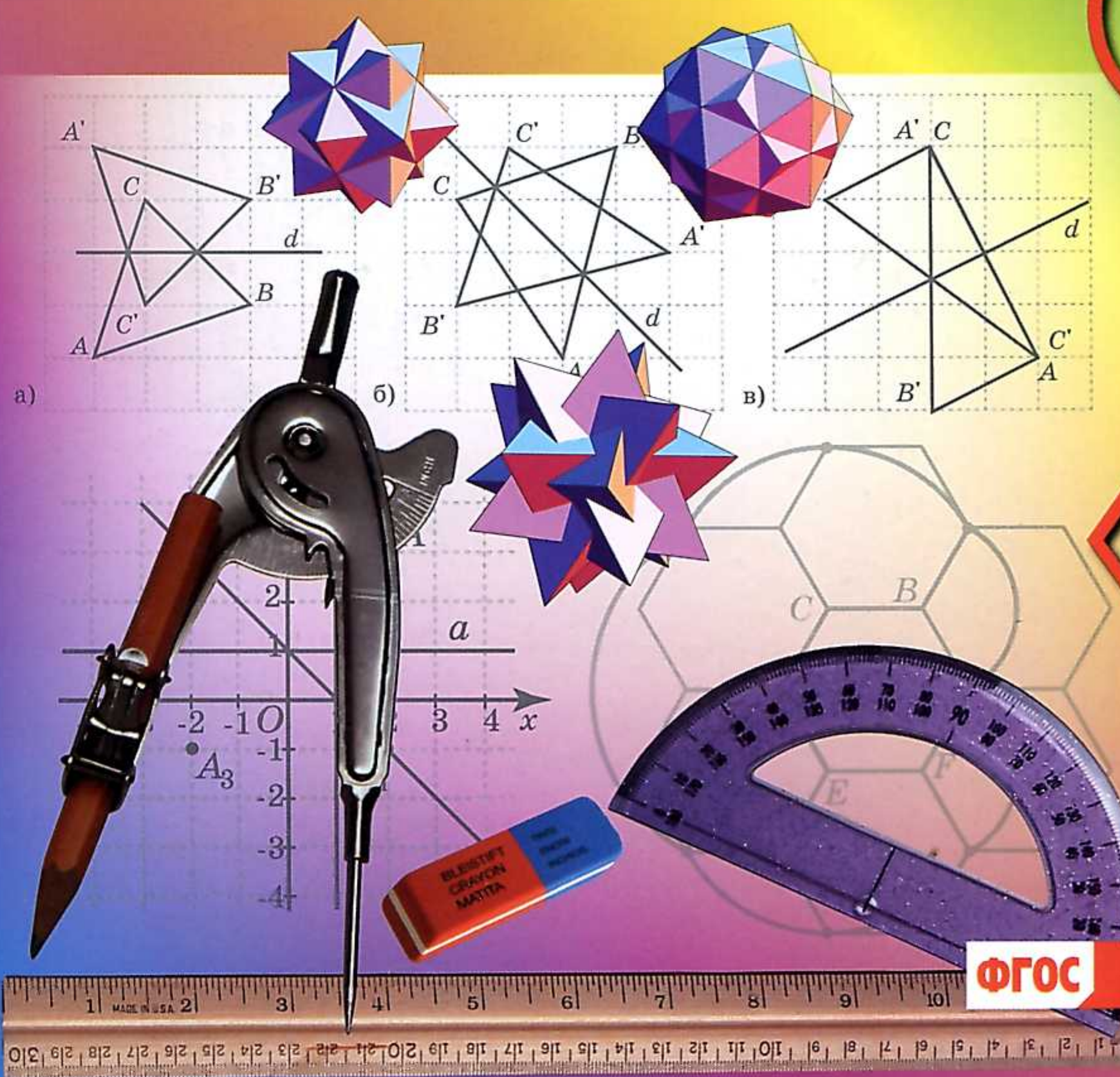
НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В. А. СМИРНОВ, И. М. СМИРНОВА, И. В. ЯЩЕНКО



ФГОС

В. А. СМИРНОВ,
И. М. СМИРНОВА,
И. В. ЯЩЕНКО

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту

Москва

Издательство МЦНМО

2013

УДК 514.11
ББК 22.151.0
С50

Смирнов В. А., Смирнова И. М., Ященко И. В.
С50 Наглядная геометрия. — М.: МЦНМО, 2013. — 272 с.
ISBN 978-5-4439-0095-7

Пособие «Наглядная геометрия» предназначено для учащихся средней школы. Оно позволяет начать изучение геометрии в 5—6 классах, ликвидировать пробелы в знаниях по геометрии в 7—8 классах, а в старших — подготовиться к ГИА и ЕГЭ.

Задачи, включенные в пособие, носят исследовательский характер и не требуют знания специальных формул и теорем. Они имеют различный уровень трудности, от простых до олимпиадных, и направлены на выявление математических способностей, развитие геометрических представлений и конструктивных умений учащихся.

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту.

ББК 22.151.0

Владимир Алексеевич Смирнов
Ирина Михайловна Смирнова
Иван Валериевич Ященко

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 19.03.2013 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 17. Тираж 3000. Заказ 2732.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-0095-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрия – один из самых увлекательных и важных разделов математики. Зачем же она нужна? Во-первых, именно она знакомит с разнообразием пространственных форм, формирует необходимые пространственные представления. Во-вторых, геометрия даёт метод научного познания, способствует развитию логического мышления. По выражению академика А. Д. Александрова, геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга.

Кроме этого, изучение геометрии способствует приобретению необходимых практических навыков в изображении, моделировании и конструировании пространственных фигур, в измерении основных геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов).

Наконец, геометрия и сама по себе очень интересна. Она имеет яркую историю, связанную с именами знаменитых учёных: Пифагора, Евклида, Архимеда, И. Кеплера, Р. Декарта, Л. Эйлера, Н. И. Лобачевского и др.

Она возникла и развивалась в связи с потребностями практической деятельности человека. С древних времён люди сталкивались с необходимостью находить расстояния между предметами, определять размеры участков земли, ориентироваться по расположению звёзд на небе и т. п.

Слово ***геометрия*** – греческое, оно означает «землемерие» (***гео*** – земля, ***метрео*** – измеряю).

О зарождении геометрии в Древнем Египте около 2000 лет до нашей эры древнегреческий учёный Геродот (V в. до н. э.) написал следующее: «Сеозоострис, египетский фараон, разделил землю, дав каждому египтянину участок по жребию, и взимал соответствующим образом налог с каждого участка. Случалось, что Нил заливал тот или иной участок, тогда пострадавший обращался к царю, а царь посылал землемеров, чтобы установить, на сколько уменьшился участок, и соответствующим образом уменьшить налог. Так возникла геометрия в Египте, а оттуда перешла в Грецию».

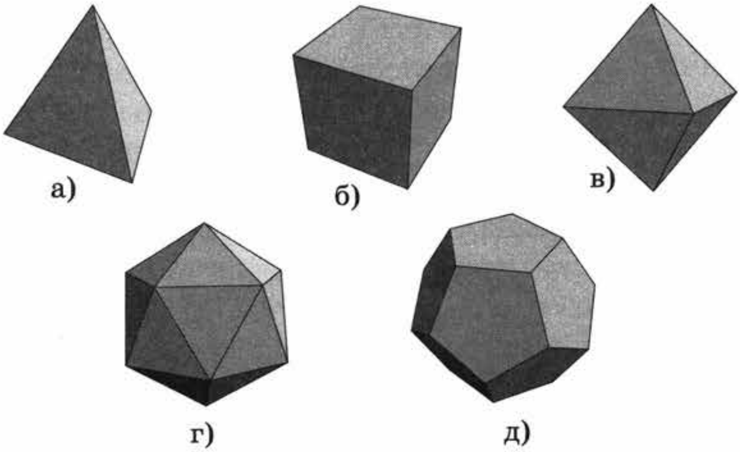
При строительстве различных сооружений необходимо было рассчитывать, сколько материала пойдёт на постройку, вычислять расстояния между точками в пространстве и углы между прямыми и плоскостями, знать свойства простейших геометрических фигур. Так, египетские пирамиды, сооружённые за две, три и четыре тысячи лет до нашей эры, поражают точностью своих метрических соотношений, свидетельствующих, что их строители уже знали многие геометрические положения и расчёты. Одна из самых известных и больших пирамид – пирамида Хеопса (XXVIII в. до н. э.). Её высота достигает 146,5 м, а основанием служит квадрат, сторона которого равна 233 м. Это сооружение, сотворённое человеком, считалось самым высоким на Земле вплоть до XIX века.

Развитие торговли и мореплавания требовало умений ориентироваться во времени и пространстве: знать сроки смены времён года, уметь определять своё местонахождение по карте, измерять расстояния и находить направления движения. Наблюдения за Солнцем, Луной, звёздами и изучение законов взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве позволило решить эти задачи и дать начало новой науке – астрономии.

Начиная с VII века до нашей эры, в Древней Греции создаются так называемые философские школы, в которых происходит постепенный переход от практической к теоретической геометрии. Всё большее значение в этих школах приобретают рассуждения, с помощью которых удавалось получать новые геометрические свойства, исходя из некоторого перечня свойств, принимаемых без доказательства и называемых аксиомами.

Одной из самых первых и самых известных школ была пифагорейская (VI–V вв. до н. э.), названная так в честь своего основателя Пифагора.

Объяснение устройства мира пифагорейцы тесно связывали с геометрией. Так, выделяя первоосновы бытия, они приписывали их атомам форму правильных многогранников, а именно: атомам огня – форму тетраэдра (рис. а), земли – гексаэдра (куба, рис. б), воздуха – октаэдра (рис. в), воды – икосаэдра (рис. г). Всей Вселенной приписывалась форма додекаэдра (рис. д). В названиях этих



многогранников указывается число граней (от греч. ***эдра*** – грань): ***тетра*** – четыре, ***гекса*** – шесть, ***окто*** – восемь, ***икоси*** – двадцать, ***додека*** – двенадцать.

Более поздняя философская школа – Александрийская – интересна тем, что дала миру знаменитого учёного Евклида, который жил примерно в 300 г. до нашей эры. В одном из своих сочинений математик Папп (III в. н. э.) изображает его как человека исключительно честного, тихого и скромного, которому были чужды гордость и эгоизм. Насколько серьёзно и строго он относился к изучению математики, можно судить по следующему известному рассказу. Царь Птолемей спросил у Евклида, нельзя ли найти более короткий и менее утомительный путь к изучению геометрии, чем его «Начала». Евклид на это ответил: «В геометрии нет царского пути».

Именно «Начала» создали славу Евклиду. В них впервые было представлено стройное аксиоматическое строение геометрии. На протяжении около двух тысячелетий этот труд остаётся основой изучения систематического курса геометрии.

В последние столетия возникли и развивались новые направления геометрии, среди которых: геометрия Лобачевского, топология, теория графов и др. Появились новые методы, в том числе координатный и векторный, позволяющие переводить геометрические задачи на язык алгебры и наоборот. Геометрия широко используется в других науках: физике, химии, биологии, экономике и др.

В этой книге вы познакомитесь с геометрическими фигурами и их названиями, научитесь их изображать и моделировать, узнаете о геометрических величинах и научитесь их находить. Всё это позволит развить ваши геометрические представления, выработать необходимые практические навыки и умения.

Настоящая книга предназначена для занятий в 5–6 классах, как на основных уроках, так и на кружковых занятиях по математике.

Кроме того, она может быть использована для развития ваших геометрических представлений в 7–9 и 10–11 классах, а также с целью подготовки к ГИА и ЕГЭ по математике.

Для работы с книгой нужно иметь тетрадь в клетку, в которой вы будете записывать решения задач, изображать геометрические фигуры, проводить необходимые построения.

В задачах, в формулировках которых участвует клетчатая бумага, мы будем предполагать, что стороны клеток равны 1.

Желаем успехов в изучении геометрии!

§ 1. Точки, прямые, плоскости

Представление о геометрических фигурах дают окружающие нас объекты. Однако, в отличие от реальных объектов, геометрические фигуры идеальны.

Точка является идеализацией очень маленьких объектов, т. е. таких, размерами которых можно пренебречь. Древнегреческий учёный Евклид, впервые давший научное изложение геометрии, в своей книге «Начала» определял точку как то, что не имеет частей.

Точки изображаются остро отточенным карандашом или ручкой на листе бумаги, мелом на доске и т. п. Чем острее карандаш, тем лучше это изображение. Однако изображение точки только приближённое, потому что точка, нарисованная карандашом, всегда имеет хоть и очень маленькие, но ненулевые размеры, а геометрическая точка размеров не имеет.

Точки обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, ..., A_1, B_2, C_3, ..., A', B'', C''', ... (рис. 1.1).

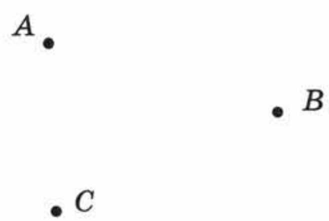


Рис. 1.1

Прямая является идеализацией тонкой натянутой нити, края стола прямоугольной формы. По прямой распространяется луч света.

Евклид определял прямую как длину без ширины.

Прямые проводятся на листе бумаги или доске с помощью линейки. Хотя изображения прямых ограничены, их следует представлять себе неограниченно продолженными в обе стороны.

Одним из основных свойств прямой является то, что через две точки проходит только одна прямая.

Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: $a, b, c, \ldots, a_1, b_2, c_3, \ldots, a', b'', c''', \ldots$, или двумя прописными латинскими буквами: $AB, CD, \ldots, A_1B_1, C_2D_2, \ldots, A'B', C''D'', \ldots$ (рис. 1.2).

Точка может принадлежать данной прямой, в этом случае говорят также, что прямая проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что прямая не проходит через точку (рис. 1.3).

Рис. 1.2

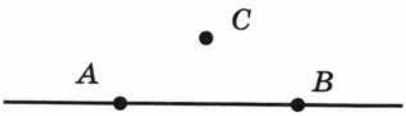


Рис. 1.3

Если две прямые имеют одну общую точку, то говорят, что прямые ***пересекаются*** в этой точке (рис. 1.4).

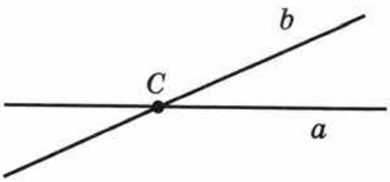


Рис. 1.4

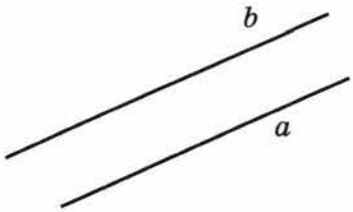


Рис. 1.5

Плоскость является идеализацией ровной поверхности воды, поверхности стола, доски, зеркала и т. п.

Точка может принадлежать данной плоскости, в этом случае говорят также, что плоскость проходит через точку, а может и не принадлежать ей, в этом случае говорят, что плоскость не проходит через точку.

Прямая может лежать в плоскости, иметь с плоскостью одну общую точку или не иметь с плоскостью ни одной общей точки.

Две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек, называются ***параллельными*** (рис. 1.5).

Вопросы

1. Идеализацией каких объектов является точка?

2. Как определял точку Евклид?

3. Как изображаются точки?

4. Как обозначаются точки?

5. Идеализацией каких объектов является прямая?

6. Как определял прямую Евклид?

7. Как изображаются прямые?

8. Как обозначаются прямые?

9. В чём заключается одно из основных свойств прямой?

10. Как могут располагаться относительно друг друга точка и прямая?

11. Какие две прямые называются пересекающимися?

12. Идеализацией каких объектов является плоскость?

13. Как могут располагаться относительно друг друга точка и плоскость?

14. Как могут располагаться относительно друг друга прямая и плоскость?

15. Какие две прямые называются параллельными?

Задачи

1. Сколько общих точек могут иметь две прямые?

2. Сколько прямых изображено на рисунке 1.6? Сколько у них точек попарных пересечений?

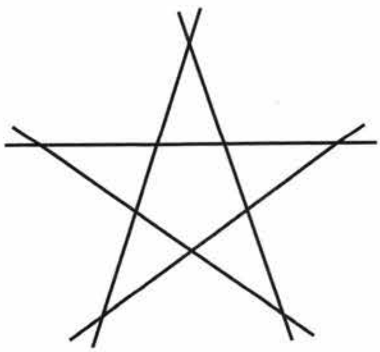


Рис. 1.6

3. Пусть точки A, B, C принадлежат одной прямой и точки B, C, D принадлежат одной прямой. Что можно сказать о всех точках A, B, C, D?

4. Пусть прямые a, b, c пересекаются в одной точке и прямые b, c, d пересекаются в одной точке. Что можно сказать о всех прямых a, b, c, d?

5. Изобразите прямую и точки, принадлежащие этой прямой и не принадлежащие ей.

6. Изобразите три точки, не принадлежащие одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из трёх данных точек. Сколько всего таких прямых?

7. Изобразите четыре точки, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из четырёх данных точек. Сколько всего таких прямых?

8. Изобразите пять точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из пяти данных точек. Сколько всего таких прямых?

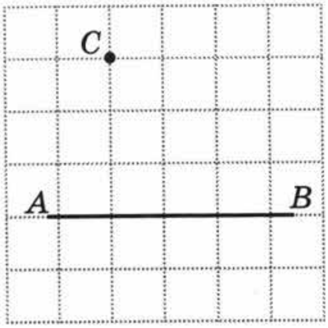
9. Изобразите шесть точек, никакие три из которых не принадлежат одной прямой. Проведите прямые, проходящие через различные пары из шести данных точек. Сколько всего таких прямых?

10. Сколько точек попарных пересечений могут иметь три прямые? Изобразите различные случаи.

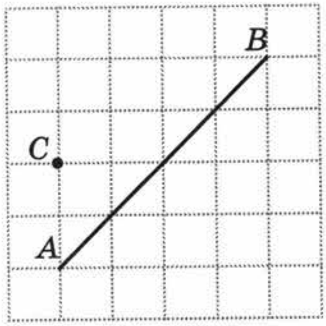
11. Изобразите четыре прямые так, чтобы у них было шесть точек попарных пересечений.

12. Изобразите пять прямых так, чтобы у них было десять точек попарных пересечений.

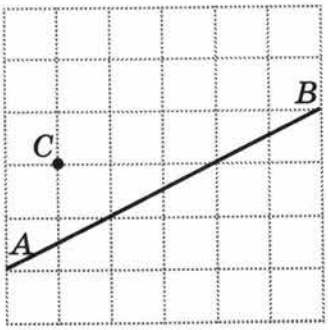
13. На клетчатой бумаге изобразите прямую AB и точку C, как показано на рисунке 1.7. Через точку C проведите прямую, параллельную прямой AB.



а)



б)



в)

Рис. 1.7

14. Укажите пары параллельных прямых, изображённых на рисунке 1.8.

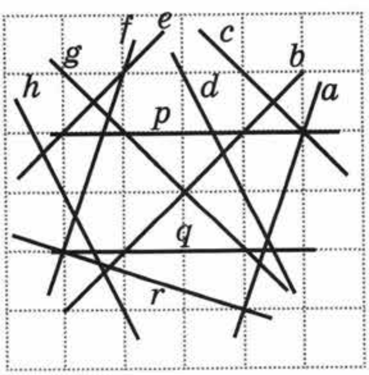


Рис. 1.8

§ 2. Лучи, отрезки

Лучом, или ***полупрямой,*** называется часть прямой, состоящая из данной точки и всех точек, лежащих от неё по одну сторону. При этом сама данная точка называется ***началом***, или ***вершиной луча***.

Для обозначения лучей используются пары прописных латинских букв, например AB, первая из которых обозначает начало луча, а вторая – какую-нибудь точку, принадлежащую лучу (рис. 2.1).

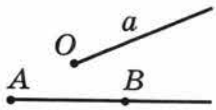


Рис. 2.1

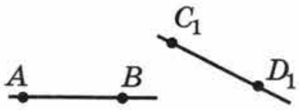


Рис. 2.2

Отрезком называется часть прямой, состоящая из двух данных точек и всех точек, лежащих между ними. При этом сами данные точки называются ***концами отрезка***.

На листе бумаги отрезки проводят с помощью линейки.

Отрезок обозначается указанием его концов, например AB, C_1D_1 (рис. 2.2) и т. д.

Одной из основных операций, которую можно производить с отрезками, является операция ***откладывания данного отрезка*** на данном луче от его вершины. Получающийся при этом отрезок называется ***равным*** исходному отрезку.

Откладывать отрезки можно с помощью линейки, циркуля и т. п.

Равенство отрезков AB и A_1B_1 записывается в виде $AB = A_1B_1$. Оно означает, что если один из этих отрезков, например AB, отложить на луче A_1B_1 от точки A_1, то отрезок AB при этом совместится с отрезком A_1B_1 (рис. 2.3, а).

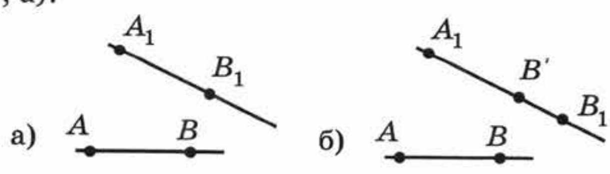


Рис. 2.3

Если при откладывании отрезка AB на луче A_1B_1 от точки A_1 точка B переходит в точку B', лежащую между точками A_1 и B_1, то говорят, что отрезок AB ***меньше*** отрезка A_1B_1 и обозначают $AB < A_1B_1$. Говорят также, что отрезок A_1B_1 ***больше*** отрезка AB и обозначают $A_1B_1 > AB$ (рис. 2.3, б).

Если на отрезке AB между точками A и B взять какую-либо точку C, то образуется два новых отрезка AC и CB. Отрезок AB называется ***суммой*** отрезков AC и CB и обозначается $AB = AC + CB$ (рис. 2.4). Каждый из отрезков AC и CB называется ***разностью*** отрезка AB и другого отрезка и обозначается так: $AC = AB - CB$, $CB = AB - AC$.

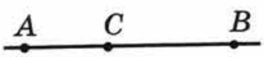


Рис. 2.4

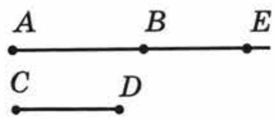


Рис. 2.5

Чтобы сложить два произвольных отрезка AB и CD, продолжим отрезок AB за точку B и на этом продолжении отложим отрезок BE, равный CD (рис. 2.5). Отрезок AE даст сумму отрезков AB и CD, $AE = AB + CD$.

Аналогичным образом поступают для вычитания из большего отрезка меньшего.

Точка, делящая отрезок на две равные части, называется его ***серединой***.

Вопросы

1. Какая фигура называется лучом?
2. Как обозначается луч?
3. Какая фигура называется отрезком?
4. Как обозначается отрезок?
5. Какие операции можно производить с отрезками?
6. Как обозначается равенство отрезков?

Задачи

1. На сколько частей делят прямую: а) одна точка; б) две точки; в) три точки; г)* n точек?

2. На клетчатой бумаге изобразите луч CE и отрезок AB, как показано на рисунке 2.6. От вершины C луча CE отложите отрезок CD, равный отрезку AB.

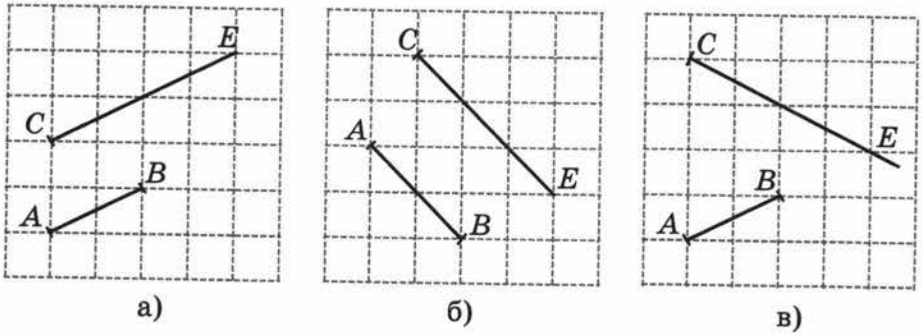


Рис. 2.6

3. Укажите равные отрезки, изображённые на рисунке 2.7.

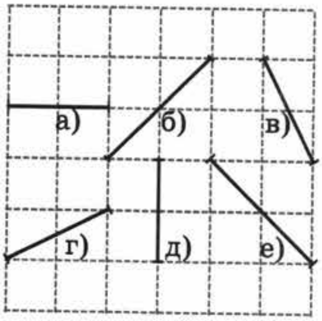


Рис. 2.7

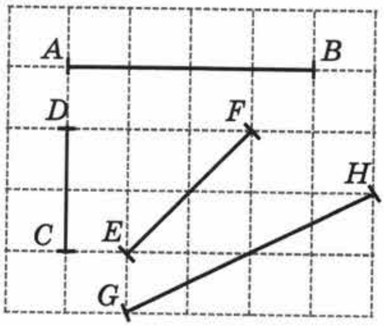


Рис. 2.8

4. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.8. Укажите середины отрезков AB, CD, EF, GH.

5. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.9. Укажите точки, делящие отрезки AB, CD, EF на три равные части.

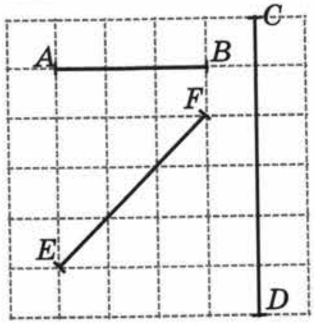


Рис. 2.9

6. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.10. Изобразите отрезок, равный сумме отрезков AB и CD.

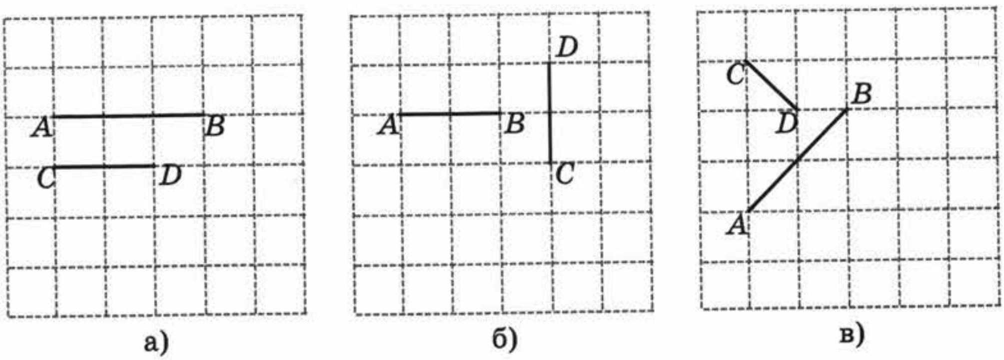


Рис. 2.10

7. На клетчатой бумаге изобразите отрезки, как показано на рисунке 2.11. Изобразите отрезок, равный разности отрезков AB и CD.

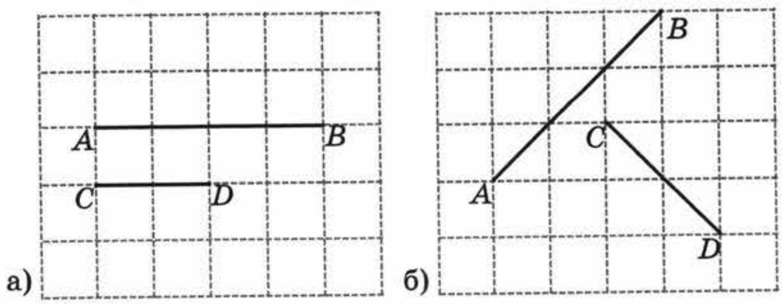


Рис. 2.11

8. Расположите номера в порядке возрастания соответствующих отрезков, изображённых на рисунке 2.12.

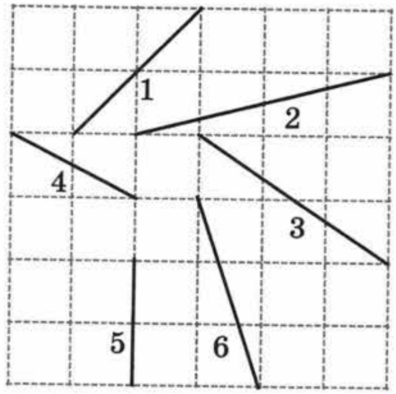


Рис. 2.12

9. Сравните отрезки *AB* и *CD*, изображённые на рисунках 2.13.

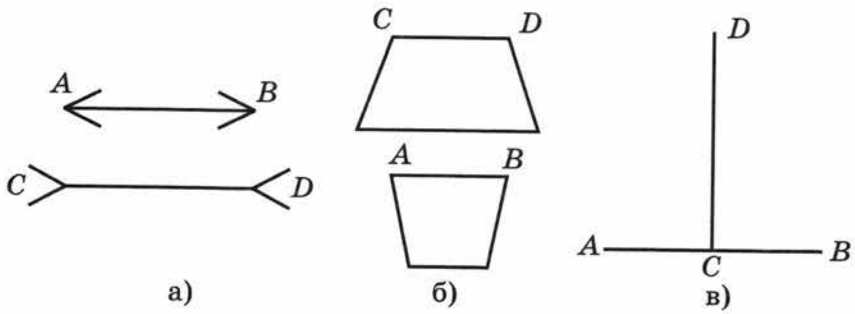


Рис. 2.13

§ 3. Измерение длин отрезков

Измерение длины отрезка основано на сравнении его с отрезком, длина которого принимается за единицу (единичный отрезок).

Длина отрезка – это положительное число, показывающее, сколько раз единичный отрезок и его части укладываются в данном отрезке.

Длину отрезка AB называют также ***расстоянием*** между точками A и B. Длину отрезка AB будем обозначать, как и сам отрезок, AB.

Для измерения длин отрезков применяют различные измерительные инструменты, простейшим из которых является линейка с делениями, обозначающими сантиметры и их десятые части – миллиметры (рис. 3.1).

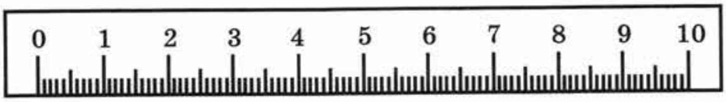


Рис. 3.1

На рисунке 3.2 длины отрезков AB, AC и AD равны соответственно 4 см, 5,2 см, 6,5 см.

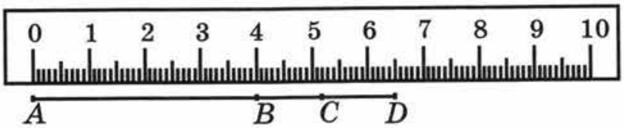


Рис. 3.2

Для измерения длины отрезка на местности обычно используют рулетку, а в качестве единичного отрезка принимается отрезок длиной 1 м (метр), равный 100 см. Для измерения больших расстояний в качестве единицы измерения берётся 1 км (километр), равный 1000 м.

Для длин отрезков выполняются следующие свойства.

Свойство 1. Длины равных отрезков равны.

Свойство 2. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

Исторические сведения

Метр, как единая единица измерения длин отрезков, появился относительно недавно, в конце XVIII века. До этого времени существовали различные меры длины, и все они страдали неточностью определения, что давало большие ошибки в вычислениях. По-видимому, одними из самых первых единиц измерения длины были единицы, связанные с размерами человеческого тела.

В одной старинной арабской рукописи VIII века нашей эры, посвящённой вопросам измерения длин, сказано, что за единицу измерения длины принимается локоть, равный ширине 8 кулаков, кулак – ширине 4 пальцев, палец – толщине 6 ячменных зёрен, а ячменное зерно – толщине 6 волос с ослиной морды. Современным учёным, решившим проверить вычисления арабов, пришлось заняться измерениями толщины волос с морды осла.

К концу XVIII века положение с измерениями длин стало совершенно нетерпимым. В каждой стране были свои единицы измерения. И все они были не совершеннее, чем толщина волоса с морды осла. От этого страдали астрономы, торговцы, мореплаватели, землемеры и др. Учёные не раз придумывали хорошие способы избавления от этой путаницы. Они представляли их на утверждение королям, короли благодарили учёных, одобряли проекты и – клали их под сукно.

В 1791 году Французская Академия предложила взять за основу системы мер одну сорокамиллионную часть парижского меридиана. Ей было дано название: метр. Для определения величины метра и изготовления эталона нужно было измерить длину парижского меридиана с большой степенью точности. Для этого были сформированы шесть комиссий.

Измерительными работами во Франции руководил Ж. Даламбер. В 1795 году на парижской конференции были подведены итоги этой работы и утверждён эталон единицы длины – метр. В результате был изготовлен эталон из платины, который хранится во французском государственном архиве.

Вопросы

1. Что называется длиной отрезка?
2. Как обозначается длина отрезка?
3. Как измеряется длина отрезка?
4. Какие свойства выполняются для длин отрезков?
5. Что называется расстоянием между двумя точками?
6. Когда появился метр?

Задачи

1. Точка C лежит на прямой между точками A и B. Найдите длину отрезка AB, если: а) $AC = 2{,}5$ см, $CB = 3{,}5$ см; б) $AC = 3{,}1$ дм, $CB = 4{,}6$ дм; в) $AC = 12{,}3$ м, $CB = 5{,}8$ м.

2. На прямой в одну сторону последовательно отложены отрезки $OE = 5$ см, $EF = 30$ мм, $FG = 1{,}5$ см, $GH = 11$ см. Найдите отрезки: а) OH; б) OF; в) EG; г) FH.

3. Точки A, B и C принадлежат одной прямой. Известно, что $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см. Какая из точек A, B, C лежит между двумя другими?

4. Точки A, B, C принадлежат одной прямой. Принадлежит ли точка B отрезку AC, если $AC = 3$ см, $BC = 5$ см?

5. Могут ли точки A, B, C принадлежать одной прямой, если длина большего отрезка AB меньше суммы длин отрезков AC и BC?

6. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся в ней пополам. Известно, что $AO = 2CO$. Сравните отрезки AB и CD.

7. На клетчатой бумаге изобразите отрезки AB, CD, EF, как показано на рисунке 3.3. С помощью линейки измерьте их длины.

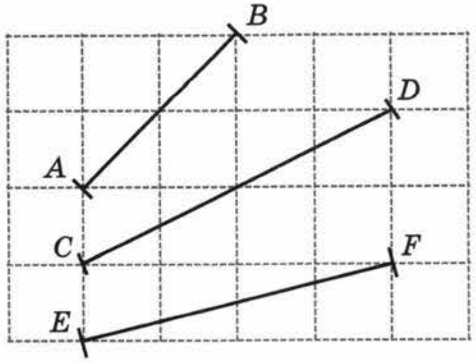


Рис. 3.3

8. Используя линейку, нарисуйте отрезки длиной: а) 6 см; б) 18 мм; в) 1,1 дм; г) 0,08 м.

9. На отрезке AB длиной 15 см отмечена точка C. Найдите длины отрезков AC и BC, если: а) отрезок AC на 3 см длиннее отрезка BC; б) отрезок AC в два раза длиннее отрезка BC; в) длины отрезков AC и BC относятся как 2:3.

10. На данной прямой от данной точки отложите на глаз отрезки, равные: а) 3 см; б) 7 см; в) 10 см. Проверьте точность построений линейкой.

11. На рисунке 3.4 $AB = CD$, $AC = 6$ см. Найдите длину отрезка BD.

Рис. 3.4

12. На прямой отмечены точки A, B, C, D, как показано на рисунке 3.4, причём $AC = BD$, $AC = 10$ см, $CD = 4$ см. Найдите длину отрезка BC.

13. На прямой последовательно отложены три отрезка: AB, BC и CD так, что $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $CD = 4$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD.

14. От точки A, взятой на некоторой прямой, отложены в одном направлении два отрезка AB и AC, причём $AB = 60$ мм, $AC = 100$ мм. Найдите: а) длину отрезка BC; б) расстояние от точки A до середины отрезка BC; в) расстояние между серединами отрезков AB и AC.

15. На прямой от одной точки в одном направлении отложены три отрезка, сумма которых равна 28 см; конец первого отрезка служит серединой второго, а конец второго – серединой третьего. Найдите длины этих отрезков.

§ 4. Полуплоскость и угол

Проведём на плоскости какую-нибудь прямую a. Она разобьёт плоскость на две части. На рисунке 4.1 точки A и B принадлежат одной из этих частей, отрезок AB не пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки A и B ***лежат по одну сторону*** от прямой a. Точки B и C принадлежат разным частям плоскости, отрезок BC пересекает прямую. В этом случае говорят также, что точки B и C ***лежат по разные стороны*** от прямой a.

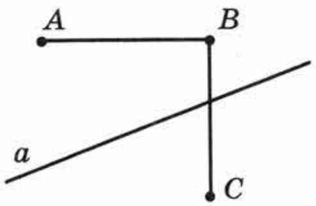


Рис. 4.1

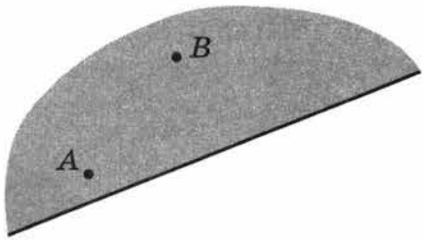


Рис. 4.2

Часть плоскости, состоящая из точек данной прямой и точек, лежащих по одну сторону от этой прямой, называется ***полуплоскостью*** (рис. 4.2).

Рассмотрим два луча с общей вершиной (рис. 4.3). Они разбивают плоскость на две части.

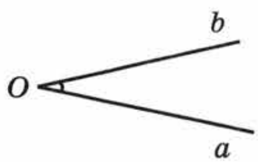


Рис. 4.3

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченных этими лучами, называется ***углом***. Общая вершина называется ***вершиной угла***, а сами лучи – ***сторонами угла***.

Угол обозначается или одной буквой, указывающей его вершину, или тремя буквами, средняя из которых указывает вершину угла, а крайние – какие-нибудь точки на сторонах угла, например $\angle A$, $\angle AOB$ и т. д. Иногда углы обозначаются цифрами, например $\angle 1$, $\angle 2$ и т. д.

Точки угла, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***. Лучи, исходящие из вершины данного угла и проходящие через внутренние точки угла, называются ***внутренними***.

На рисунке 4.4 изображён угол AOB. Точки C и D – его внутренние точки, лучи OC и OD – его внутренние лучи.

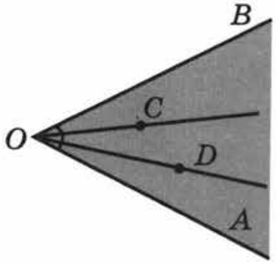


Рис. 4.4

Угол называется ***развёрнутым***, если его стороны вместе составляют прямую (рис. 4.5, а). В противном случае угол называется ***неразвёрнутым***.

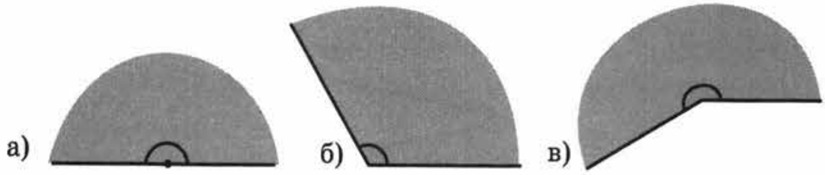


Рис. 4.5

Неразвёрнутый угол может быть меньше развёрнутого, т. е. являться частью развёрнутого угла (рис. 4.5, б), или быть больше развёрнутого, т. е. содержать развёрнутый угол (рис. 4.5, в).

Как правило, если не оговорено противное, мы будем рассматривать углы, меньшие развёрнутых.

Два угла называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую (рис. 4.6, а).

Два угла называются ***вертикальными***, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 4.6, б).

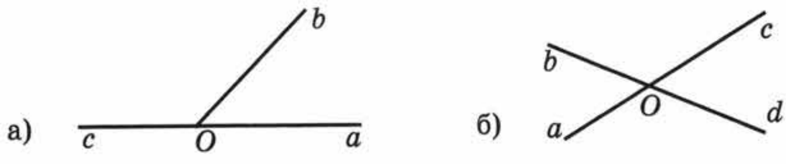


Рис. 4.6

Одной из основных операций, которую можно производить с углами, является операция ***откладывания данного угла*** в ту или другую сторону от данного луча (рис. 4.7). Получающийся при этом угол называется ***равным*** исходному углу.

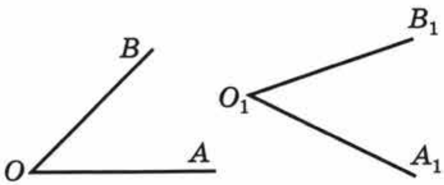


Рис. 4.7

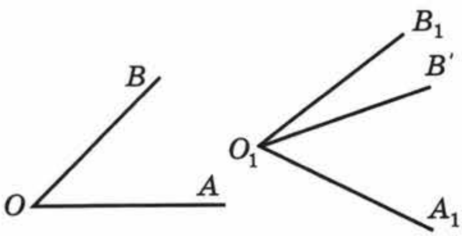


Рис. 4.8

Равенство углов AOB и $A_1O_1B_1$ записывается в виде $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Оно означает, что если один из этих углов, например AOB, отложить от луча O_1A_1 в сторону, определяемую лучом O_1B_1, то угол AOB при этом совместится с углом $A_1O_1B_1$.

Если при откладывании угла AOB от луча O_1A_1 луч OB переходит в луч O_1B', лежащий внутри угла $A_1O_1B_1$, то говорят, что угол AOB меньше угла $A_1O_1B_1$, и обозначают $\angle AOB < \angle A_1O_1B_1$ (рис. 4.8). Говорят также, что угол $A_1O_1B_1$ больше угла AOB и обозначают $\angle A_1O_1B_1 > \angle AOB$.

Если внутри угла AOB провести луч OC, то образуется два новых угла AOC и COB (рис. 4.9). Угол AOB называется ***суммой*** углов AOC и COB и обозначается $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$. Каждый из углов AOC и COB называется ***разностью*** угла AOB и другого угла и обозначается $\angle AOC = \angle AOB - \angle COB$, $\angle COB = \angle AOB - \angle AOC$.

Чтобы сложить два угла, например AOB и CO_1D (рис. 4.10), отложим угол CO_1D от луча OB так, чтобы точки A и D находились по разные стороны от прямой OB. Пусть OE – луч, в который перейдёт луч O_1D. Тогда угол AOE даст сумму углов AOB и CO_1D, $\angle AOE = \angle AOB + \angle CO_1D$.

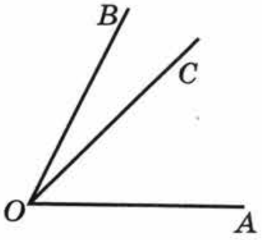


Рис. 4.9

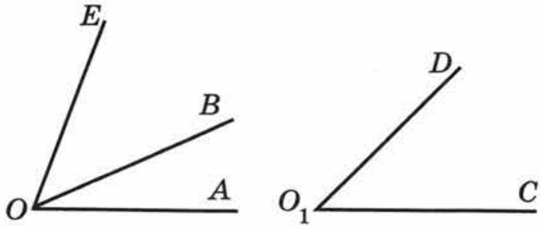
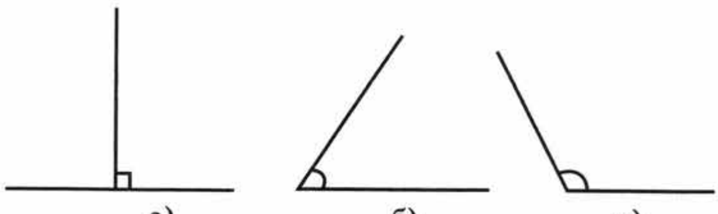


Рис. 4.10

Угол, равный своему смежному, называется ***прямым*** (рис. 4.11, а). Угол, меньший прямого угла, называется ***острым*** (рис. 4.11, б). Угол, больший прямого угла, но меньший развёрнутого угла, называется ***тупым*** (рис. 4.11, в).



а) б) в)

Рис. 4.11

Углом между пересекающимися прямыми называется наименьший из углов, образованных лучами, на которые делятся данные прямые точкой их пересечения (рис. 4.12).

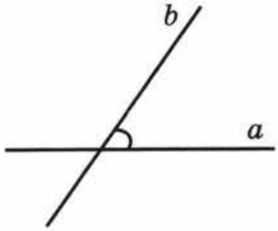


Рис. 4.12

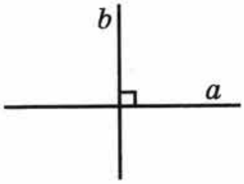


Рис. 4.13

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если они образуют прямые углы (рис. 4.13).

Биссектрисой угла называется внутренний луч, делящий этот угол на два равных угла (рис. 4.14).

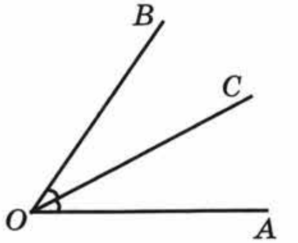


Рис. 4.14

Вопросы

1. На сколько частей прямая разбивает плоскость?
2. Что называется полуплоскостью?
3. В каком случае две точки принадлежат: а) одной полуплоскости; б) разным полуплоскостям относительно данной прямой?
4. Какая фигура называется углом? Что называется вершиной угла? Что называется сторонами угла?
5. Какой угол называется развёрнутым?

6. Какие углы называются: а) смежными; б) вертикальными?

7. Как обозначаются углы?

8. Какую операцию можно производить с углами?

9. Какие углы называются равными?

10. Как обозначается равенство углов?

11. Что означает, что один угол меньше другого? Какое обозначение в этом случае используется?

12. Как определяется: а) сумма двух углов; б) разность двух углов?

13. Какой угол называется: а) острым; б) прямым; в) тупым?

14. Какие прямые называются перпендикулярными?

15. Что называется биссектрисой угла?

Задачи

1. На сколько частей разбивают плоскость: а) две пересекающиеся прямые; б) три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке; в) четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекаются в одной точке.

2. Изобразите прямую p и такие точки A, B, C, D, E, F, что A, E принадлежат данной прямой, а остальные точки ей не принадлежат, причём D и F лежат в разных полуплоскостях, B и C – в одной полуплоскости, и отрезок BD пересекает прямую p.

3. Даны прямая и четыре точки A, B, C, D, не принадлежащие этой прямой. Пересекает ли эту прямую отрезок AD, если: а) отрезки AB, BC и CD пересекают прямую; б) отрезки AC и BC пересекают прямую, а отрезок BD не пересекает; в) отрезки AB и CD пересекают прямую, а отрезок BC не пересекает; г) отрезки AB и CD не пересекают прямую, а отрезок BC пересекает; д) отрезки AB, BC и CD не пересекают прямую; е) отрезки AC, BC и BD пересекают прямую? Изобразите данные ситуации.

4. Даны пять точек и прямая, не проходящая ни через одну из этих точек. Известно, что три точки расположены в одной полуплоскости, а две другие – в другой полуплоскости относительно этой прямой.

Каждая пара точек соединена отрезком. Сколько отрезков: а) пересекает прямую; б) не пересекает прямую? Сделайте соответствующий рисунок.

5. Изобразите лучи *OA, OB, OC, OD* так, чтобы: а) луч *OC* лежал внутри угла *AOB*, а луч *OD* лежал внутри угла *BOC*; б) луч *OA* лежал внутри угла *BOC*, а луч *OC* лежал внутри угла *AOD*.

6. Сколько всего углов определяется лучами, изображёнными на рисунке 4.15? Назовите их.

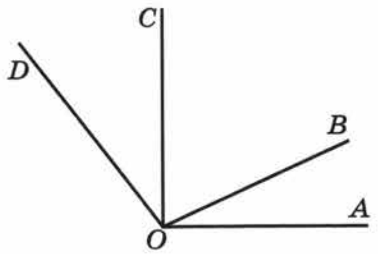


Рис. 4.15

7. Какие из углов на рисунке 4.15: а) острые; б) прямые; в) тупые?

8. Среди углов, изображённых на рисунке 4.16, укажите равные углы.

9. Какой из углов, изображённых на рисунке 4.17, больше?

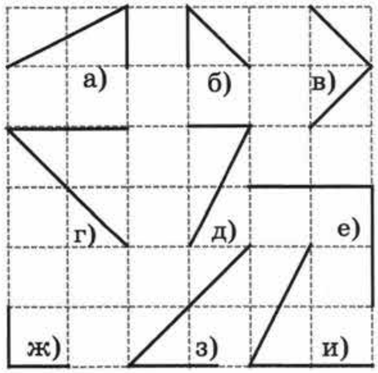


Рис. 4.16

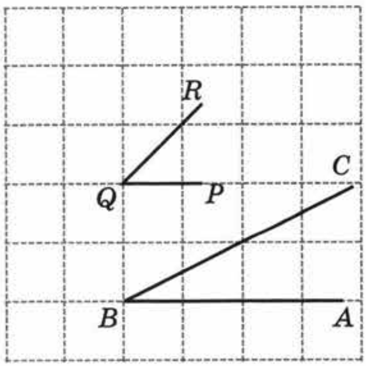


Рис. 4.17

10. Расположите углы, изображённые на рисунке 4.18, в порядке их возрастания.

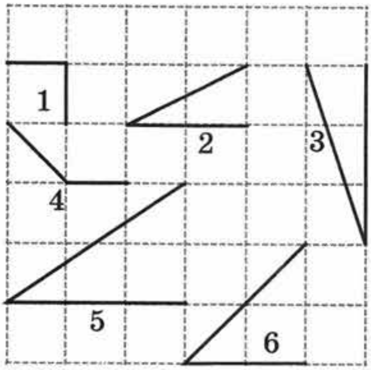


Рис. 4.18

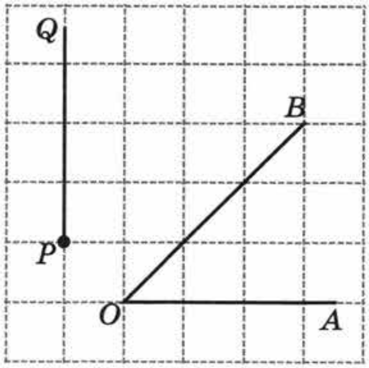


Рис. 4.19

11. На клетчатой бумаге изобразите угол AOB и луч PQ, как показано на рисунке 4.19. От луча PQ отложите угол QPR, равный углу AOB.

12. Сколько имеется углов, смежных данному?

13. Могут ли два смежных угла быть одновременно: а) острыми; б) прямыми; в) тупыми?

14. По рисунку 4.20 запишите пары: а) вертикальных углов; б) смежных углов.

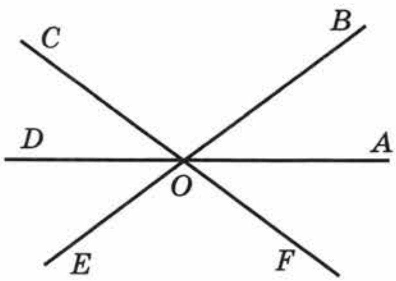


Рис. 4.20

15. На клетчатой бумаге изобразите угол, равный сумме углов AOB и PQR (рис. 4.21, а, б).

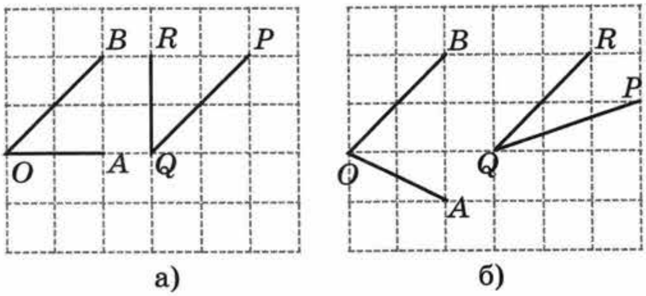


Рис. 4.21

16. На клетчтой бумаге изобразите угол, равный разности углов *AOB* и *PQR* (рис. 4.22, а, б).

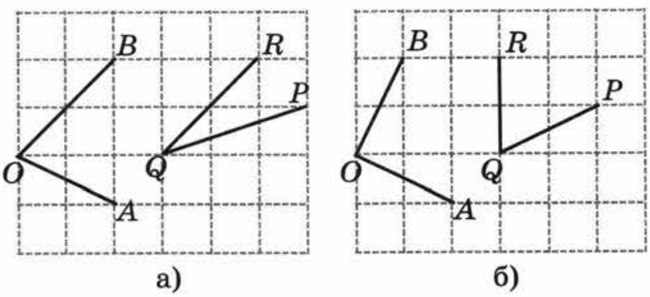


Рис. 4.22

17. На клетчатой бумаге нарисуйте угол *AOB* аналогично данному на рисунке 4.23, а, б. Изобразите биссектрису *OC* этого угла.

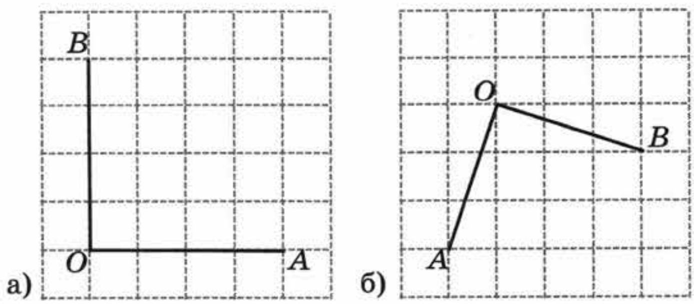


Рис. 4.23

§ 5. Измерение величин углов

Для измерения величин углов применяют разные измерительные инструменты, простейшим из которых является транспортир (рис. 5.1).

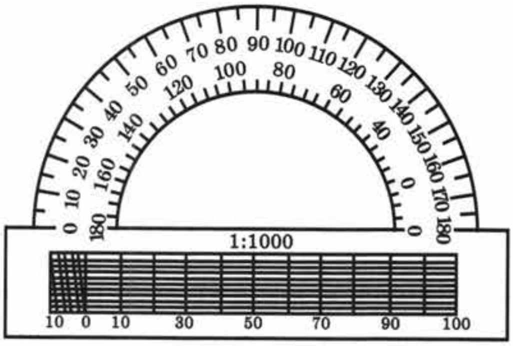


Рис. 5.1

За единицу измерения углов обычно принимается угол, составляющий одну сто восьмидесятую часть развёрнутого угла. Считают, что величина этого угла равна одному градусу и обозначают её 1°.

Градусная величина угла показывает, сколько раз угол в один градус и его части укладываются в этом угле.

На рисунке 5.2 градусные величины углов AOB, AOC и AOD равны соответственно 60°, 90° и 120°.

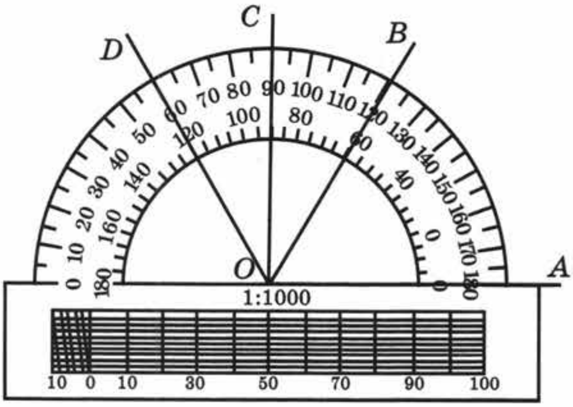


Рис. 5.2

Градусная величина угла удовлетворяет следующим свойствам.

Свойство 1. Градусные величины равных углов равны.

Свойство 2. Градусная величина суммы углов равна сумме их градусных величин.

Непосредственно из определений следует, что прямой угол равен 90°. Острый угол меньше 90°, а тупой угол больше 90°, но меньше 180°.

Исторические сведения

Проблема измерения углов восходит к глубокой древности. Астрономические наблюдения, необходимость определения положения солнца и звёзд на небе потребовали создания специальных приборов для определения углов, под которыми видны эти светила. На старинной гравюре (рис. 5.3) художник изобразил моряка эпохи Великих географических открытий, прокладывающего курс корабля с помощью измерительных инструментов.

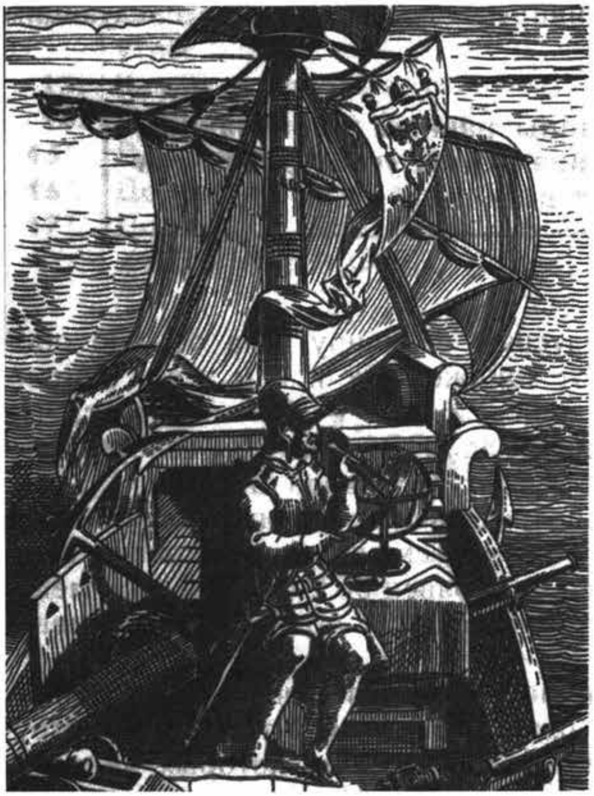


Рис. 5.3

Одним из первых угломерных инструментов была астролябия (рис. 5.4), изобретённая Гиппархом (180–125 гг. до н. э.) и усовершенствованная впоследствии немецким учёным Региомонтаном (1436–1476). Она состояла из тяжёлого медного диска — лимба, который подвешивался за кольцо так, чтобы он висел вертикально и линия $Г_1Г_2$ принимала горизонтальное положение. По краю лимба наносилась шкала, разделённая на градусы. Кроме этого, на лимбе имелась полоса A_1A_2, называемая алидадой, которая могла вращаться вокруг центра лимба и имела на концах поперечные пластинки с отверстиями, называемыми диоптрами.

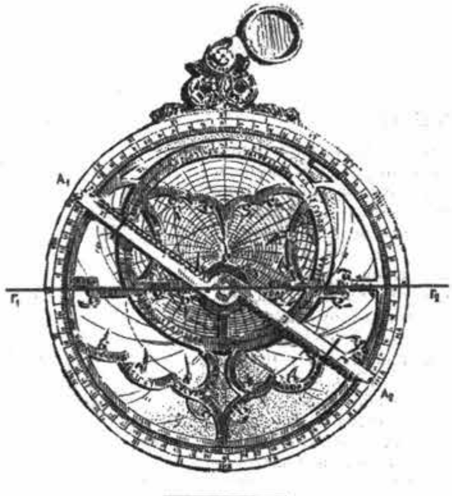


Рис. 5.4

Для определения высоты звезды над горизонтом наблюдатель прикладывал глаз к нижнему диоптру и поворачивал алидаду так, чтобы звезда была видна через другой диоптр. Деление на шкале, около которого останавливался край алидады, и показывало высоту звезды над горизонтом в градусах.

Располагая плоскость лимба горизонтально, можно измерять углы и в горизонтальной плоскости. Для этого после установки астролябии алидаду сначала наводят на один объект наблюдения и засекают угол на шкале лимба, а затем на другой объект и также засекают угол. Разность между этими значениями и есть искомая величина угла.

Другим инструментом для измерения углов был квадрант, представляющий собой одну четвёртую часть астролябии (рис. 5.5).

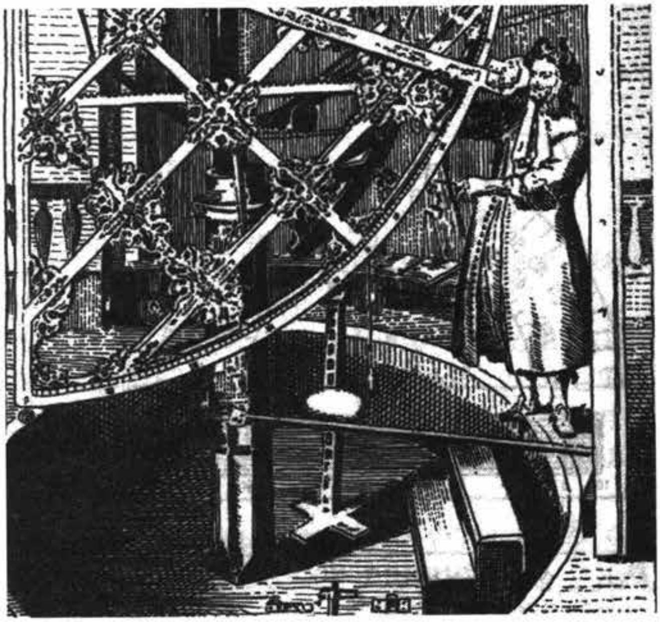


Рис. 5.5

Квадрант имел то преимущество перед астролябией, что его можно было сделать значительно бóльших размеров и тем самым увеличить точность измерения углов.

Существенные усовершенствования в конструкции астролябии и квадранта были сделаны французским учёным Жаном Пикаром в середине XVII в. Пикар заменил диоптры зрительной трубой, изобретённой незадолго до этого Галилеем. Перед линзой трубы он установил сетку из перекрещивающихся волосков, а для плавного вращения алидады использовал микрометрический винт, что значительно повысило точность измерения.

Наиболее совершенным угловым инструментом, применяющимся в настоящее время для выполнения геодезических работ, является теодолит (рис. 5.6), состоящий из двух лимбов, расположенных в вертикальной и горизонтальной плоскостях, что позволяет измерять вертикальные и горизонтальные углы одновременно. На вертикальном лимбе имеется зрительная труба, с помощью которой алидады вертикального и горизонтального лимбов наводятся на объект наблюдения.

Рис. 5.6

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения углов?
2. Что такое градус?
3. Как измеряется градусная величина угла?
4. Какие свойства выполняются для градусных величин углов?
5. Какие инструменты служат для измерения градусной величины угла?

Задачи

1. Найдите градусную величину угла (рис. 5.7): а) AOC; б) AOB; в) AOD; г) AOE; д) BOD; е) BOC; ж) BOE.

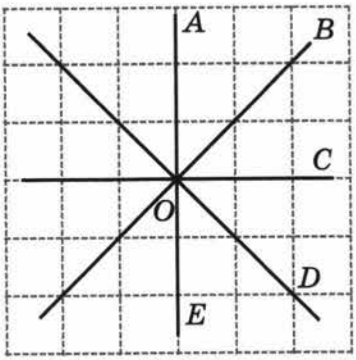


Рис. 5.7

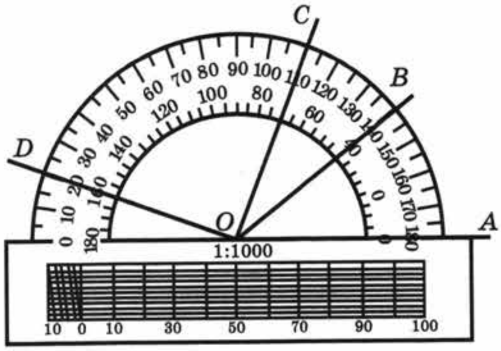


Рис. 5.8

2. Найдите величины углов AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD, изображённых на рисунке 5.8.

3. Найдите величины углов AOB, AOC, AOD, BOC, BOD, COD, изображённых на рисунке 5.9.

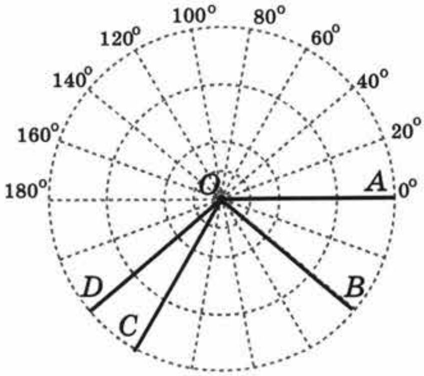
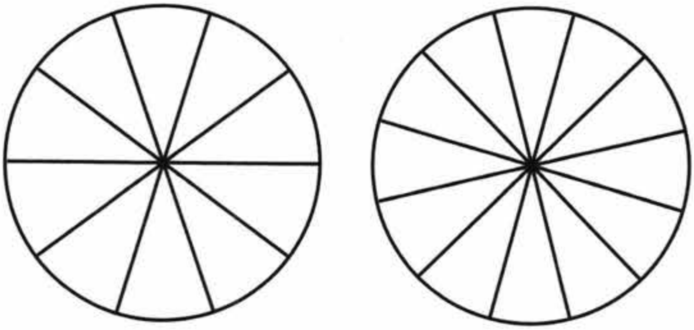


Рис. 5.9

4. С помощью транспортира постройте углы величиной 10°, 30°, 70°, 100°, 150°.

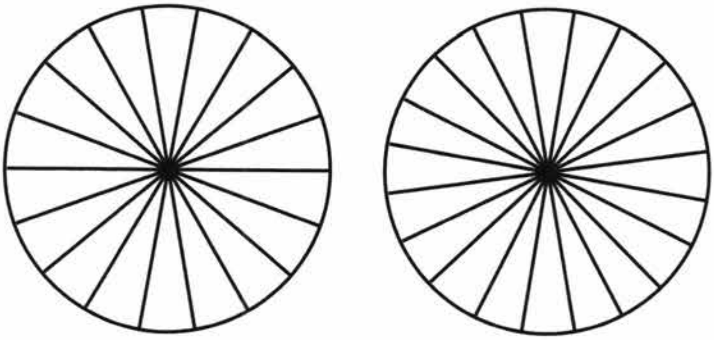
5. Колесо имеет: а) 10 спиц; б) 12 спиц (рис. 5.10, а, б). Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



а) б)

Рис. 5.10

6. Колесо имеет: а) 18 спиц; б) 20 спиц (рис. 5.11, а, б). Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.



а) б)

Рис. 5.11

7. На клетчатой бумаге изобразите луч *AB*, как показано на рисунке 5.12. От луча *AB* отложите угол *BAC*, равный: а) 45°; б) 90°.

8. На клетчатой бумаге изобразите углы, как показано на рисунке 5.13. Оцените «на глаз» их градусную величину. Проверьте ваши оценки, измерив углы с помощью транспортира.

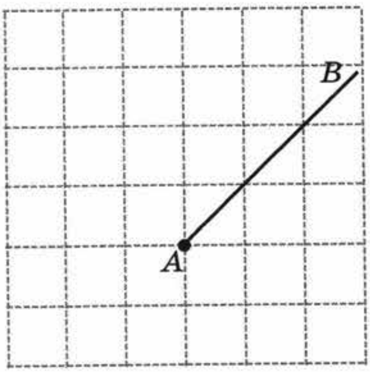


Рис. 5.12

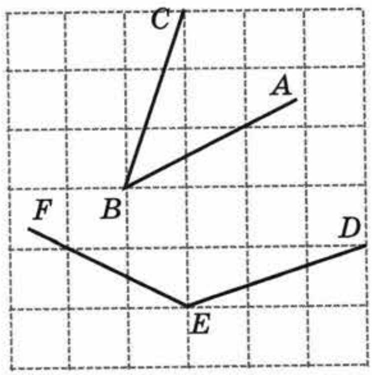


Рис. 5.13

9. Найдите величину суммы углов, изображённых на рисунке 5.14.

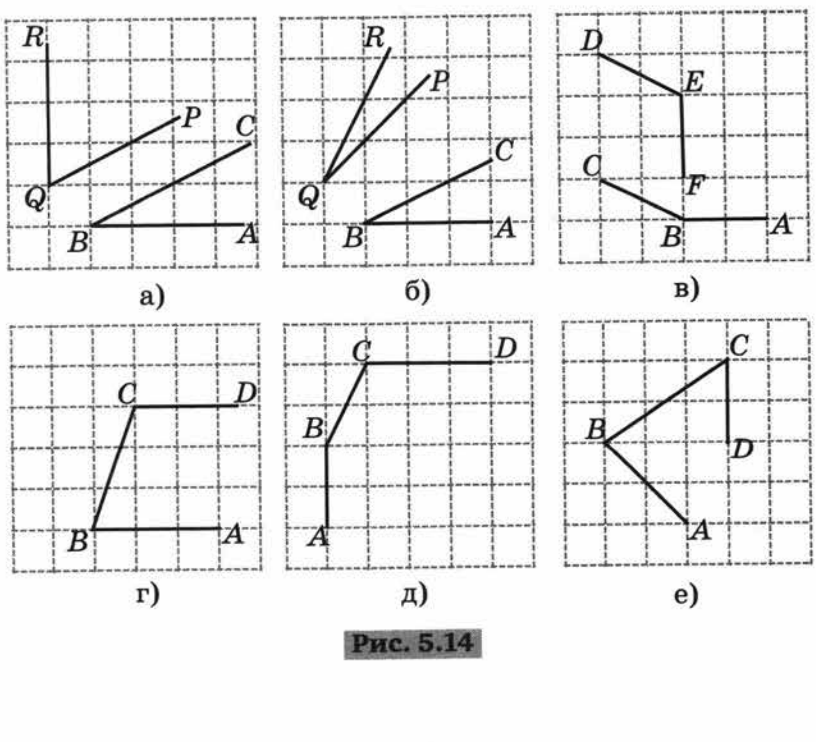


Рис. 5.14

10. Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 60° (рис. 5.15). Найдите угол *AOC*, если он на 30° больше угла *BOC*.

