

**УЧЕБНИК  
ДЛЯ ВУЗОВ**

Ю. И. Королёв



# Начертательная геометрия

**2-е издание**



Ю. И. Королёв

# Начертательная ГЕОМЕТРИЯ

2-е издание

Допущено Научно-методическим советом по начертательной геометрии и инженерной графике  
Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника  
для вузов инженерно-технических специальностей

*Юрий Иванович Королёв*

## **Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 2-е издание**

*Рецензент:*

**Иванов Г. С.**, д. т. н., профессор кафедры начертательной геометрии и черчения Московского государственного университета леса, заслуженный деятель науки РФ

Заведующий редакцией  
Руководитель проекта  
Ведущий редактор  
Редактор  
Художественный редактор  
Корректоры  
Верстка

*А. Кривоцов  
А. Юрченко  
Ю. Сергиенко  
А. Гуцин  
Л. Адуевская  
Н. Солнцева, И. Тимофеева  
С. Романов*

**Королёв Ю. И.**

К68 Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 2-е изд. — СПб.: Питер, 2010. — 256 с.: ил.

ISBN 978-5-388-00366-9

Начертательная геометрия входит в состав обязательных дисциплин ведущих технических и архитектурно-строительных вузов мира. Ее роль в подготовке специалистов и в решении прикладных задач возрастает с развитием науки и техники.

Данный учебник соответствует требованиям государственных образовательных стандартов по подготовке бакалавров, магистров и дипломированных специалистов по курсу начертательной геометрии в технических вузах. Кроме теоретических основ образования изображений и геометрических преобразований изложены правила оформления чертежей. Порядок решения геометрических задач подробно рассматривается на конкретных примерах с анализом рациональных вариантов построения изображений. В конце каждого раздела размещен дидактический материал для закрепления изученного материала и самоконтроля.

Существенное отличие второго издания учебника заключается в том, что образование чертежа рассматривается с позиции теории метода двух изображений. Как следствие, внесены соответствующие изменения в содержание и редакцию отдельных глав, при этом учтены замечания и рекомендации многих специалистов по начертательной геометрии.

Допущено Научно-методическим советом по начертательной геометрии и инженерной графике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для вузов инженерно-технических специальностей.

# Оглавление

<b>Предисловие к второму изданию</b> .....	<b>7</b>
<b>Введение</b> .....	<b>8</b>
Принятые обозначения .....	9
<b>Глава 1. Предмет начертательной геометрии</b> .....	<b>11</b>
<b>Глава 2. Начальные сведения о правилах оформления изображений</b> .....	<b>13</b>
2.1. Линии .....	13
2.2. Масштабы и форматы .....	15
2.3. Шрифты чертежные и принятые обозначения .....	20
Вопросы и задания .....	25
<b>Глава 3. Метод проекций</b> .....	<b>26</b>
3.1. Центральное проецирование .....	26
3.2. Параллельное проецирование .....	31
3.3. Ортогональное проецирование .....	34
3.4. Способы обеспечения обратимости изображений .....	35
3.4.1. Двойное проецирование .....	35
3.4.2. Проекция с числовыми отметками .....	38
Вопросы и задания .....	40
<b>Глава 4. Краткие сведения о геометрических преобразованиях</b> .....	<b>41</b>
Вопросы и задания .....	47
<b>Глава 5. Образование и свойства комплексного чертежа</b> ....	<b>48</b>
5.1. Двухкартинный комплексный чертёж .....	48
5.2. Трёхкартинный комплексный чертёж .....	55
5.3. Изображения-виды .....	59
5.4. Родственное соответствие в ортогональных проекциях .....	61
Вопросы и задания .....	63

<b>Глава 6. Аксонометрический чертёж.....</b>	<b>65</b>
6.1. Образование, основные параметры и классификация аксонометрических проекций .....	65
6.2. Стандартные аксонометрические чертежи .....	69
6.2.1. Изометрические прямоугольные проекции .....	69
6.2.2. Диметрические прямоугольные проекции.....	70
6.2.3. Косоугольные фронтальные изометрические проекции.....	70
6.2.4. Косоугольные горизонтальные изометрические проекции.....	71
6.2.5. Косоугольные фронтальные диметрические проекции .....	71
Вопросы и задания .....	72
<b>Глава 7. Чертежи элементарных геометрических объектов. Позиционные и метрические задачи .....</b>	<b>73</b>
7.1. Чертежи точки и прямой линии .....	73
7.1.1. Прямые линии частного положения .....	79
7.2. Взаимное расположение прямых линий.....	80
7.3. Комплексный чертёж плоскости. Задачи принадлежности .....	82
7.4. Особые линии и замена определителя плоскости .....	88
7.5. Относительное положение прямой и плоскости .....	91
7.5.1. Параллельность прямой и плоскости.....	91
7.5.2. Пересечение прямой и плоскости. Видимость .....	92
7.5.3. Перпендикулярность прямой и плоскости .....	96
7.6. Относительное положение двух плоскостей.....	97
7.6.1. Параллельные плоскости .....	98
7.6.2. Построение линии пересечения плоскостей.....	98
7.6.3. Перпендикулярные плоскости.....	103
Вопросы и задания .....	104
<b>Глава 8. Преобразование комплексного чертежа .....</b>	<b>110</b>
8.1. Преобразование чертежа способом замены плоскостей проекций .....	111
8.2. Преобразование чертежа способом плоскопараллельного перемещения .....	115
8.3. Преобразование чертежа способом вращения вокруг проецирующей прямой линии .....	118
8.4. Преобразование чертежа способом вращения вокруг линии уровня .....	120
8.5. Преобразование чертежа способом дополнительного проецирования .....	121
Вопросы и задания .....	125
<b>Глава 9. Многогранные поверхности .....</b>	<b>127</b>
9.1. Изображение многогранников в аксонометрии.....	130
9.2. Решение отдельных позиционных и метрических задач с многогранниками.....	133
9.2.1. Задачи принадлежности .....	133

9.2.2. Пересечение многогранной поверхности с плоскостью .....	133
9.2.3. Пересечение многогранных поверхностей .....	139
9.2.4. Метрические задачи.....	141
Вопросы и задания .....	142

## **Глава 10. Кривые линии и свойства их проекций ..... 144**

10.1. Основные понятия и свойства проекций кривых линий .....	144
10.2. Проекционные свойства окружности и построение ее проекций .....	148
10.2.1. Ортогональная проекция окружности.....	150
10.3. Построение линий в аксонометрии .....	155
Вопросы и задания .....	160

## **Глава 11. Поверхности ..... 162**

11.1. Кинематический способ образования, понятие каркаса и определителя поверхности .....	162
11.2. Классификация поверхностей .....	164
11.3. Поверхности вращения .....	165
11.3.1. Алгебраические поверхности вращения .....	168
11.4. Пересечение поверхности с линией, цилиндрической проецирующей поверхностью и плоскостью.....	175
11.4.1. Построение сечений поверхностей .....	180
11.4.2. Сечение поверхности плоскостью общего положения .....	185
11.5. Линейчатые поверхности .....	187
11.5.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей линией .....	187
11.5.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими линиями .....	189
11.5.3. Линейчатые поверхности с тремя направляющими.....	192
11.6. Винтовые поверхности .....	194
11.7. Нелинейчатые поверхности.....	198
11.8. Изображение поверхностей в аксонометрии .....	199
Вопросы и задания .....	206

## **Глава 12. Построение линий пересечения поверхностей ..... 210**

12.1. Построение линий пересечения поверхностей способом плоскостей.....	211
12.2. Построение линий пересечения поверхностей способом концентрических сфер .....	217
12.3. Построение линий пересечения поверхностей способом эксцентрических сфер.....	220
12.4. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка .....	224
12.5. Прямая и плоскость, касательные к поверхности.....	226
12.6. Построение линий пересечения поверхностей на аксонометрическом чертеже .....	230
Вопросы и задания .....	234

---

<b>Глава 13. Развертка поверхностей .....</b>	<b>238</b>
13.1. Основные понятия и свойства разверток .....	238
13.2. Развертка многогранных поверхностей.....	240
13.2.1. Построение развертки многогранной поверхности .....	240
13.2.2. Способ нормального сечения .....	244
13.2.3. Способ раскатки .....	246
13.3. Построение разверток развертывающихся поверхностей.....	247
13.4. Условные развертки поверхностей.....	251
Вопросы и задания .....	254
<b>Литература.....</b>	<b>255</b>

# Предисловие к второму изданию

Структура и стиль изложения предлагаемого учебника в основном аналогичны изданию «Начертательная геометрия: Учебник для вузов» (СПб.: Питер, 2006). Его существенное отличие заключается в том, что в этом издании образование чертежа рассматривается с позиций теории метода двух изображений и, как следствие, внесены соответствующие изменения в содержание и отдельные главы. При этом в значительной степени учтены замечания и пожелания рецензентов и коллег в пределах рекомендаций Государственных образовательных стандартов и имеющихся возможностей по объему учебника.

В частности, в этом издании изменен подход к проблеме классификации, более полно рассмотрен раздел преобразования чертежа, рассмотрен вопрос построения прямых и плоскости, касательных к поверхности, уточнены отдельные понятия, приведены дополнительные примеры практического использования теоретических положений, в том числе и родственного соответствия, в решении позиционных задач.

Автор выражает глубокую благодарность профессору В. И. Якунину и рецензенту профессору Г. С. Иванову за существенную помощь в подготовке издания своим внимательным отношением к данной работе, принципиальным подходом к редакционной оценке теоретических положений и профессиональными рекомендациями.

# Введение

В наши дни встречается глубоко ошибочное мнение, что начертательная геометрия будет не нужна с внедрением машинной графики. Однако эффективность использования машин однозначно зависит от знаний основ теории изображений и умения их использовать как в стадии разработки системных программ, так и в решении прикладных задач. Человек, не умеющий читать и разрабатывать чертеж на бумаге, не сможет осмысленно сделать это и на машине. Поэтому начертательная геометрия входит в состав обязательных дисциплин ведущих технических и архитектурно-строительных вузов. Ее роль в подготовке специалистов и в решении прикладных задач возрастает с развитием науки и техники. В современном мире невозможно существование полноценного инженера без знания основ теории изображений, которые называют техническим языком.

Все черчение базируется на начертательной геометрии и отличается от нее правилами, которые устанавливают условности оформления и размещения тех или иных изображений и документов, называемых конструкторскими, или строительными. Именно этими правилами отличаются чертежи в различных странах. А суть их одна, объединяет их начертательная геометрия. Другое дело, что мы со временем растаем в начертательную геометрию, в этот язык настолько, что естественно, не замечая этого, пользуемся ее плодами в повседневной жизни, как пользуемся письменностью, математикой и другими плодами своих знаний. Ведь излагая свои мысли, мы не задумываемся над понятиями существительного, глагола и т. д., а просто пользуемся ими. Так же, читая или разрабатывая чертеж, или изготавливая изделие по чертежу, мы автоматически выделяем состав поверхностей, их геометрические отношения и параметры, их определяющие, потому что понимаем цель и характер образования изображений, которые использованы на чертеже.

Однажды на встрече с комсомольцами академик С. П. Королев так ответил на один из их вопросов: «Я люблю фантастику в чертежах». Вдумайтесь в это! При этом он наверняка не думал о начертательной геометрии, но чертеж в нем жил так же, как живет в нас родной язык. Поэтому начертательная геометрия, как объективная необходимость, родилась в прошлом, нужна в настоящем и будет необходима в будущем. Все начинается с мысли, выраженной чертежом!

Интенсификация учебного процесса в вузах выдвигает новые требования к методике и средствам обучения, обеспечивающим необходимое качество подготовки специалистов. В связи с этим вузовский учебник должен давать возможность выбора материала, содержать сведения, необходимые не только для учебного процесса, но и для организации научно-исследовательской работы со студентами, для решения ряда инженерных задач, для использования методики проблемного обучения.

Поэтому в предлагаемом учебнике рассматривается суть метода проекций, анализируются основные способы построения изображений и дается представление о геометрических преобразованиях. На основе теории метода двух изображений рассматривается образование и свойства комплексного и аксонометрического чертежа, а затем анализируются определители и изображения объектов и методы решения позиционных и метрических задач на них. Определенный разброс в сведениях об аксонометрических проекциях продиктован стремлением использовать их большую наглядность и показать единую теоретическую основу образования чертежей и универсальность алгоритмов при пояснении решения отдельных задач. Кроме того, это позволяет делать сравнительную оценку способов построения изображений и вводить аксонометрию в самом начале процесса обучения. То есть идти от простых к более сложным изображениям.

Использование в самом начале курса начертательной геометрии сведений о конструкторских документах и правилах их оформления вполне естественно. Это направляет работу преподавателя и студента в русло чертежа, что совершенно необходимо при выполнении графических заданий, для закрепления понятия теоретического чертежа как графического документа и для технической подготовки студента к изучению курса инженерной графики.

Педагогическая практика показывает, что изложение даже хорошо систематизированных теоретических основ начертательной геометрии не обеспечивает ее глубокого практического освоения. Поэтому в предлагаемой книге основные теоретические положения сопровождаются конкретными примерами их применения, сравнительной оценкой и выводами, а в конце каждой главы даются вопросы и задания для самоконтроля и закрепления материала.

Увеличение объема книги при таком способе изложения окупается ее практической ценностью. Студенты ценят литературу, которая помогает им разобраться в прикладных задачах, приобрести опыт в подходе к решению конкретных задач. А по мере накопления этого опыта учащийся начинает мыслить самостоятельно на профессиональном уровне.

Надо научить человека плавать, и лишь тогда он сможет самостоятельно плыть на время и в глубину.

## Принятые обозначения

Изображение знаков выполняется в соответствии с принятыми стандартами оформления технической и научной документации.

---

$A, B, C, D, \dots$ или $1, 2, 3, 4 \dots$	Обозначение точки: прописные буквы латинского алфавита или арабские цифры
$\circ$	Изображение точки (области расположения точки): круг диаметром 2–3 мм тонкой линией
$a, b, c, d, \dots$	Линия: строчные буквы латинского алфавита
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots$	Плоскости, поверхности, углы: строчные буквы греческого алфавита

---

---

$\pi$	Плоскость проекций (картинная плоскость): прописная буква (пи) греческого алфавита
$(AB)$	Прямая линия, проходящая через точки $A$ и $B$
$[AB]$	Отрезок, ограниченный точками $A$ и $B$
$\langle AB \rangle$	Луч, ограниченный точкой $A$ и проходящий через точку $B$
$ AB $	Натуральная величина отрезка $AB$ (равная оригиналу)
$ Aa $	Расстояние от точки $A$ до линии $a$
$ A\alpha $	Расстояние от точки $A$ до поверхности (плоскости) $\alpha$
$ ab $	Расстояние между линиями $a$ и $b$
$ \alpha\beta $	Расстояние между плоскостями $\alpha$ и $\beta$
$=$	Совпадение ( $A = B$ — точки $A$ и $B$ совпадают) и результат действия
$\cong$	Геометрические объекты конгруэнтны (равны по величине и форме)
$\sim$	Фигуры подобны
$\parallel$	Линии и плоскости параллельны
$\perp$	Линии и плоскости перпендикулярны
$\sphericalangle$	Скрещиваются
$\rightarrow$	Отображаются, последовательность действий
$\Rightarrow$	Следует, логическое следствие
$\in$	Принадлежит, является элементом множества: $A \in a$ — точка $A$ принадлежит линии $a$ ; $a \in \alpha$ — линия $a$ проходит через точку $A$
$\subset$	Включает, содержит: $a \subset \alpha$ — $a$ принадлежит плоскости $\alpha$
$\cap$	Пересечение: $a = \alpha \cap \beta$ — прямая $a$ получена пересечением плоскостей $\alpha$ и $\beta$
$?$	Следует найти этот результат, решить задачу
$\backslash$	Отрицание знака
	Действительное значение угла равно $90^\circ$ (прямой угол)
$\wedge$	Угол. Например: $a \wedge b$ — угол между прямыми линиями $a$ и $b$
$\sphericalangle \alpha$	Угол $\alpha$ (или число в градусах)
$\sphericalangle ABC$	Угол с вершиной в точке $B$

---

# Глава 1

## Предмет начертательной геометрии

Процесс производства любого изделия начинается с разработки конструкторской документации.

*Конструкторскими документами* называют графические и текстовые документы, которые в отдельности или в совокупности определяют состав и устройство изделия и содержат необходимые данные для его разработки или изготовления, контроля, приемки, эксплуатации и ремонта.

*Изделием* называют любой предмет или набор предметов производства, подлежащий изготовлению на предприятии.

Рассматривая только геометрические свойства изделий (их форму, размеры), обратим внимание на то обстоятельство, что это пространственные геометрические объекты, а документация на изготовление этих объектов представляется на бумаге, следовательно, на плоскости.

Кроме того, основанием для изготовления изделия служат его размеры, указанные в документации, которые будем называть геометрическими параметрами.

Очевидно, что данные о геометрической форме изделия и его параметрах содержит графическая часть конструкторской документации, которая называется чертежом. Следовательно, *чертеж* — это графический документ, в котором в виде плоских изображений и геометрических параметров представлены данные, необходимые для разработки или изготовления изделия.

*Начертательная геометрия* изучает способы построения изображений (моделей) пространственных геометрических объектов на чертеже, их геометрические свойства и методы решения пространственных геометрических задач на этих изображениях.

По сути своей начертательная геометрия является уникальным техническим языком, теорией или основой плоского изображения. Уникальность его заключается в том, что он един для всего человечества. И информативность его настолько велика, что заменить его другим языком практически невозможно.

Необходимо помнить, что мы здесь намеренно делаем акцент на понятии «чертеж». Но законы начертательной геометрии распространяются на любое изображение геометрических форм. Чертежи, построенные методами начертательной геометрии, должны отвечать следующим основным требованиям.

1. **Наглядность.** Это свойство чертежа вызывать пространственное представление об изделии.

2. **Простота построений**, то есть построение изображений и решение задач на них должны быть достаточно простыми.
3. **Обратимость** — это возможность воспроизведения (представления) по чертежу формы, размеров и положения изображенного объекта в пространстве, то есть возможность восстановления (изготовления) оригинала.
4. **Возможность решения** геометрических задач с достаточной степенью точности.

Отсюда вытекают *основные задачи начертательной геометрии*:

- изучение и разработка методов проецирования (моделирования) геометрических объектов на плоскость;
- исследование геометрических преобразований и их свойств;
- разработка методов решения пространственных геометрических задач на плоских изображениях;
- разработка условий, обеспечивающих обратимость чертежа и качественное изготовление изделия с учетом новых технологий.

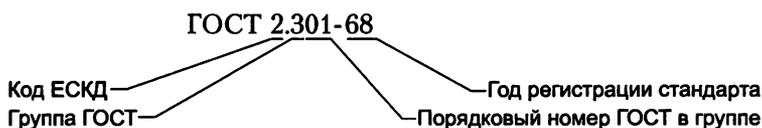
Основным методом начертательной геометрии является *метод проецирования*, поэтому чертежи, построенные этим методом, называют *проекционными*.

Однако для обеспечения наглядности чертежа и возможности производства изделия устанавливаются законы оформления изображений и сопровождения их дополнительной информацией. Эти законы объединяют в целевые государственные стандарты (ГОСТ). А свод этих стандартов называют Единой Системой Конструкторской Документации (ЕСКД).

В общей системе государственной стандартизации ЕСКД присвоен код 2. Внутри ЕСКД стандарты объединяются по группам, которым присваивается цифровой код от 0 до 9. Например, в учебном процессе изучаются стандарты следующих групп:

1. Основные положения;
3. Общие правила выполнения чертежей;
4. Правила выполнения чертежей изделий машиностроения и приборостроения;
7. Правила выполнения схем;
8. Правила выполнения документов строительных и судостроения;
9. Прочие стандарты.

В каждой группе стандартам присваивается порядковый номер. Таким образом, обозначение конкретного стандарта будет выглядеть, например, как показано на следующей схеме:



Кроме того, стандарту присваивается наименование, например:

ГОСТ 2.301-68 Форматы.

Прежде чем изучать начертательную геометрию, изучим важнейшие законы оформления изображений.

