут к одинаковой последовательности ответов, и мы не сможем определить, какой из них верный.

Ответ: за 7. ▲

108. Я хочу узнать день и месяц вашего рождения, задавая вам вопросы, на которые вы будете отвечать правдиво, но только "да" или "нет". За какое наименьшее число вопросов я смогу достичь этого?

109. Я хочу узнать шестизначный номер вашего телефона, задавая вам вопросы, на которые вы будете отвечать лишь "да" или "нет". За какое наименьшее число вопросов я могу это сделать?

По существу в основе решения задач, подобных задачам 107-109, лежит двоичная система счисления: отгадываемое число можно перевести в двоичную систему, а так как в этой системе цифра может принимать только два значения — 1 и 0, то для определения каждой цифры достаточно одного вопроса. Это можно заметить уже при решении задачи 107.

Сформулируем общий результат в таких задачах. Пусть множество натуральных чисел имеет k элементов, вы задумываете один из его элементов, а я хочу его узнать, задавая вам вопросы, на которые вы будете отвечать правдиво, но только "да" или "нет". Если справедливо неравенство

$$2^{n-1} < k \le 2^n \quad (n \in \boldsymbol{N}),$$

то наименьшее число вопросов, за которое я могу сделать это, равно n.

Для доказательства последнего утверждения запишем задуманное число в двоичной системе счисления. Если k меньше 2^n, то и искомое число меньше 2^n, а следовательно, оно имеет не более n цифр. (Нужно иметь в виду, что само это число может быть и больше, и меньше, и равным 2^{n-1}.) Если же $k = 2^n$ и задуманное число и есть 2^n, то получится $(n+1)$-значное число

$$1\underbrace{000\ldots0}_{n\text{ нулей}}{}_2\,.$$

Теперь за n вопросов определяем все цифры искомого числа, начиная с последней. В случае когда задумано число

$$1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ нулей}}{}_2\,,$$

после выяснения того, что все последние n его цифр равны нулю, нетрудно сделать вывод, что первая цифра равна 1.

Докажем, что $n-1$ вопросов в общем случае недостаточно. Это делается примерно так же, как и при решении задачи 107. Допустим, что искомое число можно найти за $n-1$ вопрос. Ответы на мои вопросы можно представить в двоичной системе в виде числа, имеющего не более $n-1$ цифр: будем приписывать соответствующей цифре числа значение 1 при ответе "да" и значение 0 при ответе "нет". Тогда само это число принимает

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-1 \text{ двоек}} = 2^{n-1}$$

значений. Но поскольку число элементов множества по условию больше 2^{n-1}, то два различных элемента множества приведут к одному и тому же числу в двоичной системе, и мы не сможем установить, какое из них было задумано.

Применим только что доказанное утверждение при решении задачи 107. Так как $2^6<80<2^7$, то номер квартиры можно найти за 7 вопросов.

110*. Одна из составных частей бензинового двигателя имеет форму валика. Для измерения толщины валика используется стальная лента, в которой просверлены 15 отверстий: первое имеет диаметр 10 мм, каждое последующее имеет диаметр, на 0,04 мм больший предыдущего; в частности, диаметр последнего отверстия равен $10+14\cdot 0{,}04 = 10{,}56$ мм. Калибровка валика заключается во вкладывании его в отверстия: из всех отверстий, в которые он входит, выбирается отверстие наибольшего диаметра, что позволяет определить диаметр валика с точностью до 0,04 мм. За какое наименьшее число испытаний обязательно удастся найти диаметр валика?

§ 6. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ VI—XI

Литература: [6], [15в], [23], [25].

Комбинаторика сложилась в XVII-XVIII вв. Долгое время считалось, что она находится в стороне от главного русла развития математики и применяется в основном при расшифровке древних письменностей и кодировании. Позднее положение существенно изменилось, особенно в последние десятилетия в связи с появлением быстродействующих вычислительных машин. Комбинаторика превратилась в важный раздел математики, который используется в биологии, химии, физике, экономике, вычислительной математике и др. В связи с этим в ней возникли и многие новые методы.

Что изучает комбинаторика? Комбинации и перестановки предметов, расположение элементов, обладающее заданными свойствами, подмножества конечных множеств и способы их упорядочивания и т. д. Отсюда видно, что она тесно связана с теорией множеств. Обычный вопрос в таких задачах: сколькими способами можно сделать то-то? Или: укажите все способы, которыми можно это сделать.

Рассмотрим вводные комбинаторные задачи.

111. Сколько можно составить пятизначных натуральных чисел с помощью цифр 1 и 0, если в запись каждого числа цифра 1 входит ровно три раза?

△ Будем искать указанные числа перебором, причем так, чтобы не потерять ни одного числа. Проще начать с нахождения мест для двух нулей, так как если места для нулей определены, то три оставшихся места заполняются единицами однозначно.

Зафиксируем один из нулей на втором месте; тогда другой нуль можно записать на третьем, четвертом или пятом местах. Если теперь один нуль фиксировать на третьем месте, то второй нуль можно записать на четвертом или пятом местах (вариант, когда нули стоят на третьем и втором местах, уже встречался). Наконец, если один из нулей зафиксировать на четвертом месте, то для другого нуля остается только пятое место. Получаем такие 6 чисел:

10011, 10101, 10110, 11001, 11010, 11100.

Ответ: 6. ▲

112. Имеется 8 шаров: 4 синих, 3 красных, 1 белый и два ящика, один из которых вмещает не более 3 шаров, другой — не более 5. Сколькими способами можно разместить все эти 8 шаров в двух ящиках?

113. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра больше второй?

△ Если первая цифра двузначного числа равна 1, то такое число только одно — 10. Если первая цифра числа равна 2, то таких чисел два — 20 и 21. Если первая цифра равна 3, то таких чисел уже три — 30, 31 и 32. И т. д. Наконец, если первая цифра равна 9, то таких двузначных чисел девять — от 90 до 98. Следовательно, всего чисел $1+2+3+\ldots+9 = 45$.

Ответ: 45. ▲

114. Сколько существует двузначных натуральных чисел, у которых первая цифра меньше второй?

115. Сколько существует девятизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке убывания?

116. Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, если каждый множитель можно использовать в каждом из произведений не более одного раза?

117. Сколько существует натуральных чисел, меньших 100, которые:

а) делятся на 2 и на 3;
б) делятся на 2, но не делятся на 3;
в) делятся на 3, но не делятся на 2;
г) делятся на 2 или на 3;
д) не делятся ни на 2, ни на 3?

118. От города *A* до города *B* 999 км. Вдоль шоссе, ведущего из *A* в *B*, стоят километровые столбы, на которых расстояния от столба до *A* и *B* обозначены так:

0	999

1	998

2	997

...

999	0

Сколько среди этих столбов имеется таких, на которых для обозначения обоих расстояний использованы только две различные цифры?

△ Сначала подсчитаем число столбов с цифрами 9 и 0:

0-999, 999-0, 9-990, 990-9, 90-909, 909-90, 99-900, 900-99.

Аналогично, столбов с цифрами 8 и 1, 7 и 2, 6 и 3, 5 и 4 будет по 8.

Ответ: $8 \cdot 5 = 40$. ▲

119. Задача, аналогичная задаче 118, но расстояние *AB* равно:
а) 666 км; б) 1000 км.

120°. Докажите, что произведение k-значного натурального числа на n-значное записывается $k+n$ или $k+n-1$ цифрами.

△ Сначала умножим минимальное k-значное число на минимальное n-значное:

$$1\underbrace{000\ldots0}_{k-1 \text{ нулей}} \cdot 1\underbrace{000\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}} = 10^{k-1} \cdot 10^{n-1} = 10^{k+n-2} = 1\underbrace{000\ldots0}_{k+n-2 \text{ нулей}}.$$

Следовательно, минимальное количество цифр произведения равно $k+n-1$.

Теперь умножим максимальное k-значное число на максимальное n-значное и оценим произведение сверху:

$$\underbrace{999\ldots9}_{k \text{ девяток}} \cdot \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ девяток}} = (10^k-1)\cdot(10^n-1) < 10^k \cdot 10^n = 10^{k+n} = 1\underbrace{000\ldots0}_{k+n \text{ нулей}}.$$

Последнее число является минимальным из $(k+n+1)$-значных чисел. Значит, число цифр произведения в левой части неравенства меньше $k+n+1$, т. е. с учетом предыдущего оно равно $k+n-1$ или $k+n$.

В том, что количество цифр произведения может быть равным $k+n-1$, мы уже убедились. Но может ли оно быть равным $k+n$ — количеству цифр одного множителя, сложенному с количеством цифр другого? То, что это возможно, показывает пример $999 \cdot 99 = 98901$, где произведение трехзначного числа на двузначное есть число пятизначное. ▲

121. Сколькими цифрами записывается куб трехзначного натурального числа?

122. Сколько цифр у натурального числа, если его четвертая степень записывается 18 цифрами?

123. В соревнованиях по теннису участвуют n игроков. Каждый теннисист выбывает после первого поражения. Ничьих в теннисе не бывает. Сколько нужно провести встреч, чтобы выявить победителя?

124*. Шашка может перемещаться в одном направлении по разделенной на клетки полосе, передвигаясь за один ход либо на соседнюю клетку, либо через одну. Сколькими способами она может переместиться на 10 клеток?

△ Шашка может переместиться на одну клетку 1 способом, на две — 2, на три — $1+2=3$ способами, на четыре — $3+2=5$ способами, на пять — $3+5=8$ и т. д. Фактически образуется последовательность Фибоначчи (см. решение задачи 12), которая задается рекуррентной формулой

$$a_n = a_{n-1}+a_{n-2} \quad (n \in N,\ n>2)$$

и начальными условиями $a_1=1$ и $a_2=2$. Находим ее 10-й член.

О т в е т: 89. ▲

125*. Сколькими способами прямоугольную доску размерами 2 см × 12 см можно покрыть прямоугольными плитками размерами 1 см × 2 см? Плитки разрешается укладывать так, чтобы они целиком помещались на доске и не перекрывались.

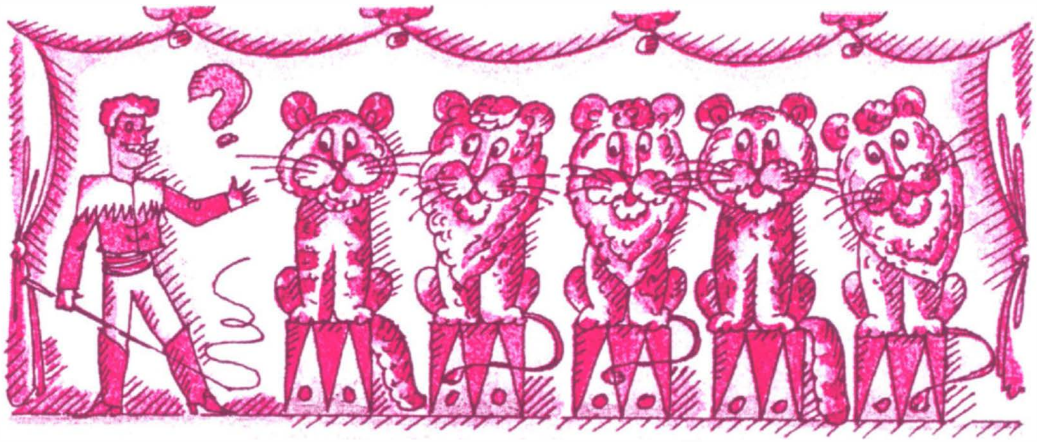
126. Простая шашка находится на крайнем левом нижнем поле шашечной доски 8×8. Сколькими различными способами она может пройти в дамки?

127*. Имеется волейбольная сетка с прямоугольными ячейками размерами $m \times n$ ячеек. Какое максимальное число разрезов по веревочкам, соединяющим соседние узлы сетки, можно сделать так, чтобы сетка не распалась на две части?

6.2. VIII—XI

Займемся задачами на п р а в и л о п р о и з в е д е н и я.

Для комбинаторики характерно обилие применяемых в ней правил. Рассмотрим одно из них — **правило произведения** или **основное правило комбинаторики**.



Если переменная x принимает k значений и после этого переменная y принимает n значений, то упорядоченная пара $(x;\ y)$ принимает kn значений.

Для доказательства этого утверждения обозначим значения переменной x через $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, а значения переменной y через, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. Выпишем все возможные значения пары $(x;\ y)$:

$$\begin{array}{c}(x_1;\ y_1),\ (x_1;\ y_2),\ (x_1;\ y_3), \ldots,\ (x_1;\ y_n),\\ (x_2;\ y_1),\ (x_2;\ y_2),\ (x_2;\ y_3), \ldots,\ (x_2;\ y_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_k;\ y_1),\ (x_k;\ y_2),\ (x_k;\ y_3), \ldots,\ (x_k;\ y_n).\end{array}$$

Полученная прямоугольная таблица имеет k строк и n столбцов, а следовательно, пара $(x;\ y)$ принимает kn различных значений.

Правило произведения можно обобщить на случай любого конечного числа переменных.

128. Дрессировщик выводит на арену цирка трех львов А, Б, В и двух тигров Г и Д и сажает их в ряд на тумбы. При этом тигров нельзя помещать рядом, иначе драка между ними неизбежна. Сколько всего существует способов размещения зверей?

△ Сначала подсчитаем, сколькими способами можно разместить тигров. Если тигр Г займет первое место, то тигр Д может занять третье, четвертое или пятое место. Если Г займет второе место, то Д можно посадить только на четвертое или пятое место. Если Г поместить на третье или четвертое место, то Д в каждом из этих случаев можно посадить на одно из двух мест. Если Г займет пятое место, то для Д остается одно из трех мест. Значит, число способов, которыми можно посадить пару тигров, равно

$$3+2+2+2+3 = 12.$$

Займемся размещением львов. Льва А можно посадить на любое из трех мест, оставшихся после размещения тигров; затем льва Б можно посадить на любое из двух оставшихся мест; льву В достанется последнее свободное место. Отсюда число способов, которыми можно разместить львов, по правилу произведения равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Следовательно, общее число способов построения зверей на основании того же правила равно $12 \cdot 6 = 72$.

Ответ: 72. ▲

129°. Докажите, что количество:

а) двузначных натуральных чисел равно 90;

б) трехзначных — 900;

в) четырехзначных — 9000;

г) вообще, n-значных — $9\underbrace{000\ldots0}_{n-1 \text{ нулей}}$.

△ а) Двузначное число можно записать в виде $\overline{xy}$, где x и y — цифры (в десятичной системе счисления), $x \neq 0$. Так как цифра x принимает 9 значений — от 1 до 9, а цифра y — 10 значений, то упорядоченная пара $\overline{xy}$ по правилу произведения принимает $9 \cdot 10 = 90$ значений.

Задачу можно решить и без правила произведения. Однозначных и двузначных чисел вместе — 99, из них однозначных — 9; следовательно, количество двузначных чисел равно $99 - 9 = 90$.

б) Трехзначное число можно рассматривать как упорядоченную тройку цифр $\overline{xyz}$, где цифра x принимает 9 значений, а цифры y и z — по 10 значений. Отсюда по правилу произведения количество трехзначных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.

Подумайте, как решить эту задачу без правила произведения. ▲

130. В книге 350 страниц. Сколько цифр понадобится для нумерации страниц книги?

131. Для нумерации страниц книги потребовалось 1308 цифр. Сколько страниц в книге?

132. Сколько цифр понадобится, чтобы написать все натуральные числа от 1 до 10 000 включительно?

133. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, которые записываются только с помощью цифр 1, 2 и 3?

134. Сколько существует четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, записывающихся только с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5 и 6?

△ Четырехзначное число можно представить в виде $\overline{xyzt}$, где x, y, z, t — цифры. При этом цифра x принимает 6 значений, после нее цифра y — 5 (повторение цифр не допускается), затем цифра z — 4, цифра t — 3. Значит, количество таких четырехзначных чисел равно $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Ответ: 360. ▲

135. Сколько существует трехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, записывающихся только с помощью цифр 0, 2, 4, 6 и 8?

136°. Докажите, что произведение суммы k членов на сумму n членов до приведения подобных членов содержит kn членов.

△ Любой член произведения можно представить в виде $y \cdot z$, где y — любое слагаемое первой суммы, z — любое слагаемое второй. Тогда переменная y принимает k значений, переменная z — n значений. Следовательно, число членов разложения равно kn. ▲

137. В выражении $(x^2+x+3)^{10}$ раскрыты скобки, но не приведены подобные члены. Сколько членов при этом получится?

138. В выражении $(x+a)^{12}$ раскрыты скобки. Сколько получится членов разложения

а) до приведения подобных членов; б) после приведения?

139. Произведение многочлена

$$x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1$$

на другой многочлен с переменной x содержит до приведения подобных членов 36 слагаемых со знаком плюс и 34 слагаемых со знаком минус. Сколько членов второго многочлена имеют знак плюс?

140. На прямой даны 10 точек, а на параллельной ей прямой — 8 точек. Сколько всего существует отрезков, один конец которых совпадает с одной из 10 точек первой, а другой — с одной из 8 точек второй прямой?

141. На плоскости даны n точек ($n \geq 3$). Сколько всего можно провести векторов, соединяющих эти точки попарно?

142. На плоскости даны n точек ($n \geq 3$), из которых никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит через две из данных точек?

△ По аналогии с решением предыдущей задачи получается $n(n-1)$ прямых. Но дело в том, что прямую можно рассматривать, в отличие от вектора, как н е у п о р я д о ч е н н у ю пару точек — в том смысле, что прямая AB совпадает с прямой BA. Поэтому при таком подсчете каждая прямая повторяется дважды. Следовательно, число прямых будет в два раза меньше, чем указано выше, а значит, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

О т в е т: $\frac{n(n-1)}{2}$. ▲

Задачи, по существу совпадающие с задачей 142, встречаются довольно часто. Например: в шахматном турнире в один круг играют n игроков; сколько всего они провели встреч? Или: встретились n друзей и обменялись рукопожатиями; сколько всего было рукопожатий? Встречались они и в этой книге (см., например, задачи 35—39).

143. На плоскости даны 10 точек, из которых ровно четыре лежат на одной прямой, а из остальных никакие три не лежат на одной прямой. Сколько всего можно провести прямых, каждая из которых проходит или через две, или через четыре из данных точек?

144. Сколько всего диагоналей у выпуклого многоугольника, имеющего n сторон?

145. Из города A в город B можно попасть или через пункт K, или через пункт M. Из A в K ведут k дорог, из A в M — l, из K в B — m, из M в B — n дорог. Пункты K и M дорогами не соединяются. Сколько всего дорог ведут из A в B?

6.3. IX—XI

Рассмотрим задачи, связанные с формулами числа размещений и сочетаний. Но сначала познакомимся с самими размещениями и сочетаниями.

Пусть k и n — любые натуральные числа, удовлетворяющие условию $k \leq n$. **Размещением из n элементов по k называется упорядоченное подмножество из k элементов множества, имеющего n элементов.**

Число размещений из n элементов по k обозначается через A_n^k.

Число размещений из n элементов по k равно произведению k последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является n:

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}_{k \text{ множителей}}. \qquad (1)$$

Докажем формулу (1).

Пусть M — данное множество, имеющее n элементов:

$$M = \{a_1;\ a_2;\ a_3;\dots;\ a_n\}.$$

Обозначим через X любое упорядоченное его подмножество, состоящее из k элементов, т. е. последовательность с k различными членами, взятыми из множества M:

$$X = (x_1;\ x_2;\ x_3;\dots;\ x_k).$$

Здесь $x_1, x_2, \dots, x_k$ — переменные, k — постоянная.

Подсчитаем количество всех таких подмножеств. Для этого определим, сколько значений принимает каждая из переменных.

Переменная x_1 принимает n значений, так как ее значениями являются все элементы множества M.

Переменная x_2 принимает $n-1$ значений, так как ее значениями могут быть все элементы M, кроме того элемента, который является значением x_1.

Переменная x_3 после этого принимает $n-2$ значений: ее значениями могут быть все элементы M, кроме тех, которые являются значениями x_1 и x_2. И т. д.

Наконец, переменная x_k принимает $n-(k-1)$ значений: ее значениями могут быть все элементы M, кроме тех, которые являются значениями предыдущих $k-1$ переменных.

Отсюда на основании правила произведения и получим формулу (1).

Приведем пример:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно называется *n*-факториал и обозначается символом *n*!:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Например, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $1! = 1$.

Размещение из *n* элементов по *n* называется перестановкой из *n* элементов. Число перестановок из *n* элементов обозначается через P_n.

Число перестановок из *n* элементов равно *n*!:

$$P_n = n!$$

В самом деле, имеем:

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Перейдем к сочетаниям.

Пусть по-прежнему k и n — любые натуральные числа, где $k \leq n$.

Сочетанием из *n* элементов по *k* называется (неупорядоченное) **подмножество из *k* элементов множества, имеющего *n* элементов.**

Сочетание из n элементов по k отличается от подобного же размещения тем, что в нем порядок следования элементов несуществен: два сочетания из n элементов по k, которые различаются только порядком следования элементов, считаются совпадающими.

Число сочетаний из n элементов по k обозначается через C_n^k.

Число сочетаний из *n* элементов по *k* равно дроби, числитель

которой есть произведение k последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является n, а знаменатель — произведение k последовательных натуральных чисел, наибольшим из которых является k:

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}^{k \text{ множителей}}}{k!}. \qquad (3)$$

Для доказательства формулы (3) возьмем всевозможные сочетания из n элементов по k; их число равно C_n^k. В каждом сочетании выполним всевозможные перестановки его элементов; число таких перестановок равно P_k. После этого получатся все размещения из n элементов по k; их число равно A_n^k. Теперь имеем:

$$C_n^k \cdot P_k = A_n^k.$$

Выразим отсюда C_n^k:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{k!}.$$

Приведем примеры на применение формулы (3):

$$C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56, \quad C_n^n = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Отметим одно свойство числа сочетаний.

Справедлива формула:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \qquad (4)$$

Для доказательства формулы (4) выберем из множества, содержащего n элементов, k элементов. Образуется его подмножество из k элементов; число всех таких подмножеств равно C_n^k. Этот выбор равносилен выбору остальных $n-k$ элементов исходного множества. Образуется новое подмножество того же множества, имеющее $n-k$ элементов; число всех таких подмножеств равно C_n^{n-k}. Отсюда следует, что число всех подмножеств первого вида равно числу всех подмножеств второго, т. е. справедлива формула (4).

Формулу (4) используют в тех случаях, когда k больше половины n. Так, при вычислении C_8^6 по формуле (3) получится дробь, у которой числитель и знаменатель имеют по 6 множителей — это громоздко для вычислений. Лучше применить формулу (4):

$$C_8^6 = C_8^{8-6} = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

Перейдем к задачам.

146. Из группы в 15 человек выбирают четырех участников эстафеты 800+400+200+100. Сколькими способами можно расставить спортсменов по этапам эстафеты?

△ Выберем сначала спортсмена для этапа в 800 м, затем — 400 м, потом — 200 м, наконец, для этапа в 100 м. Так как порядок следования выбранных спортсменов существен, то перед нами размещения — размещения из 15 элементов по 4. Получим:

$$A_{15}^4 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32\ 760.$$

Ответ: 32 760. ▲

147. Расписание одного дня содержит 5 уроков. Сколько всего можно составить таких расписаний при выборе из 10 различных дисциплин?

148. 8 участников шахматного турнира играют в комнате, где имеется 4 столика. Сколькими способами можно расположить шахматистов за столиками, если заранее известны участники всех партий?

149. Сколько четырехзначных натуральных чисел без повторяющихся цифр, делящихся на 4, можно составить с помощью цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

△ Вспомним признак делимости на 4: натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное двумя его последними цифрами, делится на 4. В данном случае такое число может оканчиваться лишь на 12, 32, 52 или 24. В каждом из этих четырех случаев две первые цифры четырехзначного числа можно выбрать числом способов, равным A_3^2. Будем иметь:

$$4 \cdot A_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

Ответ: 24. ▲

150. В слове "логарифм" буквы переставляют так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами. Сколько всего существует таких перестановок?

151. Сколькими способами можно построить в одну шеренгу игроков двух футбольных команд, по 11 человек в каждой, так, чтобы никакие два футболиста одной команды не стояли рядом?

152. Сколько четырехзначных натуральных чисел с разными цифрами, содержащих цифру 3, можно составить с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5?

△ Пусть сначала в четырехзначном числе цифра 3 стоит на первом месте. Таких чисел будет A_5^3.

Пусть цифра 3 стоит на втором месте. Таких четырехзначных натуральных чисел как будто тоже A_5^3. Но нужно учесть, что некоторые из них начинаются с нуля. Сколько же "четырехзначных" чисел начинаются с 03? Очевидно, A_4^2. Следовательно, в этом случае получаем $A_5^3 - A_4^2$ чисел.

Аналогично, в случаях, когда цифра 3 стоит на третьем или четвертом месте, количество четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно каждый раз $A_5^3 - A_4^2$. В итоге будем иметь:

$$A_5^3 + 3 \cdot A_5^3 - A_4^2 = 4 \cdot A_5^3 - 3A_4^2 = 4 \cdot 60 - 3 \cdot 12 = 204 \cdot$$

Ответ: 204. ▲

153. Сколько трехзначных натуральных чисел, с различными цифрами, делящихся на 3, можно составить с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5?

154*. В шахматной встрече двух команд, по 8 человек в каждой, участники партий и цвет фигур каждого участника определяются жеребьевкой. Каково число различных исходов жеребьевки?

155. На плоскости даны 10 прямых, причем среди них нет параллельных и через каждую точку их пересечения проходят ровно две прямые. Сколько у них точек пересечения?

△ Каждая точка пересечения определяется парой прямых a и b, которые пересекаются в этой точке. Поскольку порядок следования этих прямых не играет роли, то каждая пара таких прямых есть сочетание — сочетание из 10 элементов по 2. Получаем:

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45 \cdot$$

Ответ: 45. ▲

156*. На плоскости даны 14 прямых, причем 4 из них параллельны и через каждую точку их пересечения проходят ровно две прямые. Сколько у них точек пересечения?

157. На плоскости даны 11 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой и никакие четыре не лежат на одной окружности. Сколько всего существует окружностей, каждая из которых проходит через три данные точки?

158. На плоскости даны 15 точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой, пять лежат на одной окружности, а из остальных никакие четыре не лежат на одной окружности. Сколько существует окружностей, каждая из которых проходит по меньшей мере через три данные точки?

159. В пространстве даны 12 точек, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости. Сколько существует плоскостей, каждая из которых проходит через три данные точки?

160. Из группы в 16 человек нужно выделить бригадира и четырех членов бригады. Сколькими способами это можно сделать?

161. Сколько существует шестизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке возрастания?

△ Возьмем девятизначное число 123456789, цифры которого идут в порядке возрастания. Для того чтобы получить какое-либо шестизначное число с тем же свойством, достаточно в этом девятизначном числе вычеркнуть любые три цифры. Так как порядок вычеркиваемых цифр не имеет значения, то перед нами сочетания. Имеем:

$$C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84.$$

Ответ: 84. ▲

162. Сколько существует пятизначных натуральных чисел, у каждого из которых цифры расположены в порядке убывания?

163. Сколькими способами можно множество из 6 элементов разбить на 3 подмножества по два элемента в каждом?

164. Из 6 учеников 10-го класса и 8 учеников 11-го класса нужно составить комиссию из трех человек. Сколькими способами это можно сделать, если в комиссию должны войти:

а) ровно два десятиклассника;

б) не более одного десятиклассника;

в) по меньшей мере один десятиклассник?

165. На прямой даны 6 точек, а на параллельной ей прямой — 8 точек. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

△ Сначала подсчитаем число треугольников, у которых две вершины лежат на первой прямой, а одна — на второй:

$$C_6^2 \cdot C_8^1 = 15 \cdot 8 = 120.$$

Аналогично подсчитаем число треугольников, у которых одна вершина лежит на первой прямой, а две — на второй:

$$C_6^1 \cdot C_8^2 = 6 \cdot 28 = 168.$$

Получается $120+168 = 288$ треугольников.

Ответ: 288. ▲

166*. Прямоугольник пересекается 9 прямыми, параллельными одной его стороне, и 12 прямыми, параллельными другой. Сколько всего получилось прямоугольников?

167*. Окружность разделена на 5 равных дуг. Сколько незамкнутых ломаных без самопересечений можно провести через точки деления, выбирая в качестве начальной одну и ту же точку?

§ 7. МЕТОД ПЕРЕБОРА VI—IX

Литература: [7], [69[в]], [73], [76[в]].

Метод перебора применяется в задачах, при решении которых приходится перебирать различные варианты. Перебор должен быть грамотным, т. е. таким, чтобы при его использовании были рассмотрены все случаи, которые могут представиться, а кроме того, отброшены заведомо негодные варианты, что значительно сокращает объем работы. Применяется он в основном тогда, когда значениями искомой величины могут быть только целые числа, а множество всех таких значений конечно.

Методом перебора широко пользуются ученые при решении многих важных задач. Правда, при этом большей частью возникает огромное количество возможностей, что заставляет поручить перебор электронной вычислительной машине. Например, с помощью перебора, выполненного ЭВМ, сравнительно недавно была решена знаменитая задача о четырех красках, которая долго не поддавалась решению: "Любую ли географическую карту можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы страны, окрашенные в одинаковый цвет, не имели общей границы?" Ответ оказался утвердительным. Для сокращения перебора созданы специальные методы, которые составляют новую область математики — целочисленное программирование.

Здесь мы рассмотрим сравнительно несложные задачи на метод перебора, причем такие, решение которых без этого метода было бы труднее или даже невозможно. При решении подобных задач обычно применяют и другие соображения, например свойства делимости целых чисел, а метод перебора выступает в качестве составной части решения.

Возможна еще одна ситуация, в которой перебор оказывается весьма полезным. Представим себе, например, что нужно найти множество всех натуральных чисел, обладающих некоторым свойством, а прямолинейный перебор всех вариантов невозможен из-за того, что это множество бесконечно или конечно, но содержит очень большое число элементов. Тогда перебирают немногие его элементы с тем, чтобы догадаться о наличии общей закономерности. Потом, разумеется, эту догадку следует строго доказать или, напротив, опровергнуть. Во втором случае нужно тем же способом строить новую гипотезу.

7.1. VI—VIII

Метод перебора широко применяется при решении задач на восстановление записи при выполнении действий над числами и близких к ним задач на числовые ребусы.

168. Восстановите в примере на умножение $** \cdot ** = 1*1$ цифры, обозначенные звездочками. Найдите все решения.

△ Очевидно, первые цифры множителей равны 1. Найдем их вторые цифры.

Произведение двух цифр может оканчиваться единицей только в следующих трех случаях: $1 \cdot 1$, $3 \cdot 7$ и $9 \cdot 9$. Переберем все три возможности: $11 \cdot 11 = 121$ подходит, $13 \cdot 17 = 221$ не подходит, $19 \cdot 19$ тем более.

Ответ: $11 \cdot 11 = 121$. ▲

169. Восстановите запись: $*8\cdot*=8**$.
Укажите все решения.
170. Восстановите запись, указав все решения:

$$\begin{array}{r} \times\ \ 1*\\ **\\ \hline +\ ***\\ **\ \\ \hline ***1 \end{array}$$

△ Сначала восстановим часть умножения, получающуюся при умножении первого множителя на вторую цифру второго множителя:

$$1*\cdot* = **1.$$

Рассмотрим все возможности:

$$11\cdot1 = 11,\quad 17\cdot3 = 51,\quad 13\cdot7 = 91,\quad 19\cdot9 = 171.$$

Подходит только последняя. Теперь запись принимает такой вид:

$$\begin{array}{r} \times\ \ 19\\ *9\\ \hline +\ 171\\ **\ \\ \hline ***1 \end{array}$$

Как видно из сложения, первая цифра второго слагаемого равна 8 или 9. Тогда первая цифра второго множителя может быть равна только 5, поскольку произведение $19 \cdot 4 = 76$ слишком мало, а произведение $19 \cdot 6 = 114$ слишком велико для этого.