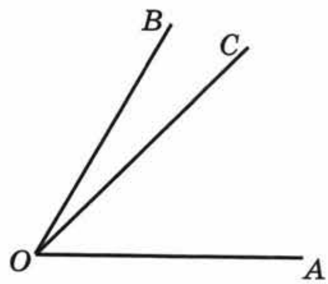


Рис. 5.15

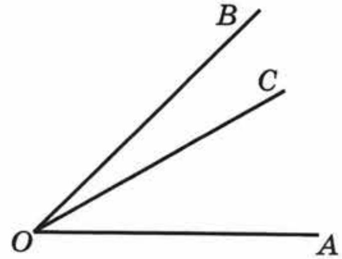


Рис. 5.16

11. Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 45° (рис. 5.16). Найдите угол *AOC*, если он в два раза больше угла *BOC*.

12. Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 120° (рис. 5.17). Найдите угол *AOC*, если он на 30° меньше угла *BOC*.

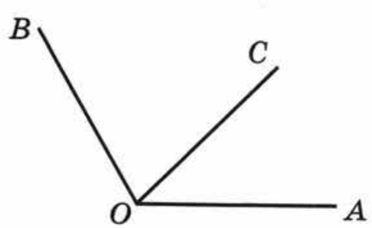


Рис. 5.17

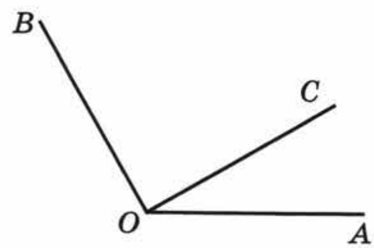


Рис. 5.18

13. Луч *OC* лежит внутри угла *AOB*, равного 120° (рис. 5.18). Найдите угол *BOC*, если он в три раза больше угла *AOC*.

14. Некоторый угол равен 38°. Чему равен смежный с ним угол?

15. Найдите градусные величины двух смежных углов, если один из них в два раза больше другого.

16. Найдите градусные величины двух смежных углов, если: а) один из них на 30° больше другого; б) их разность равна 40°; в) один из них в четыре раза меньше другого; г) они равны.

17. Найдите градусные величины двух смежных углов, если они относятся как: а) 2 : 3; б) 3 : 7; в) 11 : 25; г) 22 : 23.

18. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 30° (рис. 5.19). Чему равны остальные углы?

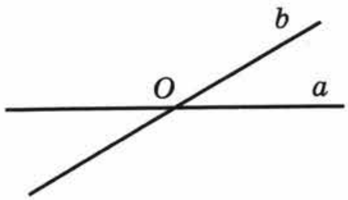


Рис. 5.19

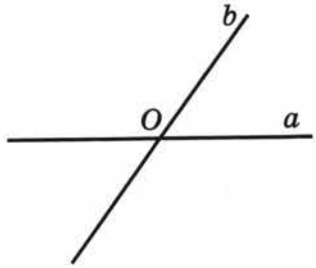


Рис. 5.20

19. Один из углов, образованный при пересечении двух прямых, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

20. Сумма трёх углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 306° (рис. 5.20). Найдите больший из них.

21. Может ли сумма трёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, быть равной 150°?

22. Общей частью двух углов *AOB* и *COD*, величиной 60° и 90° соответственно, является угол *BOC* величиной 30° (рис. 5.21). Найдите угол *AOD*, покрываемый обоими данными углами.

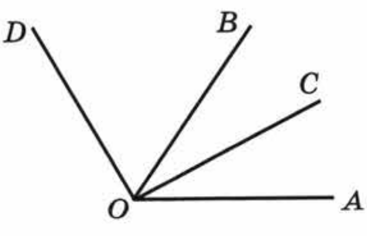


Рис. 5.21

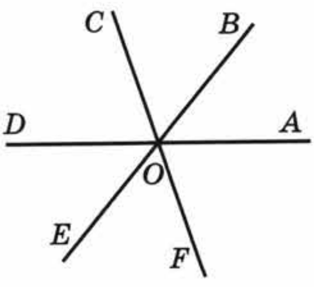


Рис. 5.22

23. На рисунке 5.22 угол *AOB* равен 50°, угол *COD* равен 60°. Найдите угол *EOF*.

24. Чему равен угол между биссектрисами: а) вертикальных углов; б) смежных углов?

25. Чему равен угол между минутной и часовой стрелками на часах в: а) 3 ч; б) 6 ч; в) 5 ч?

26. На сколько градусов повернётся минутная стрелка за: а) 20 мин; б) 10 мин; в) 50 мин?

27. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за: а) 1 ч; б) 30 мин; в) 20 мин?

§ 6. Ломаные

Фигура, образованная конечным набором отрезков, расположенных так, что конец первого является началом второго, конец второго – началом третьего и т. д., называется ***ломаной линией,*** или просто ***ломаной*** (рис. 6.1). Отрезки называются ***сторонами ломаной***, а их концы – ***вершинами ломаной***.

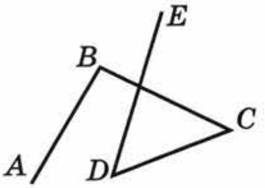


Рис. 6.1

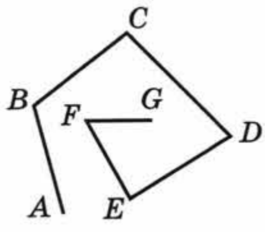


Рис. 6.2

Длиной ломаной называется сумма длин её сторон.

Ломаная обозначается последовательным указанием её вершин, например, ломаная $ABCDE$, ломаная $A_1A_2\ldots A_n$.

Ломаная называется ***простой***, если она не имеет точек самопересечения (рис. 6.2).

Ломаная называется ***замкнутой***, если начало её первого отрезка совпадает с концом последнего. Замкнутую ломаную, у которой точками самопересечения являются только начальная и конечная точки, также называют простой (рис. 6.3).

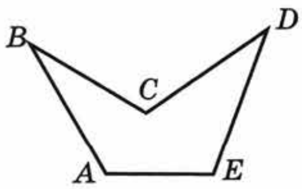


Рис. 6.3

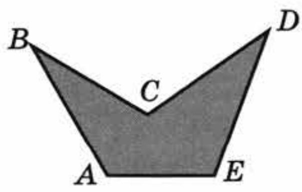


Рис. 6.4

Всякая простая замкнутая ломаная разбивает плоскость на две области – ***внутреннюю и внешнюю***. На рисунке 6.4 внутренняя область закрашена.

Вопросы

1. Что называется ломаной? Что называется: а) сторонами; б) вершинами ломаной?

2. Как обозначается ломаная?

3. Что называется длиной ломаной?

4. Какая ломаная называется: а) простой; б) замкнутой?

5. На сколько частей разбивает плоскость простая замкнутая ломаная?

Задачи

1. Простая ломаная имеет 10 вершин. Сколько у неё сторон?

2. Простая замкнутая ломаная имеет 20 сторон. Сколько у неё вершин?

3. Укажите, какие фигуры, изображённые на рисунке 6.5, являются простыми ломаными.

Рис. 6.5

4. Найдите длины ломаных с концами A, B, изображённых на рисунке 6.6.

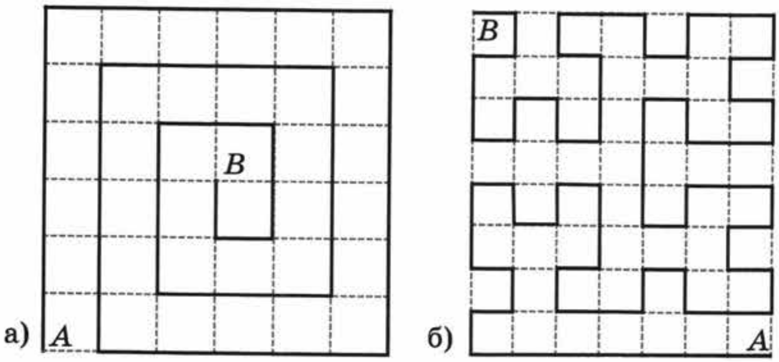


Рис. 6.6

5. Сравните длины ломаных $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ на рисунке 6.7, не измеряя их.

6. Сравните длины ломаных AB_1C и AB_2C на рисунке 6.8, не измеряя их.

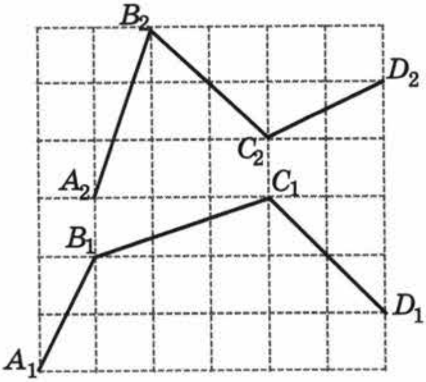


Рис. 6.7

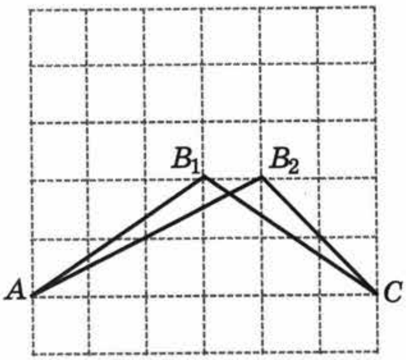


Рис. 6.8

7. Изобразите замкнутую пятистороннюю ломаную, которая имеет: а) две точки самопересечения; б) три точки самопересечения; в) пять точек самопересечения.

8. Проверьте, что линии, изображённые на рисунке 6.9, являются простыми замкнутыми ломаными. Выясните, какая из данных точек лежит: а) внутри; б) вне этих ломаных.

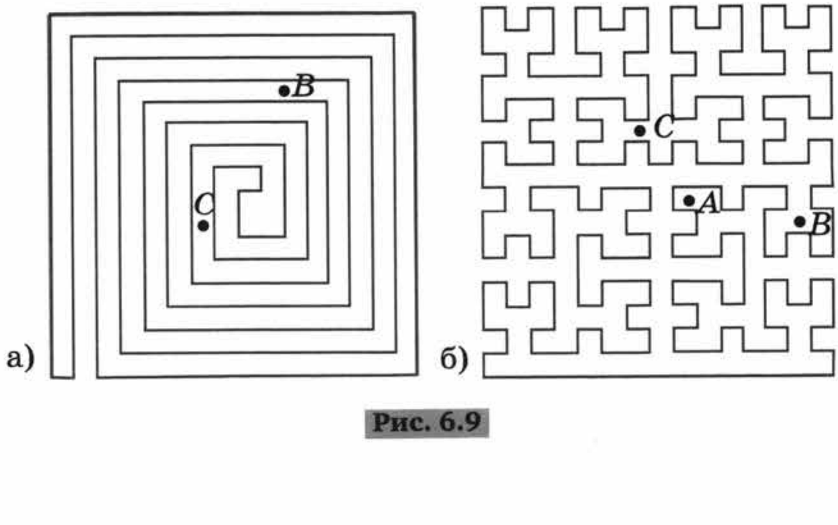
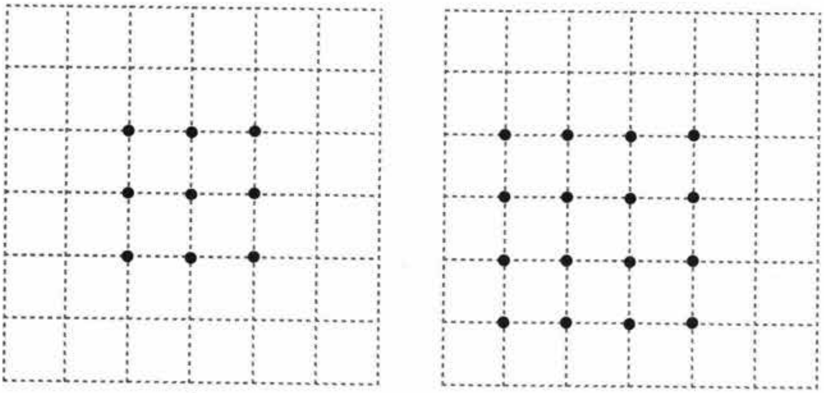


Рис. 6.9

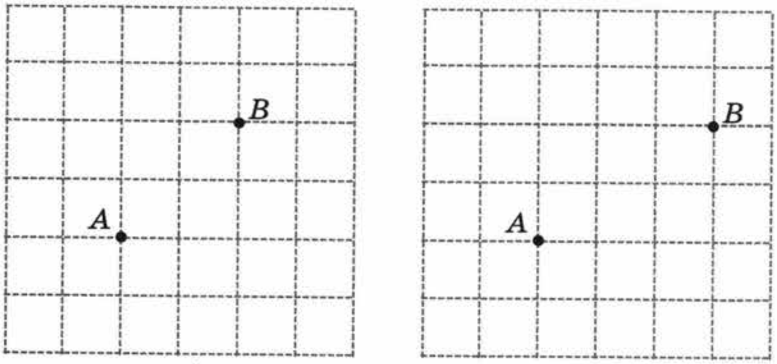
9. Изобразите: а) четырёхстороннюю ломаную; б) шестистороннюю ломаную, проходящую через все данные точки на рисунке 6.10.



а) б)

Рис. 6.10

10. Сколько ломаных: а) длиной 4; б) длиной 5, проходящих по сторонам сетки, состоящей из единичных квадратов, соединяет точки A и B (рис. 6.11)?



а) б)

Рис. 6.11

§ 7. Многоугольники

Фигура, образованная простой замкнутой ломаной и ограниченной ею внутренней областью, называется ***многоугольником***.

Вершины ломаной называются ***вершинами многоугольника***, стороны ломаной – ***сторонами многоугольника***, а углы, образованные соседними сторонами, – ***углами многоугольника***.

Точки многоугольника, не принадлежащие его сторонам, называются ***внутренними***.

Периметром многоугольника называется сумма длин всех его сторон.

Многоугольники подразделяются на ***треугольники*** – многоугольники с тремя углами (рис. 7.1, а), ***четырёхугольники*** – многоугольники с четырьмя углами (рис. 7.1, б) и т. д. Многоугольник, у которого n углов, называется ***n-угольником***.

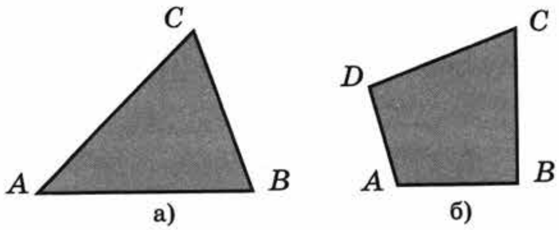


Рис. 7.1

Многоугольник называется ***правильным***, если у него все стороны равны и все углы равны (рис. 7.2).

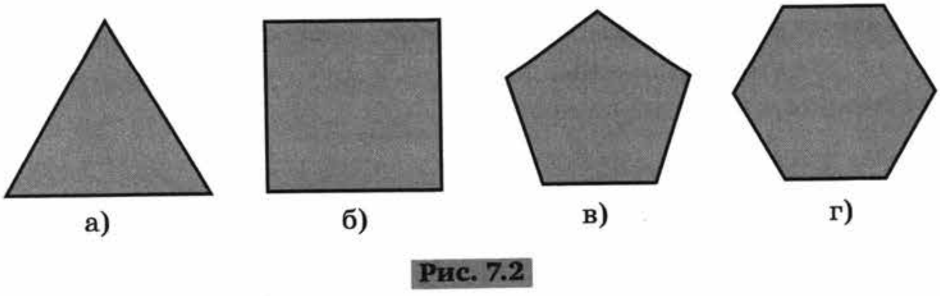


Рис. 7.2

Многоугольник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок (рис. 7.3).

Любой треугольник выпуклый. Среди многоугольников с числом углов, большим трёх, могут быть выпуклые (рис. 7.4, а) и невыпуклые (рис. 7.4, б).

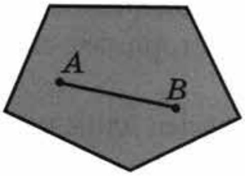


Рис. 7.3

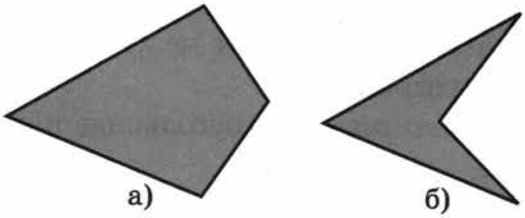


Рис. 7.4

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины.

Ясно, что выпуклый многоугольник содержит все свои диагонали (рис. 7.5, а). Невыпуклый многоугольник может не содержать некоторые свои диагонали (рис. 7.5, б).

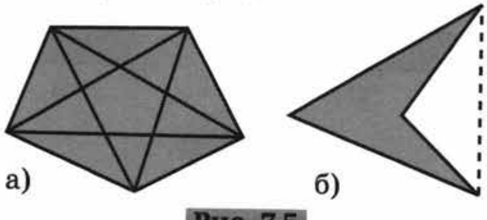


Рис. 7.5

Иногда многоугольником называется замкнутая ломаная, у которой возможны точки самопересечения. К числу таких многоугольников относятся правильные звёздчатые многоугольники, у которых все стороны и все углы равны (рис. 7.6).

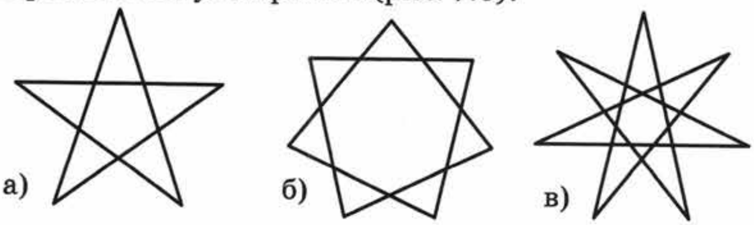


Рис. 7.6

Вопросы

1. Какая фигура называется многоугольником? Что называется: а) вершинами; б) сторонами; в) углами многоугольника?

2. Какие точки многоугольника называются внутренними?

3. Что называется периметром многоугольника?

4. Какой многоугольник называется n-угольником?

5. Какой многоугольник называется: а) правильным; б) выпуклым?

6. Что называется диагональю многоугольника?

7. Какой многоугольник содержит все свои диагонали?

Задачи

1. Укажите, какие из представленных на рисунке 7.7 фигур являются многоугольниками, а какие нет. Какие из них являются выпуклыми, а какие нет?

а) б) в) г)

Рис. 7.7

2. Какая имеется зависимость между числом вершин и числом сторон многоугольника?

3. Нарисуйте выпуклые и невыпуклые: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник. Используя линейку, найдите периметры этих многоугольников.

4. Нарисуйте правильные треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и шестиугольник. Проверьте правильность нарисованных многоугольников с помощью линейки и транспортира.

5. На сколько треугольников делится выпуклый: а) 4-угольник; б) 5-угольник; в) 6-угольник своими диагоналями, проведёнными из одной вершины?

6. Сколько всего диагоналей имеет: а) четырёхугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник?

7. Может ли многоугольник иметь: а) одну диагональ; б) три диагонали; в) восемь диагоналей?

8. Существует ли многоугольник: а) число диагоналей которого равно числу его сторон; б) число диагоналей которого меньше числа его сторон; в) число диагоналей которого больше числа его сторон?

9. Выпуклый многоугольник имеет 14 диагоналей. Сколько у него сторон?

10. Изобразите два треугольника так, чтобы их общей частью (пересечением) был: а) треугольник; б) четырёхугольник; в) пятиугольник; г) шестиугольник.

11. Может ли общей частью (пересечением) двух треугольников быть семиугольник?

12. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырёхугольника является восьмиугольник.

13. Сколько сторон имеют звёздчатые многоугольники, изображённые на рисунке 7.6?

14. На сколько частей разбивают плоскость звёздчатые многоугольники, изображённые на рисунке 7.6?

15. На рисунке 7.8 изображён четырёхугольник *ABCD* и точка *O* внутри него. Из точки *O* полностью видны стороны *AB*, *AD*. Сторона *BC* видна частично, и сторона *CD* не видна. Нарисуйте какой-нибудь многоугольник и точку *O* внутри него так, чтобы ни одна из сторон не была видна из неё полностью.

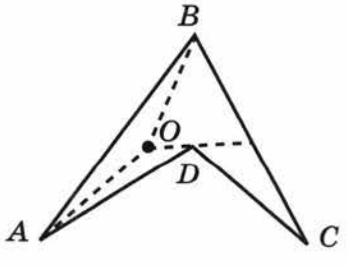


Рис. 7.8

§ 8. Треугольники

Напомним, что треугольником называется многоугольник с тремя углами. Треугольник обозначается указанием его вершин, например треугольник *ABC*.

Треугольник называется ***остроугольным***, если у него все углы острые (рис. 8.1, а).

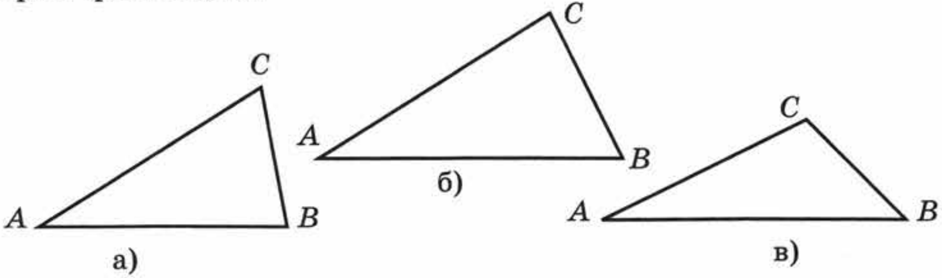


Рис. 8.1

Треугольник называется ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол (рис. 8.1, б).

Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется ***гипотенузой***. Остальные две стороны прямоугольного треугольника называются ***катетами***.

Треугольник называется ***тупоугольным***, если у него есть тупой угол (рис. 8.1, в).

Треугольник называется ***равнобедренным***, если у него две стороны равны (рис. 8.2, а). Эти равные стороны называются ***боковыми сторонами***, а третья сторона – ***основанием***.

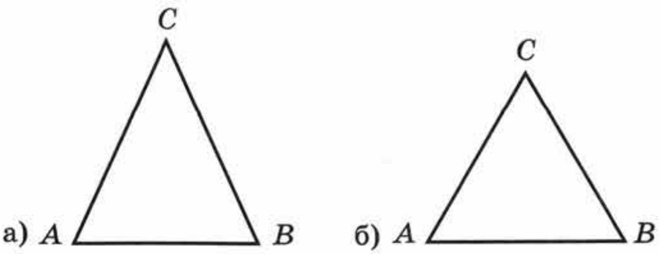


Рис. 8.2

Треугольник называется ***равносторонним***, если у него все стороны равны (рис. 8.2, б).

Среди основных элементов треугольника, кроме вершин, сторон и углов, выделяют следующие:

медиана треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны (рис. 8.3, а);

биссектриса треугольника – отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны (рис. 8.3, б);

высота треугольника – отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны или её продолжения и перпендикулярный этой стороне (рис. 8.3, в).

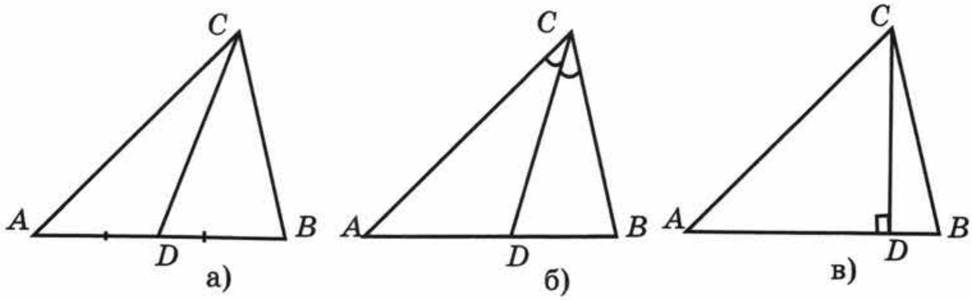


Рис. 8.3

Вопросы

1. Какая фигура называется треугольником?
2. Как обозначается треугольник?
3. Какой треугольник называется: а) остроугольным; б) прямоугольным; в) тупоугольным?
4. Какая сторона прямоугольного треугольника называется гипотенузой?
5. Какие стороны прямоугольного треугольника называются катетами?
6. Какой треугольник называется равнобедренным?
7. Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми?
8. Какая сторона равнобедренного треугольника называется основанием?

9. Какой треугольник называется равносторонним?
10. Что называется медианой треугольника?
11. Что называется биссектрисой треугольника?
12. Что называется высотой треугольника?

Задачи

1. Перечислите все треугольники, изображённые на рисунке 8.4.

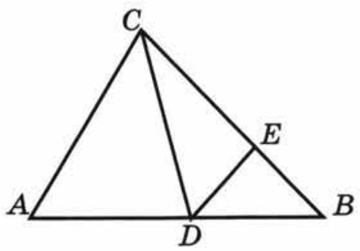


Рис. 8.4

2. На клетчатой бумаге изобразите равнобедренный треугольник *ABC*, основанием которого является отрезок *AB*, а вершина *C* находится в одном из узлов сетки (рис. 8.5).

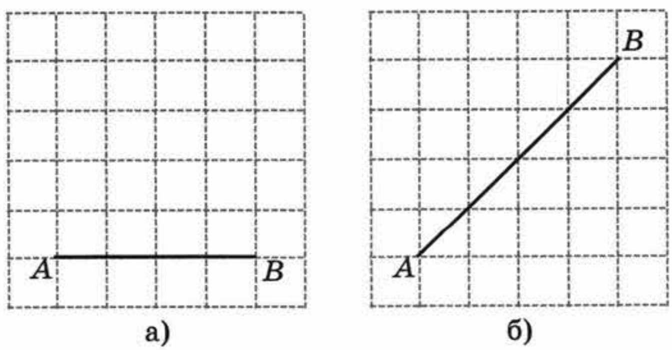


Рис. 8.5

3. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный треугольник ABC, гипотенузой которого является отрезок AB, а вершина C находится в одном из узлов сетки (рис. 8.6).

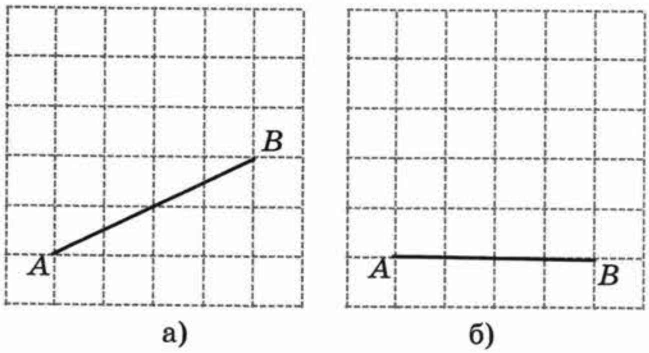


Рис. 8.6

4. На клетчатой бумаге нарисуйте: а) остроугольный треугольник ABC; б) прямоугольный треугольник ABC; в) тупоугольный треугольник ABC, как показано на рисунке 8.7. Проведите из вершины C медиану, биссектрису и высоту.

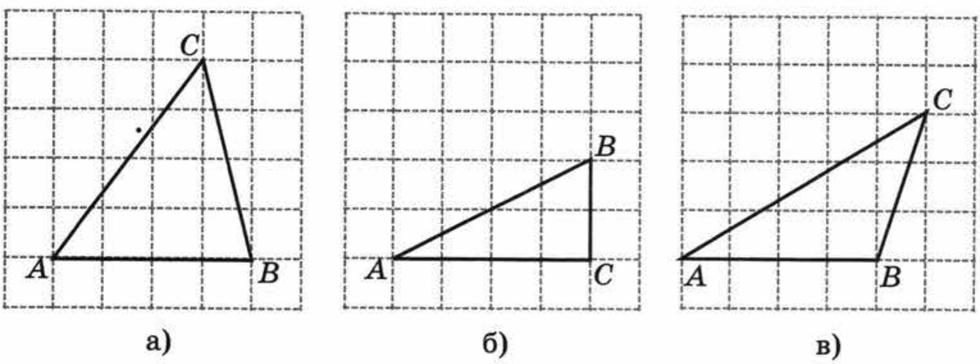


Рис. 8.7

5. Может ли проходить вне треугольника его: а) медиана; б) биссектриса; в) высота?

6. Периметр равнобедренного треугольника равен 2 м, а основание – 0,4 м. Найдите боковую сторону.

7. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона – 2 м. Найдите основание.

8. Сторона *AB* треугольника *ABC* равна 17 см. Сторона *AC* вдвое больше стороны *AB*, а сторона *BC* на 10 см меньше стороны *AC*. Найдите периметр треугольника *ABC*.

9. Периметр треугольника равен 48 см, а одна из сторон равна 18 см. Найдите две другие стороны, если их разность равна 10 см.

10. Периметр треугольника равен 54 см. Найдите его стороны, если они относятся как 2:3:4.

11. В равнобедренном треугольнике *ABC* с основанием *AB* проведена медиана *CD*. Найдите её длину, если периметр треугольника *ABC* равен 50 см, а треугольника *ACD* – 40 см.

§ 9. Четырёхугольники

Четырёхугольником называется многоугольник с четырьмя углами.

Четырёхугольники бывают выпуклые и невыпуклые (рис. 9.1).

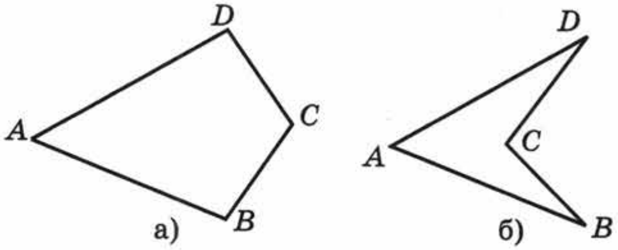


Рис. 9.1

Четырёхугольник, у которого все углы прямые, называется ***прямоугольником*** (рис. 9.2, а).

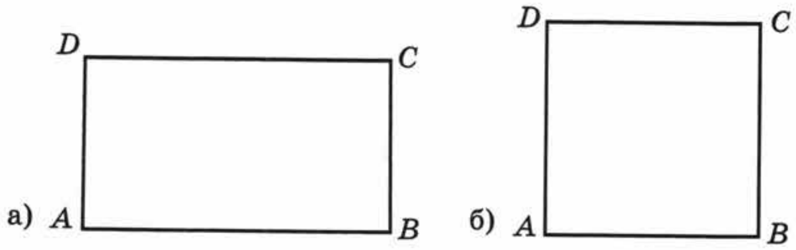


Рис. 9.2

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется ***квадратом*** (рис. 9.2, б).

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 9.3, а).

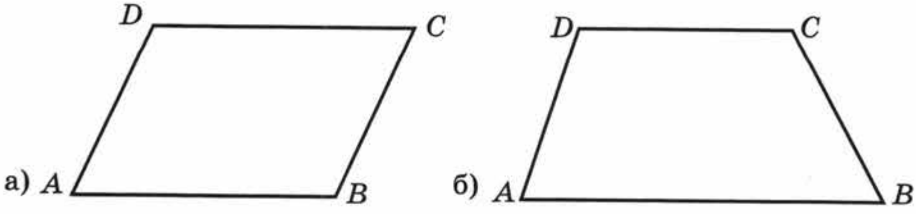


Рис. 9.3

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 9.3, б).

Параллельные стороны трапеции называются её ***основаниями***, а непараллельные стороны – ***боковыми сторонами***.

Трапеция называется ***равнобедренной***, если её боковые стороны равны (рис. 9.4, а).

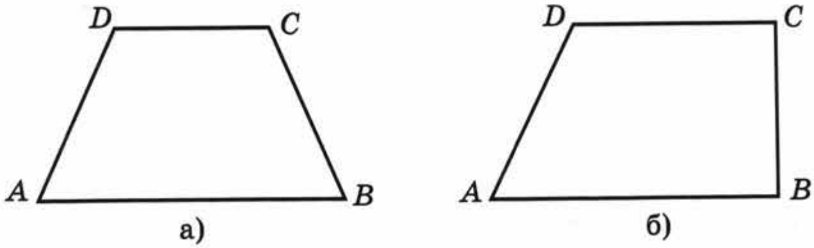


Рис. 9.4

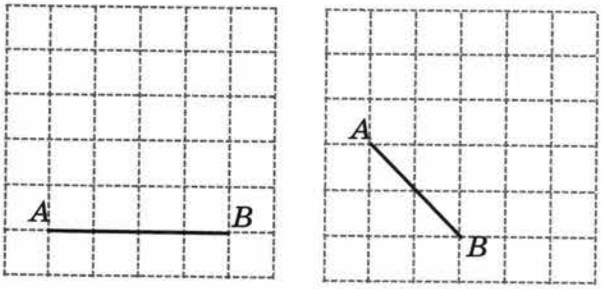
Трапеция называется ***прямоугольной***, если один из её углов прямой (рис. 9.4, б).

Вопросы

1. Какой многоугольник называется четырёхугольником?
2. Какой четырёхугольник называется прямоугольником?
3. Какой прямоугольник называется квадратом?
4. Какой четырёхугольник называется параллелограммом?
5. Какой четырёхугольник называется трапецией?
6. Какие стороны трапеции называются основаниями?
7. Какие стороны трапеции называются боковыми?
8. Какая трапеция называется равнобедренной?
9. Какая трапеция называется прямоугольной?

Задачи

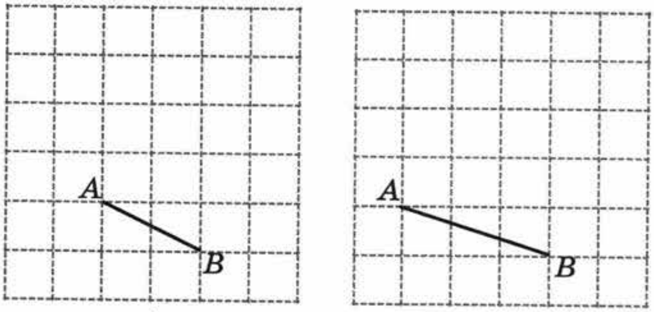
1. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, одной стороной которого является отрезок AB, показанный на рисунке 9.5.



а) б)

Рис. 9.5

2. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, одной стороной которого является отрезок AB, показанный на рисунке 9.6.



а) б)

Рис. 9.6

3. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольник, тремя вершинами которого являются точки A, B, C, показанные на рисунке 9.7. В случае а) найдите его периметр; в случае б) найдите его диагональ.

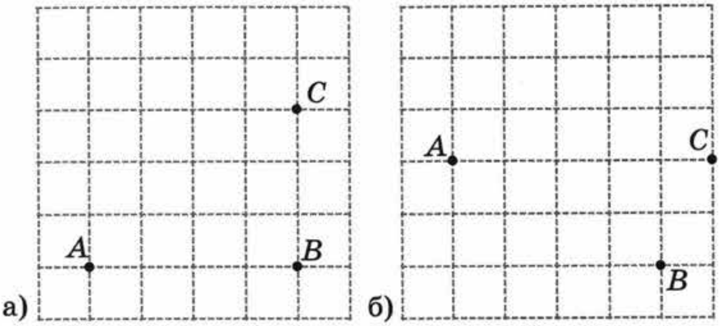


Рис. 9.7

4. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, двумя противоположными вершинами которого являются точки A и C, показанные на рисунке 9.8.

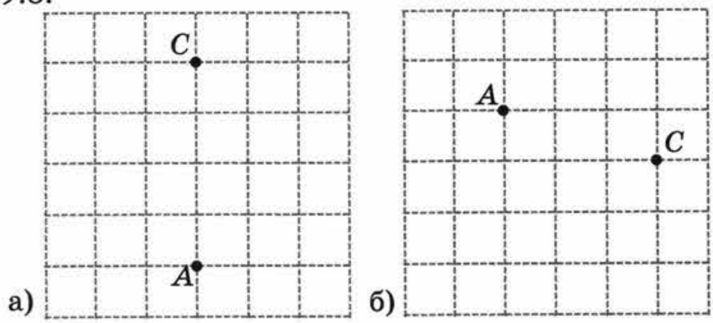


Рис. 9.8

5. На клетчатой бумаге изобразите квадрат, серединами сторон которого являются точки A, B, C и D, показанные на рисунке 9.9. В случае а) найдите его периметр; в случае б) найдите его диагональ.

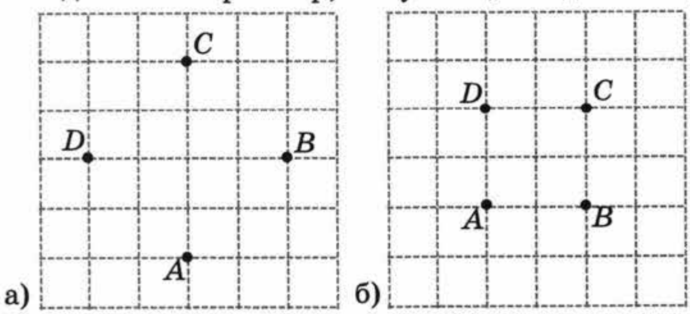


Рис. 9.9

6. На клетчатой бумаге изобразите какой-нибудь четырёхугольник, вершинами которого являются точки A, B, C и D, показанные на рисунке 9.10. Сколько решений имеет задача?

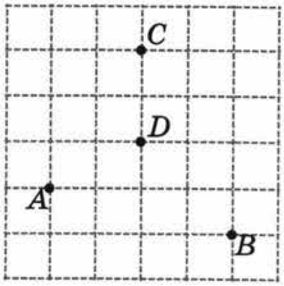
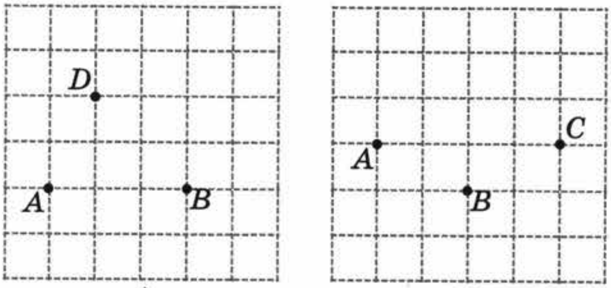


Рис. 9.10



а) б)

Рис. 9.11

7. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм $ABCD$, тремя вершинами которого являются точки: а) A, B, D; б) A, B, C, показанные на рисунке 9.11, а, б соответственно. В случае б) найдите его диагонали.

8. Три параллельные прямые пересечены тремя параллельными прямыми, показанные на рисунке 9.12. Сколько при этом получилось параллелограммов?

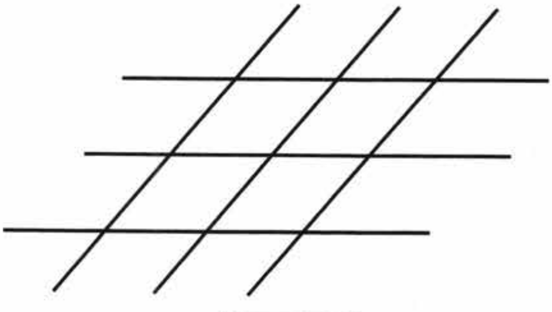


Рис. 9.12

9. Изобразите равнобедренную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке 9.13. Найдите её основания.

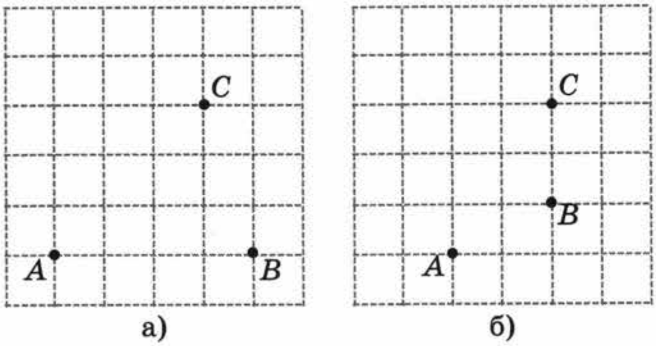


Рис. 9.13

10. Изобразите прямоугольную трапецию $ABCD$, три вершины которой даны на рисунке 9.13. Найдите её основания.

§ 10. Многогранники

Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного числа многоугольников.

Эти многоугольники называются ***гранями*** многогранника. Их стороны и вершины называются соответственно ***рёбрами*** и ***вершинами*** многогранника.

Отрезки, соединяющие вершины многогранника, не принадлежащие одной грани, называются ***диагоналями*** многогранника.

Многогранник называется ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками он содержит и соединяющий их отрезок.

На рисунке 10.1 приведены примеры выпуклых (а, б, в) и невыпуклых (г, д) многогранников.

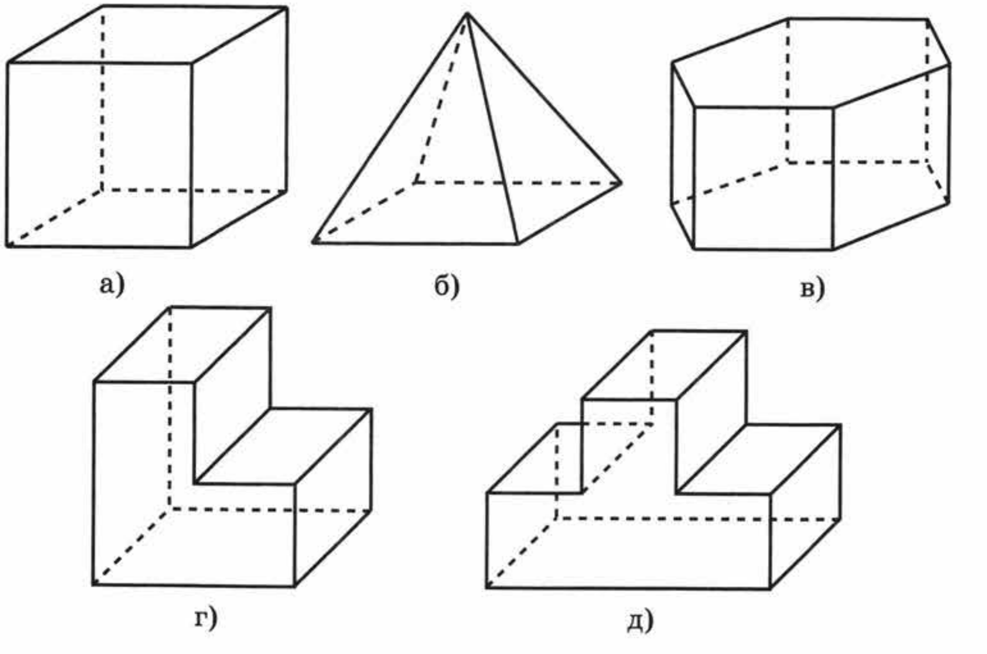


Рис. 10.1

Кубом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести квадратов.

Обычно куб изображается так, как показано на рисунке 10.2. А именно, рисуется квадрат ABB_1A_1, изображающий одну из граней куба, и равный ему квадрат DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам квадрата ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих квадратов соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра куба, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.2 мы смотрим на куб: а) сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.

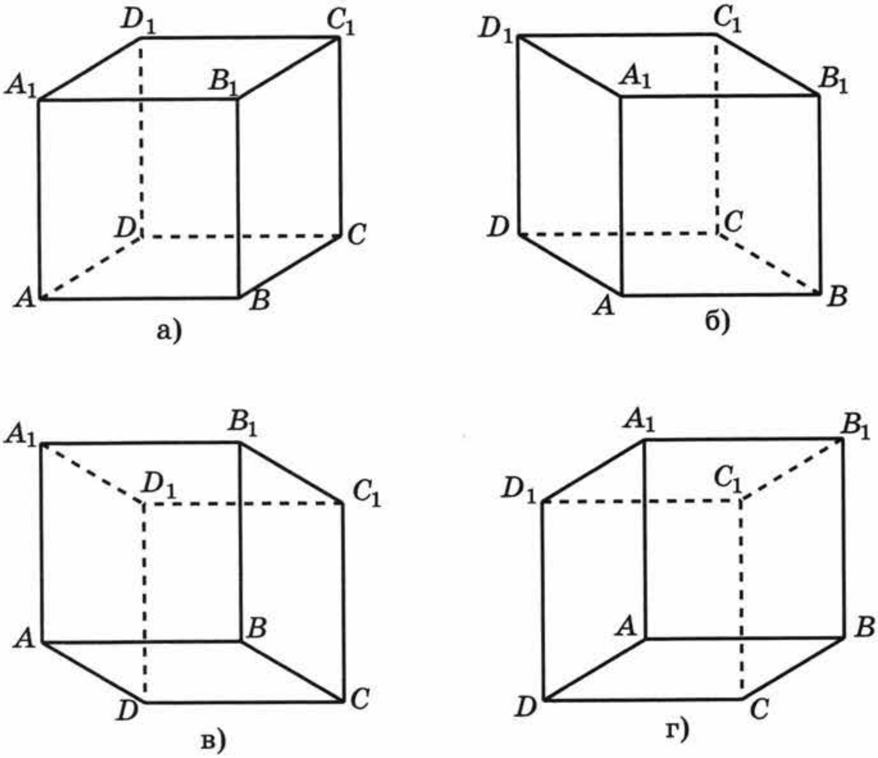


Рис. 10.2

Прямоугольным параллелепипедом называется многогранник, поверхность которого состоит из шести прямоугольников.

Обычно параллелепипед изображается так, как показано на рисунке 10.3. А именно, рисуется прямоугольник ABB_1A_1, изображающий одну из его граней, и равный ему прямоугольник DCC_1D_1, стороны которого параллельны соответствующим сторонам прямоугольника ABB_1A_1. Соответствующие вершины этих прямоугольников соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра прямоугольного параллелепипеда, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.3 мы смотрим на параллелепипед: а) сверху и справа; б) сверху и слева; в) снизу и справа; г) снизу и слева.

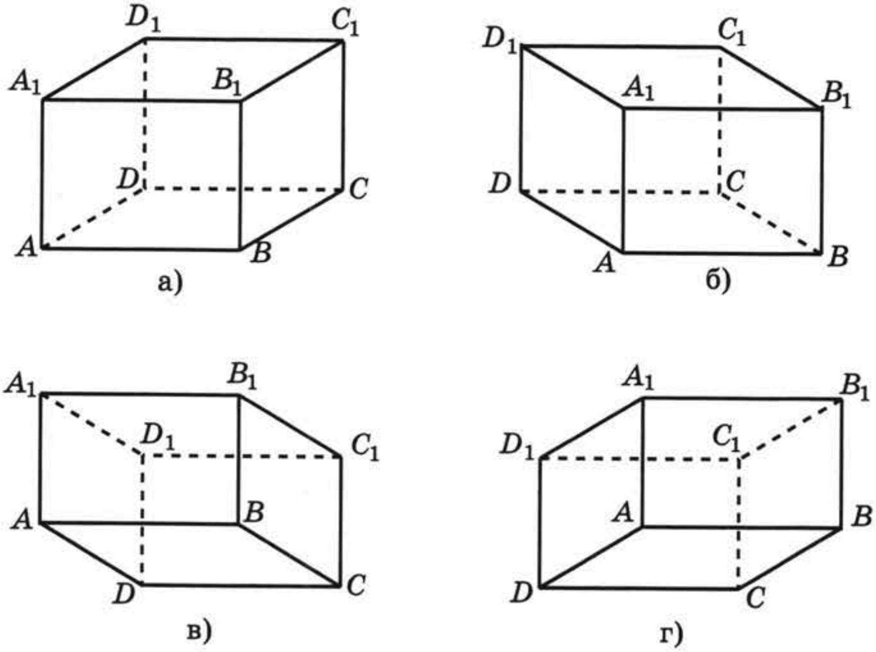
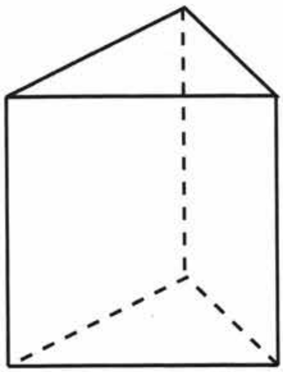


Рис. 10.3

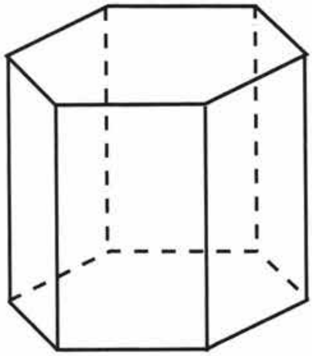
Прямой призмой называется многогранник, поверхность которого состоит из двух равных многоугольников, называемых основаниями призмы, и прямоугольников, называемых боковыми гранями призмы. Стороны боковых граней называются боковыми рёбрами призмы.

Обычно для изображения прямой призмы рисуются два равных многоугольника, изображающие её основания, соответствующие стороны которых параллельны. Соответствующие вершины этих многоугольников соединяются отрезками. Отрезки, изображающие невидимые рёбра, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.4, а изображена треугольная призма, на рисунке 10.4, б – шестиугольная.



а)



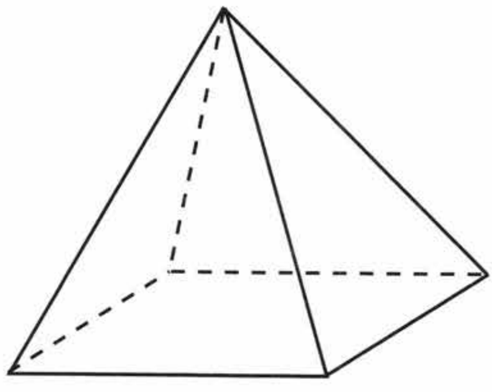
б)

Рис. 10.4

Пирамидой называется многогранник, поверхность которого состоит из многоугольника, называемого основанием пирамиды, и треугольников с общей вершиной, называемых боковыми гранями пирамиды. Стороны боковых граней называются боковыми рёбрами пирамиды. Общая вершина боковых граней называется вершиной пирамиды.

Обычно для изображения пирамиды рисуется многоугольник, изображающий её основание. Затем вершины этого многоугольника соединяются отрезками с некоторой точкой, изображающей вершину пирамиды. Отрезки, изображающие невидимые рёбра пирамиды, проводятся пунктиром.

На рисунке 10.5, а изображена четырёхугольная пирамида, на рисунке 10.5, б – шестиугольная.



а) б)

Рис. 10.5

Вопросы

1. Что называется многогранником?
2. Что называется гранями, рёбрами, вершинами многогранника?
3. Какой многогранник называется кубом?
4. Какой многогранник называется прямоугольным параллелепипедом?
5. Какой многогранник называется прямой призмой?
6. Какой многогранник называется пирамидой?

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 10.6.

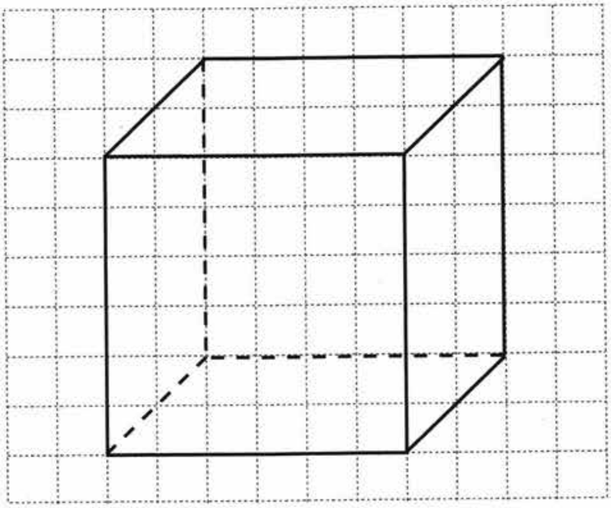
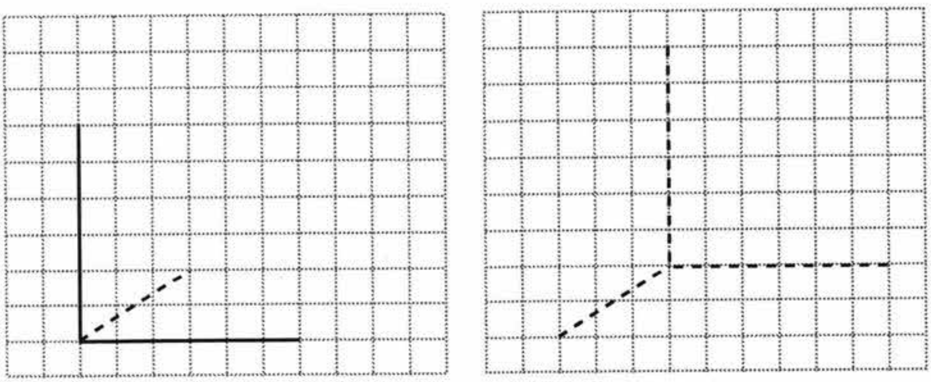


Рис. 10.6

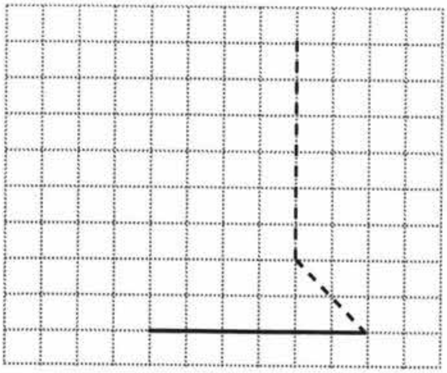
2. На клетчатой бумаге изобразите куб, три ребра которого изображены на рисунке 10.7.



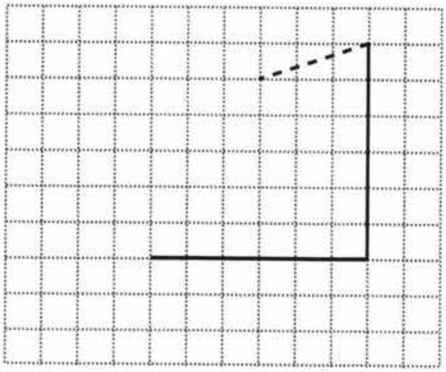
а) б)

Рис. 10.7

3. На клетчатой бумаге изобразите куб, три ребра которого изображены на рисунке 10.8.



а)



б)

Рис. 10.8

4. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед аналогично данному на рисунке 10.9.

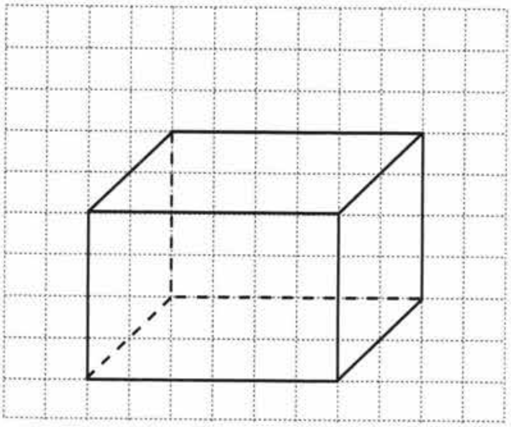
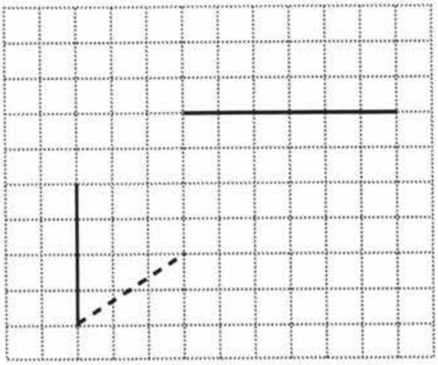
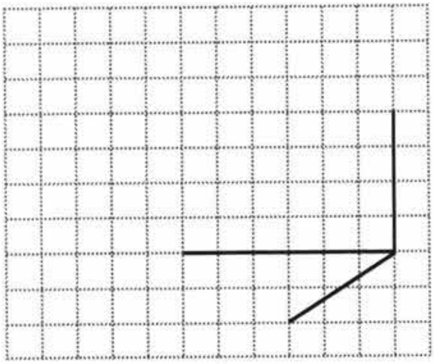


Рис. 10.9

5. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед, три ребра которого изображены на рисунке 10.10.



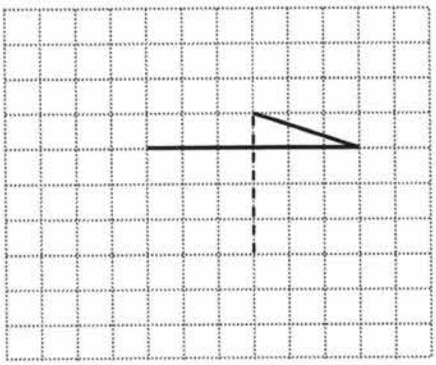
а)



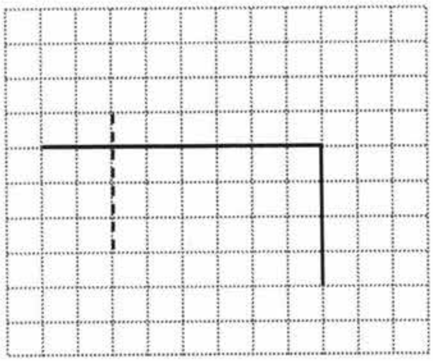
б)

Рис. 10.10

6. На клетчатой бумаге изобразите прямоугольный параллелепипед, три ребра которого изображены на рисунке 10.11.



а)



б)

Рис. 10.11

7. На клетчатой бумаге изобразите треугольную призму аналогично данной на рисунке 10.12.

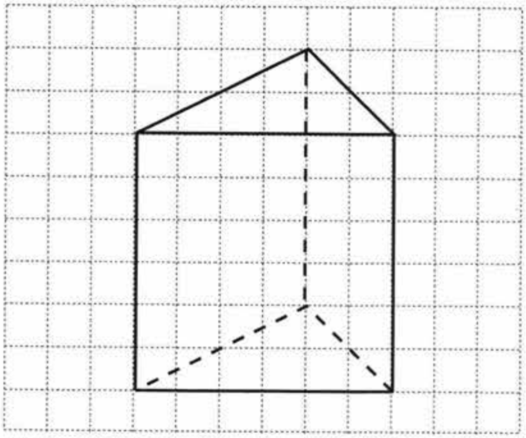
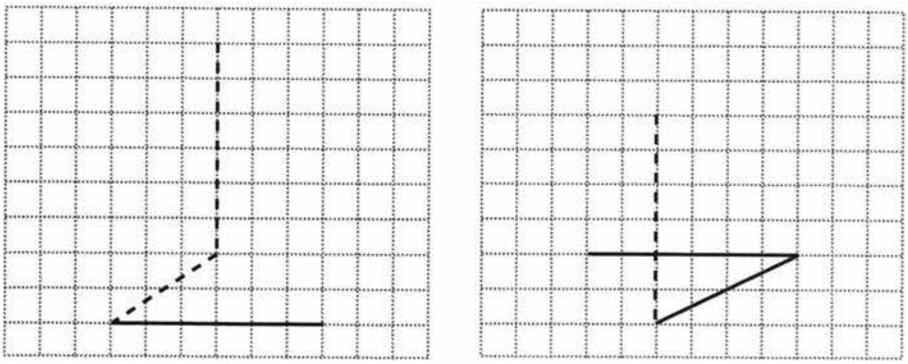


Рис. 10.12

8. На клетчатой бумаге изобразите треугольную призму, три ребра которой изображены на рисунке 10.13.



а) б)

Рис. 10.13

9. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную призму аналогично данной на рисунке 10.14.

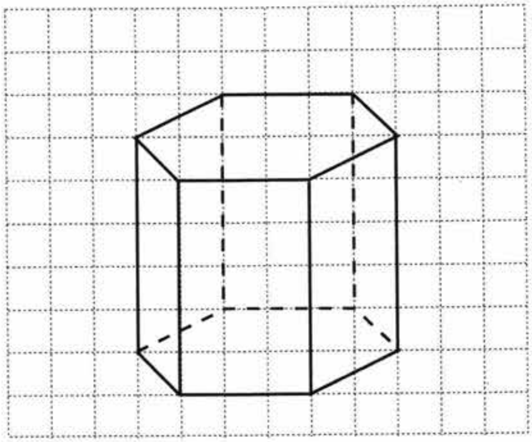
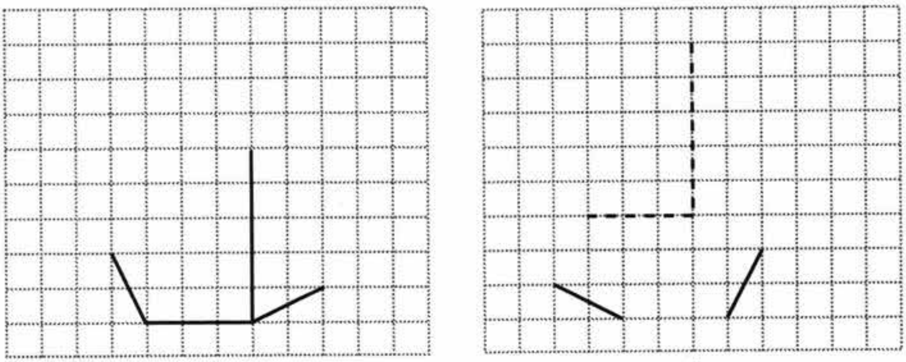


Рис. 10.14

10. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную призму, три ребра которой изображены на рисунке 10.15.



а) б)

Рис. 10.15

11. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 10.16.

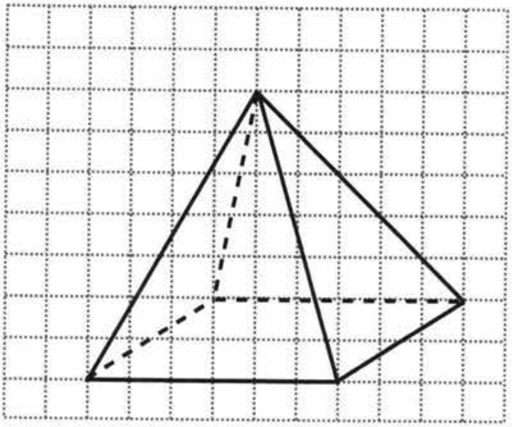
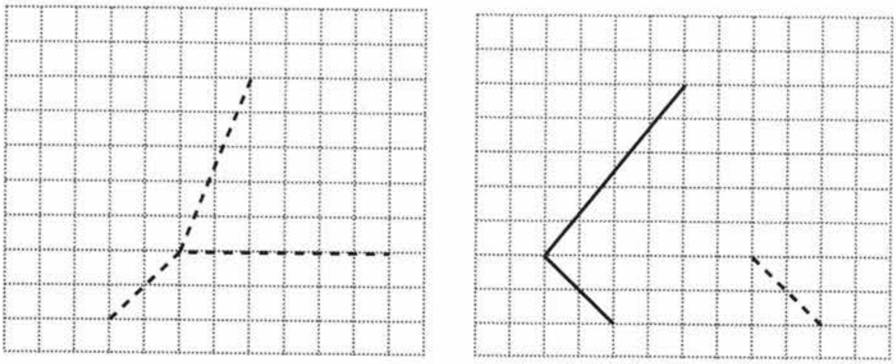


Рис. 10.16

12. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольную пирамиду, три ребра которой изображены на рисунке 10.17.



а) б)

Рис. 10.17

13. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную пирамиду аналогично данной на рисунке 10.18.

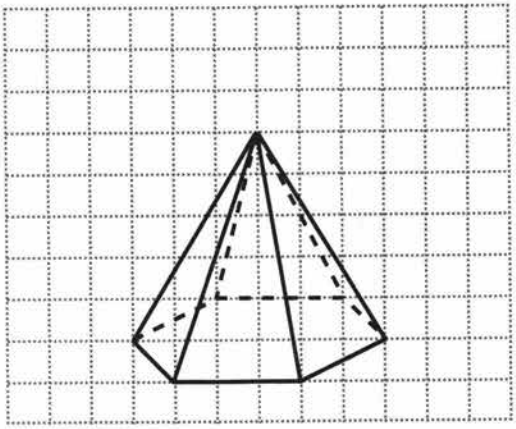
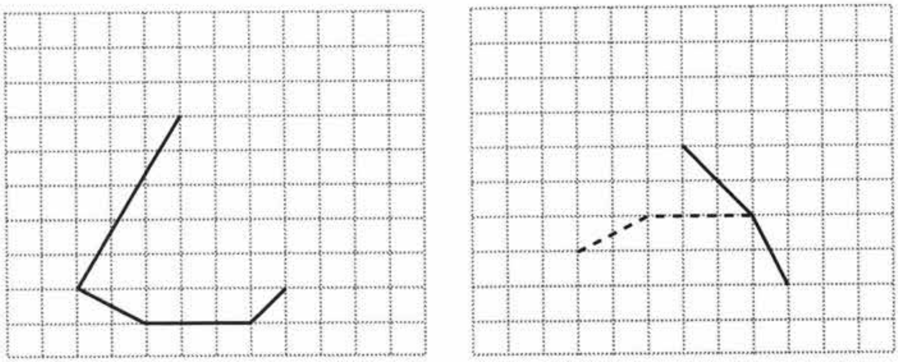


Рис. 10.18

14. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольную пирамиду, три ребра которой изображены на рисунке 10.19.



а) б)

Рис. 10.19

15. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) куб; б) прямоугольный параллелепипед?

16. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) треугольная призма; б) четырёхугольная призма; в) пятиугольная призма; г) шестиугольная призма?

17. Может ли призма иметь: а) 20 вершин; б) 25 вершин; в) 20 рёбер; г) 30 рёбер; д) 10 граней: е) 15 граней?

18. Какой многоугольник лежит в основании призмы, которая имеет: а) 18 рёбер; б) 24 вершины; в) 36 граней?

19. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) треугольная пирамида; б) четырёхугольная пирамида; в) шестиугольная пирамида; г) пятиугольная пирамида?

20. Может ли пирамида иметь: а) 10 вершин; б) 15 вершин; в) 10 рёбер; г) 15 рёбер; д) 10 граней: е) 15 граней?

21. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, которая имеет: а) 8 рёбер; б) 22 вершины; в) 60 граней?

§ 11. Моделирование многогранников

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно вырезать из этого материала многоугольники, равные граням многогранника, и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки многоугольники вырезают с клапанами, по которым и производится склейка.

Например, для изготовления модели куба нужно вырезать шесть квадратов с клапанами, показанных на рисунке 11.1, и склеить их по соответствующим клапанам.

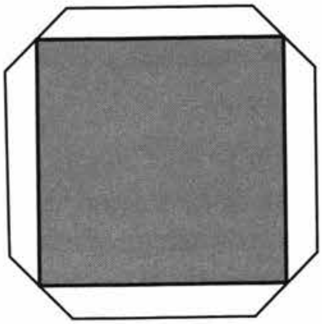


Рис. 11.1

Для изготовления модели прямоугольного параллелепипеда с рёбрами 3, 4, 5 нужно вырезать пары прямоугольников с клапанами, показанных на рисунке 11.2, и склеить их по клапанам, прилегающим к равным сторонам.

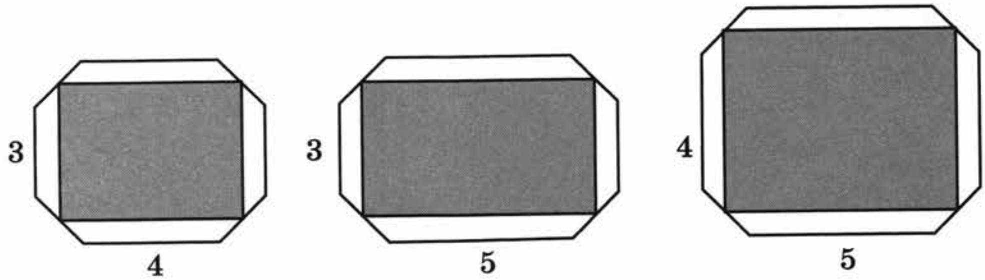


Рис. 11.2

Для изготовления модели наклонного параллелепипеда, гранями которого являются ромбы с острыми углами 60°, нужно вырезать шесть таких ромбов с клапанами, как показано на рисунке 11.3, и склеить их по соответствующим клапанам.

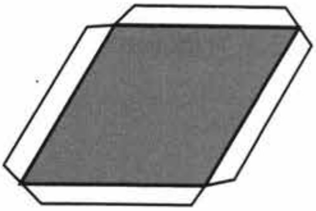


Рис. 11.3

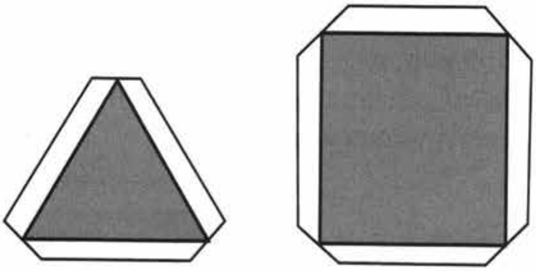


Рис. 11.4

Для изготовления модели правильной треугольной призмы нужно вырезать два равных правильных треугольника с клапанами и три равных прямоугольника с клапанами, одна сторона которых равна стороне треугольника, как показано на рисунке 11.4, и склеить их по соответствующим клапанам.

Для изготовления модели правильной шестиугольной призмы нужно вырезать два равных правильных шестиугольника с клапанами и шесть равных прямоугольников с клапанами, одна сторона которых равна стороне шестиугольника, как показано на рисунке 11.5, и склеить их по соответствующим клапанам.

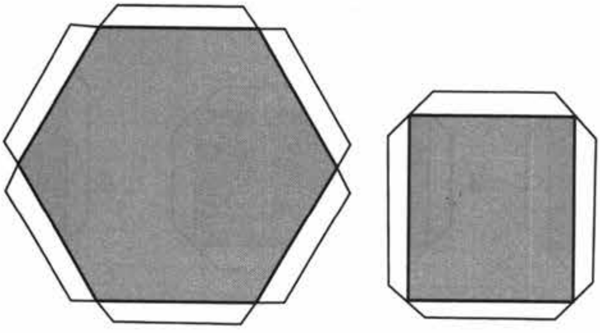


Рис. 11.5

Для изготовления модели правильной треугольной пирамиды нужно вырезать правильный треугольник с клапанами и три равных равнобедренных треугольника с клапанами, одна сторона которых равна стороне правильного треугольника, как показано на рисунке 11.6, и склеить их по соответствующим клапанам.