# Глава 2

## Начальные сведения о правилах оформления изображений

Правила оформления изображений мы будем рассматривать не в полном объеме, а по мере их использования. При этом необходимо различать вид и назначение изображения, например: чертеж, технический рисунок, художественный рисунок, фотография, киноплёнка — все они подчиняются единым геометрическим законам, но оформляются по-разному. Мы будем рассматривать правила оформления чертежа и технического рисунка, а на первом этапе — правила оформления изображений чертежа как в стадии их разработки, так и на завершающем этапе. Этим правилам должны подчиняться и геометрические рисунки, иллюстрирующие положения начертательной геометрии.

### 2.1. Линии

ГОСТ 2.303-68 для оформления изображений и иных данных на чертеже устанавливает следующие типы линий и их наименование:



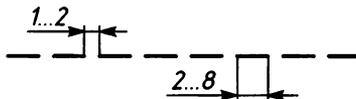
сплошная толстая основная линия, толщина  $s = 0,5, \dots, 1,4$  мм;



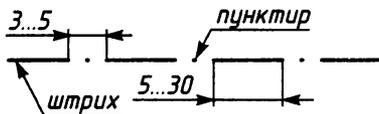
сплошная тонкая линия, толщина  $(1/2 \dots 1/3) s$ ;



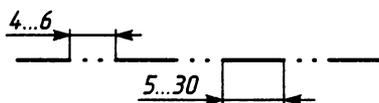
сплошная волнистая линия;



штриховая линия;



штрихпунктирная тонкая линия;



штрихпунктирная тонкая линия с двумя пунктирами.

Сплошная толстая основная линия выполняется толщиной от 0,5 до 1,4 мм в зависимости от величины, сложности изображений, формата чертежа и средства изображения.

Другие указанные типы линий называются тонкими и выполняются в два-три раза тоньше основной линии. Толщина тонких линий, выполненных карандашом, должна быть не менее 0,3 мм, а расстояние между линиями должно быть не менее 0,8 мм. Следовательно, толщина основной линии, вычерченной карандашом, должна быть не менее 0,6 мм.

Толщина линий одного и того же типа должна быть одинаковой для всех изображений на данном чертеже, вычерчиваемых в одинаковом масштабе. Контрастность линий должна быть равной.

Каждый тип линии имеет свою область применения, свое назначение. На рис. 2.1 показан пример использования разных линий в изображениях детали, образованной двумя цилиндрами и призмой, и тетраэдра (трехгранной пирамиды) *ОABC*.

Линия сплошная толстая (основная) предназначена для изображения на чертеже видимых линий контура детали, видимых линий пересечения поверхностей, линий пересечения секущих плоскостей с поверхностями изделий при образовании разрезов и сечений, а также для изображения определенных линий таблиц, основных надписей, внутренней рамки чертежа, структурных элементов схем.

Линия сплошная тонкая предназначена: для выполнения на чертеже вспомогательных построений; для нанесения выносных и размерных линий на изображениях; для графического обозначения материала изделия (штриховки) в разрезах и сечениях; для вычерчивания выносных линий и полоч позиций, над которыми делаются поясняющие надписи и обозначения; для подчеркивания надписей; для указания воображаемых линий плавного перехода поверхностей и для других вспомогательных построений.

Линия сплошная волнистая тонкая вычерчивается от руки и применяется для ограничения (обрыва) изображений, разграничения вида и разреза.

Для изображения невидимых элементов (линий) применяется штриховая линия. Например, изображение пирамиды *ОABC* на рис. 2.1 будет непонятным, если не показывать невидимые ребра.

Штрихпунктирная тонкая линия предназначена для изображения осей (симметрии, вращения), центровых линий и следов секущих плоскостей при выполнении разрезов и сечений.

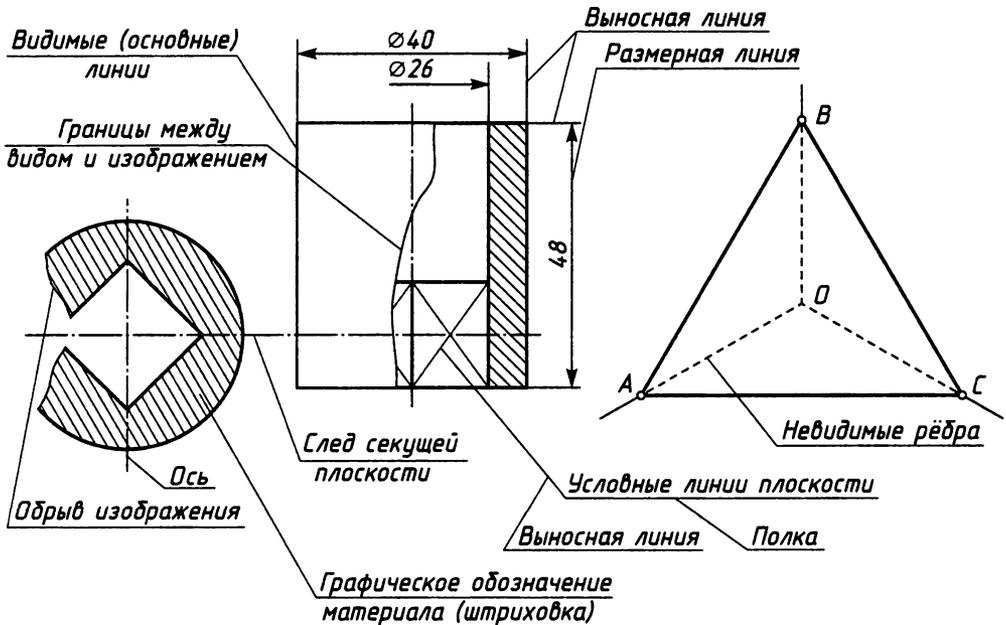


Рис. 2.1. Пример использования линий в изображениях

Линия штрихпунктирная тонкая с двумя пунктирами используется для изображения линий сгиба на развертках, изделий в промежуточных положениях, развертки, совмещенной с видом.

## 2.2. Масштабы и форматы

Величина изображений объекта определяется масштабом и выбирается в зависимости от его сложности, цели изображений и размера листа бумаги (или другого материала) для их размещения.

*Масштабом* называют величину отношения длины  $\bar{l}$  изображения отрезка (длины на чертеже) к его действительной длине  $l$ .

Масштаб обозначают буквой «М» и записывают отношением  $\bar{l} : l$ .

ГОСТ 2.302-68 Масштабы для изображения на чертежах устанавливает:

- масштабы уменьшения: 1:2; 1:2,5; 1:4; 1:5; 1:10 и др.;
- натуральная величина: 1:1;
- масштабы увеличения: 2:1; 2,5:1; 4:1; 5:1; 10:1 и др.

Если масштаб указывается в отведенном для него месте, то он записывается отношением, например, 1:2 и т. д., а в других случаях его указывают над изображением по типу: М 1:1; М 1:2; М 2:1 и т. д., или в скобках рядом с другим обозначением, например А–А (2:1).

На иллюстрациях, рисунках масштабы не пишут, и они могут отличаться от масштабов, установленных стандартом для чертежа.

Изображения, выполненные от руки, называют эскизом. Эскиз выполняют в глазном масштабе, который не указывают. Здесь важно выдержать соотношение (пропорции) размеров отдельных геометрических элементов и их взаимного расположения.

Лист бумаги или другого материала, на котором выполняют чертеж и необходимые надписи, называют *форматом*. В конструкторской и учебной практике наиболее часто для чертежа используется специальная бумага — так называемый ватман — с размерами сторон формата по ГОСТ 2.301-68  $b \times a = 594 \times 841$  мм (рис. 2.2), который обозначается *A1*. Купленный вами лист может иметь несколько завышенные размеры сторон. Перед использованием его следует обрезать.

Более мелкие форматы образуются последовательным делением на два длинной стороны предыдущего формата. На рис. 2.2 показана последовательность образования форматов, их условное обозначение и оформление. Размеры сторон форматов: *A2* —  $420 \times 594$  мм; *A3* —  $297 \times 420$  мм; *A4* —  $210 \times 297$  мм.

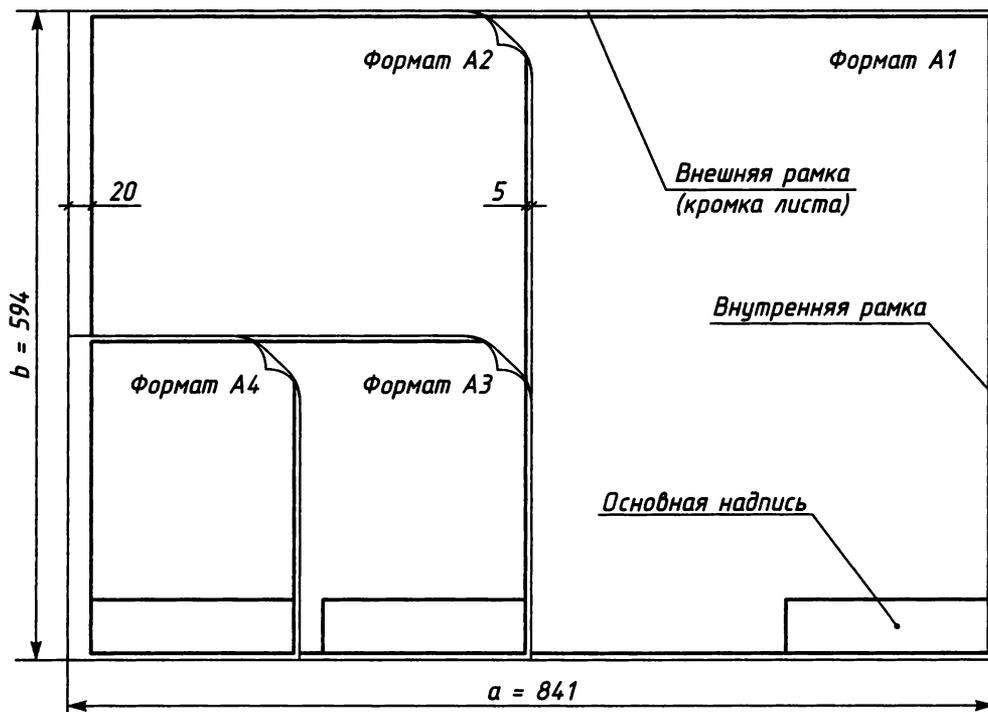


Рис. 2.2. Форматы чертежа

Если формат отдельный, то его кромка называется внешней рамкой. Если формат выделяется на листе большего размера, то внешняя рамка вычерчивается тонкой сплошной линией по размерам сторон формата.

Все форматы можно располагать к себе длинной и короткой стороной, кроме формата А4, который располагается только короткой стороной. На форматах толстой сплошной линией вычерчивается внутренняя рамка. С левой стороны она отступает от внешней рамки на 20 мм (поле подшивки чертежей), а с трех других сторон — на 5 мм. В правом нижнем углу формата размещается основная надпись, форму и содержание которой устанавливает ГОСТ 2.104-68.

Для чертежей и схем установлена форма 1. В учебных работах мы не будем использовать дополнительные графы, а содержание основных граф сделаем соответствующими стандарту и потребностям учебного процесса. Такой упрощенный вариант формы основной надписи показан на рис. 2.3 для формата А4, а пример ее заполнения приведен на рис. 2.4.

Основные надписи и рамки выполняют сплошными основными и сплошными тонкими линиями, как показано на рис. 2.3 и 2.4. Графы заполняют чертежным шрифтом по ГОСТ 2.304-81.

Рекомендуемый размер шрифта указан ниже в пояснениях к заполнению граф, а сведения о шрифте изложены в разделе 2.3. Графы на рис. 2.3 отмечены номерами в круглых скобках.

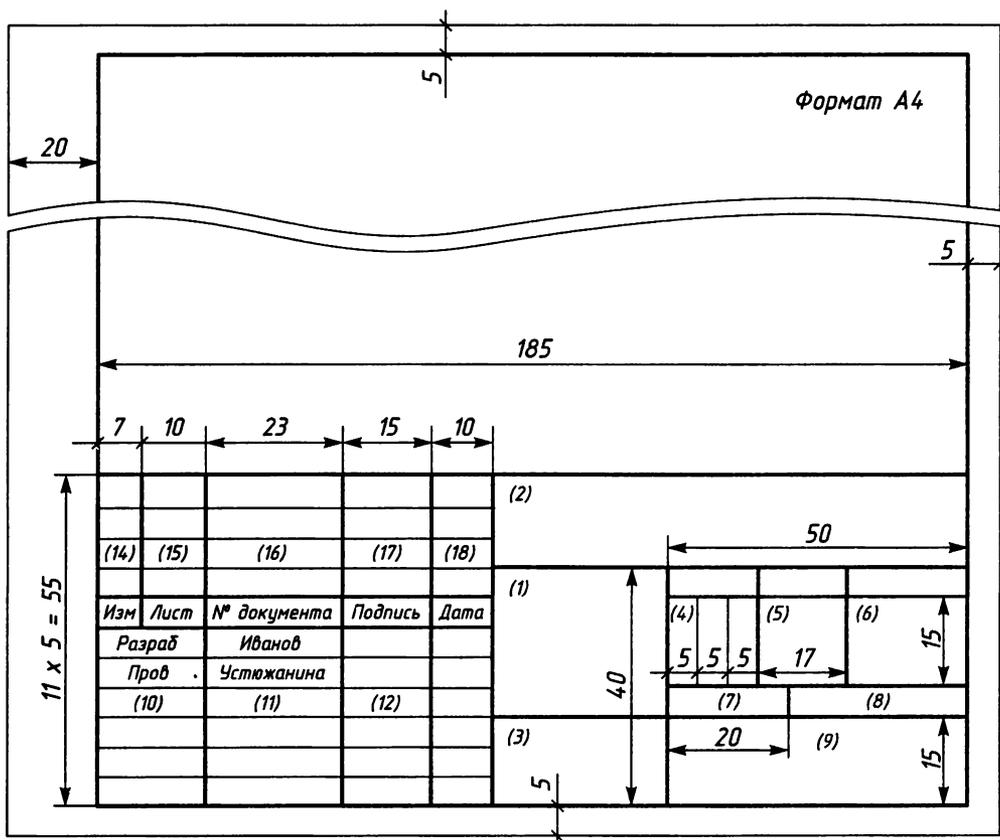


Рис. 2.3. Форма 1 основной надписи для чертежей и схем по ГОСТ 2.104-68

В графах основной надписи указывают:

- ❑ в графе 1 — наименование изделия (шрифт размера 5, 7, 10 (см. рис. 2.3 и 2.4);
- ❑ в графе 2 — обозначение документа (шрифт размера 7), разъяснение обозначения дано ниже;
- ❑ в графе 3 — обозначение материала детали (графу заполняют только на чертежах деталей);
- ❑ в графе 4 — литеру, присвоенную данному документу, например У — учебная работа (графу заполняют последовательно, начиная с крайней левой клетки, шрифт размера 5);
- ❑ в графе 5 — массу изделия по ГОСТ 2.109-73;
- ❑ в графе 6 — масштаб (ГОСТ 2.302-68, ГОСТ 2.109-73), шрифт размера 7;
- ❑ в графе 7 — порядковый номер листа (шрифт размера 3,5; на документах, состоящих из одного листа, графу не заполняют);
- ❑ в графе 8 — общее количество листов документа (шрифт размера 3,5; графу заполняют только на первом листе);
- ❑ в графе 9 — наименование или различительный индекс предприятия, выпускающего документ (шрифт размера 5, 7);
- ❑ в графе 10 — характер работы, выполняемой лицом, подписывающим документ (шрифт размера 3,5);
- ❑ в графе 11 — фамилии лиц, подписавших документ (шрифт размера 3,5);

Формат А3 и больше

						0761. 010034. 000		

- в графе 12 — подписи лиц, фамилии которых указаны в графе 11;
- в графе 13 — дату подписания документа (шрифт размера 2,5).

Другие графы в учебных работах не заполняются.

Рамки и основные надписи выполняют только на работах, которым придается статус чертежа. Другие учебные задачи и работы могут выполняться на любой бумаге в соответствии с требованиями, установленными учебным процессом.

Обозначение изделий и конструкторских документов, которое должно указываться в графе 2 основной надписи, устанавливается в соответствии с ГОСТ 2.201-80 и имеет следующую структуру:



Четырехзначный буквенный код организации-разработчика назначается по кодификатору организаций-разработчиков. Мы записываем здесь код кафедры внутри вуза — 076 — и код дисциплины, установленный кафедрой: 1 — начертательная геометрия; 2 — инженерная графика (черчение). Тогда общий код: 0761 или 0762. После каждой группы кода ставится точка и делается интервал шириной не менее одного знака (одной буквы).

Код классификационной характеристики присваивают изделию и конструкторскому документу по классификатору ЕСКД. Структура учебного кода содержит:

- XX — порядковый номер задания (от 01 до 99);
- X — номер сборочной единицы в составе сборочной единицы;
- XXX — вариант задания (от 001 до 999).

Например, первая работа по начертательной геометрии варианта 25 будет иметь код 010025.

Порядковый регистрационный номер присваивает организация — разработчик документа. В учебных работах рекомендуется записывать порядковый номер изделия, указанный в графе «Позиция» спецификации, или записывать три нуля.

Таким образом, полное обозначение работ по начертательной геометрии может иметь вид 0761.010025.000.

К этому обозначению может добавляться код документа по ГОСТ 2.102-68:

- СБ — сборочный чертеж;
- ВД — чертеж общего вида;
- ТЧ — теоретический чертеж;
- ЛЗ — пояснительная записка, и др.

Например, работа, определяющая геометрическую форму (обводы) изделия и координаты расположения составных частей, относится к теоретическому чертежу и может иметь обозначение 0761.010025 000 ТЧ.

## 2.3. Шрифты чертежные и принятые обозначения

Надписи на чертежах и текстовые документы могут выполняться (ГОСТ 2.105-79):

- машинописным способом;
- типографским способом;
- с применением печатающих и графических устройств вывода ЭВМ;
- рукописным способом основным чертежным шрифтом по ГОСТ 2.304-81 с высотой букв и цифр не менее 2,5 мм.

Форма и размеры элементов шрифта определяются техническими средствами. Для рукописи стандарт устанавливает шрифты типа «А» и типа «Б». Мы будем использовать на чертежах шрифт типа «Б».

Установленные размеры шрифта даны в табл. 2.1.

**Таблица 2.1.** Основные параметры шрифта типа «Б»

Параметр	Обозначение	Размеры, мм							
Размер шрифта	$h$	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	20,0	
Высота строчных букв	$c$	1,8	2,5	3,5	5,0	7,0	10,0	14,0	
Расстояние между буквами	$a$	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	2,8	4,0	
Минимальный шаг	$b$	4,3	6,0	8,5	12,0	17,0	24,0	34,0	
Минимальное расстояние между словами	$e$	1,5	2,1	3,0	4,2	6,0	8,4	12,0	
Толщина линий шрифта	$d$	0,25	0,35	0,5	0,7	1,0	1,4	2,0	

Основные параметры шрифта показаны на рис. 2.5, а их численные значения устанавливаются в долях размера шрифта следующим образом:

- $h$  — размер шрифта равен высоте прописных букв в мм (высота строки);
- $c$  — высота строчных букв,  $c = 7/10 h$ ;
- $d$  — толщина линии шрифта,  $d = 1/10 h$ ;
- $a$  — расстояние между буквами,  $a = 2/10 h$ ;
- $e$  — минимальное расстояние между словами,  $e = 6/10 h$ ;
- $b$  — минимальный шаг строк (расстояние между основаниями строк),  $b = 17/10 h$ ;
- $f$  — превышение буквы «О»,  $f = 1/2 d$ .