Ответ: $19 \cdot 59 = 1121$. ▲

171. Восстановите запись, указав все решения:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} ** \\ 7* \end{array} \\ \hline + \begin{array}{r} *** \\ ** \end{array} \\ \hline *** \end{array}$$

172. Восстановите запись:

$$\begin{array}{c} \text{КРОСС} \\ + \\ \text{КРОСС} \\ \hline \text{СПОРТ}, \end{array}$$

где каждая буква означает цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите все решения.

Это пример числового ребуса.

△ Обратим внимание на два последних столбца. Так как в них при сложении одних и тех же цифр С и С получаются разные цифры, то в пятом столбце должно получиться в сумме не менее 10, откуда С не меньше 5.

Присмотримся к третьему столбцу: когда сумма О+О может оканчиваться той же самой цифрой О? Такое возможно лишь тогда, когда О равно нулю или девяти. Но О равной нулю быть не может, поскольку из четвертого столбца в третий переносится 1; значит, О равно девяти.

Вернемся к цифре С. С учетом предыдущего справедливо неравенство $5 \le С \le 8$. Переберем все четыре возможных значения С (проделайте это самостоятельно).

Ответ: $35\,977 + 35\,977 = 71\,954$. ▲

173. Восстановите запись:

$$\text{ТЭТА} + \text{БЭТА} = \text{СУММА},$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Укажите все решения.

174. Восстановите запись:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;****5 & ** \\
\cline{2-2}
\underline{*7} & *** \\
-\;*** & \\
\underline{***} & \\
0 & .
\end{array}
$$

Найдите все решения.

△ Так как произведение делителя на первую цифру частного оканчивается на 7, то последняя цифра делителя и первая цифра частного нечетны.

Очевидно, средняя цифра частного равна нулю. А какова его последняя цифра? Поскольку произведение этой цифры на последнюю цифру делителя оканчивается на 5, то по меньшей мере одна из этих цифр равна 5. Но из предыдущего следует, что последняя цифра делителя не может быть равной 5; тогда последняя цифра частного равна 5.

Займемся первой цифрой частного. Ее произведение на делитель двузначно, а произведение последней цифры частного, равной 5, на тот же делитель трехзначно. Следовательно, первая цифра частного меньше 5. Так как она нечетна, то получаем, что эта цифра равна 1 или 3. Тогда частное равно 105 или 305. Поскольку произведение делителя на первую цифру частного оканчивается цифрой 7, то вторая цифра делителя равна соответственно 7 или 9. Для отыскания первой цифры делителя разберем два случая, заменяя деление умножением.

1) Рассмотрим равенство $105 \cdot {*7} = ****5$.

Даже произведение 105 на 87 дает четырехзначное, а не пятизначное число, не говоря уж о произведении 105 на 17, 27,..., 77. Но произведение 105 на 97 равно 10 185, а значит, пятизначно, что и требуется.

2) Рассмотрим запись $305 \cdot {*9} = ****5$.

Произведения $305 \cdot 19$ и $305 \cdot 29$ четырехзначны, а не пятизначны. Остальные произведения от $305 \cdot 39$ до $305 \cdot 99$ не подходят потому, что произведения на 3 чисел 39, 49,..., 99 трехзначны, а должны быть по условию двузначными.

О т в е т: 10 185: 97 = 105. ▲

175. Восстановите запись:

$$\text{Х:О} = \text{К, КЕЙ},$$

где цифра Й отлична от нуля, одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите все решения.

176. Восстановите запись:

$$\text{ПА}^2 = \text{ПИЛА},$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Укажите все решения.

△ Обратим внимание, что квадрат двузначного числа ПА четырехзначен и начинается с той же цифры П, что и само число. Попробуем узнать, чему равно П.

Числа 10^2, 20^2 и 30^2 трехзначны. Число $40^2 = 1600$ четырехзначно, но начинается с цифры 1, а не с 4. Аналогичная картина и с числами 50^2, 60^2, 70^2 и 80^2. Далее, $90^2 = 8100$, что также не подходит. Но уже $95^2 = 9025$, что и требуется. Значит, П = 9.

Теперь учтем, что квадрат оканчивается той же цифрой А, что и основание квадрата. Следовательно, А = 0, 1, 5 или 6. Остается проверить числа 90^2, 91^2, 95^2 и 96^2.

Ответ: $95^2 = 9025$, $96^2 = 9216$. ▲

177. Восстановите запись:

$$\text{АА}^\text{В} = \text{АВВА},$$

где одинаковые буквы означают одинаковые цифры, разные буквы — разные цифры. Найдите все ответы.

178*. Найдите пятизначное число $\overline{abcde}$ такое, чтобы каждое из чисел $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$ и $\overline{de}$ было квадратом натурального числа. Укажите все решения.

179. Найдите натуральное число вида ****3, которое является кубом натурального числа. Укажите все решения.

△ Очевидно, основание степени двузначно. Чему равна его последняя цифра? Только 7, поскольку цифра 7 — единственная, куб которой оканчивается цифрой 3.

Осталось найти первую цифру основания степени. Попробуем 17^3: $17^3 = 4913$ — мало, так как должно получиться число пятизначное, а не четырехзначное. Попробуем 97^3: $97^3 = 912\ 673$ — много. Переберем еще 27^3, 37^3 и 47^3:

$$27^3 = 19\ 683, \quad 37^3 = 50\ 653, \quad 47^3 = 103\ 823.$$

Подходят 27^3 и 37^3.

Ответ: $27^3 = 19\ 683$, $37^3 = 50\ 653$. ▲

180. Найдите натуральное число вида 12******7, которое является кубом натурального числа. Укажите все решения.

С помощью перебора можно решать уравнения первой степени с двумя неизвестными в натуральных числах.

181. Решите в натуральных числах x и y уравнение

$$22x+13y = 1000.$$

△ Из уравнения видно, что y должно быть четным. Кроме того, так как $22x+13y>13y$, то

$$1000>13y, \quad y<\frac{1000}{13}=76\frac{12}{13}.$$

Следовательно, $2\le y\le 76$.

Для того чтобы не перебирать все четные числа от 2 до 76, попробуем использовать соображения делимости на 11. Преобразуем уравнение следующим образом:

$$22x+11y+2y = 1001-1, \qquad 22x+11y+(2y+1) = 1001.$$

Так как $22x$, $11y$ и 1001 делятся на 11, то и $2y+1$ делится на 11.

Первое значение y, при котором $2y+1$ кратно 11, есть $y=5$, но оно нечетно. Следующее такое значение y, видимо, больше 5 на 11, т. е. равно 16. Проверим: $2\cdot16+1 = 33$, а 33 делится на 11. Очередное значение y больше 16 не на 11, а на 22, а значит, равно 38; следующее и притом последнее значение есть $38+22 = 60$. Для каждого из значений $y = 16, 38, 60$ вычислим соответствующее значение x.

Ответ: (10; 60), (23; 38), (36; 16). ▲

182. Решите в натуральных числах уравнение

$$19x+94y = 1994.$$

183. Кусок проволоки длиной 114 см нужно разрезать на части длиной 15 см и 18 см так, чтобы обрезков не было. Найдите все способы, которыми это можно сделать.

184. В квартире 13 человек, кошек и мух. У всех вместе 42 ноги, причем у каждой мухи 6 ног. Сколько было в отдельности людей, кошек и мух? Укажите все ответы.

△ Обозначим количество людей, кошек и мух соответственно через x, y и z. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=13, \\ 2x+4y+6z=42. \end{cases}$$

Второе из уравнений сократим на 2:

$$x+2y+3z = 21.$$

Вычитая из этого уравнения первое уравнение системы, будем иметь:

$$y+2z = 8.$$

Отсюда y должно быть четным. Далее переберем случаи $y = 2$, $y = 4$ и $y = 6$.

Ответ: (8; 2; 3), (7; 4; 2), (6; 6; 1), где первый элемент каждой тройки чисел означает количество людей, второй — кошек, третий — мух. ▲

185. 10 человек несут 22 арбуза. Каждый мужчина несет 4 арбуза, каждая женщина — 3, каждый ребенок — 1. Сколько было мужчин, женщин и детей в отдельности? Найдите все ответы.

186. Ученику ЗМШ прислали задание, состоящее из 12 задач. За каждую правильно решенную задачу от получает 5 баллов, за каждую неверно решенную с него снимают 3 балла; если же он задачу не решал, то получает за нее 0 баллов. В результате он набрал 11 баллов. Сколько задач ученик решил правильно? Укажите все ответы.

С помощью перебора можно решать многие задачи на делимость целых чисел.

187. Найдите все целые a, при которых является целым числом:

а) $\dfrac{12}{2a+1}$; б) $\dfrac{a+3}{a-1}$.

△ а) Переберем все делители 12, являющиеся целыми числами: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12. Но так как число $2a+1$ при целом a нечетно, то достаточно рассмотреть только делители, равные ±1 и ±3. Получим четыре случая:

$$2a+1 = 1,\ a = 0; \qquad 2a+1 = -1,\ a = -1;$$

$$2a+1 = 3,\ a = 1; \qquad 2a+1 = -3,\ a = -2.$$

б) Преобразуем данную дробь следующим образом:

$$\frac{a+3}{a-1} = \frac{(a-1)+(1+3)}{a-1} = 1 + \frac{4}{a-1}.$$

Последняя дробь должна быть равна целому числу. Переберем все целые делители числа 4: ±1, ±2 и ±4.

Ответ: а) −2, −1, 0, 1; б) −3, −1, 0, 2, 3, 5. ▲

188. Найдите все натуральные n, при которых является натуральным числом:

а) $\dfrac{3n+2}{n-2}$; б) $\dfrac{n^2+n+18}{n+3}$.

189*. Найдите все натуральные n, при которых 2^n-1 делится на 5.

△ Рассмотрим числа

$$2-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1,\ 2^4-1,\ 2^5-1,\ 2^6-1,\ 2^7-1,\ 2^8-1.$$

Выделим из них те, которые делятся на 5; это числа $2^4-1 = 15$ и $2^8-1 = 255$. По-видимому, разность 2^n-1 делится на 5 в том и только том случае, когда показатель n делится на 4.

Проверим эту гипотезу. Натуральное число при делении на 4 может давать в остатке 0, 1, 2 или 3. Переберем все четыре возможности.

1) Пусть n делится на 4: $n = 4k$, где k — натуральное. Получаем:

$$2^n-1 = 2^{4k}-1 = (2^4)^k-1 = 16^k-1 = (15+1)^k-1 =$$
$$= \underbrace{(15+1)(15+1)\ldots(15+1)}_{k}-1 = (15a+1)-1 = 15a.$$

Здесь использовалось то соображение, что при умножении k множителей, каждый из которых равен 15+1, почти все слагаемые образующейся суммы, кроме одного, равного 1, делятся на 15; их сумма и обозначена через $15a$.

Оказалось, что при $n = 4k$ разность 2^n-1 делится на 5.

2) Пусть n при делении на 4 дает в остатке 1:

$$n = 4k+1 \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Преобразуем разность 2^n-1, учитывая, что на основании предыдущего $2^{4k}-1$ делится на 5:

$$2^n-1 = 2^{4k+1}-1 = 2\cdot 2^{4k}-1 = 2((2^{4k}-1)+1)-1 = 2\cdot(2^{4k}-1)+1.$$

Так как выражение $2\cdot(2^{4k}-1)$ делится на 5, а 1 не делится на 5, то 2^n-1 не делится на 5.

3) Пусть $n = 4k+2$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ldots$). Проделаем с разностью 2 такие же преобразования, что и в предыдущем случае:

$$2^n-1 = 2^{4k+2}-1 = 2^2\cdot 2^{4k}-1 = 4\cdot((2^{4k}-1)+1)-1 = 4(2^{4k}-1)+3.$$

Здесь 2^n-1 также не делится на 5.

4) Пусть $n = 4k+3$. Имеем:

$$2^n-1 = 2^{4k+3}-1 = 2^3\cdot 2^{4k}-1 = 8((2^{4k}-1)+1)-1 = 8(2^{4k}-1)+7.$$

И в этом случае 2^n-1 не делится на 5.

Ответ: $n = 4k$ ($k \in N$). ▲

190*. Найдите все натуральные n, при которых:

а) 3^n+1 делится на 5;

б) 3^n+1 делится на 7.

191. Какие цифры a и b нужно подставить в четырехзначное число $\overline{a19b}$ для того, чтобы оно делилось на 82? Найдите все решения.

△ Имеем:

$$\overline{a19b} = a \cdot 1000 + 190 + b = a(82 \cdot 12 + 16) +$$
$$+(82 \cdot 2 + 26) + b = (82 \cdot 12 \cdot a + 82 \cdot 2) + (16a + b + 26).$$

Вопрос задачи сводится к следующему: при каких цифрах a и b сумма $16a+b+26$ делится на 82?

Перебирать все возможные значения цифр a и b довольно долго. Попробуем найти наибольшее значение этой суммы. Оно достигается в том случае, когда цифры a и b равны 9:

$$16a+b+26 \leq 16 \cdot 9+9+26 = 189.$$

В таком случае эта сумма, делясь на 82, может быть равной только 82 или 164.

1) Пусть она равна 82:

$$16a+b+26 = 82, \qquad 16a+b = 56.$$

Так как в последнем уравнении $16a$ и 56 делятся на 8, то и b делится на 8. Значит, $b = 0$ или $b = 8$.

При $b = 0$ получаем, что $16a = 56$, а это невозможно при натуральном a. При $b = 8$ будем иметь:

$$16a+8 = 56, \quad 16a = 48, \quad a = 3.$$

Мы нашли число 3198, которое удовлетворяет требованию задачи.

2) Пусть сумма равна 164:

$$16a+b+26 = 164, \quad 16a+b = 138.$$

Отсюда видно, что число b — четное, не делящееся на 4. Следовательно, $b = 2$ или $b = 6$. Проверьте самостоятельно, что оба значения b не дают решения задачи.

Ответ: $a = 3$, $b = 8$. ▲

192. Какие цифры a и b нужно подставить в число $\overline{30a0b03}$ для того, чтобы оно делилось на 13? Укажите все решения.

Методом перебора можно решать в целых числах некоторые уравнения второй степени с двумя неизвестными.

193. Решите в целых числах x и y уравнение $xy-2x-3y+1 = 0$.

△ Выразим из уравнения y через x:

$$xy-3y = 2x-1, \; y = \frac{2x-1}{x-3} = \frac{(2x-6)+5}{x-3} = 2 + \frac{5}{x-3}.$$

(Проверьте, что при делении на $x-3$ решения не теряются.)

Отсюда $x-3$ может принимать лишь значения ±1 и ±5. Перебираем все четыре случая.

Ответ: $(-2; 1)$, $(2; -3)$, $(4; 7)$, $(8; 3)$. ▲

194. Решите в натуральных числах x и y уравнения:

а) $xy = 2x+3y$; б) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}$.

195. Решите в целых числах x, y и z систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ x + yz = 7 \end{cases}.$$

196. Решите в целых числах уравнение $x^2-y^2 = 1993$.

Рассмотрим более разнообразные задачи на метод перебора.

197. На сколько частей могут делить плоскость а) 3; б) 4 прямых? Укажите все ответы.

198. Докажите, что в любом году имеется не менее одного и не более трех месяцев, которые начинаются с воскресенья.

△ 1) Возьмем сначала невисокосный год.

Выпишем номера дней года, с которых начинаются месяцы, и каждый из них разделим на 7 с остатком:

$$\begin{array}{llll} 1 = 7\cdot0+1, & 32 = 7\cdot4+4, & 60 = 7\cdot8+4, & 91 = 7\cdot13+0, \\ 121 = 7\cdot17+2, & 152 = 7\cdot21+5, & 182 = 7\cdot26+0, & 213 = 7\cdot30+3, \\ 244 = 7\cdot34+6, & 274 = 7\cdot39+1, & 305 = 7\cdot43+4, & 335 = 7\cdot47+6. \end{array}$$

Отсюда видно, что все возможные остатки при делении на 7 встречаются от одного до трех раз: 0 — 2 раза, 1 — 2 раза, 2 — 1, 3 — 1, 4 — 3, 5 — 1, 6 — 2 раза. Следовательно, месяцы могут начинаться не только с воскресенья, но и с любого другого дня недели от одного до трех раз в году.

2) Возьмем теперь високосный год.

$$\begin{array}{llll} 1 = 7\cdot0+1, & 32 = 7\cdot4+4, & 61 = 7\cdot8+5, & 92 = 7\cdot13+1, \\ 122 = 7\cdot17+3, & 153 = 7\cdot21+6, & 183 = 7\cdot26+1, & 214 = 7\cdot30+4, \\ 245 = 7\cdot35+0, & 275 = 7\cdot39+2, & 306 = 7\cdot43+5, & 336 = 7\cdot48+0. \end{array}$$

И здесь каждый из возможных остатков встречается от одного до трех раз. ▲

199. Для каких дней текущего года номер дня с начала года равен произведению числа месяца на номер месяца? Укажите все такие дни.

200. На складе стоят пять станков массой соответственно 1500, 1020, 800, 750 и 600 кг. Нужно увезти часть из них на автомашине грузоподъемностью 3 тонны, загрузив ее максимально, но не перегрузив. Какие станки следует погрузить на машину?

201*. Мальчик вырезал из бумаги десять карточек и на каждой из них написал по одной цифре: 0, 1, 2,..., 9. Затем он разложил их на столе по две и обнаружил, что получившиеся двузначные числа относятся как 1:2:3:4:5. Вечером он захотел показать свой результат отцу, но не нашел карточку с цифрой 0. Однако, подумав, он разложил карточки так, что новые числа также относились как 1:2:3:4:5. Как раскладывал он карточки каждый раз?

С помощью перебора можно находить целые корни уравнений степени выше второй с одним неизвестным.

202. Найдите все целые корни уравнения

$$x^3+2x^2-5x-6 = 0.$$

△ Пусть x_0 — целый корень данного уравнения. Тогда справедливо равенство

$$x_0^3 + 2x_0^2 - 5x_0 - 6 = 0.$$

Очевидно, $x_0 \neq 0$. Тогда три первых слагаемых левой части этого равенства делятся на x_0; кроме того, правая часть, равная 0, делится на x_0. Следовательно, и свободный член, равный -6, делится на x_0.

Мы доказали, что если данное уравнение имеет целые корни, то они находятся среди делителей свободного члена.

Переберем все делители свободного члена; это числа ±1, ±2, ±3 и ±6. Для каждого из них проверим, является ли он корнем уравнения. Оказывается, подходят лишь числа 2, -1 и -3.

Ответ: 2, -1, -3. ▲

203. Найдите все целые корни уравнения:

а) $2x^3+11x^2-20x+7 = 0$;

б) $x^4-4x^3-3x^2-8x-10 = 0$;

в) $x^5-3x^3+x^2-4x-4 = 0$.

Теперь займемся решением уравнений с двумя и тремя неизвестными в целых числах с помощью перебора.

204. Найдите все двузначные числа, каждое из которых равно утроенному квадрату цифры его единиц.

△ Обозначим искомое двузначное число через $\overline{ab}$. Тогда

$$10a+b = 3b^2.$$

Отсюда видно, что последняя цифра числа $3b^2$ должна быть равна b. Перебор оформим в виде следующей таблицы:

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Последняя цифра числа $3b^2$	0	3	2	7	8	5	8	7	2	3

Следовательно, b = 0, 2, 5 или 7. Переберем все эти четыре случая.

Ответ: 12 или 75. ▲

205. Найдите все двузначные числа, каждое из которых равно сумме куба цифры его десятков и квадрата цифры его единиц.

206. Найдите все двузначные числа, каждое из которых на 13 больше суммы квадратов его цифр.

△ Обозначим искомое число через $\overline{xy}$. Получаем:

$$10x+y = x^2+y^2+13,\ x^2-10x+(y^2-y+13)=0.$$

Будем считать последнее уравнение квадратным относительно x. Его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$\frac{1}{4}D = 25-y^2+y-13\geq 0,\ \ -y^2+y+12\geq 0,\ \ y^2-y-12\leq 0,\ \ -3\leq y\leq 4.$$

Так как y является цифрой, то находим более узкие границы для y:

$$0\leq y\leq 4.$$

Теперь переберем случаи $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Ответ: 54. ▲

207. Решите в целых числах x и y уравнения:

а) $x^2-xy+y^2 = x+y$; б) $x^2+y^2 = 9x+1$.

208. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{50}$.

△ По условию числа x и y неотрицательны и не превосходят 50. Запишем уравнение в виде $\sqrt{y}=\sqrt{50}-\sqrt{x}$ и возведем его в квадрат:

$$y = 50+x-2\sqrt{50x},\ \ y = 50+x-10\sqrt{2x}.$$

Отсюда корень $\sqrt{2x}$ должен "извлекаться", т. е. $2x = 4a^2$, $x = 2a^2$, где $a\in\boldsymbol{Z}$. Так как $x\leq 50$, то

$$2a^2\leq 50,\ \ a^2\leq 25,\ \ 0\leq a\leq 5$$

(отрицательные значения a можно не брать). Значениям $a = 0$, 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значения $x = 0$, 2, 8, 18, 32, 50. Переберем все случаи, вычисляя соответствующие значения y.

Ответ: (0; 50), (2; 32), (8; 18), (18; 8), (32; 2), (50; 0). ▲

209. Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

210°. Найдите цифры x и y, если $(x+y)^3 = \overline{xyx}$. Укажите все решения.

△ Так как $100\leq\overline{xyx}<1000$, то

$$100\leq(x+y)^3<1000,\ \ 5\leq x+y\leq 9.$$

Переберем все случаи.

1) Пусть $x+y = 5$. Тогда $\overline{xyx} = 125$. Этот вариант невозможен, поскольку у числа $\overline{xyx}$ цифра сотен должна совпадать с цифрой единиц.

2) Пусть $x+y = 6$. Тогда $\overline{xyx} = 216$, что также невозможно по той же причине.

3) Пусть $x+y = 7$. Следовательно, $\overline{xyx} = 343$, а значит, $x = 3$, $y = 4$.

4) Если $x+y = 8$, то $\overline{xyx} = 512$, а это невозможно.

5) Если $x+y = 9$, то $\overline{xyx} = 729$, что также отпадает.

Ответ: $x = 3$, $y = 4$. ▲

211. Найдите все такие цифры x, y и z, что $(x+y+z)^3 = \overline{xyz}$.

212. Найдите все такие цифры x, y и z, что

$$\frac{1}{x+y+z} = \overline{0,xyz}.$$

△ Преобразуем уравнение:

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{\overline{xyz}}{1000}, \quad (x+y+z)\overline{xyz} = 1000.$$

Очевидно, справедливо неравенство

$$1 \le x+y+z \le 9+9+9 = 27.$$

Кроме того, сумма $x+y+z$ является делителем 1000. Следовательно, она может принимать только значения 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 25.

Переберем все возможности.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 5$. ▲

213. Решите в натуральных числах x, y и z уравнение $xyz = x+y$.

△ Предположим, что $x \le y$. Такое ограничение можно налагать, главным образом, в тех случаях, когда уравнение симметрично относительно x и y. Оно не портит дела, поскольку при дальнейшем решении его можно убрать.

Получаем:

$$xyz = x+y \le y+y = 2y, \quad xyz \le 2y,$$

откуда

$$xz \le 2.$$

Переберем все случаи.

1) Пусть $x = 1$, $z = 1$. Тогда

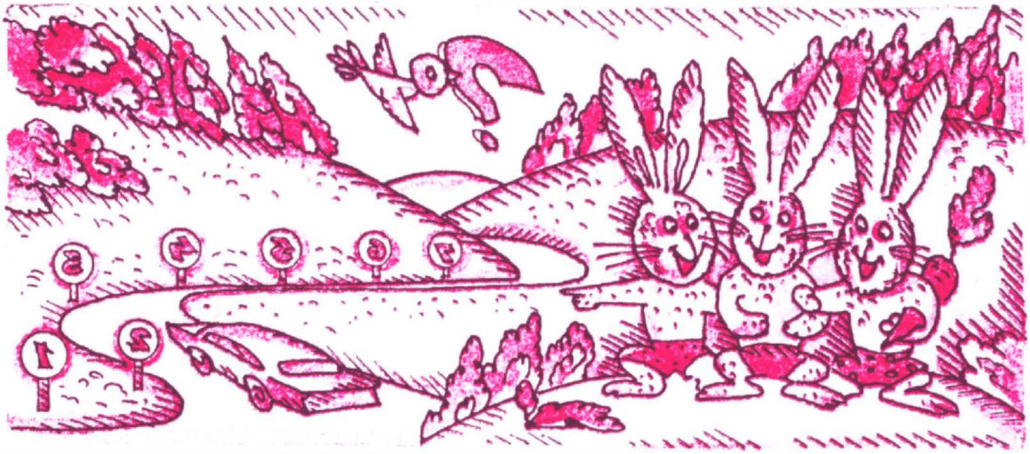
$$y = y+1,$$

что невозможно.

2) Пусть $x = 2$, $z = 1$. Имеем:

$$2y = 2+y, \quad y = 2.$$

Получилось решение (2; 2; 1).



3) Пусть $x = 1$, $z = 2$. Тогда

$$2y = 1+y,\ y = 1.$$

Мы нашли еще одно решение (1; 1; 2).

Ответ: (2; 2; 1), (1; 1; 2). ▲

214. Решите в натуральных числах уравнения:

а) $x^2+y^2+z^2+xyz = 20$; б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

Займемся решением задач на последовательности с помощью перебора.

215. Последовательность (x_n) задана рекуррентными соотношениями

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_n = |x_{n-1}-x_{n-2}|\ (n>2).$$

Найдите x_{1994}.

△ Сначала вычислим несколько первых членов последовательности: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = |2-1| = 1$, $x_4 = |1-2| = 1$, $x_5 = |1-1| = 0$, $x_6 = |0-1| = 1$, $x_7 = 1$, $x_8 = 0$, $x_9 = 1$, $x_{10} = 1$, $x_{11} = 0$.

Начиная с третьего, члены данной последовательности равны 1 или 0. При этом 0 равны только члены с номерами

$$5,\ 8,\ 11, \ldots,\ 5+3k = 2+(3+3k) = 2+3(k+1),$$

т. е. члены, номера которых при делении на 3 дают остаток 2. (Последнее можно строго доказать методом математической индукции).

Посмотрим, равен ли 2 остаток от деления числа 1994 на 3:

$$1994 = 3\cdot 664+2.$$

Следовательно, $x_{1994} = 0$.

Ответ: 0. ▲

216. Последовательность (a_n) задана равенствами

$$a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = a_{n-1} - a_{n-2}\ (n>2).$$

Найдите a_{1995}.

217. Последовательность (a_n) задана равенствами

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = -1,\ a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}\ (n>3).$$

Вычислите a_{1000}.

218. Найдите две последние цифры степени 7^{1995}.

△ Найдем две последние цифры нескольких первых членов последовательности (7^n): 07, 49, 43, 01, 07, 49, 43, 01, 07, 49, ...

Отсюда видно, что эти цифры повторяются при увеличении номера члена последовательности на 4, вообще, на $4k$ ($k \in N$). Так как

$$1995 = 4 \cdot 498 + 3,$$

то две последние цифры степени 7^{1995} совпадают с двумя последними цифрами степени 7^3, а следовательно, образуют число 43.

Ответ: 43. ▲

219*. Найдите две последние цифры степени 3^{427}.

§ 8. ПРАВДОЛЮБЦЫ И ЛЖЕЦЫ VII—IX

Литература: [60^{в}], [70].

Будем называть *правдолюбцами* тех людей, которые всегда говорят только правду, лжецами — тех, которые всегда только лгут, и *хитрецами* — тех, кто иногда говорит правду, а иногда лжет.

220. Один человек является правдолюбцем, но когда ему дважды задали один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Укажите хотя бы один такой вопрос.

△ Подойдет любой вопрос, правильный ответ на который меняется со временем.

Ответ: например, “Сколько сейчас времени?”. ▲

221. Один человек является правдолюбцем, другой — лжецом. Найдите хотя бы один вопрос, который нужно задать каждому из них, чтобы они дали на него одинаковые ответы.

△ А здесь вопрос должен относиться к сущности данных людей. Скажем, можно обоим задать вопрос: “Кто вы — правдолюбец или лжец?” Не только правдолюбец, но и лжец ответит: “Правдолюбец”.

Ответ: например, “Кто вы — правдолюбец или лжец?”. ▲

222. На острове, где живут только правдолюбцы и лжецы, путешественник встретил одного из местных жителей. Укажите хотя бы один вопрос, который он должен задать жителю для того, чтобы понять, кто он — правдолюбец или лжец.

223. На острове правдолюбцев и лжецов путешественник послал проводника спросить у островитянина, работавшего в поле, кто он — правдолюбец или лжец. Проводник вернулся и сказал: “Лжец”. Кем был сам проводник — правдолюбцем или лжецом?

224. На острове две деревни А и Б. Жители А — правдолюбцы, жители Б — лжецы. Жители А бывают в Б, а жители Б бывают в А. Приезжий встретил человека в одной из этих деревень и хочет выяснить, в какой деревне он находится. Как он может узнать это у встреченного им островитянина:

а) за два вопроса; б) за один вопрос?

△ а) За два вопроса это сделать легко. С помощью первого вопроса приезжий должен узнать, кто перед ним, — правдолюбец или лжец (см. задачу 222). Второй вопрос может быть прямолинейным: “Это деревня А?” В зависимости от того, кем оказался этот человек, приезжему следует верить или не верить его ответу на второй вопрос.

б) Сложнее выяснить истину за один вопрос. Подойдет, например, такой вопрос: “Вы живете в этой деревне?” Если встреча произошла в А, и правдолюбец, и лжец ответят “Да”, а если в Б, то оба ответят “Нет”. Но тогда справедливы и обратные утверждения: если приезжему ответили “Да”, то это деревня А, а если “Нет”, то деревня Б.

Ответ: б)например, “Вы живете в этой деревне?” ▲

225. На острове правдолюбцев и лжецов местный житель К говорит о себе и другом жителе М острова: “По меньшей мере один из нас лжец”. Кем являются К и М?

△ Предположим, что К — лжец. Тогда его утверждение ложно, а значит, К и М — правдолюбцы. Но это противоречит нашему предположению.

Следовательно, K — правдолюбец. Тогда его утверждение истинно, откуда M является лжецом.

Ответ: K — правдолюбец, M — лжец. ▲

226. На острове правдолюбцев и лжецов житель K острова говорит о себе и другом местном жителе M: “Я лжец, а M не лжец”. Кем в действительности являются K и M?

227. Из трех жителей K, M и P острова правдолюбцев и лжецов двое сказали:

K: Мы все лжецы.

M: Один из нас правдолюбец.

Кто из жителей K, M и P правдолюбец и кто лжец?

△ Если бы K был правдолюбцем, то на основании его утверждения все трое островитян, в том числе и K, были бы лжецами, а это противоречит нашему допущению. Следовательно, K — лжец. Так как его утверждение ложно, то среди M и P имеется правдолюбец.

Перейдем к M. Если бы он был лжецом, то на основании предыдущего P — правдолюбец. Тогда утверждение M истинно, а это невозможно по допущению. Остается принять, что M — правдолюбец.

Так как утверждение M истинно, то P — лжец.

Ответ: K и P — лжецы, M — правдолюбец. ▲

228. Из трех жителей K, M и P острова правдолюбцев и лжецов двое говорят:

K: Мы все — лжецы.

M: Ровно один из нас лжец.

Кем является P — правдолюбцем или лжецом?