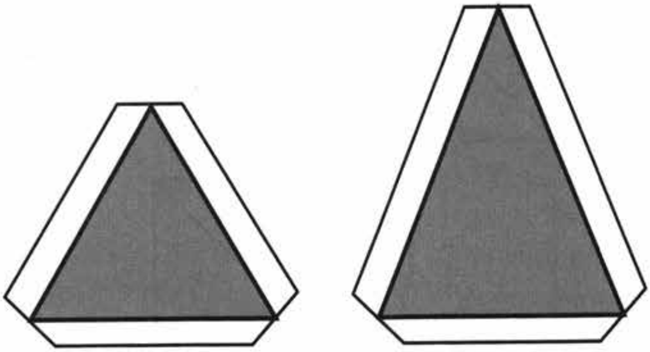


Рис. 11.6

Для изготовления модели правильной шестиугольной пирамиды нужно вырезать правильный шестиугольник с клапанами и шесть равных равнобедренных треугольников с клапанами, одна сторона которых равна стороне правильного шестиугольника, как показано на рисунке 11.7, и склеить их по соответствующим клапанам.

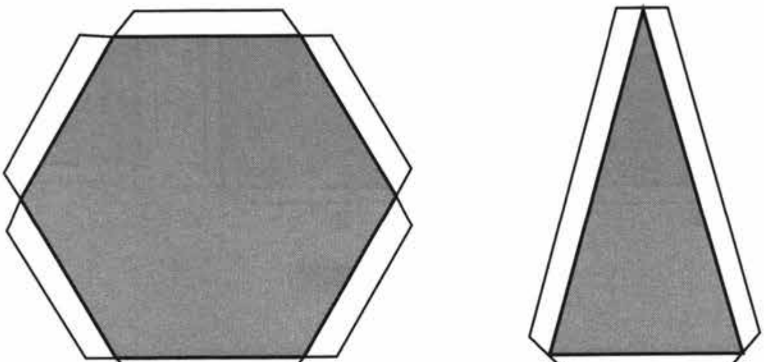


Рис. 11.7

Для изготовления модели невыпуклого многогранника, изображённого на рисунке 11.8, нужно вырезать два равных невыпуклых многоугольника с клапанами, два равных квадрата и четыре равных прямоугольника с клапанами, как показано на рисунке 11.9, и склеить их по соответствующим клапанам.

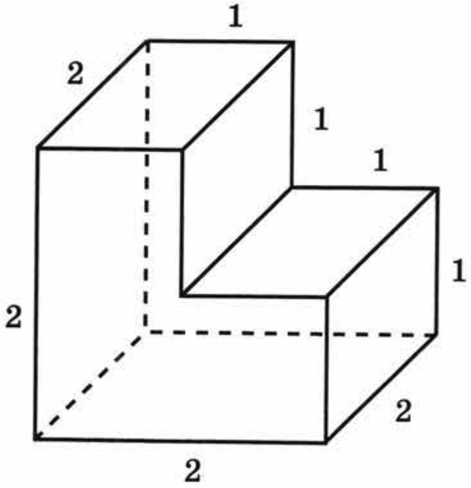


Рис. 11.8

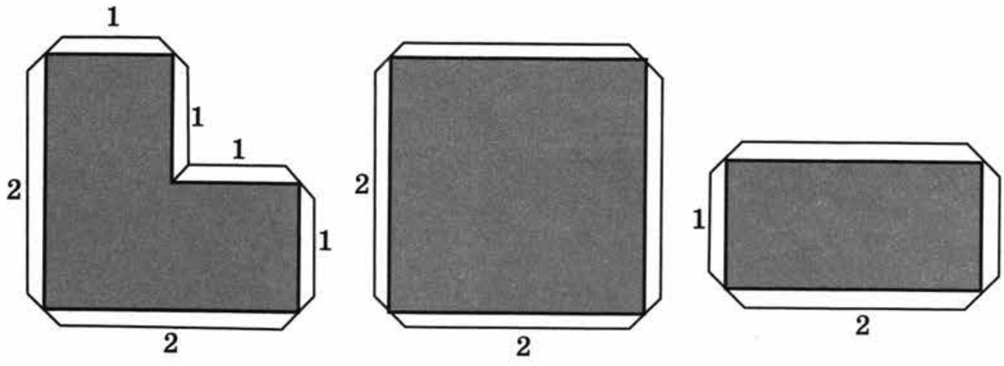


Рис. 11.9

Если поверхность многогранника разрезать по некоторым рёбрам и развернуть её на плоскость так, чтобы все многоугольники, входящие в эту поверхность, лежали в данной плоскости, то полученная фигура на плоскости называется ***развёрткой*** многогранника. Например, на рисунке 11.10 изображены развёртки куба и треугольной пирамиды.

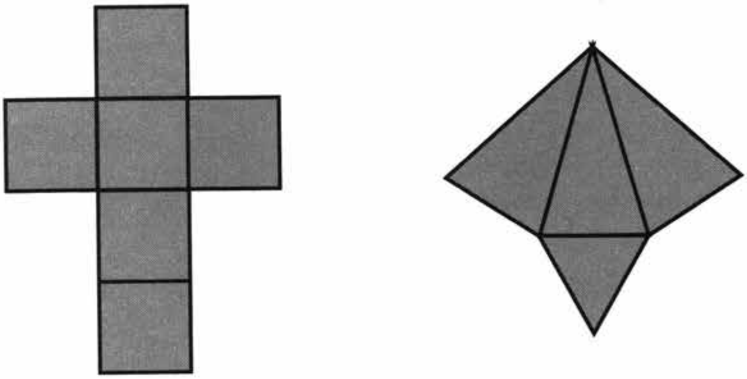


Рис. 11.10

Для изготовления модели многогранника из плотной бумаги, картона или другого материала достаточно изготовить его развёртку и затем склеить соответствующие рёбра. Для удобства склейки развёртку многогранника изготавливают с клапанами, по которым и производится склейка. На рисунке 11.11 показана развёртка куба с клапанами.

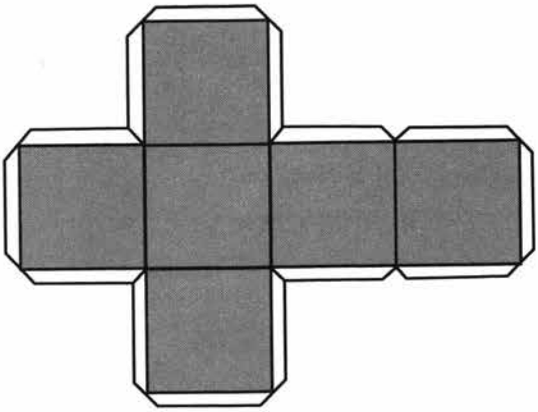


Рис. 11.11

На рисунке 11.12 показана развёртка наклонного параллелепипеда с клапанами, гранями которого являются ромбы с острыми углами 60°.

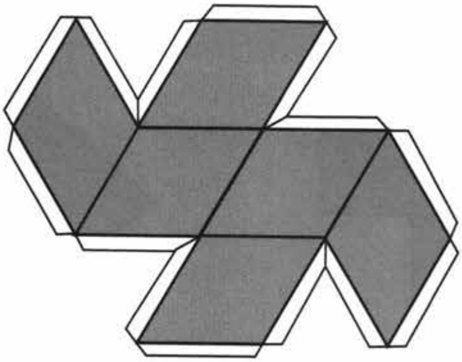


Рис. 11.12

На рисунке 11.13 показаны развёртки треугольной и шестиугольной правильных призм с клапанами.

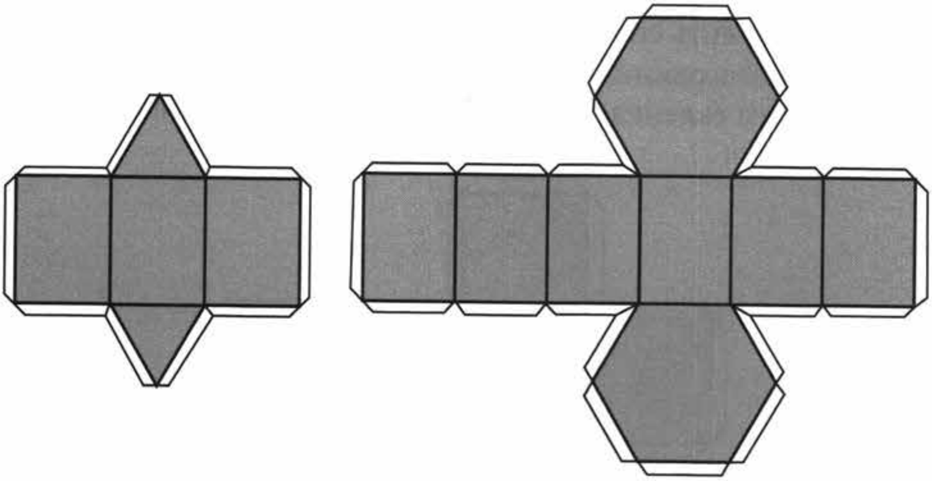


Рис. 11.13

На рисунке 11.14 показаны развёртки треугольной и шестиугольной правильных пирамид.

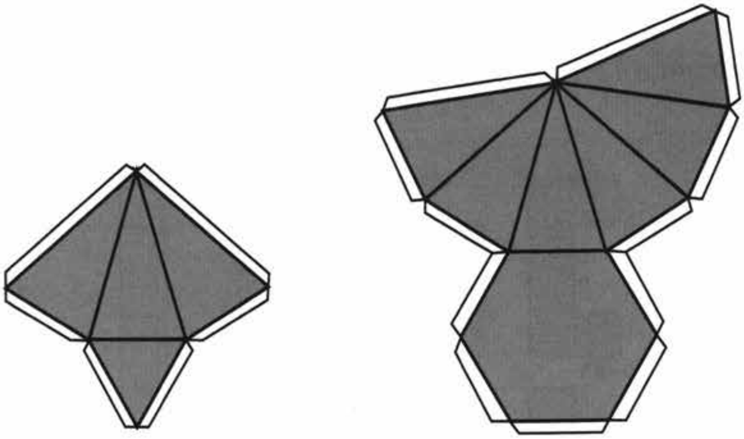


Рис. 11.14

Другим способом моделирования многогранников является изготовление моделей многогранников с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек – основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 11.15.

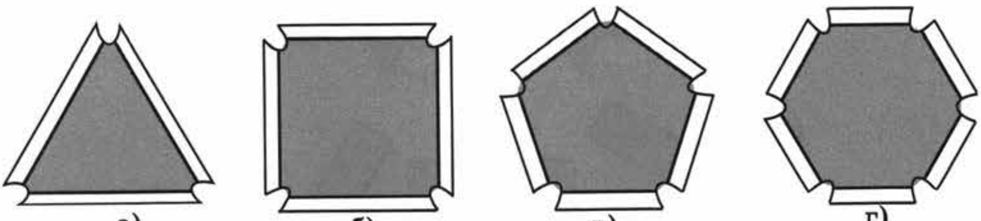


Рис. 11.15

Задачи

1. На рисунке 11.16 укажите развёртки куба.

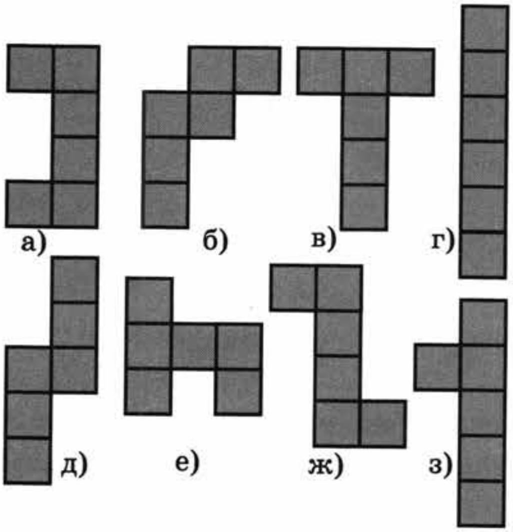


Рис. 11.16

2. На рисунке 11.17 укажите развёртки треугольной призмы.

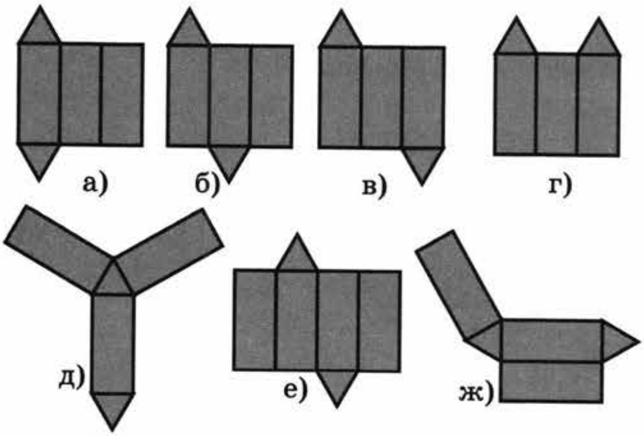


Рис. 11.17

3. На рисунке 11.18 укажите развёртки треугольной пирамиды.

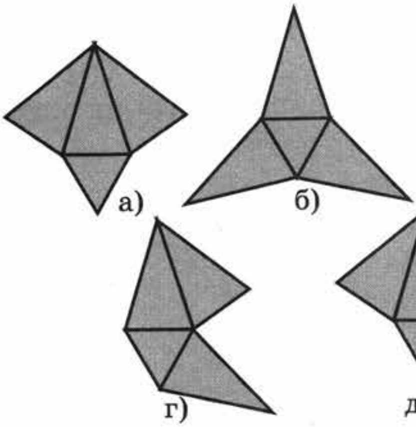


Рис. 11.18

4. На рисунке 11.19 укажите развёртки четырёхугольной пирамиды.

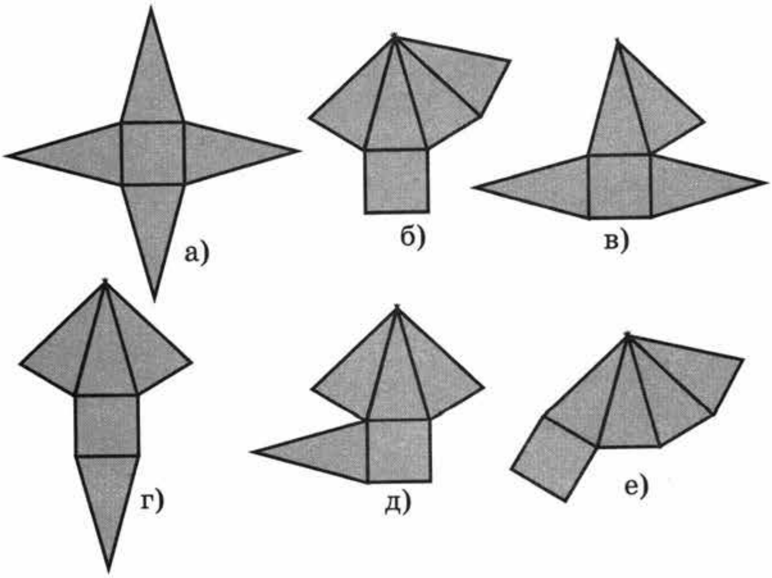


Рис. 11.19

5. По рисункам 11.1–11.9 изготовьте модели соответствующих многогранников.

6. По рисункам 11.11–11.14 изготовьте модели соответствующих многогранников.

7. Используя конструктор, изображенный на рисунке 11.15 а, б, изготовьте модели куба, треугольной пирамиды, четырёхугольной пирамиды, треугольной призмы.

§ 12. Правильные многогранники

На рисунке 12.1 изображены ***правильные многогранники***. Их гранями являются равные правильные многоугольники, и в вершинах каждого многогранника сходится одинаковое число граней.

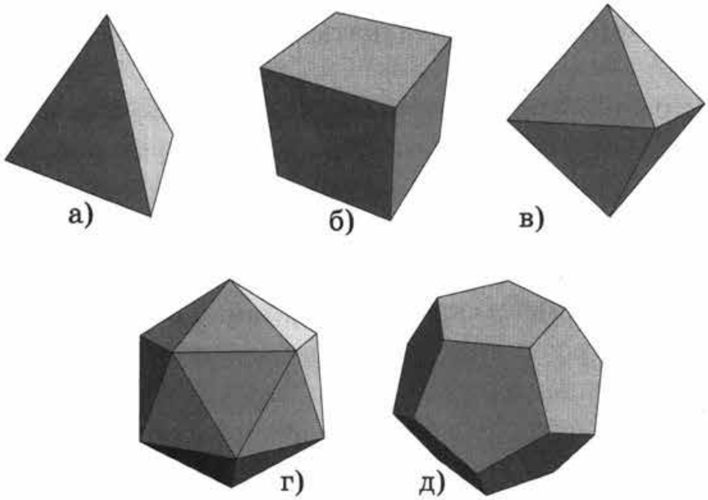


Рис. 12.1

Правильные многогранники с древних времён привлекали к себе внимание учёных. Пифагор и его ученики считали, что всё состоит из атомов, имеющих форму правильных многогранников. В частности, атомы огня имеют форму ***тетраэдра*** (его гранями являются четыре правильных треугольника, рисунок 12.1, а); земли – ***гексаэдра*** (***куб*** – многогранник, гранями которого являются шесть квадратов, рисунок 12.1, б); воздуха – ***октаэдра*** (его гранями являются восемь правильных треугольников, рисунок 12.1, в); воды – ***икосаэдра*** (его гранями являются двадцать правильных треугольников, рисунок 12.1, г); вся Вселенная, по мнению древних, имела форму ***додекаэдра*** (его гранями являются двенадцать правильных пятиугольников, рисунок 12.1, д).

Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий учёный Платон. Именно поэтому правильные многогранники называются также ***телами Платона***.

Названия многогранников тоже имеют древнегреческое происхождение. В переводе с греческого: «Тетра» – четыре; «Гекса» – шесть; «Окто» – восемь; «Икоси» – двадцать, «Додека» – двенадцать. «Эдра» – грань.

Модели правильных многогранников можно изготовлять с помощью конструктора. Напомним, что он состоит из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек – основной крепёжной детали конструктора. Подбирая соответствующим образом многоугольники в качестве граней многогранника и скрепляя их резиновыми колечками, можно получать модели различных правильных многогранников. Для того чтобы колечки лучше держались и не мешали друг другу, уголки многоугольников в конструкторе можно немного обрезать, как показано на рисунке 12.2.

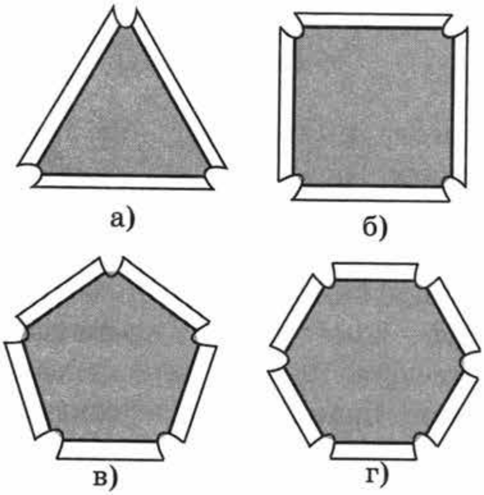


Рис. 12.2

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3.

2. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4.

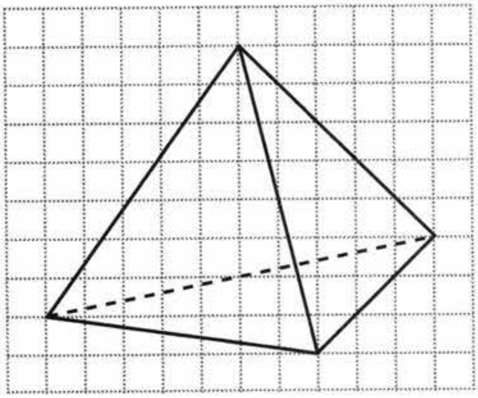


Рис. 12.3

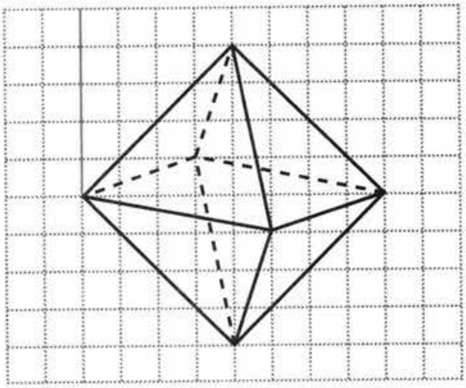


Рис. 12.4

3. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5.

4. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6.

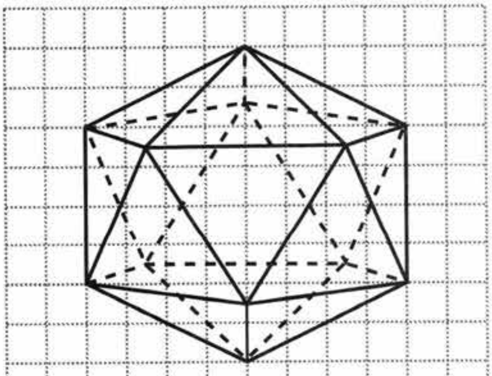


Рис. 12.5

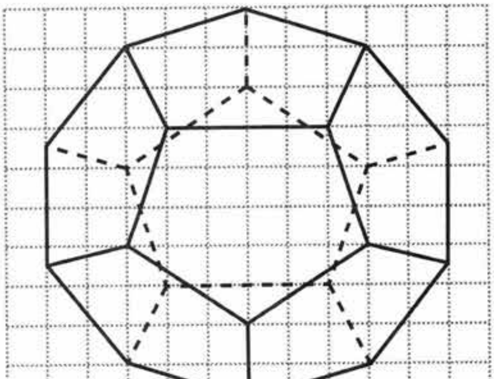


Рис. 12.6

5. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) тетраэдр; б) куб; в) октаэдр; г) икосаэдр; д) додекаэдр?

6. Представьте многогранник – бипирамиду, сложенную из двух равных тетраэдров совмещением каких-нибудь их граней (рис. 12.7). Будет ли он правильным многогранником? Почему?

7. На рисунке 12.8 изображён пространственный крест – многогранник, состоящий из семи кубов. Является ли он правильным? Сколько у него вершин (В), рёбер (Р), граней (Г)?

8. На рисунке 12.9 изображён многогранник – звезда Кеплера, составленный из двух тетраэдров. Какой многогранник является общей частью этих тетраэдров?

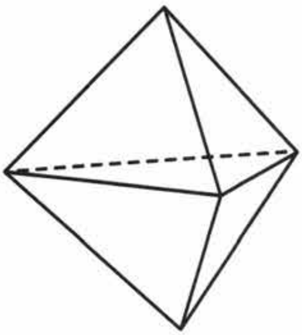


Рис. 12.7

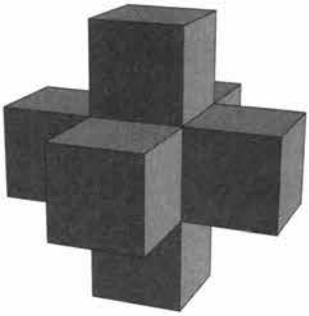


Рис. 12.8

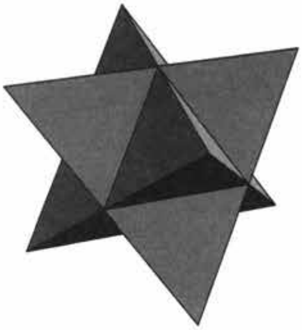


Рис. 12.9

9. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 12.10. Отметьте центры граней куба. Вершинами какого многогранника они являются?

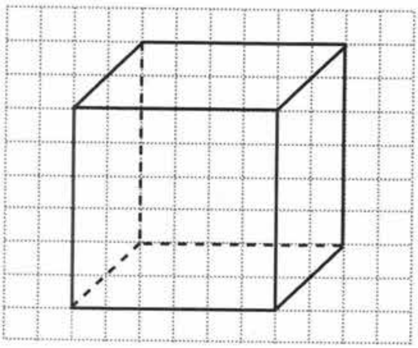


Рис. 12.10

10. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3. Отметьте центры граней тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

11. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4. Отметьте центры граней октаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

12. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5. Отметьте центры граней икосаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

13. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6. Отметьте центры граней додекаэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

14. На клетчатой бумаге изобразите тетраэдр аналогично данному на рисунке 12.3. Отметьте середины рёбер тетраэдра. Вершинами какого многогранника они являются?

15. От каждой вершины тетраэдра с ребром 2 см отсекается тетраэдр с ребром 1 см. Какой многогранник останется?

16. На рисунке 12.11 укажите развёртки октаэдра.

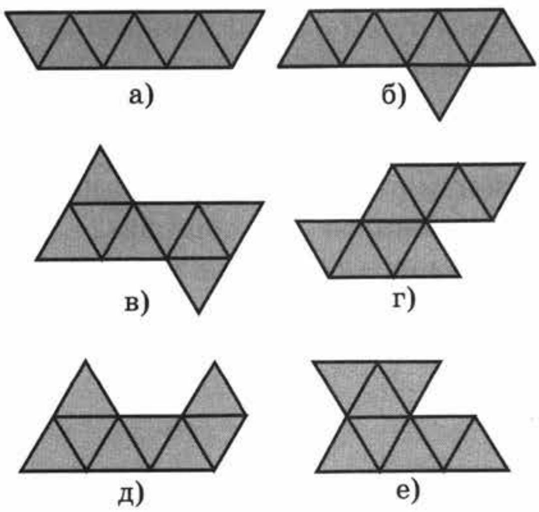


Рис. 12.11

17. Является ли фигура, изображённая на рисунке 12.12, развёрткой икосаэдра?

18. Является ли фигура, изображённая на рисунке 12.13, развёрткой додекаэдра?

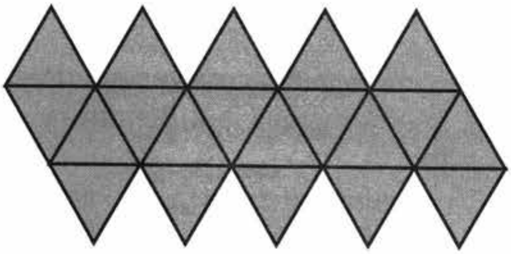


Рис. 12.12

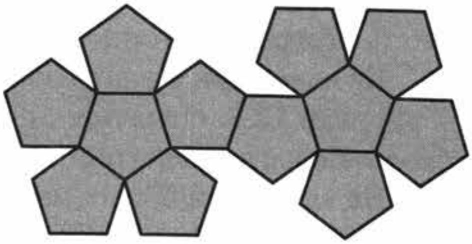


Рис. 12.13

19. Сколько имеется путей длиной 2 по рёбрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

20. Сколько имеется путей длиной 3 по рёбрам единичного октаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

21. Сколько имеется путей длиной 3 по рёбрам единичного икосаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

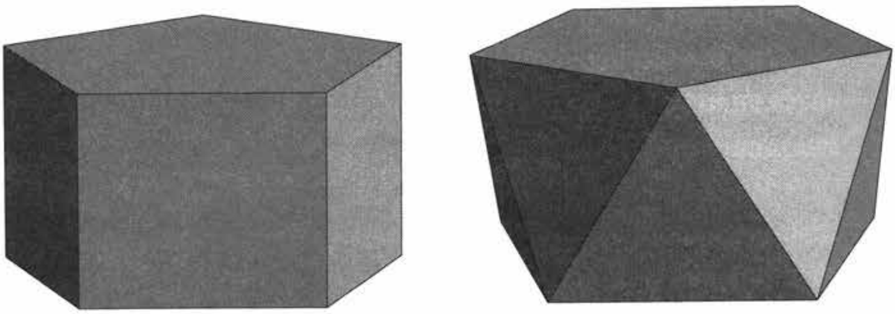
22. Сколько имеется путей длиной 5 по рёбрам единичного додекаэдра из одной его вершины в противоположную вершину?

23. Изготовьте модели правильных многогранников из конструктора (рис. 12.2). Резиновые колечки можно вырезать из велосипедной камеры. В зависимости от длины колечек выберите длины сторон правильных многоугольников. Для обычной велосипедной камеры стороны правильных многоугольников можно взять примерно равными 7 см.

§ 13. Полуправильные многогранники

В предыдущем параграфе мы рассмотрели правильные многогранники – выпуклые многогранники, у которых гранями являются равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Если допустить, что гранями многогранника могут быть правильные многоугольники с различным числом сторон, то получим многогранники, которые называются ***полуправильными***.

К полуправильным многогранникам относятся правильные n-угольные призмы, все рёбра которых равны. Например, правильная пятиугольная призма на рисунке 13.1, а имеет своими гранями два правильных пятиугольника – основания призмы – и пять квадратов, образующих боковую поверхность призмы. К полуправильным многогранникам относятся и так называемые ***антипризмы*** с равными рёбрами. На рисунке 13.1, б мы видим пятиугольную антипризму.



а) б)

Рис. 13.1

Кроме этих двух бесконечных серий полуправильных многогранников имеется ещё 13 полуправильных многогранников, которые впервые открыл и описал Архимед, – это ***тела Архимеда***.

Самые простые из них получаются из правильных многогранников операцией «усечения», состоящей в отсечении плоскостями углов многогранника. Если срезать углы тетраэдра плоскостями, каждая из которых отсекает третью часть его рёбер, выходящих из одной вершины, то получим ***усечённый тетраэдр***, имеющий восемь граней (рис. 13.2, а). Из них четыре – правильные шестиугольники и четыре – правильные треугольники. В каждой вершине этого многогранника сходятся три грани.

Если указанным образом срезать вершины октаэдра и икосаэдра, то получим соответственно ***усечённый октаэдр*** (рис. 13.2, б) и ***усечённый икосаэдр*** (рис. 13.2, в). Обратите внимание на то, что поверхность футбольного мяча изготавливают в форме поверхности усечённого икосаэдра. Из куба и додекаэдра также можно получить ***усечённый куб*** (рис. 13.2, г) и ***усечённый додекаэдр*** (рис. 13.2, д).

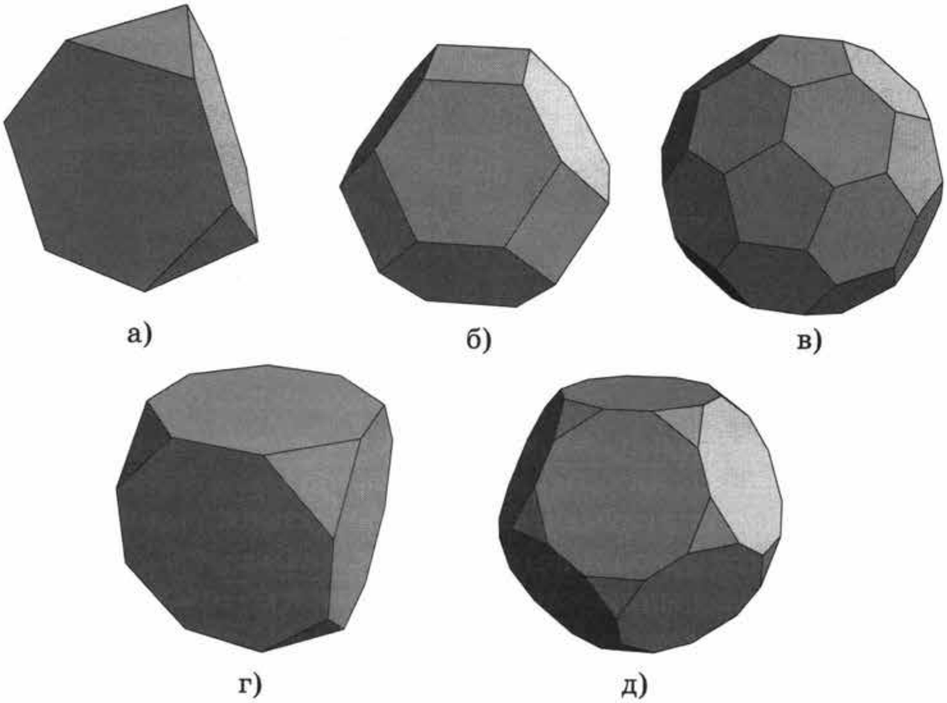
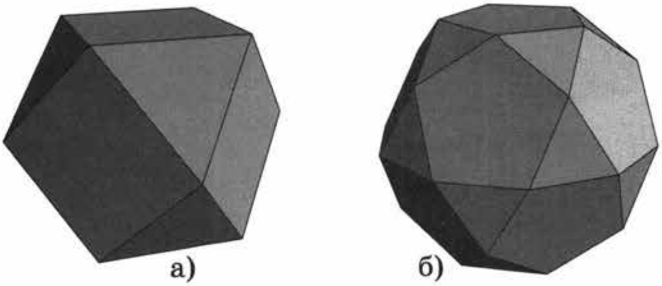


Рис. 13.2

Для того чтобы получить ещё один полуправильный многогранник, проведём в кубе отсекающие плоскости через середины рёбер, выходящих из одной вершины. В результате получим полуправильный многогранник, который называется ***кубооктаэдром*** (рис. 13.3, а). Его гранями являются шесть квадратов, как у куба, и восемь правильных треугольников, как у октаэдра. Отсюда и его название – кубооктаэдр.

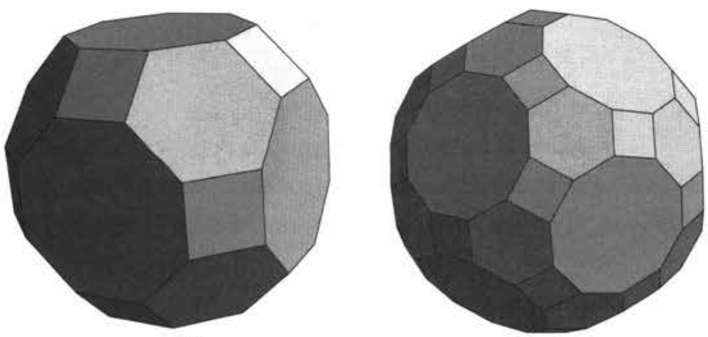
Аналогично если в додекаэдре отсекающие плоскости провести через середины рёбер, выходящих из одной вершины, то получим многогранник, который называется ***икосододекаэдром*** (рис. 13.3, б). У него двадцать граней – правильные треугольники и двенадцать граней – правильные пятиугольники, т. е. все грани икосаэдра и додекаэдра.



а) б)

Рис. 13.3

Хотя к последним двум многогранникам нельзя применить операцию усечения, тем не менее, существуют полуправильные многогранники, которые называются ***усечённый кубооктаэдр*** (рис. 13.4, а) и ***усечённый икосододекаэдр*** (рис. 13.4, б).

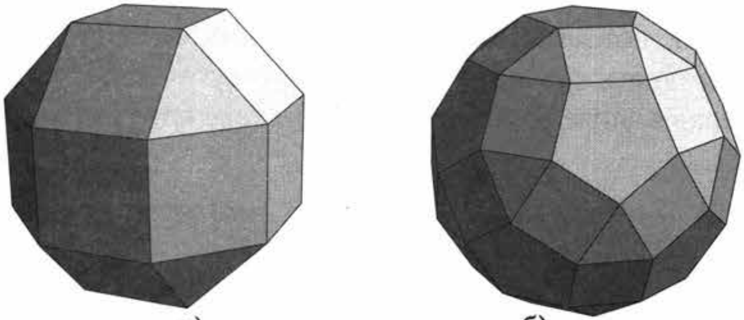


а) б)

Рис. 13.4

Мы рассмотрели 9 из 13 описанных Архимедом полуправильных многогранников. Четыре оставшихся – многогранники более сложного типа.

На рисунке 13.5, а мы видим ***ромбокубооктаэдр***. Он состоит из граней куба и октаэдра, к которым добавлены ещё 12 квадратов.

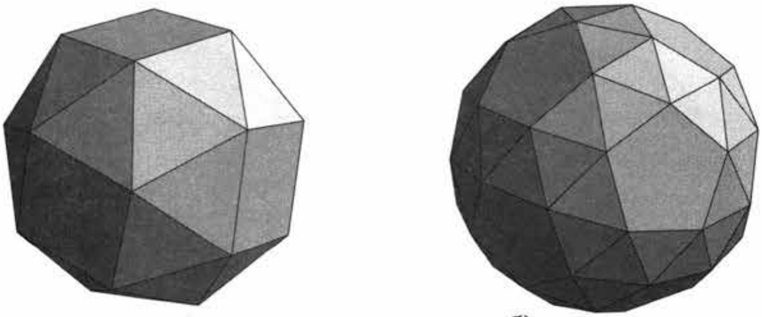


а) б)

Рис. 13.5

На рисунке 13.5, б изображён **ромбоикосододекаэдр**, состоящий из граней икосаэдра, додекаэдра и ещё 30 квадратов.

На рисунках 13.6, а и 13.6, б представлены соответственно так называемые **плосконосый** (иногда говорят **курносый**) **куб** и **плосконосый** (**курносый**) **додекаэдр**, которые состоят из граней куба или додекаэдра, окружённых правильными треугольниками.



а) б)

Рис. 13.6

Модели полуправильных многогранников можно изготовить из развёрток. Например, на рисунке 13.7 изображена развёртка усечённого тетраэдра.

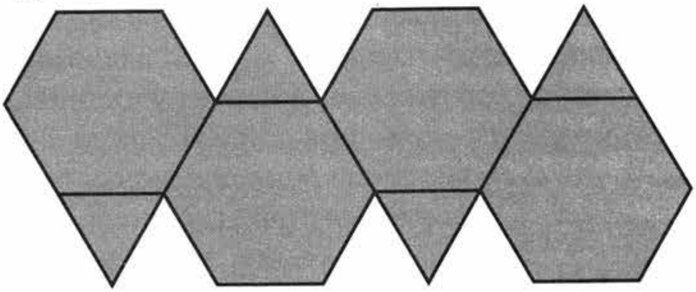


Рис. 13.7

Модели полуправильных многогранников можно изготовлять с помощью конструктора, состоящего из многоугольников, сделанных из плотного материала с отгибающимися клапанами и резиновых колечек – основной крепёжной детали конструктора (рис. 12.2).

Исторические сведения

Вслед за Евклидом изучением пяти правильных многогранников занимался Архимед (287–212 гг. до н. э.). Убедившись в том, что нельзя построить шестой правильный многогранник, Архимед стал строить многогранники, у которых гранями являются правильные, но не одноимённые многоугольники, а в каждой вершине, как и у правильных многогранников, сходится одно и то же число рёбер. Так он получил 13 равноугольно-полуправильных многогранников. До нас дошла работа самого учёного «О многогранниках», в которой подробно описаны и даны рисунки всех 13 многогранников, названных в честь учёного телами Архимеда.

Сам Архимед был уникальным учёным – механиком, физиком, математиком, инженером. Основной чертой его творчества было единство теории и практики, что делает изучение трудов Архимеда интересным и полезным для историков современной математики, для учёных многих специальностей. Широко известна теорема Архимеда о потере веса телами, погружёнными в жидкость. Эта теорема находится в трактате «О плавающих телах» и в современных учебниках по физике называется законом Архимеда. Среди инженерных изобретений учёного известна катапульта – «архимедов винт» (иногда его называют также «кохлея» – улитка) для поднятия наверх воды – это оборонное сооружение. Архимед участвовал в защите своего родного города Сиракузы, при осаде которого и погиб. Архимед, по выражению современников, был околдован геометрией, и, хотя у него было много прекрасных открытий, он просил на могиле начертить цилиндр и содержащийся в нём шар и указать соотношение их объёмов. Позже именно по этому памятнику и была найдена могила великого учёного.

Задачи

1. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) пятиугольная призма; б) пятиугольная антипризма?

2. Сколько вершин (В), рёбер (Р) и граней (Г) имеет: а) усечённый тетраэдр; б) усечённый куб; в) усечённый октаэдр; г) усечённый икосаэдр; д) усечённый додекаэдр?

3. Форму какого многогранника напоминает футбольный мяч?

4. На клетчатой бумаге изобразите куб аналогично данному на рисунке 12.10. Отметьте середины рёбер куба. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

5. На клетчатой бумаге изобразите октаэдр аналогично данному на рисунке 12.4. Отметьте середины рёбер октаэдра. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

6. На клетчатой бумаге изобразите икосаэдр аналогично данному на рисунке 12.5. Отметьте середины рёбер икосаэдра. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

7. На клетчатой бумаге изобразите додекаэдр аналогично данному на рисунке 12.6. Отметьте середины рёбер додекаэдра. Нарисуйте многогранник, вершинами которого являются отмеченные точки. Как он называется? Сколько у него: а) вершин (В); б) рёбер (Р); в) граней (Г)?

8. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.8?

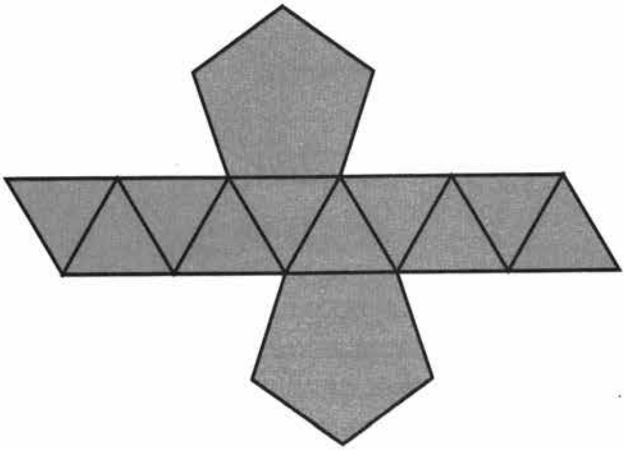


Рис. 13.8

9. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.9?

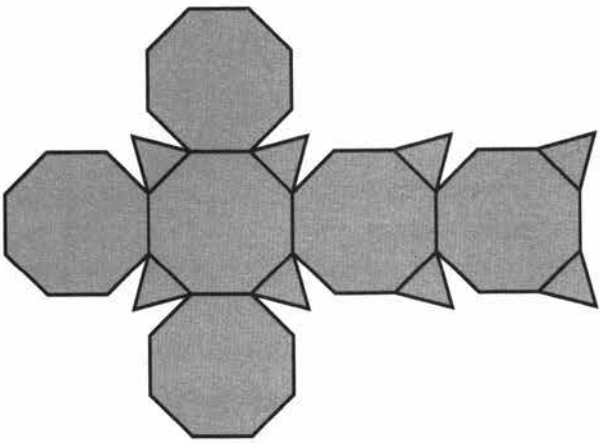


Рис. 13.9

10. Развёртка какого многогранника изображена на рисунке 13.10?

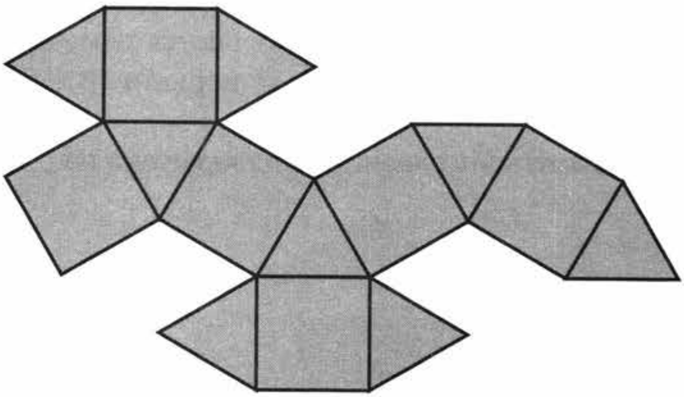


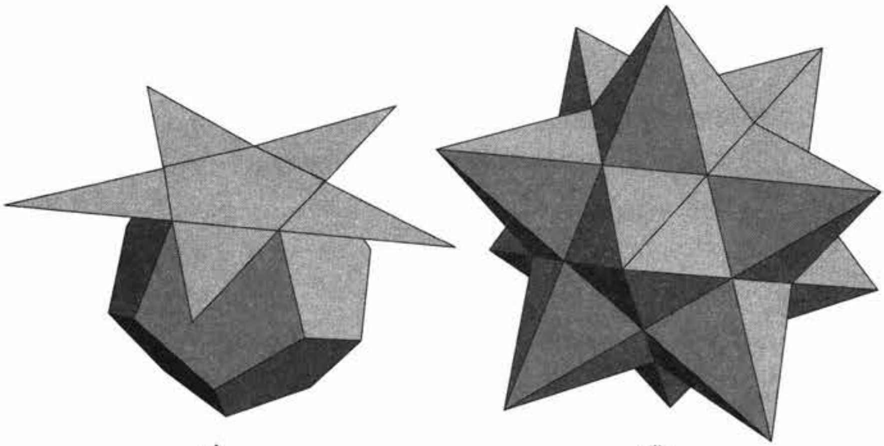
Рис. 13.10

11. Изготовьте модели полуправильных многогранников из конструктора (рис. 12.2). Резиновые колечки можно вырезать из велосипедной камеры. В зависимости от длины колечек выберите длины сторон правильных многоугольников. Для обычной велосипедной камеры стороны правильных многоугольников можно взять примерно равными 7 см.

§ 14. Звёздчатые многогранники

Кроме правильных и полуправильных многогранников красивые формы имеют так называемые звёздчатые многогранники. Здесь мы рассмотрим правильные звёздчатые многогранники. Их всего четыре. Первые два были открыты И. Кеплером (1571–1630), а два других почти 200 лет спустя построил Л. Пуансо (1777–1859). Именно поэтому правильные звёздчатые многогранники называются ***телами Кеплера–Пуансо***. Они получаются из правильных многогранников продолжением их граней или рёбер.

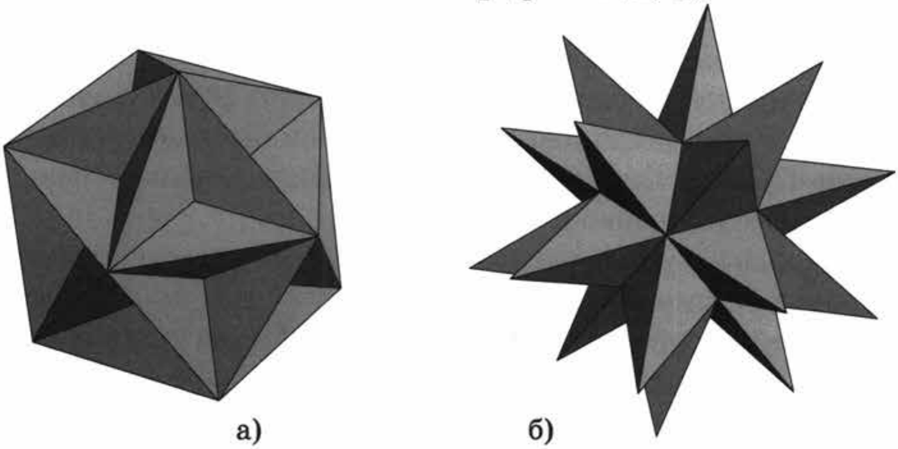
Из тетраэдра, куба и октаэдра звёздчатые многогранники не получаются. Рассмотрим додекаэдр. Продолжение его рёбер приводит к замене каждой грани звёздчатым правильным пятиугольником (рис. 14.1, а), и в результате возникает многогранник, который называется ***малым звёздчатым додекаэдром*** (рис. 14.1, б).



а) б)

Рис. 14.1

При продолжении граней додекаэдра возникают две возможности. Если рассматривать правильные пятиугольники, то получится так называемый ***большой додекаэдр*** (рис. 14.2, а). Если же в качестве граней рассматривать звёздчатые пятиугольники, то получается ***большой звёздчатый додекаэдр*** (рис. 14.2, б).



а) б)

Рис. 14.2

Икосаэдр имеет одну звёздчатую форму. При продолжении граней икосаэдра получается ***большой икосаэдр*** (рис. 14.3).

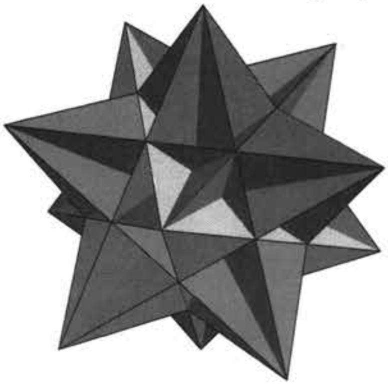


Рис. 14.3

Таким образом, существуют 4 типа правильных звёздчатых многогранников.

Рассмотрим способ изготовления модели малого звёздчатого додекаэдра, который, как сказано выше, получается из додекаэдра путём продолжения его рёбер до самопересечения. Это очень красивый многогранник, который может украсить и школьный кабинет, и домашний рабочий уголок.

Нужно изготовить 12 боковых поверхностей правильных пятиугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношениии 5:8. Развёртка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.4. Затем нужно склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

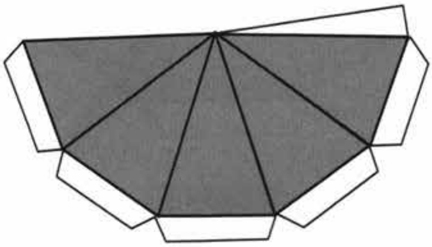


Рис. 14.4

Для изготовления модели большого додекаэдра (рис. 14.2, а) нужно изготовить 20 боковых поверхностей правильных треугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношении 8:5. Развёртка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.5. Затем нужно склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

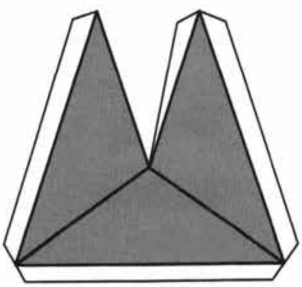


Рис. 14.5

Для изготовления модели большого звёздчатого додекаэдра (рис. 14.2, б) нужно изготовить 20 боковых поверхностей правильных треугольных пирамид, сторона основания и боковое ребро которых находятся в отношении 5:8. Развертка соответствующей правильной пирамиды показана на рисунке 14.6. Затем нужно склеить эти пирамиды по клапанам, примыкающим к соответствующим сторонам оснований.

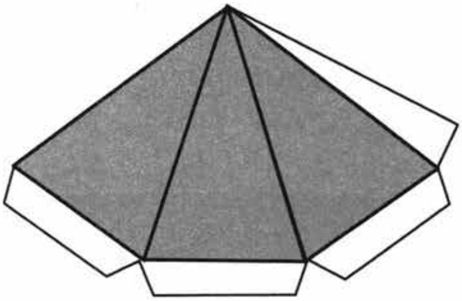


Рис. 14.6

Задачи

1. Сколько тетраэдров изображено на рисунке 14.7?

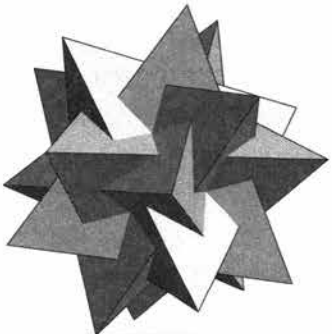


Рис. 14.7

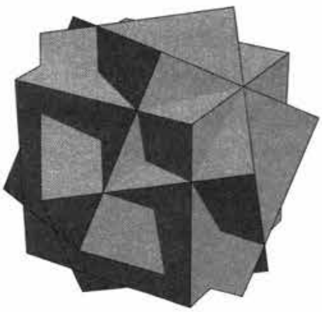


Рис. 14.8

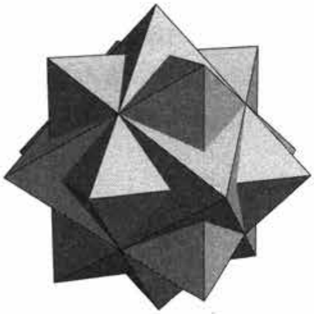


Рис. 14.9

2. Сколько кубов изображено на рисунке 14.8?
3. Сколько октаэдров изображено на рисунке 14.9?

4. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.10?

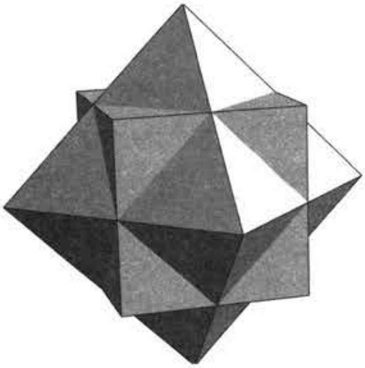


Рис. 14.10

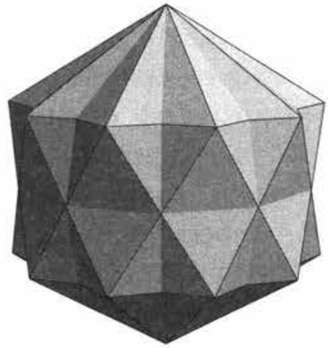


Рис. 14.11

5. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.11?

6. Соединение каких двух многогранников изображено на рисунке 14.12?

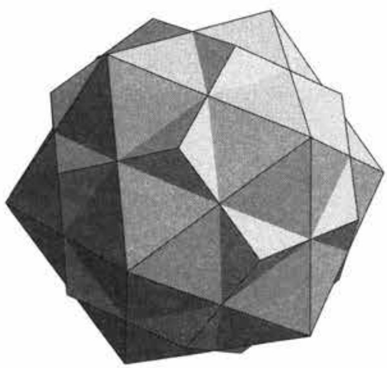


Рис. 14.12

7. Изготовьте модели звёздчатых многогранников из развёрток на рисунках 14.4–14.6.

§ 15. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на данное расстояние (рис. 15.1).

Данная точка называется ***центром окружности***, а данное расстояние – ***радиусом окружности***. Радиусом называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром.

Таким образом, окружность с центром O и радиусом R состоит из всех точек A плоскости, для которых выполняется равенство $OA = R$.

Окружности проводятся на листе бумаги или доске с помощью циркуля.

Кругом называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки на расстояние, не превосходящее данное (рис. 15.2).

Данная точка называется ***центром круга***, а данное расстояние – ***радиусом круга***.

Круг можно представлять себе как фигуру, ограниченную окружностью.

Отрезок, соединяющий произвольные две точки окружности, называется ***хордой*** этой окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется ***диаметром*** этой окружности (рис. 15.3)

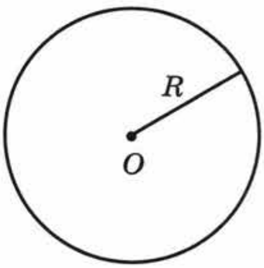


Рис. 15.1

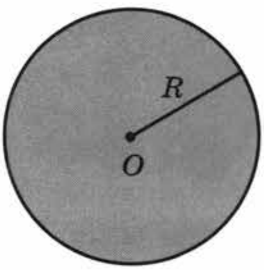


Рис. 15.2

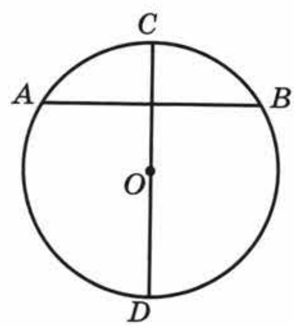


Рис. 15.3

Хордой и диаметром круга называют соответственно хорду и диаметр окружности, ограничивающей этот круг.

Рассмотрим случаи взаимного расположения двух окружностей.

1. Две окружности могут не иметь общих точек (рис. 15.4). При этом они могут находиться вне друг друга (рис. 15.4, а) или одна внутри другой (рис. 15.4, б).

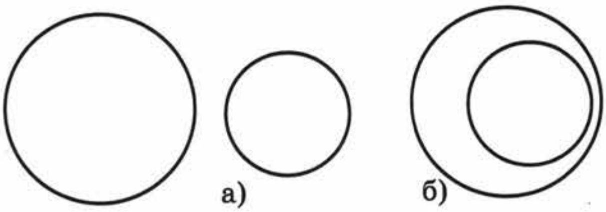


Рис. 15.4

2. Две окружности могут иметь одну общую точку (рис. 15.5). В этом случае говорят, что окружности ***касаются.*** При этом окружности могут касаться внешним образом (рис. 15.5,а) или внутренним образом (рис. 15.5, б).

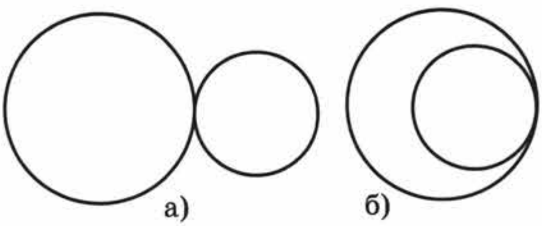


Рис. 15.5

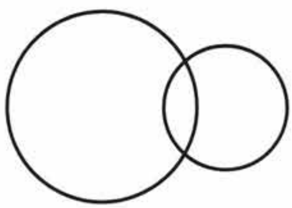


Рис. 15.6

3. Две окружности могут иметь две общие точки (рис. 15.6). В этом случае говорят, что окружности ***пересекаются***.

Взаимное расположение двух окружностей зависит от их радиусов и расстояния между центрами.

Для приближённого нахождения ***длины окружности*** радиуса R можно нарисовать эту окружность на бумаге и расположить вдоль неё нитку. Развернув нитку и измерив её длину, найдем приближённую длину окружности. Оказывается, длина окружности радиуса R приближённо равна $6R$. Более точное значение длины окружности будет рассмотрено в курсе геометрии 7–9 классов.

Если окружность имеет длину l, то её дуга, заключённая внутри угла AOB с вершиной в центре O этой окружности и градусной величиной 1°, имеет длину, равную $\frac{l}{360}$, а длина дуги окружности, заключённая внутри угла градусной величиной n°, равна $\frac{l \cdot n}{360}$ (рис. 15.7).

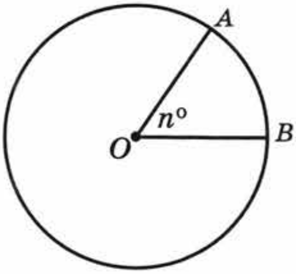


Рис. 15.7

Вопросы

1. Какая фигура называется окружностью? Что называется: а) центром окружности; б) радиусом окружности?

2. С помощью чего проводятся окружности на листе бумаги или доске?

3. Какая фигура называется кругом? Что называется: а) центром; б) радиусом круга?

4. Что называется: а) хордой; б) диаметром окружности?

5. Какие две окружности касаются?

6. Какие две окружности пересекаются?

7. Чему приближённо равна длина окружности радиуса R?

Задачи

1. Какому неравенству удовлетворяют точки A, лежащие: а) в круге с центром в точке O и радиусом R; б) вне этого круга?

2. Сколько диаметров можно провести через центр окружности?

3. Сколько окружностей может проходить через две заданные точки?

4. Найдите диаметр окружности, если известно, что он на 55 мм больше радиуса.

5. Найдите длину наибольшей хорды в окружности, радиус которой равен 5 см.

6. Расстояние между точками A и B равно 2 см. Найдите наименьший возможный радиус окружности, проходящей через эти точки.

7. Нарисуйте окружность, которая проходит через данные точки A и B ($AB = 6$ см) и имеет радиус 3 см.

8. На клетчатой бумаге отметьте точки A, B, C, D, как показано на рисунке 15.8. Укажите центр окружности, проходящей через эти точки.

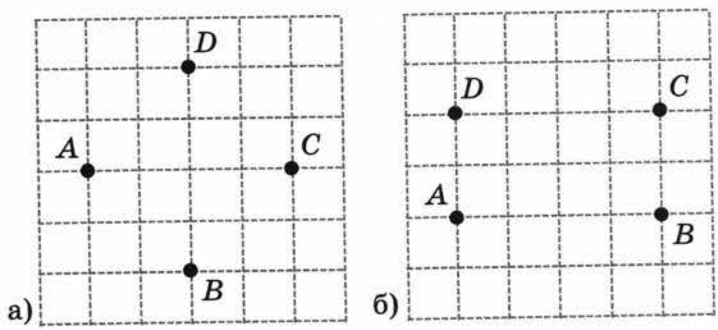


Рис. 15.8

9. Точка A расположена вне окружности радиуса 1 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 3. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

10. Точка A расположена внутри окружности радиуса 3 и удалена от центра O этой окружности на расстояние 1. Чему равны наименьшее и наибольшее расстояния от точки A до точек данной окружности?

11. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной вне окружности, до точек окружности равны соответственно 5 см и 2 см. Найдите радиус данной окружности.

12. Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки, расположенной внутри окружности, до точек окружности равны соответственно 20 и 4. Найдите радиус данной окружности.

13. На рисунке 15.9 изображена фигура, называемая ***кольцом***. Сформулируйте определение этой фигуры.

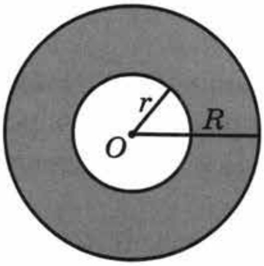


Рис. 15.9

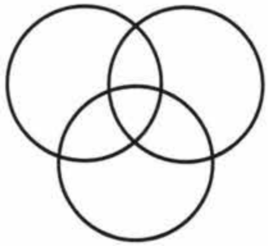


Рис. 15.10

14. На сколько частей окружность разбивает плоскость?

15. Сколько общих точек могут иметь две окружности?

16. На сколько частей могут разбивать плоскость две окружности?

17. Как расположены относительно друг друга две окружности радиусов 1 и 2, расстояние между центрами которых равно: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4? Изобразите эти случаи.

18. На сколько частей разбивают плоскость три окружности, изображённые на рисунке 15.10?

19. Чему равно приближённое значение длины окружности радиуса 1?

20. Диаметр окружности равен 4. Чему равно приближённое значение длины окружности?

21. Радиус окружности равен 3. Чему равно приближённое значение длины полуокружности?

22. Длина окружности равна 12. Чему равно приближённое значение её радиуса?

23. Колесо радиуса 1 м прокатилось по прямой 10 м. Сколько полных оборотов оно сделало (рис. 15.11)?

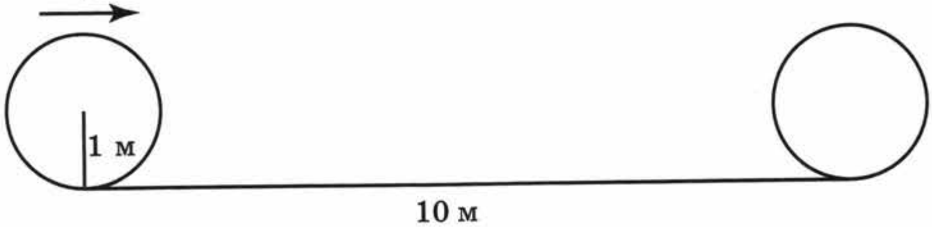


Рис. 15.11

24. Какое наибольшее число людей можно рассадить за круглым столом радиуса 1 м так, чтобы на каждого человека приходилось не менее 60 см длины дуги окружности стола (рис. 15.12)?

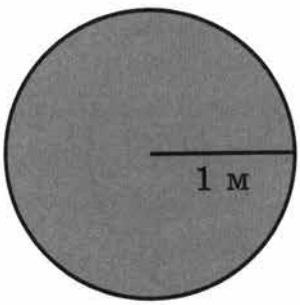


Рис. 15.12

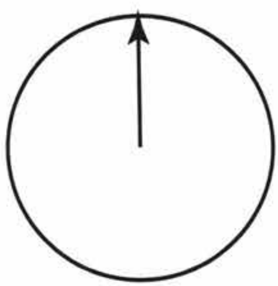


Рис. 15.13

25. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м (рис. 15.13). Найдите приближённую длину окружности (в метрах), которую описывает конец минутной стрелки в течение одного часа.

26. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. Найдите приближённую длину пути (в сантиметрах), который проходит её конец за 1 минуту.

27. Длина минутной стрелки часов на Спасской башне Московского Кремля приблизительно равна 3,5 м. За сколько минут её конец пройдёт путь длиной 105 см?

28. Под каким углом человек видит ноготь своего указательного пальца вытянутой руки, если ширина ногтя примерно равна 1 см, а

расстояние от него до глаза человека примерно равно 60 см? В ответе укажите целое число градусов.

29. Человек среднего роста (1,7 м) виден издали под углом 1°. Найдите расстояние до него. В ответе укажите целое число метров.

30. Длина экватора земного шара примерно равна 40 000 км. На сколько метров увеличился бы этот экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 м?

31. Москва и Новороссийск расположены примерно на одном меридиане под 56° и 44° северной широты соответственно (рис. 15.14). Найдите расстояние между ними по земной поверхности, считая длину большой окружности земного шара равной 40 000 км. В ответе укажите целое число километров.

Рис. 15.14

32. Луна видна с Земли под углом 0,5°. Найдите приближённое расстояние до Луны, зная, что её диаметр приближённо равен 3400 км. В ответе укажите целое число километров.

33. Солнце видно с Земли под углом 0,5°. Найдите приближённое расстояние до Солнца, зная, что его диаметр приближённо равен 1 300 000 км. В ответе укажите целое число километров.

34. Придумайте способ приближённого измерения длины окружности колеса велосипеда.

35. Придумайте способ приближённого измерения диаметра круглого ствола дерева.

§ 16. Геометрические места точек

Один из основных способов задания фигур на плоскости заключается в указании свойства, которому удовлетворяют точки этой фигуры.

Фигуры, состоящие из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству, получили особое название «геометрические места точек».

Таким образом, ***геометрическим местом точек*** называется фигура, состоящая из всех точек, удовлетворяющих заданному свойству или нескольким заданным свойствам.

Поясним смысл слов «всех точек, удовлетворяющих заданному свойству» в этом определении. Они означают, что все точки, принадлежащие фигуре, удовлетворяют заданному свойству и, наоборот, все точки, удовлетворяющие заданному свойству, принадлежат фигуре. Другими словами, точка принадлежит фигуре в том и только том случае, когда для неё выполняется заданное свойство.

Например, окружность с центром O и радиусом R можно определить как геометрическое место точек A, для которых расстояние OA равно R.

Круг с центром O и радиусом R можно определить как геометрическое место точек A, для которых расстояние OA меньше или равно R.

Вопросы

1. Что называется геометрическим местом точек?

2. Сформулируйте определение окружности, используя геометрическое место точек.

3. Сформулируйте определение круга, используя геометрическое место точек.

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите точку O (рис. 16.1). Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и удалённые от точки O на расстояние: а) равное 2; б) меньшее 2; в) большее 2 и меньшее 3.

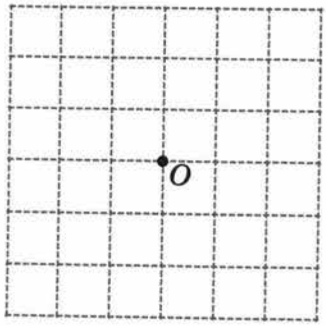


Рис. 16.1

2. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 16.2. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки и равноудалённые от точек A и B.

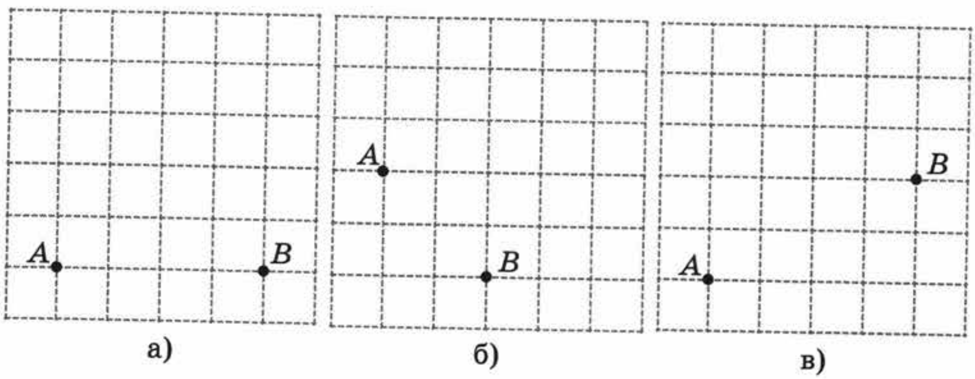
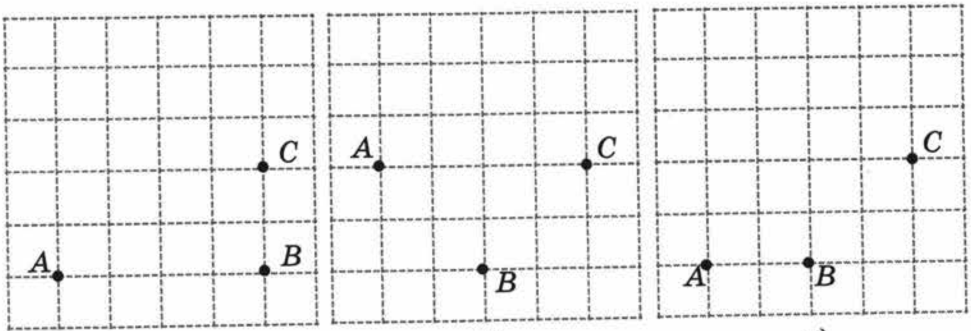


Рис. 16.2

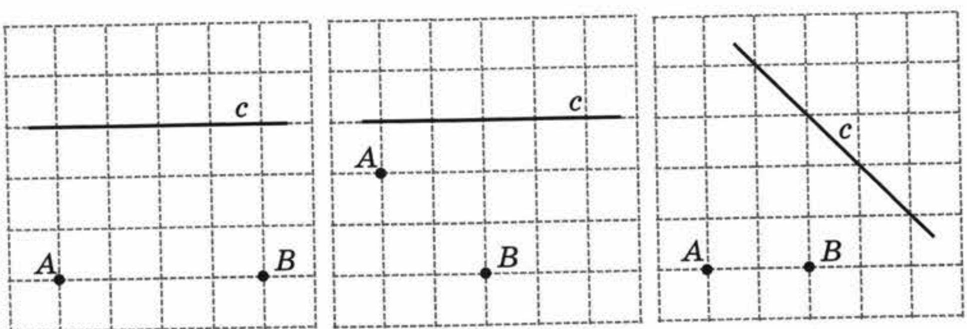
3. На клетчатой бумаге изобразите точки A, B и C, как показано на рисунке 16.3. Отметьте точку, равноудалённую от точек A, B и C.