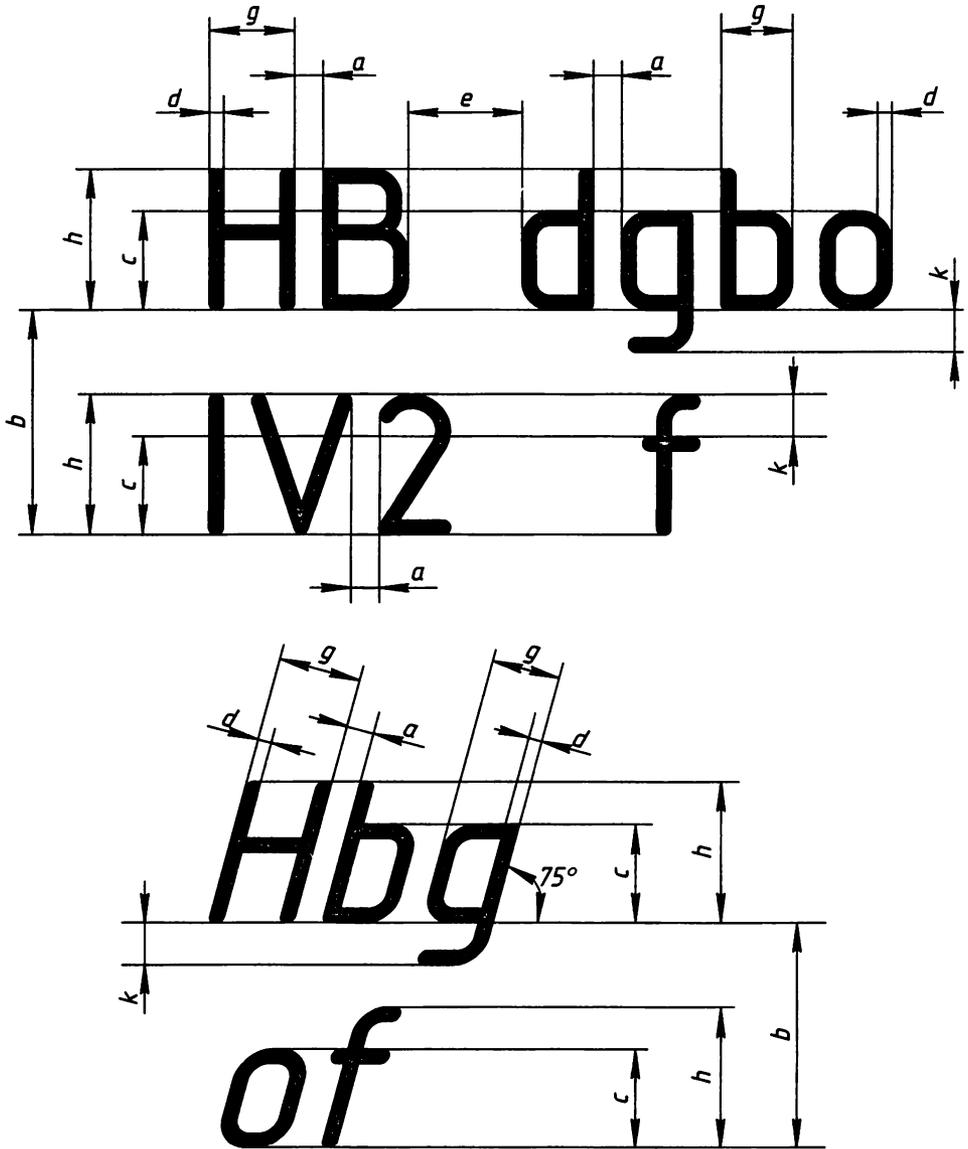


Рис. 2.5. Основные параметры шрифта

Ширина букв и цифр в долях от размера шрифта  $h$  дана в табл. 2.2.

Таблица 2.2. Ширина букв и цифр шрифта типа «Б»

Буквы и цифры	Относительный размер, $h$
<b>Прописные буквы:</b>	
<i>Б, В, И, Й, К, Л, Н, О, П, Р, Т, У, Ц, Ч, Ъ, Э, Я, Ъ;</i>	6/10
<i>А, Д, М, Х, Ы, Ю;</i>	7/10
<i>Ж, Ф, Ш, Щ;</i>	8/10
<i>Е, Г, З, С</i>	5/10
<b>Строчные буквы:</b>	
<i>а, б, в, г, д, е, и, ю, к, л, н, о, п, р, у, х, ч, ц, ъ, э, я;</i>	5/10
<i>м, ь, ы, ю;</i>	6/10
<i>ж, т, ф, ш, щ;</i>	7/10
<i>с, з;</i>	4/10
<b>Цифры:</b>	
<i>2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 0;</i>	5/10
<i>4;</i>	6/10
<i>1</i>	4/10

Шрифт типа «Б» применяется с наклоном примерно  $75^\circ$  и без наклона.

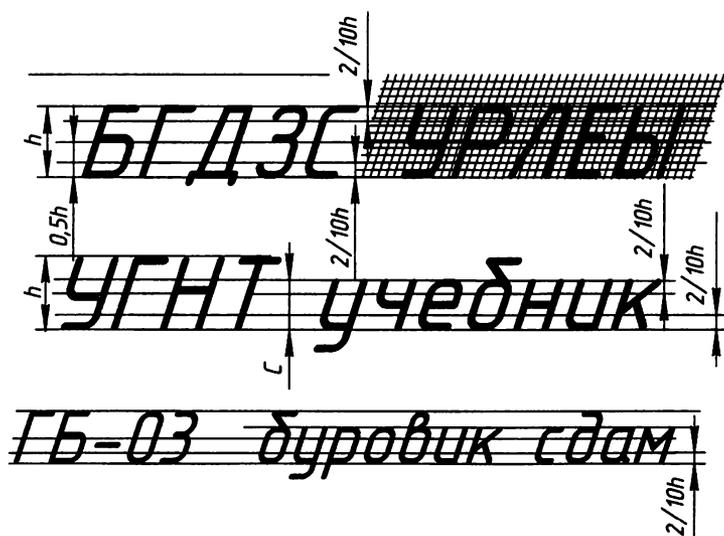


Рис. 2.6. Начертание элементов букв

Типичные особенности начертания некоторых элементов букв можно проследить по рис. 2.6.

На одном чертеже рекомендуется применять шрифт одного типа. Размер шрифта выбирается в зависимости от размера формата, размера изображений и назначения чертежа. Для учебных работ рекомендуются шрифты размера 2,5; 3,5; 5; 7. Для выработки навыка рекомендуется делать разметку строки, размещение букв, обводку шрифта, как показано на рис. 2.7 (линии делать бледными и потом не стирать). Удобно для этой цели использовать трафарет.

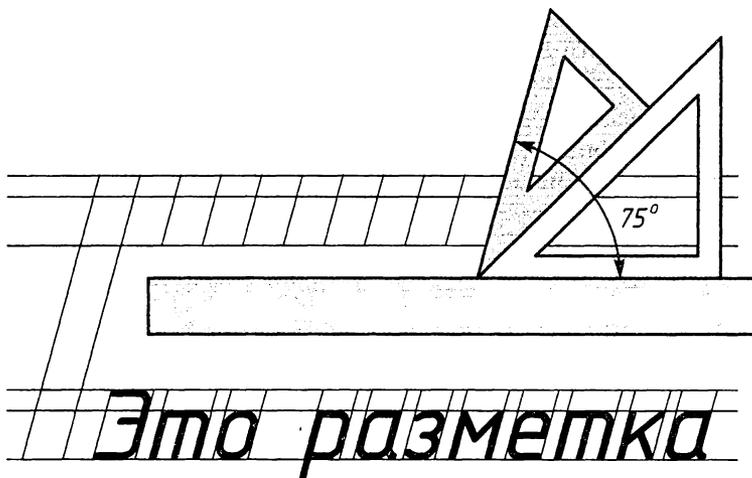


Рис. 2.7. Разметка шрифта

Шрифт типа Б с наклоном

Прописные буквы

АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОП

РСТУФЧЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ

Строчные буквы

абвгдежзийклмноп

рстуфхцчшщъыьэюя

ШРИФТ Шрифт типа А и Б

Шрифт типа Б без наклона

АБВГДЕЖЗИЙКЛМНОП

РСТУФЧЦЧШЩЪЫЬЭЮЯ

абвгдежзийклмноп

рстуфхцчшщъыьэюя

Рис. 2.8. Русский алфавит (Кириллица)

На рис. 2.8 показана конструкция шрифта русского алфавита. Сравните начертание наклонных и прямых букв прописного шрифта. Обратите внимание на конструкцию строчных букв шрифта.

На рис. 2.6 и 2.7 показан пример написания слов только прописными буквами, а также пример написания фразы, в которой используется прописной и строчной шрифты. Сравните их размеры по высоте.

На рис. 2.9–2.12 показана конструкция шрифтов латинского и греческого алфавитов, арабских и римских цифр.

Заметим, что цифры не бывают строчными, они всегда имеют высоту прописного шрифта.

*ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ*  
*abcdefghijklmnopqrstuvwxyz*

Рис. 2.9. Латинский алфавит

*ΑΒΧΔΕΓΗΙΘΚΛΜΝΟΠΘΡΣΤΥςΩΞΨΖ*  
*αβχδεφγηιφκλμνοπθρστυωξψζ*

Рис. 2.10. Греческий алфавит

*1234567890*

Рис. 2.11. Арабские цифры

*I II III IV V VI VII VIII IX X*

Рис. 2.12. Римские цифры

Римские цифры допускается ограничивать горизонтальными линиями.

На рис. 2.13 показано, как писать индексы и дроби.

*A<sub>12</sub> B<sub>3</sub> C<sub>4</sub> 3/4 1 1/2 3/4*

Рис. 2.13. Написание индексов и дробей

Цифровые и буквенные индексы при обозначениях рекомендуется писать шрифтом размера на один ранг ниже размера шрифта основного обозначения. Верхние и нижние индексы должны быть написаны так, чтобы соответствующая линия строки основного обозначения делила их пополам.

Дроби пишут шрифтом на ранг ниже размера целого числа или таким же шрифтом, что и целое число, например, как написано  $\frac{3}{4}$  (см. рис. 2.13).

## Вопросы и задания

Ответьте на вопросы, а если вы затрудняетесь, найдите ответ в главах 1 и 2.

1. Что изучает начертательная геометрия?
2. Какой документ называют чертежом и какие требования к нему предъявляются?
3. Назовите типы линий, используемых для оформления изображений, и их назначение.
4. Начертите отрезок длиной 100 мм разными типами линий, соблюдая их толщину и конструкцию, если толщина основной линии равна 1 мм (это примерно половина диаметра стержня обычного карандаша).
5. Что называют масштабом и как он указывается на чертеже?
6. Каким отрезком будет изображена линейка длиной 500 мм на чертеже в масштабе: 1:1; 2,5:1; 1:4; 1:2?
7. Что называют форматом, его внешней и внутренней рамкой?
8. Как оформляется внутренняя рамка чертежа (тип линии, размеры, где располагается основная надпись)?
9. Как обозначаются и какие имеют размеры более мелкие форматы, изготовленные из формата А1, имеющего размеры сторон  $841 \times 594$  мм?
10. Какие типы шрифта устанавливаются стандартом и что называют размером шрифта?
11. Напишите шрифтом типа «Б» строчным размером 7 на своих тетрадах для лекционных и практических занятий:
  - наименование предмета;
  - свою фамилию, имя, отчество;
  - шифр группы;
  - фамилию, имя, отчество преподавателя;
  - учебный год.

Рекомендация: начертите строки нужного размера и положите перед собой книгу с изображенным шрифтом.

# Глава 3

## Метод проекций

Для построения изображений на плоскости широко используют следующие способы проецирования:

1. Центральное проецирование.
2. Параллельное (косоугольное) проецирование.
3. Ортогональное проецирование.

В этой главе мы рассмотрим содержание этих способов и покажем, в чем их единство и различие.

### 3.1. Центральное проецирование

Выберем некоторую плоскость  $\Pi'$ , которую будем называть *плоскостью проекций*, или *картинной плоскостью*, линию  $l$  — геометрический объект (оригинал, прообраз) и точку  $S$  — *центр проецирования*, или *точка зрения* (рис. 3.1).

Плоскость проекций не имеет границ, а на рисунке ее выделяют плоской фигурой для наглядности.

Плоскость  $\Pi'$  и точку зрения  $S$ , при заданном ее расположении относительно  $\Pi'$ , называют *аппаратом проецирования*.

Для получения изображения (образа)  $l'$  оригинала (прообраза)  $l$  на плоскости  $\Pi'$  выберем на линии точку  $A$ .

Представим себе, что мы разглядываем точку  $A$  (одним глазом), и проведем через нее и точку зрения проецирующую прямую ( $SA$ ) до пересечения с плоскостью  $\Pi'$ . Это запишем так:

$$A' = (SA) \cap \Pi',$$

то есть изображение  $A'$  точки  $A$  на плоскости  $\Pi'$  получается как результат пересечения прямой ( $SA$ ) с плоскостью проекций  $\Pi'$ . Точку  $A'$  называют проекцией (*моделью, образом*) точки  $A$  (*прообраза*) на плоскости  $\Pi'$ .

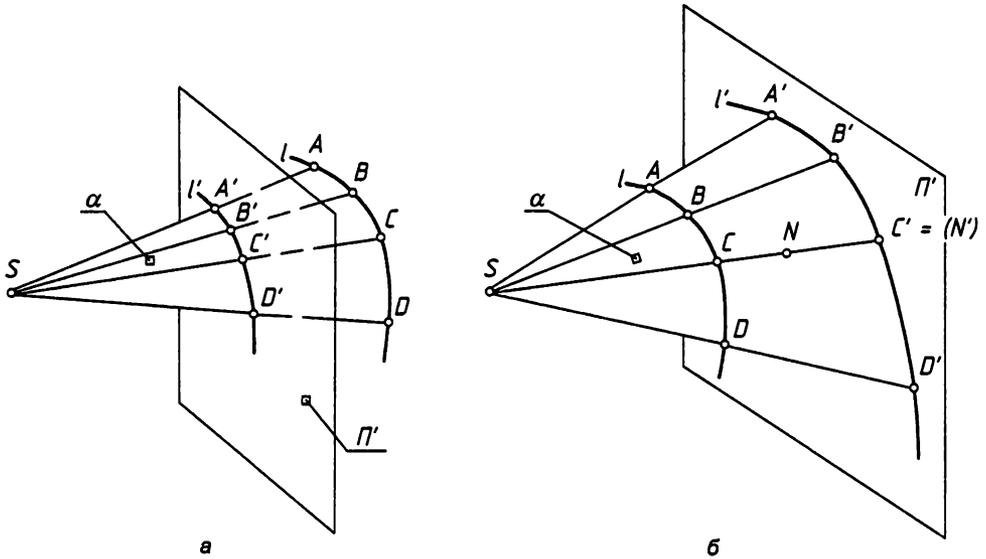


Рис. 3.1. Образование центральной проекции

Заметим, что оригинал (прообраз) может находиться как за плоскостью проекций (рис. 3.1, а), так и перед ней (рис. 3.1, б). От этого принцип образования изображения не зависит.

Процесс образования изображения объекта называют *проецированием*, или *отображением, пространства на плоскость*; прямые, связывающие точки оригинала с их изображением, называют *проецирующими прямыми*, а полученное изображение называют *проекцией*, или моделью, или картиной, или образом этого объекта. Чтобы подчеркнуть способ организации изображения, перед словом «проекция» ставят название способа проецирования, например  $A'$  — центральная проекция точки  $A$ , а  $(SA)$  — проецирующая прямая.

Для построения изображения линии  $l$  на ней выбирается ряд точек  $(ABCD\dots)$ , которые проецируются на плоскость  $P'$ . Проекции точек  $(A'B'C'D'\dots)$  соединяются плавной кривой, и получается центральная проекция  $l'$  (образ) линии  $l$  (прообраза) на плоскость  $P'$  или модель линии  $l$  на плоскости  $P'$ .

Чтобы отличать обозначение оригинала (линии  $l$ ) от обозначения его изображения (линии  $l'$ ), будем в дальнейшем все изображения обозначать тем же знаком, что и оригинал, но с добавлением индекса, который имеет плоскость проекций (в нашем примере — апостроф):  $l$  — оригинал,  $l'$  — его изображение.

Очевидно, чем большее число точек линии мы спроецируем на картинную плоскость, тем точнее построим изображение. Отсюда можно сделать вывод: *для правильного и быстрого построения изображения необходимо знать геометрические свойства оригинала и их изменения в процессе проецирования.*

Представим себе, что проецирующая прямая  $(SA)$  (см. рис. 3.1) последовательно обегает все точки заданной линии  $l$ . Тогда множество этих прямых описывает поверхность  $\alpha$ , которая называется конической ( $S$  — вершина конуса,  $(SA)$  — об-

разующая прямая,  $l$  — направляющая линия). Тогда изображение  $l'$  линии  $l$  можно представить как линию пересечения конической проецирующей поверхности  $\alpha$  с плоскостью проекций  $\mathcal{P}'$ , то есть

$$l' = \alpha \cap \mathcal{P}'.$$

Поэтому центральные проекции называют перспективой, а проецирование иногда называют коническим.

Мы рассмотрели принцип построения модели точечного пространства (пространственной фигуры) на плоскость методом центрального проецирования. Из анализа примера можно выделить важные свойства этого метода проецирования.

**Свойство 1.** *Каждой точке оригинала соответствует единственная точка в его проекции, то есть проекцией точки является точка.*

**Свойство 2.** *Проекцией кривой линии в общем случае является кривая линия.*

**Свойство 3.** *Если точка принадлежит линии, то ее проекция принадлежит соответствующей проекции линии (свойство инцидентности — взаимной принадлежности).*

**Следствие из третьего свойства:** *если линии пересекаются, то их изображения пересекаются в проекции точки пересечения оригиналов.*

Если линия  $(CN)$  — прямая, проходящая через центр  $S$  проекций, то она проецируется точкой и называется *проецирующей*. На рис. 3.1 обозначены проекции  $C' = N'$  концов отрезка  $[CN]$ .

Точки проецирующей прямой называют *конкурирующими* по отношению к наблюдателю. Если зафиксировать концы отрезка  $[CN]$ , то наблюдатель видит точку  $C$ , так как она расположена к нему ближе и закрывает собой остальные точки этой прямой. Это обстоятельство используют для определения относительной видимости геометрических элементов на изображении. Невидимая точка  $N'$  взята в круглые скобки. Таким приемом мы будем пользоваться и дальше.

**Свойство 4.** *Проекция проецирующей прямой вырождается в точку, а фиксированные на прямой точки являются конкурирующими.*

При проецировании фигуры, ограниченной поверхностью  $\beta$  (рис. 3.2), каждой точке  $A$  поверхности будет соответствовать одна (например, точка  $B$ ) или несколько конкурирующих точек, кроме точек касания проецирующих прямых с поверхностью фигуры. Совокупность проецирующих прямых, которые касаются поверхности, образует коническую проецирующую поверхность  $\alpha$ , линия пересечения которой с плоскостью проекций ограничивает область возможных проекций точек заданной фигуры.

Линия касания поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$  называется *контуром поверхности  $\beta$* . Проекция контура поверхности называется ее *очерком (очертанием)*.

Контур поверхности, следовательно, и очерк, является границей видимости (невидимая часть поверхности  $\beta$  условно затемнена, как будто в тени).

Если на поверхности выделена линия  $l$ , то строится ее проекция  $l'$ . При этом в проекции видимая часть линии (до точки  $C \rightarrow C'$ ) изображается сплошной толстой линией, а невидимая (участок  $CD \rightarrow C'D'$ ) часть изображается штриховой линией

или не изображается вовсе. Точка  $C$  лежит на пересечении линии  $l$  с контуром поверхности, а точка  $C'$  является точкой касания проекции  $l'$  с очерком поверхности. Последнее замечание очень важно для правильного построения и понимания изображений изделия.