229. Из трех жителей K, M и P отдаленного района один является правдолюбцем, другой — лжецом, третий — хитрецом. Они высказали следующие утверждения:

K: Я хитрец.

M: Это правда.

P: Я не хитрец.

Кем в действительности являются K, M и P?

△ Сначала займемся K. Он не может быть правдолюбцем в силу его утверждения. Рассмотрим два случая.

1) Пусть K — хитрец. Тогда M — правдолюбец на основании его утверждения, а значит, P — лжец. Но в этом случае утверждение P истинно, что невозможно.

2) Пусть K — лжец. Так как утверждение M оказалось ложным, то M — хитрец. Следовательно, P является правдолюбцем, а это соответствует истинности его утверждения.

Ответ: K — лжец, M — хитрец, P — правдолюбец. ▲

230. Двое людей K и M, о которых известно, что каждый из них — либо правдолюбец, либо лжец, либо хитрец, утверждают:

K: M — правдолюбец.

M: K — не правдолюбец.

Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.

231. Корреспондент хочет взять интервью у четырех ученых A, B, C и K, о которых он знает, что трое из них правдолюбцы, а один — хитрец. Прежде чем брать интервью, корреспондент хотел бы узнать, кто из ученых хитрец. Как он может выяснить это за три вопроса?

232. На острове Буяне три деревни: Правдино, Кривдино и Середина-на-Половине. Жители Правдина — правдолюбцы, жители Кривдина — лжецы, а жители Середины-на-Половине — хитрецы, но с причудой: одно из любых двух высказанных подряд ими утверждений истинно, а другое ложно. Жители каждой деревни бывают в двух других деревнях. Однажды в пожарной части острова, где дежурный читал увлекательный роман, раздался телефонный звонок.

— Скорее приезжайте к нам! У нас в деревне пожар! — услышал он.

— В какой деревне?

— В Середине-на-Половине, — был ответ.

Что должен делать дежурный — посылать ли пожарную команду и в какую деревню?

△ Рассмотрим три возможности.

1) Пусть звонил правдолюбец. Но это противоречит тому, что звонивший называет своей деревню Середину-на-Половине.

2) Пусть звонил лжец. Тогда его утверждение "У нас в деревне пожар" ложно.

3) Допустим, что звонил хитрец. В этом случае его последнее утверждение, согласно которому он называет своей Середину-на-Половине, истинно. Но тогда его предыдущее утверждение "У нас в деревне пожар" ложно.

Получилось, что дежурный не должен посылать пожарную команду ни в одну из трех деревень.

Ответ: читать роман дальше. ▲

233. На острове Буяне (см. задачу 232) путешественник встретился с островитянином в одной из трех деревень. Как за четыре вопроса он может выяснить, с кем разговаривает и в какой деревне находится?

234*. Однажды в одной комнате находилось несколько жителей острова, на котором живут только правдолюбцы и лжецы. Трое из них сказали следующее.

— Нас тут не больше трех человек. Все мы — лжецы.

— Нас тут не больше четырех человек. Не все мы лжецы.

— Нас тут пятеро. Трое из нас лжецы.

Сколько в комнате человек и сколько среди них лжецов?

△ Займемся первым из трех говоривших людей. Допустим, что он является правдолюбцем. Но тогда оба его высказывания, в частности второе "Все мы — лжецы", истинны, а значит, он является лжецом. Мы пришли к противоречию. Следовательно, он может быть только лжецом.

В таком случае оба высказывания первого ложны: в действительности в комнате больше трех человек и не все они лжецы.

Присмотримся к утверждениям второго человека. Его высказывание "Не все мы лжецы" истинно, а значит, он является правдолюбцем. Тогда в комнате находится не более четырех человек. Учитывая предыдущее, получаем, что их ровно четыре.

Так как утверждение третьего из говоривших "Нас тут пятеро" ложно, то он — лжец. Следовательно, в комнате находится не трое лжецов. Кроме того, в комнате по меньшей мере двое лжецов — первый и третий и число лжецов меньше четырех, поскольку среди присутствующих имеется правдолюбец. В таком случае их ровно два.

Ответ: 4 человека, 2 лжеца. ▲

235. На острове правдолюбцев и лжецов однажды собрались четыре местных жителя, и между ними произошел такой разговор.

— По меньшей мере один из нас — лжец.
— По меньшей мере двое из нас — лжецы.
— По меньшей мере трое из нас — лжецы.
— Среди нас нет лжецов.

Кем является каждый из четверых — правдолюбцем или лжецом?

236*. Однажды 12 жителей острова правдолюбцев и лжецов встали в круг и каждый из них заявил, что один из его соседей — правдолюбец, а другой — лжец. Сколько правдолюбцев и сколько лжецов могло быть среди этих 12 человек? Укажите все ответы.

237*. В комнате находится 10 человек, часть из них — правдолюбцы, остальные — лжецы. Один из них сказал: "Здесь нет ни одного правдолюбца"; второй: "Здесь не более одного правдолюбца"; третий: "Здесь не более двух правдолюбцев" и т. д., десятый: "Здесь не более девяти правдолюбцев". Сколько в действительности в комнате правдолюбцев?

§ 9. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ VIII—XI

Литература: [4], [5в], [9], [21], [42], [60в].

Задачи параграфа близки к задачам о правдолюбцах и лжецах из § 8.

238. Коля произнес истинное утверждение. Миша повторил его дословно, и оно стало ложным. Что сказал Коля? Укажите хотя бы одно такое утверждение.

239. Житель острова Крит говорит: “Все критяне — лжецы”. Истинно или ложно это утверждение? (Старинная задача.)

240. Истинно или ложно утверждение: “Нет правила без исключения”? (Указание: данное утверждение также является правилом.)

241. Богини Гера, Афродита и Афина пришли к юному Парису, чтобы тот установил, кто из них прекраснее всех. Они высказали следующие утверждения.

— Афродита: Я самая прекрасная.

— Гера: Я самая прекрасная.

— Афина: Афродита не самая прекрасная.

— Афродита: Гера не самая прекрасная.

— Афина: Я самая прекрасная.

Парис предположил, что все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения двух остальных ложны. Считая это предположение истинным, определите, кто прекраснейшая из богинь. (Задача на тему древнегреческой мифологии.)

△ Рассмотрим три возможности.

1) Пусть прекраснейшей из богинь является Гера. Тогда ее высказывание истинно, а все утверждения двух других богинь ложны. Но, с другой стороны, получилось, что первое утверждение Афины истинно. Мы пришли к противоречию.

2) Пусть прекраснейшая из богинь — Афина. Тогда оба ее утверждения истинны, а все утверждения двух других ложны. Но это противоречит тому, что второе утверждение Афродиты оказалось истинным.

3) Пусть прекраснейшей из богинь является Афродита. В этом случае оба ее утверждения истинны, а все остальные ложны. Здесь противоречия нет.

Ответ: Афродита. ▲

242. Однажды я нашел любопытную тетрадь. В ней было написано сорок следующих утверждений.

— В этой тетради ровно одно неверное утверждение.

— В этой тетради ровно два неверных утверждения.

— В этой тетради ровно три неверных утверждения.

....

— В этой тетради ровно сорок неверных утверждений.

Какое из этих утверждений верное?

243°. Андрей и Борис разговаривали о предстоящей контрольной работе по математике. Андрей сказал: "Если я справлюсь с работой, то ты с ней тоже справишься". Борис ответил: "А если я не справлюсь с работой, то и ты с ней не справишься". Докажите, что во время этого разговора или оба говорят правду, или оба лгут.

△ Обозначим через A утверждение "Андрей справится с работой", а через B — утверждение "Борис справится с работой".

Тогда Андрей сказал: "Если A истинно, то B истинно". Короче: "Если A, то B", или в символической записи: $A \Rightarrow B$.

Аналогично Борис сказал: "Если B ложно, то A ложно". Короче: "Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$, или в символической записи: $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, где через $\overline{A}$ обозначено отрицание утверждения A.

Пусть предложение $A \Rightarrow B$ истинно. Верно ли, что тогда и предложение $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ истинно?

Допустим, что утверждение $\overline{B}$ истинно, т. е. B ложно. Но тогда и A ложно, так как если бы A было истинно, то на основании истинности предложения $A \Rightarrow B$ получилось бы, что и B истинно — противоречие.

Итак, из истинности предложения $A \Rightarrow B$ следует истинность предложения $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Аналогично доказывается, что из истинности предложения $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ следует истинность предложения $A \Rightarrow B$; в конце концов этот случай отличается от предыдущего только обозначениями. Наконец, отсюда автоматически вытекает, что из ложности любого из этих двух предложений следует ложность другого. ▲

Фактически здесь мы доказали, независимо от содержания данной задачи, что **предложения $A \Rightarrow B$ и $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ равносильны.** Символическая запись этого предложения:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}).$$

Таким образом, **для того чтобы из данного предложения, имеющего условие и заключение, получить равносильное ему предложение, нужно поменять в нем местами условие и заключение и в полученном предложении условие и заключение заменить их отрицаниями.**

Это утверждение называется **законом контрапозиции.**

244. Пользуясь законом контрапозиции, сформулируйте предложения, равносильные данным (и не совпадающие буквально с ними):

а) если n — натуральное число, то $n \geq 1$;

б) если натуральное число k делится на натуральное число n, то $k \geq n$;

в) если $a < b$, то $a \leq b$;

г) если $x > 5$, то $x > 2$;

д) если $x < 3$, то $x < 6$;

е) если $a^2 + b^2 \neq 0$, то $a \neq 0$ или $b \neq 0$.

245. Пусть x, y, z и t — различные числа, которые являются элементами множества $A = \{1; 2; 3; 4\}$. Найдите эти числа по следующим пяти условиям:

1) если $x \neq 1$, то $z \neq 2$;
2) если $y = 2$ или $y = 3$, то $x = 1$;
3) если $y \neq 3$, то $z = 4$;
4) если $t = 2$, то $y \neq 1$;
5) если $t \neq 1$, то $y = 1$.

246. О натуральном числе высказаны следующие утверждения:

1) оно четно;
2) это число 15;
3) оно простое;
4) это число 9.

Найдите число, если из четырех приведенных утверждений два истинны, а два ложны.

247. Найдите натуральные числа a и b, если из четырех утверждений

1) $a - b$ делится на 3;
2) $a + 2b$ — простое число;
3) $a = 4b - 1$;
4) $a + 7$ делится на b

три истинны, а одно ложно. Найдите все решения.

△ Будем искать среди данных утверждений ложное. Для этого хорошо было бы найти два несовместимых утверждения.

Первое и второе утверждения не могут быть одновременно истинными, так как если число $a - b$ делится на 3, то и число $a + 2b = (a - b) + 3b$ делится на 3, а значит, не является простым. Кроме того, несовместимы первое и третье утверждения, поскольку, если $a = 4b - 1$, то число $a - b = (4b - 1) - b = 3b - 1$ не может делиться на 3.

Так как в обоих случаях в парах несовместимых утверждений встречается первое утверждение, то оно и является ложным. Следовательно, второе, третье и четвертое утверждения истинны. Воспользуемся этим для нахождения b. Применим третье и четвертое утверждения. Сумма

$$a + 7 = (4b - 1) + 7 = 4b + 6$$

должна делиться на b, откуда 6 делится на b. В таком случае

$$b \in \{1; 2; 3; 6\}.$$

Переберем все четыре случая, учитывая, что сумма

$$a+2b = (4b-1)+2b = 6b-1$$

есть число простое. Подходят $b_1=1$, $b_2=2$ и $b_3=3$. Найдем еще соответствующие значения a по формуле $a = 4b-1$.

Ответ: (3; 1), (7; 2), (11; 3). ▲

248. Найдите натуральные числа a и b, если из четырех утверждений

1) $a+1$ делится на b;
2) $a = 2b+5$;
3) $a+b$ делится на 3;
4) $a+7b$ простое число

три истинны, а одно ложно. Укажите все решения.

249. Найдите все натуральные числа a, если из трех утверждений:

1) $a-38$ есть точный квадрат (т.е. квадрат целого числа);
2) последняя цифра а есть 1;
3) $a+51$ есть точный квадрат

два истинны, а одно ложно.

250. О натуральном числе n высказаны следующие утверждения:

1) n делится на 3;
2) n делится на 5;
3) n делится на 9;
4) оно делится на 15;
5) оно делится на 25;
6) это число делится на 45.

Найдите все двузначные числа n, для которых три из этих утверждений истинны, а три ложны.

251. Найдите все числа a, если среди трех утверждений:

1) a — целое;
2) a^2-3a — целое отрицательное;
3) $a+\dfrac{1}{a}$ — натуральное число

два истинны, а одно ложно.

△ Первое и третье утверждения не могут быть одновременно истинными, поскольку это возможно только при $a = 1$, а тогда истинно еще и второе утверждение. Следовательно, одно и только одно из этих двух утверждений ложно, откуда второе утверждение истинно. Воспользуемся истинностью второго утверждения. Для этого решим уравнение $a^2-3a = -n$, где n — натуральное число:

$$a^2-3a = -n, \quad a^2-3a+n = 0, \quad a = \frac{3 \pm \sqrt{9-4n}}{2}.$$

Здесь должно выполняться неравенство $9-4n \geq 0$, т. е. $n \leq 2\frac{1}{4}$.

Последнему неравенству из натуральных n удовлетворяют лишь $n = 1$ и $n = 2$. При $n = 2$ получаем: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$.

Если $a = 2$, то первое утверждение истинно, а третье ложно, что соответствует условиям задачи. Случай $a = 1$, как мы видели, отпадает.

Положим теперь в формуле корней квадратного уравнения $n = 1$:

$$a_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

В этом случае первое утверждение ложно. Проверим, является ли истинным третье утверждение, например, при $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$:

$$a + \frac{1}{a} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2 + 4}{2(3+\sqrt{5})} = \frac{18 + 6\sqrt{5}}{2(3+\sqrt{5})} = \frac{6(3+\sqrt{5})}{2(3+\sqrt{5})} = 3.$$

Получилось, что третье утверждение при $a = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ истинно. Аналогично доказывается, что и при $a = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ оно истинно.

Ответ: 2, $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. ▲

252. Даны два утверждения:

1) система уравнений

$$\begin{cases} (k+4)x + 3y = k+1, \\ kx + (k-1)y = k-1 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений;

2) прямые, заданные уравнениями $5x+4y = 6$ и $kx+6y = 10$, пересекаются во второй координатной четверти.

Найдите все значения k, при которых одно из этих утверждений истинно, а другое ложно.

253. Даны три утверждения:

1) уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ не имеет корней (действительных);

2) справедливо равенство $|a-2| = 2-a$;

3) система уравнений

$$\begin{cases} x + y^2 = a, \\ x - \sin^2 y = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найдите все значения a, при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

△ Первое утверждение истинно, если $a^2 - 4 < 0$, т. е. при $-2 < a < 2$. Второе истинно, если $a \le 2$.

Для того чтобы узнать, когда истинно третье утверждение, учтем, что на основании вида данной системы уравнений, если $(x_0; y_0)$ есть решение системы, то и $(x_0; -y_0)$ — ее решение. Так как система имеет единственное решение, то эти решения должны совпадать. Тогда $y_0 = -y_0$, откуда $y_0 = 0$. Полагая в системе $y = 0$, находим x: из первого уравнения $x = a$, а из второго $x = -3$. Значит, $a = -3$.

Выясним, справедливо ли обратное предложение: если $a = -3$, то система уравнений имеет единственное решение? При $a = -3$ она принимает вид

$$\begin{cases} x + y^2 = -3, \\ x - \sin^2 y = -3. \end{cases}$$

Тогда $x+y^2=x-\sin^2 y$, $y^2+\sin^2 y = 0$. Следовательно, $y = 0$, откуда $x = -3$.

Таким образом, третье утверждение истинно только при $a = -3$.

Выясним теперь, при каких значениях a истинны ровно два из трех данных утверждений.

Первое и второе утверждения истинны на пересечении (общей части) промежутков $(-2; 2)$ и $(-\infty; 2]$, т. е. на интервале $(-2; 2)$. При этом третье утверждение ложно.

Второе и третье утверждения истинны только при $a = -3$. В этом случае первое утверждение ложно.

Наконец, первое и третье утверждения не могут быть истинными при одних и тех же значениях a.

Ответ: -3, $(-2; 2)$. ▲

254. Даны три утверждения:

1) неравенство $x^2 + x + a \geq 0$ справедливо при всех действительных значениях x;

2) функция $y = \log_{2a} x$ является убывающей;

3) система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ y + \cos x = 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Найдите все значения a, при которых два из этих утверждений истинны, а одно ложно.

255. Даны следующие утверждения:

1) Джо ловкач;

2) Джо не везет;

3) Джо везет, но он не ловкач;

4) если Джо ловкач, то ему не везет;

5) Джо ловкач тогда и только тогда, когда ему везет;

6) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не то и другое одновременно.

Каково наибольшее число утверждений из данных шести, которые могут быть одновременно истинными?

△ Третье утверждение несовместимо с первым, а также со вторым. Значит, среди первых трех утверждений имеется ложное. Так как число истинных утверждений из данных шести должно быть наибольшим из всех возможных, то число ложных утверждений должно быть наименьшим. В данном случае для того, чтобы среди трех первых утверждений было только одно ложное, достаточно считать ложным третье утверждение.

Пятое утверждение несовместимо с третьим, четвертым и шестым. По аналогичным причинам его и нужно считать ложным.

Итак, у нас два ложных утверждения — третье и пятое. Остаются первое, второе, четвертое и шестое утверждения. Нетрудно проверить, что они попарно совместимы между собой.

Ответ: четыре — первое, второе, четвертое и шестое. ▲

256*. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие неравенству $980 \leq n \leq 1000$, для которых истинно одно и только одно из следующих утверждений:

1) n делится на 2;
2) n делится на 3;
3) n делится на 6;
4) n делится на 2, но не делится на 3;
5) n делится на 3, но не делится на 2;
6) n не делится ни на 2, ни на 3;
7) n делится на 5.

§ 10. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ VIII—XI

Литература: [4], [25в], [28], [43], [48в], [71в], [77], [79в].

Принцип Дирихле, названный по имени его автора, немецкого ученого Петера Лежена Дирихле (1805-1859), формулируется следующим образом.

Если по n ящикам разложить предметы, число которых больше n, то найдется ящик, в котором находится больше одного предмета.

Часто это предложение формулируют в шуточной форме: если по n клеткам рассадить зайцев, число которых больше n, то найдется клетка, в которой находится больше одного зайца.

Принцип Дирихле является теоремой, хотя и не из сложных. В самом деле, предположим, что в каждом из ящиков находится не более одного предмета. Обозначим число предметов в первом, втором, третьем и т. д., наконец, в n-м ящике соответственно через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$. На основании нашего предположения получим неравенства $a_1 \leq 1,\ a_2 \leq 1,\ a_3 \leq 1, \ldots,\ a_n \leq 1$.

Сложим их почленно:

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\leq n.$$

Тогда во всех n ящиках вместе будет находиться не более n предметов, а это противоречит условию.

Справедлив также **обобщенный принцип Дирихле: если по n ящикам разложить предметы, число которых больше $n \cdot k$ (где k — натуральное число), то найдется ящик, в котором находится больше k предметов.**

Попробуйте доказать это предложение самостоятельно.

Очевидно, слова "ящики" и "предметы" нужно понимать в обобщенном смысле; вовсе не обязательно, чтобы они означали реальные ящики и предметы.

С помощью указанных предложений можно решать весьма разнообразные задачи по математике.

10.1. VIII—IX

Сначала рассмотрим простые задачи на принцип Дирихле.

257. В классе 35 учеников. Докажите, что среди них обязательно найдутся двое (в смысле — по меньшей мере двое), у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы.

△ В русском алфавите 33 буквы, а учеников больше — 35. Здесь буквы играют роль ящиков, а ученики класса — роль предметов, раскладываемых по ящикам. Поскольку предметов больше, чем ящиков, то по принципу Дирихле найдется ящик, в котором находится больше одного предмета, т. е. найдутся по меньшей мере два ученика, у которых фамилии начинаются с одной и той же буквы. Добавим, что с некоторых букв фамилии начинаться не могут; но если число различных первых букв фамилий меньше 33, то утверждение задачи тем более будет истинным. ▲

258. При каком наименьшем количестве учеников школы среди них обязательно найдутся двое, у которых день и месяц рождения совпадают?

259. В бору 600 000 сосен, и на каждой из них не более 500 000 игл. Докажите, что в этом бору найдутся две сосны с одинаковым количеством игл.

260. Имеется 25 четырехзначных натуральных чисел с различными цифрами, которые записываются с помощью цифр 1, 2, 3 и 4. Верно ли, что среди них обязательно найдутся два равных числа?

261. Некоторое двузначное натуральное число возводится в квадрат. У этого квадрата оставляются только две последние цифры. Полученное новое двузначное число также возводится в квадрат и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого числа, результаты вычислений будут повторяться.

262°. Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа таких, что их разность делится на n.

△ Возьмем любые два числа a и b из данных $n+1$ натуральных чисел и разделим их на n с остатком:

$$a = nq_1+r_1, \quad b = nq_2+r_2.$$

Здесь оба остатка r_1 и r_2 неотрицательны и меньше n. Вычтем эти равенства почленно:

$$a-b = n(q_1-q_2)+(r_1-r_2).$$

Пусть разность $a-b$ делится на n. Тогда и разность r_1-r_2 делится на n. Но так как последняя разность по модулю меньше n, то делиться на n она может только тогда, когда обращается в нуль: $r_1-r_2 = 0$, откуда $r_1 = r_2$.

Обратно, если $r_1 = r_2$, то, очевидно, разность, $a-b$ делится на n.

В результате мы получили другую, более простую формулировку данной задачи, равносильную первой: докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел найдутся два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки. Будем решать задачу в этой новой форме.

Разделим каждое из $n+1$ чисел на n с остатком; получим $n+1$ остатков. А сколько *различных* значений они могут принимать? Остатки могут принимать значения 0, 1, 2,..., $n-1$, а следовательно, не более n различных значений.

Здесь роль ящиков играют различные значения остатка, а роль предметов, раскладываемых по ящикам, — данные $n+1$ натуральных чисел. Поскольку предметов больше, чем ящиков, то по принципу Дирихле существует ящик, в который попадет больше одного предмета, т. е. среди данных чисел найдутся по меньшей мере два числа, которые при делении на n дают одинаковые остатки. ▲

263. Даны 12 различных двузначных натуральных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых — двузначное число, записываемое двумя одинаковыми цифрами.

264. Докажите, что среди натуральных чисел

$$2-1,\ 2^2-1,\ 2^3-1, \ldots,\ 2^n-1,$$

где n нечетно и больше 1, по меньшей мере одно делится на n.

265. Верно ли, что из любых пяти натуральных чисел можно выбрать два числа, разность квадратов которых делится на 7?

△ Квадрат натурального числа при делении на 7 может давать лишь такие четыре остатка: 0, 1, 2 и 4 (проверьте!). Но данных чисел пять. На основании утверждения задачи 262 среди пяти квадратов

$$a_1^2,\ a_2^2,\ a_3^2,\ a_4^2,\ a_5^2$$

найдутся два, разность которых делится на 7.

Ответ: верно. ▲

266. Квадрат со стороной 10 см разделен на 100 квадратов

со стороной 1 см, и в каждом из них записано одно из трех чисел 1, 2 или 3. После этого подсчитали суммы записанных чисел в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей получившейся таблицы. Может ли оказаться, что все подсчитанные суммы будут различными?

267. На правильном треугольном газоне со стороной 3 м растут 10 гвоздик. Докажите, что найдутся две гвоздики, которые находятся на расстоянии друг от друга, не большем 1 м.

268. Даны два многочлена с одной и той же переменной, каждый из которых есть сумма четырех членов нечетной степени, не превосходящей 15. Верно ли, что в произведении этих многочленов обязательно найдутся два подобных члена?

269. Докажите, что у любого многогранника найдутся две грани, которые имеют одинаковое число сторон.

10.2. VIII—IX

Перейдем к задачам на обобщенный принцип Дирихле.

270. В ящике лежат 105 яблок четырех сортов. Докажите, что среди них найдутся по меньшей мере 27 яблок какого-либо одного сорта.

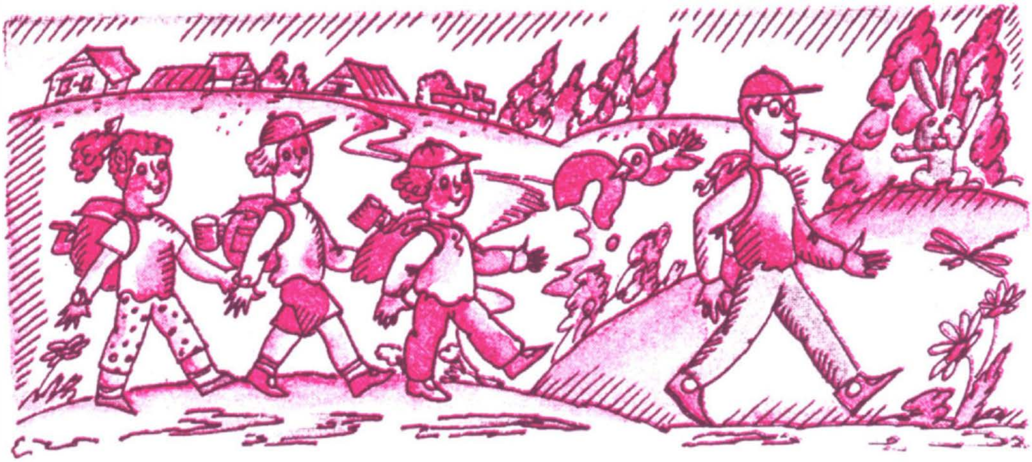
△ Дадим два доказательства утверждения задачи.

1) Допустим противное: 27 яблок одного сорта не найдутся. Тогда яблок каждого сорта будет не более 26. Следовательно, всего яблок в ящике не больше $26 \cdot 4 = 104$, а по условию их 105.

2) Применим обобщенный принцип Дирихле. Здесь роль предметов играют яблоки, а роль ящиков — сорта яблок. Разделим 105 на 4 с остатком:

$$105 = 4 \cdot 26 + 1.$$

В данном случае $n = 4$, $k = 26$. Так как число предметов больше $n \cdot k$, то найдется ящик, в котором окажется больше k предметов;



другими словами, найдется сорт, к которому относятся более 26 яблок, т. е. по меньшей мере 27. ▲

В дальнейшем при решении подобных задач можно, в зависимости от содержания задачи и от вашего вкуса, применять или первый, или второй способ доказательства.

271. Машинистка, перепечатывая текст в 25 страниц, сделала 102 ошибки. Докажите, что найдется страница, на которой она сделала более четырех ошибок.

272. В классе 35 учеников. Каждому было дано задание решить по своему выбору одну из 17 задач, написанных на доске. Верно ли, что среди них обязательно найдутся трое, которые решали одну и ту же задачу?

273. Из точки на плоскости проведены семь несовпадающих лучей. Докажите, что среди углов, образованных соседними лучами, найдется угол, величина которого больше 51°.

274. В школе 30 классов и 995 учеников. Докажите, что в ней имеется класс, в котором не менее 34 учеников.

275. В туристическом походе участвуют ученики трех классов. Руководитель похода не знает, кто в каком классе учится. Какое наименьшее число дежурных он должен назначить для того, чтобы среди них обязательно оказалось не менее трех из какого-либо одного класса?

276. В ящике 25 белых шаров, 25 черных, 20 синих и 10 красных. На ощупь шары неотличимы друг от друга. Шары вынимают из ящика в темноте. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть, чтобы среди них обязательно оказалось:

а) 10 шаров какого-либо одного цвета;

б) 10 белых шаров?

277. Докажите, что среди 82 кубиков, каждый из которых выкрашен в определенный цвет, существуют 10 кубиков разных цветов или 10 кубиков одного цвета.

△ Рассмотрим два случая.

1) Допустим, что при окраске кубиков использовано не менее 10 различных цветов. Тогда найдутся 10 кубиков разного цвета.

2) Пусть при окраске использовано не более 9 различных цветов. Разделим 82 на 9 с остатком: $82 = 9 \cdot 9+1$. Здесь $n = 9$, $k = 9$. Тогда по обобщенному принципу Дирихле найдутся 10 кубиков одного цвета.

278. В квадрате со стороной 5 см размещено 126 точек. Докажите, что среди них существуют 6 точек, которые лежат в круге радиуса 1 см.

279. Даны восемь натуральных чисел a_1, a_2,..., a_8, причем

$$a_1 < a_2 < ... < a_8 \leq 15.$$

Докажите, что среди всевозможных разностей $a_i - a_k$ (где $k < i \leq 8$) имеются по меньшей мере три равных.

△ Общее число таких разностей есть $C_8^2 = 28$. Они принимают значения 1, 2, 3,..., 14, причем значение, равное 14, не более одного раза: $15 - 1 = 14$.

Если среди этих разностей нет равной 14, то 28 разностей принимают самое большее 13 различных значений. Разделим 28 на 13 с остатком: $28 = 13 \cdot 2+2$. Отсюда по обобщенному принципу Дирихле среди разностей найдутся три равных.

Пусть среди таких разностей имеется равная 14. По предыдущему она только одна. Остальные 27 разностей могут принимать не более 13 различных значений. Так как $27 = 13 \cdot 2+1$, то и в этом случае среди них найдутся три равных. ▲

280. Даны 20 натуральных чисел a_1, a_2,..., a_{20}, причем

$$a_1 < a_2 < ... < a_{20} \leq 64.$$

Докажите, что среди всевозможных разностей $a_i - a_k$ (где $k < i \leq 20$) найдутся по меньшей мере четыре равных.

281. Верно ли, что среди любых 7 натуральных чисел обязательно найдутся три числа, сумма которых делится на 3?

△ Натуральное число при делении на 3 может давать один из трех остатков 0, 1 или 2. Поскольку $7 = 3 \cdot 2+1$, то существуют три числа, которые при делении на 3 дают один и тот же остаток. Их сумма и делится на 3.

Ответ: верно. ▲

282*. Докажите, что среди любых 100 натуральных чисел всегда можно выбрать 15 чисел так, что разность любых двух из них делится на 7.

10.3 IX—XI

Теперь рассмотрим более сложные задачи на принцип Дирихле.

283. 16 команд участвуют в розыгрыше приза по футболу в один круг. Докажите, что в любой момент турнира найдутся две

команды, которые сыграли к этому моменту одинаковое число матчей (может быть, 0 матчей).

△ Число встреч, проведенных каждой из команд, может принимать 15 различных значений 0, 1, 2,..., 14. Поскольку команд тоже 15, то пока что применять принцип Дирихле нельзя. Как же быть?

Оказывается, два крайних случая — 0 и 14 встреч несовместимы: если имеется команда, которая не провела ни одной встречи, то не существует команды, которая провела все встречи; если же имеется команда, которая провела все встречи, то не может быть другой, которая не провела ни одного матча. Следовательно, число встреч, проведенных каждой из команд, в действительности может принимать самое большее 14 различных значений — или от 0 до 13, или от 1 до 14. Но тогда по принципу Дирихле найдутся две команды, которые провели одинаковое число матчей. ▲

284. В зале находится n человек ($n > 1$). Верно ли, что среди них обязательно найдутся два человека, которые имеют среди присутствующих одинаковое число знакомых (может быть, 0 знакомых)?

285. На плоскости дано конечное множество точек. Докажите, что если некоторые из точек соединить отрезками, то всегда найдутся две точки, из которых выходит поровну отрезков (может быть, 0 отрезков).

286*. Можно ли занумеровать вершины куба натуральными числами от 1 до 8 так, чтобы суммы номеров на концах каждого ребра куба были различными?

△ Суммы номеров на концах ребер куба могут принимать значения от $1+2 = 3$ до $7+8 = 15$ — всего 13 различных значений.