а) б) в)

Рис. 16.3

4. На клетчатой бумаге изобразите точки A, B и прямую c, как показано на рисунке 16.4. На прямой c отметьте точку, равноудалённую от точек A и B.



а) б) в)

Рис. 16.4

5. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 16.5. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояние от которых до точки A: а) меньше, чем расстояние до точки B (рис. 16.5, а); б) больше, чем расстояние до точки B (рис. 16.5, б).

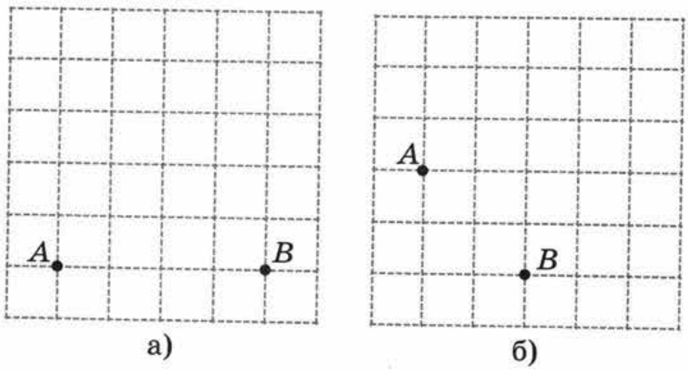


Рис. 16.5

6. Нарисуйте окружности, как показано на рисунке 16.6. Закрасьте область, состоящую из всех точек A, для которых: а) $AO < 1$ и $AP < 1$; б) $AO < 1$ и $AP > 1$.

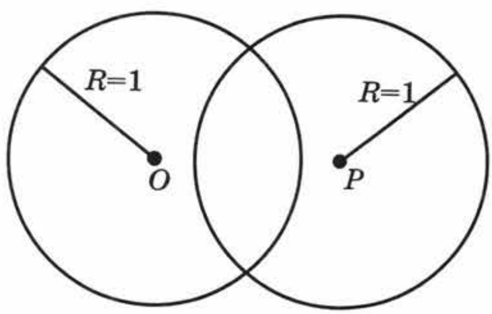


Рис. 16.6

7. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 16.7. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, расстояния от которых до точек A и B: а) меньше трёх; б) меньше или равны двум.

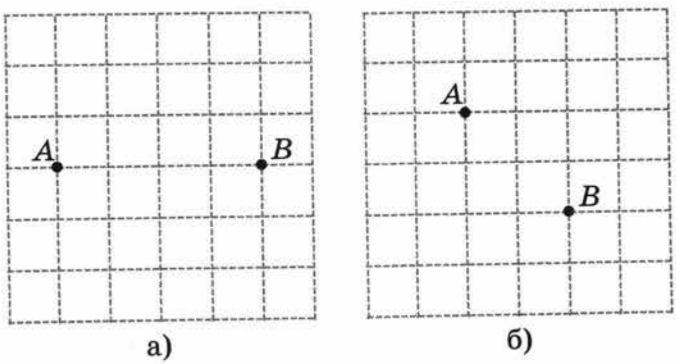


Рис. 16.7

8. На клетчатой бумаге изобразите точки A и B, как показано на рисунке 16.8. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки: а) расстояние от которых до точки A меньше трёх, а расстояние до точки B меньше двух (рис. 16.8, а); б) расстояние от которых до точки A больше двух, а расстояние до точки B меньше двух (рис. 16.8, б).

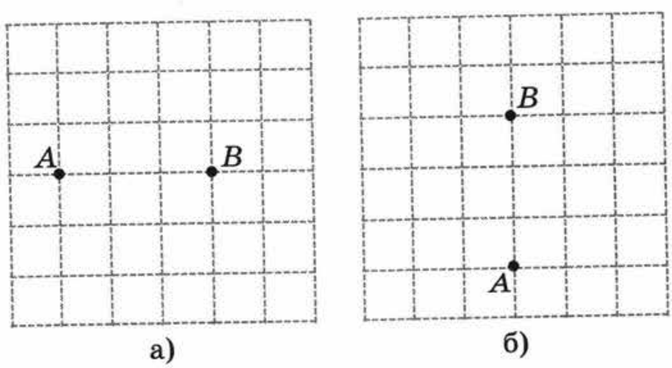


Рис. 16.8

9. На клетчатой бумаге изобразите точки A, B и C, как показано на рисунке 16.9. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки: а) расстояние от которых до точки A меньше, чем расстояние до точки B, и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C (рис. 16.9, а); б) расстояние от которых до точки A больше, чем расстояние до точки B, и расстояние до точки B меньше, чем расстояние до точки C (рис. 16.9, б).

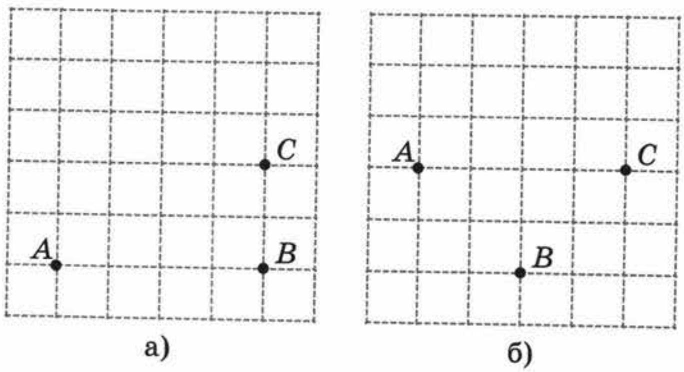


Рис. 16.9

10. Изобразите окружности, как показано на рисунке 16.10. Закрасьте область, состоящую из всех точек A, для которых: а) $AO < 1$, $AP < 1$ и $AQ < 1$; б) $AO < 1$, $AP < 1$ и $AQ > 1$; в) $AO < 1$, $AP > 1$ и $AQ > 1$.

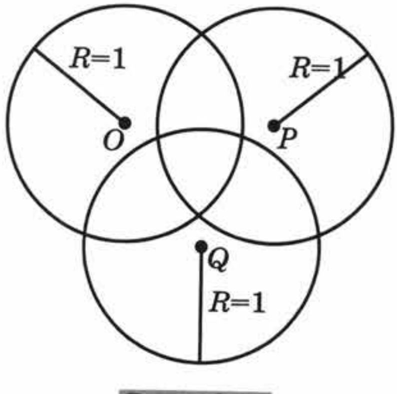


Рис. 16.10

11. На клетчатой бумаге изобразите отрезок AB, как показано на рисунке 16.11. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 90°.

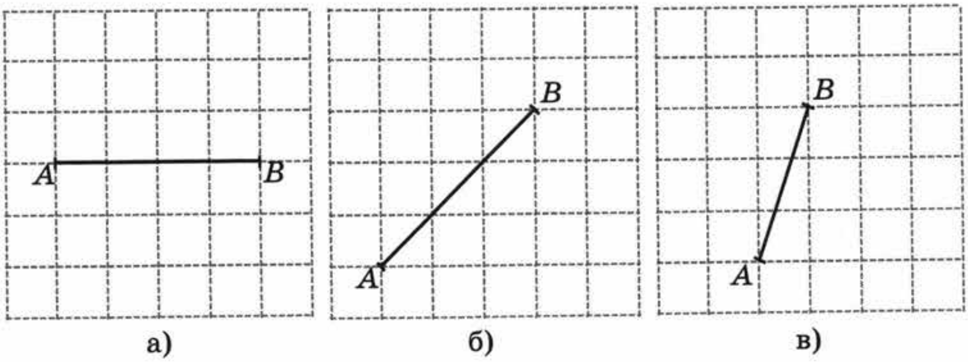


Рис. 16.11

12. На клетчатой бумаге изобразите отрезок AB, как показано на рисунке 16.12. Отметьте точки, расположенные в узлах сетки, из которых отрезок AB виден под углом 45°.

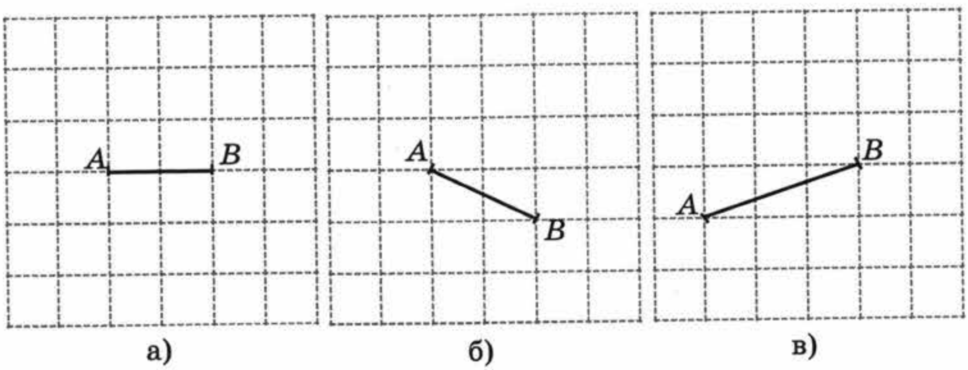


Рис. 16.12

§ 17*. Графы

Фигура образованная конечным набором точек плоскости и отрезков, соединяющих некоторые из этих точек, называется ***плоским графом,*** или просто ***графом*** (рис. 17.1, а). Точки называются ***вершинами***, а отрезки – ***рёбрами*** графа.

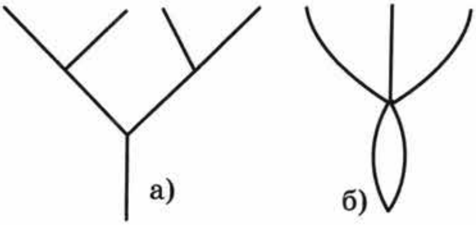


Рис. 17.1

Вместо отрезков в качестве рёбер графов рассматриваются также кривые линии на плоскости (рис. 17.1, б).

Примерами графов могут служить схемы метрополитена, железных и шоссейных дорог, планы выставок и т. д.

Исторически сложилось так, что теория графов зародилась в ходе решения головоломок двести с лишним лет назад. Одной из таких задач-головоломок была задача о кёнигсбергских мостах, которая привлекла к себе внимание Леонарда Эйлера (1707–1783), долгое время жившего и работавшего в России (с 1727 по 1741 год и с 1766 до конца жизни).

Задача. В г. Кёнигсберге (ныне Калининград) было семь мостов через реку Прегель (рис. 17.2, где *Л* – левый берег, *П* – правый берег, *А* и *Б* – острова). Можно ли, прогуливаясь по берегам реки, пройти через каждый мост ровно один раз?

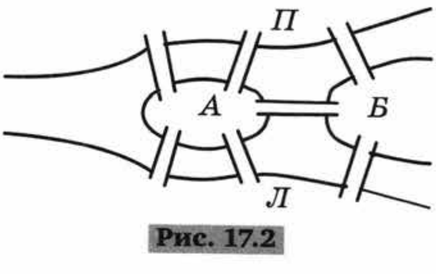


Рис. 17.2

Эта задача связана с другими головоломками, суть которых заключалась в том, чтобы обвести контур некоторой фигуры, не отрывая карандаша от бумаги и не обводя ни одной линии контура дважды, т. е. «нарисовать одним росчерком». Такие контуры образуют так называемые ***уникурсальные графы***.

Задаче о кёнигсбергских мостах Л. Эйлер посвятил целое исследование, которое в 1736 году было представлено в Петербургскую академию наук.

На рисунке 17.3 изображён граф, соответствующий задаче о кёнигсбергских мостах. Требуется доказать, что этот граф не является уникурсальным.

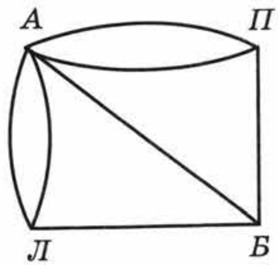


Рис. 17.3

Для этого рассмотрим ***индекс вершины*** – число рёбер графа, сходящихся в данной вершине (рёбра с началом и концом в данной вершине считаются дважды), и покажем, что имеет место следующее утверждение.

Для уникурсального графа число вершин нечётного индекса равно нулю или двум.

Действительно, если граф уникурсален, то у него есть начало и конец обхода. Остальные вершины имеют чётный индекс, так как с каждым входом в такую вершину есть и выход. Если начало и конец не совпадают, то они являются единственными вершинами нечётного индекса. У начала выходов на один больше, чем входов, а у конца входов на один больше, чем выходов. Если начало совпадает с концом, то вершин с нечётным индексом нет.

Приступим теперь к решению задачи. Определим чётность вершин графа на рисунке 17.3. Вершина *А* имеет индекс 5, *Б* – 3, *П* – 3 и *Л* – 3. Таким образом, мы имеем четыре вершины нечётного индекса, и, следовательно, данный граф не является уникурсальным. Отсюда получаем, что во время прогулки по городу нельзя пройти по каждому из семи мостов только один раз.

Исторические сведения

Леонард Эйлер – один из величайших математиков, работы которого оказали решающее влияние на развитие многих современных разделов математики. Л. Эйлер был действительным членом Петербургской академии наук, оказал большое влияние на развитие отечественной математической школы и подготовку кадров учёных-математиков и педагогов в России. Поражает своими размерами научное наследие учёного. При жизни им опубликовано 530 книг и статей, а сейчас их известно уже более 800. При этом в последние 12 лет своей жизни Эйлер тяжело болел, ослеп но, несмотря на тяжёлый недуг, продолжал работать и творить. Статистические подсчёты показывают, что Эйлер в среднем делал одно открытие в неделю. Трудно найти математическую проблему, которая не была бы затронута в произведениях Эйлера. Все математики последующих поколений так или иначе учились у Эйлера, и недаром известный французский учёный П.С. Лаплас сказал: «Читайте Эйлера, он – учитель всех нас».

Вопросы

1. Что называется графом?
2. Какой граф называется уникурсальным?
3. Что называется индексом вершины графа?
4. Сколько вершин нечётного индекса может быть у уникурсального графа?

Задачи

1. Изобразите граф, у которого четыре вершины и каждая имеет индекс три. Сколько у него рёбер?

2. Изобразите граф, у которого пять вершин и каждая имеет индекс четыре. Сколько у него рёбер?

3. Может ли граф иметь пять вершин, каждая из которых имеет индекс три?

4. Может ли граф иметь: а) одну вершину нечётного индекса; б) две вершины нечётного индекса; в) три вершины нечётного индекса; г) четыре вершины нечётного индекса?

5. Какие из графов, изображённые на рисунке 17.4, являются уникурсальными?

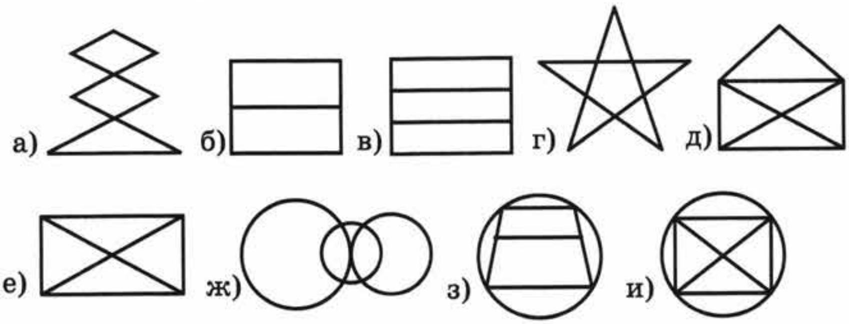


Рис. 17.4

6. Нарисуйте одним росчерком графы, изображённые на рисунке 17.5.

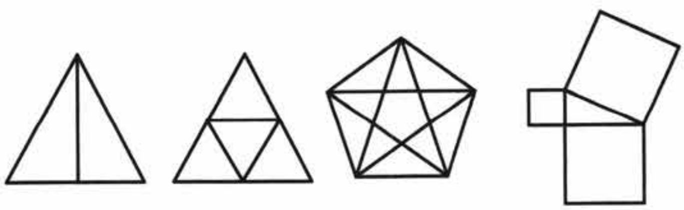


Рис. 17.5

7. Какое наименьшее число мостов в задаче о кёнигсбергских мостах придётся пройти дважды, чтобы пройти по каждому мосту?

8. В вершине куба сидит муха (рис. 17.6). Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз? Какое наименьшее число рёбер придётся проползти дважды?

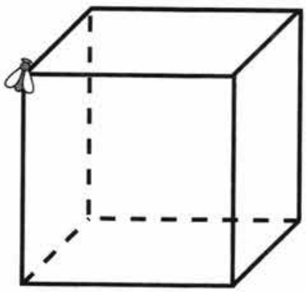


Рис. 17.6

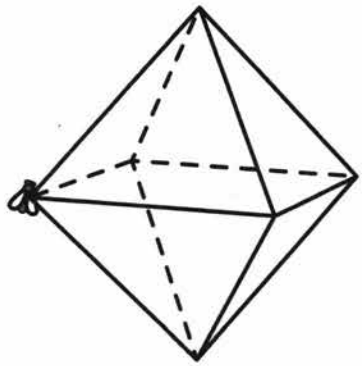


Рис. 17.7

9. В вершине куба сидит муха (рис. 17.6). Она хочет проползти по каждому ребру куба и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

10. В вершине октаэдра сидит муха (рис. 17.7). Может ли она проползти по каждому его ребру ровно один раз?

11. В вершине икосаэдра сидит муха (рис. 17.8). Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

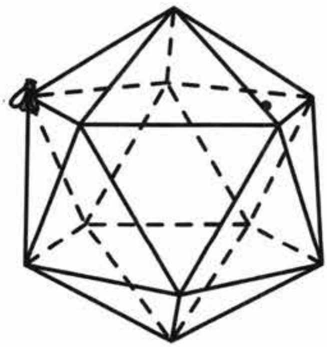


Рис. 17.8

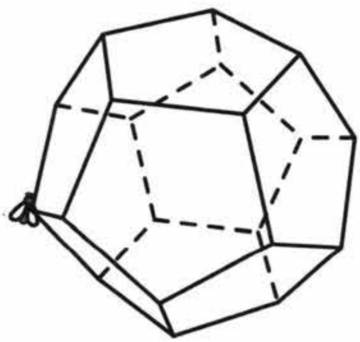


Рис. 17.9

12. В вершине додекаэдра сидит муха (рис. 17.9). Она хочет проползти по каждому его ребру и вернуться в исходную вершину. Какое наименьшее число рёбер ей придётся проползти дважды?

13. На рисунке 17.10 изображён план подземелья, в одной из комнат которого скрыты богатства рыцаря. После его смерти наследники нашли завещание, в котором было сказано, что для отыскания сокровищ достаточно войти в одну из крайних комнат подземелья и пройти через все двери, причём в точности по одному разу через каждую. Сокровища скрыты за той дверью, которая будет пройдена последней. В какой комнате были скрыты сокровища?

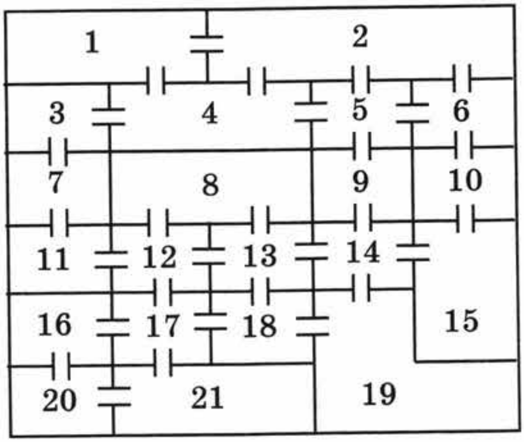


Рис. 17.10

14. Сколько имеется путей из A и B по отрезкам, изображённым на рисунке, в направлениях, указанных стрелками (рис. 17.11)?

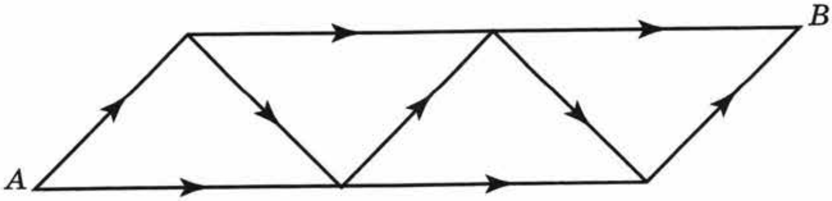


Рис. 17.11

15. На рисунке 17.12 изображены два единичных куба. Сколько имеется путей длиной 4 по рёбрам этих кубов из вершины A в вершину D_1?

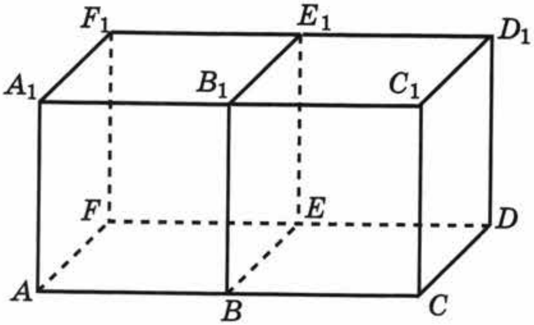


Рис. 17.12

16. На рисунке 17.13 изображена треугольная призма, на сторонах и диагоналях боковых граней которой поставлены стрелки. Сколько имеется путей по этим сторонам и диагоналям из вершины A в вершину C_1, если двигаться разрешается только в направлениях, указанных стрелками?

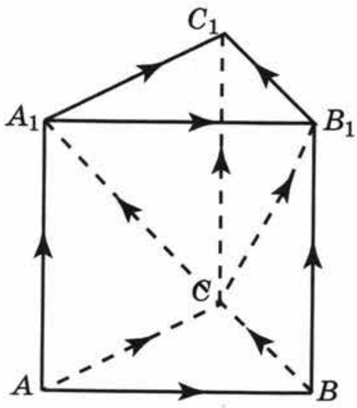


Рис. 17.13

§ 18. Раскрашивание карт

Ещё одной проблемой, связанной с многоугольниками и графами, является проблема четырёх красок, имеющая почти 150-летнюю историю.

Задача заключается в том чтобы раскрасить географическую карту так, чтобы пограничные страны (имеющие общую границу) были окрашены в разные цвета (непограничные страны можно окрашивать одним цветом), использовав при этом наименьшее число красок.

Такую раскраску карты, при которой соседние страны окрашены в разные цвета, будем называть ***правильной***.

На рисунке 18.1 изображены карты, странами которых служат области, ограниченные дугами окружностей и отрезками. Для правильной раскраски карты на рисунке 18.1, а требуется три цвета. Для правильной раскраски карты на рисунке 18.1, б трёх цветов недостаточно и требуется четыре цвета.

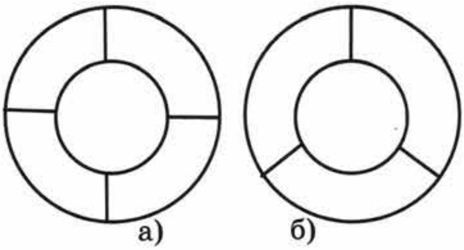


Рис. 18.1

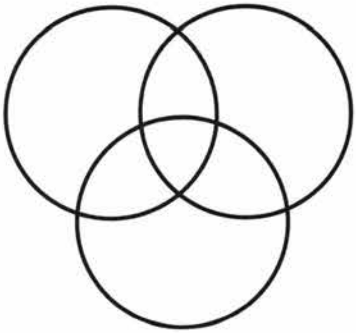
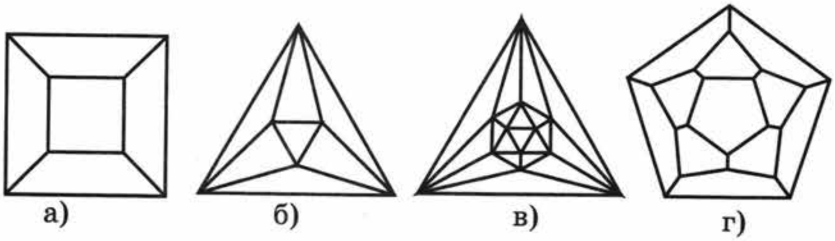


Рис. 18.2

Задачи

1. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карты, образованной тремя окружностями (рис. 18.2)?

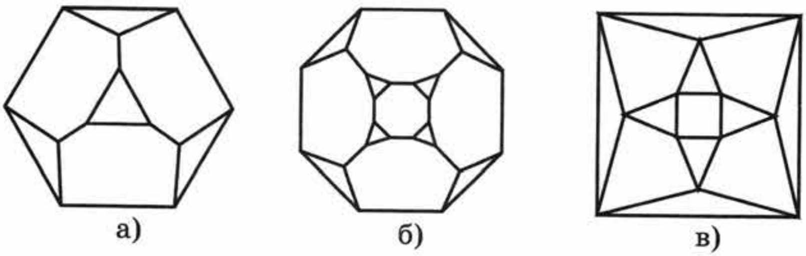
2. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карт, изображённых на рисунке 18.3?



а) б) в) г)

Рис. 18.3

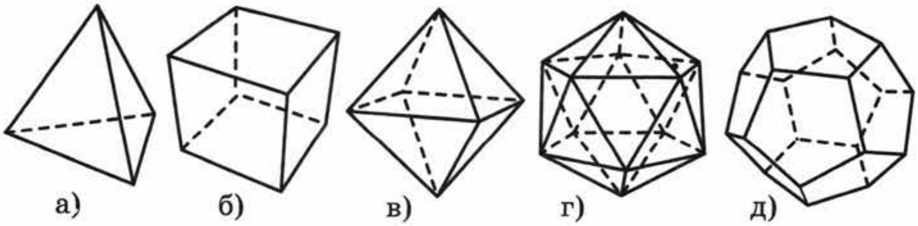
3. Какое наименьшее число цветов потребуется для правильной раскраски карт, изображённых на рисунке 18.4?



а) б) в)

Рис. 18.4

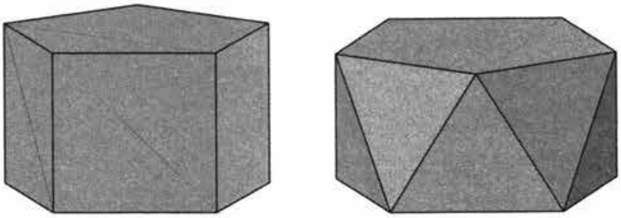
4. Окраска граней многогранника называется правильной, если соседние грани имеют разные цвета. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра (рис. 18.5)?



а) б) в) г) д)

Рис. 18.5

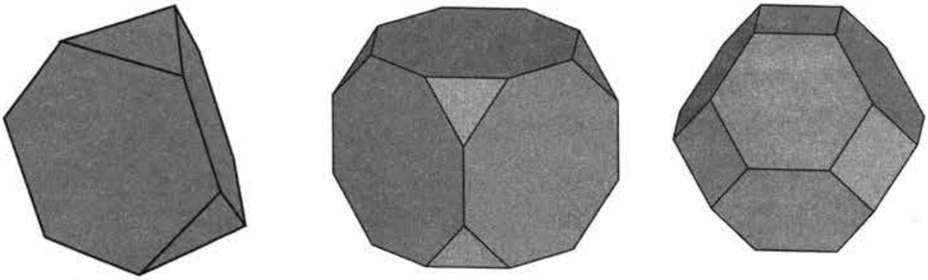
5. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней пятиугольной: а) призмы; б) антипризмы (рис. 18.6)?



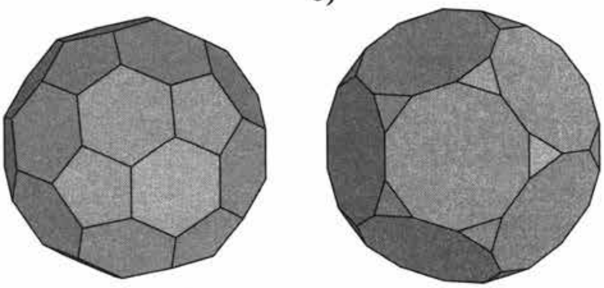
а) б)

Рис. 18.6

6. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней усечённого: а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра; г) икосаэдра; д) додекаэдра (рис. 18.7)?



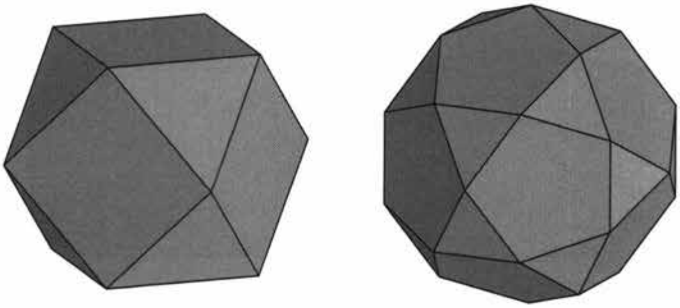
а) б) в)



г) д)

Рис. 18.7

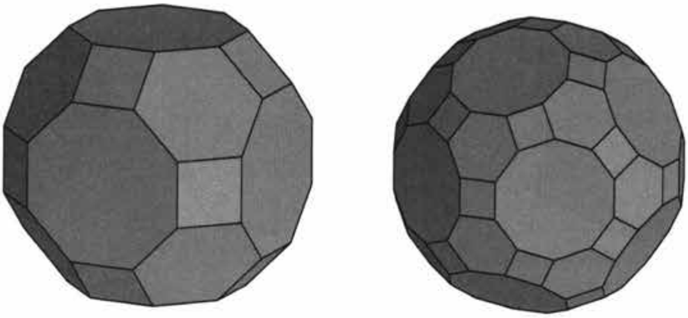
7. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) кубооктаэдра; б) икосододекаэдра (рис. 18.8)?



а) б)

Рис. 18.8

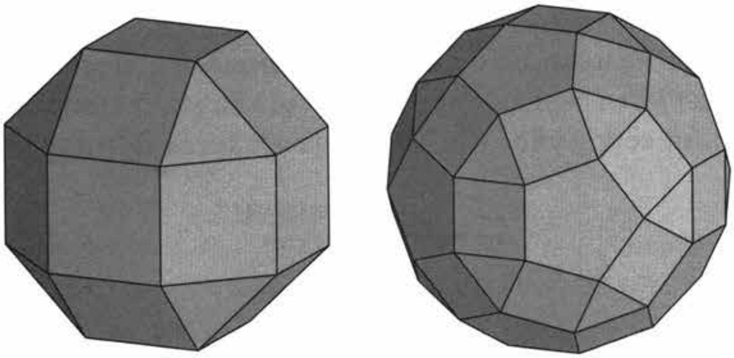
8. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) усечённого кубооктаэдра; б) усечённого икосододекаэдра (рис. 18.9)?



а) б)

Рис. 18.9

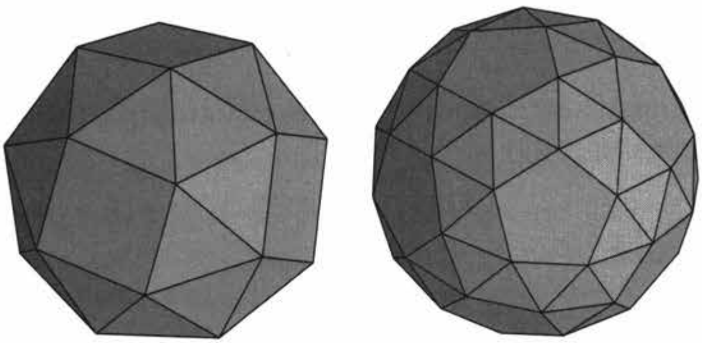
9. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) ромбокубооктаэдра; б) ромбоикосододекаэдра (рис. 18.10)?



а) б)

Рис. 18.10

10. Какое минимальное число красок потребуется для правильной окраски граней: а) курносого куба; б) курносого додекаэдра (рис. 18.11)?



а) б)

Рис. 18.11

§ 19. Центральная симметрия

Точки A и A' называются ***симметричными*** относительно точки O, если O является серединой отрезка AA'. Точка O считается симметричной сама себе (рис. 19.1). Она называется ***центром симметрии***.

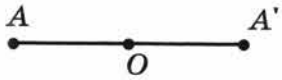


Рис. 19.1

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** с центром O, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 19.2).

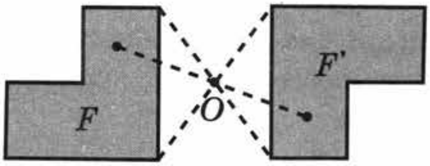


Рис. 19.2

Фигура F называется ***центрально-симметричной*** с центром O, если она симметрична сама себе (рис. 19.3).

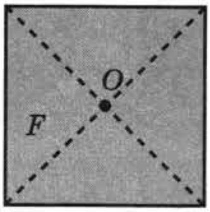


Рис. 19.3

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно точки?
2. Какая точка считается симметричной сама себе?
3. Какие фигуры называются симметричными?
4. Какая фигура называется центрально-симметричной?

Задачи

1. Что является центром симметрии отрезка?

2. Имеет ли центр симметрии: а) луч; б) прямая; в) окружность?

3. Может ли фигура иметь несколько центров симметрии?

4. Может ли центр симметрии фигуры не принадлежать ей?

5. Какие из фигур, изображённых на рисунке 19.4, имеют центр симметрии?

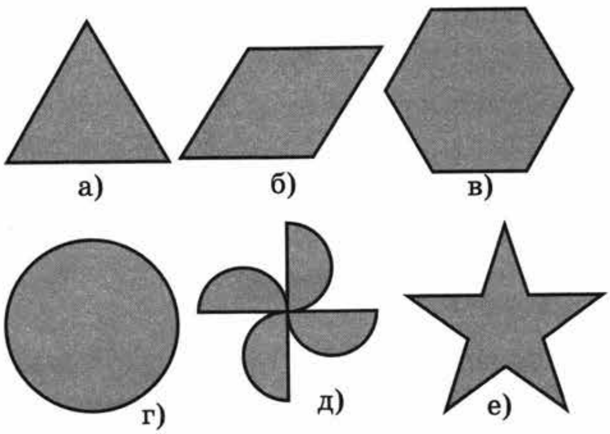


Рис. 19.4

6. На клетчатой бумаге нарисуйте точки, как показано на рисунке 19.5. Изобразите точку, симметричную данной точке A относительно точки O.

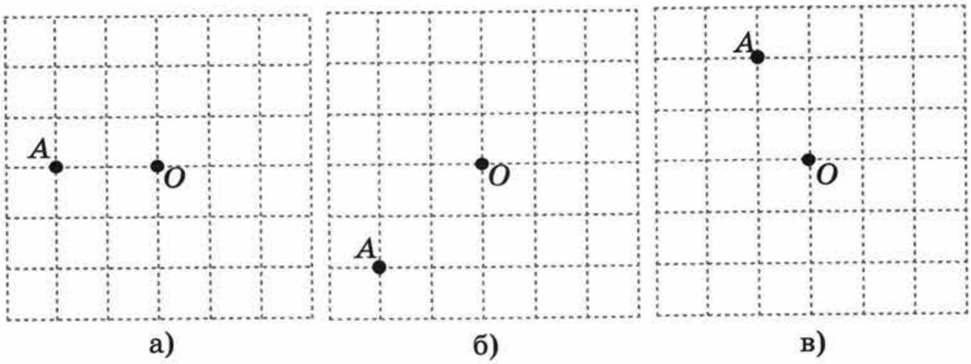


Рис. 19.5

7. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и отрезок, как показано на рисунке 19.6. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку *AB* относительно точки *O*.

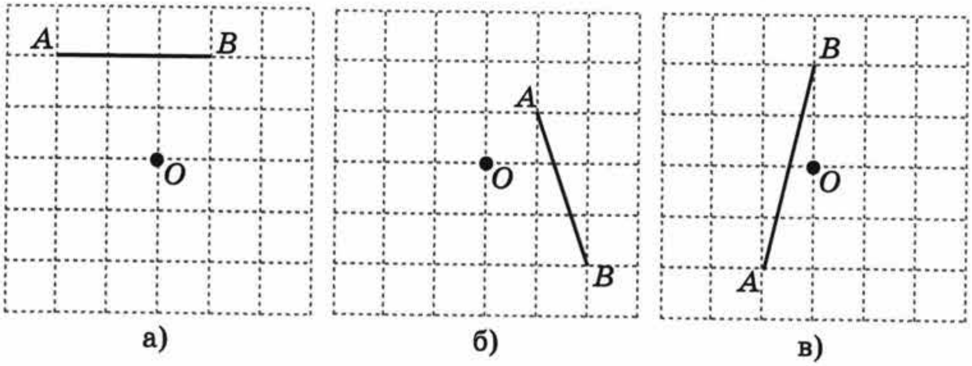


Рис. 19.6

8. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и треугольник, как показано на рисунке 19.7. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику *ABC* относительно точки *O*.

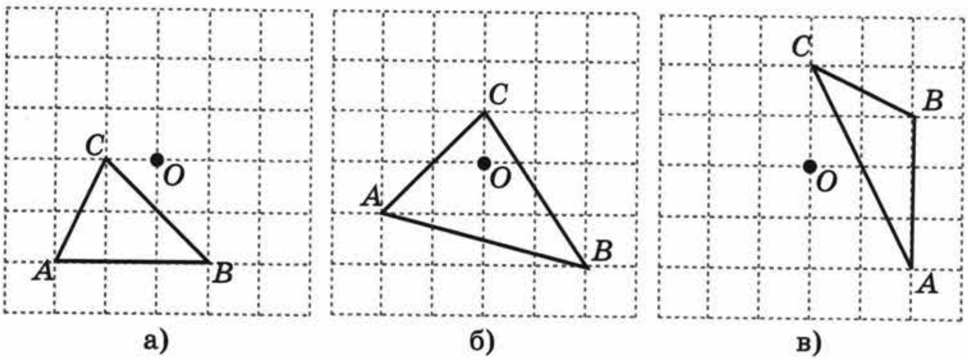


Рис. 19.7

9. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и четырёхугольник, как показано на рисунке 19.8. Изобразите четырёхугольник, симметричный данному четырёхугольнику $ABCD$ относительно точки O.

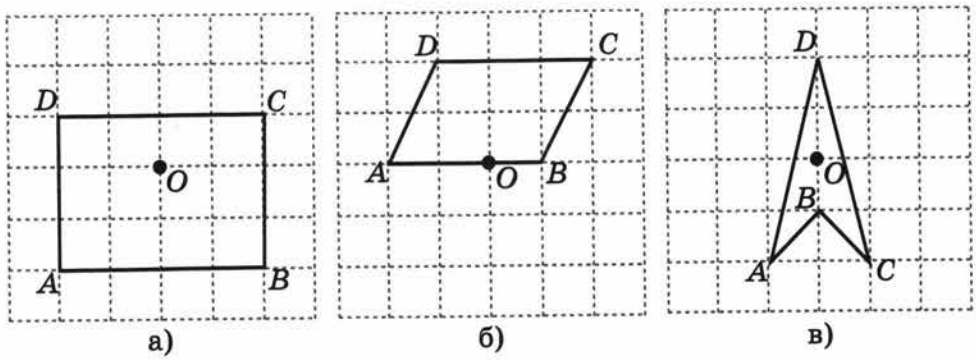


Рис. 19.8

10. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке 19.9. Изобразите прямую, симметричную данной прямой a относительно точки O.

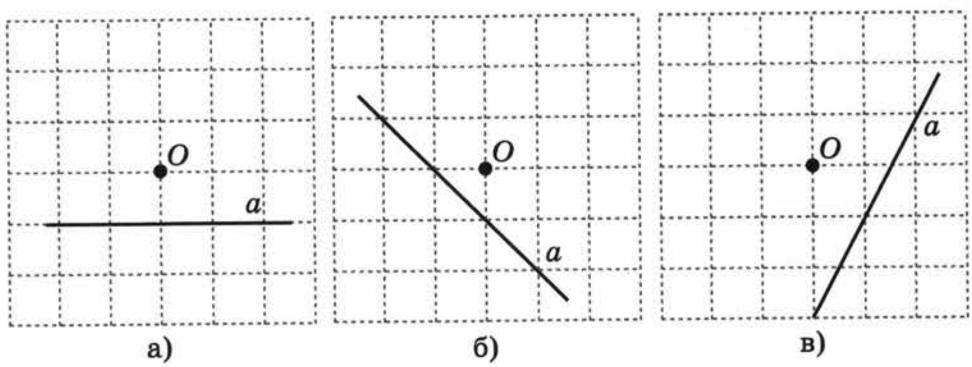


Рис. 19.9

11. На клетчатой бумаге нарисуйте фигуры, как показано на рисунке 19.10. Укажите центр симметрии для двух симметричных: а) отрезков; б) треугольников; в) четырёхугольников.

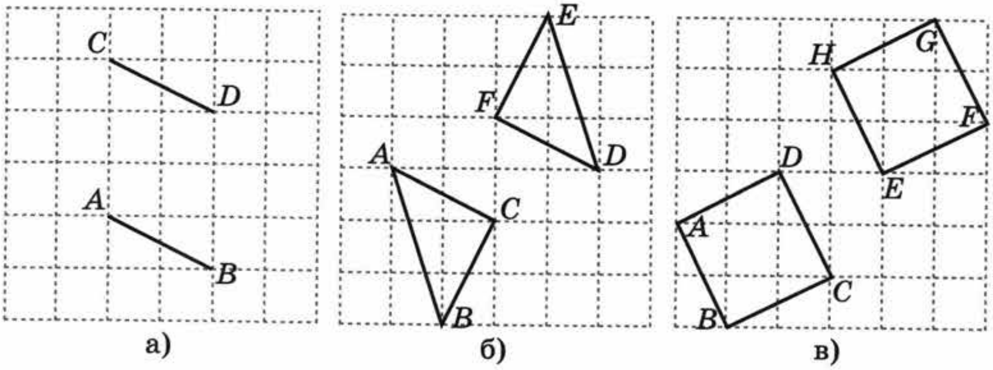


Рис. 19.10

12. Имеет ли центр симметрии: а) правильный треугольник; б) квадрат; в) прямоугольник (рис. 19.11)? Если да, укажите его.

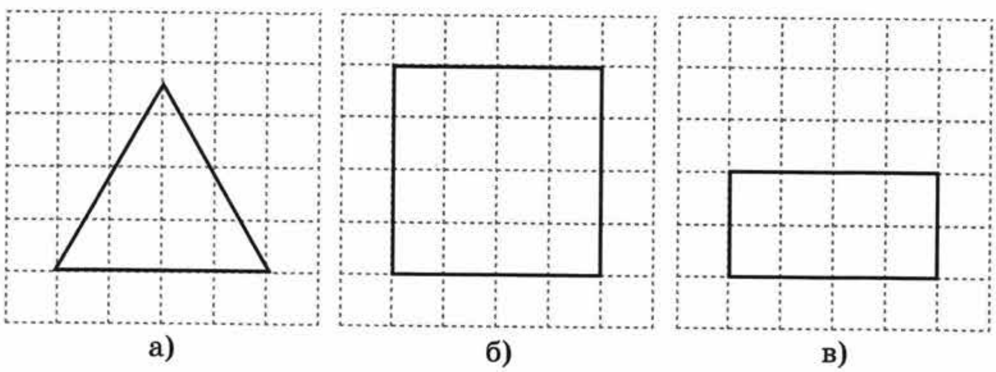
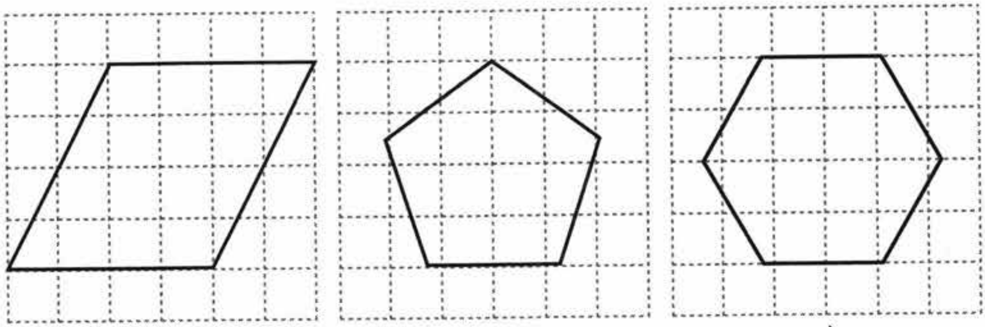


Рис. 19.11

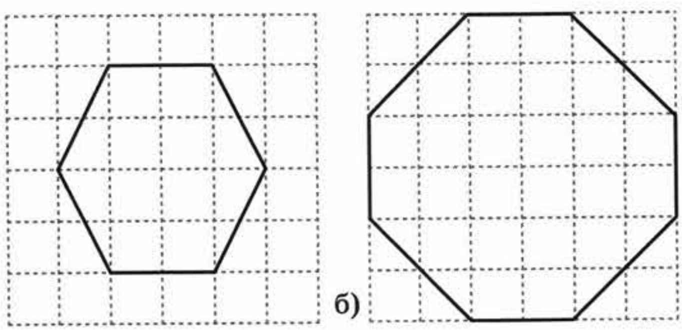
13. Имеет ли центр симметрии: а) параллелограмм; б) правильный пятиугольник; в) правильный шестиугольник (рис. 19.12)? Если да, укажите его.



а) б) в)

Рис. 19.12

14. Имеет ли центр симметрии: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке 19.13? Если да, укажите его.



а) б)

Рис. 19.13

15. Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке 19.14, имеют центр симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Рис. 19.14

16. Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке 19.15, имеют центр симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 19.15

§ 20. Осевая симметрия

Две точки A и A' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если эта прямая проходит через середину отрезка AA' и перпендикулярна к нему. Каждая точка прямой c считается ***симметричной*** самой себе (рис. 20.1). Прямая c называется ***осью симметрии***.

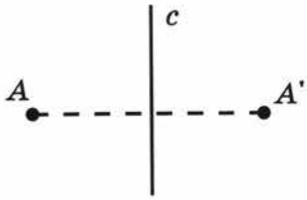


Рис. 20.1

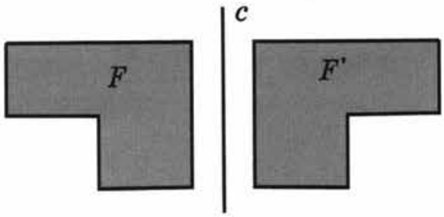


Рис. 20.2

Две фигуры F и F' называются ***симметричными*** относительно прямой c, если каждой точке одной фигуры соответствует симметричная точка другой фигуры (рис. 20.2).

Фигура F называется ***симметричной*** относительно прямой c, если она симметрична сама себе (рис. 20.3).

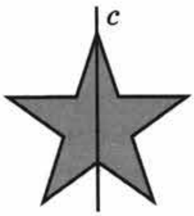


Рис. 20.3

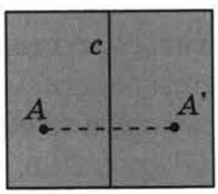


Рис. 20.4

Представление об осевой симметрии даёт, например, перегибание и складывание листа бумаги. Действительно, если перегнуть и сложить лист бумаги, то линию сгиба c можно считать изображающей часть прямой (рис. 20.4). Если при этом точка A на листе бумаги совмещается с точкой A', то эти точки будут симметричными относительно линии сгиба c.

Используя перегибание и складывание листа бумаги, можно получать различные плоские фигуры.

Квадрат. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ (рис. 20.5, а) получить квадрат, перегнём этот лист бумаги так, чтобы меньшая сторона AB пошла по большей стороне BC. Тогда точка A совместится с некоторой точкой E, а пересечение линии сгиба со стороной AD даст точку F (рис. 20.5, б). Проведём линию EF. Развернём лист бумаги и разрежем его по линии EF. Четырёхугольник $ABEF$ будет искомым квадратом (рис. 20.5, в).

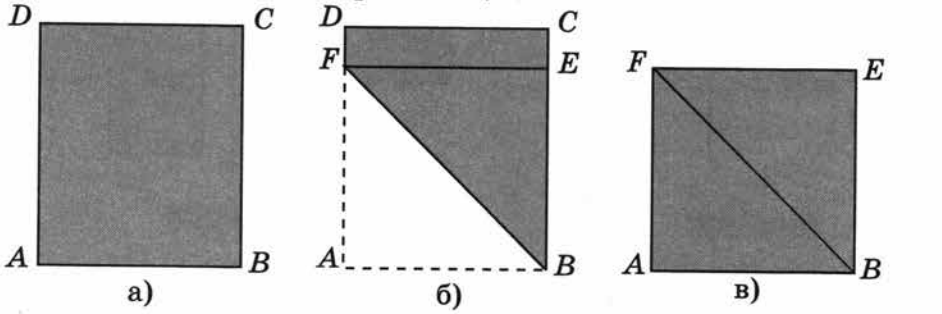


Рис. 20.5

Равносторонний треугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ получить равносторонний треугольник, сначала перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы бóльшая сторона AD совместилась со стороной BC. Линию сгиба обозначим EF (рис. 20.6, а). Затем перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы точка A осталась на месте, а точка B совместилась с некоторой точкой G на линии сгиба EF (рис. 20.6, б). Развернём лист бумаги и проведём линии AG и BG. Треугольник ABG будет искомым (рис. 20.6, в).

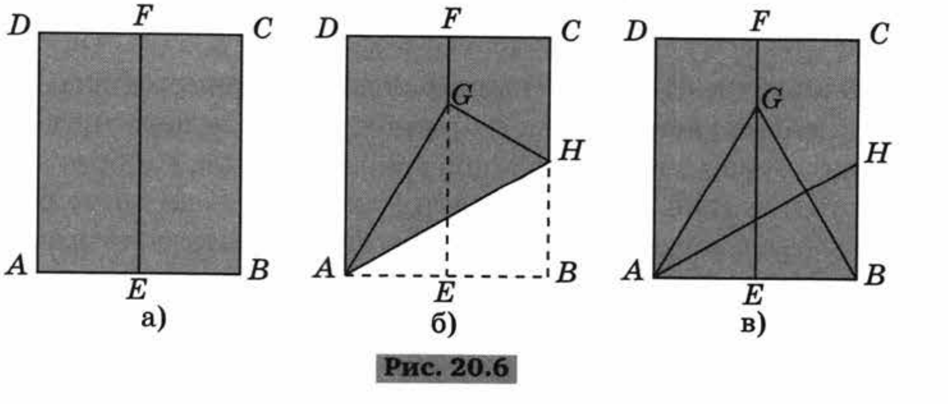


Рис. 20.6

Действительно, сторона AB этого треугольника равна стороне AG, так как при перегибании и складывании листа относительно линии AH они совмещаются. Сторона AG равна стороне BG, так как при перегибании листа относительно линии EF они совмещаются. Таким образом, все стороны треугольника ABG равны, т. е. он равносторонний. Вырежем его из листа бумаги.

Правильный шестиугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ получить правильный шестиугольник, сначала перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы бо́льшая сторона AD совместилась со стороной BC. Линию сгиба обозначим EF (рис. 20.6, а). Затем перегнём и сложим этот лист так, чтобы сторона AD совместилась с отрезком EF. Линию сгиба обозначим E_1F_1. Перегнём и сложим этот лист ещё раз так, чтобы сторона BC совместилась с отрезком EF. Линию сгиба обозначим E_2F_2 (рис. 20.7, а).

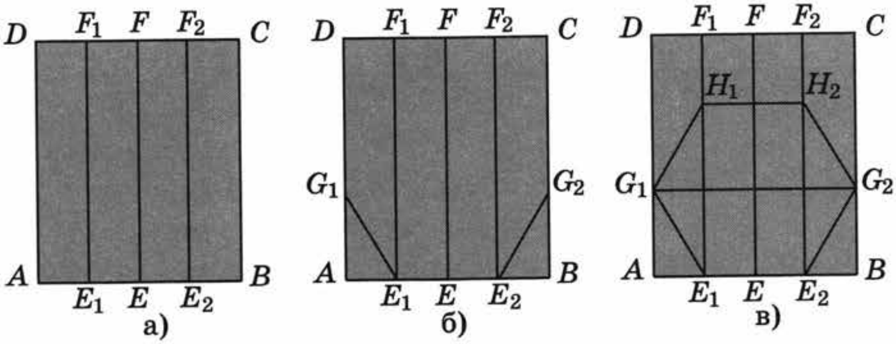


Рис. 20.7

Перегнём лист бумаги так, чтобы точка E_1 осталась на месте, а точка E_2 совместилась с некоторой точкой G_1 на стороне AD. Проведём отрезок E_1G_1. Аналогично перегнём лист бумаги так, чтобы точка E_2 осталась на месте, а точка E_1 совместилась с некоторой точкой G_2 на стороне BC. Проведём отрезок E_2G_2 (рис. 20.7, б) Перегнём лист бумаги относительно линии G_1G_2 и обозначим через H_1, H_2 точки, с которыми совместятся соответственно точки E_1, E_2. Шестиугольник $E_1E_2G_2H_2H_1G_1$ будет искомым правильным шестиугольником (рис. 20.7, в). Вырежем его из листа бумаги.

Правильный восьмиугольник. Для того чтобы из прямоугольного листа бумаги $ABCD$ получить правильный восьмиугольник, сначала получим квадрат $ABEF$, как это было сделано выше. Далее перегнём и сложим лист бумаги так, чтобы сторона AF совместилась со стороной BE. Линию сгиба обозначим GH. Перегнём лист так, чтобы точки A и B совместились соответственно с точками F и E. Линию сгиба обозначим PQ. Соединим точки G и Q, Q и H, H и P, P и G. Получим квадрат $GQHP$ (рис. 20.8, а). Перегнём лист бумаги так, чтобы точка G осталась на месте, а точка B совместилась с некоторой точкой на стороне GQ. Аналогично перегнём лист бумаги так, чтобы точка Q осталась на месте, а точка B совместилась с некоторой точкой на стороне GQ. Обозначим через B_1 точку пересечения обеих линий сгибов (рис. 20.8, б). Сделаем то же самое для точек E, F, A. Получим точки E_1, F_1, A_1. Соединим получившиеся точки с точками G, Q, H, P (рис. 20.8, в). Получим искомый правильный восьмиугольник $GB_1QE_1HF_1PA_1$. Вырежем его из листа бумаги.

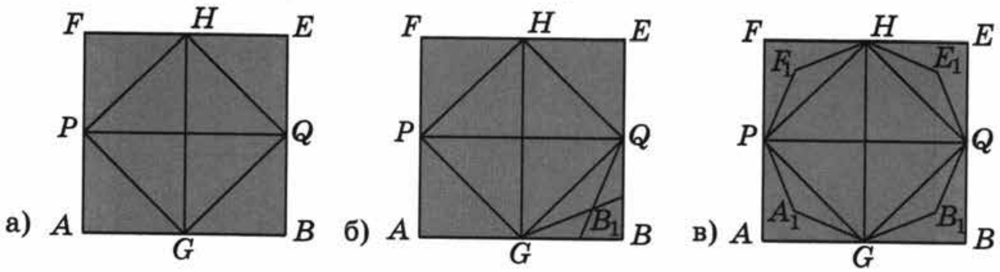


Рис. 20.8

Вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно прямой?

2. Какие точки симметричны сами себе относительно данной прямой?

3. Какие фигуры называются симметричными относительно прямой?

4. Какая фигура называется симметричной относительно прямой?

5. Что называется осью симметрии?

Задачи

1. Какая прямая является осью симметрии отрезка?

2. Имеет ли ось симметрии: а) луч; б) прямая; в) окружность?

3. Какие из фигур, изображённых на рисунке 20.9, имеют оси симметрии?

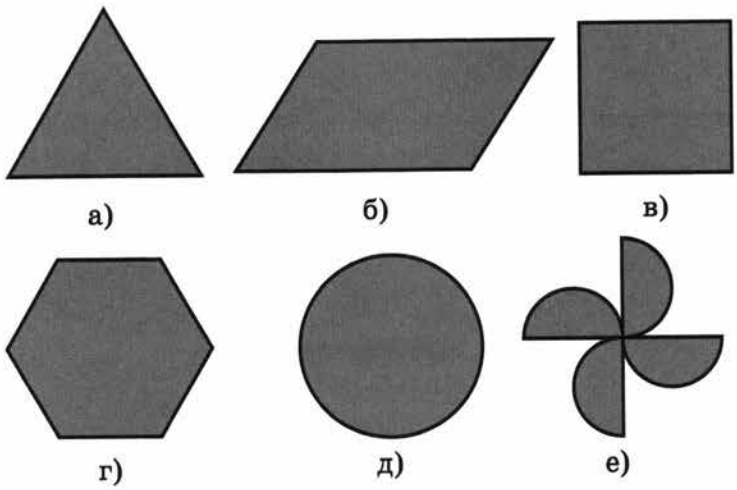


Рис. 20.9

4. На клетчатой бумаге нарисуйте точку и прямую, как показано на рисунке 20.10. Изобразите точку, симметричную данной точке A относительно прямой c.

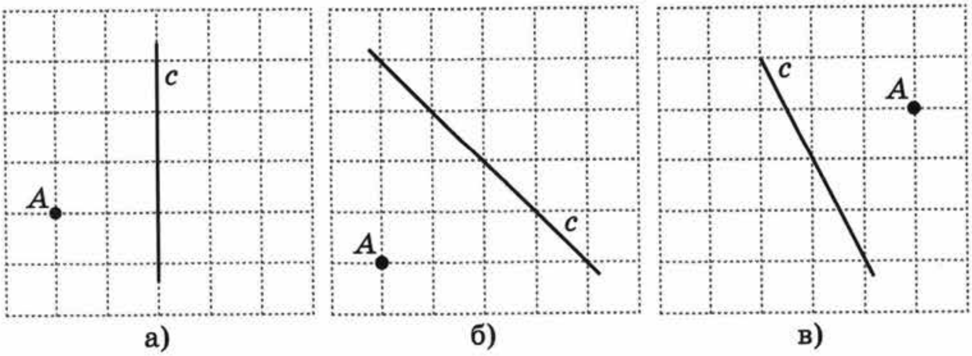


Рис. 20.10

5. На клетчатой бумаге нарисуйте отрезок и прямую, как показано на рисунке 20.11. Изобразите отрезок, симметричный данному отрезку AB относительно прямой c.

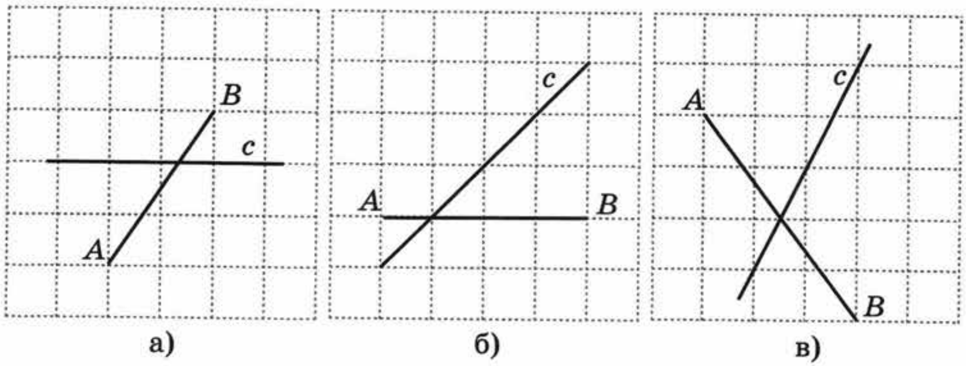


Рис. 20.11

6. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольник и прямую, как показано на рисунке 20.12. Изобразите треугольник, симметричный данному треугольнику относительно прямой d.

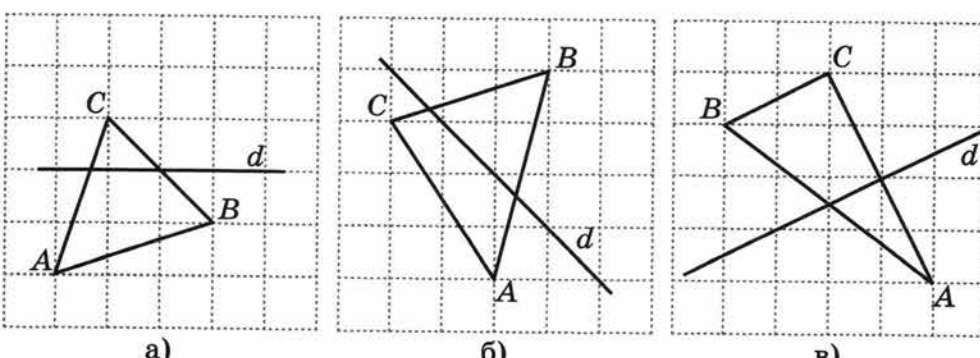


Рис. 20.12

7. На клетчатой бумаге нарисуйте треугольники, как показано на рисунке 20.13. Изобразите прямую, относительно которой они симметричны.

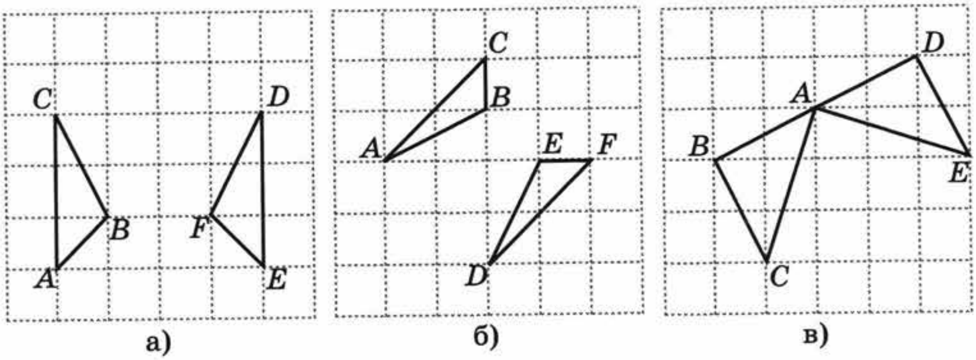


Рис. 20.13

8. Сколько осей симметрии имеет четырёхугольник, изображённый на рисунке 20.14?

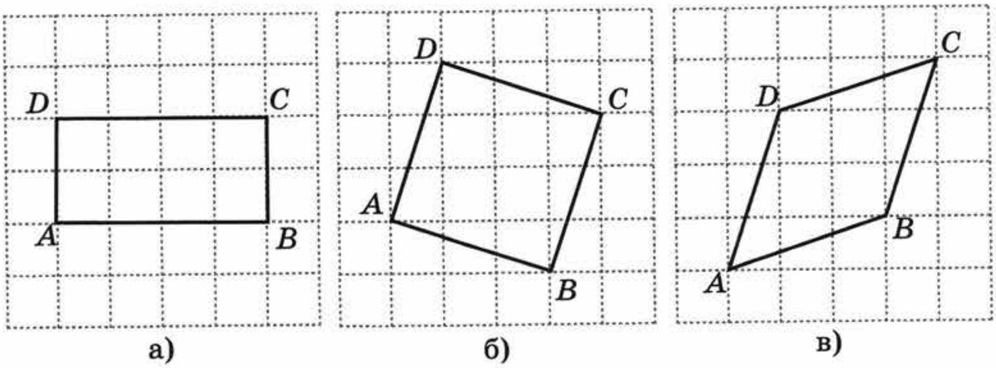


Рис. 20.14

9. Сколько осей симметрии имеет правильный: а) треугольник; б) пятиугольник; в) шестиугольник (рис. 20.15)?

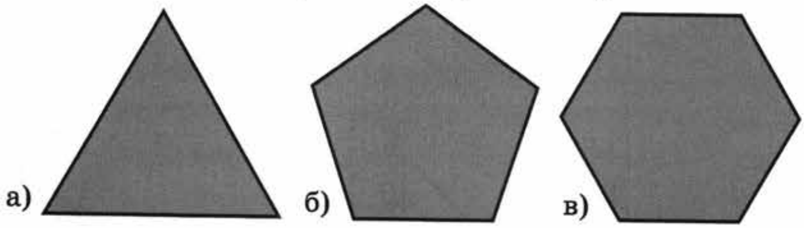


Рис. 20.15

10. Сколько осей симметрии имеет: а) шестиугольник; б) восьмиугольник, изображённый на рисунке 20.16?

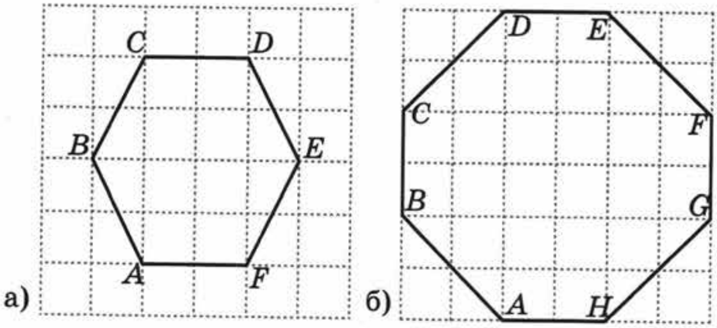


Рис. 20.16

11. Сколько осей симметрии имеет: а) правильная пятиугольная звезда; б) правильная шестиугольная снежинка, изображённая на рисунке 20.17?

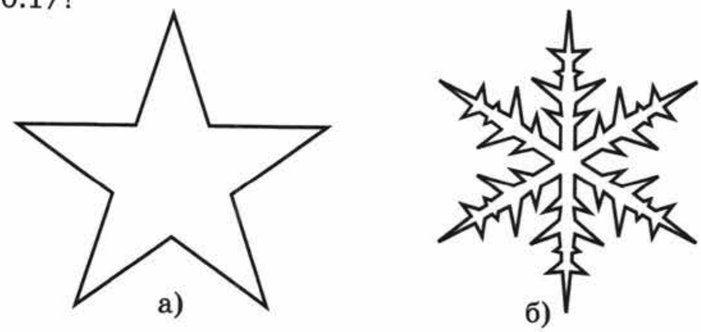


Рис. 20.17

12. Какие буквы русского алфавита, изображённые на рисунке 20.18, имеют оси симметрии?

А Б В Г Д Е Ж З И К Л М Н О П Р

С Т У Ф Х Ц Ч Ш Щ Ъ Ы Ь Э Ю Я

Рис. 20.18

13. Какие буквы латинского алфавита, изображённые на рисунке 20.19, имеют оси симметрии?

A B C D E F G H I J K L M

N O P Q R S T U V W X Y Z

Рис. 20.19

14. Перегибая и складывая прямоугольный лист бумаги, получите и вырежьте из бумаги: а) квадрат; б) равносторонний треугольник; в) правильный шестиугольник; г) правильный восьмиугольник.

15. Перегибая и складывая прямоугольный лист бумаги, получите и вырежьте из бумаги правильный двенадцатиугольник.

§ 21. Поворот

Говорят, что точка A' плоскости получается из точки A ***поворотом*** вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки), если $OA' = OA$ и $\angle AOA' = \varphi$ (рис. 21.1). Точка O называется ***центром поворота***.

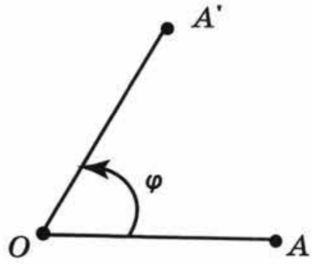


Рис. 21.1

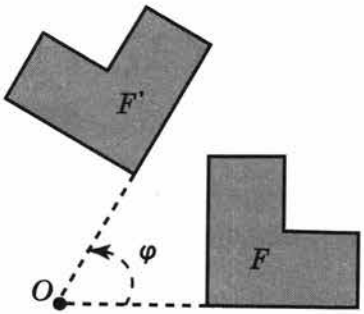


Рис. 21.2

Говорят, что фигура F' получается ***поворотом*** фигуры F вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки), если все точки фигуры F' получаются всевозможными поворотами точек фигуры F вокруг точки O на угол φ (против часовой стрелки) (рис. 21.2).

Точка O называется ***центром симметрии n-го порядка*** фигуры F, если при повороте фигуры F вокруг точки O на угол $\dfrac{360°}{n}$ (против часовой стрелки) фигура F совмещается сама с собой. На рисунке 21.3 изображён квадрат, точка пересечения диагоналей которого является центром симметрии четвёртого порядка.

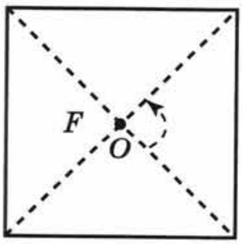


Рис. 21.3

Ясно, что центр симметрии второго порядка является просто центром симметрии.

Аналогичным образом определяются повороты по часовой стрелке.

Задачи

1. На клетчатой бумаге изобразите точку, полученную поворотом данной точки A вокруг точки O на угол 90°: 1) против часовой стрелки; 2) по часовой стрелке (рис. 21.4).