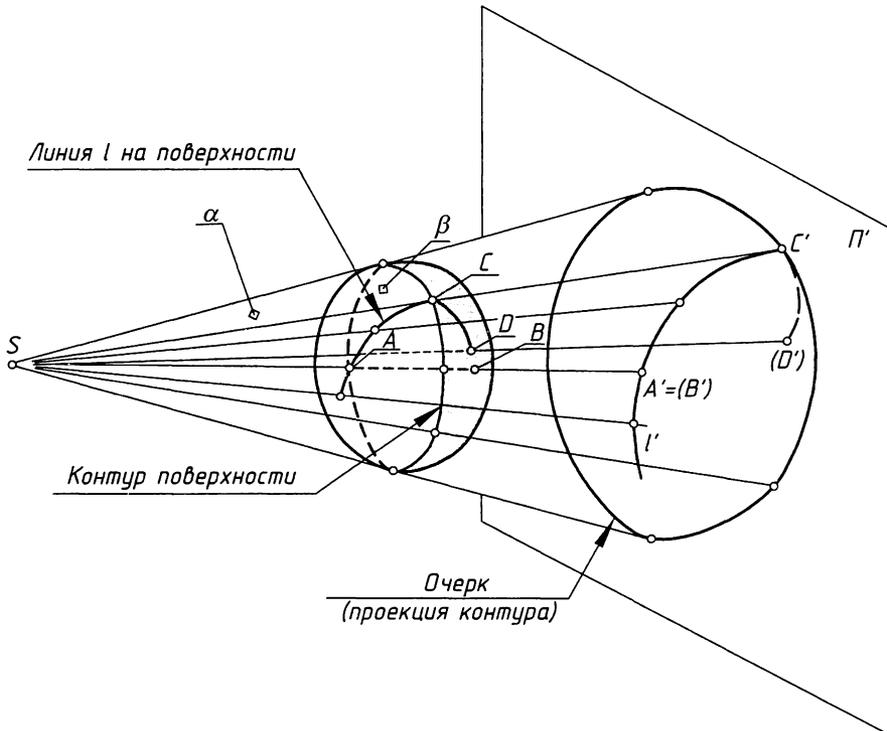


Рис. 3.2. Образование изображения фигуры

Если линия  $l$  (см. рис. 3.1) прямая, то она вместе с центром  $S$  проекций образует проектирующую плоскость  $\alpha(S, l)$ , где  $(S, l)$  — определитель плоскости. Тогда будем иметь изображение (рис. 3.3) прямой  $l' = \alpha \cap \Pi'$ , то есть проекция  $l'$  прямой  $l$  определяется пересечением проектирующей плоскости  $\alpha$  с плоскостью проекций  $\Pi'$  и, следовательно, будет прямой.

**Свойство 5.** *Проекцией прямой линии в общем случае является прямая линия.*

Исследуем отдельные свойства проектирования прямой линии.

Точка  $A$  пересечения прямой  $l$  с плоскостью проекций  $\Pi'$  называется *следом прямой*. След прямой совпадает со своей проекцией.

Проецирующая прямая ( $SB$ ) образует с линией  $l$  угол  $\varphi$ . Чем дальше по прямой точка  $B$  будет удаляться от плоскости  $\Pi'$ , тем меньше будет угол  $\varphi$ . В пределе угол  $\varphi$  будет стремиться к нулю. Если на прямой  $l$  взять бесконечно удаленную точку  $L_\infty$ , то проектирующая прямая ( $SL_\infty$ ) станет параллельной (в понятии геометрии Евклида) прямой  $l$  и пересечет плоскость  $\Pi'$  в точке  $L'_\infty$ . Следовательно,  $L'_\infty$  — центральная проекция бесконечно удаленной точки  $L_\infty$  прямой  $l$ , а отсюда следует, что  $L_\infty = l \cap SL'_\infty$ , то

есть параллельные прямые  $l$  и  $(SL'_\infty)$  пересекаются в бесконечно удаленной точке  $L_\infty$ . Точка  $L_\infty$  называется несобственной точкой. Аналогично, если удалять точку  $K$  по прямой  $l$ , то опять придем к проекции  $L'_\infty$  несобственной точки. Это противоречит аксиоме Евклида, которая утверждает, что параллельные линии не пересекаются.

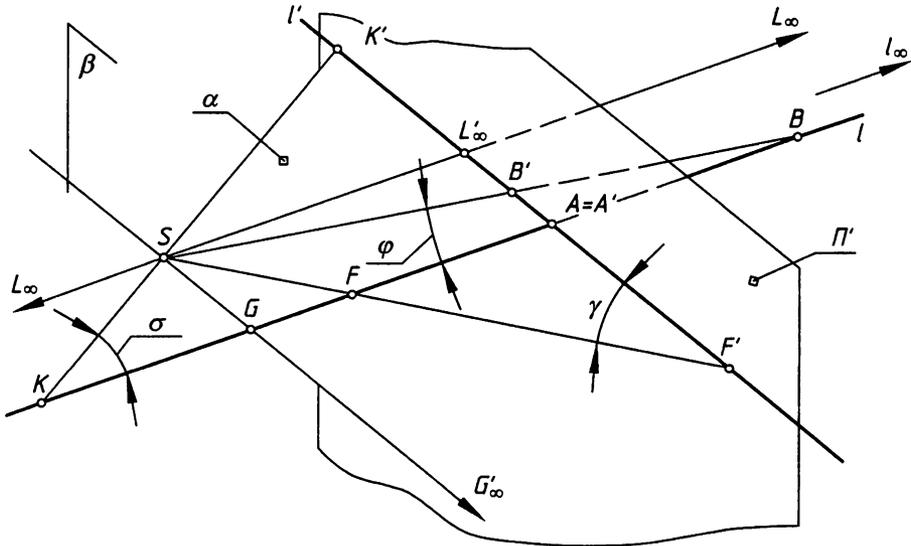


Рис. 3.3. Центральная проекция прямой линии

Чтобы устранить эти противоречия, евклидово пространство дополняют несобственными (бесконечно удаленными) точками и называют его *расширенным евклидовым пространством*. В этом пространстве несобственная точка  $L_\infty$  прямой линии  $l$  проецируется в действительную точку  $L'_\infty$ , а проекция прямой линии  $l$  может иметь бесконечно удаленные точки.

Рассмотрим прямую линию  $(SF)$ . При приближении точки  $F$  к точке  $G$  угол  $\gamma$  будет уменьшаться и в пределе проекция  $G'_\infty = l' \cap (SG)$ , а это значит, что параллельные прямые  $l'$  и  $(SG)$  пересекутся в несобственной точке  $G'_\infty$ . То есть проекция собственной точки  $G$  будет несобственной. Аналогичная картина получается при приближении к точке  $G$  со стороны точки  $K$ , но в этом случае проекция  $G'_\infty$  будет находиться на другом конце проекции  $l'$  линии  $l$ . Следовательно, можно сказать, что проекция  $l'$  начинается с проекции  $L'_\infty$  несобственной точки прямой и заканчивается в несобственной проекции  $G'_\infty$  собственной точки  $G$ . Проекция точки  $S$  неопределенна. Проекциями всех точек плоскости  $\beta$ , проходящей через точку  $S$  и параллельной плоскости  $\Pi'$ , будут несобственные точки, а сами плоскости  $\beta$  и  $\Pi'$  пересекутся по несобственной прямой  $q_\infty = \beta \cap \Pi'$ . Точку  $S$  и плоскость  $\beta$  называют исключенными.

*Евклидово пространство, дополненное несобственными точками, прямыми и плоскостью, приобретает следующие отношения принадлежности:*

1. Две прямые одной плоскости всегда пересекаются.
2. Прямая линия и плоскость всегда пересекаются.
3. Две плоскости всегда пересекаются.

С новыми отношениями возникли новые задачи. Элементы теории изображений разрабатывались веками, а по мере накопления опыта рождалось новое научное направление. В эпоху Возрождения это направление называлось «Учение о перспективе».

Возникновение начертательной геометрии как науки относят к 1799 г., когда был опубликован труд «Начертательная геометрия» французского ученого, великого математика, инженера, общественного деятеля Гаспара Монжа (1746–1818). Он обобщил опыт построения изображения предметов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и установил закономерности взаимного расположения проекций — проекционной связи.

Возникновение начертательной геометрии стало как бы естественным толчком к возникновению геометрии проективной. Моделирование пространственных объектов на плоскость нуждалось в изучении геометрических свойств и фактов, связанных с измерением отрезков, углов и т. д., а поэтому евклидову геометрию называют метрической. Расширенное евклидово пространство привлекло внимание математиков новыми задачами, выходящими за рамки измерений. Пространство, в котором собственные и несобственные точки равноправны, назвали проективным, а расширенное евклидово пространство называют его моделью. Открытые математиками проективные соотношения назвали проективной геометрией.

Проективная геометрия изучает геометрические факты и соотношения проективного пространства (не метрического характера). Возникновение проективной геометрии как науки относят к 1822 г., когда вышел труд известного математика, француза по происхождению, Жана Виктора Понселе (1788–1867), написанный им в городе Саратове «Трактат о проективных свойствах фигур, труд полезный для лиц, занимающихся приложениями начертательной геометрии». Изучение проективной геометрии выходит за рамки наших учебных задач, а заинтересовавшимся читателям рекомендуем посмотреть работы [19], [32] и другие.

Центральные проекции обладают хорошей наглядностью, но сравнительно сложны в построении и при решении геометрических задач.

Заметим, что рассмотренные нами примеры центральных проекций демонстрируют принцип их образования, проективные соответствия, но не обеспечивают их взаимно однозначного соответствия с оригиналом. То есть по заданной проекции  $A'$  точки или  $l'$  линии мы не можем восстановить оригинал, обеспечить обратимость чертежа. Это значит, что для придания изображению свойства обратимости к использованному аппарату проецирования нужны дополнительные условия, позволяющие не только узнать точку по ее изображению, но и восстановить ее положение в пространстве.

## 3.2. Параллельное проецирование

Удалим центр проекций  $S_{\infty}$  в бесконечность в выбранном направлении  $s$ . Тогда проецирующие прямые линии (например,  $AA'$ ) будут параллельны этому направлению (рис. 3.4).

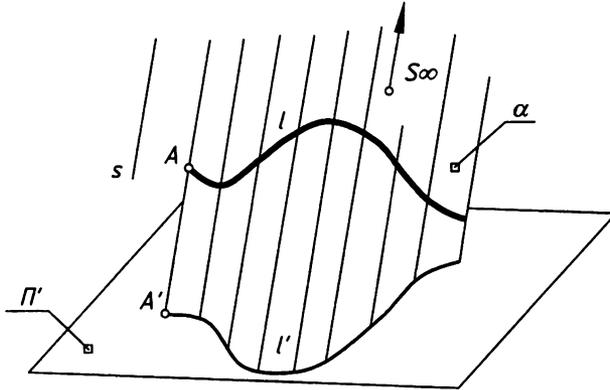


Рис. 3.4. Параллельное проецирование

В этом случае проецирующие прямые параллельны и при проецировании линии  $l$  образуют цилиндрическую проецирующую поверхность  $\alpha$ .  $l' = \alpha \cap \Pi'$  — параллельная проекция линии  $l$ . Очевидно, параллельная проекция несобственной точки этой кривой будет несобственной точкой.

Параллельные проекции обладают всеми свойствами центральных проекций, перечисленными в разделе 3.1.

*Свойства фигур, которые сохраняются при выполнении преобразований, называют инвариантами, или инвариантами данного вида преобразования (группы преобразований).*

Это значит, что вышеуказанные свойства центрального проецирования являются инвариантами и параллельного проецирования. Но у параллельного проецирования есть и свои отличительные свойства. Возьмем в пространстве параллельные отрезки  $[AB] \parallel [FK]$  и спроецируем их на  $\Pi'$  по направлению  $s$  (рис. 3.5). Проецирующие плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  параллельны, следовательно  $\alpha \cap \Pi' = (A'B') \parallel (F'K') = \beta \cap \Pi'$ .

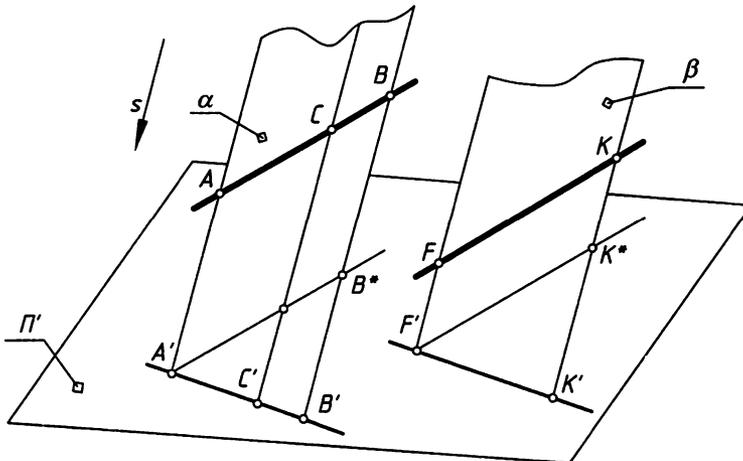


Рис. 3.5. Параллельные проекции прямых линий

**Свойство 6.** *Прямые, параллельные в пространстве, имеют параллельные проекции.*

Из точек  $A'$  и  $F'$  проведем прямые  $A'B^* \parallel AB$  и  $F'K^* \parallel FK$  и заметим, что  $\Delta A'B^*V^* \sim \Delta F'K^*K^*$  вследствие параллельности соответствующих сторон. Для них запишем:

$$\frac{F'K^*}{A'B^*} = \frac{FK}{AB} = \frac{F'K'}{A'B'},$$

аналогично

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'} = (ABC).$$

Последнее отношение называют простым отношением и записывают его в форме  $(ABC)$ .

**Свойство 7.** *Пропорциональность параллельных отрезков сохраняется в их проекциях.*

Запишем отношение так:

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{F'K'}{FK} = u.$$

Отношение проекции  $A'C'$  отрезка к самому отрезку  $AC$  называют *показателем искажения*.

**Свойство 8.** *В параллельном проектировании показатель искажения одинаковый для всех отрезков заданного направления.*

**Свойство 9.** *Отрезок прямой, параллельной плоскости проекций, проецируется в натуральную величину.*

Если  $[AB] \parallel \Pi'$  (рис. 3.6), то фигура  $A'ABB'$  — параллелограмм, значит,  $|AB| = |A'B'|$ . Если  $\Delta ABC \parallel \Pi'$ , то  $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$ , что является следствием свойства 9.

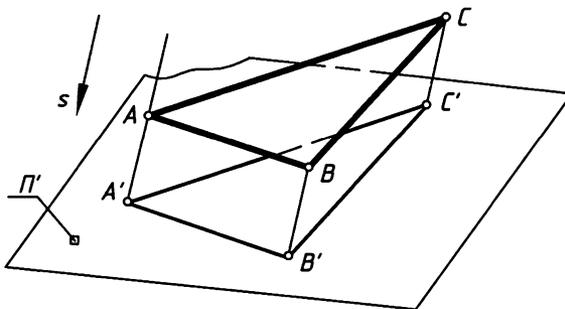


Рис. 3.6. Проекция плоской фигуры

**Следствие.** *Плоская фигура, параллельная плоскости проекций, проецируется в натуральную величину.*

Параллельное проектирование называется *косоугольным*, если направление проектирования образует острый угол с плоскостью проекций.

По сравнению с перспективой параллельные проекции проще в построении изображений, сохраняют достаточно хорошую наглядность, но решение геометрических задач в них все-таки затруднительно, и в представленном виде они так же не обеспечивают обратимости чертежа.

### 3.3. Ортогональное проецирование

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций ( $s \perp \Pi'$ ), то *проецирование называют ортогональным, или прямоугольным*. Ортогональные проекции сохраняют все выделенные ранее свойства параллельных проекций и имеют несколько дополнительных свойств.

На рис. 3.7 показана ортогональная проекция  $[A'B']$  отрезка  $[AB]$ . Построим прямую линию  $[A'B^*] \parallel [AB]$ . В пространстве треугольник  $A'B^*B'$  прямоугольный.  $|A'B^*| = |AB|$  — его гипотенуза.

$\Delta$  — катет, равный разности расстояний концов отрезка до плоскости проекций.

$\angle \alpha = [AB] \wedge [A'B'] = (AB) \wedge \Pi'$  — угол наклона прямой  $(AB)$  к плоскости проекций  $\Pi'$ .

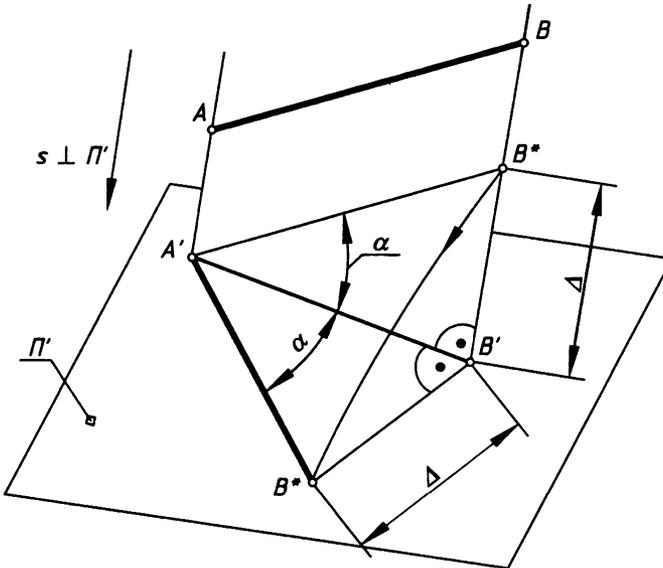


Рис. 3.7. Ортогональная проекция отрезка

$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = u = \cos \alpha, \quad |A'B'| = |AB| \cos \alpha.$$

Отсюда видно, что при величине  $\alpha = 0$  отрезок проецируется в натуральную величину, а при  $\alpha = 90^\circ$  он становится проецирующим.

**Следствие.** Ортогональная проекция отрезка не может быть больше своей натуральной величины.

Если  $\Delta A'B'V^*$  совместить с плоскостью  $\Pi'$  поворотом вокруг  $(A'B')$ , то мы определим  $|AB|$  и  $\angle\alpha$ .

Следовательно, для определения натуральной величины отрезка по его чертежу в заданном масштабе нужно на одном из концов проекции  $[A'B']$  отрезка построить перпендикуляр  $\Delta$  (катет) к нему, а гипотенуза  $A'B^*$  этого треугольника будет равна  $|AB|$ . Такой прием определения размера отрезка по чертежу называют способом прямоугольного треугольника.

Угол  $\alpha$ , образованный проекцией  $A'B'$  отрезка и отрезком  $A'B^*$ , выражающим натуральную величину отрезка  $AB$ , равен углу наклона прямой  $(AB)$  к плоскости проекций  $\Pi'$ . Это свойство используется и для определения площади плоской фигуры по ее проекции.

Ортогональные проекции более просты в построении и измерении. Для обеспечения обратимости изображений при их использовании так же нужны дополнительные условия. Более подробно свойства ортогональных проекций мы изучим в последующих главах.

## 3.4. Способы обеспечения обратимости изображений

Способ обеспечения обратимости определяет и способ построения изображений. Разработано несколько способов, каждый из которых обладает своими достоинствами и наиболее полно соответствует цели чертежа. Мы познакомимся с наиболее распространенными из известных способов, которые условно можно разделить на следующие направления:

1. Двойное проецирование.
2. Проекция с числовыми отметками.

### 3.4.1. Двойное проецирование

Представим себе пространство, в котором мы выбрали точку  $A$ , и хотим изобразить ее проекции на выбранной плоскости (на чертеже)  $\Pi'$ . Спроецируем точку  $A$  (рис. 3.8, а) на плоскость  $\Pi'$  с точек зрения  $S$  и  $S_p$ , получим изображения  $A'$  и  $A'_p$ , то есть два изображения или две картины одного объекта. Проецирующие прямые  $SA$   $S_pA$  задают плоскость, которая пересекается с плоскостью проекций  $\Pi'$  по прямой линии. Проекция  $A'$  и  $A'_p$  точки  $A$  лежат на этой линии, называемой линией связи. При этих условиях аппарат проецирования можно записать так:  $(S, S_p, \Pi')$ .

Аналогично, аппарат параллельного проецирования по направлениям  $s$  и  $s_p$  (рис. 3.8, б) позволяет получить проекции  $A'$  и  $A'_p$ , лежащие на одной линии связи. Для восстановления оригинала нужно провести обратную операцию: соединить изображения  $A'$  и  $A'_p$  прямыми линиями с центрами  $S$  и  $S_p$  проекций (по рис. 3.8, а) или провести через них прямые линии, параллельные направлениям  $s$  и  $s_p$  проецирования (по рис. 3.8, б). В пересечении получим единственную точку  $A$ , если проецирующие прямые лежат в одной плоскости, проходящей через линию связи.