Допустим, что среди сумм имеются такие:

$$1+2 = 3, \quad 1+3 = 4, \quad 1+4 = 5.$$

Но тогда не может быть суммы, равной 6, так как сумму $1+5$ использовать нельзя — ведь числа 1 и 5 находятся не на одном ребре, сумму $2+4$ — тоже, по аналогичной причине

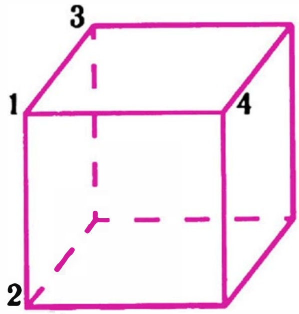


Рис. 35

(рис. 35). Значит, из сумм 3, 4, 5 и 6 одна, в данном случае 6, получиться не может.

Аналогично доказывается, что из сумм 12, 13, 14 и 15 одна получиться не может.

Следовательно, разных сумм — не более 11, а ребер у куба 12.

Ответ: нельзя. ▲

287*. Докажите, что среди любых 65 натуральных чисел всегда найдутся 9 чисел, сумма которых делится на 9.

288. Докажите, что существует натуральное число, делящееся на 1993, все цифры которого равны 1.

△ Рассмотрим конечную последовательность 1, 11, 111,..., $\underbrace{11\ldots1}_{1994}$.

Поскольку она содержит 1994 члена, то на основании опорной задачи **262** найдутся два члена последовательности, разность которых делится на 1993. Обозначим их через $\underbrace{11\ldots1}_{k}$ и $\underbrace{11\ldots1}_{k+l}$.

Вычтем из большего члена меньший; полученная разность $\underbrace{11\ldots1}_{l}\underbrace{00\ldots0}_{k}$ делится на 1993. Очевидно, нули на конце этой разности можно отбросить. Тогда число $\underbrace{11\ldots1}_{l}$ делится на 1993. ▲

289. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число, делящееся на n, все цифры которого равны 1 или 0. Укажите все значения n, при которых в качестве делимого можно взять число, записывающееся только единицами.

290. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число, делящееся на n, все цифры которого равны 5 или 0.

291*. Докажите, что для любых натуральных чисел a и b, взаимно простых между собой, существует такое натуральное число n, что разность a^n-1 делится на b.

292*. Докажите, что среди любых n натуральных чисел a_1, $a_2,\ldots, a_n$, где $n>1$, найдутся несколько чисел (может быть, одно), сумма которых делится на n.

△ Рассмотрим не всевозможные суммы данных чисел, а только такие n сумм:

$$
\begin{array}{l}
a_1,\\
a_1+a_2,\\
a_1+a_2+a_3,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n\ .
\end{array}
$$

Очевидно, разность любых двух таких сумм есть также сумма нескольких из данных чисел. Но верно ли, что среди этих сумм найдутся две, разность которых делится на n? Пока что нет, так как всего сумм n, а делитель тоже равен n. (См. задачу **262**.) Поэтому разберем два случая.

1) Пусть среди записанных сумм имеется делящаяся на n. Тогда она и является искомой.

2) Допустим, что среди таких сумм нет делящейся на n.

В этом случае остатки от деления этих сумм на n могут принимать самое большее $n-1$ различных значений — от 1 до $n-1$. Тогда по принципу Дирихле среди n сумм найдутся две суммы $a_1+a_2+...+a_k$ и $a_1+a_2+...+a_k+a_{k+1}+...+a_{k+l}$, которые при делении на n дают одинаковые остатки. Следовательно, разность указанных сумм делится на n. Вычитая эти суммы (из большей меньшую), и получим новую сумму $a_{k+1}+a_{k+2}+...+a_{k+l}$, которая делится на n. ▲

293*. Натуральные числа a и b, где $b\geq 2$, взаимно просты. Докажите, что существует натуральное число n, такое, что число na при делении на b дает остаток, равный 1.

△ Возьмем $b-1$ число: $1\cdot a$, $2\cdot a$, $3\cdot a, ..., (b-1)a$, т. е. числа вида ka, где k — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1\leq k\leq b-1$. Каждое из этих чисел не делится на b, так как числа a и b взаимно просты, а $k<b$. Оказывается, уже среди записанных чисел имеется такое, которое при делении на b дает в остатке 1.

Допустим противное: среди этих чисел нет ни одного, которое при делении на b дает в остатке 1. Тогда они при делении на b могут давать все остатки, кроме 1 и 0, а значит, $b-2$ различных остатков. Но исходных чисел больше — $b-1$. Следовательно, среди них найдутся два числа k_1a и k_2a, где $k_1>k_2$, таких, что они при делении на b дают р а в н ы е остатки, т. е. таких, что их разность $k_1a-k_2a=(k_1-k_2)a$ делится на b. Однако это невозможно, поскольку $0<k_1-k_2<b$. ▲

294*. Дано 51 различное натуральное число, не превосходящее 100. Докажите, что из них всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

§ 11. ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ IX—XI

Литература: [25[в]], [61], [82[в]].

Займемся задачами на и г р ы д в у х л и ц. Здесь мы рассмотрим только такие игры, условия которых выгодны лишь для одной из двух сторон. Обычный вопрос в подобной задаче: кто и как выиграет при **правильной игре**, т. е. при наилучшей стратегии обеих сторон?

295. На столе лежат две кучки шаров, по 30 шаров в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число шаров, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние шары. Кто и как выиграет при правильной игре?

△ Выигрывает второй игрок, беря на каждом ходу то же число шаров, что и начинающий игру, но из другой кучки. Например, если начинающий первым своим ходом взял 5 шаров из первой кучки, то второму игроку лучше всего в ответ взять на том же ходу 5 шаров из второй кучки; если начинающий вторым ходом возьмет, скажем, 8 шаров из второй кучки, то второму игроку следует на том же ходу взять 8 шаров из первой кучки и т. д.

Ответ: второй игрок. ▲

Вообще, в игровых задачах **часто** (но не всегда) **выгодно отвечать на ход противника симметричным** в некотором смысле **ходом**.

296. На столе лежат три кучки камешков, по 30 камешков в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число камешков, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камешки. Кто и как выиграет при правильной игре?

△ Сравним условия данной задачи с условиями предыдущей. Там кучек было две, а не три, и по доказанному раньше игру было невыгодно начинать. Это соображение наводит на следующую мысль для начинающего: ему нужно первым ходом взять все 30 камешков из какой-либо одной кучки, например третьей, после чего задача сведется к задаче 295, но с переменой игроков местами. Далее ему следует придерживаться той же стратегии, которую там применял второй игрок. Так как в задаче 295 выигрывал второй игрок, то здесь выигрывает начинающий.

Ответ: начинающий. ▲

При решении этой задачи выяснилась другая основная идея, используемая в игровых задачах: **следует стремиться к тому, чтобы передать очередь невыгодного хода другому игроку.**

297. На столе лежат две кучки спичек: в одной — 50, в другой — 30 спичек. Два игрока по очереди берут со стола любое число

спичек, но при одном ходе из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?

298. На плоскости дан правильный 30-угольник. Два игрока по очереди проводят его диагонали, соблюдая следующие два правила:

1) нельзя соединять диагональю две вершины, если хотя бы из одной из них уже проведена диагональ;

2) нельзя пересекать уже проведенные диагонали.

Выигравшим считается тот, кто проведет последнюю диагональ. Кто и как выиграет при правильной игре?

299. Имеется 8 шаров: 2 красных, 2 синих, 2 белых и 2 черных. Игроки А и Б по очереди прибивают по одному шару в одну из вершин куба. Игрок А стремится к тому, чтобы нашлась такая вершина, что в этой вершине и в трех соседних вершинах имелись шары всех четырех цветов, а игрок Б стремится к тому, чтобы этому помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?

△ В условиях задачи не сказано, кто начинает игру — А или Б. Поэтому рассмотрим два случая.

1) Пусть игру начинает А.

Если он прибивает, например, красный шар в одной из вершин куба, то игроку Б лучше всего в ответ прибить также красный шар в одной из соседних вершин и т. д. (рис. 36). Следовательно, в этом случае выигрывает Б.

2) Пусть первый ход делает Б.

Если он первым ходом прибьет, скажем, синий шар в одной из вершин, то игроку А следует прибить также синий шар, но не в соседнюю, а в противоположную вершину и т.д. (рис. 37). Очевидно, тогда выиграет А.

О т в е т: выигрывает тот, кто ходит вторым. ▲

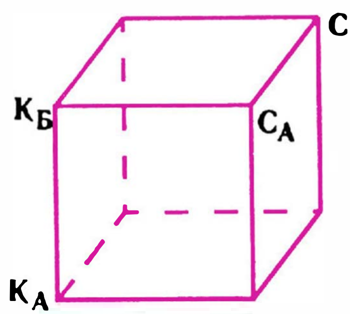


Рис. 36

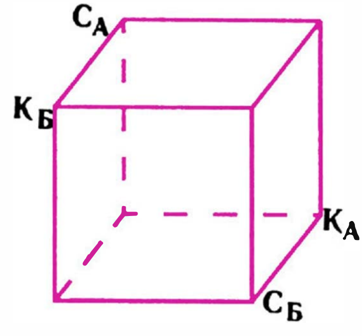


Рис. 37

300. Имеется 10 фишек: 2 белых, 2 черных, 2 красных, 2 синих и 2 зеленых. Два игрока А и Б ставят по очереди по одной фишке в одной из вершин выпуклого 10-угольника. Игрок А хочет получить 5 последовательных вершин всех пяти цветов, а игрок Б хочет этому помешать. Игру начинает Б. Кто выиграет при правильной игре?

301. На доске написано n минусов. Два игрока по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если: а) $n = 9$; б) $n = 10$?

△ а) При $n = 9$ начинающему следует первым своим ходом переправить на плюс центральный минус, а затем отвечать на каждый ход противника ходом, симметричным относительно центра цепочки. Выигрывает начинающий. Ясно, что эта стратегия применима при любом нечетном начальном числе минусов.

б) При $n = 10$ также выигрывает начинающий: ему нужно первым ходом переправить два центральных минуса на плюсы, а дальше отвечать на ход второго игрока ходом, симметричным относительно центра цепочки. Очевидно, такая стратегия приведет его к победе при любом четном начальном числе минусов.

Ответ: в обоих случаях выигрывает начинающий. ▲

302. На бумаге по окружности нарисовано несколько минусов. Двое игроков по очереди переправляют один или два соседних минуса на плюсы. Проигравшим считается тот, кто переправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если вначале минусов было: а) 14; б) 15?

303. Два игрока по очереди выписывают цифры девятизначного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Первый игрок хочет, чтобы получилось число, делящееся на 9, а второй хочет ему помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?

304. Двое игроков по очереди выписывают последовательные цифры 16-значного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Второй игрок стремится к тому, чтобы получилось число, делящееся на 11, а первый хочет ему помешать. Докажите, что у второго игрока имеется выигрывающая стратегия.

305. Два игрока по очереди выписывают последовательные цифры десятизначного числа: первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Второй игрок стремится к тому, чтобы полученное число делилось на 7, а первый хочет ему помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?

△ Для второго игрока важна его последняя цифра. После последнего хода начинающего образуется девятизначное число. Разделим его на 7 с остатком; получим число вида $7q+r$, где $0 \le r < 7$. Может ли второй игрок выбрать свою последнюю цифру a так, чтобы десятизначное число делилось на 7?

Десятизначное число принимает вид

$$(7q+r)10+a = (7q+7r)+(3r+a).$$

Следовательно, второй игрок должен выбрать цифру a так, чтобы число $3r+a$ делилось на 7. Переберем все возможности.

При $r = 0$ второму игроку следует взять $a = 7$; при $r = 1$ взять $a = 4$; при $r = 2$ — $a = 1$ (или 8); при $r = 3$ — $a = 5$; при $r = 4$ — $a = 2$ (или 9); при $r = 5$ — $a = 6$; при $r = 6$ — $a = 3$.

Оказалось, что при всех значениях r существует такая цифра a, что число $3r+a$ делится на 7. Поэтому выигрывает второй игрок.

Ответ: второй игрок. ▲

306. На доске написано уравнение

$$*x^2+*x+* = 0.$$

Первый из двух игроков называет любые три числа, второй расставляет их по своему выбору вместо звездочек. Может ли первый игрок выбрать три числа так, чтобы квадратное уравнение имело разные рациональные корни, или второй всегда может ему помешать?

△ Пусть первый игрок называет числа a, b и c. Даже если он выберет их целыми, корни квадратного уравнения могут оказаться иррациональными или даже совсем не существовать. Как же быть?

Ему следует взять числа a, b и c так, чтобы выполнялось равенство $a+b+c = 0$: тогда квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ (возможно и другое уравнение — с теми же коэффициентами, но расположенными в ином порядке) всегда имеет корень $x_1 = 1$, а также корень $x_2 = \frac{c}{a}$, если $a \neq 0$. Для того чтобы корни этого уравнения получились различными, нужно выбрать числа a, b и c так, чтобы они были не равными 0 и такими, чтобы отношение любых двух из них было отличным от 1.

Следовательно, первый игрок выиграет, если он назовет любые три рациональных числа a, b и c, не равных нулю, попарно различных и таких, что $a+b+c = 0$.

Ответ: выигрывает первый игрок. ▲

307. Имеются равенства:

$$* = *,$$
$$* + * = *,$$
$$* + * + * = *.$$

Два игрока по очереди вписывают вместо звездочек числа. Каждый из них может написать любое число вместо любой свободной звездочки. Докажите, что начинающий всегда может добиться того, чтобы все равенства выполнялись.

308. Имеется полоска клетчатой бумаги в 15 клеток, и ее клетки занумерованы числами 0, 1, 2,..., 14. Два игрока по очереди передвигают фишку, которая стоит на одной из клеток, влево на 1, 2 или 3 поля. Проигравшим считается тот, кому некуда ходить. При каких начальных положениях фишки выигрывает начинающий, а при каких — второй игрок?

△ Рассмотрим несколько случаев (рис. 38).

0	1	2	3	4	5	6	7							

Рис. 38

1) Пусть в начальном положении фишка стоит на клетке с номером 0. Тогда выигрывает второй игрок, не сделав ни одного хода.

2) Пусть вначале фишка стоит на одной из клеток с номерами 1, 2 или 3. Здесь выигрывает первый игрок, переместив фишку за один ход на клетку с номером 0.

3) Допустим, что фишка сначала стоит на клетке с номером 4. Тогда выиграет второй игрок: если начинающий первым ходом передвинет фишку влево на 1, 2 или 3 поля, то второму игроку следует в ответ передвинуть ее соответственно на 3, 2 или 1 поле, после чего она окажется на клетке 0. Такой ответ будем называть *дополнением* до 4.

4) Пусть фишка в начальном положении находится на одной из клеток с номерами 5, 6 или 7. А как быть здесь?

Начинающему следует переместить фишку соответственно на 1, 2 или 3 поля — с тем чтобы она оказалась на клетке 4, после чего дело сведется к предыдущему случаю, но с переменой игроков местами. Поэтому выигрывает начинающий.

5) Пусть фишка стоит на поле 8. Здесь выигрывает второй игрок, дважды дополняя число полей, на которые переместил фишку начинающий, до 4.

Далее, если фишка вначале стоит на клетке 9, 10 или 11, то выигрывает начинающий (подумайте, как), если на клетке 12, то второй игрок, а если на клетке 13 или 14, то снова начинающий.

Ответ: второй игрок выигрывает тогда и только тогда, когда фишка в начальном положении стоит на поле 4, 8 или 12. ▲

309*. На одной из клеток доски 8×8 стоит шашка. Два игрока по очереди перемещают шашку на одно поле вверх, или вправо, или по диагонали вправо-вверх. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода из-за того, что шашка оказалась в правом верхнем углу. При каких начальных положениях шашки выигрывает начинающий, а при каких — второй игрок?

310. На столе лежат 60 монет. Два игрока по очереди берут со стола 1, 2, 3 или 4 монеты. Выигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние монеты. Кто выиграет при правильной игре?

△ Разберем несколько случаев, начав с небольшого числа монет, лежащих на столе.

1) Пусть на столе вначале лежат 1, 2, 3 или 4 монеты. Тогда выигрывает начинающий, взяв первым ходом все эти монеты.

2) Пусть имеется 5 монет. Здесь выигрывает второй игрок дополнением до 5: если начинающий первым своим ходом берет со стола 1, 2, 3 или 4 монеты, то второму игроку в ответ нужно взять 4, 3, 2 или 1 монету.

3) Допустим, что на столе вначале лежат 6, 7, 8 или 9 монет. Тогда выигрывает начинающий, взяв первым ходом соответственно 1, 2, 3 или 4 монеты и сведя этот случай к предыдущему, но с переменой игроков местами.

4) Если на столе лежат 10 монет, то выигрывает второй игрок, дважды дополняя число монет, взятых начинающим на том же ходу, до 5.

Вообще, намечается следующая закономерность: если число монет, которые лежат вначале на столе, делится на 5, то выигрывает второй игрок, а если не делится, то начинающий. В данном случае 60 делится на 5.

Ответ: второй игрок. ▲

311. На столе лежат 40 спичек. Два игрока по очереди берут 1, 2, 3, 4 или 5 спичек. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?

312. На столе лежат 30 камешков. Два игрока по очереди берут 1, 2 или 3 камешка. Проигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние камешки. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий.

313. Два игрока по очереди кладут по одной шашке на круглый стол. Класть шашки друг на друга нельзя. Шашки одинакового размера, и их достаточно для того, чтобы закрыть ими весь стол. Выигравшим считается тот, кто положит шашку на последнее свободное место на столе, Докажите, что начинающий при правильной игре выигрывает.

314*. Двое играют в крестики-нолики: начинающий пишет крестики, второй игрок — нолики. Докажите, что при правильной игре начинающий не проиграет.

315*. В одном ящике лежат 15 синих шаров, в другом — 12 белых. Играют двое. Одним ходом каждому разрешается взять 3 синих шара или 2 белых. Выигравшим считается тот, кто берет последние шары. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть?

△ Он должен первым ходом взять 2 белых шара из второго ящика, поскольку после этого отношение числа синих шаров к числу белых станет равным 15:10 = 3:2.

Если теперь второй игрок своим первым ходом возьмет 3 синих шара из первого ящика или 2 белых из второго, то начинающему следует в ответ взять соответственно 2 белых шара из второго ящика или 3 синих из первого, с тем чтобы сохранить отношение 3:2 чисел шаров в ящиках и т. д. ▲

316*. Имеется две кучки спичек, в одной 20 спичек, в другой — 25. Каждый из двух играющих по очереди выбрасывает одну из кучек, а другую разбивает на две части. Проигравшим считается тот, кто не может сделать очередного хода из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто и как выиграет при правильной игре?

317*. На доске написано число 31. Коля и Витя по очереди пишут натуральное число, которое получается при уменьшении имеющегося натурального числа не более чем вдвое. Выигравшим считается тот, после хода которого получилось число 1. Кто и как выиграет при правильной игре?

§ 12*. ПРАВИЛО КРАЙНЕГО IX—XI

Литература: [25[в]], [56, ч. II], [81[в]].

При решении некоторых задач следует рассмотреть крайний случай. Естественнее всего такая ситуация возникает тогда, когда нужно найти число элементов конечного множества, а ответ неоднозначен. Далее, если нас интересует некоторое свойство элементов числового множества, то полезно изучить, справедливо ли оно для наибольшего или наименьшего элемента множества (при условии, что наибольший или наименьший его элемент существует). Если речь идет о множестве точек плоскости, то бывает целесообразно рассмотреть крайнюю левую (или правую, или верхнюю, или нижнюю) точку этого множества.

318. Из 100 кубиков 80 имеют красную грань, 85 — синюю, 75 — зеленую. Сколько кубиков имеют грани всех трех цветов?

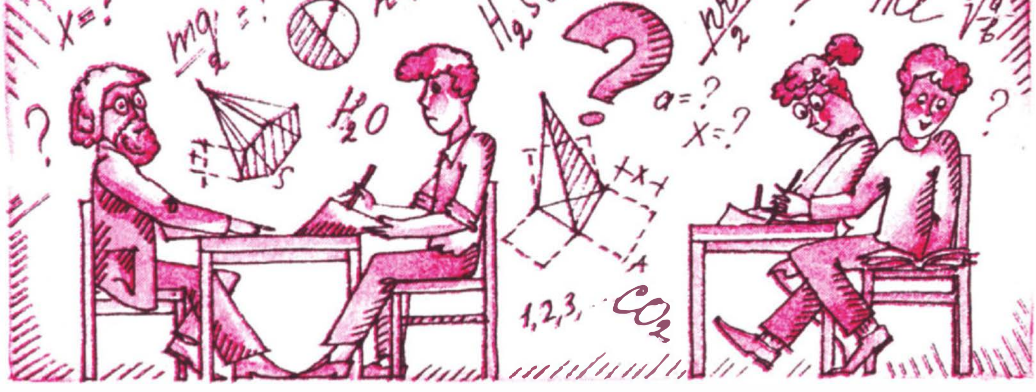
△ В сравнении со сходными задачами из § 4 “Операции над множествами” здесь значительно меньше данных, поэтому ответ будет неоднозначен — “от” и “до”. Значит, круги Эйлера здесь мало помогут.

Сначала определим максимальное число кубиков, имеющих грани всех трех цветов. Оно равно 75 и достигается в том случае, когда каждый из 75 кубиков, имеющих зеленую грань, имеет также красную и синюю грань.

Сложнее подсчитать минимальное число таких кубиков. Пойдем обходным путем.

Не имеют красной грани $100 - 80 = 20$ кубиков, синей — 15, зеленой — 25. Сложим полученные числа: $20 + 15 + 25 = 60$.

Что выражает число 60? Это максимальное число кубиков, не имеющих грани всех трех цветов. Достигается этот максимум в том случае, когда три множества, которые состоят из 20, 15 и 25 кубиков, не имеют попарно общих элементов. Значит, минимальное число кубиков, имеющих грани всех трех цветов, равно $100 - 60 = 40$.



Итак, искомое число n кубиков удовлетворяет неравенству $40 \le n \le 75$.

Строго говоря, нужно еще проверить, что каждый из случаев

$$n = 40,\ 41,\ 42,\ \ldots,\ 75$$

возможен. Когда реализуются крайние случаи $n = 40$ и $n = 75$, мы уже видели. Выясните самостоятельно, когда возможны, например, случаи $n = 41$ и $n = 74$.

Ответ: $40 \le n \le 75$. ▲

319. На первом курсе одного технического вуза в экзаменационную сессию 80 % студентов успешно сдали экзамен по высшей математике, 85 % — по физике, 90 % — по химии и 98 % — по начертательной геометрии. Какая часть всех студентов первого курса успешно сдала все экзамены?

320. На первом туре олимпиады по математике школьникам были даны 4 задачи, и на второй тур допускали только тех, кто все их решил. На первый тур пришли 200 школьников. Первую задачу решили 180 человек, вторую — 170, третью — 160, четвертую — 150. Поместятся ли школьники, прошедшие на второй тур, в комнате, вмещающей не более 50 человек?

321. На прямой задано множество M точек, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

△ Допустим, что множество M конечно. Тогда среди его точек имеется самая левая точка A. Так как она является серединой отрезка, соединяющего две точки из M, то одна из этих двух точек будет расположена левее точки A. Мы получили противоречие. ▲

322. На плоскости дано множество M точек, такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какие-либо две точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.

323. В каждой вершине восьмиугольника записано число, причем каждое такое число равно среднему арифметическому чисел, записанных в двух соседних вершинах. Могут ли среди 8 написанных чисел быть различные?

△ Допустим, что среди этих 8 чисел имеются различные. Обозначим через a наименьшее из них (если таких чисел несколько, возьмем любое из них), а через b и c — числа, записанные в двух соседних вершинах. Тогда $a \le b$ и $a \le c$. Сложим эти неравенства почленно:

$$2a \le b + c, \quad a \le \frac{b+c}{2}.$$

Но последнее неравенство должно по условию превратиться в равенство. Это возможно только при $a = b = c$. Аналогично доказывается, что и остальные пять чисел равны первым трем.

Ответ: не могут. ▲

324. В вершинах куба расставлены различные числа. Докажите, что по меньшей мере одно из них меньше среднего арифметического своих трех соседей.

325. На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — левого, правого, верхнего и нижнего. Докажите, что все числа на доске равны между собой.

326. Имеет ли уравнение $x^3+2y^3=4z^3$ решения в натуральных числах?

△ Допустим, что уравнение имеет решения в натуральных числах. Рассмотрим то его решение $(x_0;\, y_0;\, z_0)$, для которого значение $x = x_0$ минимально. В дальнейшем мы увидим, что если это уравнение имеет решение в натуральных числах, то оно имеет и другое решение; если же уравнение имеет бесконечное множество решений в натуральных числах, то из его решений всегда можно выделить такое, для которого значение x минимально, так как любое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент.

Так как $(x_0;\, y_0;\, z_0)$ — решение данного уравнения, то справедливо равенство

$$x_0^3+2y_0^3=4z_0^3.$$

Поскольку $2y_0^3$ и $4z_0^3$ делятся на 2, то и x_0^3, а значит, и x_0 делятся на 2: $x_0=2x_1$, где x_1 — натуральное число. Тогда

$$8x_1^3+2y_0^3=4z_0^3,\quad 4x_1^3+y_0^3=2z_0^3.$$

Следовательно, y_0 делится на 2: $y_0=2y_1$, где y_1 — натуральное. Получаем:

$$4x_1^3+8y_1^3=2z_0^3,\quad 2x_1^3+4y_1^3=z_0^3.$$

Аналогично, z_0 делится на 2: $z_0=2z_1$, где, $z_1\in \boldsymbol{N}$. Тогда $x_1^3+2y_1^3=4z_1^3$. Сопоставим последнее числовое равенство с данным уравнением. Оказалось, что если $(x_0;\, y_0;\, z_0)$ — решение уравнения, то и $(x_1;\, y_1;\, z_1)$, т. е. тройка $\left(\frac{x_0}{2};\frac{y_0}{2};\frac{z_0}{2}\right)$, — решение этого уравнения. Но последнее противоречит тому, что в решении $(x_0;\, y_0;\, z_0)$ значение $x=x_0$ является наименьшим из всех возможных.

Ответ: не имеет. ▲

327. Докажите, что уравнения

а) $x^4=3y^4+9z^4+27t^4$; б) $x^2+y^2=3(z^2+t^2)$

не имеют решений в натуральных числах.

328. Имеет ли уравнение $x^4+y^4=5(z^4+t^4)$ решения в натуральных числах?

329. Докажите, что круги, построенные на сторонах выпуклого четырехугольника $ABCK$ как на диаметрах, полностью накрывают этот четырехугольник.

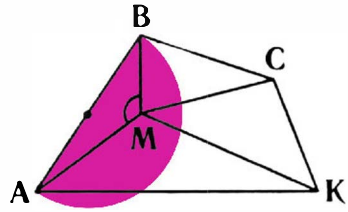


Рис. 39

△ Пусть M — любая точка, лежащая внутри четырехугольника. Рассмотрим углы AMB, BMC, CMK и KMA. Допустим, что **наибольшим** из них является угол AMB. Тогда (рис. 39) $\angle AMB = \angle AMB$, $\angle AMB \geq \angle BMC$, $\angle AMB \geq \angle CMK$, $\angle AMB \geq \angle KMA$.

Сложим эти соотношения почленно:

$$4\angle AMB \geq \angle AMB + \angle BMC + \angle CMK + \angle KMA = 360^\circ.$$

Отсюда $\angle AMB \geq 90^\circ$.

Опишем окружность на AB как на диаметре. Тогда точка M окажется внутри нее или на самой окружности.

Итак, для любой точки M, лежащей внутри четырехугольника, найдется круг, построенный на одной из сторон четырехугольника как на диаметре, который содержит эту точку. Значит, все такие круги вместе покрывают весь четырехугольник. ▲

330. На плоскости расположено несколько точек, все попарные расстояния между которыми различны. Каждую из этих точек соединяют отрезком с ближайшей. Может ли при этом получиться замкнутая ломаная?

(Указание: допуская, что получилась замкнутая ломаная, рассмотрите наибольшее звено ломаной.)

§ 13*. ИНВАРИАНТЫ IX—XI

Литература: [72], [74[в]], [84].

Инвариантом некоторого преобразования или системы действий называется величина (или свойство), остающаяся постоянной при этом преобразовании.

Нередко встречаются задачи, в которых спрашивается, можно ли в результате некоторых действий получить тот или иной результат. Основным методом решения подобных задач является нахождение свойства исходного объекта, которое не меняется после выполнения таких действий, — это и есть инвариант. Если конечный объект задачи не обладает найденным свойством, то он, очевидно, не может быть получен в результате этих действий из исходного объекта.

331. Имеется квадратная таблица 10×10, в клетки которой в последовательном порядке вписаны натуральные числа от 1 до 100:

в первую строку — числа от 1 до 10, во вторую — от 11 до 20 и т. д. Докажите, что сумма S любых 10 чисел таблицы, из которых никакие два не стоят в одной строке и никакие два не стоят в одном столбце, постоянна. Найдите эту сумму.

△ Обозначим слагаемое исходной суммы S из первой строки через a_1, из второй — через $10+a_2$, из третьей — через $20+a_3$ и т. д., наконец, из десятой — через $90+a_{10}$.

Здесь каждое из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ заключено в пределах от 1 до 10, причем эти числа попарно различны, так как если бы, например, $a_1 = a_2$, то числа a_1 и $10+a_2$ стояли бы в одном столбце таблицы. Получаем:

$$S = a_1+(10+a_2)+(20+a_3)+\ldots+(90+a_{10}) =$$
$$= (10+20+30+\ldots+90)+(a_1+a_2+\ldots+a_{10}) = 450+(a_1+a_2+\ldots+a_{10}).$$

Поскольку числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ попарно различны и принимают *все* целые значения от 1 до 10, то каждое из натуральных чисел от 1 до 10 входит в сумму $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$ в качестве слагаемого *ровно один раз*. Следовательно,

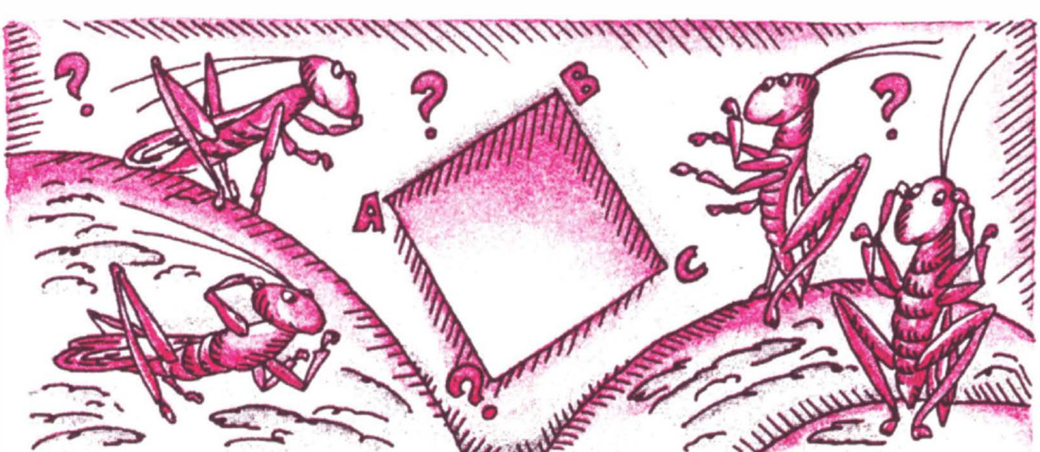
$$a_1+a_2+\ldots+a_{10} = 1+2+3+\ldots+10 = 55,$$
$$S = 450+55 = 505.$$

Где же здесь инвариант? Сумма S и является инвариантом: если в ней одни слагаемые заменить другими, но так, чтобы все слагаемые новой суммы стояли в таблице в разных строках и в разных столбцах, сумма примет то же самое значение $S = 505$.