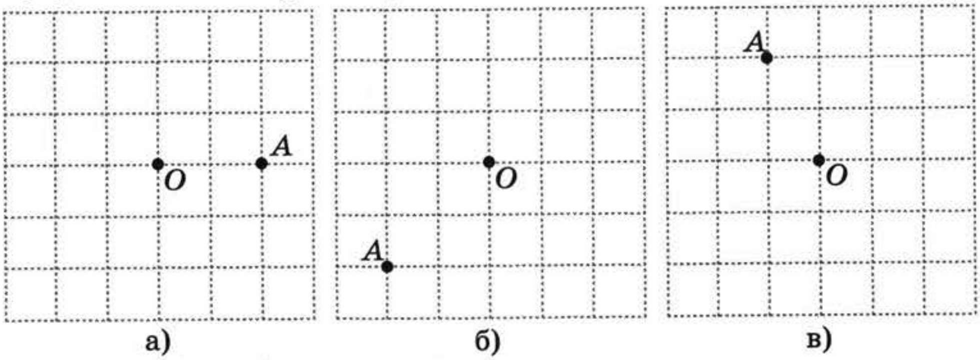


Рис. 21.4

2. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, полученный поворотом данного треугольника ABC вокруг точки O на угол 90°: 1) против часовой стрелки; 2) по часовой стрелке (рис. 21.5).

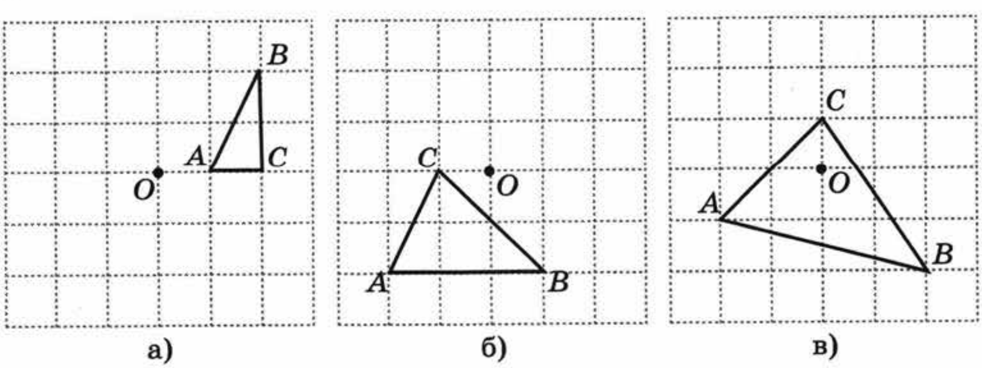


Рис. 21.5

3. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, полученный поворотом данного четырёхугольника *ABCD* вокруг точки *O* на угол 90° против часовой стрелки (рис. 21.6).

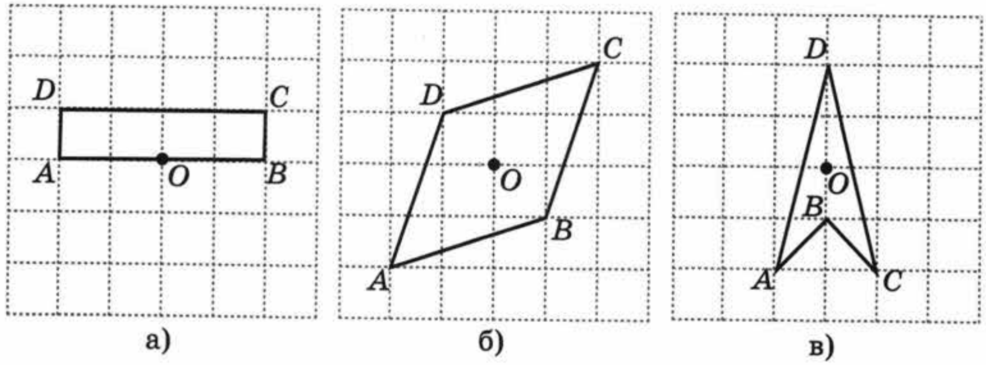


Рис. 21.6

4. Отрезок *CD* получен поворотом отрезка *AB* на угол 90° против часовой стрелки (рис. 21.7). Укажите центр поворота.

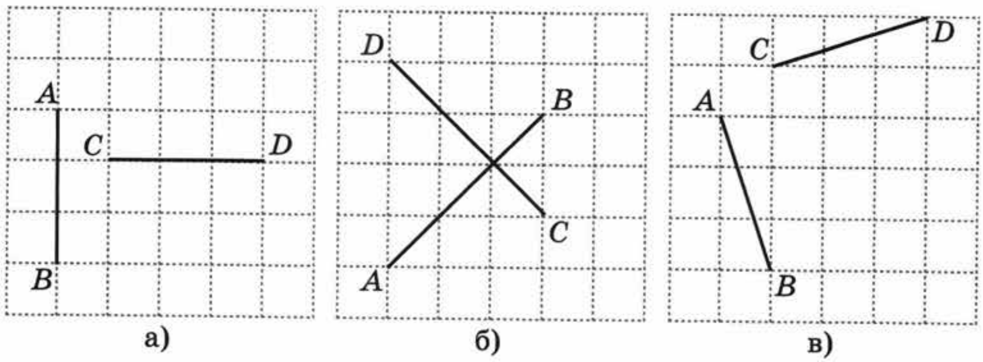


Рис. 21.7

5. Треугольник *DEF* получен поворотом треугольника *ABC* на угол 90° по часовой стрелке (рис. 21.8). Укажите центр поворота.

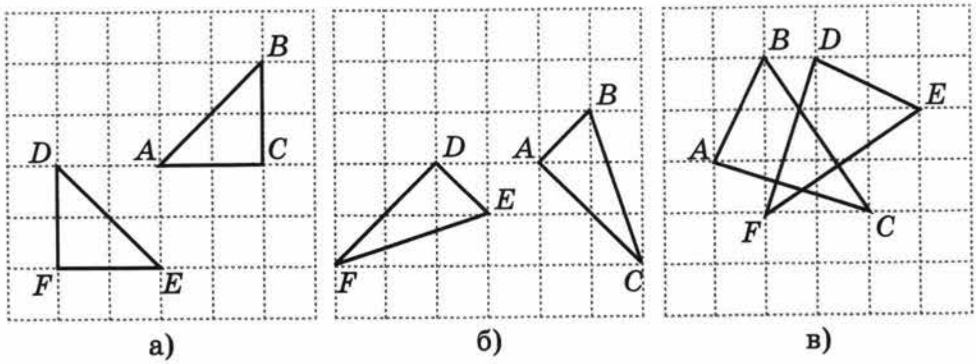


Рис. 21.8

6. Центр симметрии какого порядка имеет правильный: а) пятиугольник; б) шестиугольник; в) семиугольник (рис. 21.9)?

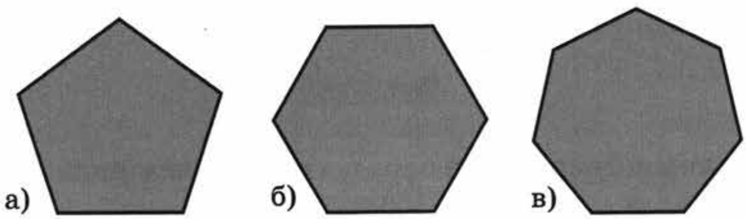


Рис. 21.9

7. Центром симметрии какого порядка является точка O для: а) шестиугольника; б) восьмиугольника, изображённого на рисунке 21.10?

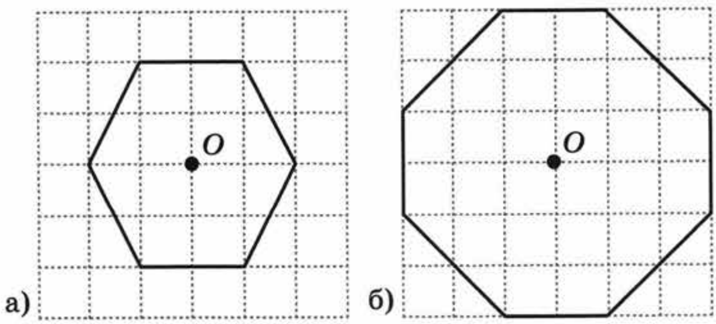


Рис. 21.10

8. Центром симметрии какого порядка является точка O для многоугольников, изображённых на рисунке 21.11?

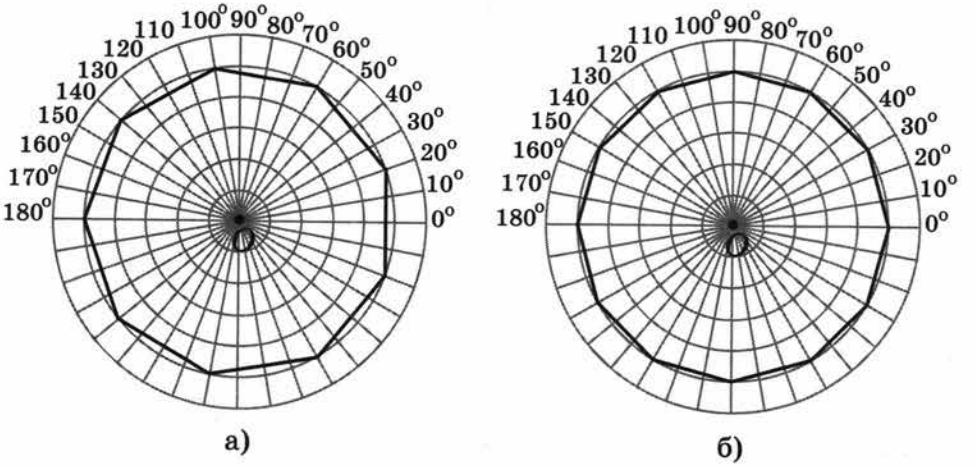


Рис. 21.11

9. Центр симметрии какого порядка имеют снежинки (рис. 21.12)?

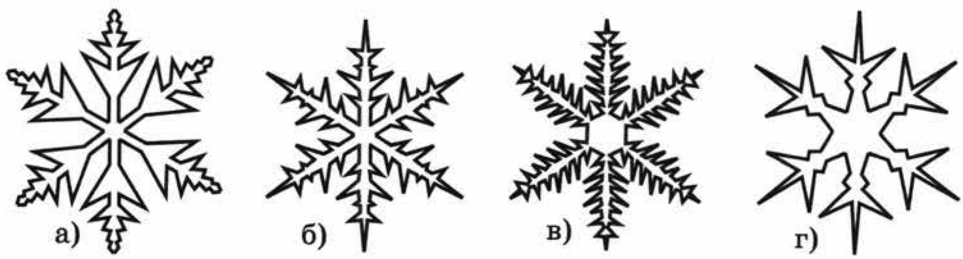


Рис. 21.12

§ 22. Паркеты

Паркетом на плоскости называется такое заполнение плоскости многоугольниками, при котором любые два многоугольника либо имеют общую сторону, либо имеют общую вершину, либо не имеют общих точек.

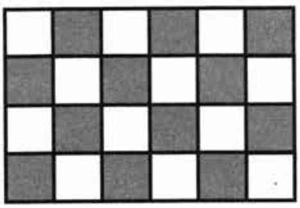
Паркет называется ***правильным***, если он состоит из правильных многоугольников и вокруг каждой вершины правильные многоугольники расположены одним и тем же способом.

Примеры правильных паркетов дают заполнения плоскости (рис. 22.1):

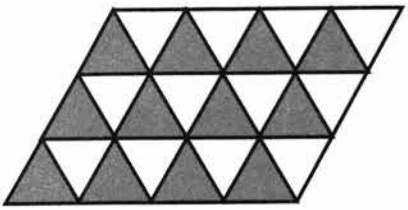
а) квадратами;

б) правильными треугольниками;

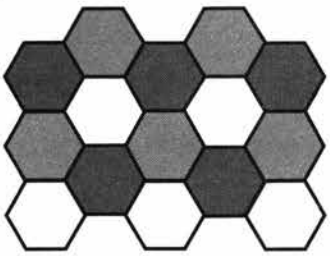
в) правильными шестиугольниками.



а)



б)



в)

Рис. 22.1

На рисунке 22.2 представлены фрагменты правильных паркетов, составленных из правильных многоугольников с разным числом сторон.

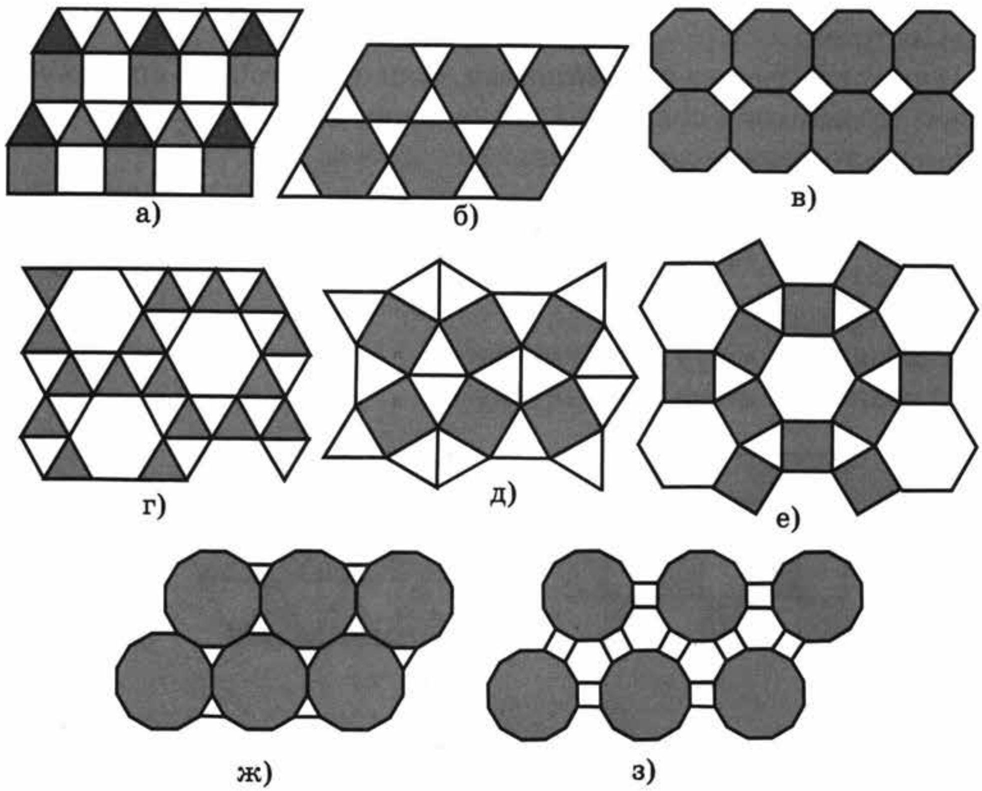


Рис. 22.2

Вопросы

1. Что называется паркетом?
2. Какой паркет называется правильным?

Задачи

1. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов, равных данному на рисунке 22.3, аналогичный паркету на рисунке 22.1, а. Раскрасьте квадраты так, чтобы соседние квадраты были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

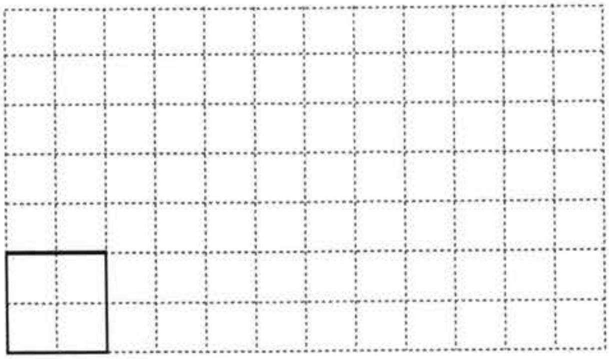


Рис. 22.3

2. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке 22.4, аналогичный паркету на рисунке 22.1, б. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Рис. 22.4

3. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке 22.5, аналогичный паркету на рисунке 22.1, в. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

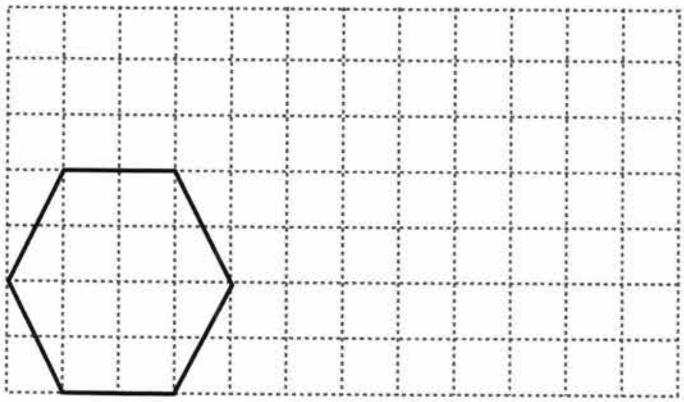


Рис. 22.5

4. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 22.6), аналогично паркету на рисунке 22.2, а. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

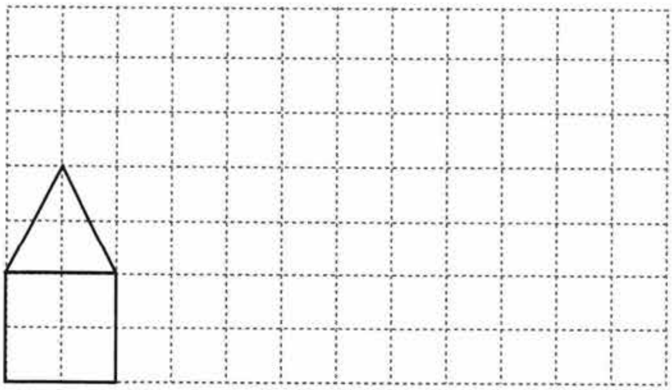


Рис. 22.6

5. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 22.7), аналогично паркету на рисунке 22.2, б. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

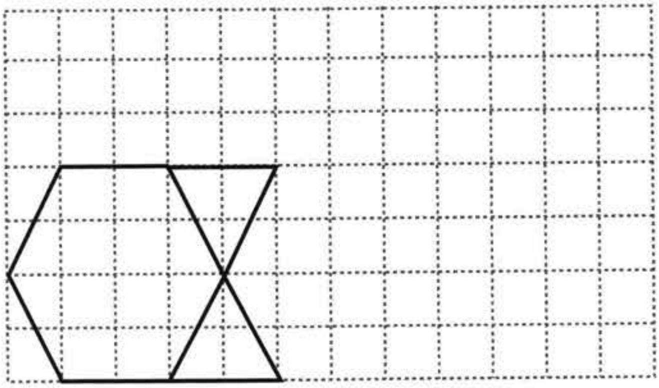


Рис. 22.7

6. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из восьмиугольников и квадратов, равных данным (рис. 22.8), аналогично паркету на рисунке 22.2, в. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

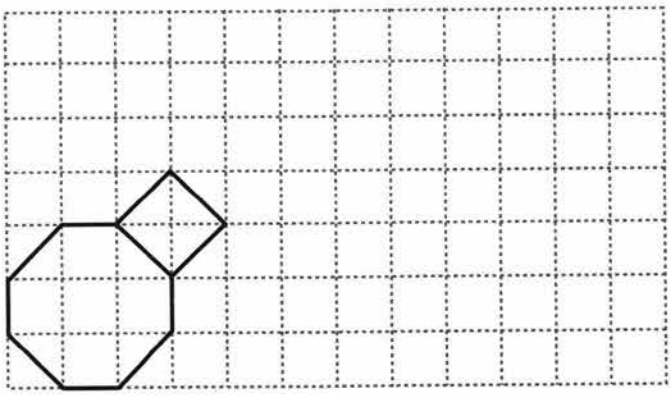


Рис. 22.8

7. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников и треугольников, равных данным (рис. 22.9), аналогично паркету на рисунке 22.2, г. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

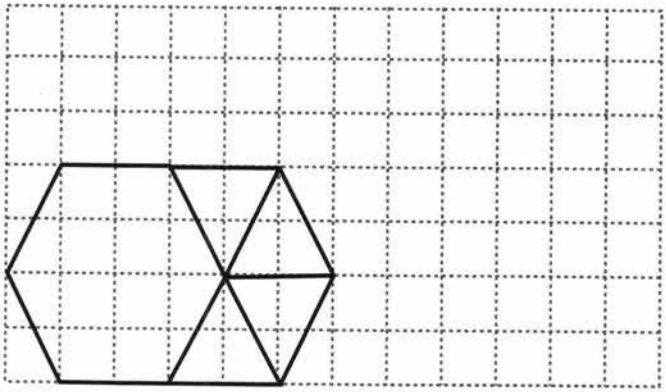


Рис. 22.9

8. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из квадратов и треугольников, равных данным (рис. 22.10), аналогично паркету на рисунке 22.2, д. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

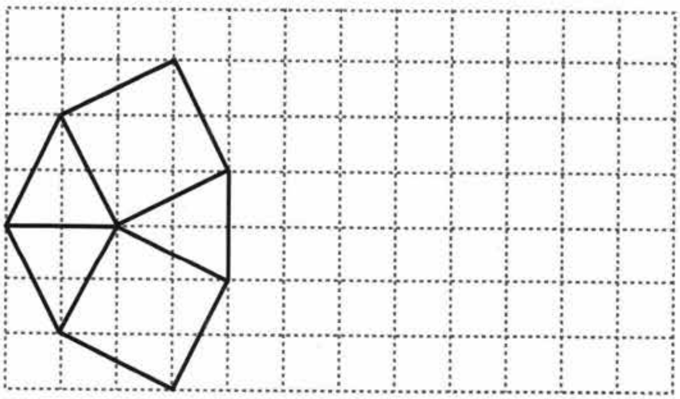


Рис. 22.10

9. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, квадратов и треугольников, равных данным (рис. 22.11), аналогично паркету на рисунке 22.2, е. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

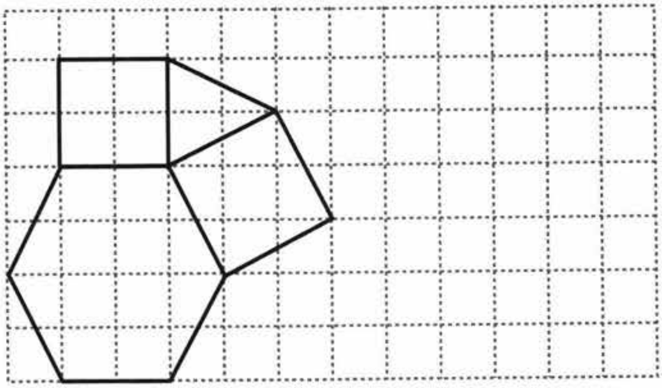


Рис. 22.11

10. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников и треугольников, равных данным (рис. 22.12), аналогично паркету на рисунке 22.2, ж. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

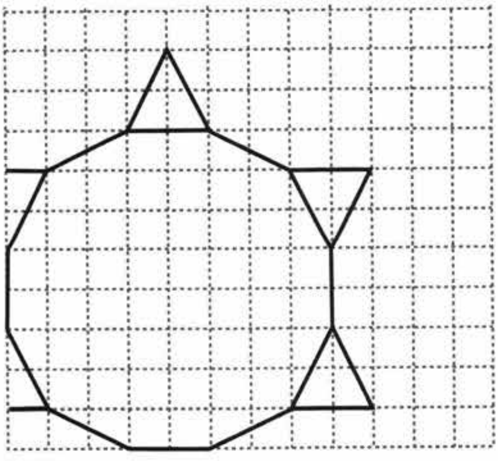


Рис. 22.12

11. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из двенадцатиугольников, шестиугольников и квадратов, равных данным (рис. 22.13), аналогично паркету на рисунке 22.2, з. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

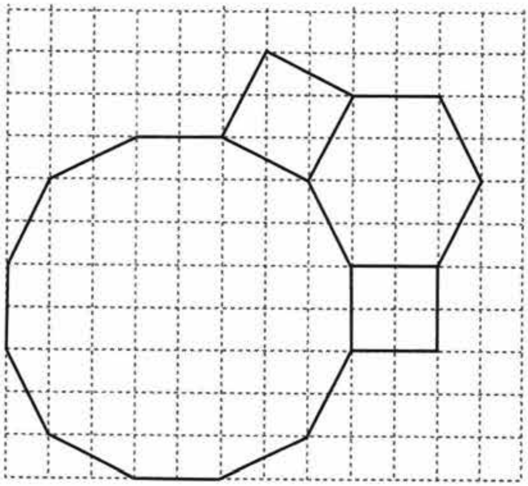


Рис. 22.13

12. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из треугольников, равных данному на рисунке 22.14. Раскрасьте треугольники так, чтобы соседние треугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

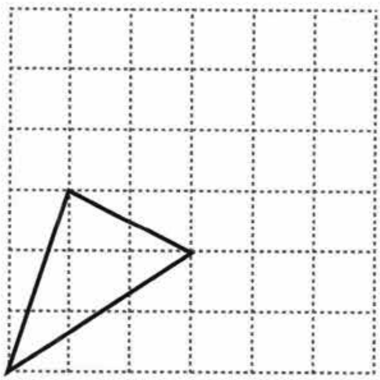


Рис. 22.14

13. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 22.15. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

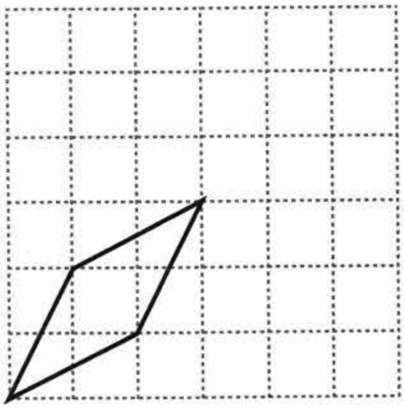


Рис. 22.15

14. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 22.16. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

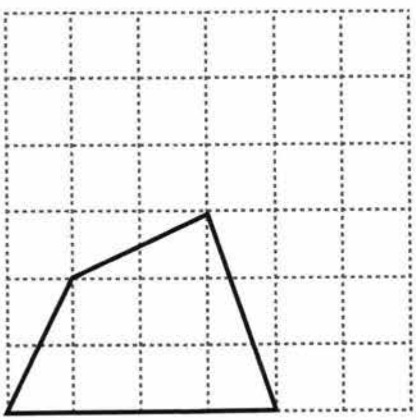


Рис. 22.16

15. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из четырёхугольников, равных данному на рисунке 22.17. Раскрасьте четырёхугольники так, чтобы соседние четырёхугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

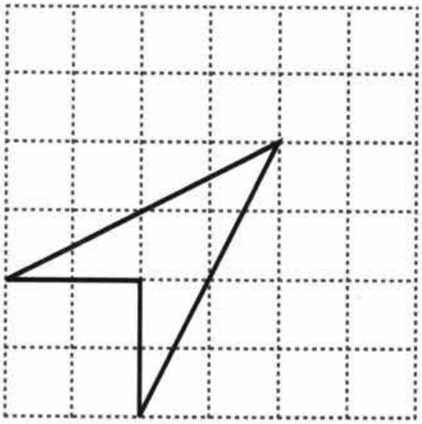


Рис. 22.17

16. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из шестиугольников, равных данному на рисунке 22.18. Раскрасьте шестиугольники так, чтобы соседние шестиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

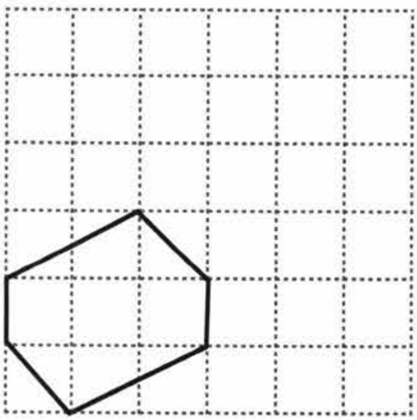


Рис. 22.18

17. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из пятиугольников, равных данному на рисунке 22.19. Раскрасьте пятиугольники так, чтобы соседние пятиугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

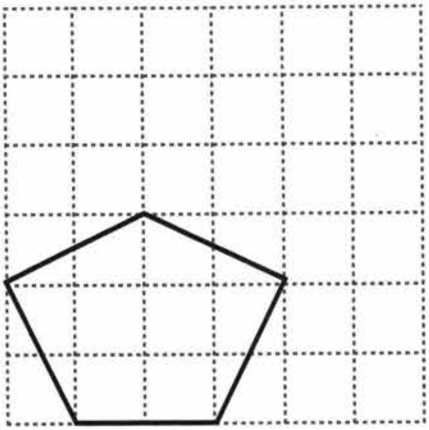


Рис. 22.19

18. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке 22.20. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

Рис. 22.20

19. На клетчатой бумаге нарисуйте паркет, составленный из многоугольников, равных данному на рисунке 22.21. Раскрасьте многоугольники так, чтобы соседние многоугольники были окрашены разными цветами. Какое наименьшее количество цветов для этого потребуется?

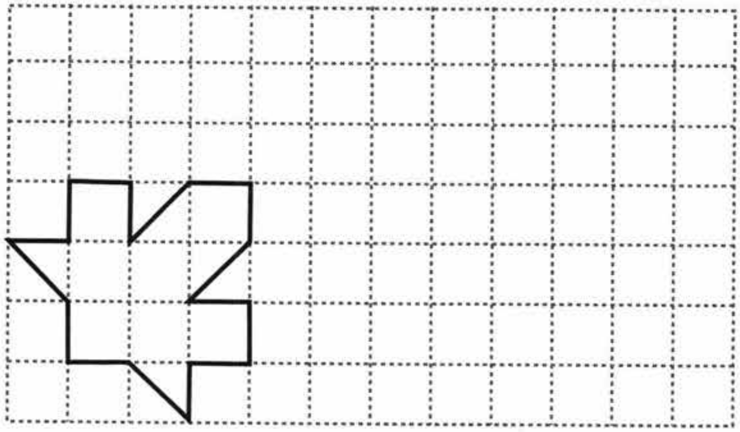


Рис. 22.21

§ 23*. Кривые

Одним из древнейших способов образования кривых является кинематический способ, при котором кривая получается как траектория движения точки.

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на окружности, катящейся по прямой, называется ***циклоидой*** (рис. 23.1), что в переводе с греческого языка означает «кругообразная».

Первым, кто стал изучать циклоиду, был Галилео Галилей (1564–1642). Он же придумал и её название.

Циклоиду, например, описывает точка, закреплённая на ободе колеса велосипеда, катящегося по ровной дороге.

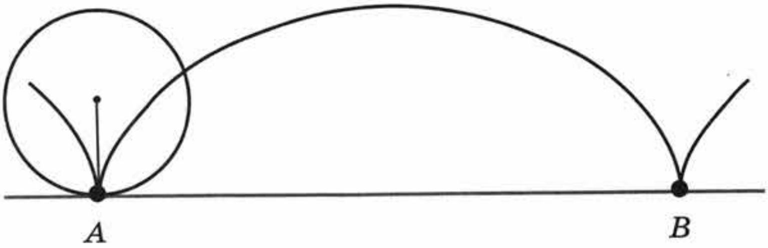


Рис. 23.1

Циклоида обладает целым рядом замечательных свойств. Упомянем о некоторых из них.

Свойство 1. (Ледяная гора.) В 1696 году И. Бернулли поставил задачу о нахождении кривой наискорейшего спуска, или, иначе говоря, задачу о том, какова должна быть форма ледяной горки, чтобы, скатываясь по ней, совершить путь из начальной точки A в конечную точку B за кратчайшее время.

Ясно, что кратчайшим путём из точки A в точку B является отрезок AB (рис. 23.2, а). Однако при таком прямолинейном движении скорость набирается медленно и затраченное на спуск время оказывается большим.

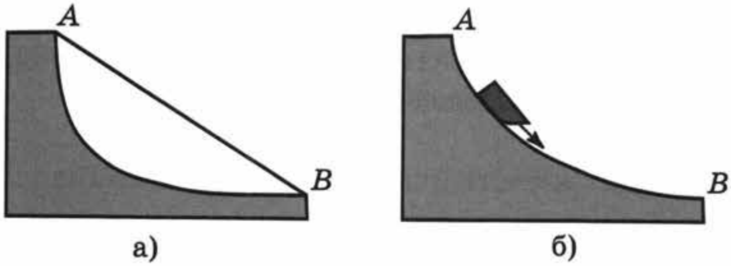


Рис. 23.2

Скорость набирается тем быстрее, чем круче спуск. Однако при крутом спуске удлиняется путь по кривой и тем самым увеличивается время его прохождения (рис. 23.2 б).

Среди математиков, решавших эту задачу, были: Г. Лейбниц, И. Ньютон, Г. Лопиталь и Я. Бернулли. Они доказали, что искомой кривой является перевёрнутая циклоида.

Свойство 2. (Часы с маятником.) Часы с обычным маятником не могут идти точно, поскольку период колебаний маятника зависит от его амплитуды (рис. 23.3, а). Чем больше амплитуда, тем больше период. Голландский учёный Христиан Гюйгенс (1629–1695) задался вопросом, по какой кривой должен двигаться шарик на нитке маятника, чтобы период его колебаний не зависел от амплитуды. Заметим, что в обычном маятнике кривой, по которой движется шарик, является окружность.

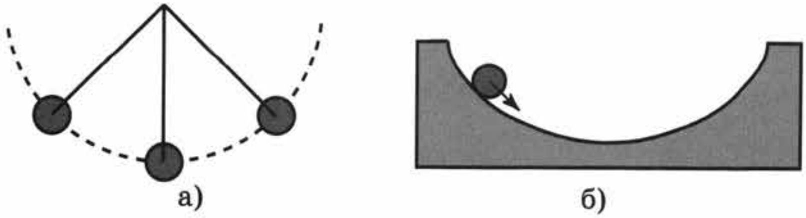


Рис. 23.3

Искомой кривой оказалась перевёрнутая циклоида (рис. 23.3, б). Если, например, в форме перевёрнутой циклоиды изготовить жёлоб и пустить по нему шарик, то период движения шарика под действием силы тяжести не будет зависеть от начального его положения и от амплитуды.

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по прямой, называется ***удлинённой циклоидой*** (рис. 23.4).

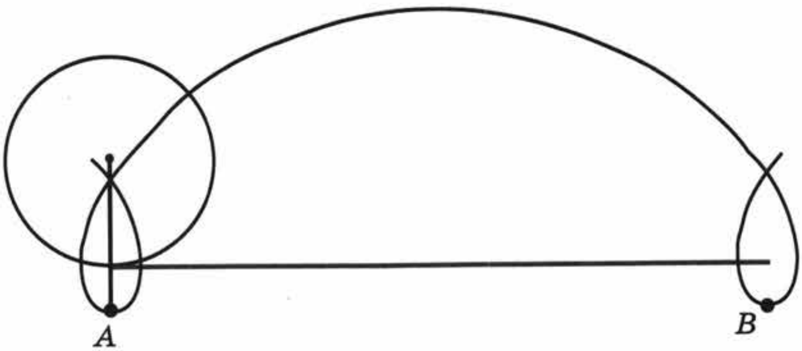


Рис. 23.4

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на радиусе внутри окружности, катящейся по прямой, называется ***укороченной циклоидой*** (рис. 23.5).

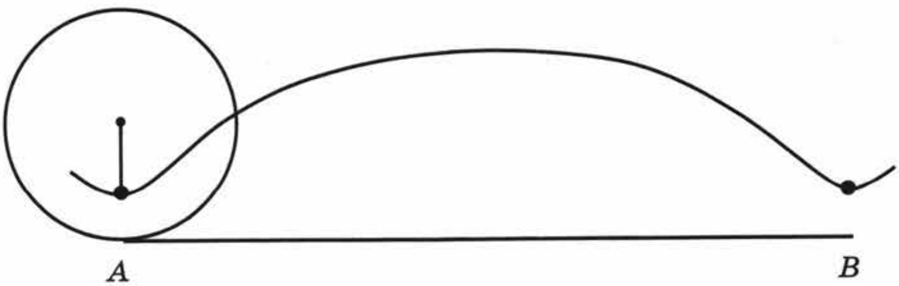


Рис. 23.5

Задачи

1. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке 23.6. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите циклоиду.

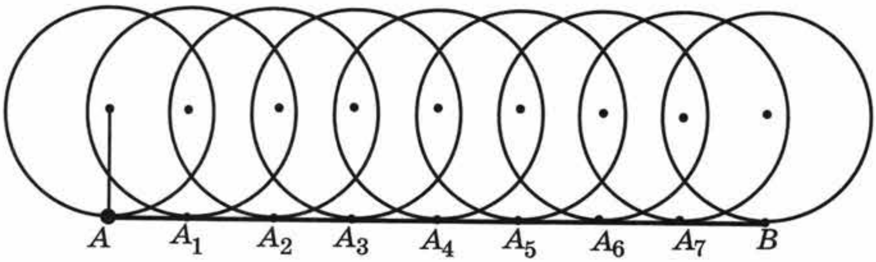


Рис. 23.6

2. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке 23.7. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка закреплена на продолжении радиуса окружности. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую циклоиду.

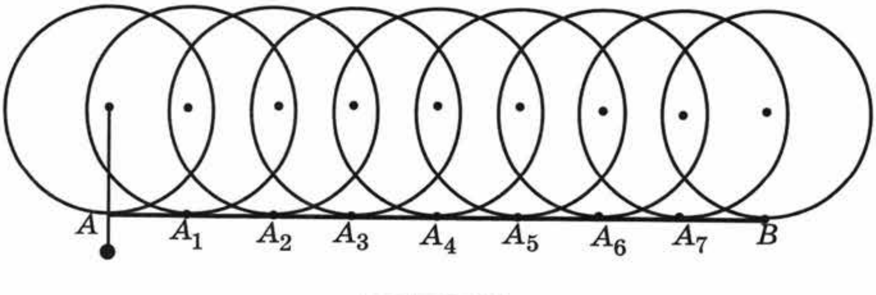


Рис. 23.7

3. Изобразите окружность радиуса 2 см и отрезок AB, равный длине окружности, как показано на рисунке 23.8. Разделите отрезок AB на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на радиусе окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) B; б) A_4; в) A_2; г) A_6; д) A_1; е) A_3; ж) A_5; з) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную циклоиду.

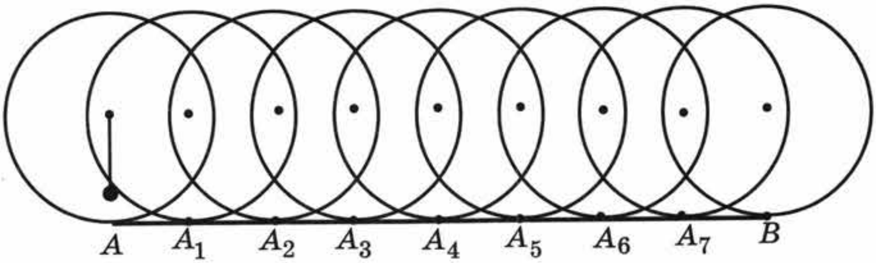


Рис. 23.8

4. Пусть правильный треугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите треугольники, как показано на рисунке 23.9. Отметьте положения закрёпленной точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по прямой.

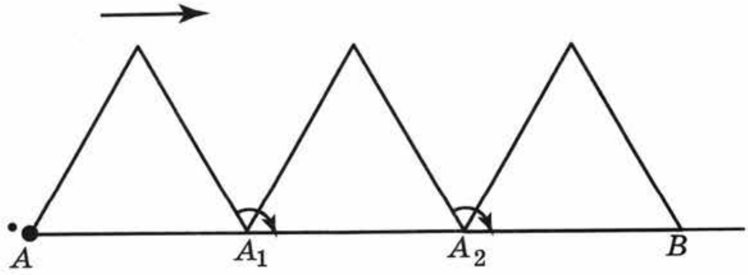


Рис. 23.9

5. Пусть квадрат катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите квадраты, как показано на рисунке 23.10. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по прямой.

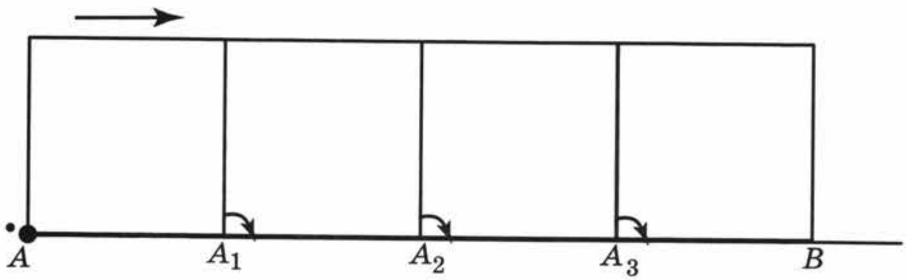


Рис. 23.10

6. Пусть правильный шестиугольник катится по прямой AB. Точка закреплена в вершине A. Изобразите шестиугольники, как показано на рисунке 23.11. Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона шестиугольника займёт положение: а) A_1A_2; б) A_2A_3; в) A_3A_4; г) A_4A_5; д) A_5B. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины шестиугольника, катящегося по прямой.

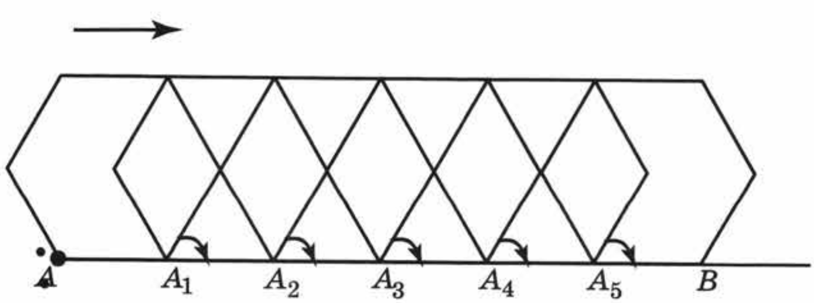


Рис. 23.11

Траектория движения точки, закреплённой на окружности, катящейся по другой окружности того же радиуса, называется ***кардиоидой*** (рис. 23.12).

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на продолжении радиуса окружности, катящейся по другой окружности, называется ***удлинённой кардиоидой*** (рис. 23.13).

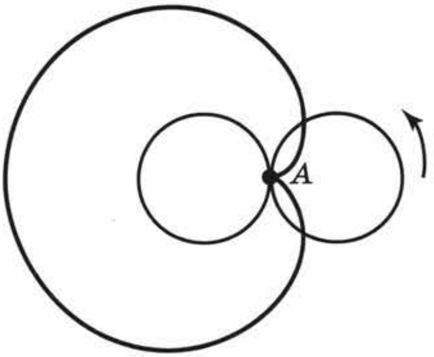


Рис. 23.12

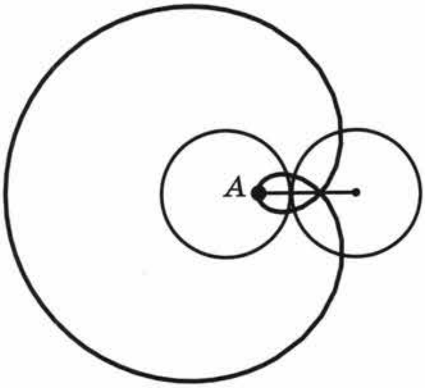


Рис. 23.13

Кривая, которую описывает точка, закреплённая на радиусе внутри окружности, катящейся по другой окружности, называется ***укороченной кардиоидой*** (рис. 23.14).

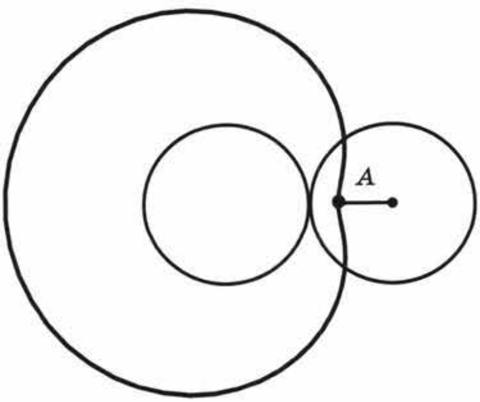


Рис. 23.14

7. Изобразите окружности, как показано на рисунке 23.15. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите кардиоиду.

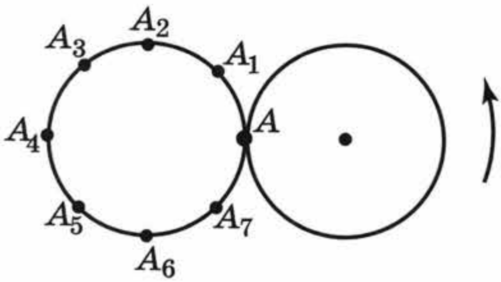


Рис. 23.15

8. Изобразите окружности, как показано на рисунке 23.16. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на продолжении радиуса катящейся окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите удлинённую кардиоиду.

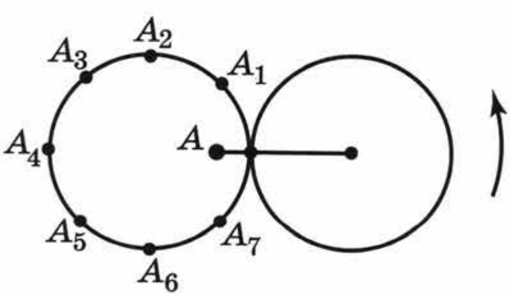


Рис. 23.16

9. Изобразите окружности, как показано на рисунке 23.17. Разделите окружность на 8 равных частей точками A_1, ..., A_7. Пусть точка, закреплённая на радиусе катящейся окружности, находится в положении A. Отметьте положение этой точки, когда катящаяся окружность достигнет точки: а) A_4; б) A_2; в) A_6; г) A_1; д) A_3; е) A_5; ж) A_7. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите укороченную кардиоиду.

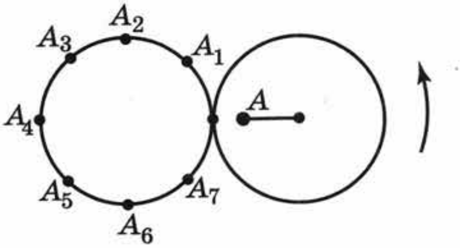


Рис. 23.17

10. Пусть правильный треугольник катится по другому правильному треугольнику ABC. Точка закреплена в вершине A (рис. 23.18). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона треугольника займёт положение: а) BC; б) CA. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины правильного треугольника, катящегося по другому правильному треугольнику.

11. Пусть квадрат катится по другому квадрату $ABCD$. Точка закреплена в вершине A (рис. 23.19). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона квадрата займёт положение: а) BC; б) CD; в) DA. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины квадрата, катящегося по другому квадрату.

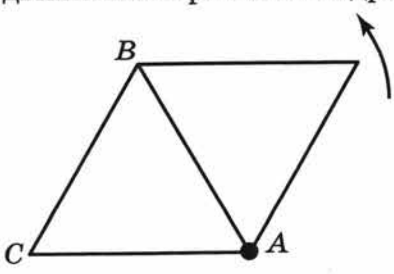


Рис. 23.18

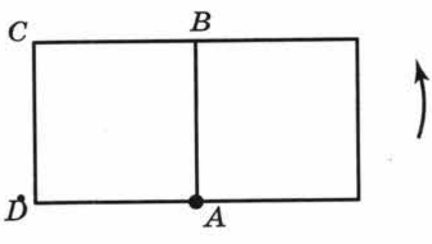


Рис. 23.19

12. Пусть правильный шестиугольник катится по другому правильному шестиугольнику $ABCDEF$. Точка закреплена в вершине A (рис. 23.20). Отметьте положения закреплённой точки, когда сторона катящегося шестиугольника займёт положение: а) BC; б) CD; в) DE; г) EF; д) FA. Соедините полученные точки плавной кривой. Получите траекторию движения вершины шестиугольника, катящегося по другому шестиугольнику.

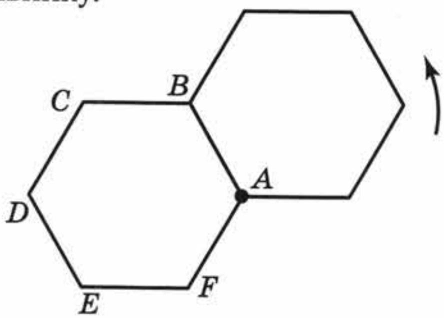


Рис. 23.20

13. Изобразите окружности, касающиеся внешним образом другой окружности в 3 раза большего радиуса, как показано на рисунке 23.21. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность будет касаться большой окружности в точке: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 3 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

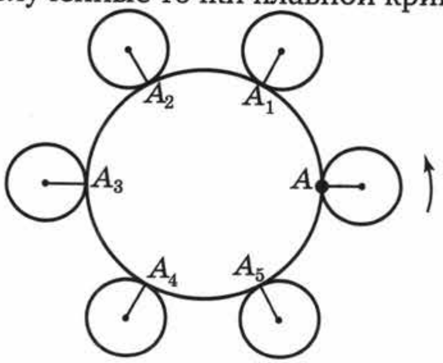


Рис. 23.21

14. Изобразите окружности, касающиеся внешним образом другой окружности в 2,5 раза большего радиуса, как показано на рисунке 23.22. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность будет касаться большой окружности в точке: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 2,5 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

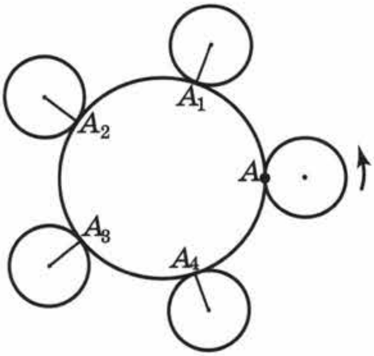


Рис. 23.22

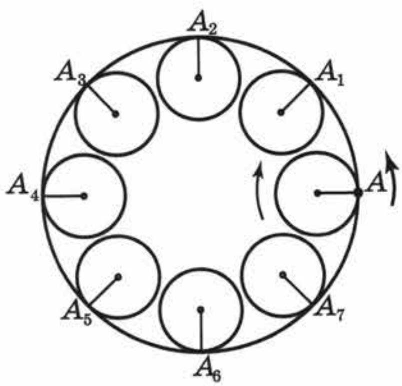


Рис. 23.23

15. Изобразите окружности, касающиеся внутренним образом другой окружности в 4 раза большего радиуса, как показано на рисунке 23.23. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность будет касаться большой окружности в точке: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 4 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой. Полученная кривая называется ***астроидой***.

16. Изобразите окружности, касающиеся внутренним образом другой окружности в 2,5 раза большего радиуса, как показано на рисунке 23.24. Пусть точка, закреплённая на маленькой окружности, находится в положении A. Отметьте положения закреплённой точки, когда катящаяся окружность будет касаться большой окружности в точке: а) A_1; б) A_2; в) A_3; г) A_4; д) A_5; е) A_6; ж) A_7. (Воспользуйтесь тем, что длина маленькой окружности в 2,5 раза меньше длины большой окружности.) Соедините полученные точки плавной кривой.

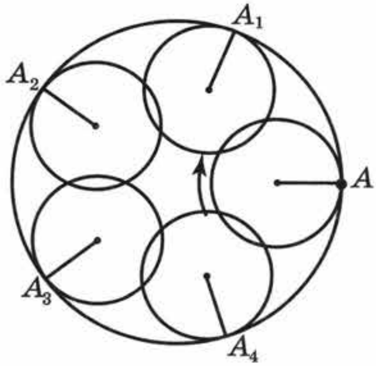


Рис. 23.24

17. Пусть квадрат катится внутри другого квадрата $ABCD$. Точка закреплена в вершине A (рис. 23.25). На клетчатой бумаге изобразите квадраты и траекторию движения точки, закреплённой в вершине квадрата.

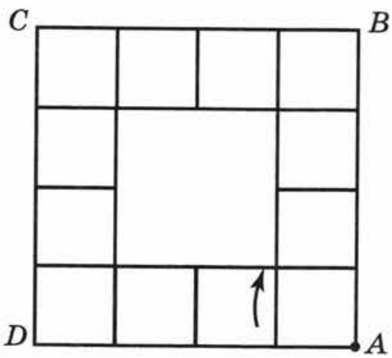
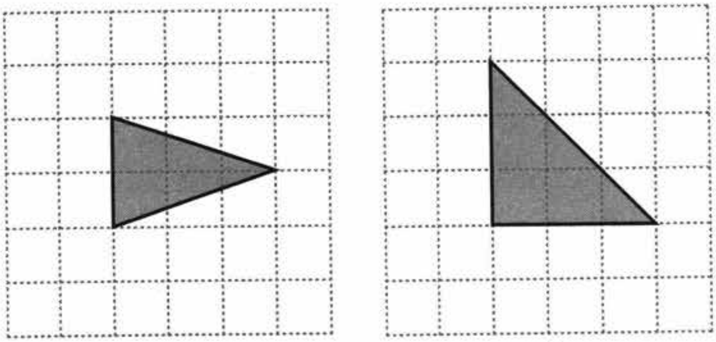


Рис. 23.25

§ 24. Разрезания

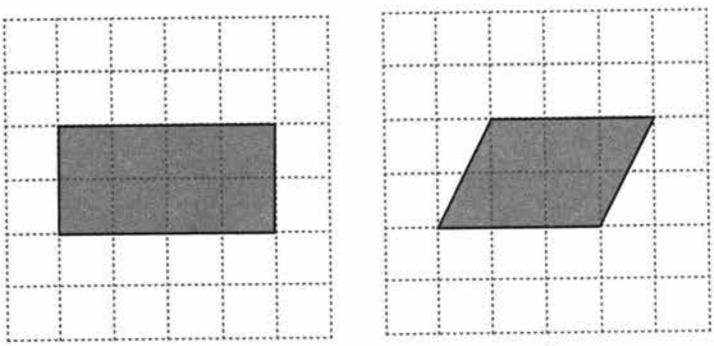
1. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как на рисунке 24.1. Проведите какую-нибудь прямую, делящую этот треугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 24.1

2. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 24.2. Проведите какую-нибудь прямую, делящую этот четырёхугольник на две равные части.



а) б)

Рис. 24.2

3. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 24.3. Через точку A проведите прямую, делящую этот четырёхугольник на две равные части.

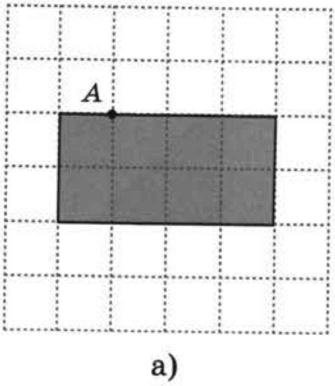


Рис. 24.3

4. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 24.4. Через точку A проведите прямую, делящую этот многоугольник на две равные части.

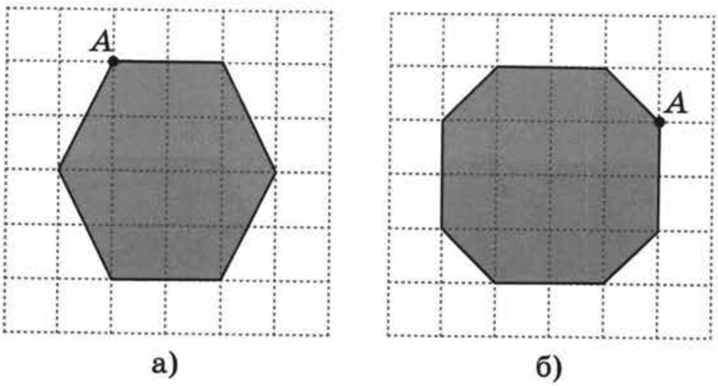
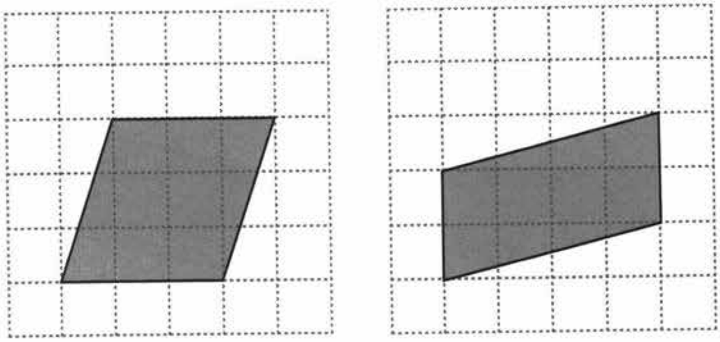


Рис. 24.4

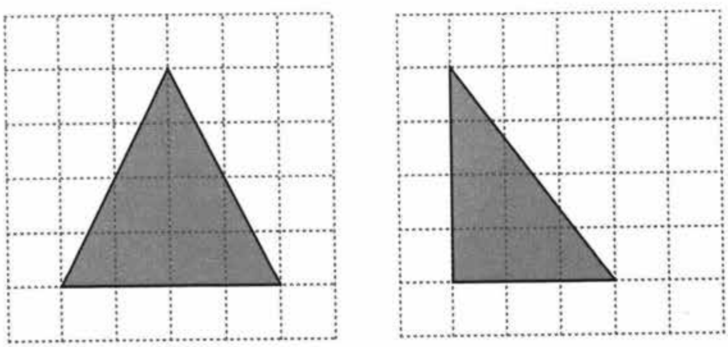
5. На клетчатой бумаге изобразите параллелограмм, как на рисунке 24.5. Проведите прямую, разрезав по которой этот параллелограмм, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



а) б)

Рис. 24.5

6. На клетчатой бумаге изобразите треугольник, как на рисунке 24.6. Проведите прямую, разрезав по которой этот треугольник, из полученных частей можно сложить прямоугольник.



а) б)

Рис. 24.6

7. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 24.7. Проведите прямую, разрезав по которой этот четырёхугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.

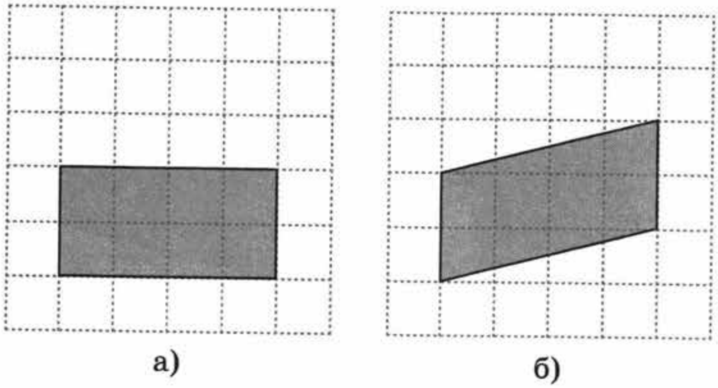


Рис. 24.7

8. На клетчатой бумаге изобразите четырёхугольник, как на рисунке 24.8. Проведите прямую, разрезав по которой этот четырёхугольник, из полученных частей можно сложить треугольник.

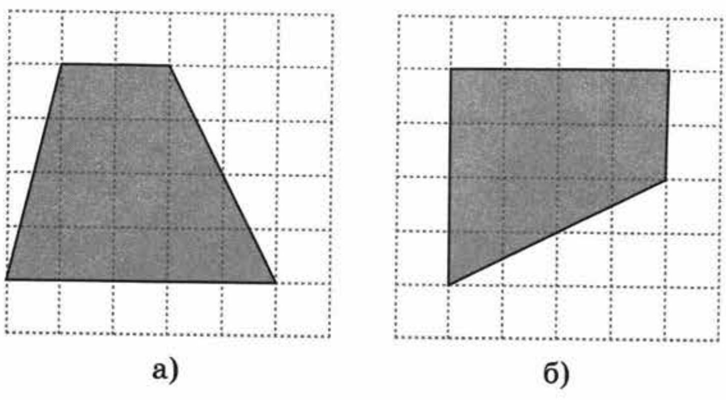


Рис. 24.8

9. На клетчатой бумаге изобразите шестиугольник, как на рисунке 24.9. Проведите прямую, разрезав по которой этот многоугольник, из полученных частей можно сложить параллелограмм.

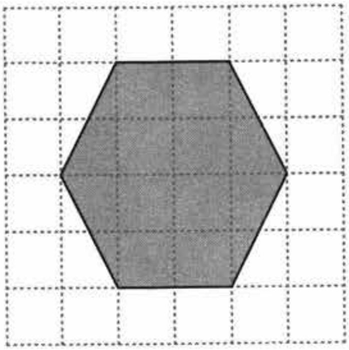
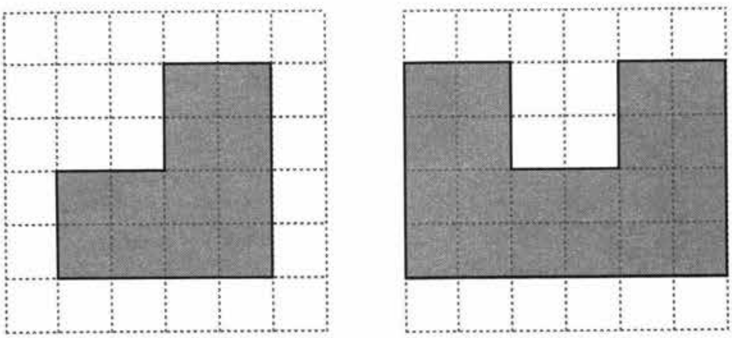


Рис. 24.9

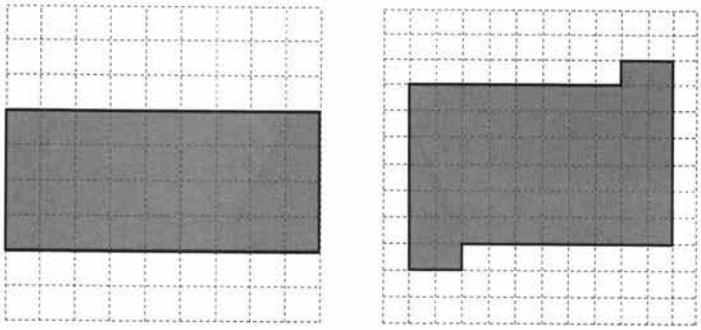
10. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 24.10. Разрежьте его на четыре равные части.



а) б)

Рис. 24.10

11. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 24.11. Разрежьте его на две части, из которых можно сложить квадрат.



а) б)

Рис. 24.11

12. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 24.12. Разрежьте его на несколько частей, из которых можно сложить квадрат.

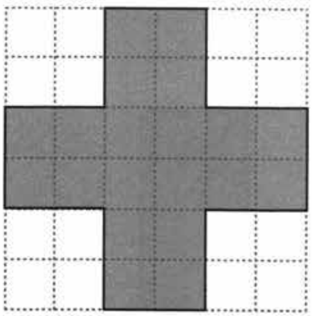
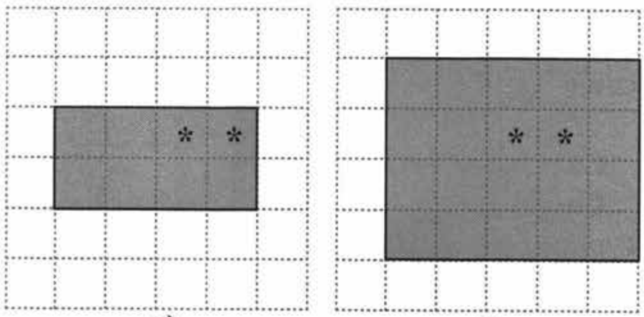


Рис. 24.12



а) б)

Рис. 24.13

13. На клетчатой бумаге изобразите многоугольник, как на рисунке 24.13. Разрежьте его на две равные части так, чтобы в каждой из них была звёздочка.

§ 25. Площадь

Площадь фигуры характеризует величину части плоскости, которую занимает эта фигура.

Измерение площади фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, площадь которой принимается за единицу.

За единицу измерения площади принимается квадрат со стороной, равной единице измерения длины. Он называется ***единичным квадратом***. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения площади принимается квадрат, сторона которого равна соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой квадрат называется квадратным миллиметром, квадратным сантиметром или квадратным метром соответственно.

Можно сказать, что ***площадь фигуры*** – это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный квадрат и его части укладываются в данной фигуре.

Площадь фигуры зависит от единицы измерения, поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после величины площади S указывают единицу измерения, например, S мм^2, S см^2, S м^2.

Для площадей плоских фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные площади.

Свойство 2. Если фигура составлена из двух или нескольких фигур, то её площадь равна сумме площадей этих фигур.

Две фигуры называются ***равновеликими***, если они имеют одинаковую площадь.

Рассмотрим примеры нахождения площадей фигур.

Пример 1. На рисунке 25.1 показан прямоугольник со сторонами 4 и 3. Ясно, что в нём укладывается 12 единичных квадратов, следовательно, его площадь равна 12.

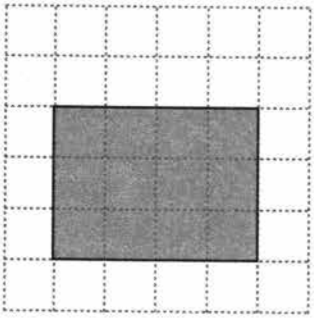


Рис. 25.1

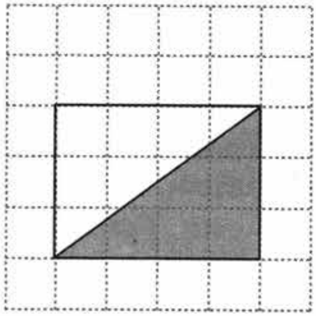


Рис. 25.2

В общем случае площадь прямоугольника равна произведению двух его соседних сторон, т. е. для площади S прямоугольника, соседние стороны которого равны a и b, имеет место формула

$$S = a \cdot b.$$

В частности, площадь квадрата со стороной a равна a^2.

Пример 2. На рисунке 25.2 показан прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4 и 3. Два таких треугольника составляют прямоугольник со сторонами 4 и 3. Следовательно, площадь прямоугольного треугольника равна половине площади прямоугольника, т. е. равна 6.

В общем случае площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, т. е. для площади S прямоугольного треугольника, катеты которого равны a и b, имеет место формула

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b.$$

Пример 3. На рисунке 25.3 показан параллелограмм, одна сторона которого равна 4, а высота, опущенная на неё, равна 3. Этот параллелограмм будет составлен из трапеции *FBCD* и треугольника *AFD*. Прямоугольник *FECD* составлен из той же трапеции и треугольника *BEC*, причём площадь треугольника *AFD* равна площади треугольника *BEC*. Следовательно, площадь параллелограмма *ABCD* равна площади прямоугольника *FECD*, т. е. равна 12.

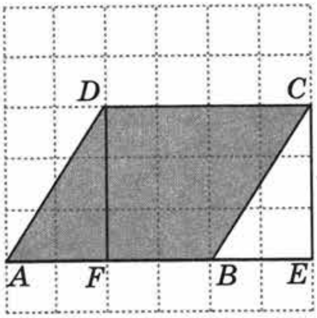


Рис. 25.3

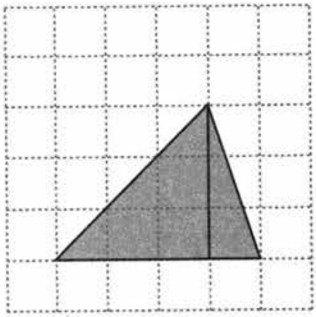


Рис. 25.4

В общем случае для площади S параллелограмма со стороной a и высотой h, проведённой к ней, имеет место формула

$$S = a \cdot h.$$

Пример 4. На рисунке 25.4 показан треугольник, одна сторона которого равна 4, а высота, опущенная на неё, равна 3. Этот треугольник составлен из двух прямоугольных треугольников, площади которых равны 4,5 и 1,5. Площадь исходного треугольника равна сумме площадей этих прямоугольных треугольников, т. е. равна 6.

В общем случае для площади S треугольника со стороной a и высотой h, проведённой к ней, имеет место формула

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h.$$

Пример 5. Площадь многоугольника можно вычислять, разбивая его на прямоугольники, параллелограммы и треугольники. На рисунке 25.5 показан шестиугольник, разбитый на прямоугольник и два треугольника. Площадь прямоугольника равна 8, площади треугольников равны 2. Следовательно, площадь шестиугольника равна 12.

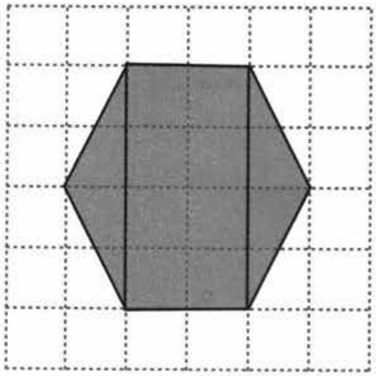


Рис. 25.5

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения площади?
2. Какие две фигуры называются равновеликими?
3. Чему равна площадь прямоугольника?
4. Чему равна площадь прямоугольного треугольника?
5. Чему равна площадь параллелограмма?
6. Чему равна площадь треугольника?
7. Как вычисляется площадь многоугольника?

Задачи

1. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его стороны увеличить в: а) 2 раза; б) 3 раза (рис. 25.6)?

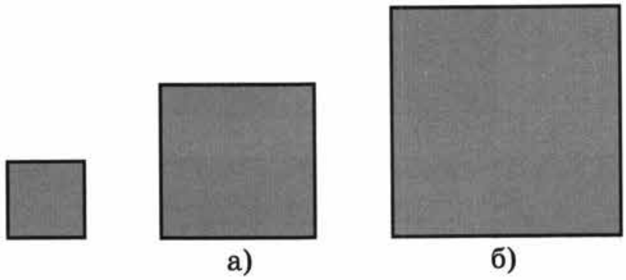


Рис. 25.6

2. Во сколько раз уменьшится площадь прямоугольника, если его стороны уменьшить в: а) 2 раза; б) 3 раза (рис. 25.7)?