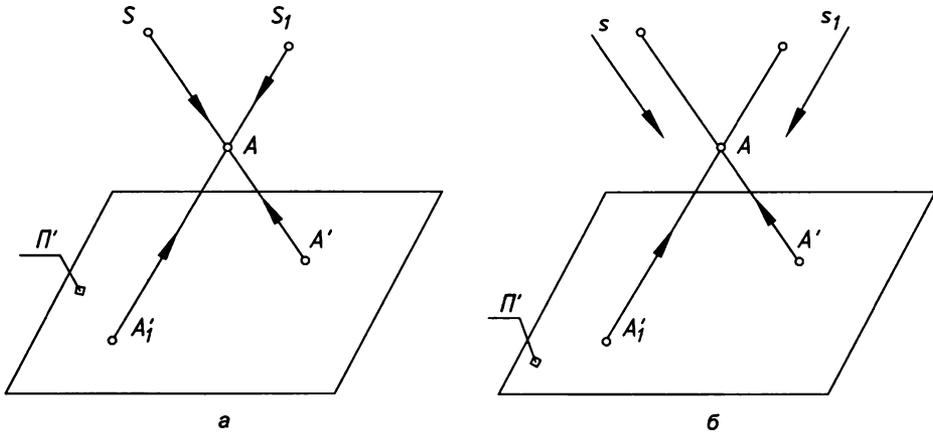


Рис. 3.8. Двойное проецирование

Это общее представление проблемы. Оно помогает понять, что для обеспечения обратимости чертежа нужны некоторые условия.

Для моделирования точечного пространства разработан классический метод построения обратимых чертежей, который называют *методом двух изображений*. С позиций этого метода объясняются такие способы построения чертежей, как перспектива, комплексный чертеж (эпюр Монжа), аксонометрия, которые широко используются в инженерной практике. Рассмотрим принцип работы метода на примере построения чертежа точки (рис. 3.9, на нем все плоскости считаются непрозрачными).

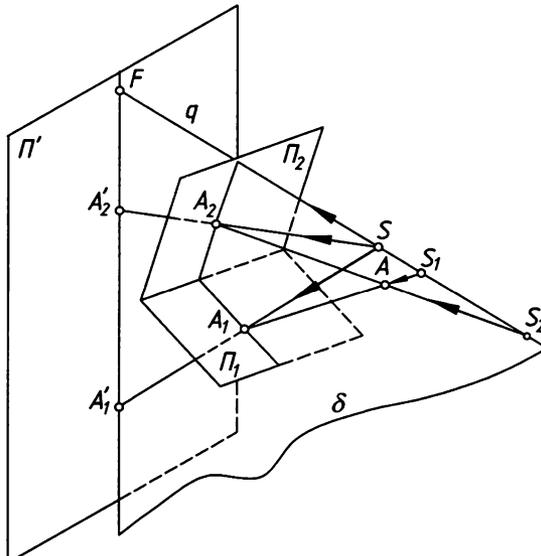


Рис. 3.9. Классический аппарат проецирования методом двух изображений

*Проекционный аппарат метода двух изображений состоит из следующих элементов:*

$\Pi$  — плоскость проекций (основная);  
 $\Pi_1, \Pi_2$  — вспомогательные плоскости проекций;  
 $S$  — центр проецирования (основной);  
 $S_1, S_2$  — вспомогательные центры проецирования.

Центры проекций  $S, S_1, S_2$  расположены на одной прямой линии  $q$  ( $S, S_1, S_2$ ), которая называется исключенной прямой. Точка  $F = q \cap \Pi$  называется исключенной точкой. Объект  $A$  (точка-оригинал) из центра  $S$ , проецируется в точку  $A_1$  (первичная проекция) на плоскость  $\Pi_1$ , а из центра  $S_2$  проецируется в точку  $A_2$  на плоскость  $\Pi_2$ . Эти проекции из центра  $S$  проецируются на основную (картинную) плоскость  $\Pi$  проекций в точки  $A'_1$  и  $A'_2$  соответственно.

Прямая линия  $q$  и точка  $A$  являются определителем проецирующей плоскости  $\delta(A, q)$ , которая пересекается с плоскостью  $\Pi$  по прямой, проходящей через точку  $F$ . Все построенные на рис. 3.9 прямые линии принадлежат плоскости  $\delta$ , следовательно, вторичные проекции точки  $A$  обязательно лежат на прямой  $(A'_1 A'_2 F) = \delta \cap \Pi$ , проходящей через точку  $F$ . Линия  $(A'_1 A'_2)$  называется линией связи проекций точки.

Такая конструкция проекционного аппарата обеспечивает обратимость чертежа, т. е. по проекциям  $A'_1$  и  $A'_2$  можно восстановить оригинал  $A$ , определить его пространственные координаты (подробнее см. [1], [19]).

**Вывод:** для обеспечения обратимости чертежа нужно иметь две картины (проекции).

Использование проекционного аппарата метода двух изображений рассмотрим на примере построения чертежа точки, который называется перспективой.

Основную плоскость  $\Pi$  проекций (картинную) расположим вертикально (рис. 3.10), а вспомогательную плоскость  $\Pi_2$  совместим с ней, то есть  $\Pi_2 = \Pi$ , но специального обозначения вводить не будем (нет нужды). Вспомогательная плоскость  $\Pi_1 \perp \Pi$  и называется горизонтальной или предметной плоскостью. Центры  $S$  и  $S_2$  проекций принимают совмещенными (тождественными) и обычно обозначение  $S_2$  не вводят (на рис. 3.10 оно введено для наглядности). В качестве центра  $S_{\infty}$  выбирают несобственную точку, удаленную по направлению, перпендикулярному  $\Pi_1$ . Поэтому проецирование по направлению  $S_1$  будет ортогональным и исключенная прямая  $q$  перпендикулярна  $\Pi_1$  (центр  $S = S_2$  соединяется с несобственной точкой  $S_{\infty}$ ), следовательно, исключенная точка  $F$  несобственная.

Линия  $(0-0) = \Pi \cap \Pi_1$  называется основанием картины (линия нулевого уровня). Строится ортогональная проекция  $A_1$  точки  $A$  на плоскость  $\Pi_1$ . Эта проекция называется основанием, или планом, объекта. Вторичная проекция  $A'_1$  определяется в пересечении проецирующей прямой  $SA_1$  с плоскостью  $\Pi$ .

На рис. 3.10 обозначение совпадающих проекций  $A_2$  и  $A'_2$  заменено одним обозначением  $A'$  и эта точка называется перспективой, или первичной, проекцией точки  $A$ . Для построения этих точек используют предметный след  $(S, A_1)$  проецирующей плоскости, которая перпендикулярна  $\Pi_1$  и пересекает картинную плоскость по вертикальной линии связи  $(1-A'_1-A')$ . Проекция  $A'_1$  и  $A'$  находятся в пересечении линии связи с проецирующими прямыми  $SA$  и  $SA_1$ . Точку  $S$  на практике называют основанием точки зрения, рассматривая ее в качестве ортогональной проекции точки  $S$ .



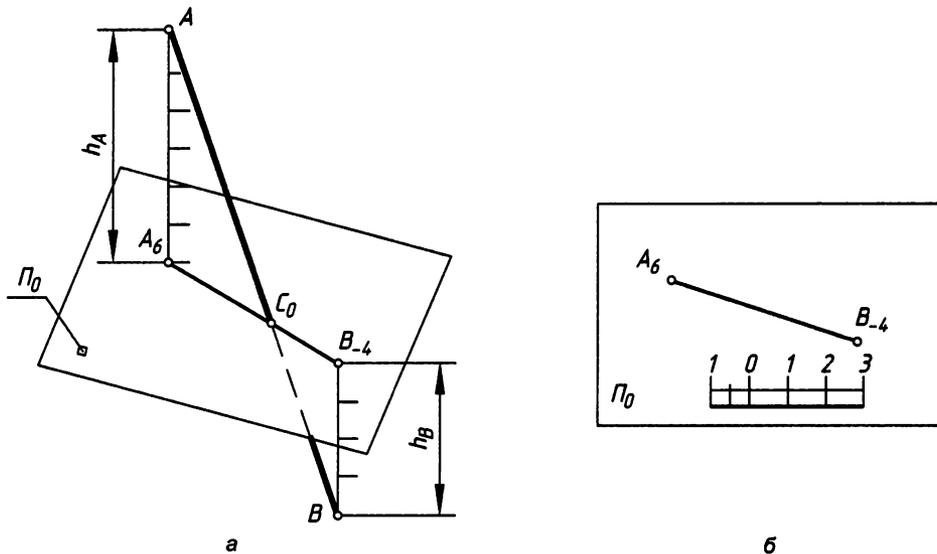


Рис. 3.11. Изображение отрезка прямой линии с числовыми отметками

Этот метод широко используется в проектировании объектов различных наземных сооружений, например, шоссе и железных дорог (рис. 3.12), аэродромов и т. д.

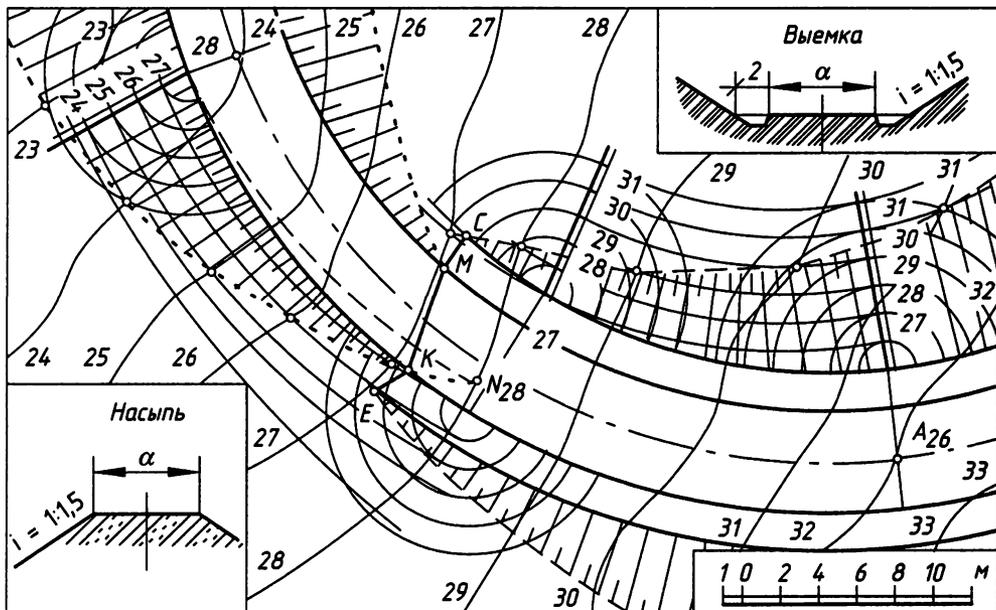


Рис. 3.12. Чертеж участка полотна дороги

На рис. 3.12 в качестве примера показан фрагмент чертежа участка полотна дороги, выполненный в проекциях с числовыми отметками. Здесь кривые линии с числовыми отметками называются горизонталями, потому что каждая из них лежит в своей горизонтальной плоскости, расположенной на указанной высоте (числовой отметке) относительно плоскости (базы), принятой за начало отсчета.

## Вопросы и задания

1. Какой метод используется для построения чертежей? Как называют такие чертежи?
2. Какие способы проецирования используются в начертательной геометрии?
3. Объясните принцип образования изображений методом проекций, покажите основные элементы проецирования.
4. Назовите основные свойства:
  - центральных проекций;
  - параллельных проекций;
  - ортогональных проекций.
5. Что называют контуром и очерком поверхности?
6. Какие точки называют конкурирующими и для чего их используют?
7. Какие геометрические элементы называют несобственными и как они задаются?
8. Что называют показателем искажения?
9. Какой геометрический смысл имеет показатель искажения в ортогональных проекциях?
10. Как определяется угол наклона и длина отрезка по его ортогональной проекции?
11. Назовите способы обеспечения обратимости чертежа.
  - Раскройте проекционный аппарат метода двух изображений.
  - В чем принципиальное отличие проекций с числовыми отметками?

# Глава 4

## Краткие сведения о геометрических преобразованиях

В предыдущем материале мы не только познакомились с принципом образования проекций и отдельными их свойствами, но и сумели почувствовать широкий круг сопутствующих вопросов. Чтобы легче было отвечать на них в дальнейшем, познакомимся с некоторыми геометрическими понятиями и преобразованиями.

Каждая плоскость представляет собой поле точек. Рассмотрим проективное отображение одной плоскости (картины) на другую. Возьмем плоскость  $\Pi$  с прямой  $(AB)$  (рис. 4.1, а), плоскость  $\Pi'$  и центр проекций  $S$ .

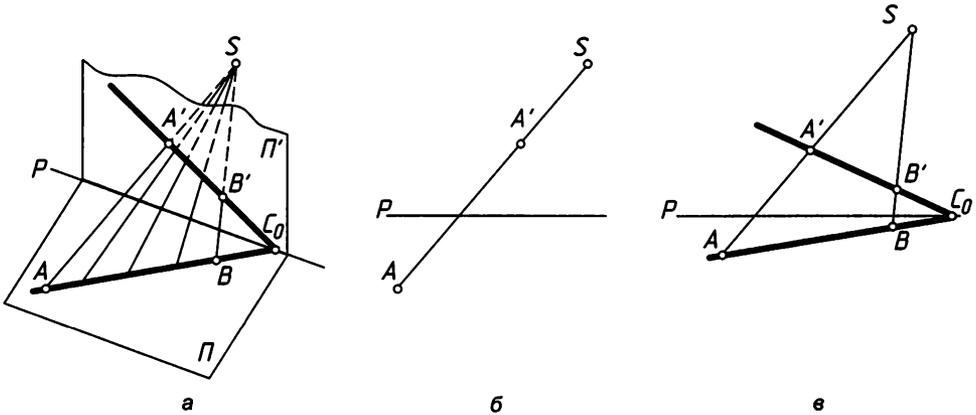


Рис. 4.1. Перспективная коллинеация

Если каждой точке  $A$  прямой поля  $\Pi$  соответствует единственная точка  $A'$  прямой поля  $\Pi'$ , и, наоборот, каждой точке  $B'$  соответствует точка  $B$ , то такое соответствие является взаимно однозначным и называется *перспективной коллинеацией*, а поля  $\Pi$  и  $\Pi'$  называются перспективно расположенными.

Точка  $C_0$  называется *двойной точкой* (проекция и оригинал совпадают):

$$C_0 = (AB) \cap (A'B').$$

Прямая  $p = \Pi \cap \Pi'$  является двойной прямой и называется *осью перспективной коллинеации* (ее проекция и оригинал тоже совпадают).

При совмещении поля  $\Pi'$  с полем  $\Pi$  поворотом вокруг прямой  $p$  меняется положение центра перспективной коллинеации, а перспективное соответствие полей не нарушается. Перспективное соответствие двух совмещенных плоских полей называется *гомологией на плоскости*.

Гомология является изображением перспективной коллинеации. Это легко проследить, сравнивая построение образа  $A'$  точки  $A$  на рис. 4.1, а и б. Точка  $A$  и прямая  $p$  (рис. 4.1, б) задают плоскость  $\Pi$ , а точка  $A'$  и прямая  $p$  задают плоскость  $\Pi'$ , следовательно, прямая  $p = \Pi \cap \Pi'$ , а прямая  $(SA'A)$  является проецирующей прямой (линией связи двух изображений). Здесь мы опускаем символическое изображение полей  $\Pi$  и  $\Pi'$  в форме их границ. Центр  $S$  перспективы называют центром гомологии, а прямую  $p$  – осью гомологии.

Если в гомологии задана точка  $B'$  (рис. 4.1, в), то легко найти точку  $B$ : проводим прямую  $(A'B')$ , находим  $C_0 = p \cap (A'B')$ , проводим  $(C_0A)$  и  $B = (C_0A) \cap (SB')$ . Это верно и для случая на рис. 4.1, а.

**Теорема Дезарга.** Если два треугольника  $(ABC)$  и  $(A'B'C')$  (рис. 4.2) расположены так, что прямые, соединяющие соответственные вершины этих треугольников, пересекаются в одной точке  $S$ , то три пары соответственных сторон треугольников пересекаются в трех точках  $(D_0, E_0, F_0)$ , лежащих на одной прямой.

Теорема справедлива и для пространства, и для плоскости. Справедлива также обратная теорема.

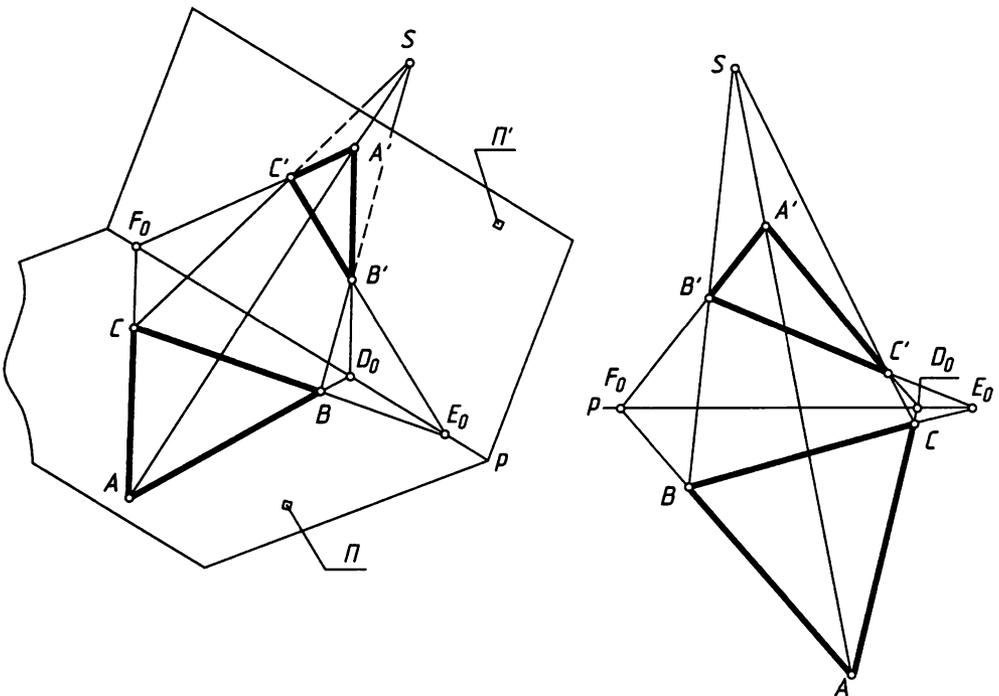


Рис. 4.2. Иллюстрация теоремы Дезарга

Эта теорема была опубликована в 1628 г. выдающимся французским математиком и инженером Жираром Дезаргом. В настоящее время она является основной теоремой проективной геометрии и дает возможность выполнять перспективные построения в одной плоскости.

Более подробно с теоремой Дезарга можно ознакомиться в работах [31, 32, 13, 15] и других источниках, указанных в списке использованной литературы.

Обратим внимание на то обстоятельство, что, например, на рис. 4.2 прямая  $(AC)$  и точка  $S$  образуют плоскость, которая пересекается с плоскостями  $\Pi$  и  $\Pi'$  по прямыми  $(AF_0)$  и  $(A'F_0)$  (три плоскости пересекаются в одной точке  $F_0$ ). Аналогично с другими сторонами.

Если центр проецирования удалить в бесконечность, то получим параллельное проецирование по направлению  $s$  (рис. 4.3, а). Перспективная коллинеация с несобственным центром называется *перспективно-аффинным*, или *родственным*, соответствием двух плоских полей.

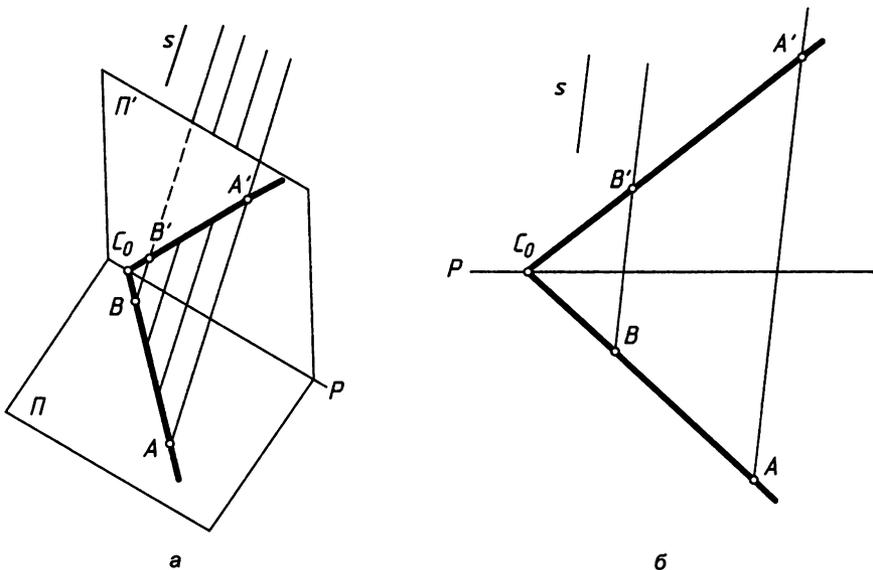


Рис. 4.3. Перспективно-аффинные, или родственные, преобразования

На плоскости (рис. 4.3, б) гомология с несобственным центром проецирования называется перспективно-аффинным, или родственным, преобразованием двух плоских полей. Прямая  $p$  — ось родства, направление  $s$  — направление родства. Для задания родства достаточно задать одну пару родственных точек и ось родства, например  $A-A'$ ,  $p$ . Линия связи  $A-A'$  указывает направление родства.