Ответ: 505. ▲

332. На каждой клетке шахматной доски 8×8 написали произведение номера строки, в которой расположена клетка, на номер ее столбца. Выбрали 8 клеток, из которых никакие две не стоят в одной строке и никакие две не стоят в одном столбце. Докажите, что произведение чисел, написанных в этих клетках, постоянно, и вычислите его.

333. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3,..., 100. Разрешается стереть любые два числа и записать модуль их разности,



после чего количество написанных чисел уменьшается на 1. Может ли после 99 таких операций остаться записанным на доске число 1?

△ Подсчитаем общую сумму начальных 100 чисел:

$$1+2+3+...+100 = 5050.$$

Эта сумма оказалась четной. Переходя к следующему набору чисел, мы фактически в этой сумме заменяли сумму двух чисел на их разность. Но сумма и разность двух целых чисел имеют одинаковую четность (докажите!), поэтому общая сумма записанных чисел останется четной. Следовательно, эта сумма равной 1 быть не может.

Ответ: не может. ▲

334. На доске написано 8 плюсов и 11 минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус, если они различны. Какой знак останется на доске после выполнения 18 таких операций?

335. На главной диагонали шашечной доски 10×10 стоят 10 шашек, все в разных клетках. За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?

336. На столе стоят вверх дном 9 стаканов. Разрешается за один раз перевернуть любые 4 стакана. Можно ли за несколько таких ходов поставить все стаканы в нормальное положение?

337. Лист бумаги разорвали на 5 кусков, некоторые из этих кусков разорвали на 5 частей, некоторые из этих новых частей разорвали еще на 5 частей и т. д. Можно ли таким путем получить 1994 куска бумаги? А 1997?

△ При каждом разрывании листа или одного куска бумаги на 5 частей общее число кусков увеличивается на 4. Поэтому число кусков бумаги на каждом шаге может иметь только вид $4k+1$ ($k\in N$). Это выражение и является инвариантом.

Так как $1994\neq4k+1$ ($k\in N$), то число кусков, равное 1994, получиться не может, а $1997 = 4k+1$ при $k = 499$, следовательно, 1997 кусков получиться могут.

Ответ: 1994 куска получиться не могут, 1997 — могут. ▲

338. Имеется два листа картона. Каждый из них разрезали на 4 куска, некоторые из этих кусков разрезали еще на 4 куска и т. д. Можно ли таким путем получить 50 кусков картона? А 60?

339. Три кузнечика играют в чехарду: если кузнечик из точки A прыгает через кузнечика, находящегося в точке B, то он окажется в точке C, симметричной точке A относительно точки B. В исходном положении кузнечики занимают три вершины квадрата. Могут ли они, играя в чехарду, попасть в четвертую его вершину?

△ Введем на плоскости систему координат так, чтобы три вершины квадрата, в которых находятся кузнечики, имели координаты (0; 0), (0; 1) и (1; 0). При указанных прыжках каждая из координат кузнечиков или остается неизменной (например, при прыжках по оси Ox не меняется ордината), или

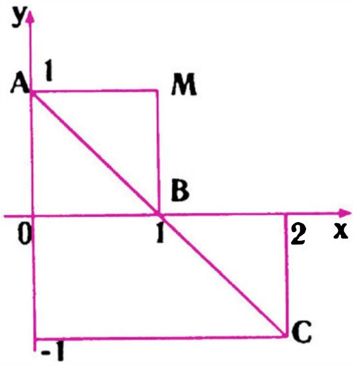


Рис. 40

изменяется в ту или другую сторону на четное число (рис. 40). Так как в начальном положении по меньшей мере одна из координат каждой из трех точек четна, то она при прыжках и останется четной: четность хотя бы одной из двух координат каждой из точек есть инвариант. Поэтому попасть в вершину $M(1; 1)$ ни один из кузнечиков не может.

Ответ: не могут. ▲

340. У шахматной доски размерами 8×8 вырезали левую верхнюю и правую нижнюю угловые клетки. Можно ли замостить оставшуюся часть доски косточками домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки, так, чтобы накрыть без наложений эту часть?

341. Имеется 30 карточек, каждая из которых выкрашена с одной стороны в красный, а с другой — в синий цвет. Карточки разложили подряд в виде полосы так, что у 8 карточек сверху оказался синий цвет. За один ход разрешается перевернуть любые 17 карточек. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы полоса стала полностью: а) красной; б) синей?

342. Каждое натуральное число от 1 до 50 000 заменяют числом, равным сумме его цифр. С получившимися числами проделывают ту же операцию, и так поступают до тех пор, пока все числа не станут однозначными. Сколько раз среди этих однозначных чисел встретится каждое из целых чисел от 0 до 8?

△ Указанные однозначные числа в последовательном порядке таковы:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0,... .

Эта закономерность сохраняется и дальше. В самом деле, при замене натурального числа суммой его цифр остаток от деления числа на 9 остается неизменным (докажите!), поэтому при переходе от каждого натурального числа к следующему остаток от деления числа на 9 увеличивается на 1 или перескакиваст от 8 к 0.

Для того чтобы узнать, сколько таких групп цифр по 9 цифр в каждой, разделим 50 000 на 9 с остатком: 50 000 = 9·5555+5.

Следовательно, этих групп 5555. Еще одну, неполную группу образуют последние 5 цифр 1, 2, 3, 4, 5.

Ответ: 1, 2, 3, 4, 5 — по 5556 раз, 6, 7, 8, 0 — по 5555. ▲

343. На доске написаны числа 1, 2, 3,..., 125. Разрешается стереть любые два числа и написать вместо них остаток от деления суммы этих чисел на 11. После 124 таких операций на доске осталось одно число. Какое это число?

344. Первый член последовательности равен 1, а каждый следующий, начиная со второго, получается прибавлением к предыдущему члену суммы его цифр. Может ли в этой последовательности встретиться число 765 432?

345. Круг разбит на 6 равных секторов, в каждом из которых стоит по одной шашке. Одним ходом разрешается любые две шашки передвинуть в соседние секторы, причем так, чтобы одна шашка двигалась по часовой стрелке, а другая — против. Можно ли за несколько таких ходов собрать все шашки в одном секторе?

346. Круг разбит на 6 равных секторов, в которых расставлены цифры 0, 1, 2, 0, 2, 1 (в указанном порядке). Разрешается за один ход одновременно прибавлять одно и то же число к двум стоящим рядом числам. Можно ли за несколько таких ходов добиться того, чтобы все 6 чисел, стоящие в секторах, были равны?

△ Пусть на некотором шаге в секторах оказались в последовательном порядке числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Составим такую сумму:

$$S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6.$$

После каждого хода она не меняется, так каждая из разностей $a_1 - a_2$, $a_3 - a_4$, $a_5 - a_6$ при увеличении уменьшаемого и вычитаемого на одно и то же число сохраняет свое значение; следовательно, она является инвариантом. Но в начальном положении $S = 0-1+2-0+2-1 = 2$, а в конечном, когда каждое из шести чисел равно одному и тому же числу, $S = 0$. Поэтому сделать равными все 6 чисел нельзя.

Ответ: нельзя. ▲

347. В вершинах выпуклого шестиугольника записаны числа 8, 3, 12, 1, 10, 6 (в указанном порядке). За один ход разрешается к любым двум числам в соседних вершинах прибавить одно и то же число. Можно ли за несколько таких ходов получить в последовательном порядке шестерку чисел 5, 2, 14, 6, 13, 4?

348. Даны четыре числа 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается написать четыре новых числа, заменив каждое из исходных чисел средним арифметическим трех других. Докажите, что за несколько таких ходов нельзя получить набор 1, 3, 5, 8.

349. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется по меньшей мере одна пустая клетка.

§ 14. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА V—XI

Литература: [4], [5в], [9в], [11], [16в], [19], [24], [25в], [28], [29в], [31], [32], [35], [36], [40], [50], [57], [63], [64], [72в], [83].

До сих пор мы рассматривали, так сказать, типовые задачи логического характера — задачи, связанные между собой по методу решения или относящиеся к одной и той же теме. Теперь займемся разными задачами логического характера. Здесь гораздо больше разнообразия; ко многим задачам нужно подобрать свой ключ. Тем не менее и здесь возможны циклы близких друг к другу задач, хотя и меньшие по объему, чем раньше. Пока что займемся циклами, состоящими из 5 — 12 задач.

14.1. V—VIII

Рассмотрим задачи на взвешивание на чашечных весах. Они близки к задачам из § 5 “Выделение элемента множества”.

350. Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не нужно.)

△ Занумеруем монеты. Разобьем множество монет на три кучки, по 6 монет в каждой.

При первом взвешивании положим на одну чашку весов все монеты первой кучки, на другую — второй. Возможны два случая.

1) Пусть при этом взвешивании весы оказались в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в третьей кучке.

Теперь положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью. Если, например третья кучка перетянет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

2) Пусть при первом взвешивании весы были в неравновесии. Тогда фальшивая монета находится или в первой, или во второй кучке. Следовательно, все монеты третьей кучки — настоящие.

Положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью. Если весы оказались в неравновесии, то фальшивая монета находится в первой кучке, и последнее взвешивание

покажет, легче она или тяжелее, чем настоящая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — во второй кучке, и по первому взвешиванию также можно определить, легче она или тяжелее настоящей.

Ответ: за два. ▲

351. Среди а) 25; б) 14 деталей одна бракованная, остальные — стандартные. Все стандартные детали весят одинаково, бракованная отличается по массе от стандартных. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно установить, легче или тяжелее бракованная деталь, чем стандартная?

352*. Среди n монет (где $n > 2$) имеется одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая отличается по массе от остальных. Докажите, что за два взвешивания на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая.

353. Как взвесить груз на чашечных весах с гирями, если гири правильные, а весы неправильные?

△ Уравновесим груз гирями. Затем груз уберем, оставив гири на другой чашке весов, и заменим его таким новым набором гирь, чтобы весы снова оказались в равновесии. Груз весит столько, сколько весит этот набор. ▲

354. Как на неправильных чашечных весах с правильными гирями отвесить 1 кг крупы?

355. Имеется три пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Всегда ли можно с помощью двух взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания масс?

356. Имеется четыре пакета разной массы и правильные чашечные весы без гирь. Как за пять взвешиваний расположить пакеты в порядке возрастания массы?

△ Занумеруем пакеты. Массы первого, второго, третьего и четвертого пакетов обозначим соответственно через m_1, m_2, m_3 и m_4.

При первом взвешивании положим, например, на одну чашку весов первый пакет, на другую — второй; при втором взвешивании — на одну чашку весов первый, на другую — третий пакет; при третьем положим на чашки второй и третий пакеты. Это позволяет расположить первые три пакета в порядке возрастания массы. Пусть, например, второй пакет — самый легкий, а третий — самый тяжелый из трех (рис. 41):

$$m_2 < m_1 < m_3.$$

Теперь взвесим пакет, средний по массе из этих трех, в данном случае первый, с четвертым. Допустим, что четвертый пакет оказался тяжелее.

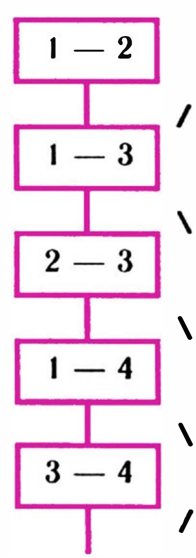


Рис. 41

Из предыдущего следует, что самым тяжелым из всех четырех пакетов является или третий, или четвертый. Положим эти два пакета на разные чашки весов. Для определенности пусть более тяжелым оказался третий пакет. Тогда получаем:

$$m_2 < m_1 < m_4 < m_3. \blacktriangle$$

357*. Имеется пять пакетов разной массы. Как за 7 взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь расположить их в порядке возрастания массы?

14.2. VI—IX

Займемся задачами на расположение элементов по окружности.

358. На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

△ Эта задача похожа на задачи на соответствие между двумя множествами, которые мы рассматривали в § 2-3.

Сделаем чертеж (рис. 42). Обозначим точками девочек в зеленом и голубом платьях, а также Нину.

Так как девочка в зеленом платье — не Аня, не Валя и не Нина, то ее зовут Галей.

Девочка в белом платье не может быть Ниной; кроме того, она не может быть ни Валей, ни Галей. Следовательно, она является Аней.

Остальное теперь легко восстанавливается.

Ответ: Аня — в белом платье, Валя — в голубом, Галя — в зеленом, Нина — в розовом. ▲

359. За круглым столом сидели четыре студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова — Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?

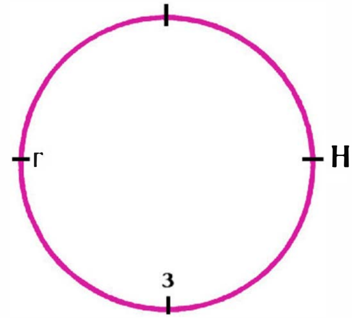


Рис. 42

360. Ниф, Наф и Нуф подружились с Серым Волком. Все четверо стали заядлыми филателистами. Волк собирает фауну, один из поросят — флору, другой — спорт, третий — космос. Вся четверка собралась за столом в доме Волка. Волк сидит слева от Нафа, Ниф — справа от собирателя космоса, Нуф сидит напротив Нафа и не интересуется спортивной тематикой. Какие марки собирает Ниф?

361. Девочка выложила по окружности 20 камешков — 10 серых и 10 белых и, двигаясь по окружности в одном направлении, брала каждый седьмой камешек. Через некоторое время все серые камешки были взяты, а все белые остались. В каком порядке были выложены серые и белые камешки?

362. 100 ребят стоят по кругу. Они выбирают водящего следующим образом: первый остается в круге, второй выходит из круга, третий остается, четвертый выходит и т. д. Круг все время сужается, пока в нем не останется один человек. На каком месте он стоял в первоначальном круге?

363. Числа от 1 до 1000 выписаны по порядку по окружности. Начиная с первого, вычеркивается каждое пятнадцатое число (т. е. числа 1, 16, 31 и т д.), причем при повторных оборотах числа снова считаются. Сколько останется незачеркнутых чисел?

364. Однажды я решил проехаться по кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее — номер 0, дальше 1, 2 и т. д. Я взглянул на номер своего кресла; он оказался равным 66. Проехал ли я половину пути? При встрече с каким креслом я проеду половину пути?

△ Всего кресел 96, а половина пути составляет 48 кресел. Я окажусь посредине канатной дороги в тот момент, когда количество кресел впереди и сзади окажется одинаковым. Для этого нужно, чтобы номер встречного кресла был равен $66 - 48 = 18$. Поскольку встреча с креслом номер 18 у меня впереди, я не проехал половину пути.

Ответ: не проехал; 18 ▲

365*. Сережа и Миша, гуляя по парку, набрели на большую поляну, окруженную липами. Сережа пошел вокруг поляны, считая деревья. Миша сделал то же самое, но начал с другого дерева (хотя пошел в ту же сторону). Дерево, которое у Сережи было 20-м, у Миши было 7-м, а дерево, которое у Сережи было 7-м, у Миши было 94-м. Сколько деревьев росло вокруг поляны?

Рассмотрим задачи на таблицы, в частности числовые, а также задачи на строчки чисел.

366. Девять чисел записаны в таблицу 3×3. Складывая числа первой строки, затем второй и третьей, школьник получил соответственно числа 156, 213 и 289. Складывая числа по столбцам, он получил суммы 134, 266 и 248. Правильны ли его вычисления?

△ Подсчитаем сумму всех девяти чисел таблицы двумя способами — по строкам и по столбцам. В первом случае находим:

$$156+213+289 = 658,$$

во втором:

$$134+266+248 = 648.$$

Суммы получились разные.

Ответ: неправильны. ▲

367. Заполните все 25 клеток квадрата 5×5 буквами А, Р, Б, У, З хотя бы одним способом так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на каждой из двух диагоналей все буквы были различны.

368. В каждой клетке квадрата 3×3 записано по одному числу так, что сумма любых трех чисел, стоящих в одной строке, в одном столбце и на каждой из двух диагоналей, одна и та же. В середине верхней строки стоит 1, в угловых клетках нижней строки — 2 и 3. Найдите числа, записанные в остальных клетках квадрата.

△ Введем обозначения для неизвестных чисел квадрата (рис. 43).

Так как по условию

$$1+d+k = 2+k+3,$$

то $d = 4$. Поскольку

$$a+1+b = 2+d+b,$$

где d уже известно, то $a = 5$. Далее, так как

$$5+4+3 = 2+4+b,$$

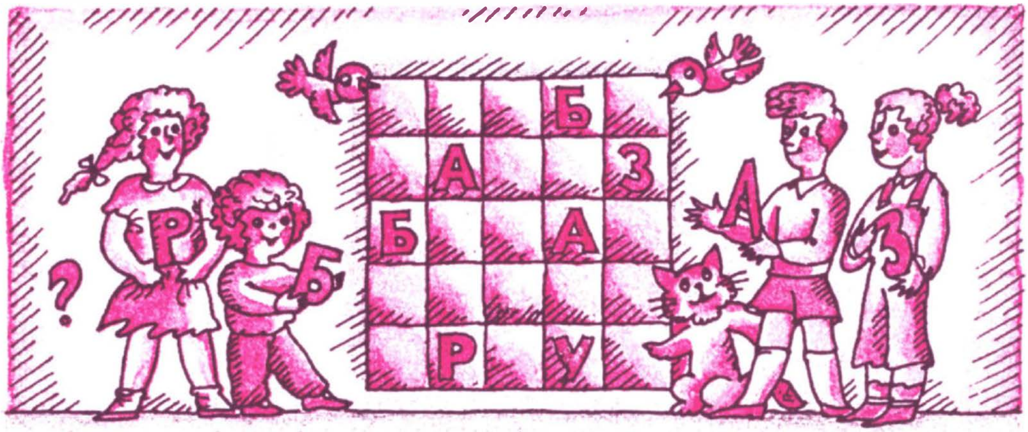
то $b = 6$. Аналогично находим и числа c, e и k.

Ответ: $a = 5$, $b = 6$, $c = 5$, $d = 4$, $e = 3$, $k = 7$. ▲

a	1	b
c	d	e
2	k	3

Рис. 43

369. В каждую клетку квадрата 4×4 записано по одному числу так, что произведение любых четырех чисел, расположенных в одной строке, в одном столбце и на каждой из двух диагоналей, одно и то же. В первой строке стоят числа 20, 1 и 6, во второй — 12, 15 и 4, в третьей — 5 и 10, расположенные в указанном порядке без пропуска клеток. Найдите числа, записанные в остальных клетках.



370. В каждой из клеток квадрата 15×15 записано одно из первых 15 натуральных чисел. При этом два одинаковых числа не могут стоять в одной строке или в одном столбце, а в клетках, симметричных относительно одной из двух главных диагоналей, записаны равные числа. Могут ли среди чисел, записанных на этой главной диагонали, быть равные?

△ В каждой строке и в каждом столбце квадрата стоят все натуральные числа от 1 до 15, причем только по одному разу. Следовательно, каждое из этих чисел встречается в квадрате ровно 15 раз.

Возьмем, например, число 1. Симметрично относительно главной диагонали квадрата может располагаться только четное число из 15 единиц. Значит, по меньшей мере одна единица записана на диагонали. Так как аналогичное рассуждение справедливо для каждого из остальных натуральных чисел от 2 до 15, то каждое из натуральных чисел от 1 до 15 стоит на диагонали, причем ровно один раз. Но тогда все числа на диагонали различны.

Ответ: не могут. ▲

371. В клетках квадратной таблицы 25×25 расставлены шашки так, что в каждой строке стоят ровно 5 шашек. Оказалось, что шашки расположились симметрично относительно одной из главных диагоналей таблицы. Докажите, что на этой диагонали стоит по меньшей мере одна шашка. Сколько шашек может быть на диагонали?

372. Можно ли выписать в строчку 15 чисел так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была положительной, а сумма всех 15 чисел — отрицательной?

△ Разобьем эти 15 чисел на 5 троек: в первую тройку включим числа с первого по третье, во вторую — с четвертого по шестое и т. д. Тогда сумма всех 15 чисел будет положительной.

Ответ: нельзя. ▲

373. Можно ли выписать в строчку 25 чисел так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была отрицательной, а сумма всех 25 чисел — положительной?

374*. Можно ли в клетки таблицы 5×5 записать 25 чисел так, чтобы сумма всех чисел таблицы была положительной, а сумма чисел в любом квадрате 2×2, 3×3 и 4×4 — отрицательной?

375*. В клетках таблицы 4×4 написаны 6 звездочек, по одной в клетке. Докажите, что всегда можно вычеркнуть две строки и два столбца таблицы так, что все звездочки будут вычеркнуты.

△ Так как звездочек 6, а строк у таблицы 4, то найдется строка, в которой стоит более одной звездочки. Рассмотрим два случая.

1) Пусть в какой-либо строке таблицы стоит не менее 3 звездочек. Вычеркнем эту строку. Если теперь останутся невычеркнутыми 3 звездочки, то вычеркнем еще одну строку и два столбца, в которых они стоят.

2) Пусть в каждой строке имеется не более 2 звездочек. Тогда строк, содержащих по 2 звездочки, будет 2 или 3. Две такие строки содержат 4 звездочки. Вычеркнем эти две строки и еще два столбца, в которых находятся 2 оставшиеся звездочки. ▲

376*. Можно ли в клетках таблицы 4×4 расставить 7 звездочек, по одной в клетке, так, чтобы при вычеркивании любых двух строк и любых двух столбцов таблицы оставалась незачеркнутой по меньшей мере одна звездочка?

377. Можно ли на шахматной доске 8×8 расставить 8 ферзей так, чтобы никакие два из них не били друг друга? (В шахматах два ферзя бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали, или на одной вертикали, или на одной диагонали, не обязательно главной.)

14.4. IX—XI

Займемся задачами на определение результатов участников спортивных соревнований.

(В футболе и хоккее победа оценивается в 2 очка, ничья — в 1, поражение — в 0 очков; в шахматах победа оценивается в 1 очко, ничья — в 1/2, поражение — в 0 очков.)

378. В розыгрыше приза открытия футбольного сезона в один круг участвовали пять команд А, Б, В, Г и Д, которые заняли места в том же порядке, начиная с первого. Команда А не сделала ни одной ничьей, команда Б не проиграла ни одной встречи, команда Г не выиграла ни одной встречи. Все команды набрали разное количество очков. Как окончилась каждая встреча?

△ Чем окончилась встреча между командами А и Б? Так как команда А не сделала ни одной ничьей, а команда Б не проиграла ни одной встречи, то команда Б выиграла у А. Остальные встречи команда А выиграла, так как иначе она набрала бы менее 6 очков, т. е. не более 4 очков из 8 возможных, а следовательно, не была бы победительницей.

Поскольку команда А набрала 6 очков, то команды Б, В, Г и Д набрали соответственно не более 5, 4, 3 и 2 очков. При этом ни одна из них не могла набрать меньше соответственно 5, 4, 3 и 2 очков, так как иначе все пять команд вместе набрали бы вместе менее $6+5+4+3+2 = 20$ очков, в то время как они сыграли $\frac{5 \cdot 4}{2}$ встреч и, следовательно, набрали $\frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 2 = 20$ очков.

Команда Б завоевала 5 очков. Поскольку одну встречу — с А она выиграла и ни одной встречи не проиграла, то остальные три встречи — с командами В, Г и Д она свела вничью.

Команда Г набрала 3 очка и не выиграла ни одной встречи. Так как она проиграла А и сделала ничью с Б, то с командами В и Д она сыграла вничью.

Команда В набрала 4 очка. При этом она проиграла А и сделала ничьи с Б и Г. Следовательно, она выиграла у Д.

Теперь можно заполнить турнирную таблицу (рис. 44), которая одновременно дает ответ на вопрос задачи. Впрочем, таблицу лучше заполнять по ходу решения. ▲

379. Шесть команд участвовали в розыгрыше кубка по хоккею в один круг, причем все набрали разное количество очков. Только одна встреча была сыграна вничью. Каждая команда, кроме первой, выиграла у одной из команд, занявших более высокое место. Восстановите турнирную таблицу.

380. В шахматном турнире в один круг количества очков, набранных участниками, составляют арифметическую прогрессию. Занявший последнее место набрал 2,5 очка. Сколько было участников? Сколько очков у победителя турнира?

	А	Б	В	Г	Д	Очки
А		0	2	2	2	6
Б	2		1	1	1	5
В	0	1		1	2	4
Г	0	1	1		1	3
Д	0	1	0	1		2

Рис. 44

381. Шесть шахматистов А, Б, В, Г, Д и Е сыграли в турнире в один круг. А сыграл все партии вничью, Б не проиграл ни одной партии, В выиграл у победителя турнира и сыграл вничью с Д, Г опередил Д, но отстал от Е. Кто сколько очков набрал?

△ Из условия видно, что победитель — не В, не А, не Г, не Д и не Б. Значит, победителем является Е. Он сыграл вничью с А и проиграл В. Как Е сыграл с Б? Он не мог выиграть у Б, поскольку Б не проиграл ни одной партии; но он не мог и проиграть Б, иначе набрал бы не более 2,5 очка и, следовательно, не был бы победителем турнира. В таком случае партия Е с Б окончилась вничью. Поскольку Е в партиях с А, В и Б уже потерял 2 очка, то у Г и Д он выиграл и набрал 3 очка.

Перейдем к Б. С одной стороны, он набрал не более 2,5 очка, так как не является победителем турнира; с другой — он набрал не менее 2,5 очка, так как ни одной партии не проиграл. Значит, он набрал ровно 2,5 очка и все партии свел вничью.

В выиграл у Е, сыграл вничью с А, Б и Д, набрав минимум 2,5 очка. Следовательно, он набрал ровно 2,5 очка и проиграл Г.

Г проиграл Е, сыграл вничью с А, Б и Д и выиграл у В. Тогда он набрал также 2,5 очка.

Наконец, Д набрал 2 очка, А — 2,5.

Ответ: Е набрал 3 очка, А, Б, В и Г — по 2, 5, Д — 2. ▲

382. Семь шахматистов сыграли в турнире в один круг. Победитель набрал вдвое больше очков, чем набрали вместе шахматисты, которые заняли три последних места. Занявший четвертое место набрал 3 очка. Как он сыграл с занявшим пятое место? С занявшим третье место?

383*. Перед забегом шести спортсменов трое болельщиков высказали такие прогнозы о порядке мест, которые они займут, начиная с первого:

А, Б, В, Г, Д, Е; А, В, Б, Е, Д, Г; В, Д, Е, А, Г, Б.

Первый болельщик верно угадал три номера, но не угадал ни одной пары бегунов, которые последовательно финишировали.

	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки
А		1	1	1	1	2	6
Б	1		2	0	0	2	5
В	1	0		0	2	2	5
Г	1	2	2		0	0	5
Д	1	2	0	2		0	5
Е	0	0	0	2	2		4

Рис. 45

Второй не угадал ни одного места, третий угадал одно место. В каком порядке финишировали спортсмены?

384. В первенстве школы по футболу в один круг участвовали шесть команд. Наибольшее число очков в первенстве набрала одна команда. Может ли быть так, что она одержала меньше побед, чем любая другая команда?

△ Так может быть (см. рис. 45).

О т в е т: может. ▲

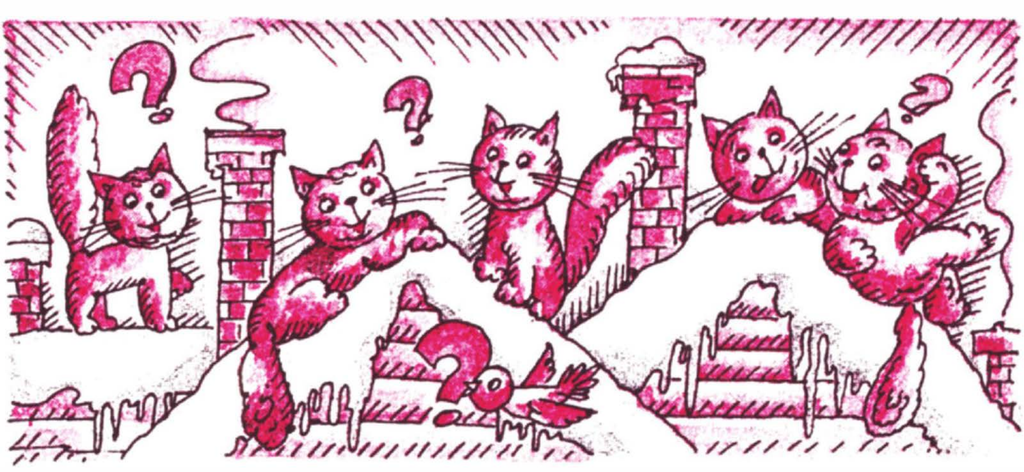
385*. Три друга сыграли между собой матч-турнир по шахматам в 8 туров. Потом стали решать, кто является победителем. Первый из них сказал: "У меня больше, чем у каждого из вас, выигрышей". Второй сказал: "У меня меньше, чем у каждого из вас, проигрышей". Но когда подсчитали очки, оказалось, что больше всего очков набрал третий. Постройте пример такого распределения очков в матч-турнире.

14.5. VIII—XI

В § 10 мы рассматривали принцип Дирихле. Он основан на идее и з б ы т о ч н о с т и: по его условию число предметов должно быть больше числа ящиков n (или — в обобщенном принципе Дирихле — больше nk). Справедлив также близкий к нему п р и н ц и п   н е д о с т а т о ч н о с т и.

Принцип недостаточности заключается в следующем: **если в n ящиках лежит менее $\frac{n(n-1)}{2}$ предметов, то найдутся два ящика, в которых находится одинаковое число предметов** (может быть, ни одного).

Для доказательства этого утверждения допустим противное: во всех ящиках лежит разное число предметов. Пусть в первом ящике находится 0 предметов, во втором — 1, в третьем — 2,..., в



последнем, n-м — $n-1$ предмет. Тогда минимальное общее число предметов в ящиках равно

$$0+1+2+...+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Но по условию число предметов меньше $\frac{n(n-1)}{2}$ — противоречие.

Теперь мы можем ответить на вопрос, какая же недостаточность имеется в виду в названии "принцип недостаточности": по условию этого принципа предметов не хватает (в случае, когда число предметов равно $\frac{n(n-1)}{2}-1$, — всего одного) для того, чтобы предметы можно было разложить по ящикам так, чтобы во всех ящиках оказалось разное количество предметов.

386. В районе 7 средних школ. На район выделили 20 компьютеров. Докажите, что при любом распределении их между школами найдутся две школы, которые получат одинаковое число компьютеров (может быть, ни одного).

△ Здесь роль ящиков играют школы, а роль предметов — компьютеры. Следовательно, $n = 7$, $\frac{n(n-1)}{2} = 21$.

Так как число компьютеров меньше 21, то на основании принципа недостаточности всегда найдутся две школы, которым достанется одинаковое количество компьютеров. ▲

387. 34 пассажира едут в автобусе. Автобус делает всего 9 остановок, причем новые пассажиры ни на одной из них не входят. Докажите, что обязательно найдутся две остановки, на которых выйдет одинаковое число пассажиров (возможно, ни одного).

388. Можно ли 60 монет разложить по 12 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали разное количество монет (может быть, ни одной)?

389. На 10 крышах в марте, почуяв весну, расположились 50 кошек, на каждой по меньшей мере одна. Верно ли, что обязательно найдутся две крыши, на которых окажется поровну кошек?

390. Имеется 200 конфет. Какому минимальному числу школьников можно раздать эти конфеты так, чтобы среди них при любом распределении конфет нашлись двое, которым конфет достанется поровну (может быть, ни одной)?