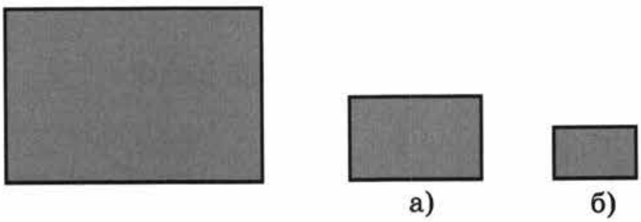


Рис. 25.7

3. Как изменится площадь прямоугольника, если одну его сторону: а) уменьшить в 2 раза; б) увеличить в 3 раза (рис. 25.8)?

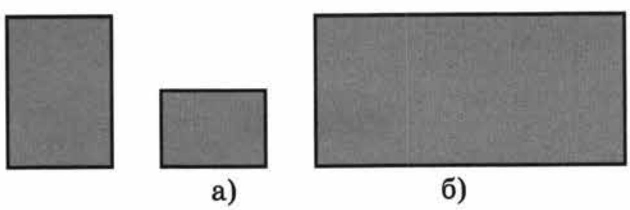


Рис. 25.8

4. На рисунке 25.9 укажите равновеликие фигуры.

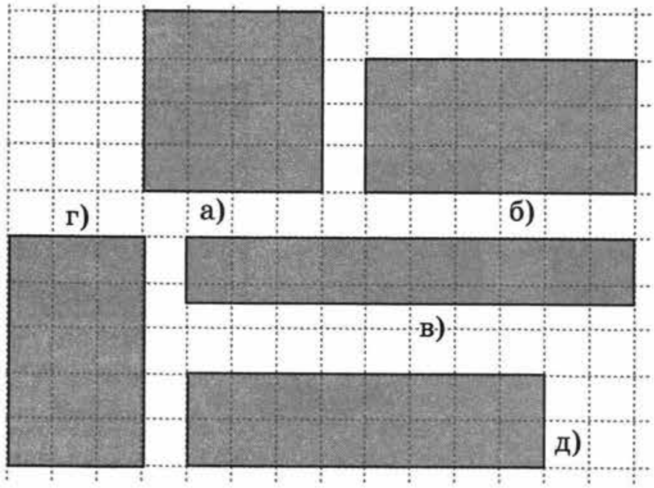


Рис. 25.9

5. Найдите площадь фигур на рисунке 25.10.

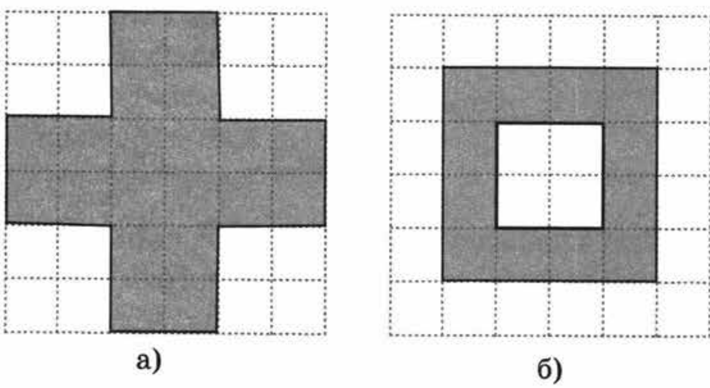


Рис. 25.10

6. Найдите площади многоугольников, изображённых на рисунке 25.11, все углы которых прямые.

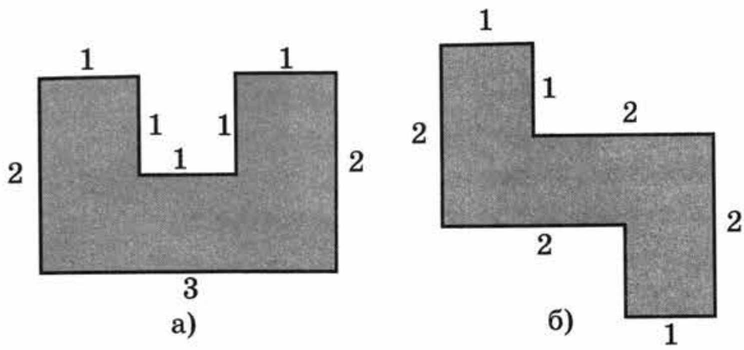


Рис. 25.11

7. Найдите площадь фигуры, являющейся объединением двух единичных квадратов, вершина одного из которых расположена в центре другого, как показано на рисунке 25.12.

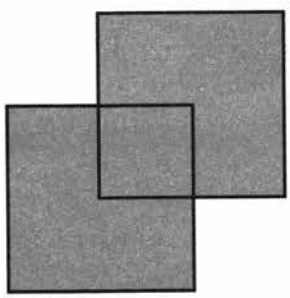


Рис. 25.12

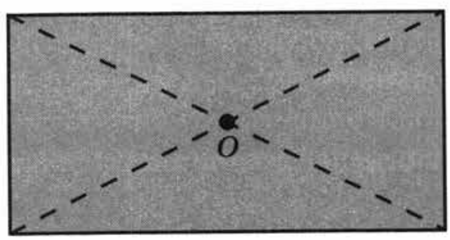


Рис. 25.13

8. Прямоугольник со сторонами 2 и 4 повёрнут вокруг точки O пересечения его диагоналей на угол 90° (рис. 25.13). Найдите площадь общей части исходного прямоугольника и повёрнутого.

9. Найдите площади треугольников, изображённых на рисунке 25.14.

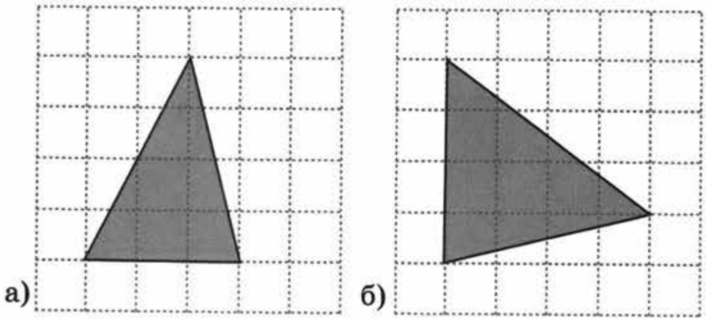


Рис. 25.14

10. Найдите площади треугольников, изображённых на рисунке 25.15.

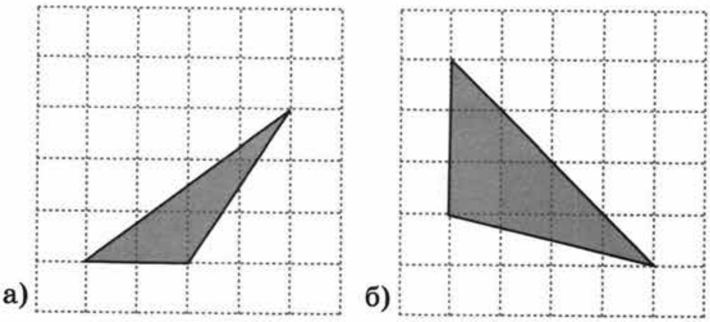


Рис. 25.15

11. На рисунке 25.16 укажите равновеликие фигуры.

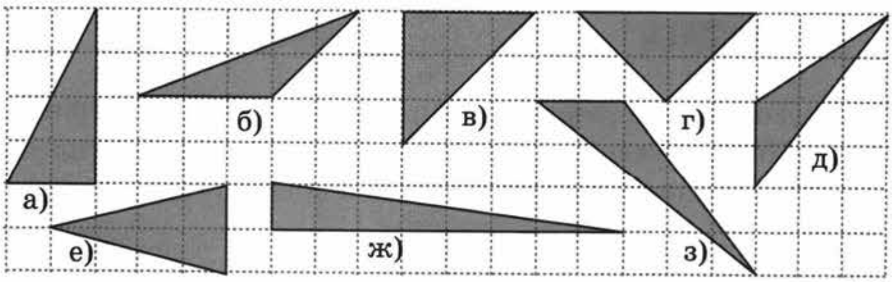


Рис. 25.16

12. Найдите площадь параллелограммов на рисунке 25.17.

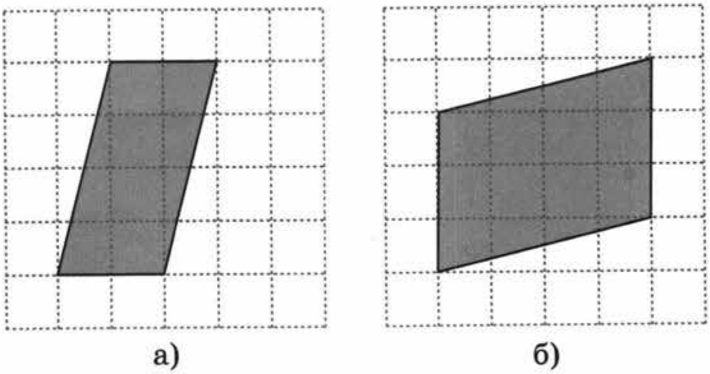


Рис. 25.17

13. На рисунке 25.18 укажите равновеликие фигуры.

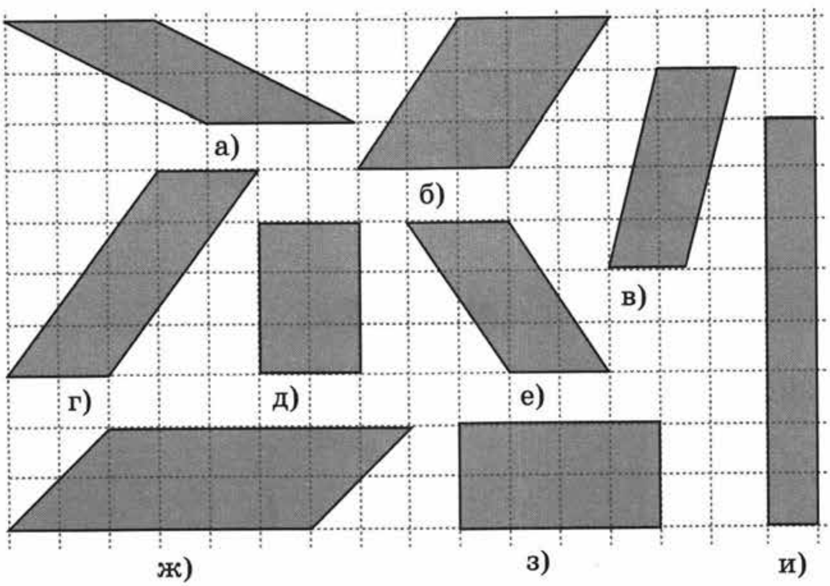


Рис. 25.18

14. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 25.19.

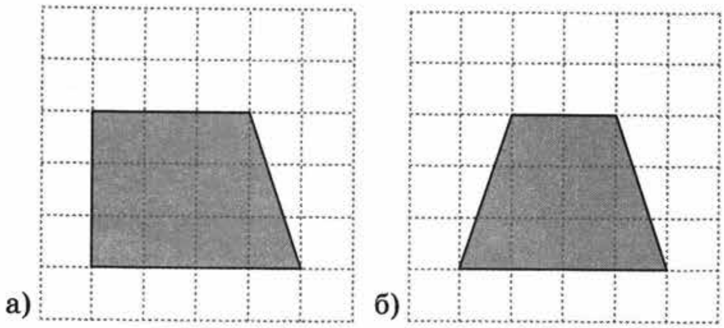


Рис. 25.19

15. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 25.20.

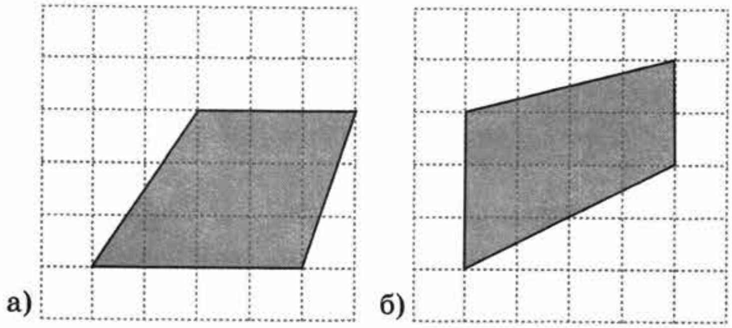


Рис. 25.20

16. Найдите площадь четырёхугольников на рисунке 25.21.

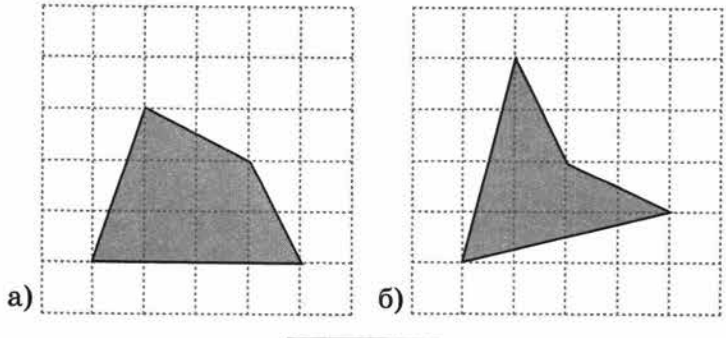


Рис. 25.21

17. Найдите площадь треугольников на рисунке 25.22.

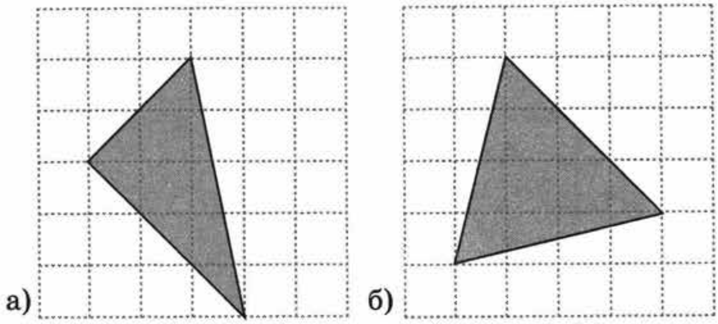


Рис. 25.22

18. Найдите площадь треугольников на рисунке 25.23.

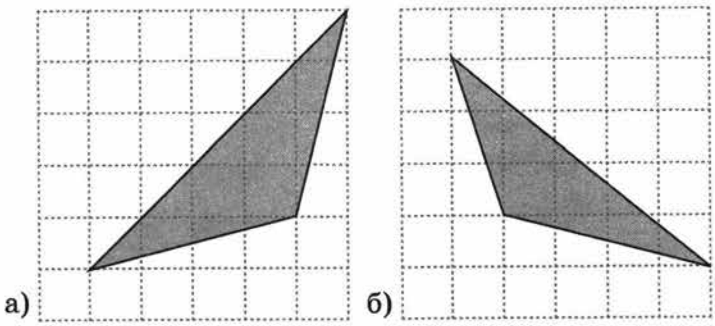


Рис. 25.23

19. Найдите площадь пятиугольников на рисунке 25.24.

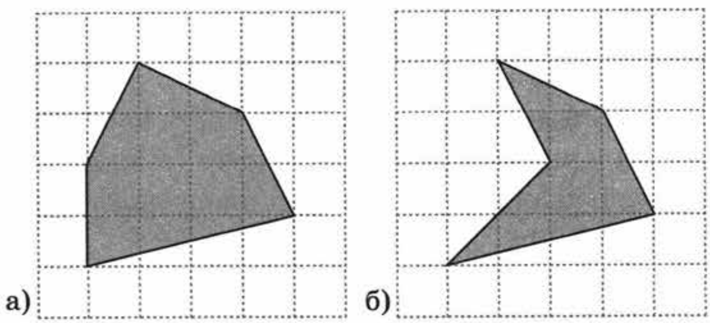
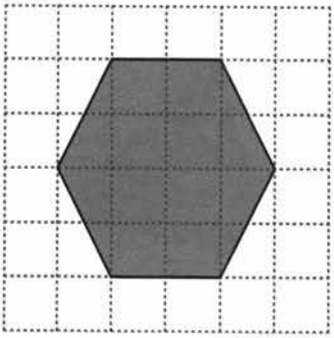
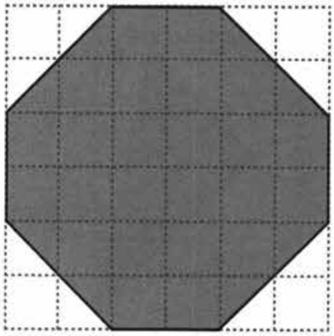


Рис. 25.24

20. Найдите площадь многоугольников на рисунке 25.25.



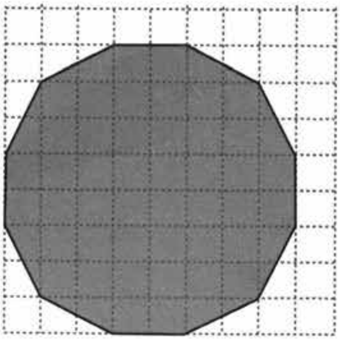
а)



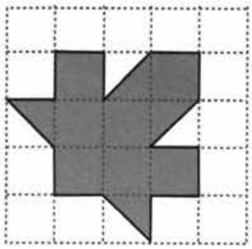
б)

Рис. 25.25

21. Найдите площадь многоугольников на рисунке 25.26.



а)



б)

Рис. 25.26

22. ***Круговым сектором*** называется часть круга, заключённая внутри угла с вершиной в центре этого круга (рис. 25.27).

Какую часть площади круга составляет площадь кругового сектора с углом, равным: а) 90°; б) 45°; в) 60°?

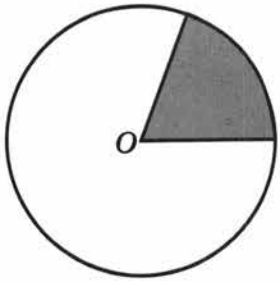


Рис. 25.27

23. Найдите площадь фигуры, ограниченной тремя дугами окружности радиуса 2 (рис. 25.28).

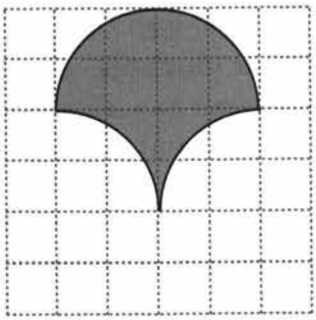


Рис. 25.28

§ 26. Объём

Объём фигуры характеризует величину части пространства, которую занимает эта фигура.

Измерение объёма фигуры, как и измерение длины отрезка, основано на сравнении этой фигуры с фигурой, объём которой принимается за единицу.

За единицу измерения объёма принимается куб с ребром, равным единице измерения длины. Он называется ***единичным кубом***. Например, если за единицу измерения длины принимается 1 мм, 1 см или 1 м, то за единицу измерения объёма принимается куб, ребро которого равно соответственно 1 мм, 1 см или 1 м. Такой куб называется кубическим миллиметром, кубическим сантиметром или кубическим метром соответственно.

Можно сказать, что ***объём фигуры*** – это число, получающееся в результате измерения и показывающее, сколько раз единичный куб и его части укладываются в данной фигуре.

Объём фигуры зависит от единицы измерения, поэтому в случаях, когда могут возникнуть недоразумения, после величины объёма V указывают единицу измерения, например, V мм^3, V см^3, V м^3.

Для объёмов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам длин отрезков.

Свойство 1. Равные фигуры имеют равные объёмы.

Свойство 2. Если фигура составлена из двух или нескольких фигур, то её объём равен сумме объёмов этих фигур.

Рассмотрим примеры нахождения объёмов пространственных фигур.

Пример 1. На рисунке 26.1, а показан прямоугольный параллелепипед, рёбра которого равны 4, 3 и 2. Ясно, что в нём укладывается 24 единичных куба. Следовательно, его объём равен 24.

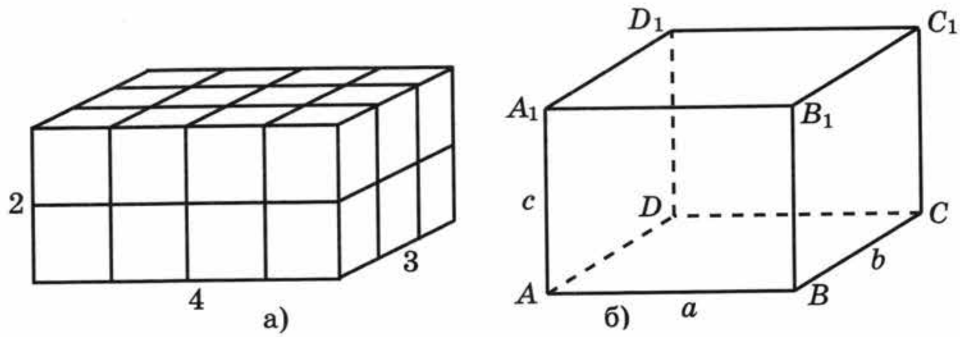


Рис. 26.1

В общем случае объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений, т. е. если рёбра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны a, b и c, то его объём V выражается формулой $V = a \cdot b \cdot c$ (рис. 26.1, б).

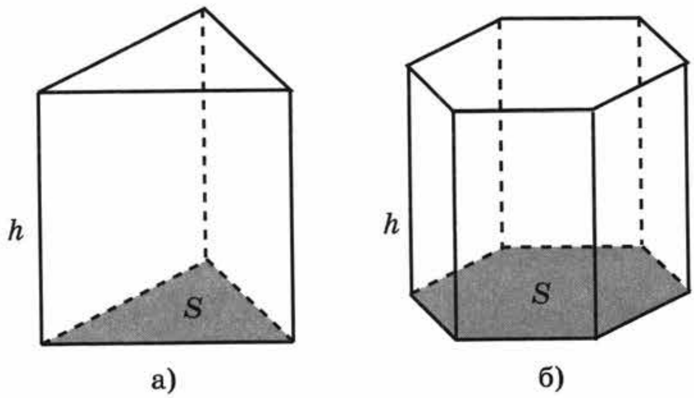


Рис. 26.2

Объём прямой призмы равен произведению площади её основания на высоту, т. е. если площадь основания равна S, а высота равна h, то объём V призмы выражается формулой $V = S \cdot h$ (рис. 26.2).

Вопросы

1. Что принимается за единицу измерения объёма?

2. Какие свойства выполняются для объёмов пространственных фигур?

3. Чему равен объём прямоугольного параллелепипеда?

4. Чему равен объём прямой призмы?

Задачи

1. Во сколько раз увеличится объём куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза (рис. 26.3)?

2. Во сколько раз уменьшится объём прямоугольного параллелепипеда, если все его рёбра уменьшить в 2 раза (рис. 26.4)?

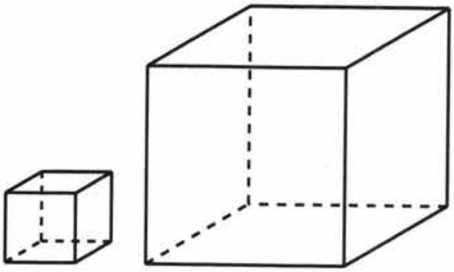


Рис. 26.3

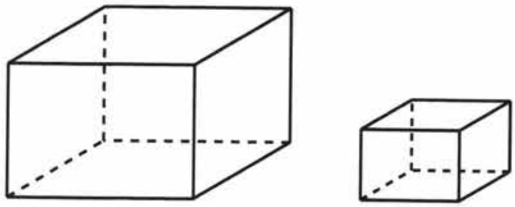


Рис. 26.4

3. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 26.5 (все углы прямые).

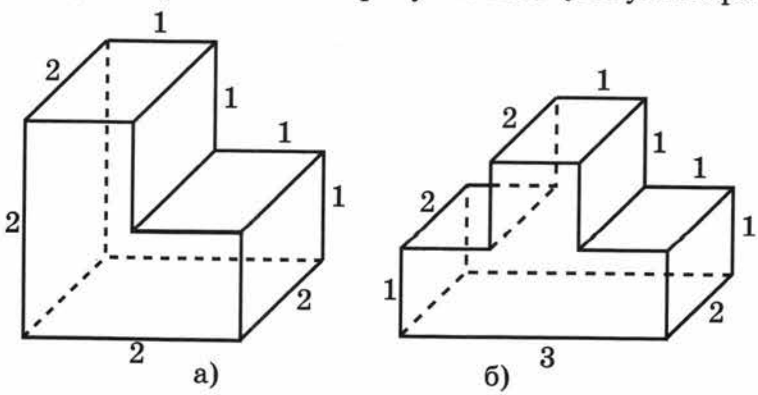


Рис. 26.5

4. Найдите объём фигуры, изображённой на рисунке 26.6 (все углы прямые).

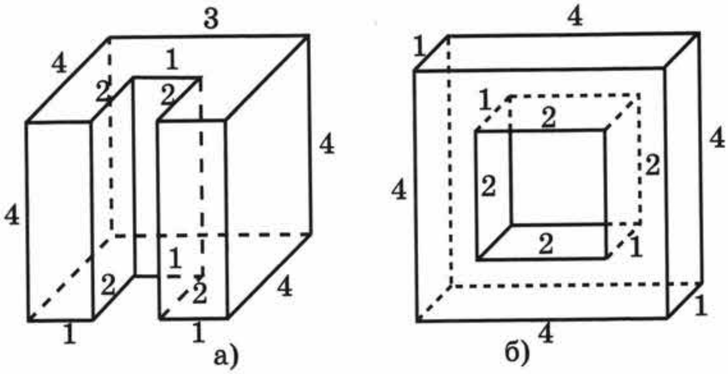


Рис. 26.6

5. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 26.7 (все углы прямые).

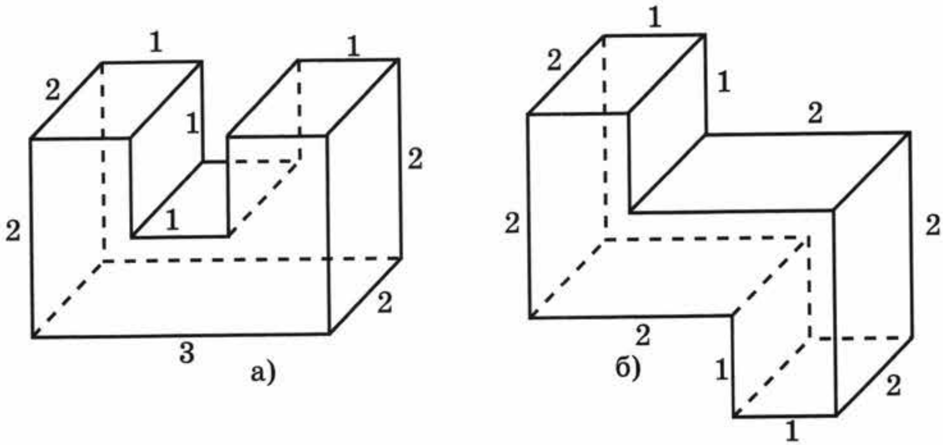


Рис. 26.7

6. Найдите объём фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 26.8 (все углы прямые).

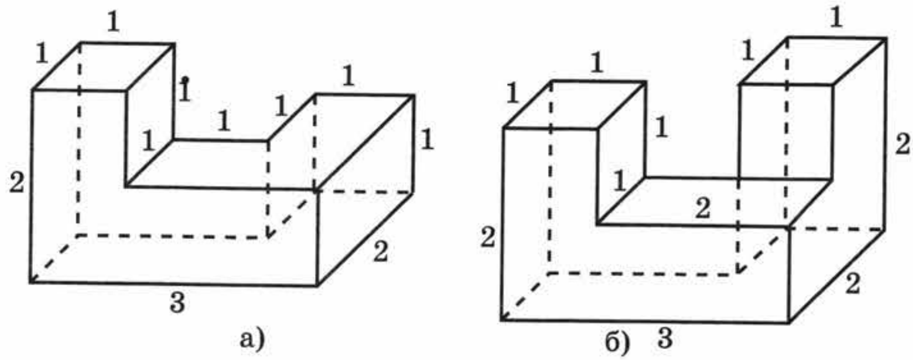


Рис. 26.8

7. Найдите объём общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого (рис. 26.9).

8. Найдите объём фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 26.10).

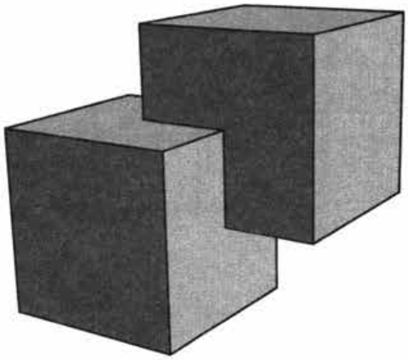


Рис. 26.9

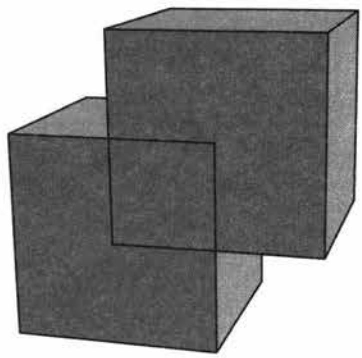


Рис. 26.10

9. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 26.11). Найдите объём оставшейся части.

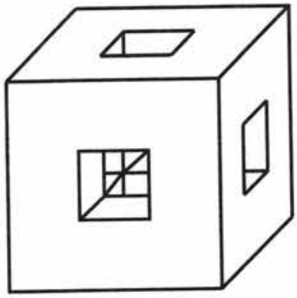


Рис. 26.11

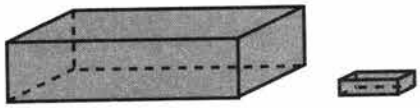


Рис. 26.12

10. Строительный кирпич весит 4 кг. Сколько граммов весит игрушечный кирпич из того же материала, все размеры которого в четыре раза меньше (рис. 26.12)?

11. Какова должна быть площадь кабинета высотой 3,5 м для класса в 28 человек, если на каждого ученика нужно 7,5 м^3 воздуха (рис. 26.13)?

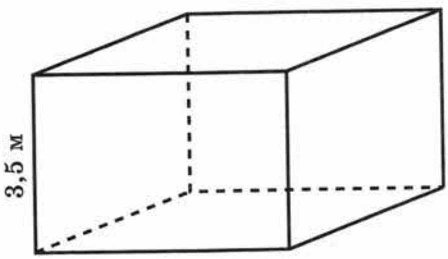


Рис. 26.13

12. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3. Найдите объём треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 26.14).

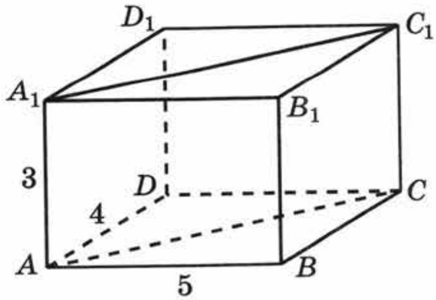


Рис. 26.14

13. Рёбра прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3. Найдите объём треугольной призмы $ABOA_1B_1O_1$ (рис. 26.15).

14. Найдите объём правильной четырёхугольной пирамиды, основанием которой является грань единичного куба, а вершиной – центр этого куба (рис. 26.16).

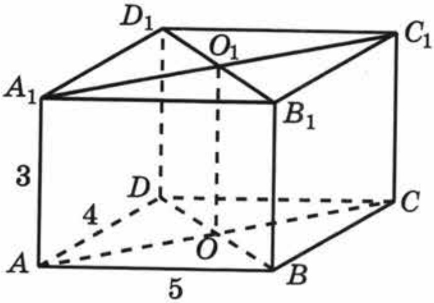


Рис. 26.15

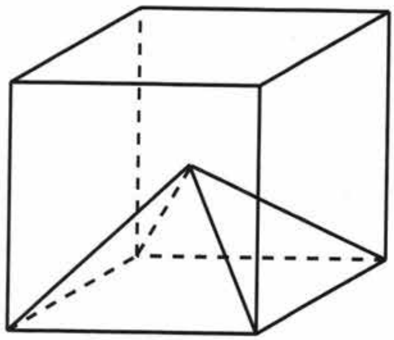


Рис. 26.16

15. Основанием аквариума является прямоугольник со сторонами 40 см и 50 см. Уровень воды в нём находится на высоте 80 см. Эту воду перелили в другой аквариум, основанием которого является прямоугольник со сторонами 80 см и 100 см. На какой высоте будет находиться уровень воды (рис. 26.17)?

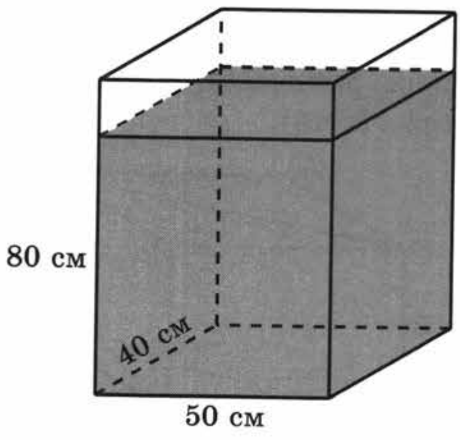


Рис. 26.17

§ 27. Площадь поверхности

Площадью поверхности произвольного многогранника называется сумма площадей входящих в эту поверхность многоугольников.

Задачи

1. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, рёбра которого, выходящие из одной вершины, равны 5, 4, 3 (рис. 27.1).

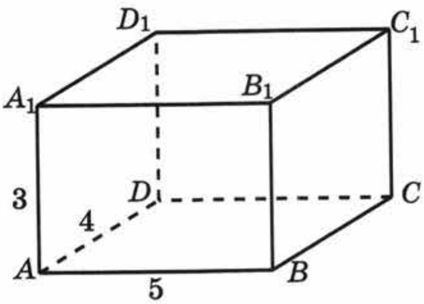


Рис. 27.1

2. Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если все его рёбра увеличить в 3 раза (рис. 27.2)?

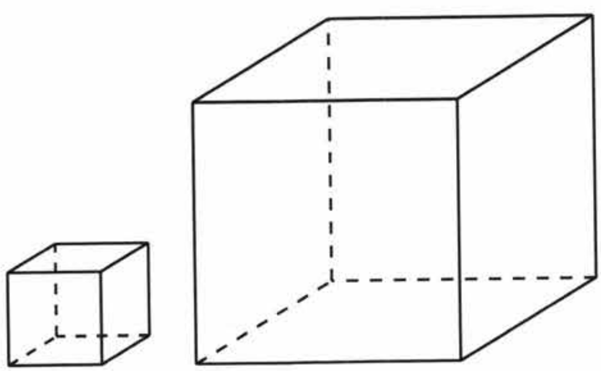


Рис. 27.2

3. Во сколько раз уменьшится площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, если все его рёбра уменьшить в 2 раза (рис. 27.3)?

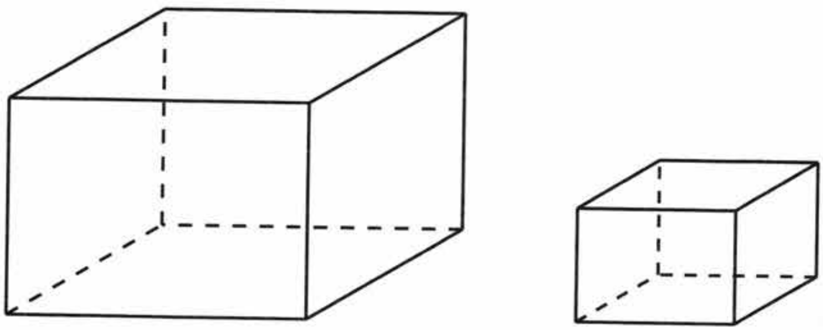


Рис. 27.3

4. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 27.4 (все углы прямые).

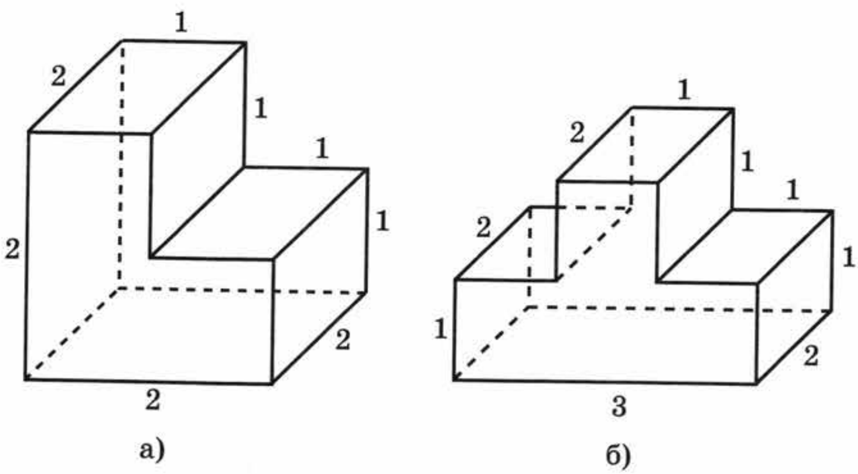


Рис. 27.4

5. Найдите площадь поверхности фигуры, изображённой на рисунке 27.5 (все углы прямые).

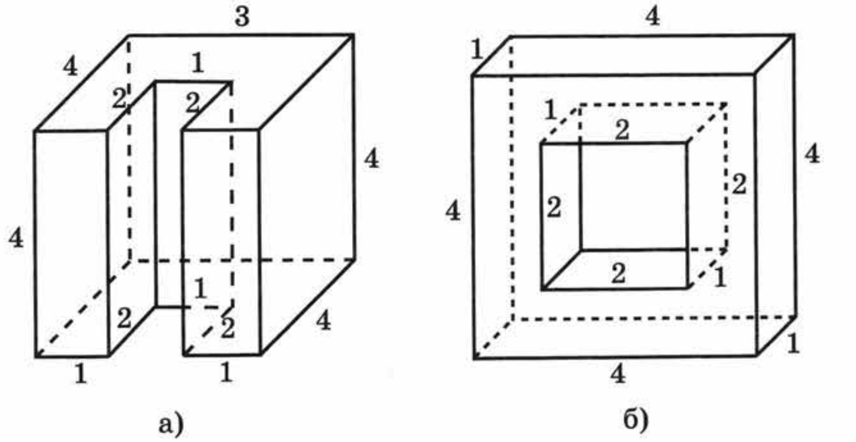


Рис. 27.5

6. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 27.6 (все углы прямые).

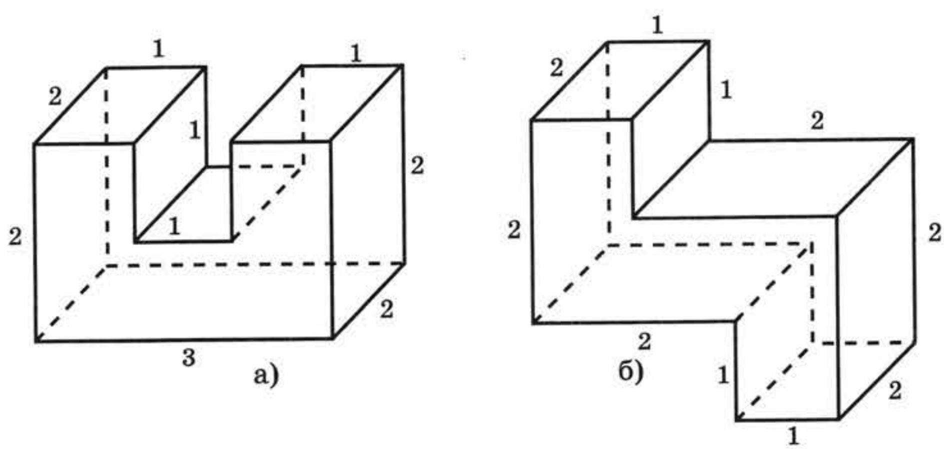


Рис. 27.6

7. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из прямоугольных параллелепипедов, изображённой на рисунке 27.7 (все углы прямые).

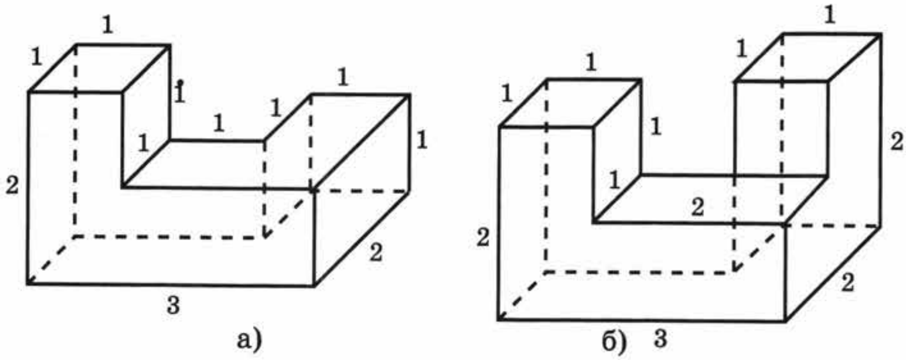


Рис. 27.7

8. Найдите площадь поверхности общей части (пересечения) двух единичных кубов, вершина одного из которых расположена в центре другого (рис. 27.8).

9. Найдите площадь поверхности фигуры, составленной из двух единичных кубов, две вершины одного из которых расположены в центрах граней другого (рис. 27.9).

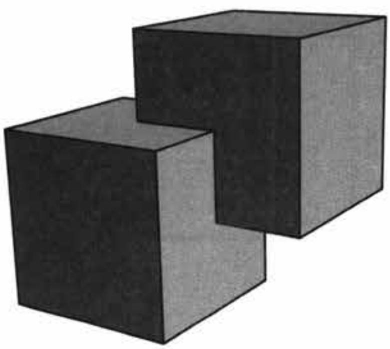


Рис. 27.8

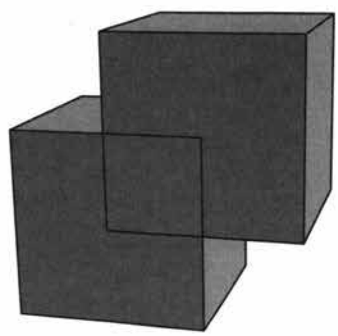


Рис. 27.9

10. Чему равна площадь поверхности пространственного креста (рис. 27.10), если рёбра образующих его кубов равны единице?

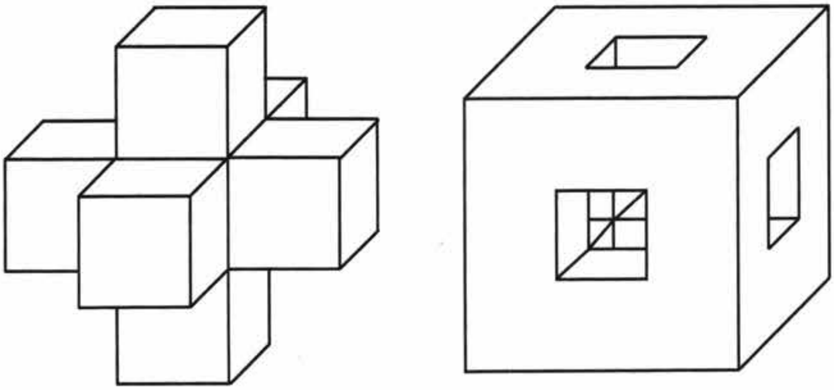


Рис. 27.10

11. В каждой грани куба с ребром 6 см проделали сквозное квадратное отверстие со стороной квадрата 2 см (рис. 27.11). Найдите площадь поверхности оставшейся части.

12. Объём куба равен 27. Найдите площадь его поверхности.

13. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объём.

14. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2. Каким должно быть третье ребро, выходящее из той же вершины, чтобы площадь поверхности этого параллелепипеда равнялась 40?

§ 28. Координаты

Координатной прямой, или ***координатной осью***, называется прямая, на которой выбраны точка O, называемая ***началом координат***, и единичный отрезок OE, указывающий положительное направление координатной прямой (рис. 28.1).

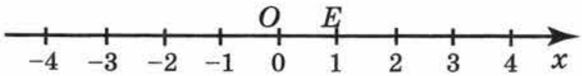


Рис. 28.1

Координатой точки A на координатной прямой называется расстояние от точки A до начала координат O, взятое со знаком «+», если A принадлежит положительной полуоси, и со знаком «–», если A принадлежит отрицательной полуоси.

Прямоугольной системой координат на плоскости называется пара перпендикулярных координатных прямых с общим началом координат (рис. 28.2).

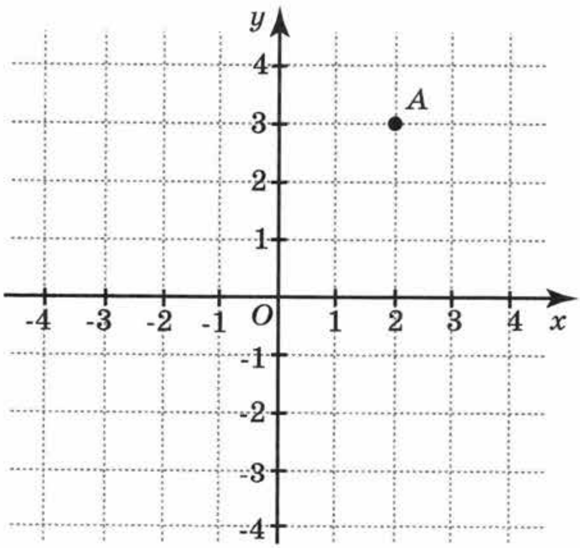


Рис. 28.2

Начало координат обозначается буквой O, а ***координатные прямые*** обозначаются Ox, Oy и называются соответственно ***осью абсцисс*** и ***осью ординат***.

Плоскость с заданной прямоугольной системой координат называется ***координатной плоскостью***.

Пусть A – точка на координатной плоскости. Через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Ox. Координата этой точки на оси Ox называется ***абсциссой*** точки A и обозначается x. Аналогично через точку A проведём прямую, перпендикулярную оси Oy. Координата этой точки на оси Oy называется ***ординатой*** точки A и обозначается y.

Таким образом, каждой точке A на координатной плоскости соответствует пара чисел (x, y), называемая координатами точки на плоскости относительно данной системы координат. Точка A с координатами (x, y) обозначается $A(x, y)$. На рисунке 28.2 отмечена точка $A(2, 3)$.

Впервые прямоугольные координаты были введены Р. Декартом (1596–1650), поэтому прямоугольную систему координат называют также декартовой системой координат, а сами координаты – декартовыми координатами. Введение прямоугольных координат на плоскости позволило свести многие геометрические задачи к чисто алгебраическим и, наоборот, алгебраические задачи – к геометрическим. Метод, основанный на этом, называется ***методом координат***.

Вопросы

1. Какая прямая называется координатной?
2. Что называется координатой точки на координатной прямой?
3. Что называется прямоугольной системой координат на плоскости?
4. Что называется координатной плоскостью?
5. Что называется абсциссой, ординатой точки на координатной плоскости?

Задачи

1. Для заданных точек на координатной плоскости (рис. 28.3) найдите их координаты.

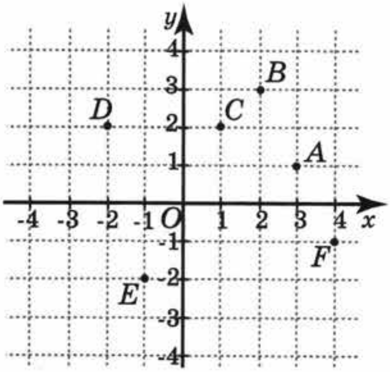


Рис. 28.3

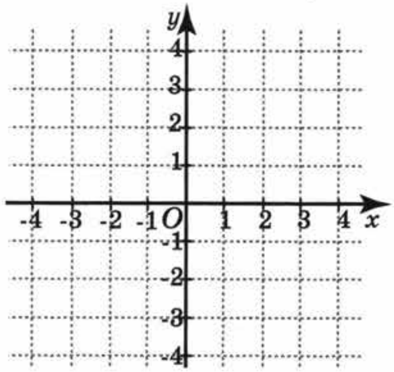


Рис. 28.4

2. Изобразите координатную плоскость, как на рисунке 28.4. Отметьте точки $A(2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 2)$, $D(-3, 2)$, $E(-2, -3)$, $F(3, -2)$.

3. На координатной плоскости изобразите отрезок, концы которого имеют координаты: а) $(0, 0)$ и $(3, 3)$; б) $(-1, 1)$ и $(2, 1)$; в) $(-2, -1)$ и $(1, -3)$.

4. На координатной плоскости изобразите угол AOB, для которого: а) $A(3, 0)$, $O(0, 0)$, $B(0, 3)$; б) $A(3, 0)$, $O(0, 0)$, $B(3, 3)$; в) $A(3, 0)$, $O(0, 0)$, $B(-3, 3)$. Найдите его величину.

5. На координатной плоскости изобразите угол ABC, для которого: а) $A(2, 1)$, $B(-1, 1)$, $C(2, -2)$; б) $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 4)$; в) $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$, $C(2, 4)$. Найдите его величину.

6. На координатной плоскости нарисуйте ломаную $ABCDE$, для которой: а) $A(2, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-1, 3)$, $D(-1, 1)$, $E(1, 1)$. Найдите её длину.

7. На координатной плоскости изобразите треугольник ABC, для которого $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(0, 1)$. Какой это треугольник?

8. На координатной плоскости изобразите треугольник ABC, для которого $A(-2, 2)$, $B(2, -2)$, $C(0, 1)$. Какой это треугольник?

9. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник $ABCD$, для которого $A(-2, 0)$, $B(0, -2)$, $C(2, 0)$, $D(0, 2)$. Какой это четырёхугольник?

10. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник $ABCD$, для которого $A(-2, 1)$, $B(2, -1)$, $C(3, 1)$, $D(-1, 3)$. Какой это четырёхугольник?

11. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник $ABCD$, для которого $A(-2, 1)$, $B(2, 2)$, $C(1, 4)$, $D(-3, 3)$. Какой это четырёхугольник?

12. На координатной плоскости изобразите четырёхугольник $ABCD$, для которого $A(-2, -1)$, $B(2, -1)$, $C(1, 2)$, $D(-1, 2)$. Какой это четырёхугольник?

13. Найдите координаты середины отрезка: а) AB; б) CD; в) EF, изображённого на рисунке 28.5.

14. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(1, 2)$ (рис. 28.6) относительно точки: а) $O(0, 0)$; б) $B(2, 1)$; в) $C(-1, 1)$. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

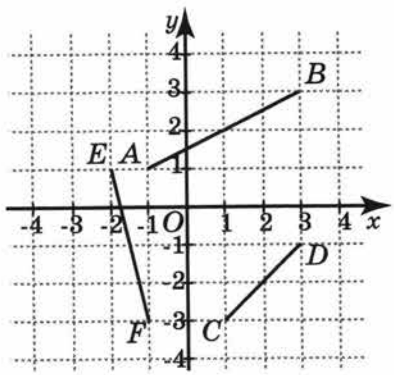


Рис. 28.5

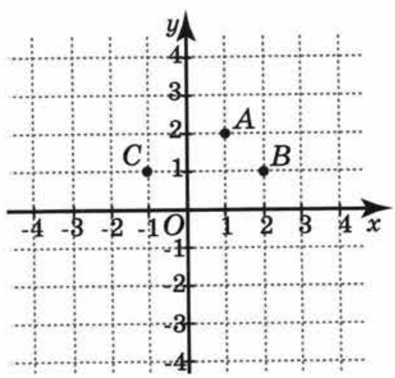


Рис. 28.6

15. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(2, 3)$ (рис. 28.7) относительно: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

16. Найдите координаты точки, полученной поворотом точки $A(2, 3)$ (рис. 28.7) вокруг начала координат на угол 90°: а) против часовой стрелки; б) по часовой стрелке. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

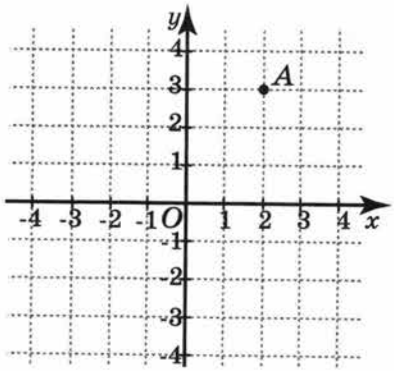


Рис. 28.7

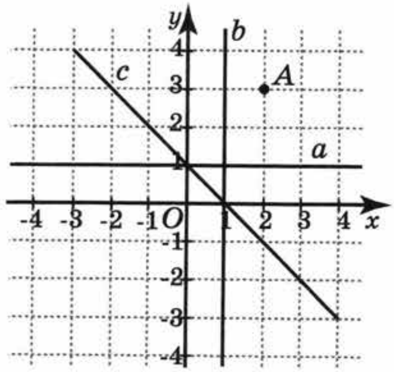


Рис. 28.8

17. Найдите координаты точки, симметричной точке $A(2, 3)$ (рис. 28.8) относительно прямой: а) a; б) b; в) c. Изобразите эти точки на координатной плоскости.

18. Точки $N(\ldots, 3)$ и $M(2, \ldots)$ симметричны относительно оси ординат. Найдите пропущенные координаты этих точек.

19. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых выполняется равенство: а) $y = x$; б) $x + y = 1$.

20. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых выполняются неравенства: а) $x^2 + y^2 < 2$; б) $1 < x^2 + y^2 < 3$.

21. На координатной плоскости изобразите точки с целочисленными координатами (x, y), для которых одновременно выполняются неравенства $0 < x < 3$, $-3 < y < 2$.

22. На координатной плоскости нарисуйте квадрат, у двух противоположных вершин которого координаты: (0, 0), (3, 3). Найдите его площадь.

23. На координатной плоскости нарисуйте квадрат, две противоположные вершины которого имеют координаты: (–3, 0), (3, 0). Найдите его площадь.

24. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (3, 3), (–1, 3), (–1, –1), (3, –1). Найдите его площадь.

25. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (–3, 1), (1, –3), (3, –1), (–1, 3). Найдите его площадь.

26. На координатной плоскости нарисуйте четырёхугольник, вершины которого имеют координаты: (–3, –3), (1, –1), (3, 3), (–1, 1). Найдите его площадь.

27. На координатной плоскости нарисуйте шестиугольник, вершины которого имеют координаты: (2, 0), (1, 2), (–1, 2), (–2, 0), (–1, –2), (1, –2). Найдите его площадь.

28. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (1, 0), (2, 1), (1, 3), (2, 4), (1, 4,5), (1, 6), (1,5, 5,5), (2,5, 5,5), (3, 6), (3, 4,5), (2, 4), (3, 3), (4,5, 2,5), (4,5, 0), (5, 2,5), (5, 0). Очертания какого животного она напоминает?

29. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (4, 0), (3, 1,5), (1, 2), (–1, 2), (–4, 0,5), (–6, 2), (–5,5, 0), (–6, –2), (–4, –0,5), (–1, –2), (1, –2), (3, –1,5), (4, 0). Очертания кого она напоминает?

30. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (–5, 1), (–6, 0,5), (–7, 1), (–4,5, 2,5), (–3,5, 2,5), (–4,5, 1), (5,5, 1), (5,5, –0,5), (4,5, –1,5), (4,5, –1), (5, –0,5), (5, 0,5), (4, 0,5), (4,5, 0), (3,5, –2), (3, –2), (3, –1), (2, –0,5), (–2, –0,5), (–3,5, –1), (–4,5, –2), (–5,5, –2), (–5, –1), (–4,5, –1), (–4,5, 2), (–5, 1), (–5,5, –1), (–5, –1). Очертания какой породы собаки она напоминает?

31. На координатной плоскости нарисуйте ломаную, вершины которой имеют координаты: (0, 0), (–1, 1), (–3, 1), (–2, 3), (–3, 3), (–4, 6), (0, 8), (2, 5), (2, 11), (6, 10), (3, 9), (4, 5), (3, 0), (2, 0), (1, –7), (3, –8), (0, –8), (0, 0). Очертания какой птицы она напоминает?

ОТВЕТЫ

§ 1. Точки, прямые, плоскости

1. Одну или ни одной. **2.** Пять прямых, десять точек попарных пересечений. **3.** Точки A, B, C, D принадлежат одной прямой. **4.** Прямые a, b, c, d пересекаются в одной точке. **6.** Три. **7.** Шесть. **8.** Десять. **9.** Пятнадцать. **10.** Ни одной, одну, две или три (см. рис. 1).

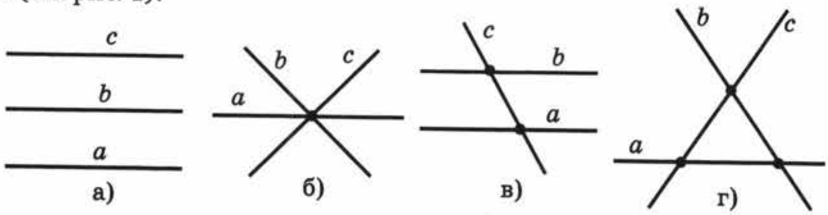


Рис. 1

11. См. рис. 2. **12.** См. рис. 3.

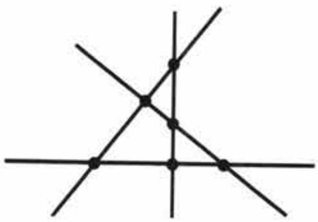


Рис. 2

Рис. 3

13. См. рис. 4.

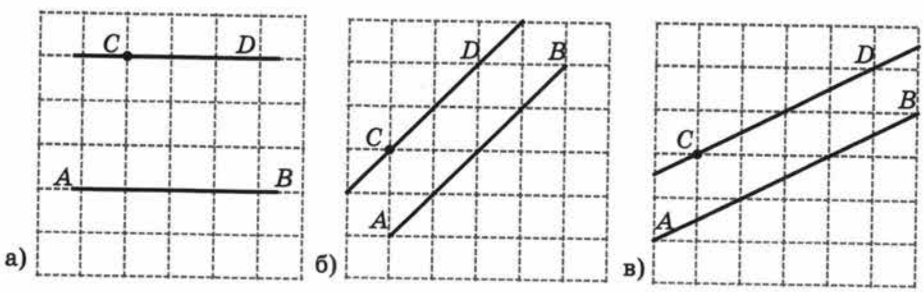


Рис. 4

14. a и f, b и e, c и g, d и h, p и q.

§ 2. Лучи, отрезки

1. а) Две; б) три; в) четыре; г) $n + 1$.

2. См. рис. 5.

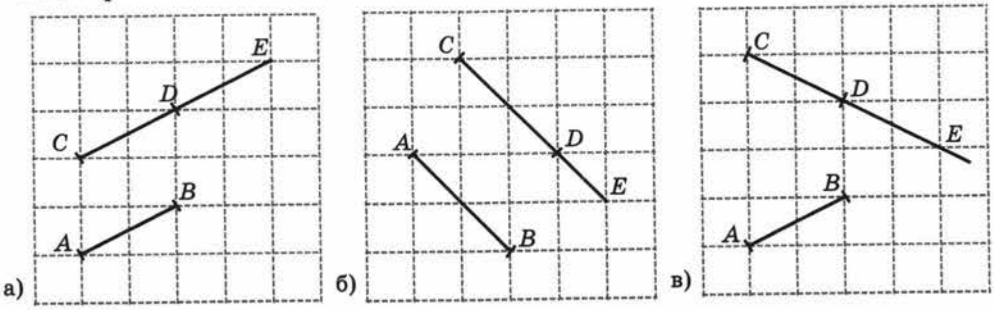


Рис. 5

3. а) и д); б) и е); в) и г). **4.** См. рис. 6. **5.** См. рис. 7.

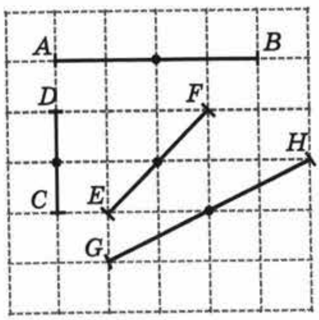


Рис. 6

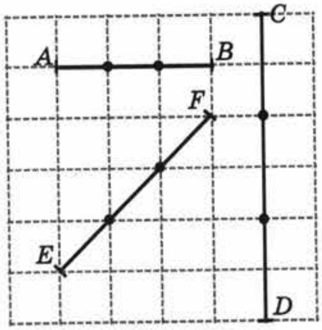


Рис. 7

6. См. рис. 8.

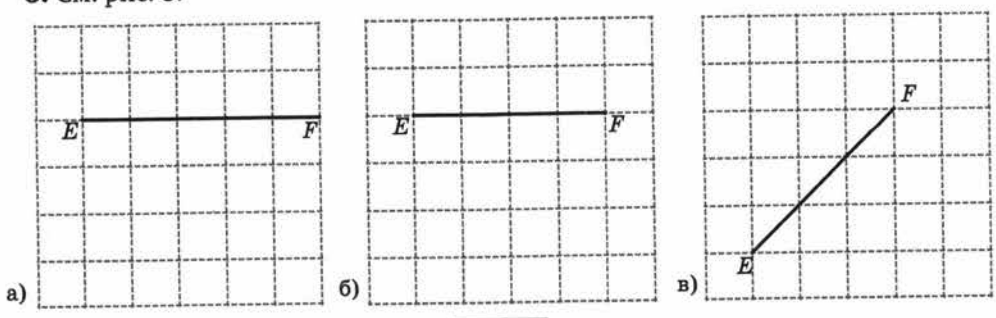


Рис. 8

7. См. рис. 9.

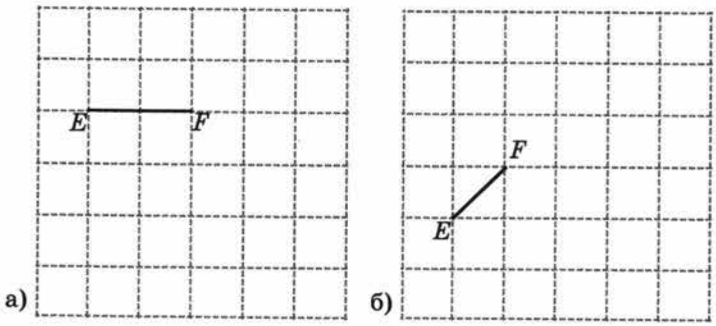


Рис. 9

8. 5, 4, 1, 6, 3, 2. **9.** Отрезки равны.

§ 3. Измерение длин отрезков

1. а) 6 см; б) 7,7 дм; в) 18,1 м. **2.** а) 20,5 см; б) 8 см; в) 4,5 см; г) 12,5 см. **3.** *B*. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** $AB = 2CD$. **9.** а) 9 см и 6 см; б) 10 см и 5 см; в) 6 см и 9 см. **11.** 6 см. **12.** 6 см. **13.** 8,5 см. **14.** а) 40 мм; б) 80 мм; в) 20 мм . **15.** 4 см, 8 см и 16 см.

§ 4. Полуплоскость и угол

1. а) 4; б) 7; в) 11. **3.** а), г), е) Да; б), в), д) нет. **4.** а) 6; б) 4. **6.** 12. **7.** а) *AOB*, *BOC*, *COD*; б) *AOC*; в) *AOD*, *BOD*. **8.** а), д), и); б), г) з); в), е), ж). **9.** *PQR*. **10.** 3, 2, 5, 6, 1, 4. **11.** См. рис. 10.

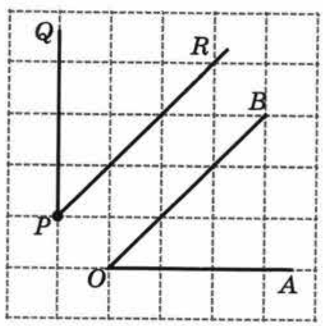


Рис. 10

12. Два. **13.** а), в) Нет; б) да. **14.** а) *AOB* и *DOE*, *BOC* и *EOF*, *COD* и *FOA*, *AOC* и *DOF*, *BOD* и *EOA*, *BOF* и *COE*; б) *AOB* и *BOD*, *AOB* и *AOE*, *BOC* и *COE*, *BOC* и *BOF*, *COD* и *DOF*, *COD* и *COA*, *DOE* и *EOA*, *DOE* и *DOB*, *EOF* и *FOB*, *EOF* и *EOC*, *FOA* и *AOC*, *FOA* и *FOD*.

15. См. рис. 11.

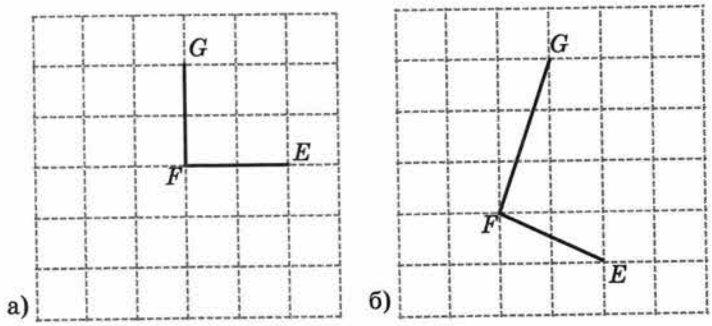


Рис. 11

16. См. рис. 12.

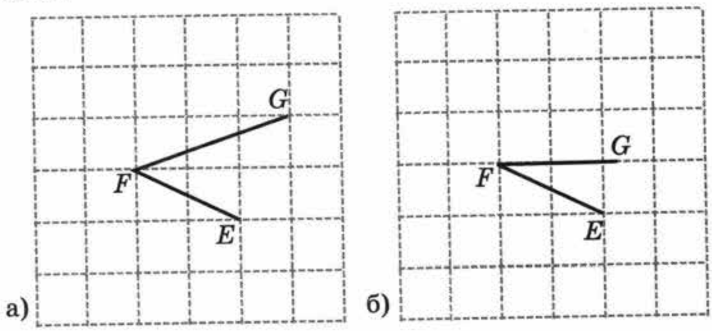


Рис. 12

17. См. рис. 13.

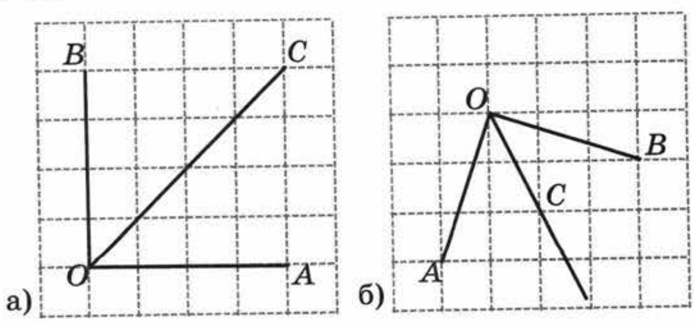


Рис. 13

§ 5. Измерение величин углов

1. а) 90°; б) 45°; в) 135°; г) 180°; д) 90°; е) 45°; ж) 135°. **2.** 40°, 70°, 160°, 30°, 120°, 90°. **3.** 40°, 120°, 140°, 80°, 100°, 20°. **5.** а) 36°; б) 30°. **6.** а) 20°; б) 18°. **7.** См. рис. 14.

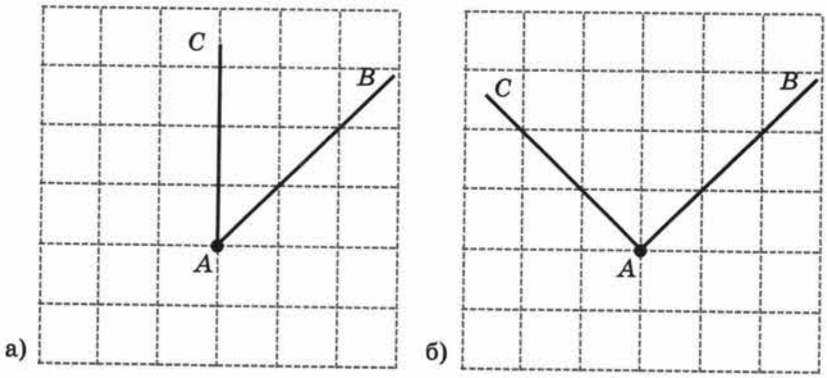


Рис. 14

8. 45°, 135°. **9.** а) 90°; б) 45°; в) 270°; г) 180°; д) 270°; е) 135°. **10.** 45°. **11.** 30°. **12.** 45°. **13.** 90°. **14.** 142°. **15.** 60° и 120°. **16.** а) 75° и 105°; б) 70° и 110°; в) 36° и 144°; г) 90° и 90°. **17.** а) 72° и 108°; б) 54° и 126°; в) 55° и 125°; г) 88° и 92°. **18.** 30°, 150°, 150°. **19.** 36° и 144°. **20.** 126°. **21.** Нет. **22.** 120°. **23.** 70°. **24.** а) 180°; б) 90°. **25.** а) 90°; б) 180°; в) 150°. **26.** а) 120°; б) 60°; в) 300°. **27.** а) 30°; б) 15°; в) 10°.

§ 6. Ломаные

1. 9. **2.** 20. **3.** 0, 1, 2, 3, 5, 7. **4.** а) 48; б) 71. **5.** Длины равны. **6.** Длина ломаной AB_1C меньше длины ломаной AB_2C. **7.** См. рис. 15.

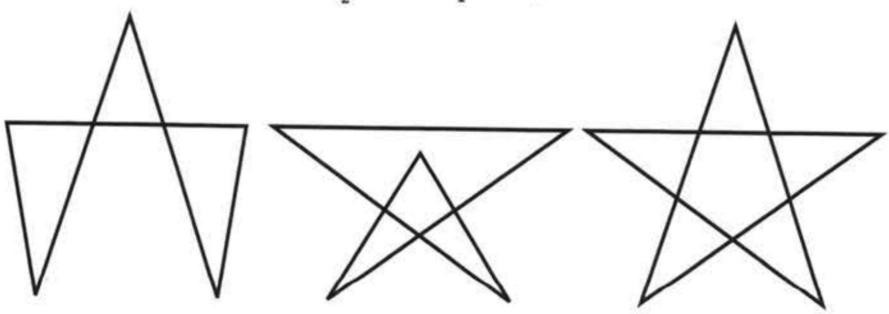


Рис. 15

8. а) *B* внутри, *C* снаружи; б) *B* внутри, *A* и *C* снаружи.