Если задать точку  $B$ , то легко найти точку  $B'$ , и наоборот (это можно проследить по рис. 4.3, б).

Задание только оси и направления родства (рис. 4.4, а) не определяет относительного положения соответственных полей. Для их выделения нужно задать пару соответственных точек  $A-A'$  или прямых  $a-a'$  (рис. 4.4, б). Тогда точка  $C'$  легко строится по заданной точке  $C$ , и наоборот (рис. 4.4, в).

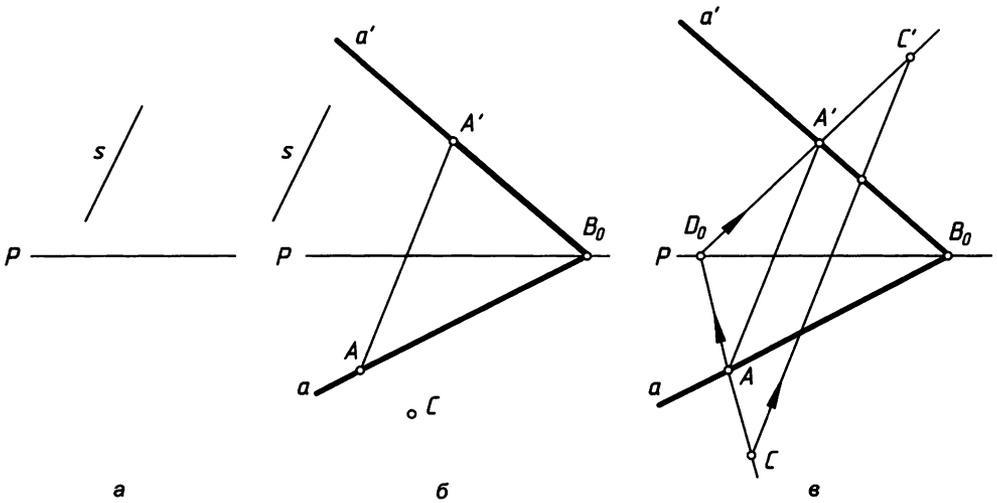


Рис. 4.4. Задание родства

Рассмотрим построение соответственных прямых линий при недоступной двойной точке (рис. 4.5) или недоступной точке схода в перспективе.

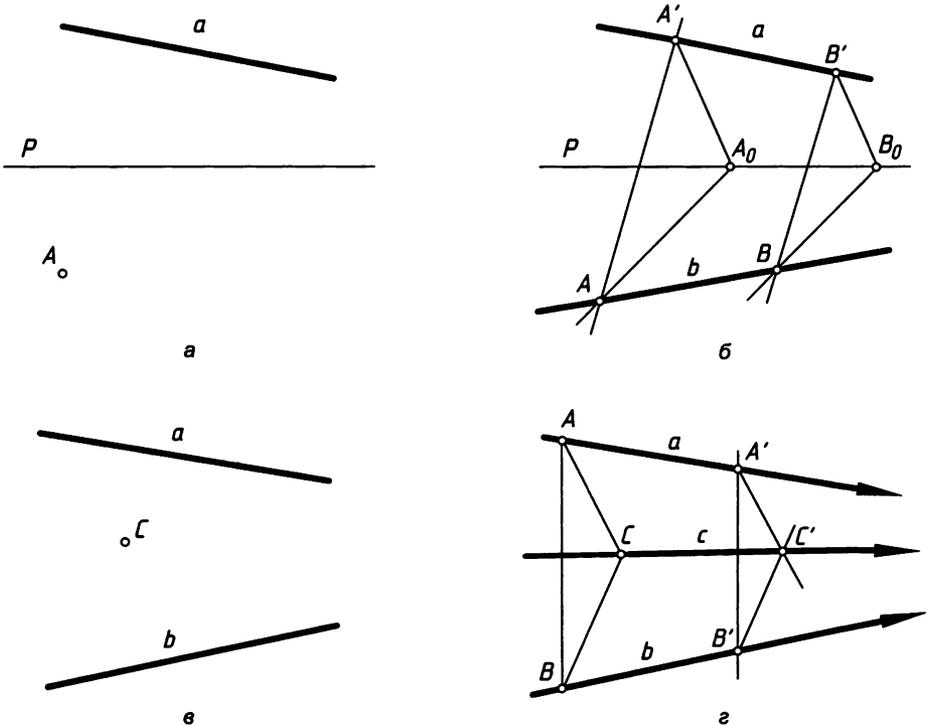


Рис. 4.5. Построение соответственных прямых при недоступной двойной точке

Пусть заданы  $p, a, A$  (рис. 4.5, а). Нужно через точку  $A$  провести прямую  $b$ , которая пересекается с прямой  $a$  в недоступной точке, лежащей на прямой  $p$ . Выберем произвольные точки  $A_0, A'$  (рис. 4.5, б) и построим  $\Delta AA'A_0$ . Выберем точку  $B'$  и построим  $\Delta B'B_0B \sim \Delta AA'A_0$  вследствие параллельности сторон.

Прямая  $b$  пройдет через точки  $A$  и  $B$ . Треугольники  $AA'A_0$  и  $BB'B_0$  можно рассматривать как треугольники Дезарга, вершины которых попарно соединены прямыми, пересекающимися в одной точке. У треугольников  $AA'A_0$  и  $BB'B_0$  соответственные стороны пересекаются в точках, лежащих на несобственной прямой, то есть осью гомологии является несобственная прямая. Такое преобразование называется *гомотетией*.

Аналогичная задача показана на рис. 4.5, в, где через точку  $C$  нужно провести прямую  $c$ , пересекающуюся с прямыми  $a$  и  $b$  в недоступной точке. Построим произвольный треугольник  $ABC$  (рис. 4.5, г) с вершиной в точке  $C$  и ему подобный  $\Delta A'B'C'$ . Через точки  $C-C'$  пройдет прямая линия  $c$ .

Если центр и ось перспективной коллинеации (гомологии) являются несобственными элементами, то преобразование называется *параллельным переносом* (рис. 4.6).

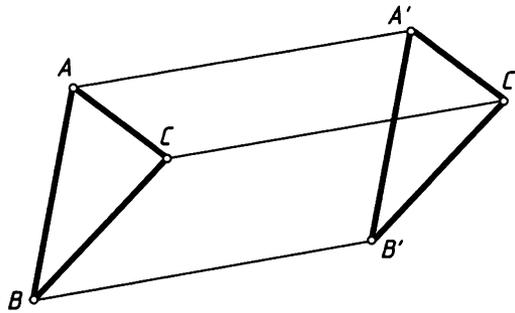


Рис. 4.6. Параллельный перенос

Рассмотрим случай родственного соответствия первичного и вторичного изображений плоских полей на примере перспективы (рис. 4.7).

Возьмем предметную  $\Pi$ , и картинную  $\Pi'$  плоскость с основанием  $O = \Pi \cap \Pi'$ . Спроецируем ортогонально плоскость  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) общего положения на предметную плоскость  $\Pi$ , получим ее проекцию  $\alpha_1$  ( $a_1 \cap b_1$ ). Соответственно,  $\Delta A_1B_1C_1$  является ортогональной (первичной) проекцией  $\Delta ABC$ .

Между полями  $\alpha$  и  $\alpha_1$  устанавливается перспективно-аффинное соответствие с осью родства  $B_1C_1 = B_1C_1$ , а проекция этого соответствия из центра  $S$  на плоскость  $\Pi'$  является родственным преобразованием между первичной ( $A'B'C'$ ) и вторичной ( $A_1'B_1C_1'$ ) проекциями (см.  $\Pi'$  на рис. 4.7 и 4.8), так как проецирующие прямые  $(AA_1), (BB_1), \dots$  параллельны плоскости  $\Pi'$  и проецируются параллельными прямыми  $(A'A_1'), (B'B_1'), \dots$

Следовательно, прямая  $(B_1C_1 = B_1C_1' = B_1C_1)$  является осью родства, а прямая  $(A'A_1')$  — направлением родства (см. рис. 4.8). Это свойство сохранится и при параллельном проецировании на плоскость  $\Pi'$ .

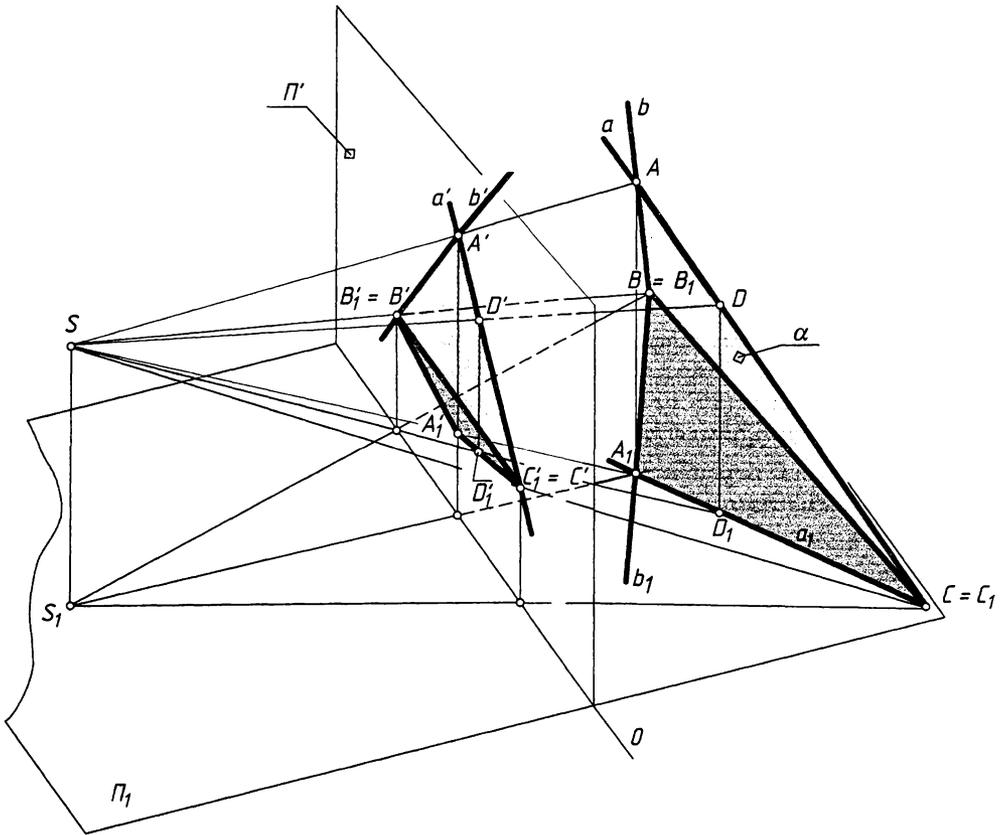


Рис. 4.7. Перспективно-аффинное соответствие и его проекция на  $\Pi'$

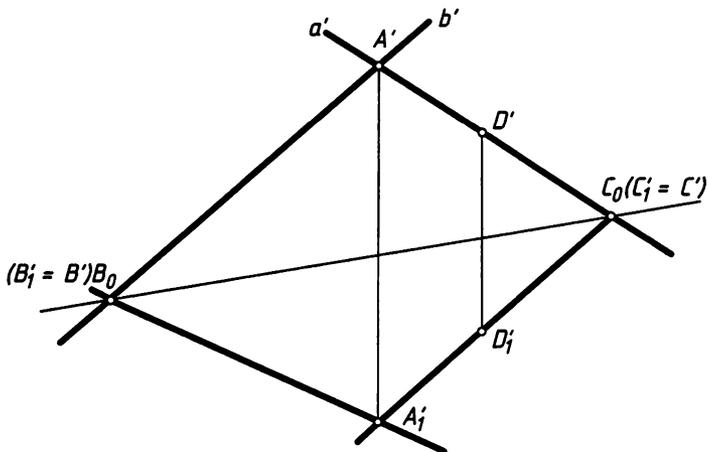
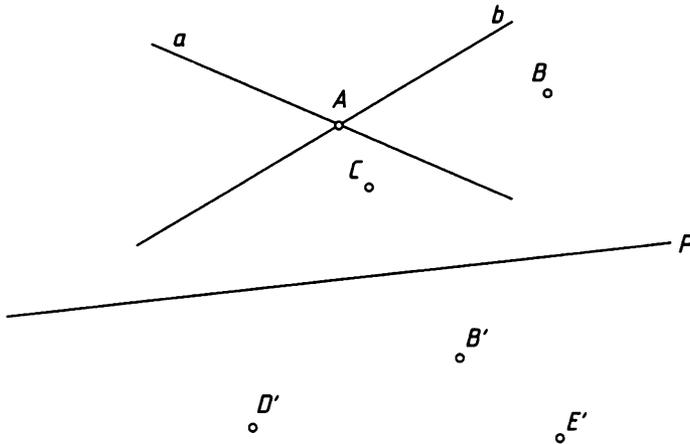


Рис. 4.8. Родство первичной и вторичной проекций

## Вопросы и задания

1. Что называют перспективной коллинеацией?
2. Что называют гомологией?
3. Сформулируйте теорему Дезарга и проиллюстрируйте ее примером на плоскости.
4. Что называют родственным соответствием, осью родства, направлением родства?
5. Какие элементы необходимы для задания родства?
6. Перспективно-аффинное соответствие задано осью  $p$  родства и парой  $(B \rightarrow B')$  соответственных точек. Построить изображения четырехугольника  $BCDE$ , лежащего в плоскости  $\alpha (a \cap b)$ , и образы  $a', b'$  прямых линий  $a$  и  $b$ , указать направление родства.



# Глава 5

## Образование и свойства комплексного чертежа

Для обеспечения обратимости чертежа при ортогональном проецировании используется метод Монжа, в котором объект проецируется на две и более взаимно перпендикулярные плоскости проекций. Такой чертеж называют эпором Монжа, или комплексным чертежом. Он получил самое широкое распространение.

*Чертеж, состоящий из нескольких взаимосвязанных проекций, называют комплексным.*

### 5.1. Двухкартинный комплексный чертеж

Спроецируем ортогонально точку  $A$  (рис. 5.1,  $a$ ) на две взаимно перпендикулярные плоскости  $\Pi_1 (H) \perp \Pi_2 (V)$  по направлениям  $s_1$  и  $s_2$  соответственно.

Вертикальную плоскость  $\Pi_2$  называют фронтальной плоскостью, а плоскость  $\Pi_1$  называют горизонтальной плоскостью проекций.

Буквы  $\Pi_1$  или  $H$  и  $\Pi_2$  или  $V$  соответствуют принятым обозначениям этих плоскостей проекций в научной и учебной литературе. Это не принципиально, но полезно знать, чтобы легче понимать изображения, в которых могут быть использованы разные обозначения. Мы будем использовать обозначение  $\Pi$ .

Линия  $x = \Pi_1 \cap \Pi_2$  пересечения плоскостей называется *осью проекций*.

Проецирующие прямые, пересекаясь в точке  $A$ , образуют проецирующую плоскость  $\alpha (AA_1 \cap AA_2)$ , которая перпендикулярна оси  $x$ . Эта плоскость пересекает ось  $x$  в точке  $A_x$ , а плоскости проекций по прямым

$$\begin{aligned} a &= (\alpha \cap \Pi_1) \perp x, \\ b &= (\alpha \cap \Pi_2) \perp x. \end{aligned}$$

Пересечение этих линий с проецирующими прямыми точки  $A$  однозначно определяет положение проекций:

$$\begin{aligned} A_1 &= a \cap (AA_1), \\ A_2 &= b \cap (AA_2). \end{aligned}$$

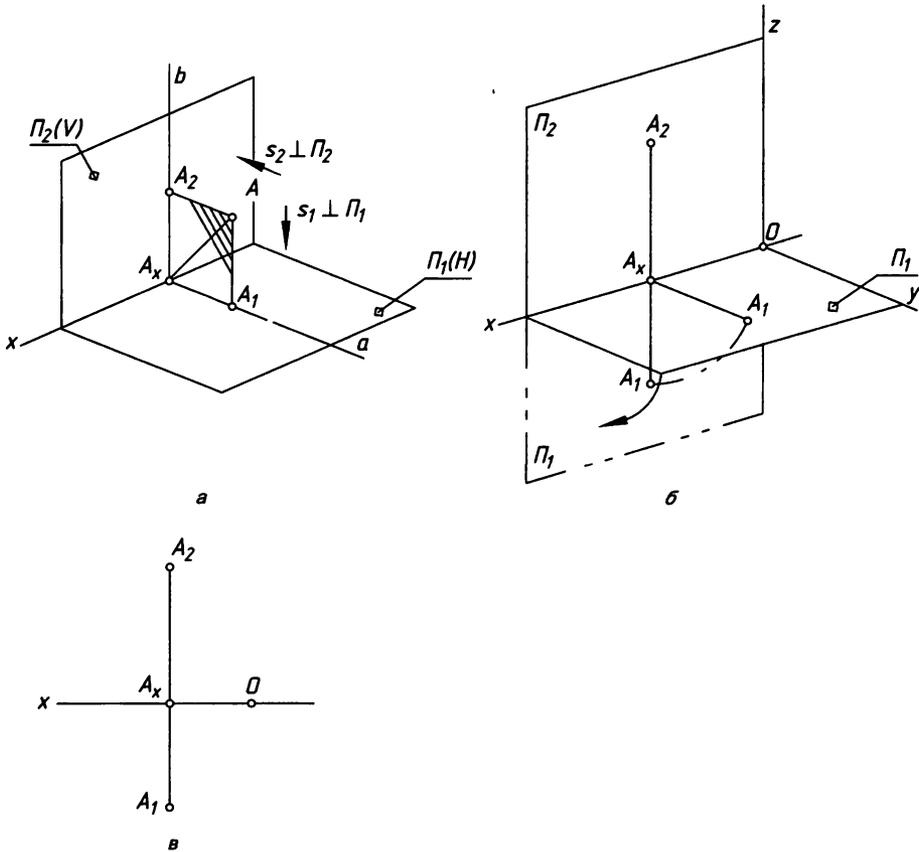


Рис. 5.1. Ортогональные проекции точки на две плоскости

На чертеже мы будем иметь только проекции (прообразы)  $A_1$  и  $A_2$  образа (оригинала) точки  $A$  (рис. 5.1, б). Если на оси  $x$  проекций принять за ноль числовой оси точку  $O$  и направление  $OA_x$  считать положительным, то можно построить правую прямоугольную систему координат  $Oxyz$ , в которой расположены наши точки.

Но это все еще представление о пространственной картине, а чтобы получить плоскую картину, повернем плоскость  $\Pi_1$  вокруг оси  $x$  до совмещения с плоскостью  $\Pi_2$ , как показано стрелкой на рис. 5.1, б. Тогда мы получим картину, изображенную на рис. 5.1, в (здесь прямоугольники, изображающие плоскости проекций, и их буквенные обозначения  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  не показаны). Так мы наложили друг на друга два поля проекций, каждое из которых не ограничено размерами. Можно совместить поля поворотом  $\Pi_2$  вокруг оси  $x$  до совмещения с  $\Pi_1$ , от этого ничего не изменится, и таким приемом в дальнейшем мы будем пользоваться. Линия  $(A_1 A_2)$  называется вертикальной линией связи. Она всегда перпендикулярна оси проекций  $x$ . Оси  $y$  и  $z$  на таком чертеже не изображают, но их существование всегда имеется в виду.

Полученные изображения называются *двухкартинным комплексным чертежом* (эпюром) точки (в нашем обозначении — точки  $A$ ).

В его обратимости нетрудно убедиться. По эюру на рис. 5.1, в легко восстановить пространственную картину (рис. 5.1, б). Если в точках  $A_1$  и  $A_2$  восстановить перпендикуляры (проецирующие прямые), то их пересечение определит единственную точку  $A$  (рис. 5.1, а), то есть обратимость обеспечена. Это утверждается и тем обстоятельством, что на чертеже мы видим натуральную величину отрезков (в масштабе чертежа), соответствующих трем координатам точки.