△ Найдем минимальное n, такое, что $200<\frac{n(n-1)}{2}$, т. е. $n(n-1) > 400$. Не обязательно решать это квадратное неравенство обычным способом. Так как произведение $n(n-1)$ с ростом n возрастает, то минимальное n, удовлетворяющее неравенству, можно найти подбором: $n = 21$.

Значит, если школьников 21, то среди них всегда найдутся двое, которые получат конфет поровну.

Убедимся еще, что при $n = 20$ возможно раздать конфеты так, что любые два школьника получат разное количество конфет. Для этого 19 школьникам из 20 вручим соответственно 0, 1, 2,..., 18 конфет. Всего здесь $0+1+2+...+18 = \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$ конфет, а следовательно, остались нераспределенными $200 - 171 = 29$. Отдадим их последнему, двадцатому школьнику.

Ответ: минимальное число школьников — 21. ▲

391. 100 книг распределили между несколькими школьниками. При каком максимальном числе школьников это можно сделать таким образом, что все они получат разное количество книг?

392. На 5 полках книжного шкафа расставлены 160 книг, на одной из них — 3 книги. Докажите, что найдется полка, на которой стоит не менее 40 книг.

△ При доказательстве этого утверждения используем не сам принцип недостаточности, а идею недостаточности.

Допустим противное: на каждой полке шкафа стоит не более 39 книг. Тогда на всех 5 полках вместе находится не более $3+4\cdot 39 = 159$ книг, а их в действительности 160. Мы получили противоречие. ▲

393. 25 покупателей купили 80 арбузов. Среди них были купившие по одному и по два арбуза. Верно ли, что среди них имеется покупатель (хотя бы один), который купил не менее 4 арбузов?

394. Десять студентов-математиков составили 35 задач для математической олимпиады. Известно, что среди них были студенты, которые составили по одной, две и три задачи. Докажите, что среди них имеется студент (по меньшей мере один), который составил не менее пяти задач.

14.6*. IX—XI

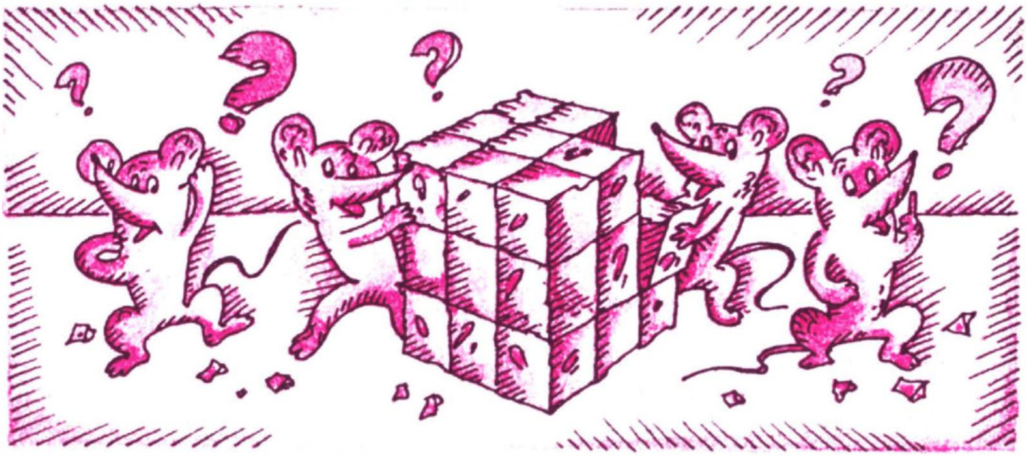
Рассмотрим задачи на окраску плоскости или ее частей.

395. Плоскость окрашена в два цвета — белый и черный, причем имеются и точки белого, и точки черного цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

△ Возьмем равносторонний треугольник со стороной длины 1. Из трех его вершин по меньшей мере две — одного цвета. ▲

396. Плоскость окрашена в два цвета — красный и черный, причем имеются точки и того и другого цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки разного цвета на расстоянии 1 друг от друга.

397. Каждая грань куба разделена на четыре равных квадрата, и каждый квадрат окрашен в один из трех цветов: синий, крас-



ный или зеленый так, что квадраты, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета. Сколько при этом может быть синих, красных и зеленых квадратов?

398. Плоскость окрашена в два цвета — белый и черный, причем имеются и точки белого, и точки черного цвета. Докажите, что всегда найдется равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

△ Возьмем правильный пятиугольник. Из пяти его вершин по меньшей мере три — одного цвета, причем они являются вершинами равнобедренного треугольника. ▲

399. Вершины правильного семиугольника окрашены в два цвета — белый и черный. Докажите, что среди них обязательно найдутся три вершины одного цвета, которые являются вершинами равнобедренного треугольника. Верно ли аналогичное утверждение для правильного восьмиугольника?

400. Плоскость раскрашена в три цвета. Докажите, что всегда найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.

△ Допустим противное: любые две точки, удаленные друг от друга на расстояние 1, окрашены в разные цвета.

Возьмем равносторонний треугольник ABC со стороной, равной 1. По нашему допущению, все его вершины — разного цвета. Рассмотрим точку A_1, симметричную точке A относительно прямой BC. Так как $A_1B = A_1C = 1$, то точка A имеет цвет, отличный от цветов точек B и C, а значит, окрашена в тот же цвет, что и точка A. Это означает, что если $AA_1 = \sqrt{3}$, то точки A и A_1 — одного цвета. Следовательно, все точки окружности с центром A радиуса $\sqrt{3}$ имеют один и тот же цвет. Тогда на этой окружности найдутся две точки, расстояние между которыми равно 1. Но это противоречит нашему допущению. ▲

401. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 15 клеток так, чтобы у каждой из них было а) четное; б) нечетное число закрашенных соседей? (Клетки называются соседями, если они имеют общую сторону.)

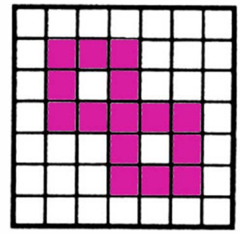


Рис. 46

△ а) Добиться того, чтобы у каждой клетки из 15 закрашенных было четное число закрашенных соседей, можно (см. рис. 46).

б) Допустим, что у каждой из 15 закрашенных клеток имеется нечетное число закрашенных соседей — a_1, a_2, a_3,..., a_{15} соответственно. Тогда закрашенные клетки имеют всего общих сторон

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{15}}{2}.$$

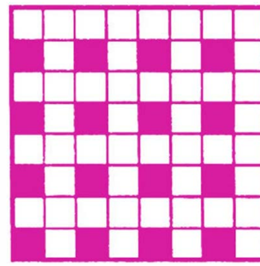


Рис. 47

Но полученная дробь не равна целому числу.

Ответ: а) можно; б) нельзя. ▲

402. Можно ли в квадрате 5×5 закрасить 13 клеток так, чтобы при вычеркивании любых трех строк и любых трех столбцов квадрата оставалась невычеркнутой по меньшей мере одна закрашенная клетка?

403. Бесконечный лист бумаги разлинован в клетку. Каждая клетка окрашена в один из шести цветов. Докажите, что всегда найдутся четыре клетки одного цвета, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными прямым линиям на бумаге.

До сих пор мы имели дело с задачами, в которых по условию плоскость или отдельные точки уже окрашены. Но встречаются задачи, в условии которых об окраске не упоминается, однако решение лучше всего получается, если раскраску ввести (см., например, задачи 340 и 349).

404. Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками размером 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2. Вместо нее нашли плитку размером 1×4. Можно ли при этом опять выложить дно коробки?

△ Разобьем дно коробки на квадраты 1×1 и раскрасим его в два цвета так, как показано на рисунке 47. Каждая плитка размером 2×2 накрывает ровно одну закрашенную в черный цвет клетку, поэтому при потере плитки 2×2 останется незакрытой только одна закрашенная клетка. Но плитка размером 1×4 накрывает или две закрашенные клетки, или ни одной.

Ответ: нельзя. ▲

405. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому, который имеет с предыдущим общую грань. Может ли мышка съесть весь куб, кроме среднего кубика?

Займемся задачами, которые решаются с помощью метода математической индукции.

Вероятно, многие читатели уже знакомы с этим методом. На всякий случай приведем предложение, лежащее в его основе.

Справедлив следующий **принцип математической индукции.**

Пусть дано утверждение $P(n)$ с переменной n, значениями которой являются только натуральные числа. Если

1) это утверждение справедливо при $n = 1$,

2) из справедливости утверждения $P(n)$ при натуральном $n = k$ следует его справедливость при $n = k+1$, то утверждение $P(n)$ верно при всех натуральных n.

Принцип математической индукции является одной из аксиом множества натуральных чисел и потому не доказывается.

Отметим одно обобщение этого принципа. Может оказаться, что минимальное значение n, при котором утверждение $P(n)$ справедливо, есть не $n = 1$, а $n = a$, где $a>1$. Например, предложение “Сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°(n-2)$” можно доказать с помощью принципа математической индукции, при условии, что минимальное значение n есть $n = 3$.

Сформулируем **обобщение** этого принципа.

Пусть дано утверждение $P(n)$ с переменной n, значениями которой являются только натуральные числа. Если

1) это утверждение справедливо при $n = a$, где a — натуральное число не меньшее 1,

2) из справедливости утверждения $P(n)$ при натуральном $n = k$, где $k \geq a$, следует его справедливость при $n = k+1$, то утверждение $P(n)$ верно при всех натуральных $n \geq a$.

406. Докажите, что при любом натуральном n

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

△ Обозначим сумму, стоящую в левой части этого равенства, через S_n. Нужно доказать что при любом натуральном n

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

1) Проверим справедливость этой формулы при $n = 1$.

С одной стороны, $S_1 = 1^2 = 1$. С другой, если в формуле положить $n = 1$, то получим:

$$S_1 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1.$$

2) Допустим, что формула справедлива при натуральном $n = k$:

$$S_k = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Докажем, что тогда она верна и при $n = k+1$.

Сумма S_{k+1} отличается от суммы S_k лишним слагаемым $(k+1)^2$. Будем иметь:

$$S_{k+1} = S_k+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2) = \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+6k+6) =$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3).$$

Получившийся результат есть частный случай формулы для S_n при $n = k+1$.

Итак, оба условия принципа математической индукции выполнены. Следовательно, на основании этого принципа формула для S_n справедлива при любом натуральном n. ▲

407. Докажите, что при любом натуральном n:

а) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$;

б) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

в) $1-3+5-7+\ldots+(-1)^{n+1}(2n-1) = (-1)^{n+1}n$.

408. Докажите методом математической индукции, что при любом натуральном n сумма n^3+11n делится на 6.

Дальнейшее решение подобных задач, главным образом из алгебры, завело бы нас слишком далеко от темы данной книги. Займемся применением метода математической индукции к решению задач логического характера.

409. На плоскости n точек соединены между собой отрезками так, что каждая точка соединена с любой другой (возможно, через посредство промежуточных точек) и нет таких двух точек, которые соединялись бы двумя разными путями. Докажите, что общее число отрезков равно $n-1$.

(Это одна из теорем теории графов — теорема о числе ребер дерева.)

△ Очевидно, предполагается, что $n \geq 2$.

1) При $n = 2$ это утверждение верно: если точек две, то имеется только один соединяющий их отрезок.

2) Допустим, что утверждение справедливо при натуральном $n = k$, где $k \geq 2$: если точек k, то имеется ровно $k-1$ соединяющих их отрезков. Докажем, что тогда оно справедливо и при $n = k+1$.

Добавим к имеющимся k точкам еще одну точку A. Из точки A может выходить только один отрезок, так как если бы из нее выходили два отрезка AB и AC, то точки B и C, которые уже соединены каким-то путем, кроме того, соединялись бы еще и путем BAC, а это противоречит условию. Значит, к уже имеющимся $k-1$ отрезкам добавился один отрезок, а следовательно, общее число отрезков стало равным k.

На основании принципа математической индукции (точнее, его обобщения) утверждение задачи справедливо при любых натуральных $n \geq 2$. ▲

410. Докажите, что число всех подмножеств конечного множества, имеющего n элементов (где $n \in N$), равно 2^n.

411. В шахматном турнире в один круг ничьих не было. При каком количестве участников турнира может быть так, что все шахматисты наберут одинаковое количество очков?

△ Обозначим количество участников турнира через n. Они набрали вместе $\frac{n(n-1)}{2}$ очков, а следовательно, каждый —

$$\frac{n(n-1)}{2} : n = \frac{n-1}{2}.$$

Отсюда n нечетно.

Пока что мы доказали, что если все участники набрали одинаковое количество очков, то число участников турнира n нечетно.

Докажем обратное утверждение: если число n шахматистов нечетно, то все они могут набрать одинаковое количество очков.

1) При $n = 3$ это утверждение верно: каждый участник турнира играет две партии и может одну из них выиграть, а другую — проиграть, в результате он наберет 1 очко.

2) Пусть оно верно при числе участников, равном $n = 2k - 1$ ($k > 1$). Тогда каждый из них набрал по

$$\frac{n-1}{2} = \frac{2k-1-1}{2} = k - 1$$

очков. Докажем, что в этом случае наше утверждение верно и при $n = 2k + 1$.

(Фактически здесь доказательство проводится не по переменной n, а по переменной $k = \frac{n+1}{2}$.)

Пусть при переходе от $n = 2k - 1$ к $n = 2k + 1$ добавились два шахматиста А и В. Могут ли теперь все участники турнира набрать одинаковое количество очков?

Допустим, что $k - 1$ шахматистов из $2k - 1$ выиграли у В, а остальные k — проиграли В; далее, пусть k шахматистов (все те, кто проиграл В) выиграли у А, а остальные $k - 1$ проиграли А; наконец, пусть А выиграл у В. Тогда каждый из $2k - 1$ участников турнира добавил к своим $k - 1$ очкам по 1 очку, а следовательно, набрал k очков. Кроме того, А и В набрали по k очков.

Наше утверждение доказано.

Ответ: при любом нечетном числе участников. ▲

412. Докажите, что по окончании шахматного турнира в один круг его участников можно пронумеровать так, чтобы ни один участник не проиграл непосредственно следующему за ним.

413. В разных местах кольцевой автомобильной дороги стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слить в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге до своего прежнего места. Докажите, что по меньшей мере одна из машин, стоящих на дороге, может объехать все кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

414. Концы отрезка AB занумерованы числами 1 и 2. Разобьем его на части точками M_1, M_2,..., M_n и поставим в соответствие каждой из этих точек одно из чисел 1 или 2. Докажите, что число получившихся при делении отрезков, концы которых имеют различные номера, нечетно.

14.8. IX—XI

Довольно трудно определить тему, объединяющую следующую группу задач. Впрочем, смотрите сами.

415. На доске были записаны пять чисел. Затем эти числа стерли и написали их попарные суммы:

$$4,\ 8,\ 10,\ 12,\ 14,\ 18,\ 19,\ 21,\ 25,\ 29.$$

Какие пять чисел были записаны на доске?

△ Обозначим искомые числа в порядке возрастания через x_1, x_2, x_3, x_4 и x_5:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5.$$

Все неравенства здесь строгие, поскольку среди попарных сумм нет равных.

Проблема в том, что мы не знаем, при сложении каких чисел получилась сумма, равная, например, 10, или сумма, равная 12.

Наименьшей из всех попарных сумм является сумма x_1+x_2. В самом деле, если

$$x_1 \leq x_i (i = 1, 2, 3, 4, 5),\ x_2 \leq x_k (k = 2, 3, 4, 5),$$

то, складывая эти неравенства почленно, получим: $x_1+x_2 \leq x_i+x_k$.

Аналогично доказывается, что следующей по вел чине суммой является x_1+x_3.

Далее, наибольшей из всех попарных сумм является x_4+x_5, а предшествующей по величине — x_3+x_5.

Мы получаем систему четырех уравнений с пятью неизвестными. Откуда взять пятое уравнение? Неясно, например, какая из сумм x_1+x_4 и x_2+x_3 больше; в общем случае может быть по-разному.

Если сложить все 10 попарных сумм, то новая сумма будет больше суммы всех пяти искомых чисел в 4 раза (подумайте почему). Имеем:

$$\frac{1}{4}(4+8+10+12+14+18+19+21+25+29) = 40.$$

Осталось решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 + x_3 = 8, \\ x_4 + x_5 = 29, \\ x_3 + x_5 = 25, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 40. \end{cases}$$

Кроме того, нужна проверка получающегося решения по попарным суммам, не вошедшим в систему.

Ответ: 1, 3, 7, 11, 18. ▲

416. Найдите пять чисел, если их суммы по три равны 3, 5, 6, 9, 10, 10, 12, 14, 16, 17.

417. Найдите четыре числа, если их попарные суммы равны 7, 9, 10, 12, 13, 15.

418. Найдите все четверки чисел таких, что их попарные суммы составляют шесть последовательных целых чисел.

419. Существуют ли пять чисел таких, что их попарные суммы составляют десять последовательных целых чисел?

14.9. V—VIII

В заключение рассмотрим или задачи логического характера с коротким циклом — в две-три задачи, или даже одиночные задачи, для которых автору не удалось найти или составить парную.

420. Квадратная площадь размерами 100×100 м выложена квадратными плитами со стороной 1 м четырех цветов: белого, красного, черного и серого. Никакие две плиты одного цвета не имеют общей стороны или общей вершины. Сколько может быть плит каждого цвета?

△ Рассмотрим два соседних квадрата со стороной 2 м. Каждый из них должен содержать плиты со стороной 1 м всех четырех цветов (рис. 48). Тогда среди всех 10 000 плит содержится поровну плит всех четырех цветов.

Ответ: по 2500 плит каждого цвета. ▲

421. Ювелиру принесли пять обрывков золотой цепочки, по три звена в каждом обрывке, и заказали соединить их в одну цепочку. Как сделать это, раскрыв и заковав три звена?

422. Из четырех учеников А, Б, В и Г один отличник. Кто отличник, если

1) в тройке А, Б, В есть отличник,
2) в тройке А, В, Г есть отличник,
3) А не отличник?

Б	К	Ч	К
Ч	С	Б	С

Рис. 48

423. Определите, кто из мальчиков А, Б и В играет в шахматы, если

1) из А и Б один играет в шахматы, другой не играет,
2) А и В оба играют в шахматы или оба не играют,
3) если играет А, то играет и Б.

424. 12 учениц родились в разные месяцы одного года. Перемножив номер месяца на число дня рождения, они получили:

Соня — 3, Надя — 14, Валя — 42, Оля — 49, Маша — 52, Тамара — 81, Таня —128, Лиза — 130, Лена — 135, Галя —143, Катя —153, Нина — 300.

Определите число и день рождения каждой из них.

425. На каждой из десяти карточек написали по одному целому числу от 1 до 10 так, что числа на всех карточках различны. Карточки перевернули, перемешали и предложили каждому из пяти победителей лотереи А, Б, В, Г и Д взять по две карточки. Один из организаторов лотереи называл вслух числа, написанные на взятых каждым из победителей карточках (например, 9 и 2), а другой по рассеянности складывал эти числа и записывал в протокол только их сумму. В протоколе появились числа:

А — 11, Б — 4, В — 7, Г — 16, Д — 17.

Какие два числа достались каждому победителю лотереи?

426. Можно ли расставить в вершинах куба все числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, по одному в каждой вершине, так, чтобы суммы четырех чисел, расположенных на каждой из шести граней куба, были равны?

427. Бочка цилиндрической формы наполнена водой. Как отлить из нее ровно половину воды, не производя никаких измерений?

△ Ответ: наклонить ее до положения, указанного на рисунке 49. ▲

428*. Во флакон неправильной формы налиты духи. Как определить, занимают ли они половину, больше или меньше половины флакона, не выливая духи из флакона?

Рис. 49

429. Перевозчику нужно переправить через реку волка, козу и мешок с капустой. Лодка так мала, что, кроме перевозчика, можно взять лишь один из трех объектов. Кроме того, капусту нельзя оставлять вместе с козой, а козу — вместе с волком. Как выполнить переправу?

430. Продавщица продавала яблоки: первому покупателю она продала $\frac{1}{3}$ всех яблок и еще

32 яблока, второму — $\frac{1}{3}$ остатка и еще 32 яблока, третьему — $\frac{1}{3}$ нового остатка и еще 32 яблока, четвертому — $\frac{1}{3}$ последнего остатка и последние 32 яблока. Сколько было у нее яблок?

431. Над цепью озер летела стая гусей. На каждом озере садилась половина имевшегося в этот момент количества гусей и еще полгуся, а остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озерах. Сколько гусей было в стае?

432. В футбольном турнире восьми команд в один круг команды, занявшие первые четыре места, набрали соответственно 13, 11, 10 и 8 очков. Сколько очков они потеряли во встречах с командами, которые заняли последние четыре места?

433. Володя записал на доске два числа. Третье число написал равным сумме двух первых, четвертое — равным сумме третьего и второго и т. д., пока не получились шесть чисел. Затем он сообщил Саше сумму этих шести чисел. После этого Саша сразу нашел одно из написанных чисел. Какое?

434. Имеется полстакана молока и полстакана черного кофе. Ложку молока перелили из первого стакана во второй, а затем ложку образовавшейся смеси — из второго стакана в первый. Чего оказалось больше: кофе в первом стакане или молока во втором?

△ После переливаний оба стакана остались наполненными наполовину. Поэтому, сколько молока из первого стакана отбавилось, столько же в нем добавилось кофе; сколько из второго стакана отбавилось кофе, столько же в нем добавилось молока.

О т в е т: одинаково. ▲

435*. И сказал Кощей Ивану-царевичу: “Жить тебе до завтрашнего утра. Утром явишься пред мои очи, задумаю я три цифры — x, y и z. Назовешь ты мне три числа — a, b и c. Выслушаю я тебя и скажу, чему равно $ax+by+cz$. Тогда отгадай, какие цифры x, y, z я задумал. Не отгадаешь — голову с плеч долой”. Запечалился Иван-царевич, пошел думу думать. Надо бы ему помочь.

436. Какое наименьшее число жильцов можно вселить в 30-квартирный дом так, чтобы в любых трех наугад взятых квартирах проживало по меньшей мере 7 человек?

437*. Можно ли все клетки таблицы размера

а) 3×3; б) 4×4

заполнить крестиками и нуликами так, чтобы рядом с любым крестиком стоял ровно один нулик и рядом с любым нуликом стоял ровно один крестик? (Крестик и нулик считаются стоящими рядом, если клетки, в которых они стоят, имеют общую сторону.)

438*. Однажды после обеда я зашел к своему товарищу, у которого были двое часов с боем. Часы начали бить одновременно.

Одни из них били через 3 секунды, другие — через 4. Всего я насчитал 8 ударов, но при этом совпадающие удары не мог различить и считал их за один. Сколько было времени, если и те и другие часы бьют только целое число часов?

439. Школьники ловили рыбу. Известно, что a_1 рыбаков поймали по меньшей мере по одной рыбе, a_2 рыбаков — больше чем по одной рыбе, a_3 — больше чем по две и т. д., a_{10} — больше чем по девять рыб. Больше 10 рыб не поймал никто. Сколько рыб поймали школьники вместе?

△ Из условия следует, что ровно $a_1 - a_2$ рыбаков поймали по одной рыбе, $a_2 - a_3$ — по 2, $a_3 - a_4$ — по 3,..., $a_9 - a_{10}$ — по 9, a_{10} — по 10. Теперь можно подсчитать, сколько они поймали вместе: $(a_1 - a_2)\cdot 1 + (a_2 - a_3)\cdot 2 + (a_3 - a_4)\cdot 3 + \ldots + (a_9 - a_{10})\cdot 9 + a_{10}\cdot 10 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{10}$.

Ответ: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$. ▲

440. В компании из пяти мальчиков каждый имеет среди остальных не менее двух братьев. Докажите, что все пятеро — братья.

441. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги окрашена в белый цвет, остальные — в черный (не обязательно в шахматном порядке). По белым клеткам прыгает кузнечик, по черным — блоха, причем каждый прыжок делается на любое расстояние по горизонтали или вертикали. Докажите, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в сумме не более трех прыжков.

14.10. IX—XI

442. На отборочный тур олимпиады были приглашены победители из 8-го, 9-го, 10-го и 11-го классов, всего 11 человек. Можно ли их рассадить за круглым столом так, чтобы среди любых пяти сидящих подряд школьников нашлись представители всех четырех классов?

443. Футбольный турнир в один круг закончился тем, что команды набрали по разному количеству очков, а команда, занявв-

шая последнее место, выиграла у всех трех призеров. Докажите, что в этом турнире не могло участвовать 12 команд.

444. Восемь хоккейных команд играют между собой за выход в финальную четверку в один круг. Какое наименьшее число очков гарантирует команде выход в финальную четверку?

△ Все восемь команд вместе наберут $\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2 = 56$ очков. Поэтому 7, 8 и даже 9 очков не гарантируют команде выход в финальную четверку.

А 10 очков? Представим себе, что найдутся пять команд, которые все матчи между собой сыграли вничью, а у остальных трех команд выиграли. Тогда каждая из них наберет по $4+6 = 10$ очков. Однако 10 очков еще не дают гарантии выхода команды в финал, поскольку таких команд пять, а не четыре.

Докажем, что если команда наберет 11 очков, то она выйдет в финал. Допустим противное: найдутся пять команд, каждая из которых наберет не менее 11 очков. В этом случае они вместе наберут не менее 55 очков, а значит, остальные три команды вместе — не более 1 очка. Но это невозможно, поскольку такие три команды только во встречах между собой наберут вместе $\frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 2 = 6$ очков.

О т в е т: 11. ▲

445. На экране компьютера первоначально стоит число 123. Каждую минуту компьютер прибавляет к числу на экране число 102. Программист в любой момент может изменить число на экране, переставив произвольно его цифры. Может ли он действовать так, чтобы на экране всегда оставалось трехзначное число?

446. Среди нескольких кувшинов имеется два кувшина разной формы и два кувшина разного цвета. Докажите, что среди них найдутся два кувшина одновременно и разной формы, и разного цвета.

△ Возьмем два кувшина разной формы.

Если они и разного цвета, то являются искомыми.

Если же они одинакового цвета, то возьмем третий кувшин, отличающийся от них цветом (по условию он существует). Его форма отличается от формы по меньшей мере одного из двух первых кувшинов. ▲

447. В коробке лежат красные, синие и черные карандаши трех размеров: короткие, средние и длинные. При этом имеются карандаши всех трех цветов и всех трех размеров. Верно ли, что в коробке обязательно найдутся три карандаша, которые попарно различаются одновременно и по цвету, и по размеру?

448. В магазин привезли платья трех разных фасонов и трех разных расцветок. Продавщица хочет выбрать для витрины три платья так, чтобы были представлены все фасоны и все расцветки. Всегда ли она сможет это сделать?

449. На полке в произвольном порядке стоит десятитомное собрание сочинений Ильфа и Петрова. Библиотекарь может взять любой том с полки и поставить его на пятое место, считая слева. Сможет ли он с помощью нескольких таких операций расставить все тома в порядке возрастания номеров?

△ Возьмем том № 1 и поставим его на пятое место. Кроме того, все тома, стоявшие слева от него, также поставим в последовательном порядке, по очереди на пятое место. В результате первый том окажется на первом месте слева.

Теперь поставим на пятое место том № 10, а затем все тома, стоявшие справа от него. Тогда он окажется на десятом месте.

Аналогично, не трогая томов № 1 и № 10, поставим на свои места тома № 2 и № 9, № 3 и № 8, № 4 и № 7, том № 6. После этого том № 5 окажется на пятом месте.

Ответ: сможет. ▲

450. Тома Детской энциклопедии стоят на полке в таком порядке:

$$1,\ 2,\ 6,\ 10,\ 3,\ 8,\ 4,\ 7,\ 9,\ 5.$$

Разрешается взять любые два соседних тома и поставить их, не меняя порядка, рядом на любое новое место. Можно ли за несколько таких перестановок поставить все тома в порядке возрастания номеров?

451. Поток студентов пять раз сдавал один и тот же зачет (не сумевшие сдать зачет приходили на следующий день). Каждый день успешно сдавала зачет одна треть всех пришедших студентов и еще одна треть студента. Каково наименьшее возможное число студентов, так и не сдавших зачет за пять раз?

452. Задача-шутка. Две домохозяйки вместе купили на рынке большой кусок мяса и стали делить его на две равные части. Весов у них нет, но имеются нож и топор. Как им разделить мясо, чтобы каждая из них получила, по ее мнению, не менее половины куска?

△ Одна из них должна разделить мясо на две части, по ее мнению, равные, а другая — выбрать одну из этих частей. После этого обе должны быть довольны: первая — потому, что делила, вторая — потому, что выбирала. ▲

453*. Три золотоискателя на Аляске делят намытый ими совместно золотой песок. Весов у них нет. Как им разделить песок, чтобы каждый получил, по его мнению, не менее трети от общей добычи?

454. Несколько одинаковых ящиков весят вместе 10 тонн, причем каждый из них весит не более 1 тонны. Какого наименьшего количества трехтонных грузовых автомашин достаточно, чтобы увезти за один раз весь этот груз?

△ Четырех автомашин может не хватить. Например, если имеется 13 одинаковых ящиков массой по $\frac{10}{13}$ тонны, то в одну из машин нельзя поместить больше трех ящиков, так как уже при четырех ящиках получаем массу $4 \cdot \frac{10}{13}$ тонн, большую 3 тонн, а тогда на всех четырех машинах можно увезти не более 12 ящиков из 13.

Пяти автомашин во всех случаях хватит. Действительно, в каждую машину мы можем загрузить не менее 2 тонн груза: если загрузить меньше 2 тонн, то можно добавить еще ящик (или ящики) с грузом, поскольку по условию каждый ящик весит не более тонны. Следовательно, в пять машин можно погрузить не менее 10 тонн груза.

Ответ: 5. ▲

455*. Из карьера нужно вывезти 870 тонн гранитных глыб, причем каждая из глыб весит не более 8 тонн. Докажите, что для перевозки достаточно 17 платформ грузоподъемностью 58 тонн каждая.

456. Можно ли в вершинах правильного восьмиугольника расставить все натуральные числа от 1 до 8, по одному в каждой вершине, так, чтобы суммы чисел, расположенных в любых трех соседних вершинах, были

а) больше 11; б) больше 13?

457*. 80 школьников выстроены прямоугольником 8×10. Все они разного роста. В каждом поперечном ряду выбрали самого высокого ученика. Самым низким из них оказался Андреев. В каждом продольном ряду выбрали самого низкого ученика. Самым высоким из них оказался Борисов. Кто выше — Андреев или Борисов?

△ Рассмотрим ученика В, который стоит в одном поперечном ряду с Андреевым и в одном продольном ряду с Борисовым (рис. 50). Обозначим рост Андреева, Борисова и В соответственно через h_1, h_2 и h_3.

Так как Андреев в своем поперечном ряду является самым высоким, то $h_1>h_3$. Так как Борисов в своем продольном ряду является самым низким, то $h_3>h_2$. Отсюда $h_1>h_2$.

Ответ: Андреев. ▲

458*. На международный конгресс приехали 500 делегатов из разных стран. Любые трое делегатов могут поговорить между собой без помощи остальных (при этом возможно, что одному из них придется переводить разговор двух других). Докажите, что всех делегатов можно поселить в двухместных номерах гостиницы таким образом, чтобы любые двое живущих в одном номере могли разговаривать между собой.

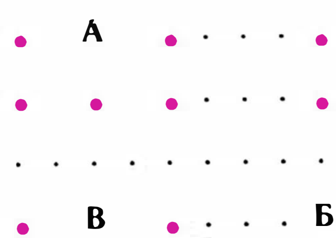


Рис.50

459*. Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежит еще по 10 ящиков. В некоторых из последних ящиков лежит еще по 10 ящиков. Сколько всего ящиков, если заполнснных ящиков 12?

460*. 30 студентов с пяти разных курсов придумали для олимпиады 40 задач, причем однокурсники — по одинаковому числу задач, а студенты с разных курсов — разное количество задач. Сколько студентов придумали ровно по одной задаче?