9. См. рис. 16

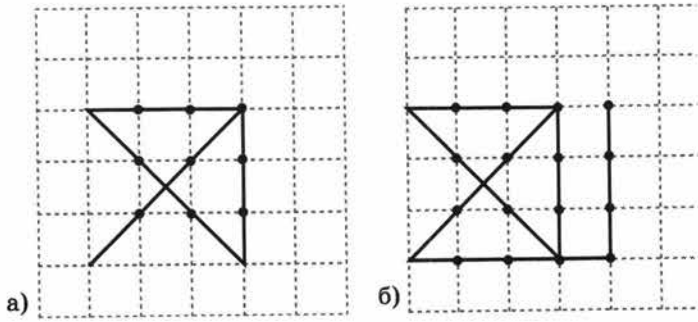


Рис. 16

10. а) 6; б) 10.

§ 7. Многоугольники

1. б), г) – Многоугольники; а) в) – нет; г) – выпуклый; б) – нет. **2.** Число вершин равно числу сторон. **5.** а) 2; б) 3; в) 4. **6.** а) 2; б) 5; в) 9. **7.** а), б), в) Нет. **8.** а) Да, пятиугольник; б) да, четырёхугольник; в) да, шестиугольник. **9.** 7. **10.** См. рис. 17.

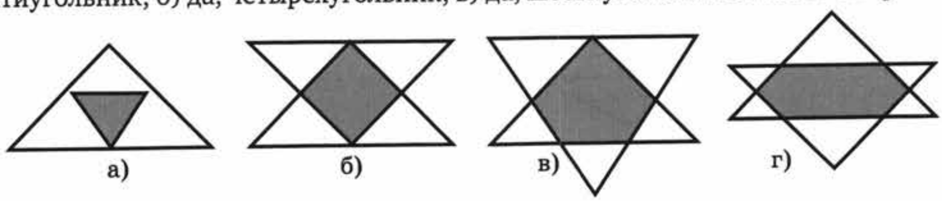


Рис. 17

11. Нет. **12.** См. рис. 18. **13.** а) 5; б), в) 7. **14.** а) 7; б) 9; в) 16. **15.** См. рис. 19.

Рис. 18

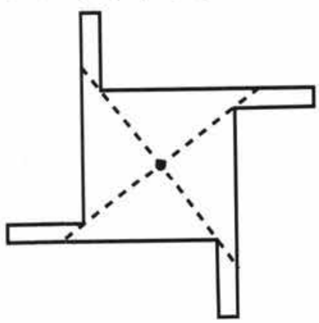


Рис. 19

§ 8. Треугольники

1. *ABC, ADC, BCD, BDE, CDE.* **2.** См. рис. 20.

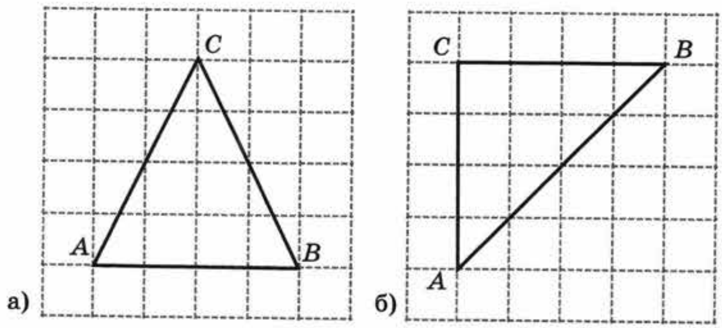


Рис. 20

3. См. рис. 21.

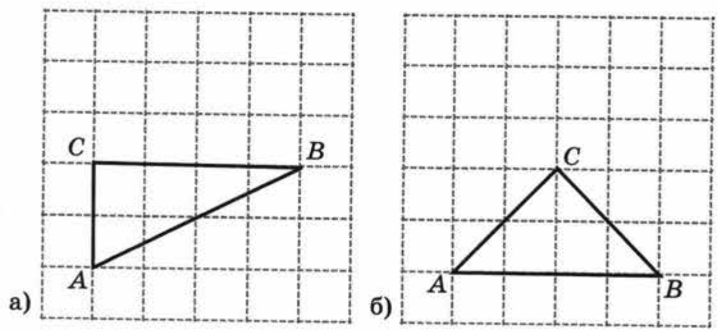


Рис. 21

4. См. рис. 22.

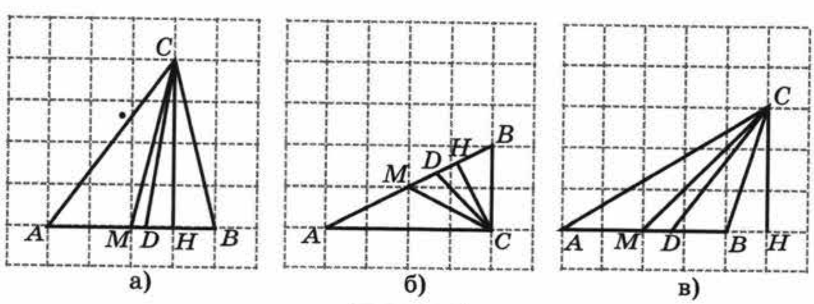


Рис. 22

5. а), б) Нет; в) да. **6.** 0,8 м. **7.** 3,5 м. **8.** 75 см. **9.** 20 см и 10 см. **10.** 12 см, 18 см, 24 см. **11.** 15 см.

§ 9. Четырёхугольники

1. См. рис. 23.

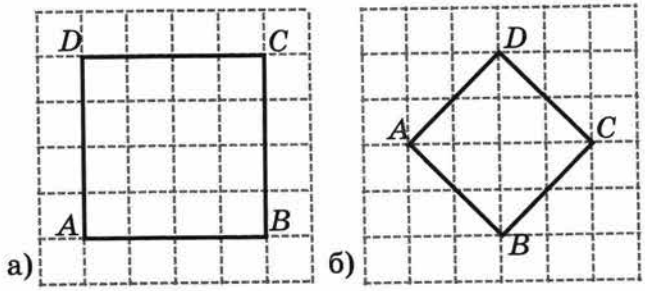


Рис. 23

2. См. рис. 24.

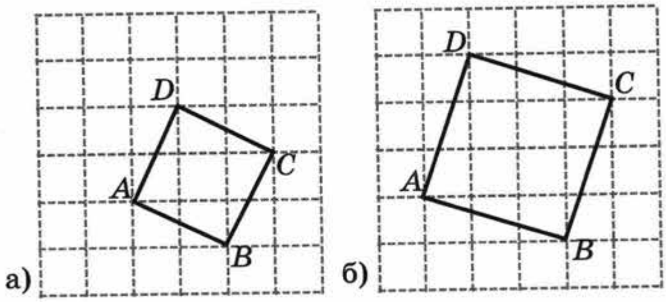


Рис. 24

3. а) 14; б) 5 (рис. 25).

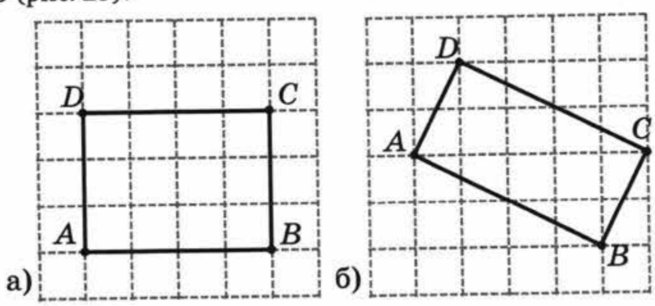


Рис. 25

4. См. рис. 26.

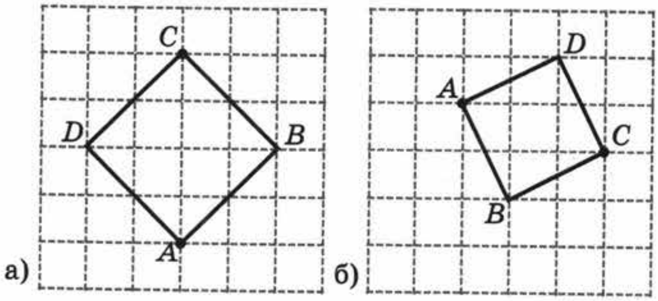


Рис. 26

5. а) 16; б) 4 (рис. 27).

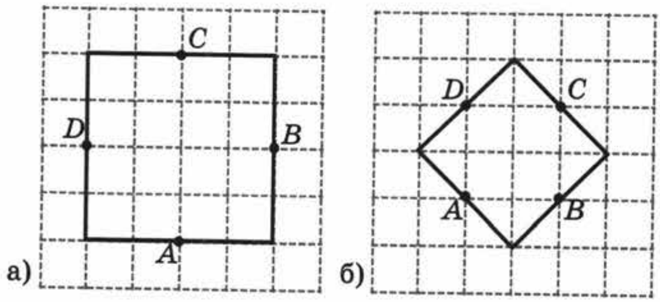


Рис. 27

6. 3. Один из них показан на рисунке 28. **7.** 4 и 2 (рис. 29). **8.** 9.

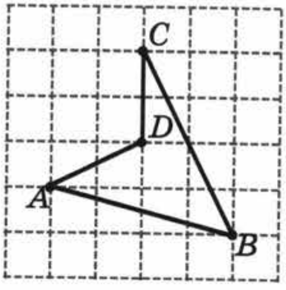


Рис. 28

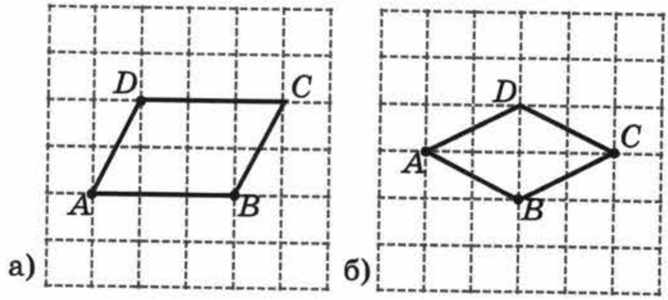


Рис. 29

9. а), б) 4 и 2 (рис. 30).

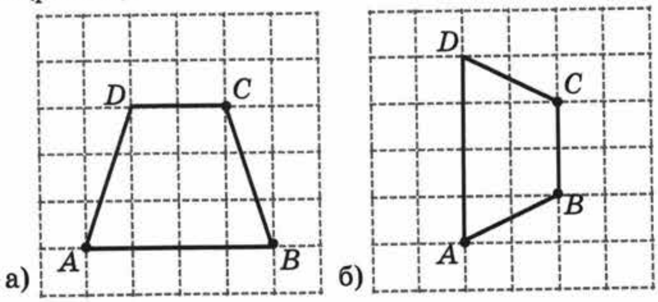


Рис. 30

10. а) 4 и 3; б) 3 и 2 (рис. 31).

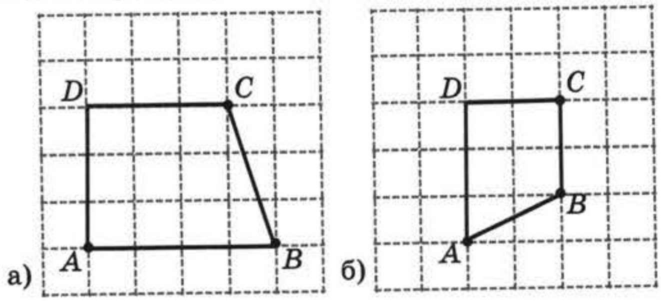


Рис. 31

§ 10. Многогранники

2. См. рис. 32.

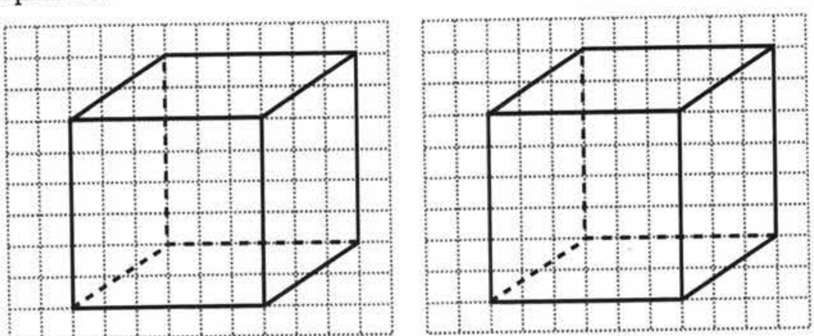
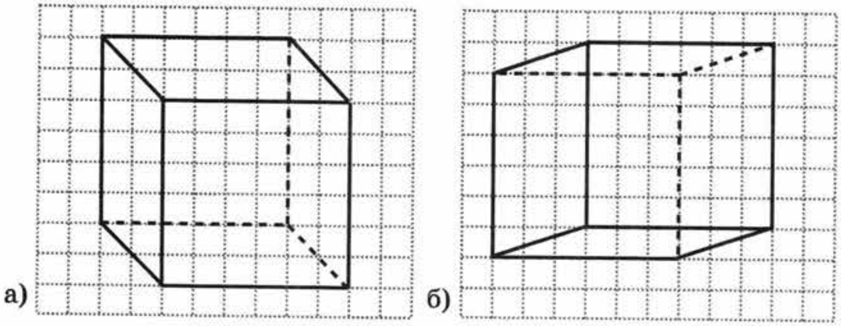


Рис. 32

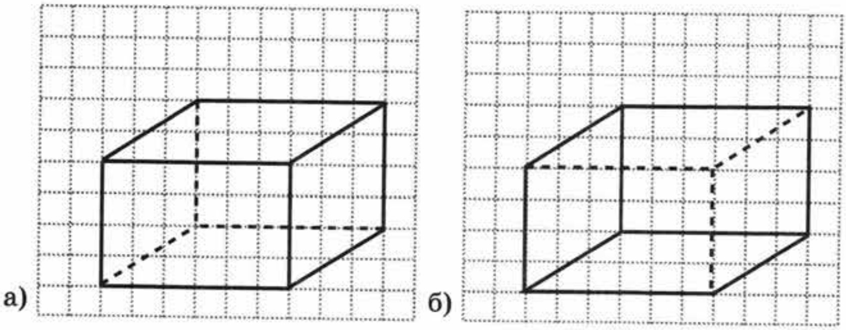
3. См. рис. 33.



а) б)

Рис. 33

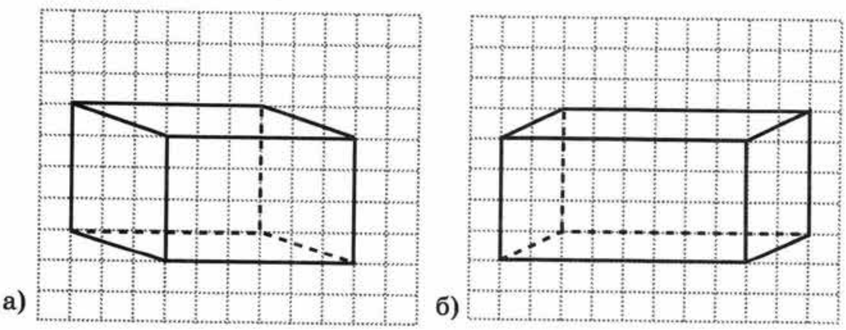
5. См. рис. 34.



а) б)

Рис. 34

6. См. рис. 35.



а) б)

Рис. 35

8. См. рис. 36.

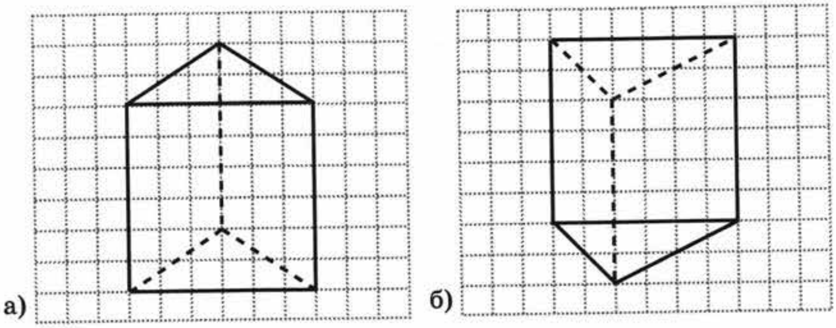


Рис. 36

10. См. рис. 37.

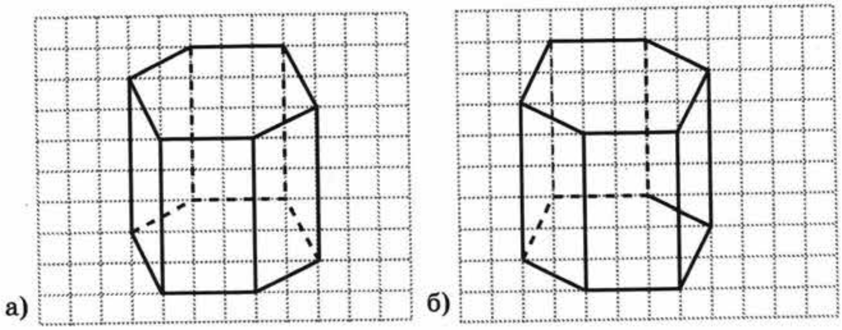


Рис. 37

12. См. рис. 38.

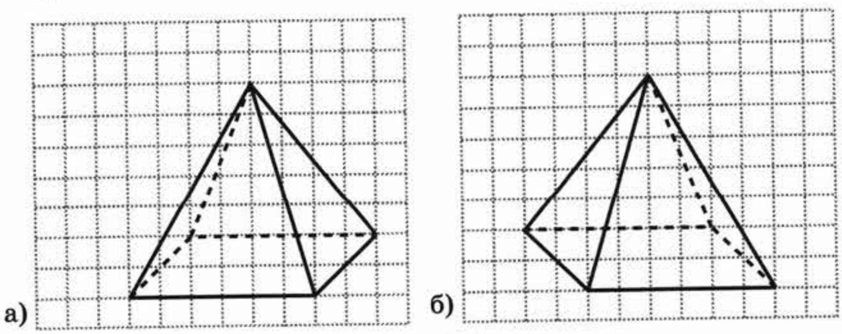


Рис. 38

14. См. рис. 39

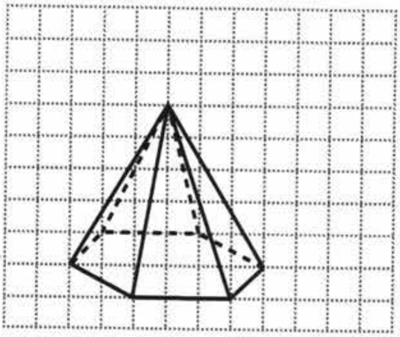
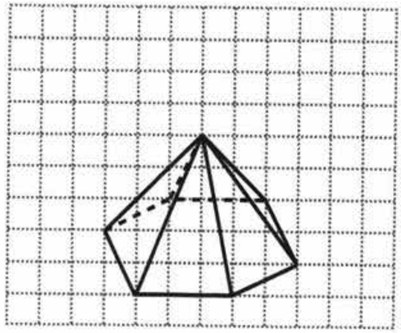
а)  б) 

Рис. 39

15. а), б) В = 8, Р = 12, Г = 6. **16.** а) В = 6, Р = 9, Г = 5; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 10, Р = 15, Г = 7; г) В = 12, Р = 18, Г = 8. **17.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да; д) да: е) да. **18.** а) 6-угольник; б) 12-угольник; в) 34-угольник. **19.** а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 5, Р = 8, Г = 5; в) В = 7, Р = 12, Г = 7; г) В = 6, Р = 10, Г = 6. **20.** а) Да; б) да; в) да; г) нет; д) да: е) да. **21.** а) 4-угольник; б) 21-угольник; в) 59-угольник.

§ 11. Моделирование многогранников

1. в), д), ж). **2.** а), б), в), д), ж). **3.** а), б), в), д). **4.** а), б), д), е).

§ 12. Правильные многогранники

5. а) В = 4, Р = 6, Г = 4; б) В = 8, Р = 12, Г = 6; в) В = 6, Р = 12, Г = 8; г) В = 12, Р = 30, Г = 20; д) В = 20, Р = 30, Г = 12. **6.** Нет. **7.** Не является правильным, В= 32, Р = 60, Г = 30. **8.** Октаэдр. **9.** Октаэдра (рис. 40). **10.** Тетраэдра (рис. 41).

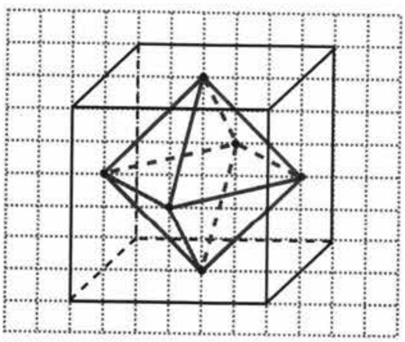


Рис. 40

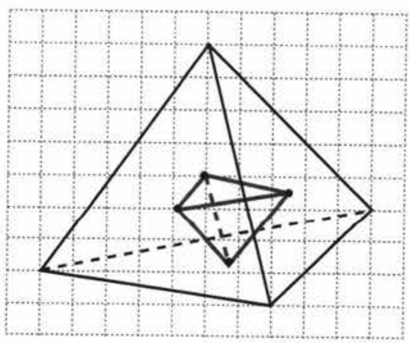


Рис. 41

11. Куба (рис. 42). **12.** Додекаэдра (рис. 43).

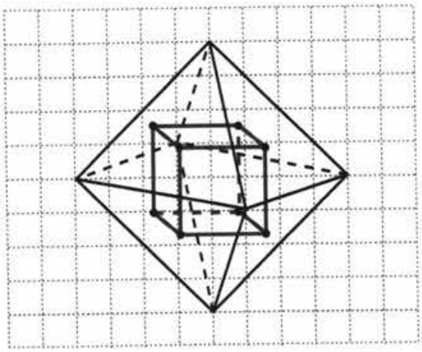


Рис. 42

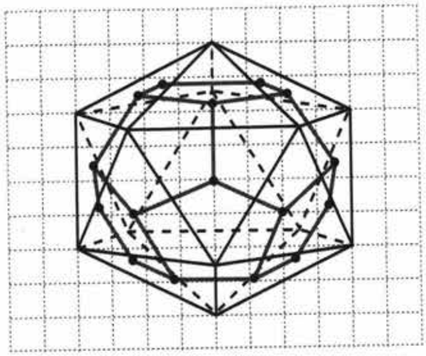


Рис. 43

13. Икосаэдра (рис. 44). **14.** Октаэдра (рис. 45). **15.** Октаэдр (рис. 45).

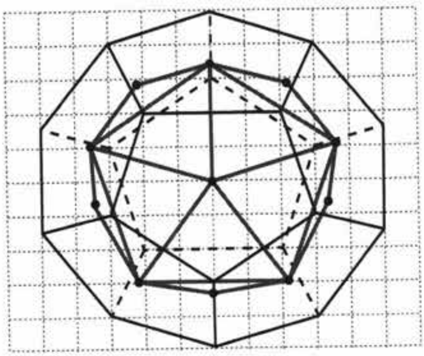


Рис. 44

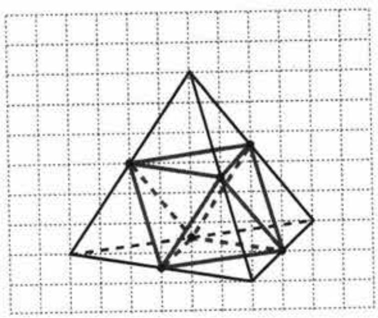


Рис. 45

16. в). **17.** Да. **18.** Да. **19.** 4. **20.** 8. **21.** 10. **22.** 6.

§ 13. Полуправильные многогранники

1. а) В = 10, Р = 15, Г = 7; б) В = 10, Р = 20, Г = 12. **2.** а) В=12, Р=18, Г=8; б) В=24, Р=36, Г=14; в) В=24, Р=36, Г=14; г) В=60, Р=90, Г=32; д) В=60, Р=90, Г=32. **3.** Усечённого икосаэдра. **4.** Кубооктаэдр (рис. 46), В= 12, Р = 24, Г = 14. **5.** Кубооктаэдр (рис. 47), В= 12, Р = 24, Г = 14. **6.** Икосододекаэдр (рис. 48), В = 30, Р = 60, Г = 32. **7.** Икосододекаэдр (рис. 49), В = 30, Р = 60, Г = 32.

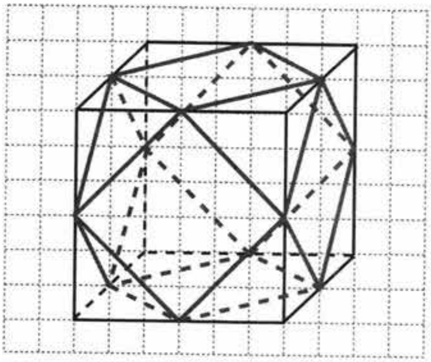


Рис. 46

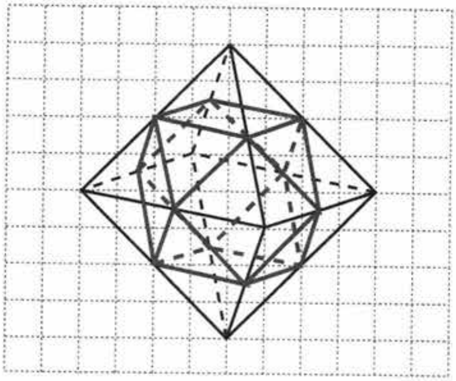


Рис. 47

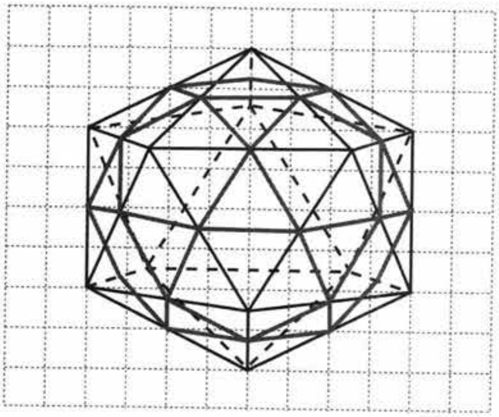


Рис. 48

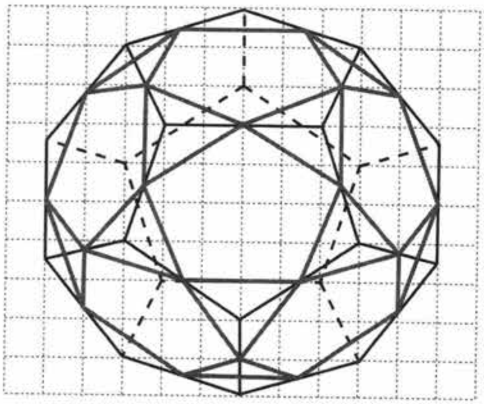


Рис. 49

8. Пятиугольной антипризмы. **9.** Усечённого куба. **10.** Кубооктаэдра.

§ 14. Звёздчатые многогранники

1. 5. **2.** 3. **3.** 3. **4.** Куба и октаэдра. **5.** Двух икосаэдров. **6.** Икосаэдра и додекаэдра.

§ 15. Окружность и круг

1. а) $OA \le R$; б) $OA > R$. **2.** Бесконечно много. **3.** Бесконечно много. **4.** 110 мм. **5.** 10 см. **6.** 1 см. **8.** См. рис. 50.

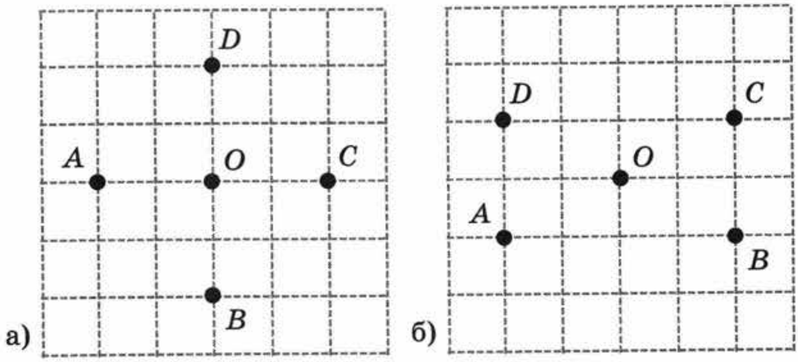


Рис. 50

9. 2 и 4. **10.** 2 и 4. **11.** 1,5 см. **12.** 12. **13.** Кольцом называется фигура, состоящая из всех точек A плоскости, удалённых от данной точки O на расстояние OA, для которого для некоторых положительных чисел r и R выполняются неравенства $r \le OA \le R$. **14.** Две. **15.** Ни одной, одну или две. **16.** 3 или 4. **17.** а) Касаются внутренним образом; б) пересекаются; в) касаются внешним образом; г) не имеют общих точек (рис. 51).

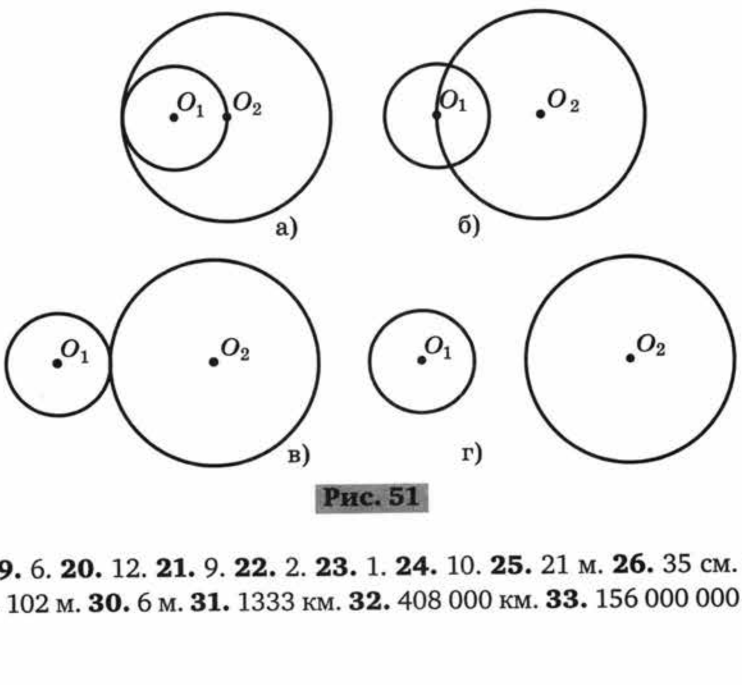


Рис. 51

18. 8. **19.** 6. **20.** 12. **21.** 9. **22.** 2. **23.** 1. **24.** 10. **25.** 21 м. **26.** 35 см. **27.** 3 мин. **28.** 1°. **29.** 102 м. **30.** 6 м. **31.** 1333 км. **32.** 408 000 км. **33.** 156 000 000 км.

§ 16. Геометрические места точек

1. См. рис. 52.

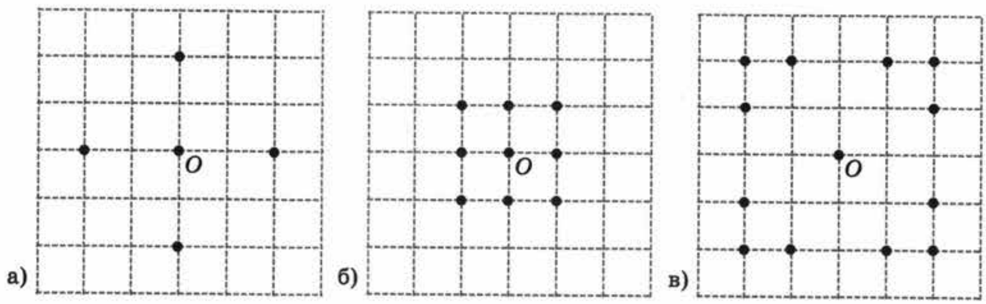


Рис. 52

2. См. рис. 53.

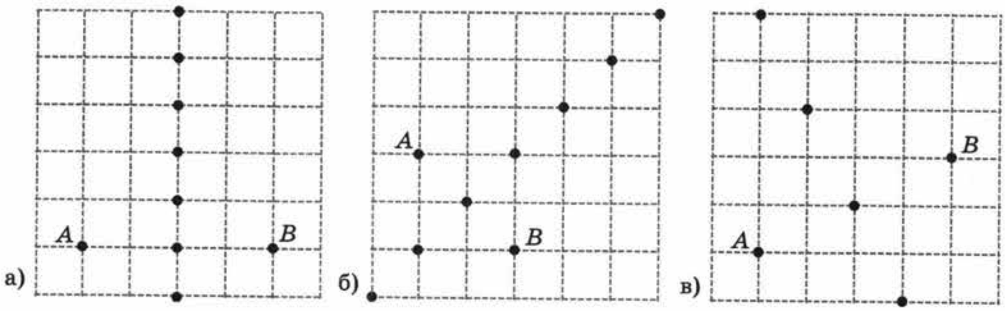


Рис. 53

3. См. рис. 54.

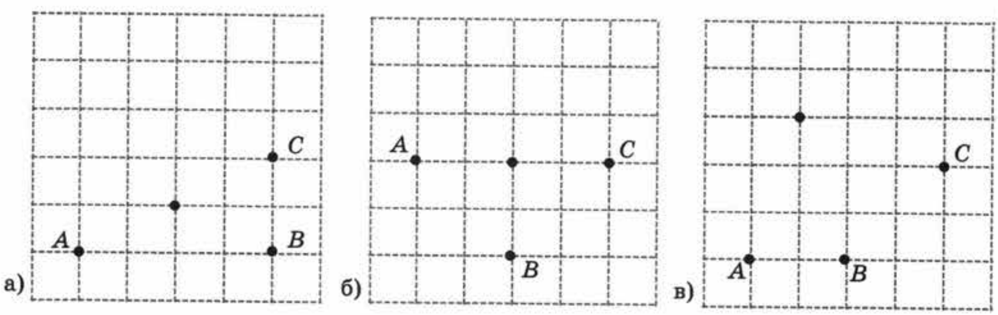


Рис. 54

4. См. рис. 55.

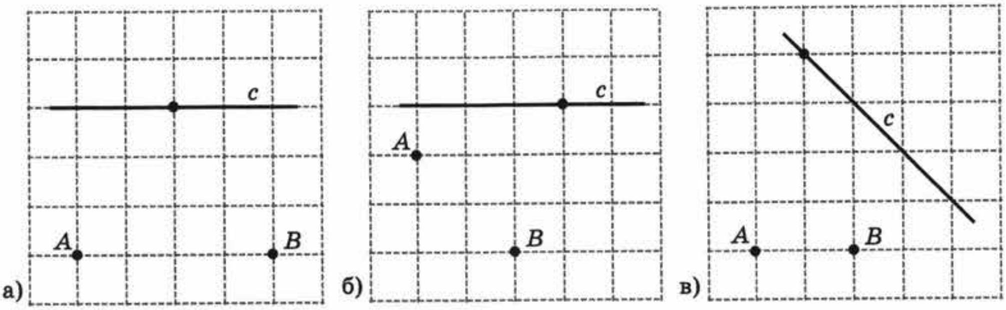


Рис. 55

5. См. рис. 56.

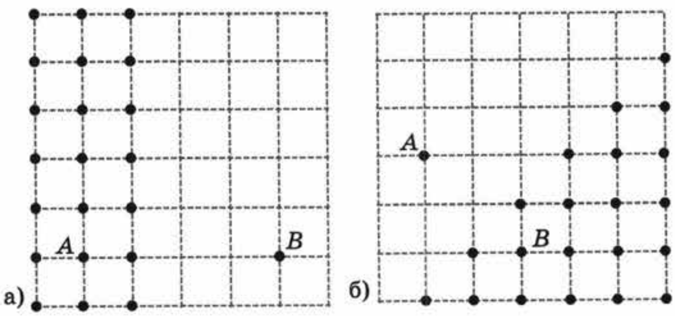


Рис. 56

6. См. рис. 57.

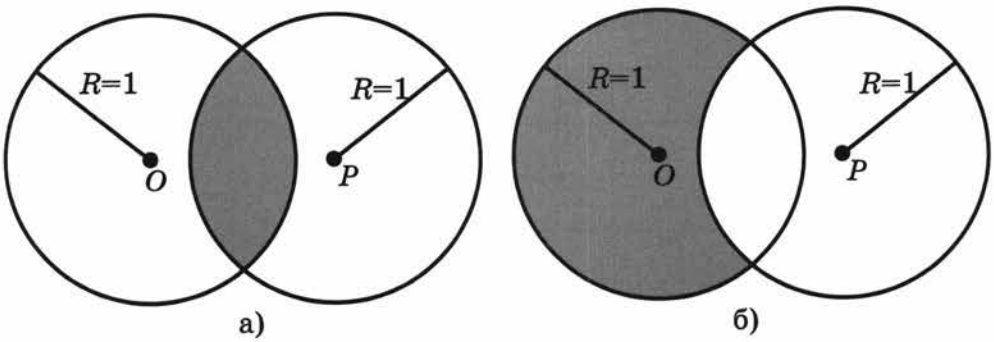


Рис. 57

7. См. рис. 58.

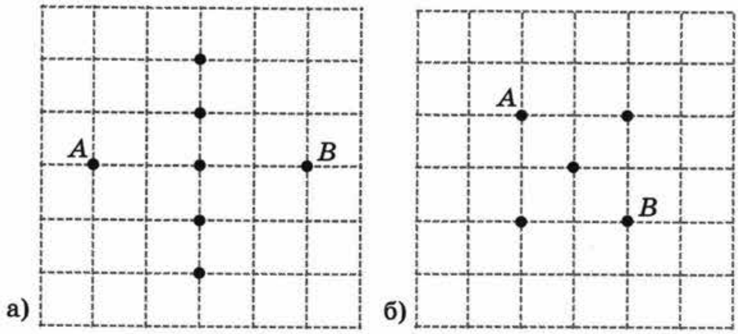


Рис. 58

8. См. рис. 59.

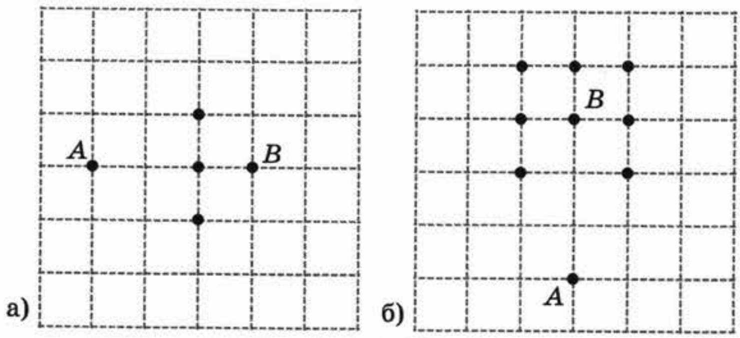


Рис. 59

9. См. рис. 60.

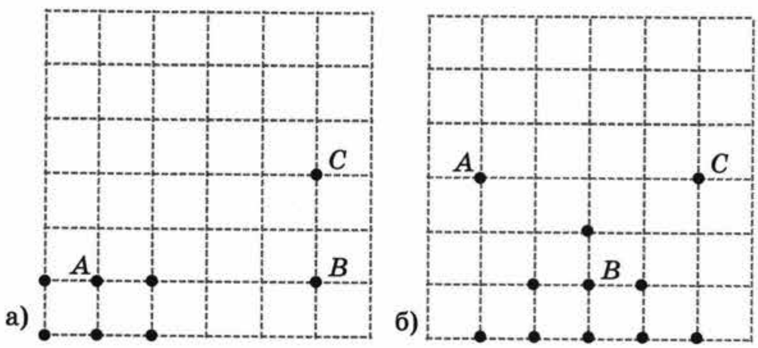


Рис. 60

10. См. рис. 61.

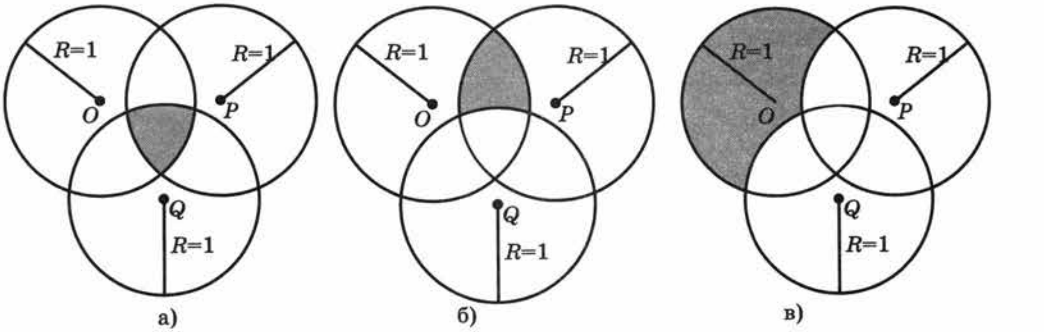


Рис. 61

11. См. рис. 62.

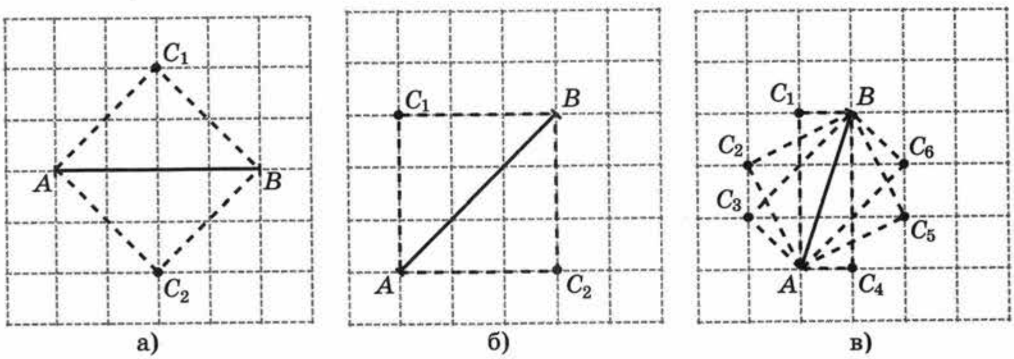


Рис. 62

12. См. рис. 63.

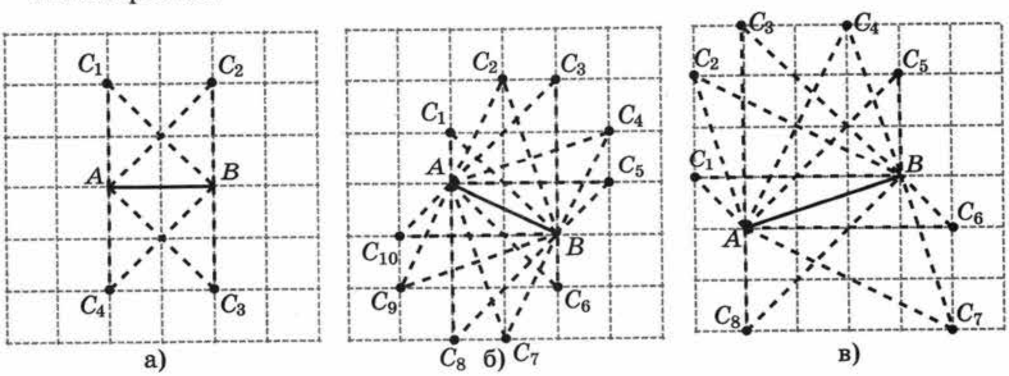


Рис. 63

§ 17. Графы

1. 6 (рис. 64). **2.** 10 (рис. 65).

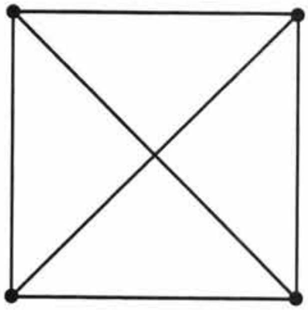


Рис. 64

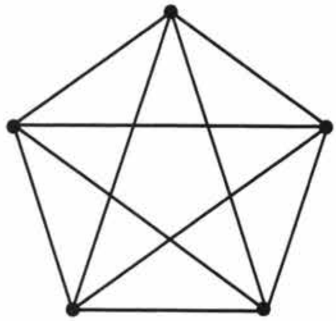


Рис. 65

3. Нет. **4.** а), в) Нет; б), г) да. **5.** а), б), г), д), ж), з). **7.** 1. **8.** Нет; 3. **9.** 4. **10.** Да. **11.** 6. **12.** 10. **13.** 18. **14.** 8. **15.** 12. **16.** 9.

§ 18. Раскрашивание карт

1. Две. **2.** а) 3; б) 2; в) 3; г) 4. **3.** а) 4; б) 4; в) 2. **4.** а) 4; б) 3; в) 2; г) 3; д) 4. **5.** а) 4; б) 2. **6.** а) 4; б) 4; в) 3; г) 4; д) 4. **7.** а) 2; б) 2. **8.** а) 3; б) 3. **9.** а) 2; б) 2. **10.** а) 3; б) 3.

§ 19. Центральная симметрия

1. Середина отрезка. **2.** а) Нет; б), в) да. **3.** Да, например, прямая имеет бесконечно много центров симметрии. **4.** Да, например, центр симметрии окружности. **5.** б), в), г), д). **6.** См. рис. 66.

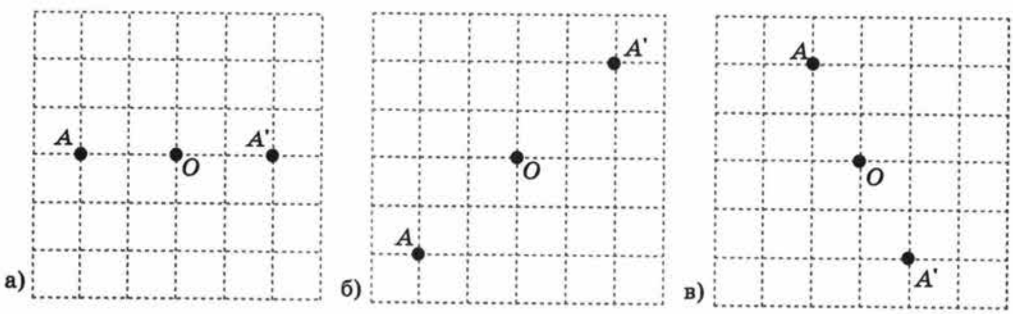


Рис. 66

7. См. рис. 67.

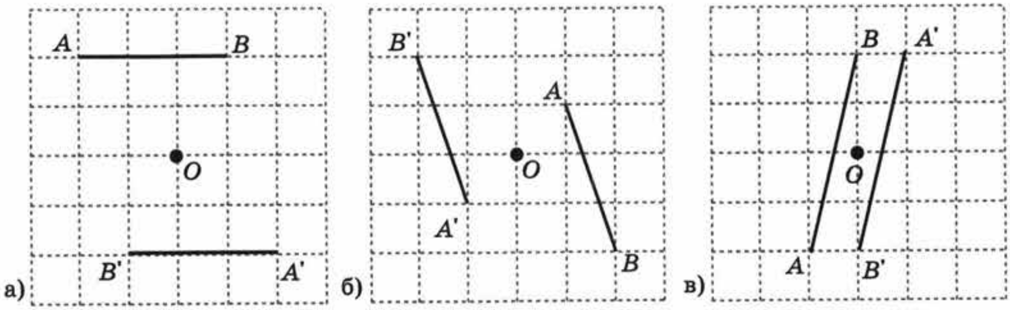


Рис. 67

8. См. рис. 68.

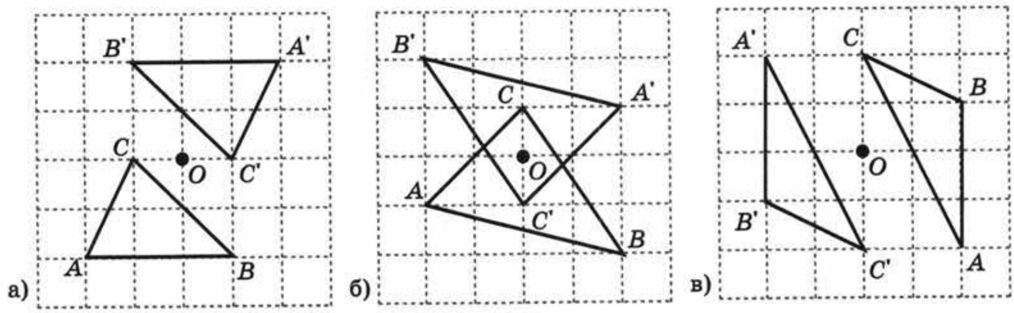


Рис. 68

9. См. рис. 69.

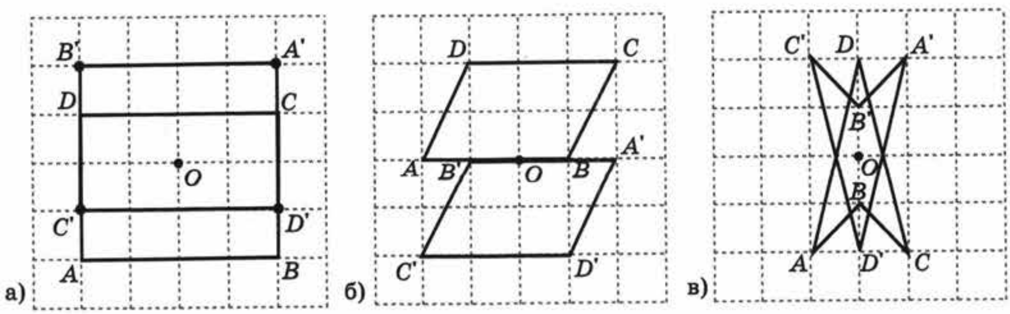


Рис. 69

10. См. рис. 70.

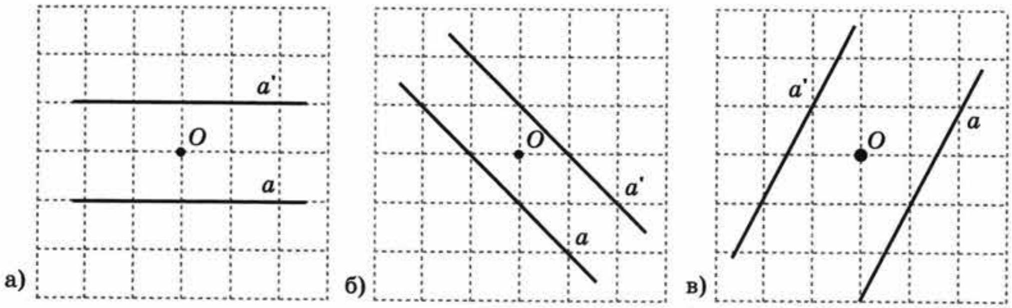


Рис. 70

11. См. рис. 71.

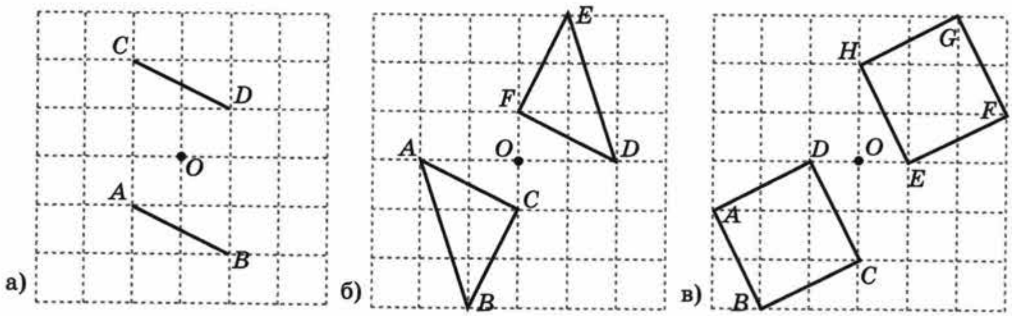


Рис. 71

12. а) Нет; б), в) да (рис. 72).

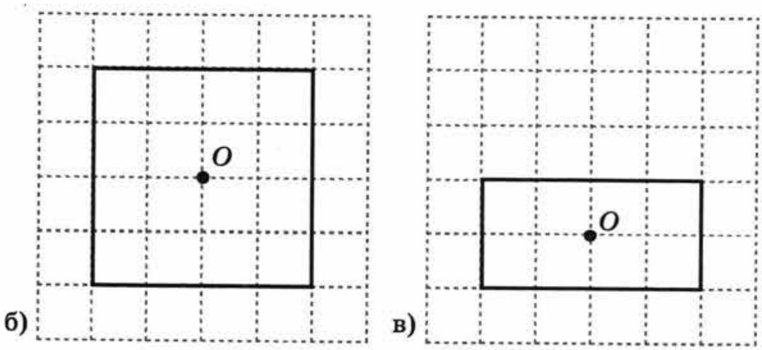


Рис. 72

13. а), в) Да; б) нет (рис. 73).

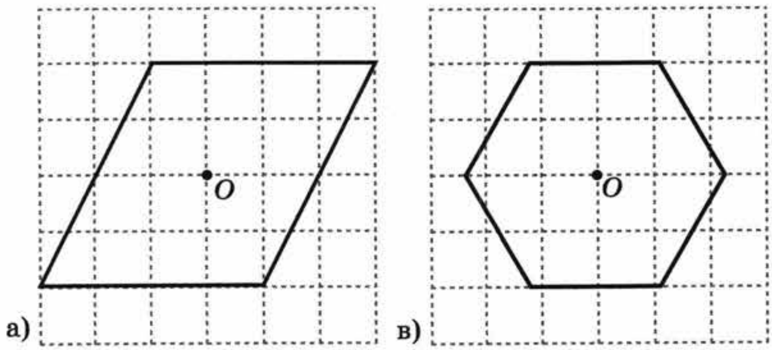


Рис. 73

14. а), б) Да (рис. 74).

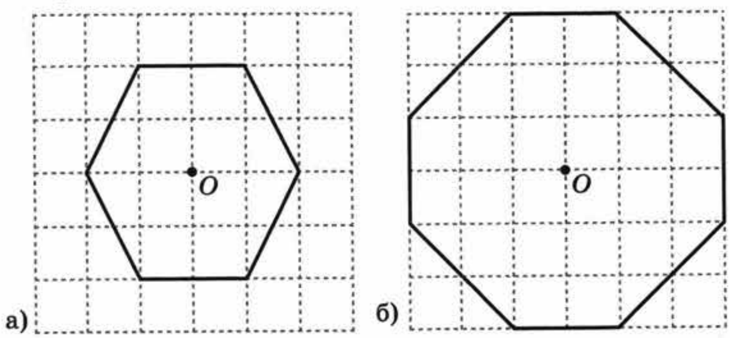


Рис. 74

15. См. рис. 75.

И, Н, О, Х.

Рис. 75

16. См. рис. 76.

H, I, N, O, S, X, Z.

Рис. 76

§ 20. Осевая симметрия

1. Прямая, содержащая отрезок, а также прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. **2.** а), б), в) Да. **3.** а), в), г), д). **4.** См. рис. 77.

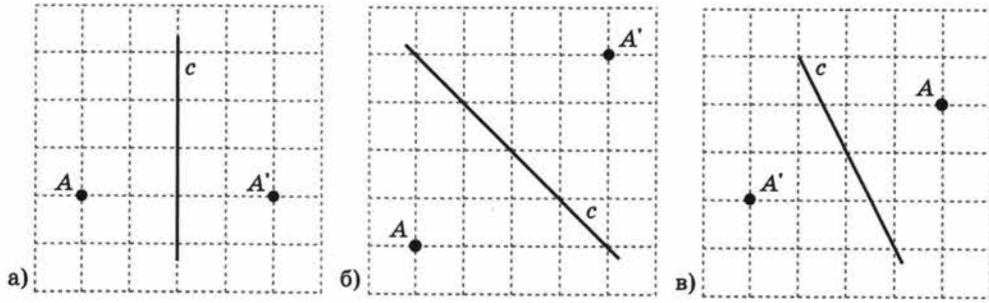


Рис. 77

5. См. рис. 78.

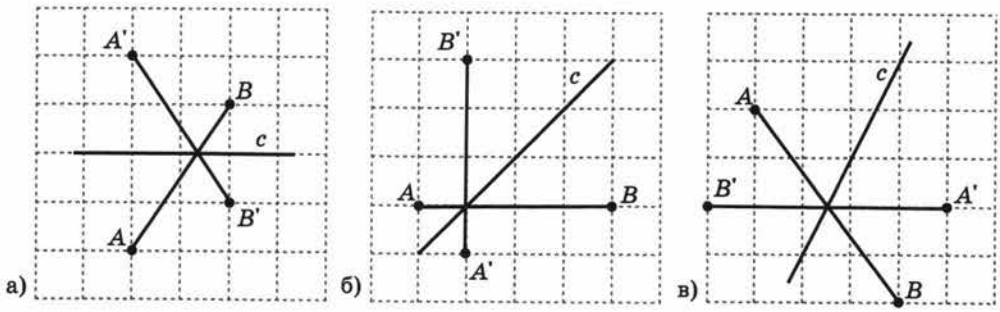


Рис. 78

6. См. рис. 79.

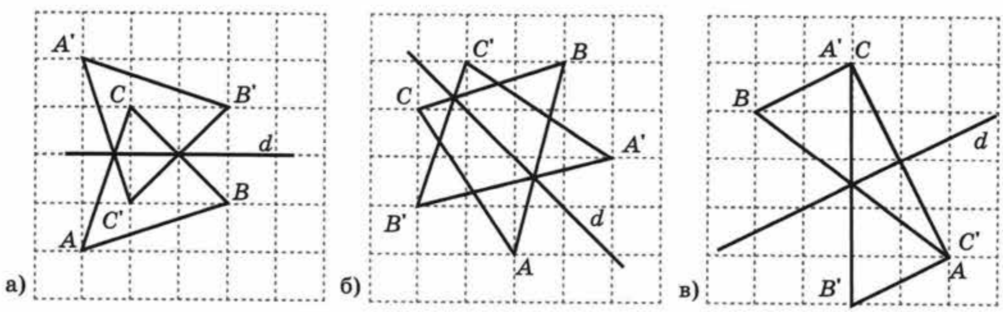


Рис. 79

7. См. рис. 80.

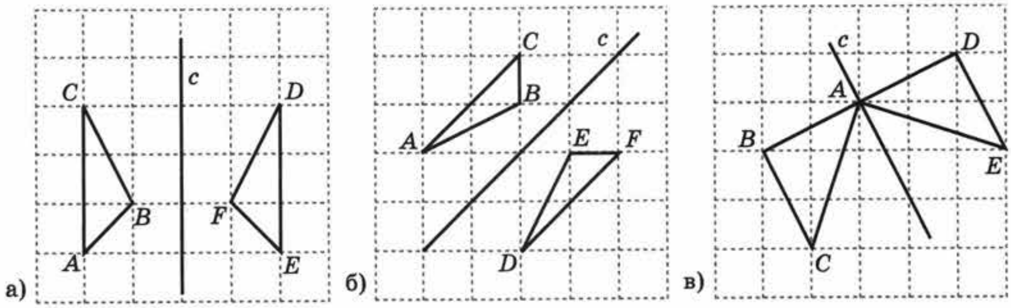


Рис. 80

8. а) 2; б) 4; в) 2. **9.** а) 3; б) 5; в) 6. **10.** а) 2; б) 4. **11.** а) 5; б) 6. **12.** См. рис. 81.

А, В, Е, Ж, М, Н, О, П, С, Т, Ф, Х, Ш, Ю.

Рис. 81

13. См. рис. 82.

A, B, C, D, E, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y.

Рис. 82

§ 21. Поворот

1. См. рис. 83.

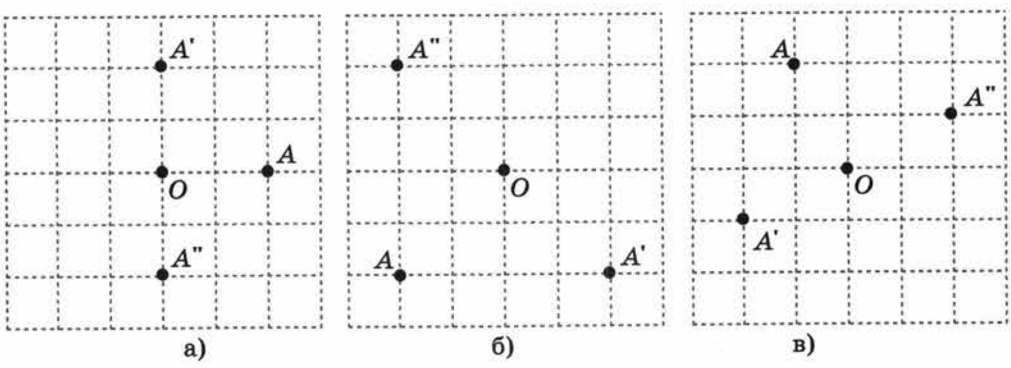
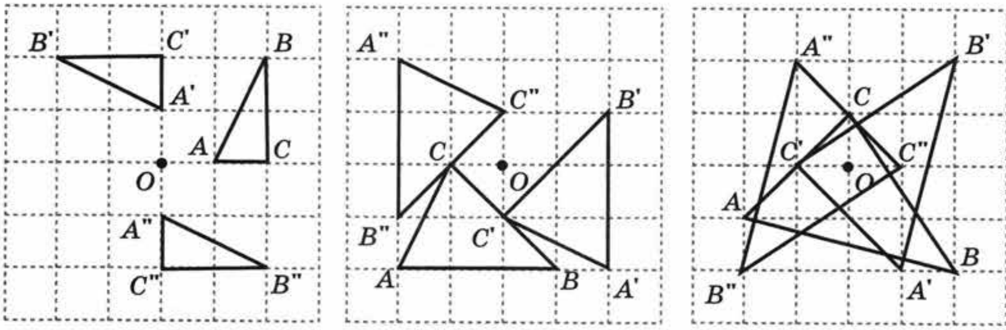


Рис. 83

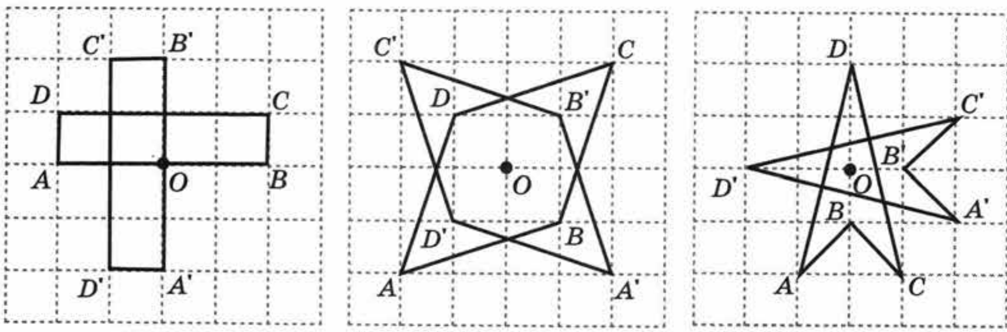
2. См. рис. 84.



а) б) в)

Рис. 84

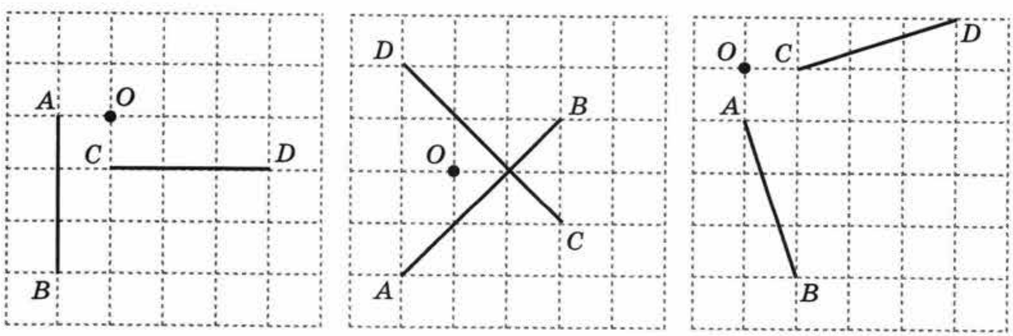
3. См. рис. 85.



а) б) в)

Рис. 85

4. См. рис. 86.



а) б) в)

Рис. 86

5. См. рис. 87.

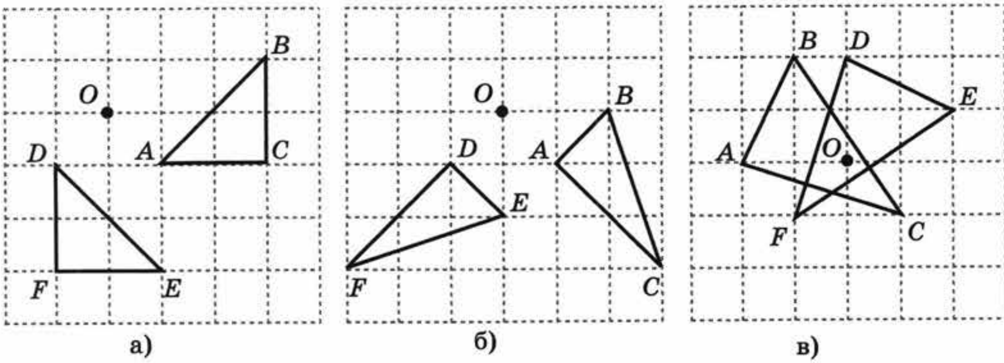


Рис. 87

6. а) 5-го; б) 6-го; в) 7-го. **7.** а) 2-го; б) 4-го. **8.** а) 9-го; б) 12-го. **9.** 6-го.

§ 22. Паркеты

1. 2 (рис. 88).

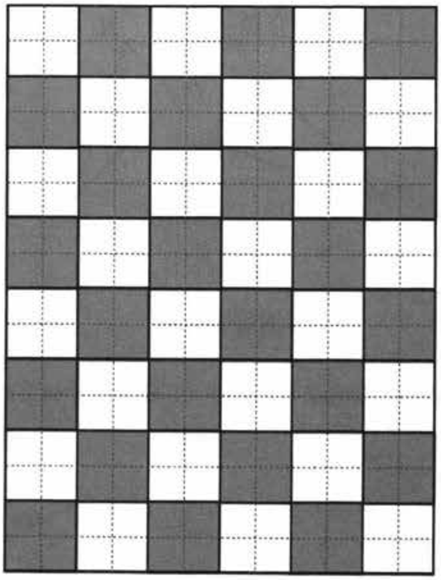


Рис. 88

2. 2 (рис. 89).

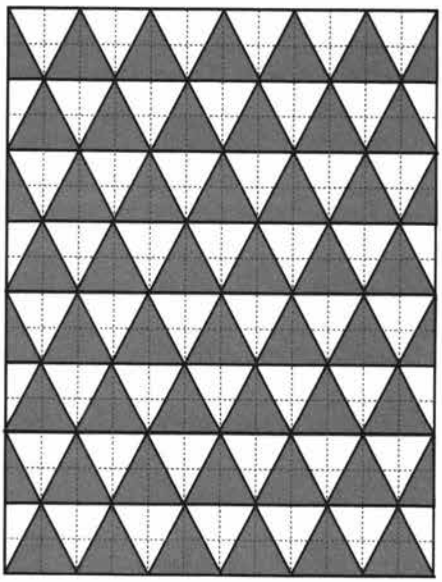


Рис. 89

3. 3 (рис. 90).

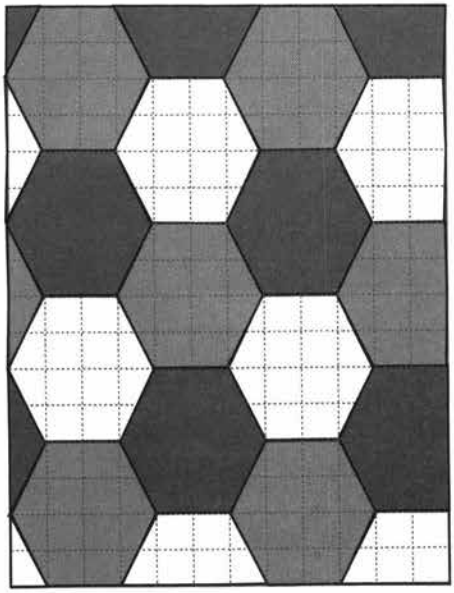


Рис. 90

4. 3 (рис. 91).

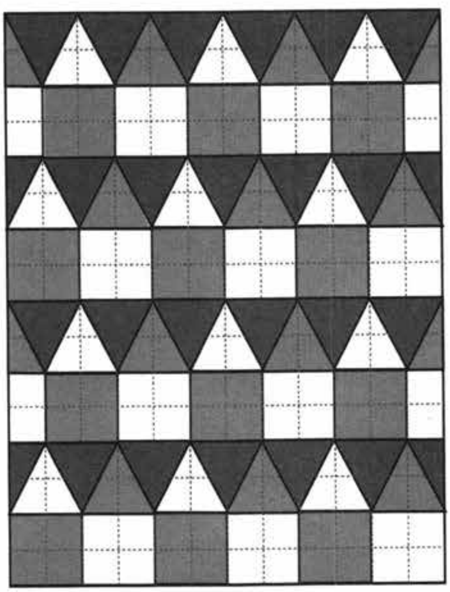


Рис. 91

5. 2 (рис. 92).

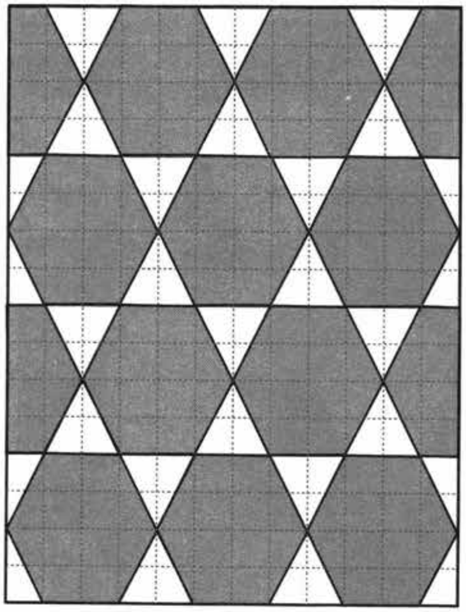


Рис. 92

6. 3 (рис. 93).