Такой подход к образованию комплексного чертежа и к его преобразованиям, с которыми мы познакомимся позже, был принят изначально, он наиболее нагляден и прост, а поэтому получил самое широкое распространение.

Однако в наше время разработан метод двух изображений, который позволяет дать более строгое проекционное обоснование образованию комплексного чертежа (см. п. 3.4.1). В этом случае плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  служат вспомогательными плоскостями проекций (рис. 5.2, а, сравните с рис. 3.9). Основную плоскость  $\Pi'$  проекций совмещают с  $\Pi_2$  и используют несобственные центры  $S_\infty, S_{1\infty}, S_{2\infty}$  проецирования, а их положение указывается направлениями проецирования соответственно.

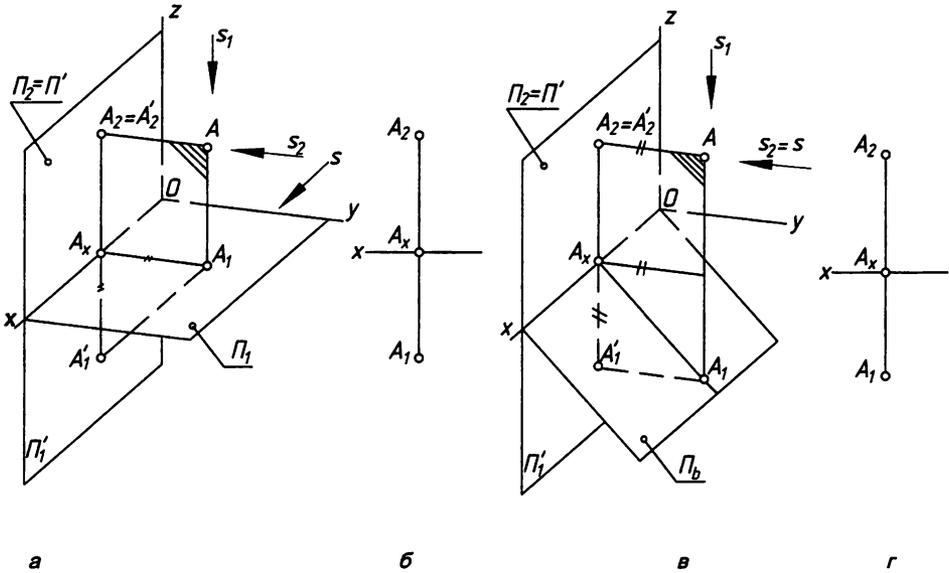


Рис. 5.2. Образование комплексного чертежа методом двух изображений

Построим вспомогательные проекции  $A_1$  по направлению проецирования  $s_1 \perp \Pi_1$  и  $A_2$  по направлению  $s_2 \perp \Pi_2$ . Направление основного проецирования  $s \perp x$  и наклонено под углом  $45^\circ$  к плоскостям проекций. В этом случае основная проекция  $A_2'$  совпадает с  $A_2$ , а  $A_1'$  проецируется так, что  $[A_1 A_1'] = [A_1 A_1]$ , то есть координата  $y$  сохраняется. Если опустить в обозначениях  $A_1'$  и  $A_2'$  основных проекций апострофы, то мы получаем чертеж (рис. 5.2, б) такой же, как на рис. 5.1, в.

Если вместо  $\Pi_1$  взять вспомогательную плоскость  $\Pi_b$  под углом  $45^\circ$  к вертикальной плоскости (рис. 5.3, в), сохранив обозначение  $A_1$  первичной проекции, а направление основного проецирования  $s \perp \Pi_2$  (при прочих одинаковых условиях), то получится чертеж (рис. 5.2, г, апостроф опущен), как на рис. 5.2, б. В этих случаях исключенная

точка и прямая находятся в бесконечности, проецирующая плоскость и линия связи перпендикулярны оси проекций, как и на эпюре Монжа, показанном на рис. 5.1. Ортогональные проекции проигрывают в наглядности, но упрощают процесс построения изображений, процесс измерений и преобразования чертежа, и поэтому нашли самое широкое применение в инженерной практике. Исследуем более подробно двухкартинный комплексный чертёж точки (рис. 5.3) с принятыми обозначениями и терминами, которые дальше будем использовать постоянно.

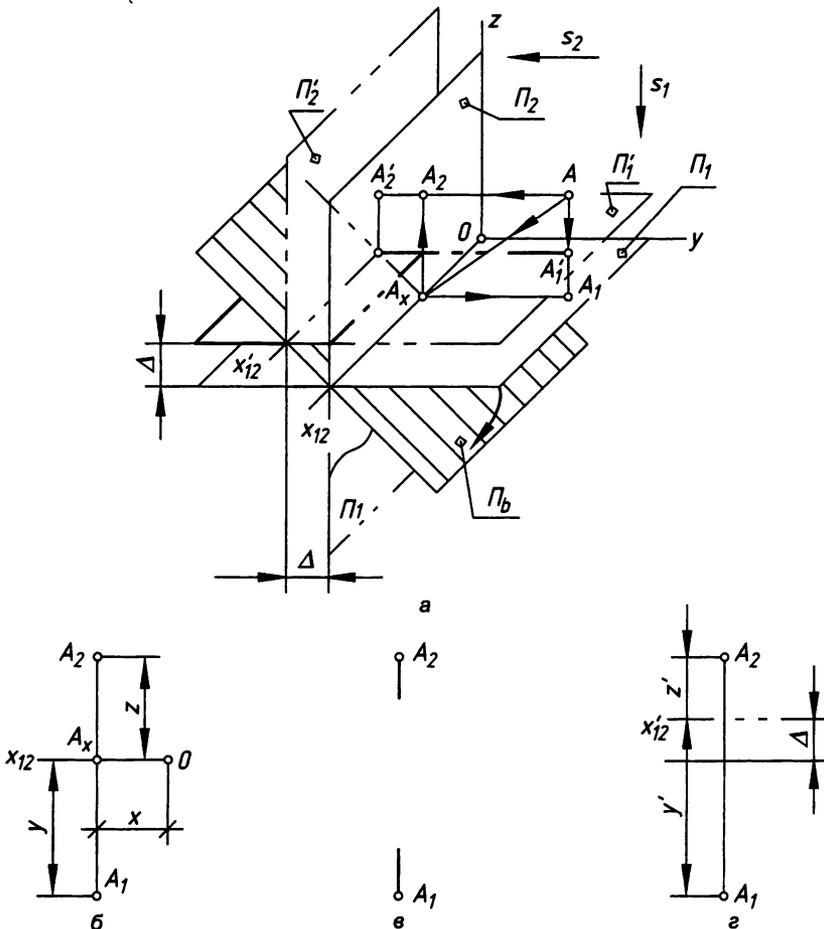


Рис. 5.3. Двухкартинный чертёж точки

На рис. 5.3, а показаны изображения и обозначены:

- $\Pi_1$  (или  $H$ ) — горизонтальная плоскость проекций.
- $\Pi_2$  (или  $V$ ) — фронтальная плоскость проекций.
- $x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  — ось проекций, читается: «икс один-два», то есть пересечение плоскости с индексом 1 ( $\Pi_1$ ) и плоскости с индексом 2 ( $\Pi_2$ ). Индексы 1 и 2 могут отсутствовать, тогда  $x = \Pi_1 \cap \Pi_2$ .

- $A$  — точка-оригинал.
- $s_1 \perp \Pi_1, s_2 \perp \Pi_2, s \wedge \Pi_2 = 45^\circ$  — направления проецирования. Далее их изображать не будем, но всегда будем о них помнить.
- $A_x$  — пересечение проецирующей плоскости  $A_1AA_2$  с осью  $x$  или ортогональная проекция точки  $A$  на ось  $x$ .
- $A_1$  — горизонтальная проекция точки  $A$ .
- $A_2$  — фронтальная проекция точки  $A$ .
- $A_1A_x = AA_2 = y$  — глубина точки  $A$  (расстояние до  $\Pi_2$ ).
- $A_2A_x = AA_1 = z$  — высота точки  $A$  (расстояние до  $\Pi_1$ ).
- $OA_x = x$  — широта точки  $A$ .

Совместим  $\Pi_1$  с  $\Pi_2$  поворотом вокруг оси  $x$  так, чтобы положительные полуплоскости проекций оказались по разные стороны от оси проекций, и получим двухкартинный комплексный чертеж точки или эпюр Монжа (рис. 5.3, б) с осью проекций.

В практике работы с изображениями обычно не чертят оси проекций, когда в них нет необходимости. Но их присутствие выражается через линии проекционной связи и размеры. Такой чертеж называют бесосным (рис. 5.3, в). При изображении изделий вертикальную линию  $A_1A_2$  связи соблюдают, но не вычерчивают, а при необходимости ее обозначают короткими штрихами, как показано на рис. 5.3, в. В этом случае говорят, что чертеж задан с точностью до параллельного переноса плоскостей проекций.

Ось  $x$  в бесосном чертеже можно выбрать произвольно, но перпендикулярно линии связи. Допустим, не зная истинного положения оси проекций, мы в бесосном чертеже сами задали ось  $x'_2$  (рис. 5.3, г). Сравнивая рис. 5.3, г и рис. 5.3, б, устанавливаем связь координат точки  $A$ :

- глубина  $y' = y + \Delta$ ;
- высота  $z' = z - \Delta$ .

Этим координатам будут соответствовать новые плоскости  $\Pi'_1 \perp \Pi'_2$  проекций, ось  $x'_2$  (рис. 5.3, а) и проекции  $A'_1, A'_2$ . Но при этом  $[A_1, A_2] = y + z = y' + z'$ , то есть эти координаты определяют ту же самую точку  $A$ . Ось  $x'_2$  всегда находится в плоскости  $\Pi_b$ , которая делит двугранный угол  $\Pi_1 \wedge \Pi_2$  пополам и называется *четной биссекторной плоскостью*.

### Выводы:

1. Двухкартинные чертежи с осью  $x$  проекций и без нее равноправны (обратимы).
2. Ось проекций  $x$  в бесосном чертеже можно выбрать произвольно, соблюдая перпендикулярность к линиям связи. При этом координаты объекта будут определены с точностью до параллельного переноса плоскостей проекций.

Плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проекций делят все пространство на четыре части (рис. 5.4, а), которые называют четвертями, или квадрантами. Такое деление легко просматривается, если спроецировать все ортогонально по направлению  $s \parallel x$  на плоскость  $\Pi \perp x$ .

Тогда плоскости становятся проецирующими и будут изображаться на  $\Pi$  прямыми линиями  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , а ось  $x$  — точкой их пересечения. Четверть, в которой координаты  $y$  и  $z$  положительны, называется первой (обозначена 1). Последующие названия и обозначения плоскостей присваиваются в направлении против движения часовой стрелки.

На рис. 5.4, б первая четверть с точкой  $A (A_1, A_2)$  показана отдельно, а на рис. 5.4, в показан эпюр этой точки. Здесь:  $y > 0, z > 0$ .

На рис. 5.4, в показана вторая четверть с точкой  $B (B_1, B_2)$ , а на рис. 5.4, е — ее эпюр. Во второй четверти координата  $y$  точки отрицательна и поэтому обе проекции располагаются выше оси  $x$ .

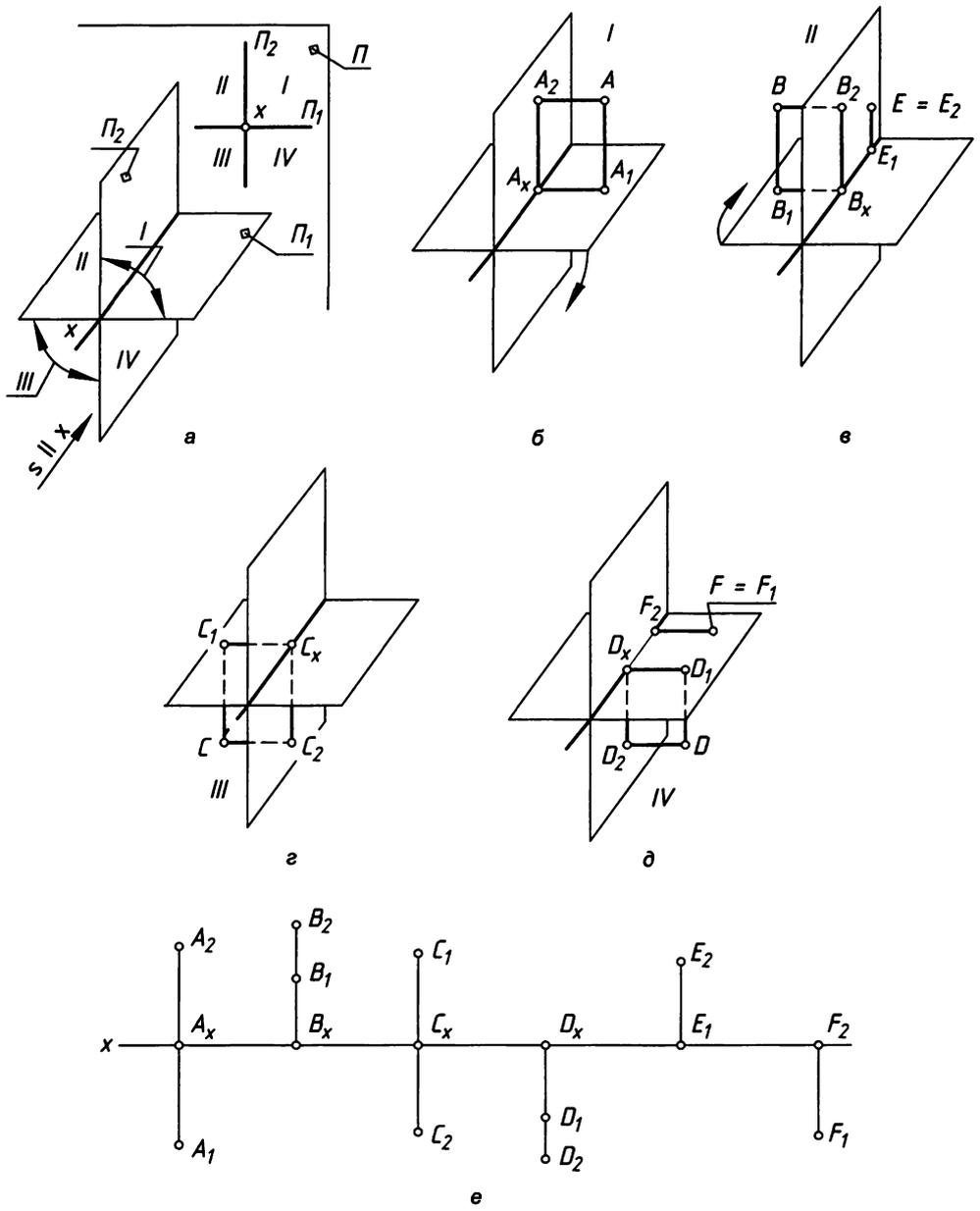


Рис. 5.4. Чертёж точек, расположенных в разных квадрантах

На рис. 5.4, *г* показана третья четверть с точкой *С*, где  $y < 0, z < 0$ . Сравните эпюры точек *С* ( $C_1, C_2$ ) и *А* ( $A_1, A_2$ ) на рис. 5.4, *е*.

На рис. 5.4, *д* выделена четвертая четверть с точкой *В*, где  $y > 0, z < 0$ . Сравните эпюры точек *В* ( $B_1, B_2$ ) и *А* ( $A_1, A_2$ ) на рис. 5.4, *е*. У точек, лежащих в четных четвертях (II и IV), проекции располагаются по одну сторону от оси *x* (соответственно, выше или ниже оси), потому что совмещаются полу плоскости с разными знаками координат.

У точки, лежащей в плоскости проекций, одна из координат равна нулю и одна проекция лежит на оси *x*, например:  $E \in \Pi_2, y_E = 0, E_1 \in x$  (рис. 5.4, *в* и 5.4, *е*);  $F \in \Pi_1, z_F = 0, F_2 \in x$  (рис. 5.4, *д* и 5.4, *е*).

Поле точек, имеющих равные координаты глубин и высот ( $y = z$ ), образует плоскость  $\Pi_{13}$ , которая называется *биссекторной плоскостью нечетных четвертей* (рис. 5.5, *а*). Она делит первую и третью четверти пополам.

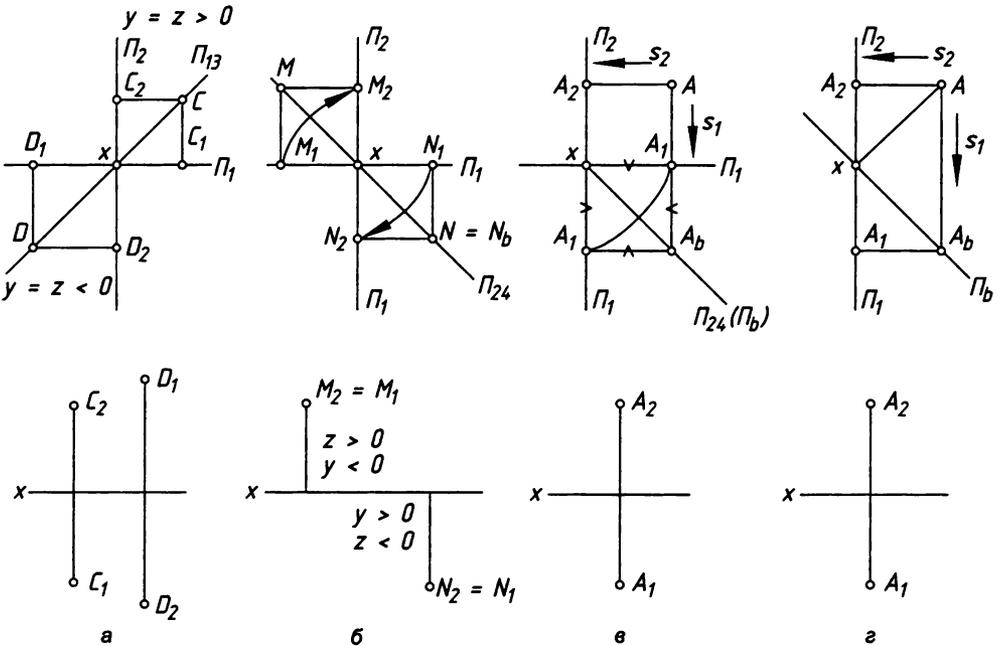


Рис. 5.5. Биссекторные плоскости

Плоскость  $\Pi_{24}$ , которая делит пополам II и IV четверти, называется *биссекторной плоскостью четных четвертей* (четная биссекторная плоскость). Координаты глубины и высоты ее точек равны по величине, но противоположны по знаку (рис. 5.5, *б*). Присвоим плоскости  $\Pi_{24}$  обозначение  $\Pi_b$  и отметим ее важную особенность (рис. 5.5, *в*). Спроецируем точку *А* ( $A_2$ ) на  $\Pi_2$  по направлению  $s_2 \perp \Pi_2$ , на  $\Pi_1$  и на  $\Pi_b$  по направлению  $s_1 \perp \Pi_1 \rightarrow A_1$  и  $A_b$ . Совместим плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , получим эпюр  $A(A_1, A_2)$ . Фигура  $x A_1 A_b A_1$  — квадрат (равные стороны отмечены галочкой). Это значит, что точку *А*, мы можем получить ортогональным проецированием проекции  $A_b$ , что и было показано в методе двух изображений (см. рис. 5.2).

Тогда, если точку  $A$  и ее проекцию  $A_b$  на плоскость  $\Pi_b$  по направлению  $s, \parallel \Pi_2$  (рис. 5.5,  $z$ ) спроецировать на основную плоскость  $\Pi' = \Pi_2$  по направлению  $s \perp \Pi_2$ , мы получим эпюр Монжа. Но теперь между точками  $A-A_b$  и  $A_1-A_2$  установлено родственное соответствие, в котором направление родства перпендикулярно оси  $x$ , а плоскость  $\Pi_b$  является носителем осей родства, то есть ось родства расположена на ней.