461*. По окружности выписано 30 чисел, каждое из которых равно модулю разности двух следующих за ним по часовой стрелке чисел. Сумма всех 30 чисел равна 60. Найдите эти числа.

462*. На доске написано несколько ненулевых чисел. Разрешается стереть любые два числа a и b и вместо них записать числа $a+\frac{b}{2}$ и $b-\frac{a}{2}$. Докажите, что после любого конечного числа таких операций нельзя получить исходный набор чисел.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

§ 1. ПЕРЕЛИВАНИЯ

6.

Бидон емкостью 17 л	0	0	5	5	10	10	15	15	17	0	3	3	8	8	13
Бидон емкостью 5 л	0	5	0	5	0	5	0	5	3	3	0	5	0	5	0

7.

Ведро объемом 12 л	0	12	5	5	0	12	10	10	3	3	0	12	8	8	1	1
Ведро объемом 7 л	0	0	7	0	5	5	7	0	7	0	3	3	7	0	7	0

9.

Бочка емкостью a ведер	a	$a-9$	$a-9$	$a-4$	$a-4$	$a-13$	$a-13$	$a-8$
Бидон емкостью 9 ведер	0	9	4	4	0	9	8	8
Бидон емкостью 5 ведер	0	0	5	0	4	4	5	0

10.

Ведро объемом 7 л	0	0	4	4	4	4	7	0	1	1	5	5	7	7	0	0	4	4	7	0	1	1	5	5	7	0	2	2	6
Ведро объемом 7 л	0	0	0	0	4	4	4	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
Черпак объемом 4 л	0	4	0	4	0	4	1	1	0	4	0	4	2	0	0	4	0	4	1	1	0	4	0	4	2	2	0	4	0

11.

Флакон емкостью 14 унций	0	0	6	6	12	12	14	8	8	2	2	0	14	10	10
Флакон емкостью 12 унций	0	0	0	0	0	12	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Флакон емкостью 6 унций	0	6	0	6	0	0	0	6	0	6	0	2	2	6	0

13. 7 способами. Найдем все представления числа 10 в виде суммы слагаемых, каждое из которых равно 2 или 3:

$$10 = 2+2+2+2+2 = 3+3+2+2.$$

В последней сумме порядок слагаемых существен; проверьте самостоятельно, что представить 10 в виде суммы четырех слагаемых, равных 3, 3, 2 и 2, с учетом их порядка, можно 6 способами.

14. После 125-го переливания в сосудах окажется по 0,5 л кофе. В самом деле, в сосудах последовательно окажется:
после первого переливания — 0,5 л и 0,5 л;

после второго — $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ л и $\frac{1}{3}$ л;

после третьего — $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ л и $\frac{1}{2}$ л;

после четвертого — $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$ л и $\frac{2}{5}$ л;

после пятого — $\frac{3}{5}-\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ л и $\frac{1}{2}$ л.

Докажем, что после любого переливания с нечетным номером в сосудах окажется по 0,5 л кофе.

Пусть после переливания с некоторым нечетным номером $2k-1$ в сосудах будет по 0,5 л кофе. Тогда после следующего переливания с номером $2k$ в первом сосуде окажется

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2k+1}=\frac{k+1}{2k+1} \text{ (л)},$$

а после следующего за ним переливания, номер которого равен $2k+1$, в нем будет

$$\frac{k+1}{2k+1}-\frac{k+1}{2k+1}\cdot\frac{1}{2k+2}=\frac{k+1}{2k+1}\left(1-\frac{1}{2k+2}\right)=\frac{1}{2} \text{ (л)}.$$

Следовательно, оказалось, что если после переливания с любым нечетным номером в сосудах будет находиться по 0,5 л кофе, то и после переливания со следующим нечетным номером в них будет по 0,5 л кофе. Тогда, так как после первого переливания в сосудах находилось по 0,5 л кофе, то и после третьего переливания в них будет по 0,5 л, а значит, и после пятого переливания в них будет находиться по 0,5 л кофе, и т. д.

(Фактически доказательство здесь проводилось методом математической индукции.)

§ 2. ЛОГИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

16. А — тренер, Б — строитель, В — журналист, Г — врач.

17. Ира — 5, Светлана — 3, Лиза — 4.

18. Лимонад — в бутылке, молоко — в кувшине, квас — в банке, вода — в стакане.

19. Вадим — токарь, Сергей — слесарь, Николай — электрик, Антон — шофер.

21. Школьники, начиная с первого места, выстроились соответственно в порядке Г, Д, Л, А, М, К, В, Б.

22. В коробках, взятых в том же порядке, лежат соответственно мотки БЗ, ББ, ЗК, БК.

23. Журавлев — итальянским и испанским, Данилов — английским и немецким, Никольский — французским и арабским.

25. Виктор. Проще всего рассмотреть два случая — Виктор не виноват, Виктор виноват.

§ 3. ГРАФЫ

27. Петр — баскетболист, Геннадий — волейболист, Алексей — гимнаст, Владимир — легкоатлет.

28. А — 5-е место, Б — 2-е, В — 3-е, Г — 4-е, Д — 1-е. Рассмотрите два случая в зависимости от того, какая часть первого прогноза подтвердилась.

29. Б и Д. Рассмотрите пять случаев в зависимости от того, какой прогноз оказался полностью неверным.

31. Владимир преподает литературу в Туле, Игорь — физику в Ярославле, Сергей — математику в Рязани.

32. А и Г — лейтенанты танковых войск, Б — майор артиллерии, В — капитан артиллерии. Рассмотреть два случая в зависимости от того, кто является капитаном — В или Г.

34. а) Можно; б) можно. **37.** Нельзя. **38.** Не может. **39.** Верно.

41. а) Нельзя; б) можно. **42.** Нельзя. **43.** Можно.

47. См. утверждение задачи 46.

49. Нельзя. Допустим, что это возможно. Начертим выпуклый 15-угольник. Пусть его вершины A_1, A_2,..., A_{15} обозначают ЭВМ, а стороны — провода, соединяющие ЭВМ попарно. Окрасим в синий цвет провода, соединяющие вершины A_1 и A_2, A_3 и A_4, A_5 и A_6,..., A_{13} и A_{14}. Тогда из вершины A_{15} синий провод некуда проводить.

51. Девушек больше. **54.** 5 районов, 10 аппаратов. **55.** 6 сотрудников, 15 газет.

59. Верно. Обозначим туристов точками. Если двое из них могут разговаривать между собой, соединим соответствующие точки черным отрезком, в противном случае — красным. Дальше см. утверждение задачи 56.

61. $n = 66$. Пусть какая-либо точка из этих 66 точек соединена с 65 остальными отрезками четырех разных цветов. Так как $65 = 4 \cdot 16 + 1$, то из этих 65 отрезков найдутся 17 какого-либо одного цвета: если бы отрезков каждого цвета было не более 16, то из выбранной точки выходило бы не более $4 \cdot 16 = 64$ отрезков. (Фактически здесь применяется обобщенный принцип Дирихле — см. § 9.) Дальше нужно применить утверждение задачи 60. При $n = 65$ это рассуждение не проходит, и можно, хотя и непросто, построить пример, когда треугольник с одноцветными сторонами не найдется.

§ 4. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

62. $\{1; 61; 121; ...; 841\}$. **65.** $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$, $d = 4$.

67. 18. **69.** 13. **70.** 7. Задачу лучше решать непосредственно с помощью кругов Эйлера, а не с помощью формулы включений и исключений.

71. 5,5 м^2. **72.** 8. **73.** Докажите, что на основании трех последних условий задачи в отделе должно работать не менее 21 человека.

74. Самый длинный список — третий. Первый список совпадает со вторым, если никто не решил вторую задачу; первый с третьим — если никто не решил только вторую задачу; первый с четвертым — если никто не решил только первую задачу; второй с третьим — если никто не решил две задачи; третий с четвертым — если никто не решил ровно одну задачу; второй список с четвертым совпадать не могут.

76. 4; 5; 1. **78.** $\varnothing$. **79.** Если A — пустое множество, то множество X — любое; если A не пусто, то множество X не существует.

80. $X = A$, $Y = \varnothing$. **82.** $X = Y = A$. **83.** $X = A$, Y — любое множество. **84.** $X = Y = A \cup B$. **85.** Если $A \cap B = \varnothing$, то $X = A$, $Y = B$; если $A \cap B \neq \varnothing$, то множества X и Y не существуют.

87. Достаточно привести пример, скажем, такой:

$$A = \{1; 2\},\ B = \{1; 3\},\ C = \{2; 3\}.$$

88. Не следует. Здесь также достаточно привести контрпример или применить круги Эйлера.

89. Верно. Последовательно получаем, используя условия задачи, что множеству A принадлежат числа: 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 42, 85, 171, 343, 114, 229, 76, 25, 8.

§ 5. ВЫДЕЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА МНОЖЕСТВА

91. Положим на одну чашку весов, например, первую и вторую монеты, а на другую — две остальные и после первого взвешивания выделим ту чашку весов, которая оказалась более тяжелой; затем понадобится еще одно взвешивание. Найти фальшивую монету за одно взвешивание в общем случае нельзя. **94.** а) 3; б) 4. **96.** 2. **98.** а) 3; б) 3; в) 4.

100. 3 взвешивания. Обозначим кубы соответственно буквами А, Б, В, Г, Д и Е. При первом взвешивании сравним, например, массы кубов А и Б, а при втором — А и В. Если оба раза весы были в равновесии, то кубы А, Б и В имеют одинаковую массу и взвешивания закончены. Если оба раза весы были в неравновесии, то кубы Б и В имеют одинаковую массу, а куб А — иную, причем из результатов этих взвешиваний видно, легче или тяжелее А, чем каждый из кубов Б и В; затем достаточно одного взвешивания, скажем, кубов Г и Д. Наконец, если один раз весы были в равновесии, а другой — в неравновесии, то отсюда также видно, какие два куба из тройки А, Б и В имеют одинаковую массу; после этого достаточно также еще одного взвешивания.

101. Положим на одну чашку весов эталон и первую из 5 деталей, на другую — вторую и третью. Если весы оказались в равновесии, то бракованной деталью является одна из двух оставшихся — четвертая или пятая; при следующем взвешивании сравним массы эталона и, например, четвертой детали. Если же при первом взвешивании весы были в неравновесии и более легкой оказалась та чашка, на которой лежали вторая и третья детали, то при втором взвешивании сравним массы этих двух деталей; если весы при втором взвешивании были в равновесии, то бракованной является первая деталь, а если в неравновесии, то вторая или третья — та, которая оказалась более легкой.

103. Нужно взвесить остальные 20 монет; если весы покажут четное число грамм, то взятая монета — фальшивая, а если нечетное, то настоящая. Действительно, обозначим массу фальшивой монеты через a г. Если взятая монета — фальшивая, то весы при взвешивании остальных монет покажут $10a+10(a+1)$ г, а значит, четное число грамм; если же она — настоящая, то весы покажут

$$11a+9(a+1) = 20a+9 \text{ г},$$

а следовательно, нечетное число грамм. Но тогда обратные утверждения также справедливы. **108.** За 9. **109.** За 20. **110.** За 4.

§ 6. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

112. 7. **114.** 36. **115.** 10. **116.** 8. **117.** а) 16; б) 33; в) 17; г) 66; д) 33. **119.** а) 28; б) 13. **121.** 7, 8 или 9. **122.** 5. **123.** n-1. **125.** 233. **126.** 24. **127.** mn. **130.** 942. **131.** 472. **132.** 38 794. **133.** 729. **135.** 48. **137.** 59 049. **138.** а) 4096; б) 13. **139.** 6. **140.** 80. **141.** $n(n-1)$. **143.** 40. **144.** $\dfrac{n(n-3)}{2}$. **145.** $km+ln$. **147.** 30 240. **148.** 24. **150.** 7200. **151.** $(11!)^2$. **153.** 40. **154.** $P_8 \cdot 2^8$. **156.** 85. **157.** 165. **158.** 446. **159.** 220. **160.** 21 840. **162.** 252. **163.** 90. **164.** а) 120; б) 224; в) 308. **166.** 5005. Нужно перемножить число способов, которыми можно выбрать две прямые из 11, на число способов, которыми можно выбрать две прямые из 14. **167.** 32.

§ 7. МЕТОД ПЕРЕБОРА

169. $98 \cdot 9 = 882$. **171.** $12 \cdot 79 = 948$. Вторая цифра второго множителя равна 8 или 9; нужно рассмотреть оба случая. Теперь подберем первый множитель с учетом того, что произведение его на 7 двузначно, а на вторую цифру второго множителя трехзначно.

173. 4940+7940 = 12 880. Очевидно, А = О (из последнего столбца), С = 1. Дальше нужно рассмотреть два случая (по предпоследнему столбцу): 2Т = М и 2Т = М+10. **175.** 9:8 = 0, 125. Выполнить перебор по цифре О. **177.** $11^3 = 1331$. **178.** 81 649. **180.** 503^3 = 127 263 527. Основание степени должно быть трехзначным. Первая цифра основания равна 4 или 5, последняя — 3, так как из всех цифр только куб цифры 3 оканчивается на 7. **182.** (100; 1), (6; 20). Использовать делимость на 19 и доказать, что $y-1$ делится на 19 и что y не превосходит 21. **183.** 4 отрезка длиной 15 см и 3 длиной 18 см. **185.** 2 мужчин, 3 женщины, 5 детей. **186.** 4. **188.** а) 3, 4, 6, 10; б) 1, 3, 5, 9, 21. **190.** а) $n = 4k+2(k = 0, 1, 2,...)$; б) $n = 6k+3(k = 0, 1, 2,...)$. **192.** (0;8), (2; 3), (3; 7), (5; 2), (6; 6), (8; 1), (9; 5), где первый элемент каждой пары означает значение a, второй — соответствующее значение b. **194.** а) (4; 8), (5; 5), (6; 4), (9; 3); б) (9; 72), (10; 40), (12; 24), (16; 16), (24; 12), (40; 10), (72; 9).

195. (1; 3; 2), (1; 2; 3), (7; –1; 0), (7; 0; –1).

196. (997; 996), (997; –996), (–997; 996), (–997; –996). Разложить левую часть уравнения на множители и учесть, что число 1993 — простое.

197. а) 4, 6 или 7; б) 5, 8, 9, 10 или 11. **199.** Все дни января в любой год, 30 марта — в високосный год, 30 апреля и 30 мая — в невисокосный. **200.** Массой 1500, 800 и 600 кг. **201.** В первый раз — 18, 36, 54, 72, 90, во второй — 9, 18, 27, 36, 45. **203.** а) 1, –7; б) 5, –1; в) 2, –2. **205.** 24. Пользуясь равенством $\overline{ab} = a^3 + b^2$, доказать, что $a \le 4$. Далее используем перебор по a. **207.** а) (0; 0), (2; 2), (0; 1), (1; 0), (2; 1), (1; 2); б) (1; 3), (1; –3), (8; 3), (8; –3), (0; 1), (0; –1), (9; 1), (9; –1). **209.** (1; 2), (2; 1). **211.** $x = 5$, $y = 1$, $z = 2$. **214**. а) (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1); б) (2; 3; 6), (2; 6; 3), (3; 2; 6), (3; 6; 2), (6; 2; 3), (6; 3; 2), (2; 4; 4), (4; 2; 4), (4; 4; 2), (3; 3; 3). **216.** 1. **217.** 1. **219.** 47.

§ 8. ПРАВДОЛЮБЦЫ И ЛЖЕЦЫ

222. Подойдет любой вопрос, на который путешественник заранее знает верный ответ, например: “Как называется этот остров?”

223. Лжецом. См. решение задачи 221.

226. К и М — лжецы.

228. Р — правдолюбец. Сначала доказываем, что К является лжецом. Затем рассмотрим две возможности. Пусть М — правдолюбец; так как его утверждение истинно, то и Р — правдолюбец. Пусть М — лжец; так как утверждение К ложно, то Р — правдолюбец.

230. Пусть К говорит правду. Тогда М является правдолюбцем. Поскольку его утверждение истинно, то К может быть только хитрецом.

Пусть К лжет. В этом случае М — не правдолюбец. Но М говорит правду, так как К лжет. Следовательно, М — хитрец.

231. Корреспондент должен задать, например, А такой первый вопрос: “Имеется ли среди С и К хитрец?” Тот же самый вопрос ему нужно задать и В.

Если А и В ответят “Да”, то среди С и К действительно имеется хитрец, а значит, А и В — правдолюбцы. Тогда, например, можно задать А прямолинейный третий вопрос: “Является ли С хитрецом?”.

Если А и В отвечают “Нет”, то среди С и К нет хитреца, а следовательно, хитрецом может быть только или А, или В. Нужно задать С вопрос: “Является ли А хитрецом?”.

Наконец, если А и В дадут разные ответы, то один из них является хитрецом. Следует задать С тот же вопрос, что и в предыдущем случае.

233. За два вопроса путешественник должен выяснить, с кем разговаривает (см. решение задачи 222), и еще за два — в какой деревне находится. Последние два вопроса (или даже один, если островитянин оказался правдолюбцем) зависят от того, кем оказался островитянин.

235. Первый и второй из островитян — правдолюбцы, остальные — лжецы.

Начнем с четвертого из островитян. Допустим, что он — правдолюбец. Тогда его высказывание истинно, а значит, первый тоже является правдолюбцем. Но их утверждения противоречат друг другу. Полученное противоречие означает, что четвертый человек является лжецом, а следовательно, первый — правдолюбцем.

Перейдем к третьему из островитян. Если его высказывание истинно, то, с одной стороны, он — правдолюбец, а с другой — лжец, так как один правдолюбец среди четверых уже есть. Значит, третий островитянин может быть только лжецом. Тогда второй является правдолюбцем.

237. Все 12 человек — лжецы или среди них 8 правдолюбцев, 4 лжеца.

Допустим, что все 12 человек — лжецы. Это соответствует условиям задачи.

Пусть теперь среди них имеются правдолюбцы. Так как утверждение правдолюбца истинно, то для того, чтобы с одной стороны от него стоял правдолюбец, а с другой — лжец, правдолюбцы должны стоять по двое. Так как утверждение лжеца ложно, то лжецы могут стоять только по одному. Обозначая правдолюбца буквой П, а лжеца — буквой Л, получим последовательность

П П Л П П Л П П Л П П Л.

237. 5

§ 9. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

238. Например: “Меня зовут Коля”. **239.** Ложно. **240.** Ложно.

242. Предпоследнее. **245.** $x = 2$, $y = 1$, $z = 4$, $t = 3$. Предположим, что $x = 1$. Тогда на основании пятого условия и $y = 1$, что невозможно.

Пусть $x \neq 1$. Применяя правило контрапозиции ко второму условию, получим: если $x \neq 1$, то $y \neq 2$ и $y \neq 3$. Значит, на основании третьего условия $z = 4$. Так как $y \notin \{2; 3; 4\}$, то $y = 1$.

Применим правило контрапозиции к четвертому условию: если $y = 1$, то $t \neq 2$. Следовательно, $t = 3$, откуда $x = 2$. Тогда и первое условие выполняется.

246. 2. **248.** (9; 2), (17; 6). **249.** 1974. **250.** 15, 30, 60. Если бы первое утверждение было ложно, то ложными были бы и третье, четвертое и шестое утверждения. Получилось четыре ложных утверждения, а это противоречит вопросу задачи. Значит, первое утверждение может быть только истинным. Аналогично доказывается, что истинно и второе утверждение. Но тогда истинно и четвертое утверждение.

Итак, три истинных утверждения — первое, второе и четвертое — у нас имеются. Теперь переберем все двузначные числа, кратные 15, с целью выяснить, для каких из них третье, пятое и шестое утверждения ложны.

252. $(-\infty; 2) \cup \left(2; \frac{15}{2}\right)$. **254.** $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, 1.

256. 981, 983, 989, 991, 997.

§ 10. ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

258. В невисокосный год — 366, в високосный — 367.

260. Верно. По правилу произведения количество таких различных чисел равно $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$.

263. Воспользуйтесь тем, что двузначное число с одинаковыми цифрами делится на 11.

264. Допустим, что ни одно из данных чисел не делится на n. Тогда каждое из них при делении на n может давать $n-1$ различных остатков $1, 2, \ldots, n-1$. Но поскольку чисел n, то среди них имеются два числа 2^k-1 и $2^{k+l}-1$, которые при делении на n дают одинаковые остатки, т. е. такие, что их разность

$$(2^{k+l}-1)-(2^k-1) = 2^k(2^l-1)$$

делится на n. Отсюда 2^l-1 делится на n.

266. Не может. Всего сумм 22, но они принимают самое большее, 21 различное значение — от $1+1+\ldots+1 = 10$ до $3+3+\ldots+3 = 30$.

267. Разделите газон на 9 равных правильных треугольников со стороной 1 м.

268. Верно. Всего членов разложения $4 \cdot 4 = 16$, а их показатели степени принимают самое большее 15 различных значений — 2, 4, 6,..., 30.

269. Пусть многогранник имеет n граней. Тогда каждая его грань может иметь от 3 до $n-1$ сторон, а значит, менее n сторон.

272. Верно. **275.** 7. **276.** а) $9 \cdot 4+1 = 37$; б) $25+20+10+10 = 65$.

278. Разделите данный квадрат на 25 квадратиков со стороной 1 см и докажите, что каждый такой квадратик можно заключить в круг радиуса 1 см. Далее нужно разделить 126 на 25 с остатком.

282. Чисел 100, и их остатки при делении на 7 принимают максимум 7 различных значений. Так как $100 = 7 \cdot 14+2$, то найдутся 15 чисел, которые при делении на 7 дают равные остатки. **284.** Верно.

287. Рассмотрим два случая.

Пусть среди данных 65 чисел найдутся 9 чисел, остатки от деления которых на 9 принимают 9 различных значений. Тогда сумма этих чисел делится на 9, так как сумма соответствующих остатков равна $0+1+2+\ldots+8 = 36$.

Пусть такие 9 чисел не найдутся. Тогда остатки от деления данных чисел на 9 принимают самое большее 8 различных значений. Поскольку $65 = 8 \cdot 8+1$, то здесь k из обобщенного принципа Дирихле равно 8.

289. См. решение задачи 288. **290.** Используйте утверждение задачи 289.

291. Рассмотрим $b+1$ число 1, a, $a^2,\ldots,$ a^b.

На основании утверждения опорной задачи 262 среди них найдутся два числа, разность которых делится на b.

294. Разделим каждое из 51 данного числа на наибольшую степень двойки, которая содержится в разложении этого числа на простые множители. Получим 51 нечетное число. Но так как нечетных чисел, не превосходящих 100, не более 50, то среди них по принципу Дирихле найдутся два равных числа. Тогда из двух соответствующих чисел из числа данных большее делится на меньшее, поскольку эти числа при разложении на простые множители отличаются только степенью двойки.

§ 11. ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ

297. Начинающий. Первым ходом ему следует взять 20 шаров из первой кучки, а дальше отвечать на ход второго игрока симметричным ходом.

298. Начинающий. Первым ходом ему нужно соединить диагональю две противоположные вершины 30-угольника, а в дальнейшем отвечать на ход противника ходом, симметричным относительно этой диагонали.

300. Тот, кто ходит вторым, — А. **302.** а) Первый игрок; б) первый игрок.

303. Начинающий. Если после последнего хода второго игрока получилось восьмизначное число с суммой цифр вида $9k+r$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ldots;$ $0\le r\le 8$), то ему следует написать в качестве последней цифры $9-r$.

304. Он должен на каждом ходу записывать ту же цифру, что и начинающий на том же ходу. По признаку делимости на 11 получающееся 16-значное число делится на 11.

307. Он должен вписать любое число вместо какой-либо звездочки во втором равенстве. Далее, если второй игрок вписывает число вместо какой-либо звездочки в первом, втором или третьем равенстве, то и начинающему следует вписать число соответственно в первом, втором или третьем равенстве (так, чтобы первое или второе равенство выполнялось).

309. На рисунке 51 приведены все выигрывающие положения для второго игрока.

311. Начинающий. Первым ходом он должен взять 4 спички, а дальше дополнять число спичек, взятых вторым игроком на последнем ходу, до 6.

312. Ему следует первым ходом взять один камешек, а в дальнейшем дополнять число камешков, взятых вторым игроком на последнем ходу, до 4.

313. Начинающий должен первым ходом положить шашку в центр стола, а дальше отвечать на последний ход второго игрока ходом, симметричным относительно центра стола.

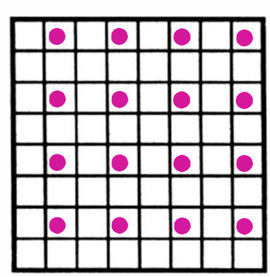


Рис. 51

314. Допустим, что у второго игрока имеется выигрывающая стратегия. Тогда первым ходом начинающему следует поставить крестик на любое поле, а в дальнейшем применять выигрывающую стратегию второго игрока; лишний крестик ему может только помочь. Получается, что выигрывает уже начинающий — противоречие.

316. Начинающий. Он должен первым ходом выбросить кучку из 25 спичек, а кучку из 20 спичек разбить на две, с нечетным числом спичек в каждой. Второй игрок одну из них выбрасывает, а другую разбивает на две кучки, в одной из которых четное, в другой — нечетное число спичек. Дальше все повторяется.

317. Витя. Коля при первом своем ходе пишет натуральное число, заключенное в пределах от 16 до 30. Вите в ответ лучше всего написать число 15. Далее, Коля пишет любое натуральное число, заключенное в пределах от 8 до 14, а Вите следует написать число 7. Затем Коля пишет любое натуральное число от 4 до 6, а Вите нужно написать 3. Коле остается написать только число 2, а Вите — 1.

§ 12*. ПРАВИЛО КРАЙНЕГО

319. От 53 % до 80 %.

320. Не поместятся.

322. Проведем две взаимно перпендикулярные прямые. Рассуждая от противного, возьмем крайнюю левую точку; если же таких точек несколько, выберем, например, самую верхнюю из них.

324. Рассмотрите наименьшее число из 8 записанных.

325. Рассуждая от противного, возьмите наименьшее из записанных натуральных чисел.

327. б) Предварительно докажите, что если сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел делится на 3.

328. Не имеет.

330. Допустим, что получилась замкнутая ломаная. Пусть AB — наибольшее ее звено. Обозначим через AC и BK соседние с ним звенья.

Так как $AC<AB$, то точка B не является ближайшей к A. Так как $BK<BA$, то точка A не является ближайшей к B. Но тогда точки A и B по условию нельзя соединять отрезком.

§ 13*. ИНВАРИАНТЫ

332. $(8!)^2 = 1\ 625\ 702\ 400$. **334.** Минус. **335.** Нельзя.

336. Нельзя. Поставим в соответствие стакану в нормальном положении число 1, а стакану вверх дном — число -1. Произведение соответствующих чисел при начальном положении стаканов равно -1. При переворачивании любых 4 стаканов изменяется знак 4 множителей из 9, поэтому знак всего произведения не изменится. Следовательно, произведение, равное 1, получиться не может.

338. Получить 50 кусков картона можно, 60 — нельзя.

340. Нельзя. Окрасим одну клетку каждой косточки домино в белый цвет, другую — в черный. Если бы оставшуюся часть доски можно было покрыть косточками домино, то на этой части число белых и черных клеток было бы одинаково. Однако в действительности число тех и других различно: клеток одного цвета 30, а другого — 32.

341. а) Нельзя; б) можно.

а) Если n карточек сделать из синих красными, а $17-n$ — из красных синими, то синих карточек станет

$$(8-n)+(17-n) = 25-2n,$$

а значит, нечетное число. Следовательно, сделать это число равным нулю нельзя.

б) Красных карточек после первого переворачивания станет

$$30-(25-2n) = 5+2n.$$

Выберем n так, чтобы $5+2n = 17$: $2n = 12$, $n = 6$.

Поэтому, если первым ходом 6 синих карточек сделать красными, а 11 красных — синими, то красных карточек станет $6+(22-11) = 17$. Вторым ходом перевернем все эти 17 карточек.

343. 10. **344.** Не может. **345.** Нельзя.

347. Можно. Пусть на каком-то шаге в вершинах шестиугольника оказались в последовательном порядке числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6. Составим сумму

$$S = a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6.$$

При прибавлении к двум соседним числам суммы (или к a_1 и a_6) одного и того же числа эта сумма не изменит своего значения. И в начальном, и в конечном положении она равна 20. Осталось найти способ перехода от начального положения к конечному:

$$8,\ 3,\ 12,\ 1,\ 10,\ 6 \to 7,\ 2,\ 12,\ 1,\ 10,\ 6 \to 7,\ 2,\ 14,\ 3,\ 10,\ 6 \to$$
$$\to 5,\ 2,\ 14,\ 3,\ 10,\ 4 \to 5,\ 2,\ 14,\ 6,\ 13,\ 4.$$

348. Сумма чисел каждой из четверок a, b, c, d и $\frac{b+c+d}{3}$, $\frac{a+c+d}{3}$, $\frac{a+b+d}{3}$, $\frac{a+b+c}{3}$ одна и та же.

349. Раскрасим клетки доски через одну в два цвета — белый и черный. При этом 12 клеток из 25 окажутся окрашенными в один цвет, например белый, остальные 13 — в другой, черный. Каждый жук переползает на клетку другого цвета. Так как жуков, которые первоначально сидели в черных клетках, 13, а в белых — 12, то после переползания всех жуков по меньшей мере одна черная клетка останется пустой.

§ 14. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГИЧЕСКОГО ХАРАКТЕРА

351. а) За два; б) за два.

352. Рассмотрите случаи $n = 3k$, $n = 3k+1$, $n = 3k+2$ $(k \in N)$. В первом случае разбейте множество монет на три кучки, по k монет в каждой; во втором — на кучки из k, k и $k+1$ монет; в третьем — на кучки из k, $k+1$ и $k+1$ монет.

355. Не всегда.

357. Занумеруем пакеты. Их массы обозначим соответственно через m_1, m_2, m_3, m_4 и m_5.

За три взвешивания упорядочим три первых пакета и за одно — четвертый и пятый по массе. Пусть оказалось, что $m_1<m_2<m_3$, $m_4<m_5$.

Сравним массы второго и четвертого пакетов. Пусть $m_2<m_4$.

Так как

$$m_1<m_2<m_3, \quad m_1<m_2<m_4,$$

то имеет смысл сравнить по массе третий и четвертый пакеты. Пусть $m_4<m_3$. Тогда $m_1<m_2<m_4<m_3$.

Осталось сравнить массы третьего и пятого пакетов. Если $m_5<m_3$, то

$$m_1<m_2<m_4<m_5<m_3.$$

359. Математик. **360.** О спорте.

361. С, Б, Б, С, С, Б, С, С, С, Б, Б, Б, Б, С, С, С, С, Б, Б, Б.

362. На 73-м. **363.** 803. **365.** 100.

369. В первой строке стоят в последовательном порядке числа 20, 1, 6, 30; во второй — 12, 15, 4, 5; в третьей — 5, 10, 6, 12; в четвертой — 3, 24, 25, 2 или: в первой и второй строке — те же числа; в третьей — 5, 10, –6, –12; в четвертой — 3, 24, –25, –2.

371. Любое нечетное число от 1 до 23.

373. Можно, например, 9, –5, –5, 9, –5, –5,..., 9, –5, –5, 9.

374. Можно (см. рис. 52). **376.** Можно (см. рис. 53).

379. См. рис. 54. **380.** 11 участников, 7,5 очка.

382. Выиграл у занявшего пятое место, проиграл занявшему третье место.

383. В, Б, Д, Г, А, Е.

Первый болельщик не угадал мест А и Д, иначе их угадал бы и второй. Так как первый не угадал ни одной пары бегунов, которые последовательно финишировали, то он мог только угадать, что бегуны Б, Г и Е заняли соответственно второе, четвертое и шестое места.