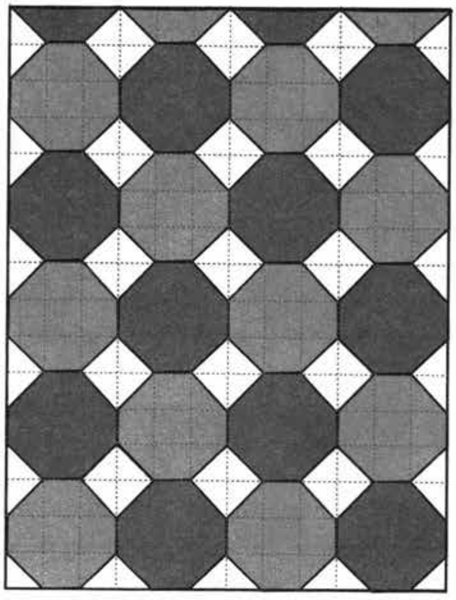


Рис. 93

7. 3 (рис. 94).

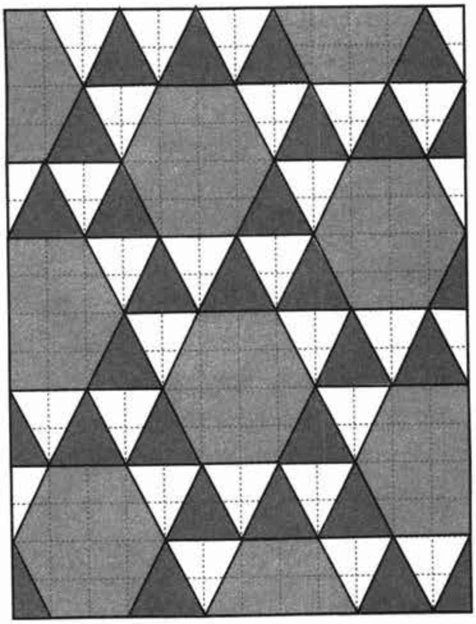


Рис. 94

8. 3 (рис. 95).

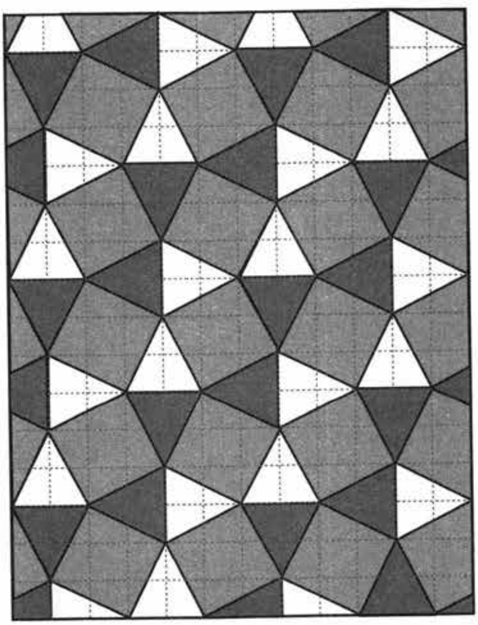


Рис. 95

9. 2 (рис. 96).

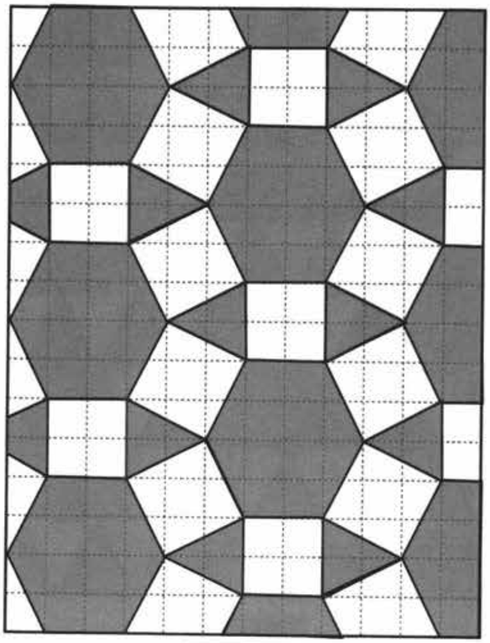


Рис. 96

10. 4 (рис. 97).

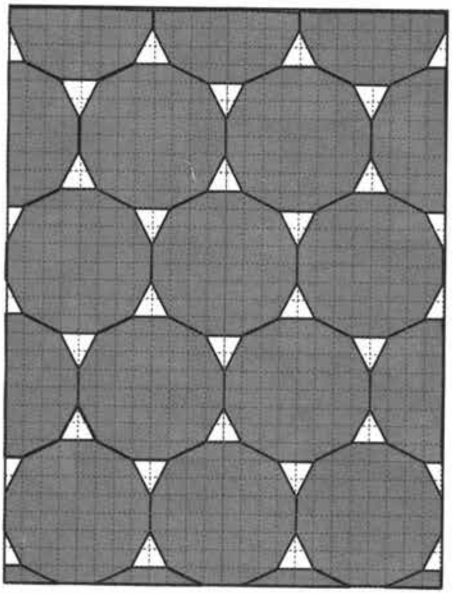


Рис. 97

11. 3 (рис. 98).

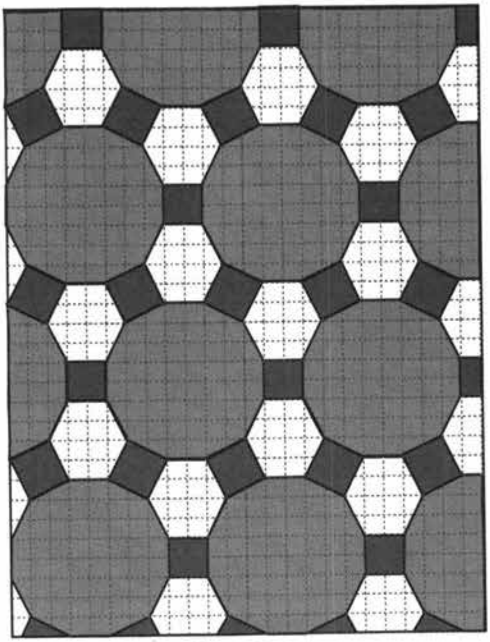


Рис. 98

12. 2 (рис. 99).

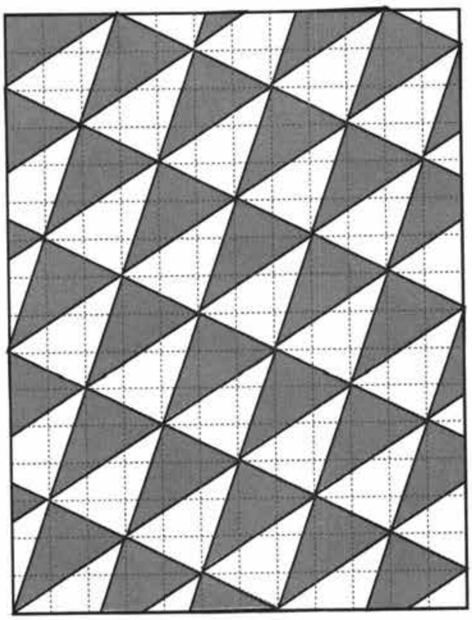


Рис. 99

13. 2 (рис. 100).

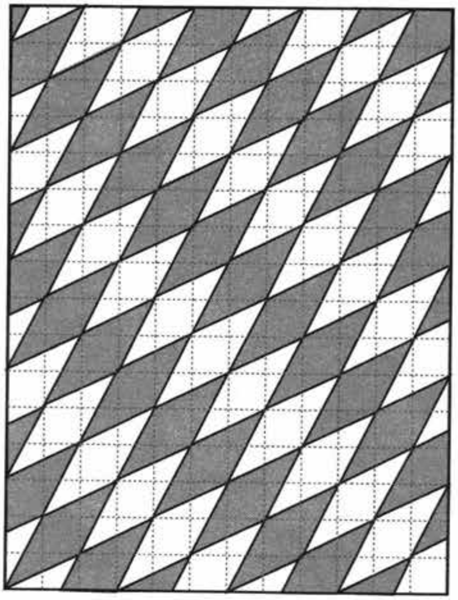


Рис. 100

14. 2 (рис. 101).

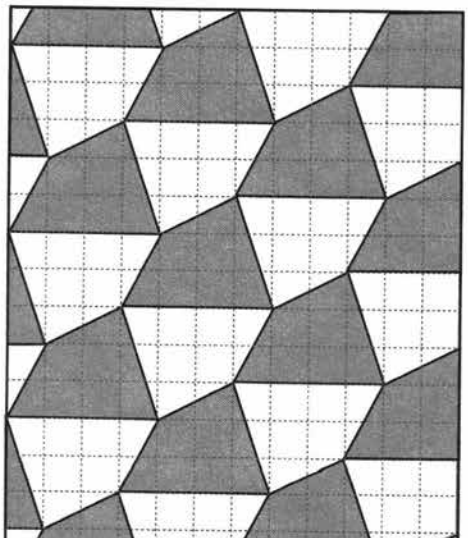


Рис. 101

15. 2 (рис. 102).

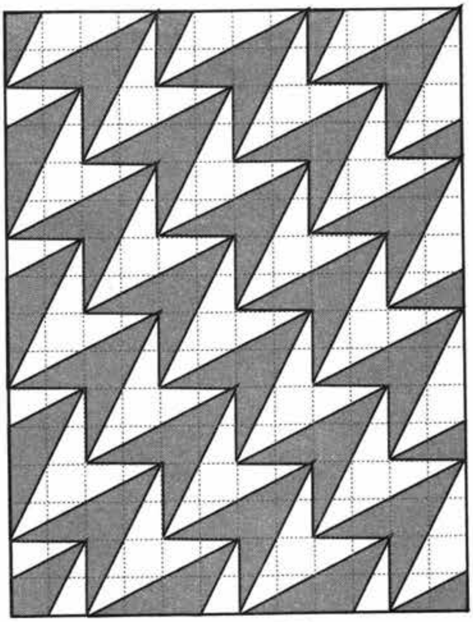


Рис. 102

16. 3 (рис. 103).

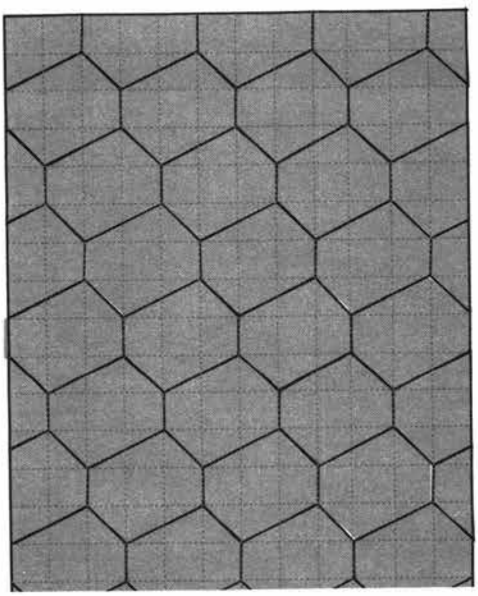


Рис. 103

17. 4 (рис. 104).

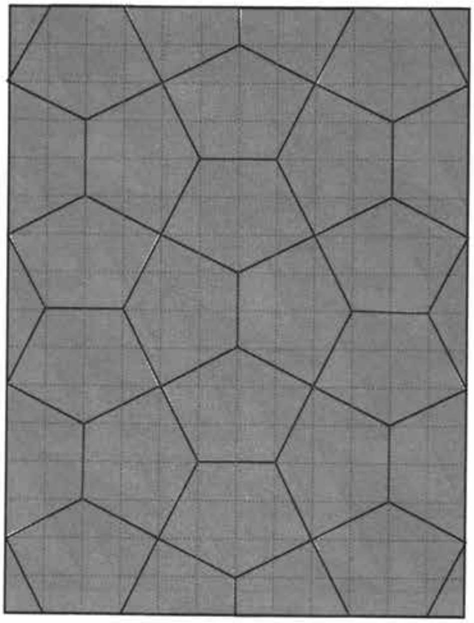


Рис. 104

18. 2 (рис. 105).

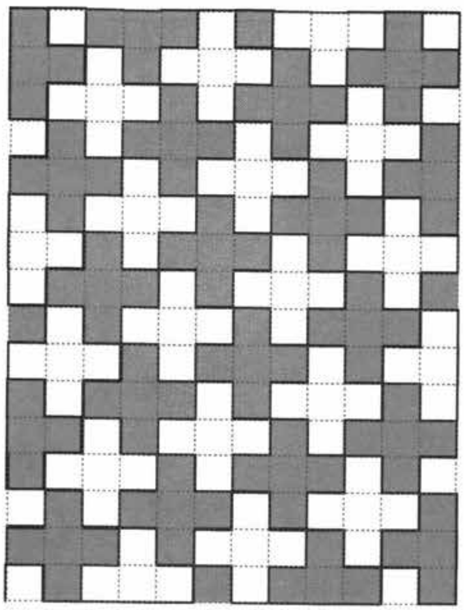


Рис. 105

19. 2 (рис. 106).

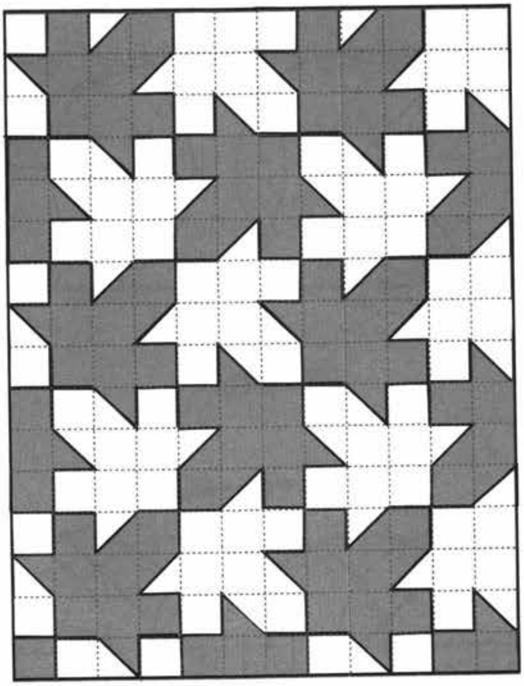


Рис. 106

§ 23. Кривые

1. См. рис. 107.

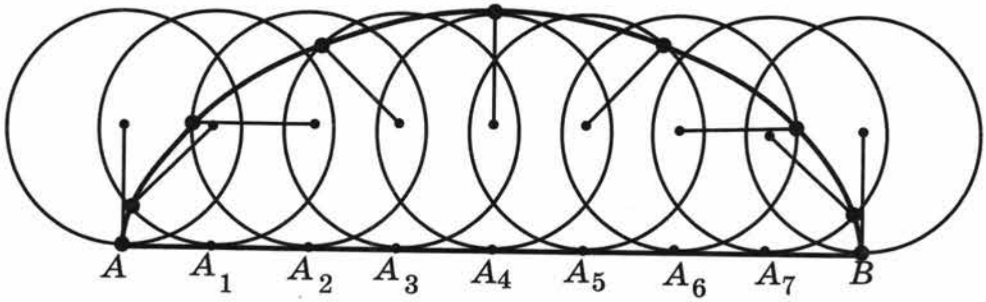


Рис. 107

2. См. рис. 108.

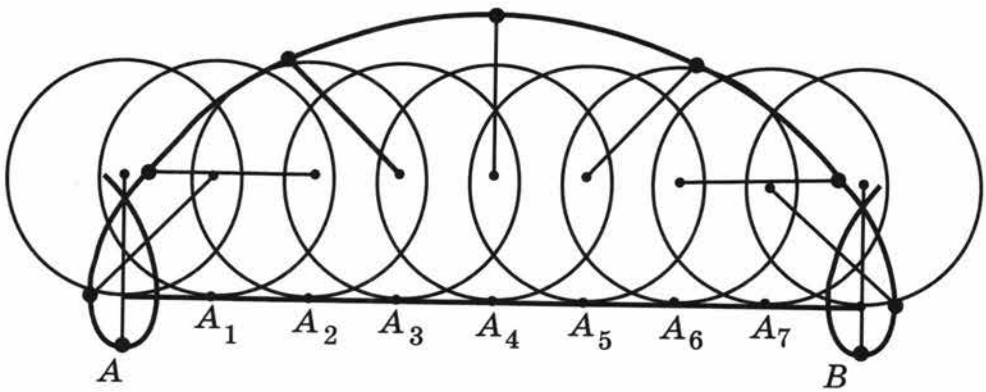


Рис. 108

3. См. рис. 109.

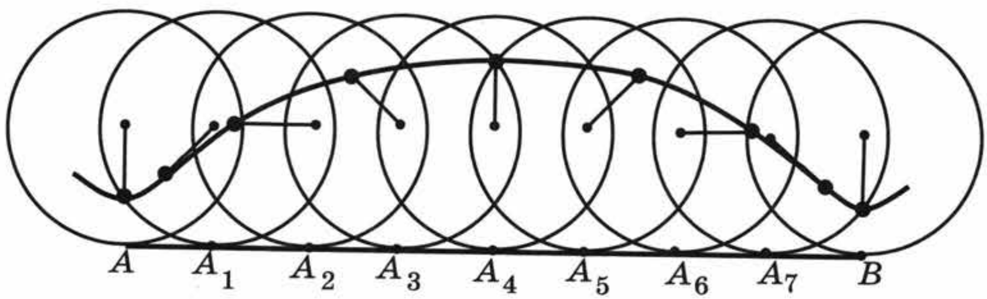


Рис. 109

4. См. рис. 110.

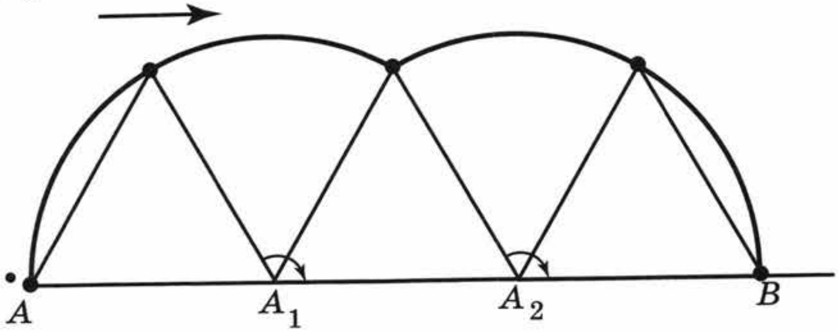


Рис. 110

5. См. рис. 111.

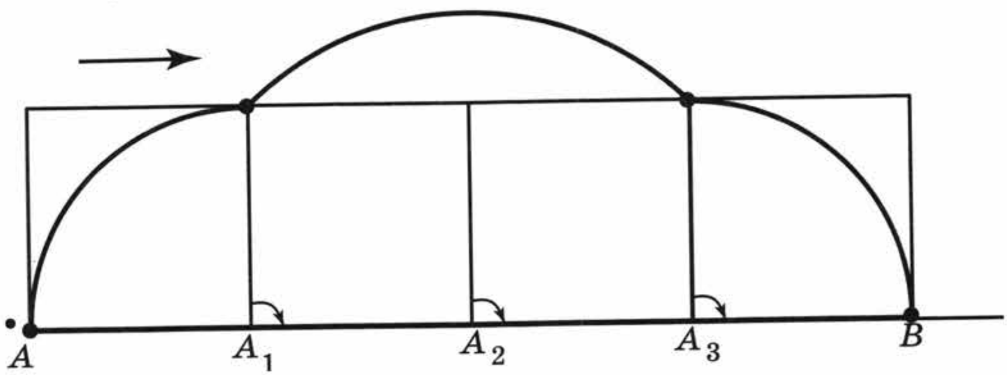


Рис. 111

6. См. рис. 112.

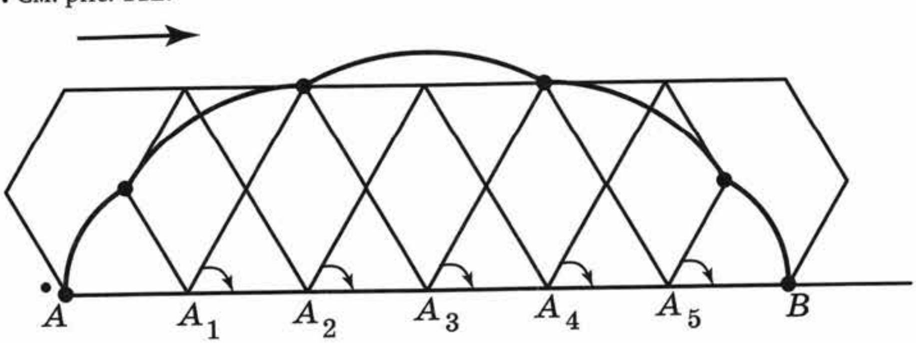


Рис. 112

7. См. рис. 113. **8.** См. рис. 114.

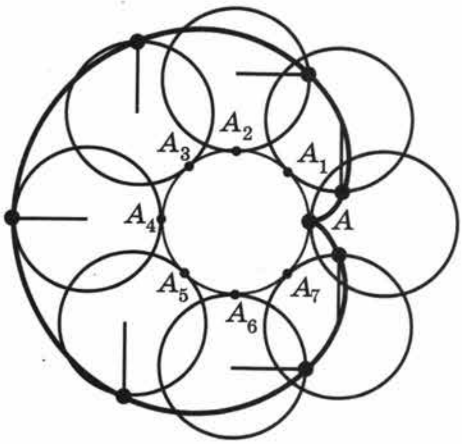


Рис. 113

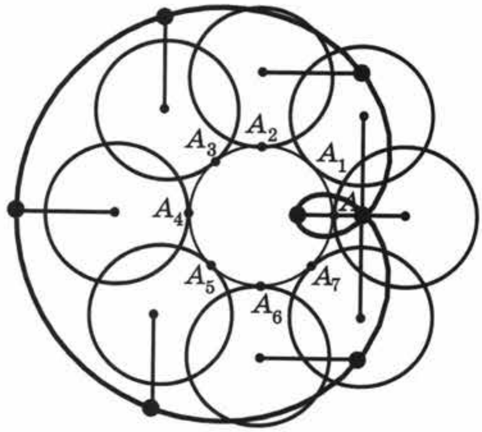


Рис. 114

9. См. рис. 115. **10.** См. рис. 116.

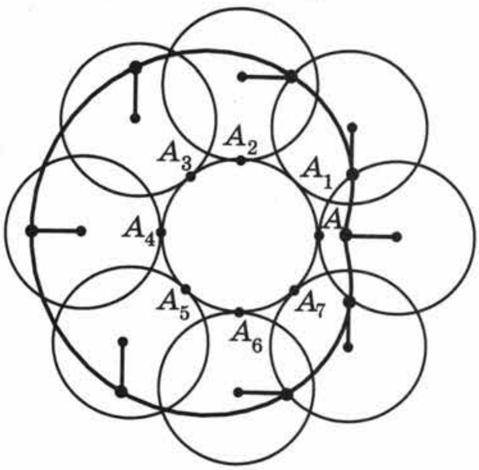


Рис. 115

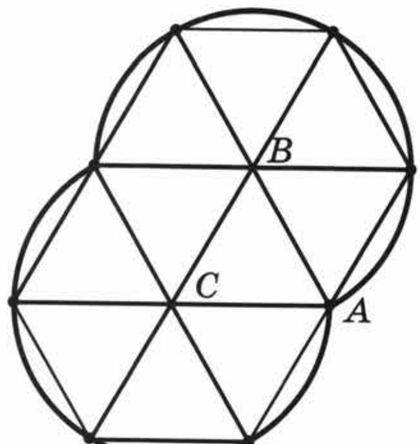


Рис. 116

11. См. рис. 117. **12.** См. рис. 118.

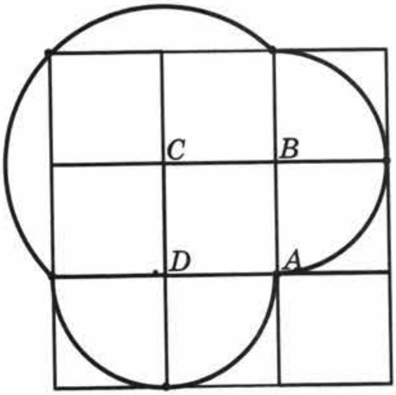


Рис. 117

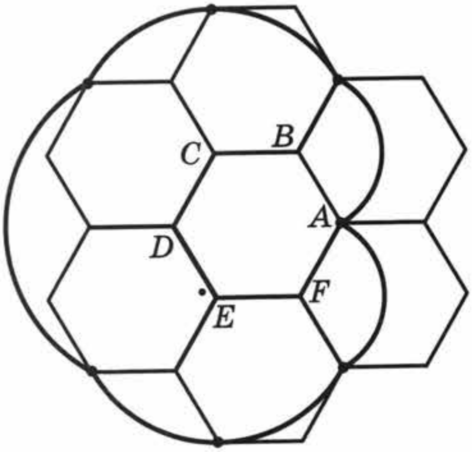


Рис. 118

13. См. рис. 119. **14.** См. рис. 120.

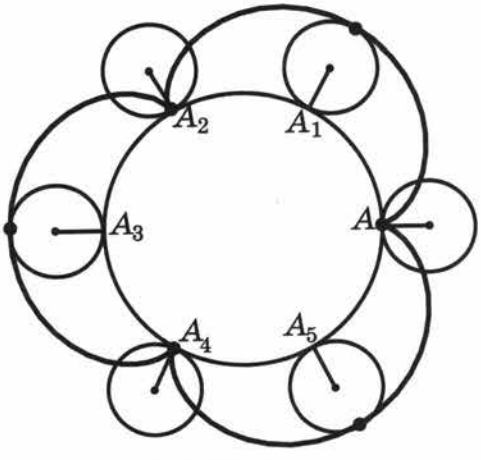


Рис. 119

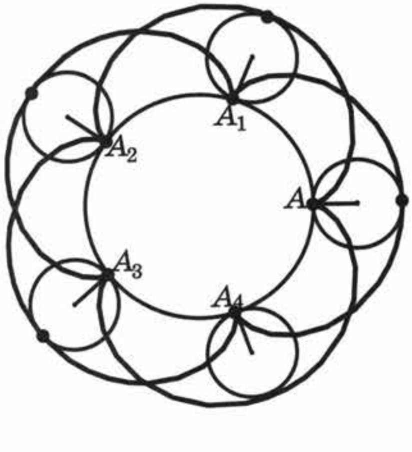


Рис. 120

15. См. рис. 121. **16.** См. рис. 122.

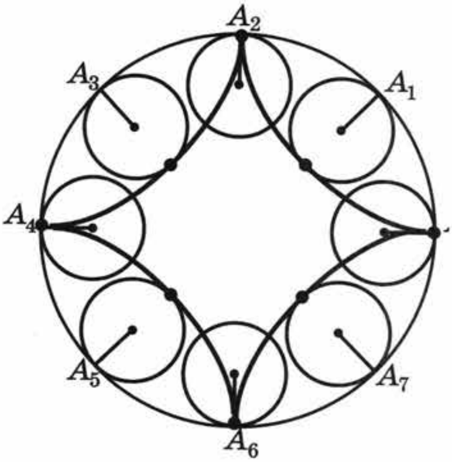


Рис. 121

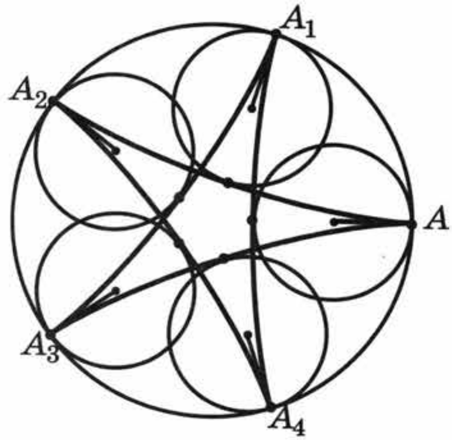


Рис. 122

17. См. рис. 123.

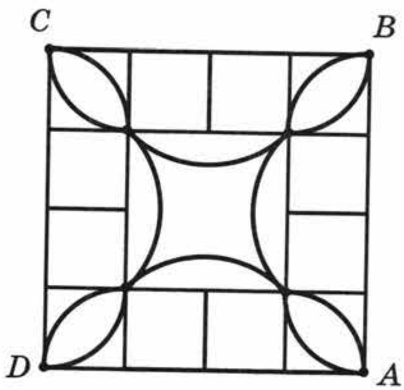


Рис. 123

§ 24. Разрезания

1. См. рис. 124.

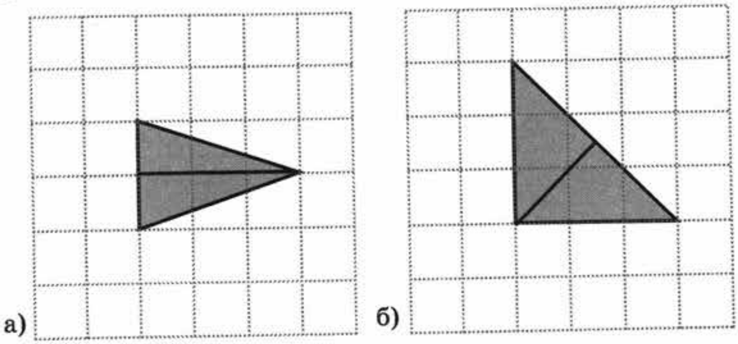


Рис. 124

2. См. рис. 125.

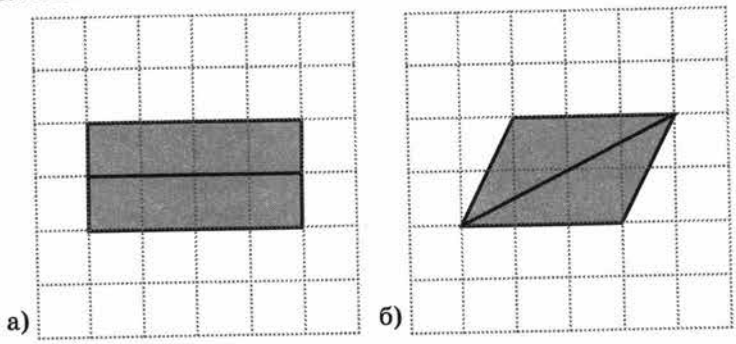


Рис. 125

3. См. рис. 126.

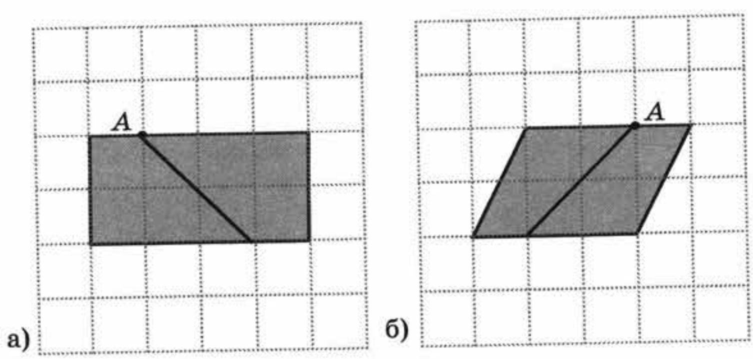


Рис. 126

4. См. рис. 127.

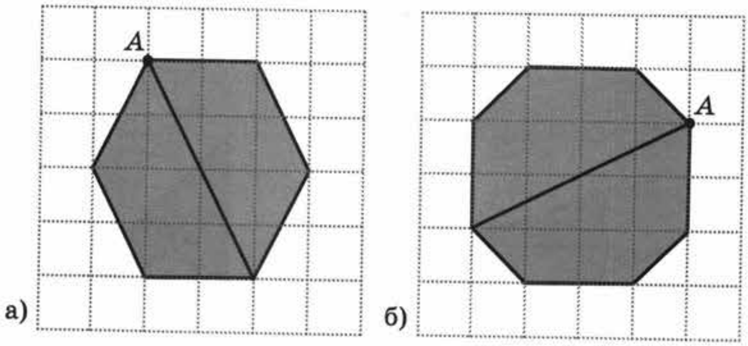


Рис. 127

5. См. рис. 128.

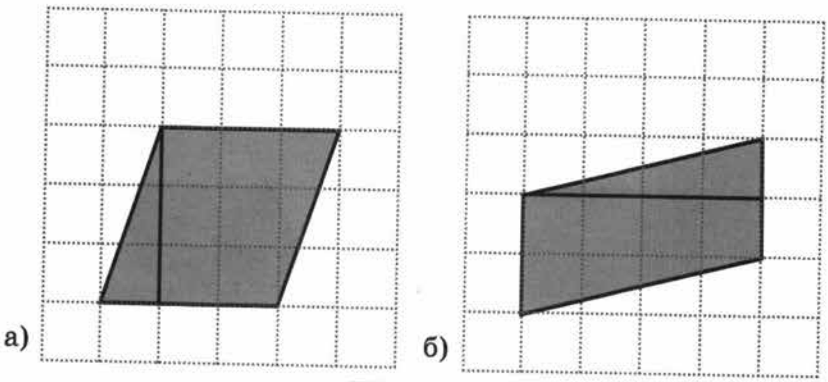


Рис. 128

6. См. рис. 129.

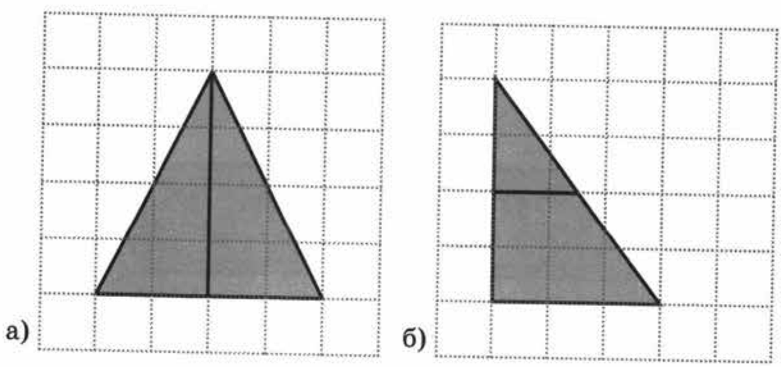


Рис. 129

7. См. рис. 130.

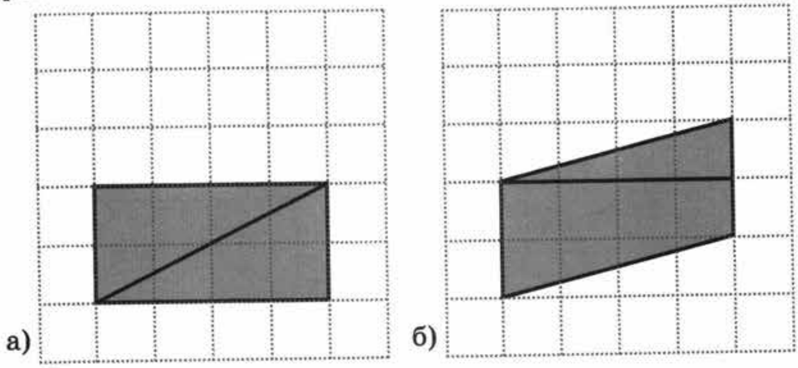


Рис. 130

8. См. рис. 131.

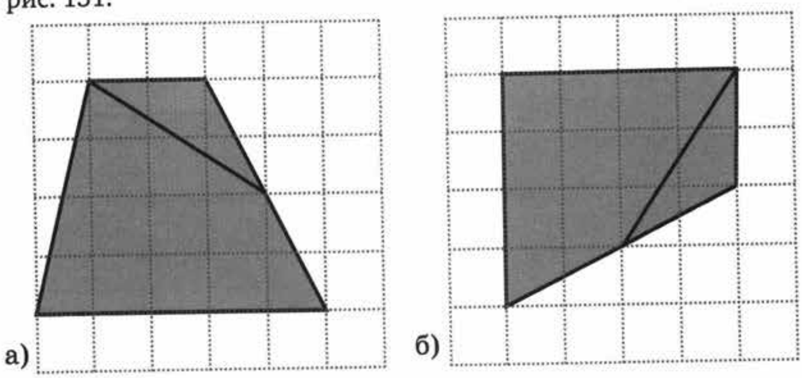


Рис. 131

9. См. рис. 132.

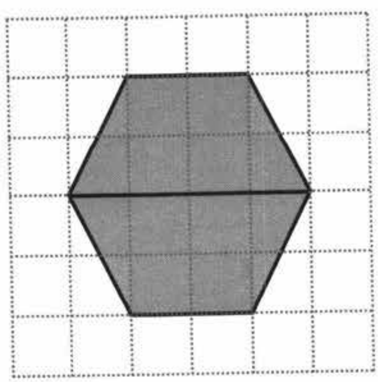


Рис. 132

10. См. рис. 133.

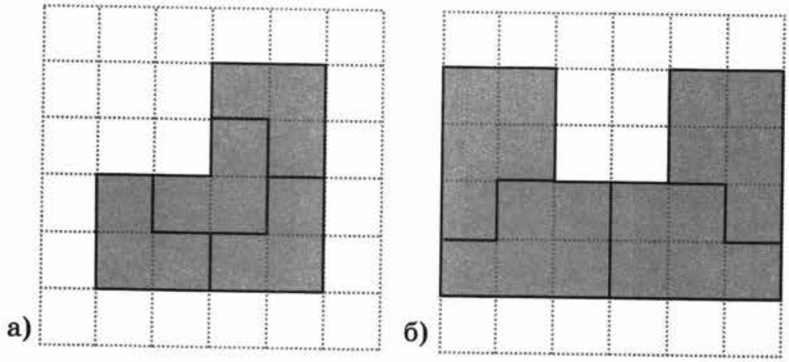


Рис. 133

11. См. рис. 134.

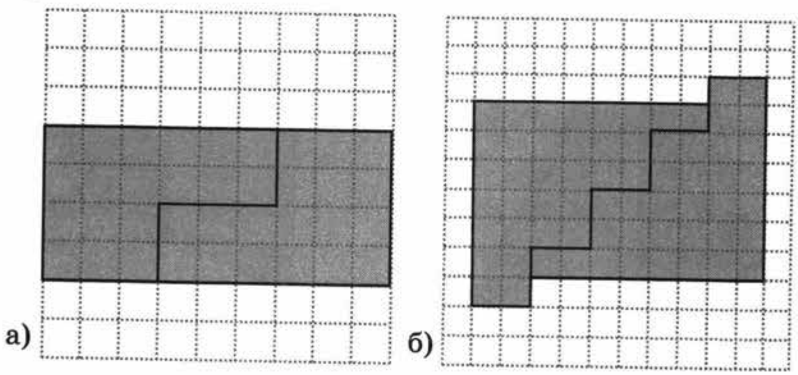


Рис. 134

12. См. рис. 135.

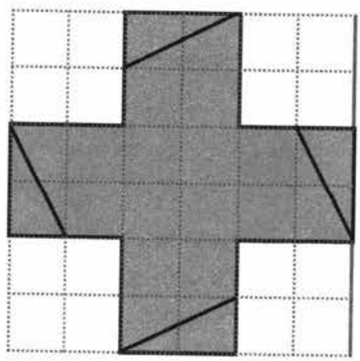


Рис. 135

13. См. рис. 136.

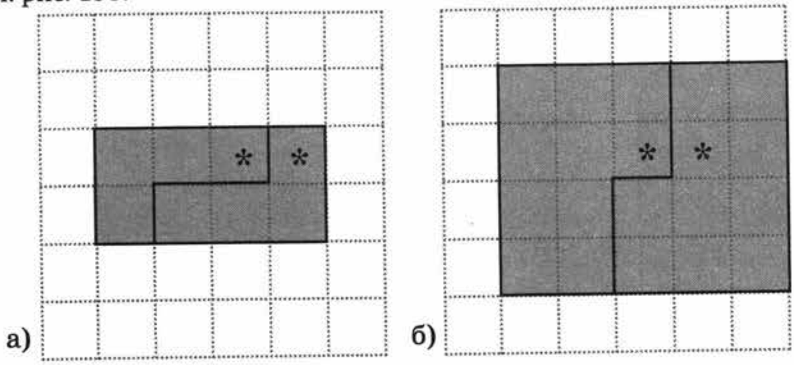


Рис. 136

§ 25. Площадь

1. а) В 4 раза; б) в 9 раз. **2.** а) В 4 раза; б) в 9 раз. **3.** а) Уменьшится в 2 раза; б) увеличится в 3 раза. **4.** а) и д), в) и г). **5.** а) 20; б) 12. **6.** а) 5; б) 5. **7.** 1,75. **8.** 4. **9.** а) 6; б) 8. **10.** а) 3; б) 6. **11.** а), г), е), ж) и з); б) и д). **12.** а) 8; б) 12. **13.** а), в), д), е); г), з), и). **14.** а) 10,5; б) 9. **15.** а) 10,5; б) 10. **16.** а) 7,5; б) 6. **17.** а) 6; б) 7,5. **18.** а) 7,5; б) 5,5. **19.** а) 10; б) 6. **20.** а) 12; б) 28. **21.** а) 52; б) 9. **22.** а) Одну четвёртую; б) одну восьмую; в) одну шестую. **23.** 8.

§ 26. Объём

1. В 27 раз. **2.** В 8 раза. **3.** а) 6; б) 8. **4.** а) 40; б) 12. **5.** а) 10; б) 10. **6.** а) 5); б) 6. **7.** 0,125. **8.** 1,75. **9.** 160 см^3. **10.** 62,5 г. **11.** 60 м^2. **12.** 30. **13.** 15. **14.** 1/6. **15.** 20 см.

§ 27. Площадь поверхности

1. 94. **2.** В 9 раз. **3.** В 4 раза. **4.** а) 22; б) 28. **5.** а) 92; б) 48. **6.** а) 34; б) 34. **7.** а) 22; б) 26. **8.** 1,5. **9.** 9,5. **10.** 30. **11.** 288 см^2. **12.** 54. **13.** 8. **14.** 4.

§ 28. Координаты

1. $A(3,1), B(2,3), C(1,2), D(-2,2), E(-1,-2), F(4,-1)$. **2.** См. рис. 137. **3.** См. рис. 138.

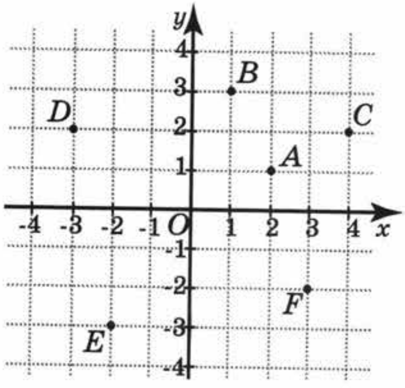


Рис. 137

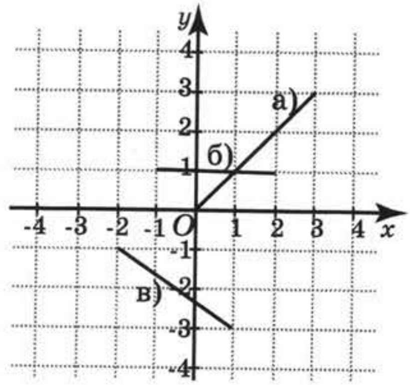


Рис. 138

4. См. рис. 139: а) 90°; б) 45°; в) 135°.

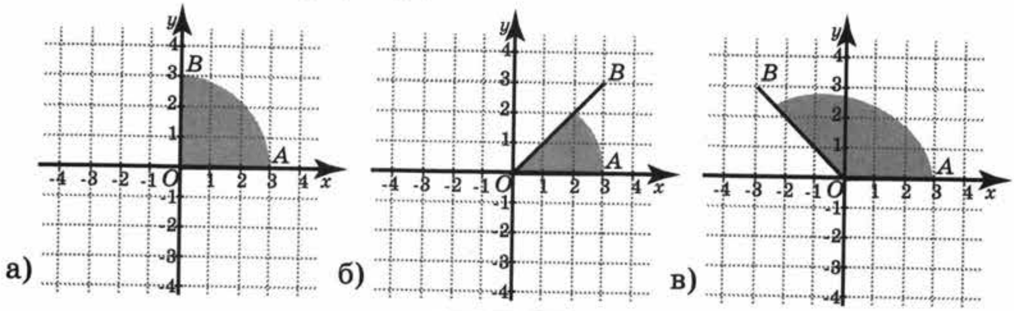


Рис. 139

5. См. рис. 140: а) 45°; б) 90°; в) 90°.

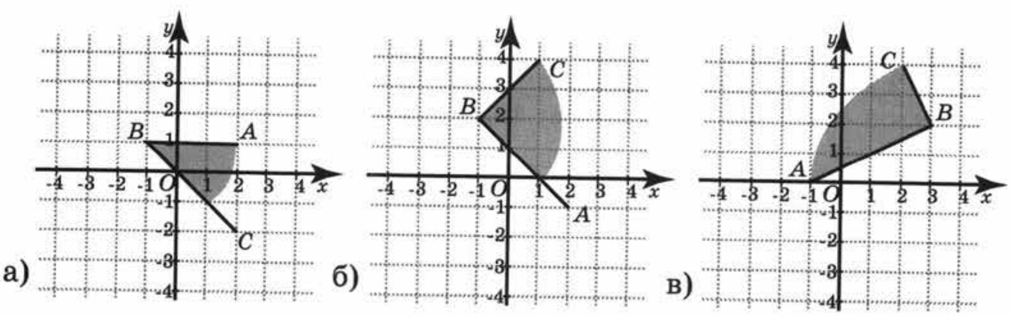


Рис. 140

6. См. рис. 141; 10. **7.** См. рис. 142; равнобедренный.

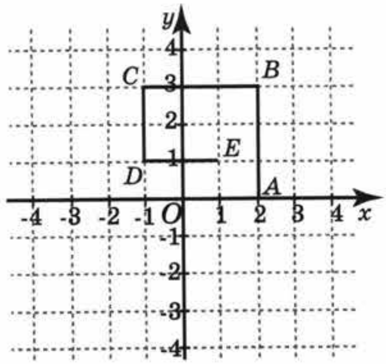


Рис. 141

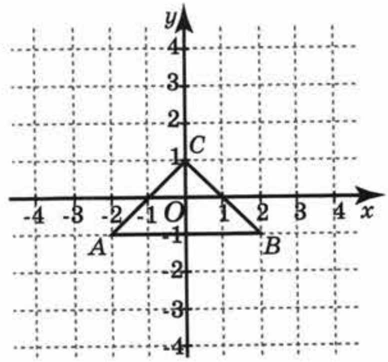


Рис. 142

8. См. рис. 143; тупоугольный. **9.** См. рис. 144; квадрат.

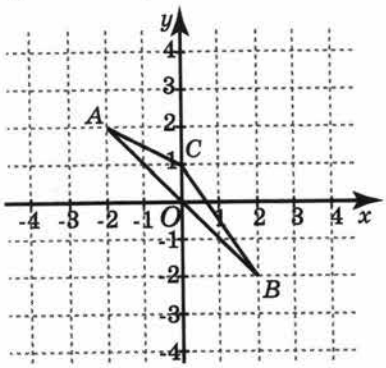


Рис. 143

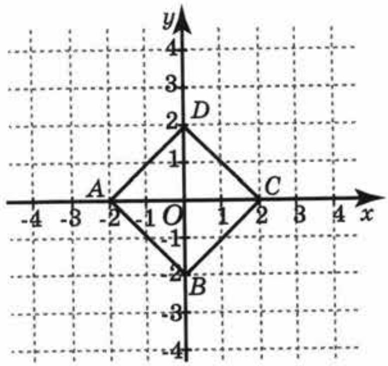


Рис. 144

10. См. рис. 145; прямоугольник. **11.** См. рис. 146; параллелограмм.

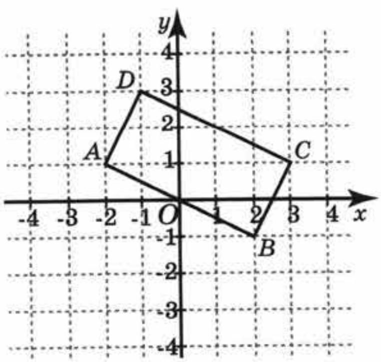


Рис. 145

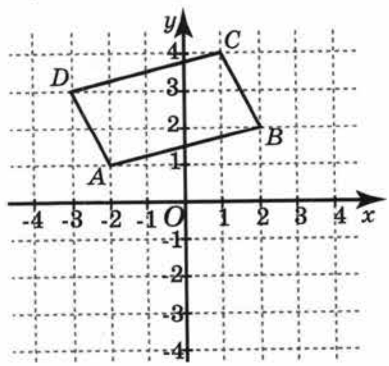


Рис. 146

12. См. рис. 147; равнобедренная трапеция. **13.** а) (1, 2); б) (2,–2); в) (–1,5, –1).

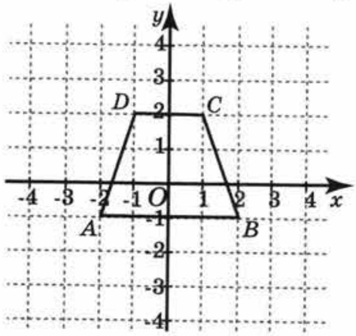


Рис. 147

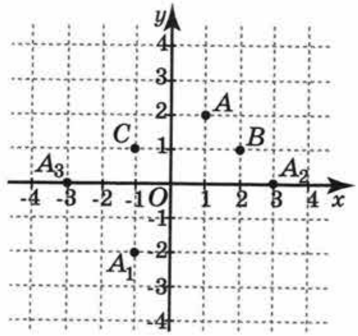


Рис. 148

14. См. рис. 148: а) $A_1(-1, -2)$; б) $A_2(3, 0)$; в) $A_3(-3, 0)$. **15.** См. рис. 149: а) $A_1(2, -3)$; б) $A_2(-2, 3)$; в) $A_3(-2, -3)$.

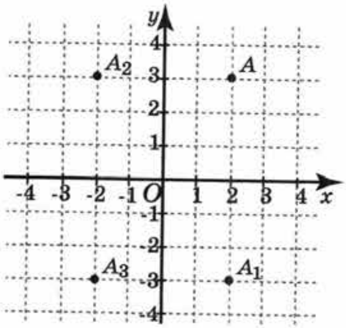


Рис. 149

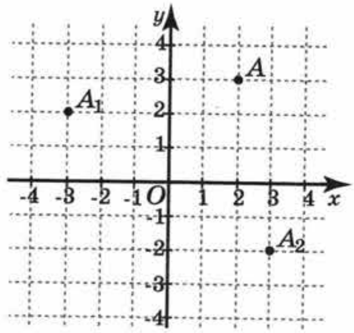


Рис. 150

16. См. рис. 150: а) $A_1(-3, 2)$; б) $A_2(3, -2)$. **17.** См. рис. 151: а) $A_1(2, -1)$; б) $A_2(0, 3)$; в) $A_3(-2, -1)$. **18.** $N(-2, 3)$ и $M(2, 3)$ (рис. 152).

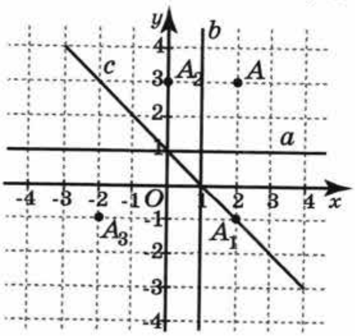


Рис. 151

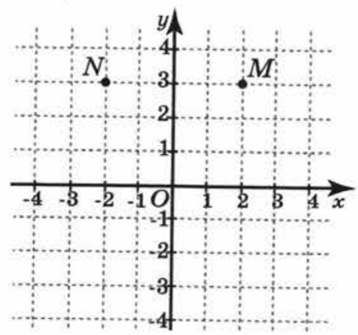


Рис. 152

19. См. рис. 153.

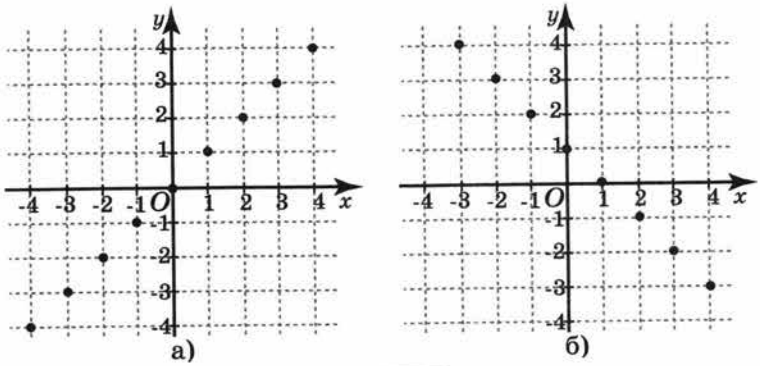


Рис. 153

20. См. рис. 154.

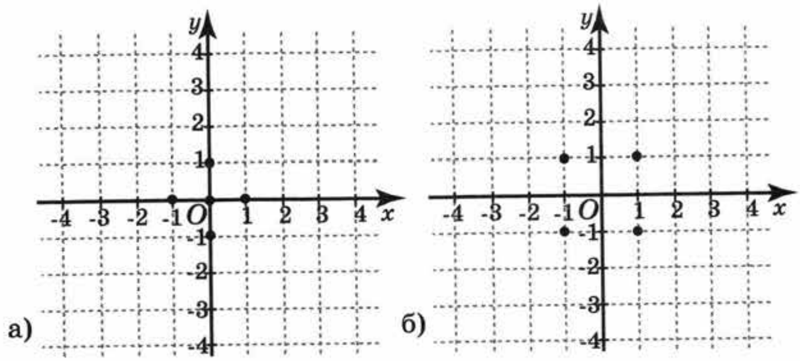


Рис. 154

21. См. рис. 155. **22.** См. рис. 156; 9.

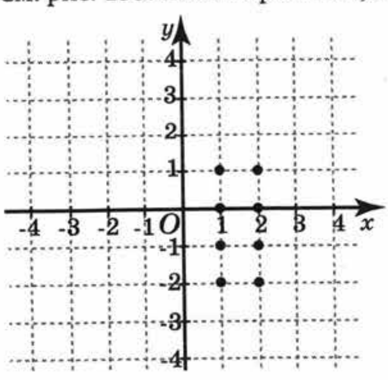


Рис. 155

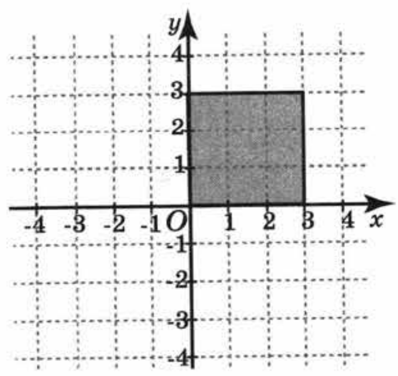


Рис. 156

23. См. рис. 157; 18. **24.** См. рис. 158; 16.

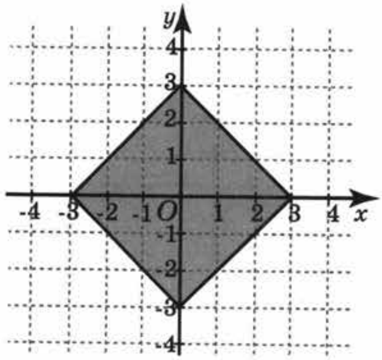


Рис. 157

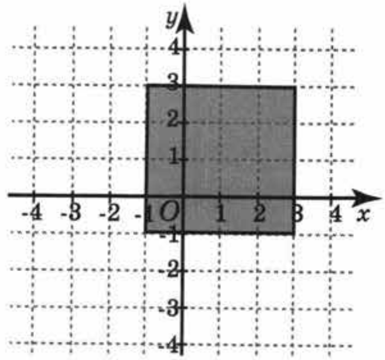


Рис. 158

25. См. рис. 159; 16. **26.** См. рис. 160; 12.

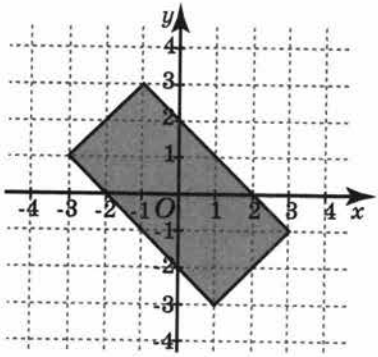


Рис. 159

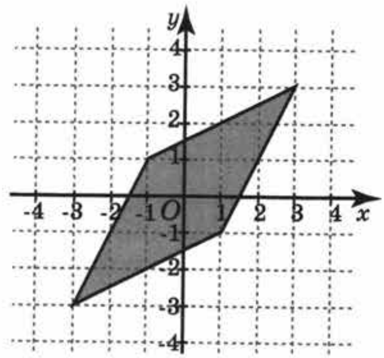


Рис. 160

27. См. рис. 161; 12. **28.** Кошка (рис. 162).

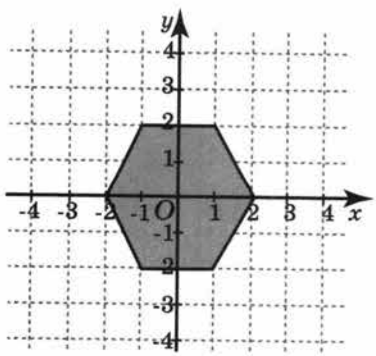


Рис. 161

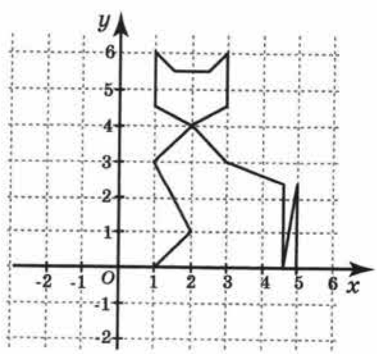


Рис. 162

29. Рыба (рис. 163).

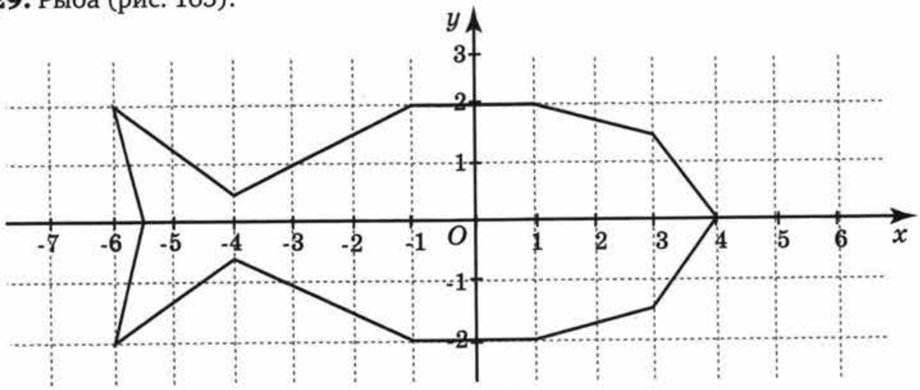


Рис. 163

30. Такса (рис. 164).

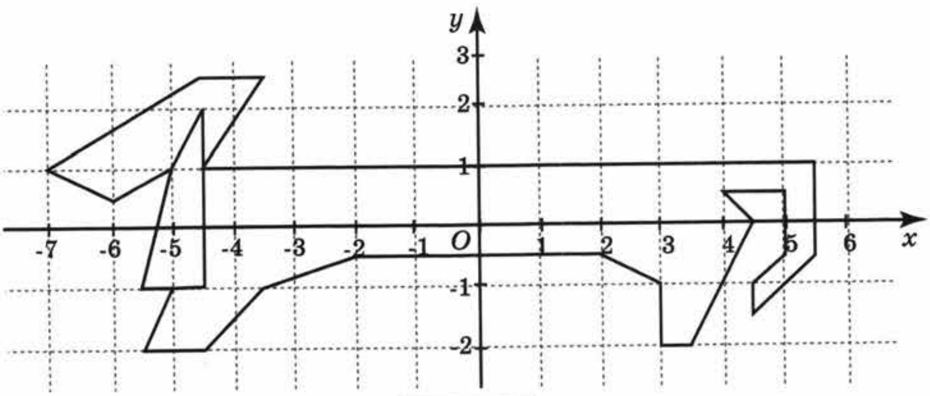


Рис. 164

31. Страус (рис. 165).

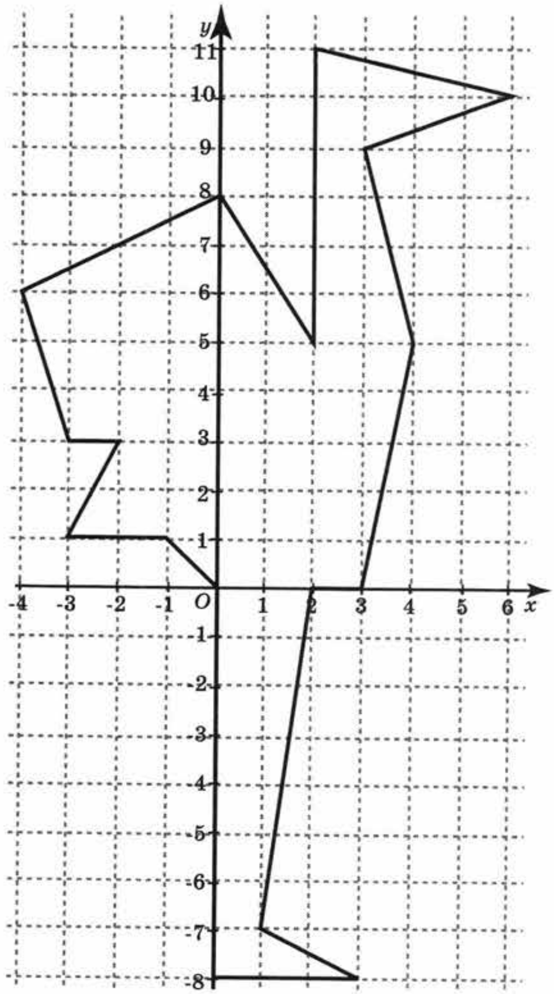


Рис. 165

ПРОГРАММА для 5–6 классов

Основные понятия геометрии

Точки, прямые, плоскости. Лучи и отрезки. Взаимное расположение точек и прямых на плоскости. Параллельные и перпендикулярные прямые.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– понимать, идеализацией каких объектов являются точки, прямые и плоскости;

– изображать, обозначать и называть точки, прямые, лучи, отрезки;

– устанавливать взаимное расположение точек и прямых на плоскости;

– решать задачи комбинаторного характера на взаимное расположение точек и прямых на плоскости.

Отрезки и углы

Сравнение отрезков. Равенство отрезков. Сложение и вычитание отрезков. Измерение длин отрезков. Единицы измерения длины.

Полуплоскость и угол. Виды углов: острые, прямые, тупые углы, развёрнутый угол. Смежные и вертикальные углы. Сравнение углов. Равенство углов. Сложение и вычитание углов. Биссектриса угла. Градусная величина угла. Измерение величин углов.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– сравнивать отрезки и устанавливать их равенство;

– измерять длины отрезков с помощью линейки;

– откладывать отрезки заданой длины;

– изображать, обозначать и называть углы;

– устанавливать виды углов;

– сравнивать углы и устанавливать их равенство;

– проводить биссектрису угла;

– измерять градусные величины углов с помощью транспортира;

– изображать углы заданных градусных величин;

– решать задачи на нахождение длин отрезков и величин углов.

Ломаные и многоугольники

Ломаная. Простые и замкнутые ломаные. Длина ломаной. Многоугольник. Диагонали многоугольника. Выпуклые и невыпуклые многоугольники. Правильные многоугольники. Звёздчатые многоугольники. Периметр многоугольника.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– изображать, обозначать и называть ломаные и многоугольники;
– устанавливать вид многоугольников;
– проводить диагонали многоугольника;
– находить длину ломаной и периметр многоугольника.

Треугольники и четырёхугольники

Треугольник. Остроугольные, прямоугольные, тупоугольные, равнобедренные, равносторонние треугльники. Гипотенуза и катеты прямоугольного треугольника. Высота, медиана и биссектриса треугольника.

Четырёхугольник. Выпуклые и невыпуклые четырёхугольники. Прямоугольник, квадрат, параллелограмм, ромб, трапеция. Равнобедренная и прямоугольная трапеции.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– изображать, обозначать и называть треугольники и четырёхугольники;
– устанавливать вид треугольников и четырёхугольников;
– проводить высоты, медианы и биссектрисы треугольника;
– решать задачи на нахождение сторон и углов треугольников и четырёхугольников.

Окружность. Геометрические места точек

Окружность и круг. Центр и радиус окружности. Хорда и диаметр окружности. Взаимное расположение двух окружностей. Длина окружности.

Геометрическое место точек. Примеры.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– изображать окружности и круги;

– отмечать центр окружности, проводить радиус, диаметр и хорды окружности;
– устанавливать взаимное расположение двух окружностей;
– находить приближённое значение длины окружности;
– решать задачи на нахождение и изображение геометрических мест точек.

***Графы. Кривые**

Графы. Вершины и рёбра графов. Примеры графов. Уникурсальные графы. Задача Эйлера о кёнигсбергских мостах. Задачи о раскрашивании карт.

Кривые, как траектории движения точек: циклоида, кардиоида, астроида.

Характеристика основных видов деятельности ученика:
– приводить примеры графов и изображать графы;
– устанавливать уникурсальность графов;
– решать задачи на раскрашивание карт;
– изображать кривые, как траектории движения точек: циклоиду, кардиоиду, астроиду и др.

Симметрия

Центральная симметрия. Центрально-симметричные фигуры. Примеры.

Осевая симметрия. Примеры.

Поворот. Симметрия n-го порядка. Примеры.

Паркеты на плоскости. Правильные паркеты.

Характеристика основных видов деятельности ученика:
– изображать фигуру, центрально-симметричную данной;
– устанавливать центральную симметричность фигур и находить их центр симметрии;
– изображать фигуру, симметричную данной относительно заданной оси;
– находить и изображать оси симметрии заданных фигур;
– изображать фигуру, полученную поворотом данной фигуры на данный угол вокруг данной точки;

– выяснять порядок симметрии данной фигуры и изображать центр симметрии;
– изображать паркеты на плоскости, выяснять возможность построения паркетов из заданных многоугольников.

Многогранники

Понятие многогранника. Вершины, рёбра и грани многогранника. Выпуклые и невыпуклые многогранники. Куб, параллелепипед, призма, пирамида. Правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники. Развёртки. Моделирование многогранников.

Характеристика основных видов деятельности ученика:
– изображать многогранники;
– устанавливать выпуклость и невыпуклость многогранников;
– находить число вершин, рёбер и граней многогранников;
– изготавливать развёртки многогранников;
– моделировать многогранники.

Площадь и объём

Площадь и её свойства. Единицы измерения площади. Равновеликие фигуры. Площадь прямоугольника, параллелограмма, треугольника, многоугольника. Задачи на разрезание.
Площадь поверхности многогранника.
Объём и его свойства. Единицы измерения объёма. Объём прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы.

Характеристика основных видов деятельности ученика:
– находить площади фигур, используя формулы и свойства площади;
– устанавливать равновеликость фигур;
– решать задачи на разрезание;
– находить площади поверхностей многогранников;
– находить объёмы многогранников, используя формулы и свойства объёмов.

Координаты

Прямоугольная система координат на плоскости. Начало координат. Координатные прямые: оси абсцисс и ординат. Координаты точки. Метод координат.

Характеристика основных видов деятельности ученика:

– изображать прямоугольную систему кординат на плоскости;

– находить координаты точек и изображать точки с заданными координатами;

– изображать отрезки, ломаные, многоугольники на координатной плоскости, заданные координатами своих вершин;

– изображать оружности и круги на координатной плоскости, заданные координатами центра и радиусом;

– решать задачи на нахождение длин, углов, площадей фигур на координатной плоскости.

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
для 5 классов

(1 час в неделю, всего 68 часов за два года)

Параграф учебника	Содержание	Количество часов
	5-й класс	
	Вводная беседа	1
1	Точки, прямые, плоскости	2
2	Лучи, отрезки	2
3	Измерение длин отрезков	2
4	Полуплоскость и угол	2
5	Измерение величин углов	2
	Контрольная работа 1	1
6	Ломаные	2
7	Многоугольники	2
8	Треугольники	2
9	Четырёхугольники	2
	Контрольная работа 2	1
10	Многогранники	2
11	Моделирование многогранников	2
12	Правильные многогранники	2
13	Полуправильные многогранники	2
14	Звёздчатые многогранники	2
	Контрольная работа 3	1
	Обобщающее повторение	2

ПРИМЕРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
для 6 классов

(1 час в неделю, всего 68 часов за два года)

Параграф учебника	Содержание	Количество часов
	6-й класс	
15	Окружность и круг	2
16	Геометрические места точек	2
17*	Графы	2
18	Раскрашивание карт	2
	Контрольная работа 1	1
19	Центральная симметрия	2
20	Осевая симметрия	2
21	Поворот	2
22	Паркеты	2
	Контрольная работа 2	1
23*	Кривые	2
24	Площадь	2
25	Разрезания	2
	Контрольная работа 3	1
26	Объём	2
27	Площадь поверхности	2
28	Координаты	2
	Контрольная работа 4	1
	Обобщающее повторение	2

СОДЕРЖАНИЕ