2	2	2	2	2
2	–7	2	–7	2
2	2	–9	2	2
2	–7	2	–7	2
2	2	2	2	2

Рис. 52

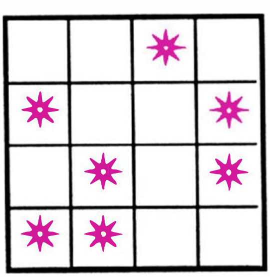


Рис. 53

	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки
А		0	2	2	2	2	8
Б	2		0	2	1	2	7
В	0	2		0	2	2	6
Г	0	0	2		0	2	4
Д	0	1	0	2		0	3
Е	0	0	0	0	2		2

Рис. 54

Третий болельщик не угадал мест Д, Е, А, Г, Б, но тогда он угадал, что В займет первое место. Поскольку первый болельщик не угадал места Д, то Д занял третье место. Следовательно, А занял пятое место.

385. Пусть первый шахматист выиграл у второго 3 партии, второй у первого — 2; первый выиграл у третьего 4 партии, проиграл третьему — 5; остальные партии окончились вничью. Тогда:

первый шахматист выиграл 7 партий, проиграл 7, сыграл вничью 2;
второй выиграл 2 партии, проиграл 3, сыграл вничью 11;
третий выиграл 5, проиграл 4, сыграл вничью 7.

Получилось, что первый шахматист выиграл больше всех партий — 7, а второй проиграл меньше всех партий — 3. Но первый из друзей набрал 8 очков, второй — 7,5, а третий — 8,5.

388. Нельзя.

389. Верно.

Буквально принцип недостаточности применять нельзя, так как на каждой крыше сидит по меньшей мере одна кошка. Допустим, что на всех крышах окажется разное количество кошек. Если на крышах будет сидеть соответственно 1, 2, 3,..., 10 кошек, то минимальное общее количество кошек равно

$$1+2+3+\ldots+10 = 55,$$

а следовательно, больше 50.

391. 14. **393.** Верно.

396. Возьмем любые две точки A и B разного цвета. Пусть точка A окрашена в красный цвет, точка B — в черный.

Если $AB = 1$, то точки A и B — искомые. Если $AB < 1$, то существует точка С, которая находится на расстоянии 1 от каждой из точек A и B. Тогда, в зависимости от цвета точки C, искомой является или пара точек A и C, или пара B и C.

Пусть теперь $AB > 1$. На отрезке AB от точки A будем откладывать отрезки AM_1, M_1M_2, M_2M_3 и т. д. длины 1 (рис. 55).

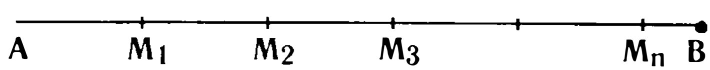


Рис. 55

Если среди точек M_1, M_2, M_3,... имеется хотя бы одна черная, то все доказано: например, если точки M_1 и M_2 — красные, а точка M_3 — черная, то точки M_2 и M_3 и являются искомыми.

Если же все точки M_1, M_2, M_3,... — красные, то найдем первую из них M_n, такую, что $BM_n \leq 1$. Дальше решение аналогично предыдущему.

397. 8, 8 и 8.

При каждой из 8 вершин куба должны быть три квадрата разных цветов — синий, красный и зеленый.

399. У семиугольника всегда найдутся две соседние вершины, например A_1 и A_2, одного и того же цвета, скажем, белого (рис. 56).

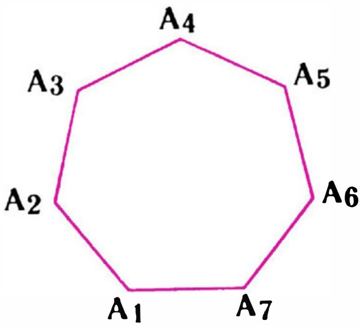


Рис. 56

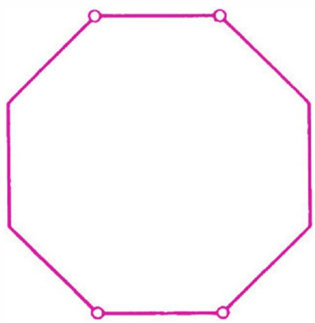


Рис. 57

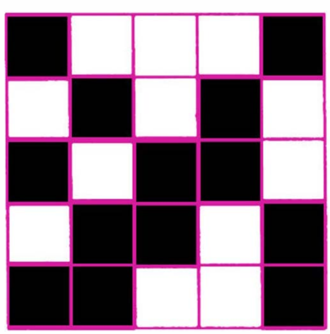


Рис. 58

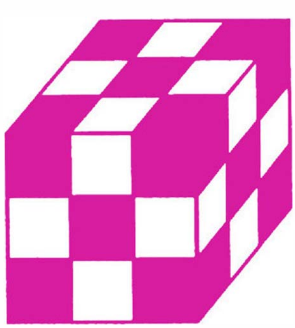


Рис. 59

Если среди вершин A_3, A_5 и A_7 имеется вершина белого цвета, например A_5, то равнобедренный треугольник $A_1A_2A_5$ — искомый. Если же все эти три вершины — черного цвета, то треугольник $A_3A_5A_7$ является искомым.

Для правильного восьмиугольника это утверждение неверно (см. рис. 57, где кружками отмечены вершины белого цвета).

402. Можно (рис. 58).

403. Возьмем горизонтальную полосу шириной 7 клеток. Так как число вертикальных столбиков в ней бесконечно, а число способов их раскраски конечно, то найдутся два одинаково окрашенных вертикальных столбика.

Рассмотрим один из них. Поскольку в нем 7 клеток и они окрашены не более чем в 6 различных цветов, то по принципу Дирихле в этом столбике найдутся две одинаково окрашенные клетки. Тогда в другом из двух вертикальных столбиков, о которых говорилось выше, две соответствующие клетки, т. е. находящиеся на тех же горизонталях, окрашены в тот же цвет.

405. Не может.

Раскрасим данный куб так, как показано на рисунке 59. Тогда черных кубиков 14, а белых — 13; центральный кубик будет белым.

Если мышка съест 26 кубиков, то 13 из них — черные и 13 — белые. Но центральный кубик является белым, а все белые кубики мышка уже съела. Значит, среди 26 съеденных мышкой кубиков обязательно окажется центральный.

410. 1) При $n = 1$ наше утверждение справедливо: одноэлементное множество имеет всего два подмножества — пустое множество и само это множество.

2) Допустим, что утверждение выполняется при некотором $n = k$: любое множество, содержащее k элементов, имеет всего 2^k подмножеств. Докажем, что тогда оно выполняется и при $n = k+1$.

Возьмем любое множество $A = \{a_1; a_2;...; a_k; a_{k+1}\}$, содержащее $k+1$ элементов. Оно получается из множества $B = \{a_1; a_2;...; a_k\}$, содержащего k элементов, с помощью добавления одного элемента a_{k+1}.

Любое подмножество множества A или не содержит элемента a_{k+1}, или содержит его. В первом случае оно является и подмножеством множества B, а значит, число таких подмножеств множества A по предположению индукции равно 2^k. Во втором случае после отбрасывания элемента a_{k+1} снова получаем подмножество множества B, а тогда число подмножеств множества A этого вида равно числу подмножеств множества B, т. е. также 2^k. Следовательно, общее число подмножеств множества A равно

$$2^k+2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$$

Отсюда на основании принципа математической индукции и вытекает, что утверждение задачи выполняется при любом натуральном n.

412. Обозначим количество участников турнира через n.

1) При $n = 2$ наше утверждение выполняется.

2) Предположим, что оно выполняется при $n = k$, т. е. для любых k участников a_1, a_2,..., a_k. Возьмем теперь еще одного участника a_{k+1}.

Если он не проиграл всем остальным k участникам турнира, то поставим его в начало этой последовательности, а если не выиграл ни у кого из остальных, то в конец.

Пусть теперь найдутся два участника a_i и a_{i+1}, у первого из которых (и у всех предыдущих) шахматист a_{k+1} не выиграл, а второму (и всем последующим) не проиграл. Тогда вставим участника a_{k+1} в последовательность между a_i и a_{i+1}.

Мы получили, что если утверждение справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k+1$. Тогда на основании принципа математической индукции оно выполняется при всех натуральных $n \geq 2$.

413. Обозначим количество автомашин на кольцевой дороге через n.

1) При $n = 1$ наше утверждение, очевидно, справедливо.

2) Допустим, что оно справедливо при числе машин $n = k$. Докажем, что в этом случае оно справедливо и при $n = k+1$.

Среди $k+1$ машин имеется по меньшей мере одна такая машина A, которая может на своем бензине доехать до следующей машины B, так как в противном случае общего количества бензина у всех машин не хватило бы для того, чтобы одна машина проехала на этом бензине по всей кольцевой дороге. Выльем из машины B весь бензин в машину A и уберем машину B с дороги. Тогда число машин на дороге станет равным k, и можно воспользоваться предположением индукции.

414. Назовем отрезки, концы которых имеют различные номера, белыми, а отрезки, концы которых имеют одинаковые номера, — черными. Нужно доказать, что количество белых отрезков нечетно.

1) При $n = 1$ наше утверждение выполняется: из двух отрезков AM_1 и M_1B один белый, другой — черный.

2) Предположим, что при $n = k$ число белых отрезков нечетно. Докажем, что тогда и при $n = k+1$ оно будет нечетным.

Отбросим точку M_{k+1}. Тогда по допущению индукции число белых отрезков среди имеющихся нечетно.

Если точка M_{k+1} находилась до отбрасывания на белом отрезке M_lM_p, то из двух отрезков M_lM_{k+1} и $M_{k+1}M_p$ ровно один белый, поэтому число белых отрезков при переходе от $n = k$ к $n = k+1$ не изменится.

Пусть точка M_{k+1} лежала на черном отрезке M_lM_p. Если точке M_{k+1} поставлено в соответствие то же из чисел 1 и 2, что и точкам M_l и M_p, то число белых отрезков не изменится. Если же каждой из точек M_l и M_p соответствует одно из чисел 1 и 2, а точке M_{k+1} — другое, то оба отрезка M_lM_{k+1} и $M_{k+1}M_p$ — белые, откуда общее число белых отрезков увеличится на 2. Но при $n = k$ оно по предположению индукции было нечетным, следовательно, и при $n = k+1$ останется нечетным.

416. –2, 2, 3, 5, 9. **417.** 2, 5, 7, 8 или 3, 4, 6, 9.

418. $\frac{a-1}{2}$, $\frac{a+1}{2}$, $\frac{a+3}{2}$, $\frac{a+7}{2}$ или $\frac{a-2}{2}$, $\frac{a+2}{2}$, $\frac{a+4}{2}$, $\frac{a+6}{2}$, где $a \in Z$.

419. Не существуют.

421. Нужно раскрыть все три звена одного обрывка и соединить ими четыре оставшихся обрывка в одну цепь.

422. В. **423.** Б.

424. Соня — 3 января, Надя — 7 февраля, Валя — 7 июня, Оля —7 июля, Маша — 13 апреля, Тамара — 27 марта, Таня — 16 августа, Лиза — 13 октября, Лена — 27 мая, Галя — 13 ноября, Катя — 17 сентября, Нина — 25 декабря.

425. А — 4 и 7, Б — 1 и 3, В — 2 и 5, Г— 6 и 10, Д — 8 и 9.

426. Можно.

428. Нужно заткнуть флакон пробкой и перевернуть. Если духи окажутся на том же уровне, что и до переворачивания, то они занимают ровно половину флакона. Если они будут на более низком уровне, чем раньше, то занимают меньше половины, а если на более высоком, то больше половины флакона.

430. 390 яблок.

Задачу лучше всего решать с конца.

По условию $\frac{1}{3}$ последнего остатка и 32 яблока равны этому остатку. Тогда $\frac{2}{3}$ последнего остатка равны 32, откуда сам остаток равен $32\cdot\frac{3}{2} = 48$.

Далее, если от предыдущего остатка отнять его $\frac{1}{3}$ и 32 яблока, то останется 48 яблок. Значит, $\frac{2}{3}$ этого остатка равны $48+32 = 80$, а сам остаток — 120.

Если от первого остатка отнять его $\frac{1}{3}$ и 32 яблока, то останется 120 яблок. Тогда $\frac{2}{3}$ этого остатка равны 152, а сам остаток — 228.

Наконец, если от искомого количества яблок отнять $\frac{1}{3}$ и 32 яблока, то останется 228 яблок. Следовательно, $\frac{2}{3}$ этого количества равны 260, а само количество — 390.

431. 127 гусей.

Обозначим число гусей в стае через a. Добавим к стае еще одного гуся. Тогда на первом озере садится

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=\frac{a+1}{2}$$

гусей. Получилось, что после первого озера число гусей, первоначально равное $a+1$, уменьшилось вдвое. Аналогично, и после каждого следующего озера оно уменьшается вдвое. Следовательно, после седьмого озера количество гусей уменьшится в сравнении с начальным количеством в $2^7 = 128$ раз. С другой стороны, оно равно одному гусю, которого мы добавили. Получаем:

$$a+1 = 128,\ a = 127.$$

432. 2 очка. **433.** Пятое.

435. Иван-царевич должен назвать числа $a = 100$, $b = 10$, $c = 1$.

436. 88. **437.** а) Нельзя; б) можно. **438.** 5.

440. Возьмем любых двух мальчиков из пяти. Каждый из них имеет среди трех остальных двух братьев, а значит, они имеют общего брата. Следовательно, сами они — братья.

441. Рассмотрим два случая.

1) Пусть блоха и кузнечик находятся на одной горизонтали или одной вертикали. Если между ними на этой горизонтали или вертикали все клетки одного цвета, то одному из них достаточно сделать один прыжок, чтобы оказаться рядом. Если же между ними имеются две соседние клетки разного цвета, то блоха и кузнечик окажутся рядом, сделав по одному прыжку.

В этом случае для достижения цели достаточно двух прыжков.

2) Пусть они находятся на разных горизонталях и на разных вертикалях. Тогда один из них одним прыжком может оказаться в клетке, находящейся на пересечении горизонтали одного и вертикали другого. После этого достаточно двух прыжков на основании п. 1.

442. Нельзя.

По меньшей мере один из четырех классов представлен не более чем двумя участниками, иначе всего победителей было бы не меньше $4 \cdot 3 = 12$. Этот класс и не войдет в некоторую пятерку сидящих подряд школьников.

445. Может.

Он может вместе с компьютером построить такую последовательность:

$$123,\ 225,\ 327,\ 429,\ 531,\ 135,\ 237,\ \dot{327},\ 429$$

и т. д.

447. Неверно. **448.** Не всегда.

450. Можно.

Нужно сначала взять тома № 6 и № 10 и поставить их на последние места (после пятого тома), затем тома № 4 и № 7 вставить между томами № 3 и № 8, наконец, тома № 5 и № 6 вставить между томами № 4 и № 7.

451. 242.

Пусть первоначально было x студентов. Добавим к ним еще одного преподавателя; всего станет $x+1$ человек.

После первого захода зачет по условию сдали

$$\frac{x}{3}+\frac{1}{3}=\frac{x+1}{3}$$

человек, т. е. $\frac{1}{3}$ от $x+1$, а $\frac{2}{3}$ остались.

После второго захода остались

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2(x+1)}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot(x+1)$$

человек и т. д. После пятого захода остались $\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot(x+1)$ человек. Последнее число должно быть натуральным. Положим

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot(x+1)=k,\ 32(x+1)=243k,$$

где $k\in N$. Отсюда минимальное значение k равно 32, минимальное значение $x+1$ — 243, а x — 242.

453. Первый из золотоискателей должен разделить добычу на три части, по его мнению, равные, а два других — выбирать по одной части из этих трех. Рассмотрим два случая.

1) Если эти два золотоискателя выбирают разные доли, то все в порядке.

2) Сложнее обстоит дело, если они выбирают одну и ту же долю. В этом случае они должны ее разделить между собой: скажем, второй делит ее на две части, по его мнению, равные, а третий — выбрать одну из этих частей. Затем второй и третий из золотоискателей должны указать на ту из двух оставшихся частей, которая кажется им большей. Если при этом они укажут на две разные части, то каждый из них делит выбранную им часть с первым золотоискателем тем же способом. Если же они укажут на одну и ту же часть, то делят ее между собой, а оставшуюся часть оставляют первому.

455. Будем грузить глыбы, не выбирая, на первую платформу до тех пор, пока их общая масса не превысит 58 тонн. Последнюю глыбу снимем с платформы и положим рядом. Аналогично будем грузить глыбы на 2-ю, 3-ю,..., 14-ю платформы. Общая масса глыб, положенных на эти 14 платформ и рядом с ними, более $58\cdot 14=812$ тонн.

Оставшиеся глыбы весят меньше $870-812=58$ тонн, и их можно целиком погрузить на 15-ю платформу. На последние две платформы можно погрузить все оставшиеся глыбы: их общая масса меньше $8\cdot 14=112$ тонн, так что на каждую придется менее $8\cdot 7=56$ тонн.

456. а) Можно, например, если расставить числа в порядке

$$1, 5, 7, 2, 4, 6, 3, 8;$$

б) нельзя.

Если расставить в последовательных вершинах восьмиугольника числа $a_1, a_2, \dots, a_8$, то получаем:

$$a_1+a_2+a_3 \geq 14,$$
$$a_2+a_3+a_4 \geq 14,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_8+a_1+a_2 \geq 14.$$

Сложим все эти неравенства почленно: $3S \geq 14 \cdot 8$, где S — сумма всех натуральных чисел от 1 до 8. Отсюда $S \geq \frac{112}{3}$, что больше 37. Но в действительности

$$S = 1+2+\dots+8 = 36.$$

458. Возьмем любых трех делегатов. Из них двое могут говорить друг с другом без помощи переводчика. Поселим их в одном номере гостиницы. Рассмотрим любую новую тройку делегатов и двух из них, которые могут разговаривать между собой, также поселим в одном номере и т. д. Таким способом можно расселить 496 делегатов из 500 (но не 498, так как двое оставшихся могут не разговаривать между собой).

Остается четверка делегатов A, B, C, K. Из них можно образовать четыре тройки:

(A, B, C), (A, B, K), (A, C, K), (B, C, K).

Допустим, что любые два из трех делегатов A, B, C могут непосредственно разговаривать между собой, а каждый из них с K — через переводчика. Но тогда один из них, например A, выполняя роль переводчика для K, может с ним разговаривать. Тогда можно поселить в одном номере A и K, в другом — B и C.

Допустим, что A и B могут непосредственно разговаривать между собой, а A с C, A с K, B с C, B с K — через переводчика. Если в разговоре A с K переводчиком является B, а в разговоре B с C — K, то в одном номере поселим A и B, в другом — C и K. Если же и в разговоре A с K, и в разговоре A с C переводчиком является B, то в тройке A, C, K, где, учитывая предыдущее, C и K могут говорить между собой без переводчика, поместим делегатов так же, как в предыдущем случае — A с B, C с K.

459. 130.

Обозначим через x число ящиков, заполненных в первый раз, а через y — число ящиков, заполненных во второй раз. По условию $x+y = 12$. Тогда общее число ящиков равно

$$10+10x+10y = 10(1+x+y) = 10 \cdot 13 = 130.$$

460. 26.

Выберем пять студентов, по одному с каждого курса. Так как все они придумали разное количество задач, то общее число задач, придуманных ими, не менее

$$1+2+3+4+5 = 15.$$

На долю оставшихся 25 студентов остается не более $40-15 = 25$ задач. Но менее 25 задач они придумать не могли, поэтому каждый из них придумал ровно по одной задаче.

461. 3, 3, 0, 3, 3, 0,..., 3, 3, 0.

Обозначим наибольшее из 30 чисел через a. Так как $a = |b-c|$, где b и c — неотрицательные числа, непосредственно следующие за a, причем $a \ge b$, $a \ge c$, то могут быть только две возможности: $b = a$, $c = 0$ или $b = 0$, $c = a$.

В первом случае получаем последовательность (начиная с a)

$$a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\dots,\ a,\ a,\ 0,$$

во втором — последовательность

$$a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\ a,\ a,\ 0,\dots,\ a,\ a,\ 0,\ a,$$

по существу совпадающую с первой. Так как в каждой из них число a встречается 20 раз, а число 0 — 10 раз, то

$$20a+10\cdot 0 = 60,\quad a = 3.$$

462. Посмотрим, что происходит после одной такой операции с суммой квадратов двух соответствующих чисел набора:

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(b-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)>a^2+b^2.$$

Следовательно, сумма квадратов всех чисел набора после каждой операции увеличивается. Но если бы можно было на каком-то шаге получить исходный набор чисел, то и сумма квадратов всех чисел набора не изменилась бы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 7 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1993. — 239 с. (Раздел "Задачи повышенной трудности".)
2. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1991. — 238 с. (Раздел "Задачи повышенной трудности".)
3. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. — 2-е изд. — М.: Просвещение, 1992. — 270 с. (Раздел "Задачи повышенной трудности".)
4. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. — М.: Наука, 1975. — 111 с.
5. Байиф Ж.-К. Логические задачи: Пер. с фр. / Под ред. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1983. — 172 с.
6. Балк М. Б., Балк Г. Д. Математика после уроков: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1971. — 482 с.
7. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1976. — 94 с.
8. Березина Л. Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1979. — 143 с.
9. Берродо М. Занимательные задачи: Пер. с фр. / Под ред. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1983. — 229 с.
10. Бизам Д., Герцег Я. Игра и логика: 85 логических задач: Пер. с венг. — М.: Мир, 1975. — 358 с.
11. Бизам Д., Герцег Я. Многоцветная логика: 175 логических задач: Пер. с венг. — М.: Мир, 1978. — 435 с.
12. Болл У., Коксетер Г. Математические игры и развлечения: Пер. с англ. / Под ред. И. М. Яглома. — М.: Мир, 1986. — 470 с.
13. Василевский А. Б. Обучение решению задач: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. — Минск: Вышейшая школа, 1979. — 191 с.
14. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988. — 284 с. (Б-ка математического кружка. — Вып. 18.)
15. Виленкин Н. Я. Популярная комбинаторика. — М.: Наука, 1975. — 208 с.
16. Внеклассная работа по математике в 4-5 классах: Пособие для учителей / А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд, В. Д. Головина и др.; Под ред. С. И. Шварцбурда. — М.: Просвещение, 1974. — 191 с.
17. Всероссийские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся / Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. — М.: Просвещение, 1992. — 384 с.

18. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады: Книга для учащихся / Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1986. — 301 с.
19. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения: Пер. с англ. / Под ред. Я. А. Смородинского. — М.: Мир, 1971. —510. с.
20. Гарднер М. Есть идея!: Пер. с англ. — М.: Мир, 1982. — 305 с.
21. Гарднер М. А ну-ка, догадайся!: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984, — 213 с.
22. Гарднер М. Математические чудеса и тайны: Математические фокусы и головоломки: Пер. с англ. / Под ред. Г. Е. Шилова. — 5-е изд. — М.: Мир, 1986. — 126 с.
23. Гельфанд С. И., Гервер М. Л., Кириллов А. А., Константинов Н. Н., Кушниренко А. Г. Задачи по элементарной математике: Последовательности. Комбинаторика. Пределы. — М.: Наука, 1965. — 76 с. (Б-ка физико-математической школы. — Вып. 3.)
24. Грицаенко Н. П. Ну-ка, реши!: Для среднего школьного возраста. — Киев: Радянська школа, 1991. — 78 с.
25. Гусев В. А., Орлов А. И., Розенталь А. Л. Внеклассная работа по математике в 6-8 классах: Книга для учителя / Под ред. С. И. Шварцбурда. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1984. — 286 с.
26. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения. — М.: Физматгиз, 1961. — 267 с.
27. Дополнительные главы по курсу математики 9 класса для факультативных занятий: Пособие для учащихся. / Сост. П. В. Стратилатов. — М.: Просвещение, 1970. — 143 с.
28. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. — М.: Наука, 1970. — 95 с. (Б-ка физико-математической школы. — Вып. 3.)
29. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Толпыго А. К. Математические задачи. — 3-е изд., перераб. — М.: Наука, 1971. — 79 с. (Б-ка физико-математической школы. — Вып. 1.)
30. Дышинский Е. А. Игротека математического кружка: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1972. — 144 с.
31. Дьюдени Г. Пятьсот двадцать головоломок: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 343 с.
32. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1986. — 175 с.
33. Зарубежные математические олимпиады / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; Под ред. И. Н. Сергеева. — М.: Наука, 1987. — 414 с.
34. Зубелевич Г. И. Сборник задач Московских математических олимпиад (с решениями): Пособие для учителей 5-8 классов / Под ред. К. П. Сикорского. — 2-е изд., перераб. — М.: Просвещение, 1971. — 304 с.
35. Игнатьев Е. И. В царстве смекалки / Под ред. М. К. Потапова. — 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — 191 с.
36. Клименченко Д. В. Задачи по математике для любознательных: Книга для учащихся 5-6 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1992. — 192 с.
37. Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах (VIII-X). — 2-е изд., доп. — М.: Учпедгиз, 1963. — 436 с.
38. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. — 9-е изд. — М.: Наука, 1991. — 574 с.
39. Кордемский Б. А. Увлечь школьников математикой: Материал для классных и внеклассных занятий. — М.: Просвещение, 1981. — 112 с.
40. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе математики 4-5 классов: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1986. — 94 с.
41. Кострикина Н. П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1991. — 237 с.
42. Леман И. Увлекательная математика: Пер. с нем. — М.: Знание, 1985. — 270 с.
43. Летчиков А. В. Принцип Дирихле (Задачи с указаниями и решениями): Учебное пособие. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1992. — 108 с.

44. Лоповок Л. М. Математика на досуге: Книга для учащихся среднего школьного возраста. — М.: Просвещение, 1981. — 159 с.
45. Лэнгдон Н., Снейп Ч. С математикой в путь: Для младшего и среднего школьного возраста: Пер. с англ. — М.: Педагогика, 1987. — 47 с.
46. Мадер В. В. Математический детектив: Книга для учащихся. — М.: Просвещение, 1992. — 96 с.
47. Мазаник А. А. Реши сам: Пособие для учащихся. — 2-е изд., перераб. — Минск: Народная асвета, 1980. — 239 с.
48. Мерзляков А. С. Принцип Дирихле: Факультативный курс. — Ижевск: Научно-производственный центр "Бизнес старт", 1992. — 87 с.
49. Мочалов Л. П. Головоломки / Под ред. А. П. Савина. — М.: Наука, 1980. — 126 с. (Б-ка "Квант". — Вып. 6.)
50. Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка: Пособие для учащихся 4-8 классов средней школы. — 5-е изд. — М.: Просвещение, 1988. — 159 с.
51. Нурк Э. Р., Тельгмаа А. Э. Математика: Учебник для 5 класса средней школы. — 3-е изд. — М.: Просвещение, 1992. — 303 с. (Раздел "Для любителей математики".)
52. Оре О. Графы и их применение: Для школьников: Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — 174 с.
53. Перельман Я. И. Живая математика: Математические рассказы и головоломки / Под ред. В. Г. Болтянского. — 11-е изд. — М.: Наука, 1978. — 174 с.
54. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. — М.: Просвещение, 1982. — 96 с.
55. Петраков И. С. Математические кружки в 8-10 классах: Книга для учителя. — М.: Просвещение, 1987. — 223 с.
56. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии (в двух частях). — М.: Наука, 1986. — Ч. 1. — 270 с.; Ч. 2. — 287 с.
57. Рупасов К. А. Сто логических задач: Пособие для учителей. — Тамбов: 1963.
58. Сборник задач республиканских математических олимпиад. В. И. Михайловский, М. И. Ядренко, Г. Й. Призва, В. А. Вышенский. — Киев: Вища школа, 1979. — 318 с.
59. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташов, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. — Киев: Вища школа, 1984. — 239 с.
60. Смаллиан Р. Как же называется эта книга?: Пер. с англ. — М.: Мир, 1981. — 240 с.
61. Смышляев В. К. Практикум по решению задач школьной математики: Учебное пособие для студентов-заочников V курса физико-математических факультетов педагогических институтов. — М.: Просвещение, 1978. — 95 с.
62. Тригг Ч. Задачи с изюминкой: Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 302 с.
63. Фомин Д. В. Задачи ленинградских математических олимпиад: Методическое пособие. — Л.: 1990. — 80 с.
64. Хамзин Х. Х. Материалы для школьных математических олимпиад. — Уфа: 1962. — 83 с.
65. Шарыгин И. Ф. Математический винегрет. — М.: Изд-во Агентства "Орион", 1991. — 64 с.
66. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. — 5-е изд., перераб. — М.: Наука, 1976. — 384 с. (Б-ка математического кружка. — Вып. 1.)

67. Журнал "Квант", 1970-1993. (Разделы "Задачник "Кванта", "Квант" для младших школьников", "Математический кружок".)
68. Журнал "Математика в школе", 1934-1993. (Раздел "Задачи".)

69. Бартенев Ф., Савин А. Метод перебора // Квант, — 1982. — № 2. — С. 36-38.

70. Блехер П. О людях правдивых, лгунах и обманщиках // Квант, — 1980. — № 11. — С. 8-11.
71. Болтянский В. Шесть зайцев в пяти клетках // Квант. — 1977. — № 2. — С. 17-20, 37, 42.
72. Гейн А. Г. Перед школьной олимпиадой // Квант. — 1983. — № 10. — С. 28-30.
73. Демидов А. И. Метод перебора // Математика в школе. — 1993. — № 1. — С. 32-34.
74. Ионин Ю., Курляндчик Л. Поиск инварианта // Квант. — 1976. — № 2. — С. 32-35.
75. Коксетер Г. С. М., Грейтцер С. Л. Задача о трех кувшинах // Квант. — 1978. — № 7. — С. 29-32.
76. Львовский С. М., Тоом А. Л. Разберем все варианты. // Квант. — 1988. — № 1. — С. 42-47.
77. Магомедбеков П. К., Челябов И. И. Решения задач с помощью принципа Дирихле // Математика в школе. — 1977. — № 3. — С. 73-74.
78. Нагибин Ф. Ф. Применение графов для решения логических задач // Математика в школе. — 1963. — № 3. — С. 69-71.
79. Орлов А. И. Принцип Дирихле // Квант. — 1971. — № 7. — С. 17-21.
80. Орлов А. И. Поиск предмета // Квант. — 1976. — № 7. — С. 55-57.
81. Розенталь А. Правило крайнего // Квант. — 1988. — № 9. — С. 52-57.
82. Савин А. Камушки и шахматная доска // Квант. — 1990. — № 1. — С. 50-53.
83. Савин А., Семенов Е. Сеанс парапсихологии // Квант. — 1992. — № 10. — С. 37-39.
84. Толпыго А. Инварианты // Квант. — 1976. — № 12. — С. 19-25.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Галкин Евгений Васильевич
Нестандартные задачи по математике

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. Б. Грызлова*
Младший редактор *Л. И. Заседателева*
Художники *О. П. Богомолова*, *Э. Н. Григорян*
Художественный редактор *Е. Р. Дашук*
Компьютерная верстка *Е. В. Чичилов*
Корректор *Т. А. Казанская*

ИБ № 16559

Лицензия ЛР № 010001 от 10.10.91.
Сдано в набор 3.04.96. Подписано в печать 30.07.96 г.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Усл. печ. л. 10.
Зак. 3013. Тираж 40 000 экз. 1й з-д (1—20 000) экз.
Ордена Трудового Красного знамени издательство “Просвещение”
Комитета Российской Федерации по печати.
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

“Учебная литература”, 117571, Москва, проспект Вернадского, 88,
Московский педагогический государственный университет,
тел. 437-11-11.

Отпечатано в ГУИПП «Курск».
305007, г. Курск, ул. Энгельса, 109

НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