## 5.2. Трехкартинный комплексный чертёж

Для сложных изделий используют три и большее число изображений (картин). *Трехкартинный комплексный чертёж* образуется методом ортогонального проецирования на три взаимно перпендикулярные плоскости проекций:  $\Pi_1 \perp \Pi_2 \perp \Pi_3$  (рис. 5.6).

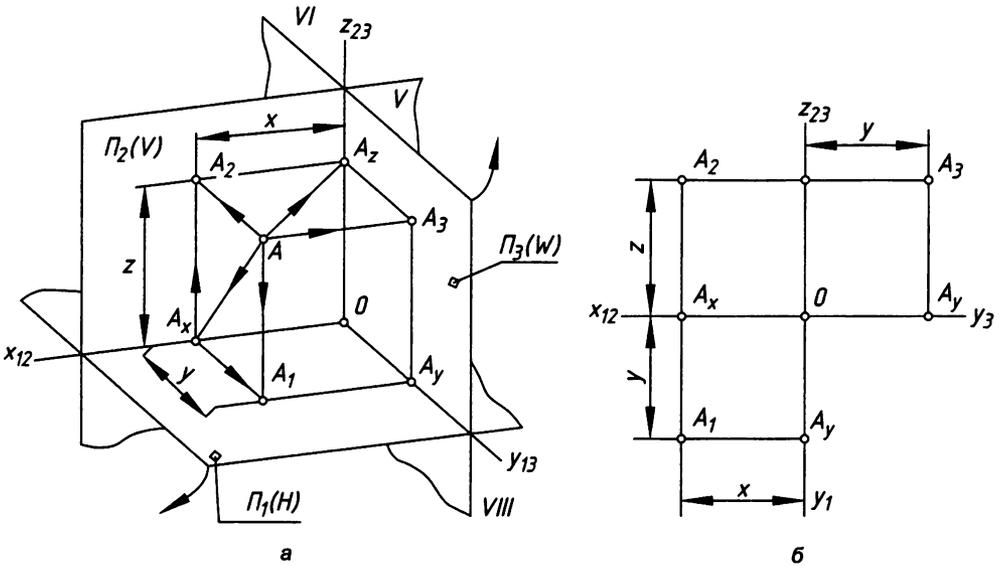


Рис. 5.6. Образование трехкартинного чертежа

Введением плоскости  $\Pi_3 (W)$  мы разделили все пространство на восемь частей, каждая из которых называется октантом. Нумерация четвертей сохраняется за первыми четырьмя октантами, а новым октантам присваиваются номера с  $V$  по  $VIII$ , как показано на рис. 5.6,  $a$ , где  $VII$  октант не показан, так как его не видно.

Плоскость  $\Pi_3$  называется *профильной плоскостью проекций*.

Линии пересечения плоскостей проекций образуют *оси проекций*:

- $x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  — ось широт;
- $y_{13} = \Pi_1 \cap \Pi_3$  — ось глубин;
- $z_{23} = \Pi_2 \cap \Pi_3$  — ось высот,

с началом координат в точке  $O$ . Полученная система координат  $Oxyz$  является правой Декартовой системой, то есть той системой координат, которую мы использовали в предыдущем параграфе, а пространство является трехмерным.

На рис. 5.6, а показаны положительные полуоси  $x, y, z$ , которые определяют положительные части полей проекций.

Образование ортогональных проекций точки  $A$  на эти плоскости можно рассматривать с позиций двухкартинного чертежа на пары плоскостей:  $\Pi_1-\Pi_2 \rightarrow A_1-A_2$ ;  $\Pi_1-\Pi_3 \rightarrow A_1-A_3$ ;  $\Pi_2-\Pi_3 \rightarrow A_2-A_3$ . Построения показаны стрелками на рис. 5.6, а. Проекция  $A_3$  называется *профильной проекцией* точки  $A$ .

Положение оригинала  $A$  в пространстве определяется тремя перпендикулярными отрезками, например:  $OA_x \perp A_x A_1 \perp A_1 A$  или  $x_A \perp y_A \perp z_A$ . Эта линия называется координатной ломаной линией. Можно построить и другие линии, например:  $x_A \perp z_A \perp y_A$ . Таких вариантов шесть.

Для образования эпюра плоскость  $\Pi_3$  совместим с плоскостью  $\Pi_2$  поворотом вокруг оси  $z_2$ . Можно построить чертеж методом двух изображений (см. п. 3.4.1, рис. 5.1 и 5.2), используя в качестве вспомогательных плоскости  $\Pi_2-\Pi_3$ , или  $\Pi_1-\Pi_3$ , или  $\Pi_2$  и биссекторную плоскость  $\Pi_{s2}$  пятого и второго октанта (эти построения не показаны). Получим трехкартинный комплексный чертеж точки  $A (A_1, A_2, A_3)$  с осями (рис. 5.6, б). Ось  $y_1$  «раздвоилась»:  $y_1$  принадлежит плоскости  $\Pi_1$ , а  $y_3$  — плоскости  $\Pi_3$ . Индексы при осях всегда имеют в виду, но не всегда пишут. Этим мы постоянно будем пользоваться.

Линия  $A_2-A_3$  называется *горизонтальной линией связи*. Заметим, что каждая проекция точки  $A$  определяется двумя координатами, то есть находится в двумерном пространстве:  $A_1 (xy), A_2 (xz), A_3 (yz)$ . Это важно помнить при работе со сложными изображениями. Заметьте, что каждая проекция точки имеет одну координату, входящую в определитель другой проекции этой же точки: у  $A_1$  и  $A_2$  общая координата  $x$ , у  $A_2-A_3$  общая координата  $z$ , у  $A_1-A_3$  общая координата  $y$ . Через них устанавливается связь проекций.

Это значит, что *задание любых двух проекций точки в трехмерном пространстве однозначно определяет ее третью проекцию*.

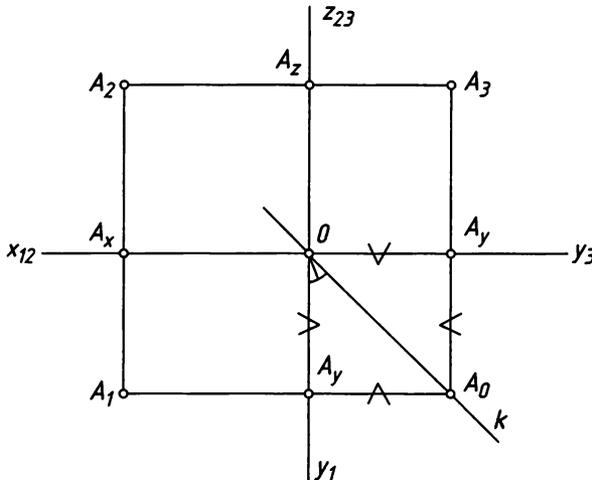


Рис. 5.7. Постоянная прямая  $k$  комплексного чертежа

Возьмем точку  $A (A_1, A_2, A_3)$  в трехмерном пространстве (рис. 5.7). Построим прямые линии  $A_3A_0 \parallel A_2A_1$  и  $A_1A_0 \parallel A_2A_3$ . Линия  $A_1A_0A_3$  называется *ломаной*, или *горизонтально-вертикальной линией связи*. Фигура  $A_1A_0A_3$  является квадратом, а его диагональ  $k$  называется *постоянной прямой комплексного чертежа*. Положение прямой линии  $k$  не зависит от выбора осей координат, но их начало всегда лежит на этой линии.

Зададим три проекции точки  $A$  в безосной системе (рис. 5.8, а). Если теперь мы проведем ломаную линию  $A_1A_0A_3$  связи (рис. 5.8, б), то биссектриса прямого угла при вершине  $A_0$  будет постоянной  $k$  данного чертежа. Теперь нам достаточно задать только две проекции любой точки.

Например, зададим точку  $C (C_1, C_2)$  — в пересечении горизонтальной и ломаной линий связи найдем  $C_3$ ; зададим  $B (B_2, B_3)$  — в пересечении вертикальной и ломаной линий связи определим  $B_1$ . Если задать ось  $x$ , то ее пересечение с прямой  $k$  определяет начало координат  $O$  и положение осей  $y$  и  $z$ . Так мы можем задать оси координат в безосном чертеже, которые будут определять положение объекта с точностью до параллельного переноса плоскостей проекций (см. п. 5.1).

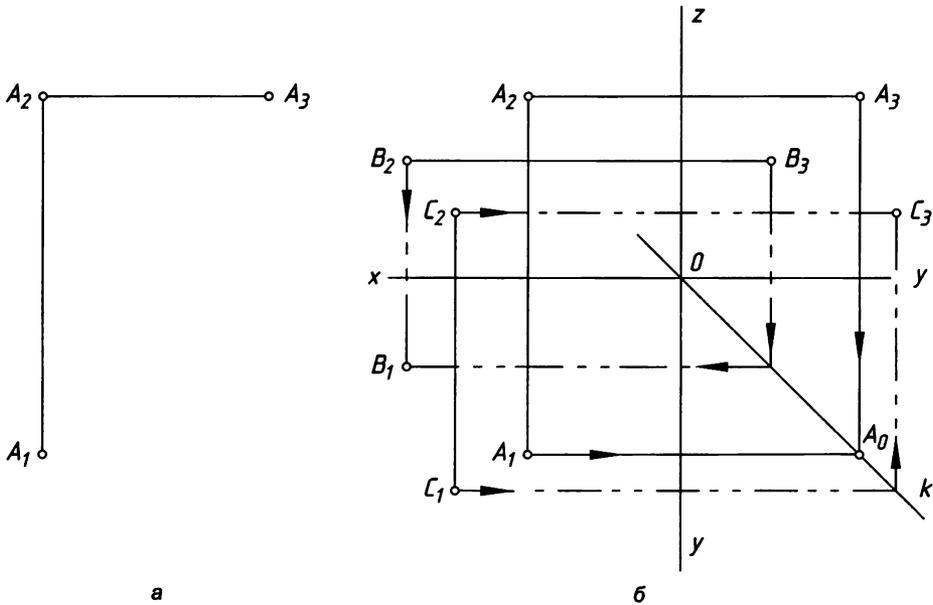


Рис. 5.8. Связь проекций и выбор осей координат

Чертеж изделия обязательно сопровождается параметризацией и нанесением размеров, по которым изготавливают изделие. При этом система отсчета, которую будем называть *натуральной системой координат*, не совпадает с проекционной системой, но обычно выбирается так, чтобы ее оси были соответственно параллельны осям проекций (рис. 5.9).

Натуральная система  $Oxyz$  вместе с объектом (точка  $A$ ) проецируется на плоскости проекций. При этом ее координатные плоскости параллельны плоскостям проекций и их поля перспективно соответственны. Для задания такой модели на эпюре достаточно задать начало  $O (O_1, O_2, O_3)$  натуральной системы  $Oxyz$  (рис. 5.10).

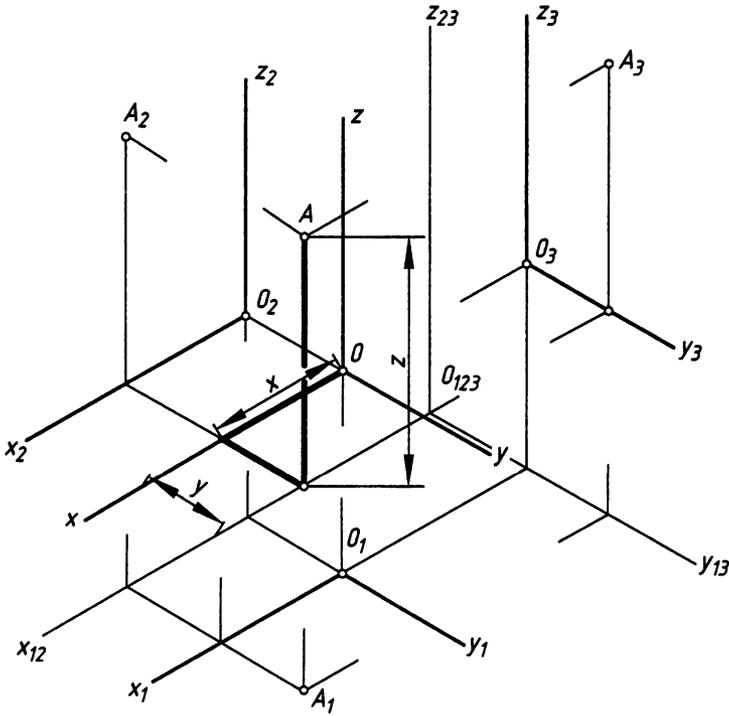


Рис. 5.9. Выбор натуральной системы координат

Тогда изображения  $A_1, A_2, A_3$  объекта  $A$  можно строить по координатам  $A (xyz)$  натуральной системы.

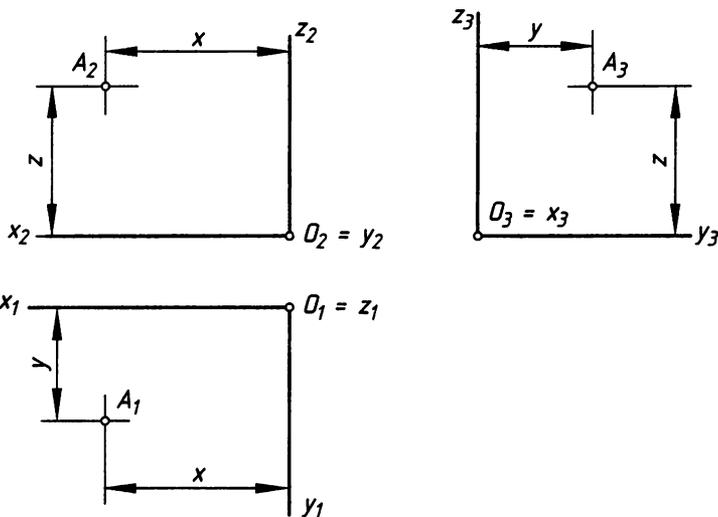


Рис. 5.10. Проекционная модель с натуральной системой координат

Это обстоятельство очень важно, так как в практических чертежах проекционная связь между изображениями часто разрывается, поскольку каждое изображение может строиться на отдельном формате. Но каждое изображение строится с обязательным соблюдением проекционной связи, которая выражается не в виде прямой, связывающей две проекции точки, а в относительном расположении точек в каждой проекции, то есть в форме и содержании каждого изображения (картины).

#### Выводы:

1. Трехкартинный чертеж с осями и без осей одинаково представляет проекционную модель трехмерного пространства.
2. Для задания проекционной модели достаточно задать три проекции одной точки системы любой сложности.
3. Для выбора осей проекций на безосном чертеже необходимо задать положение оси  $x_2$  и взять начало координат в точке ее пересечения с постоянной прямой комплексного чертежа. В этом случае координаты системы определяются с точностью до параллельного переноса плоскостей проекций.
4. При построении изображений в натуральной системе координат достаточно задать три проекции точки  $O$  начала этих координат (в проекционной связи с заданными точками системы) и направить оси параллельно осям проекций.

## 5.3. Изображения-виды

В инженерной графике определенные изображения изделия принято называть видами. *Видом называют изображение обращенной к наблюдателю видимой части поверхности предмета.*

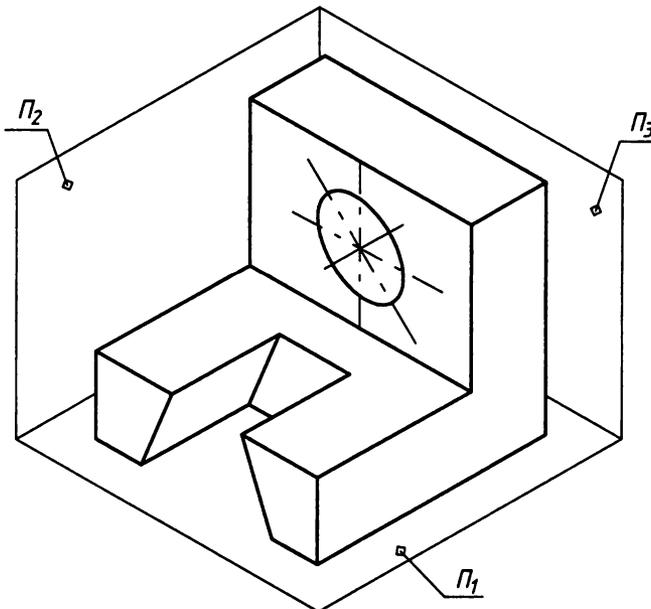


Рис. 5.11. Образование видов

Если предмет поместить в первой четверти (рис. 5.11) так, чтобы он находился между плоскостью проекций и наблюдателем, то изображения видимой наблюдателем части поверхности предмета на известные нам плоскости проекций называют видами.

Изображение на  $\Pi_2$  (рис. 5.12) называют видом спереди, или главным видом; изображение на  $\Pi_1$  называют видом сверху, а изображение на  $\Pi_3$  называют видом слева. При этом предмет неподвижен, а меняется направление взгляда (перемещается наблюдатель), которое должно быть перпендикулярным выбранной плоскости проекций. Конечно, изображения точки, линии, отсека плоскости называют проекциями, так как они не соответствуют понятию вида.

Предмет следует располагать так, чтобы его главное изображение давало наиболее полное представление о составляющих поверхностях.

На виде допускается изображать невидимые части штриховой линией, например цилиндрическое отверстие в детали на рис. 5.12.

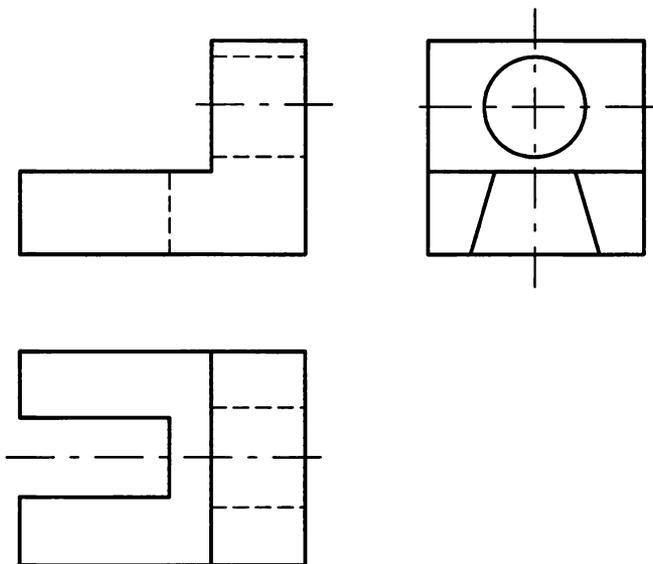


Рис. 5.12. Размещение видов

Если виды располагают в проекционной связи и они не разделены другими изображениями, то их не обозначают и не надписывают.

Более подробные сведения о правилах образования, размещения и оформления изображений, которые используются в конструкторской документации, содержатся в стандартах ЕСКД, и, в частности, в ГОСТ 2.305-68 «Изображения — виды, разрезы, сечения». Но эти проблемы изучаются в курсе инженерной графики, а понятие о видах здесь дано потому, что его удобно использовать в отдельных видах учебных графических работ и оно является тем мостиком, который позволяет плавно перейти от теоретических основ образования и свойств изображений к их практическому приложению.

## 5.4. Родственное соответствие в ортогональных проекциях

Выберем проекционный аппарат следующим образом. Возьмем совмещенные плоскости  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  с осью проекций  $x$  (рис. 5.13). Через ось  $x$  проведем биссекторную плоскость  $\Pi_b$ . За вспомогательные плоскости проекций принимаем плоскости  $\Pi_b$  и  $\Pi_2$ , основная плоскость проекций  $\Pi_2$ , выбираем направление проецирования  $s_1$  параллельно фронтальной плоскости  $\Pi_2$ , а  $s = s_2 \perp \Pi_2$  (см. рис. 5.2, в, раздел 5.1). В пространстве зададим плоскость  $\alpha$  ( $a \cap b$ ), точку пересечения прямых обозначим  $A = a \cap b$ . Точки  $1 = a \cap \Pi_b$  и  $2 = b \cap \Pi_b$  двойные, они принадлежат двойной прямой  $\rho_b = \alpha \cap \Pi_b$ . Спроецируем точку  $A$  по направлению  $s_1 \parallel \Pi_2$  на плоскость  $\Pi_b$ :  $A_b = (AA_b) \cap \Pi_b$ .  $\alpha_b$  ( $a_b \cap b_b$ ) – проекция плоскости  $\alpha$  на плоскость  $\Pi_b$ .

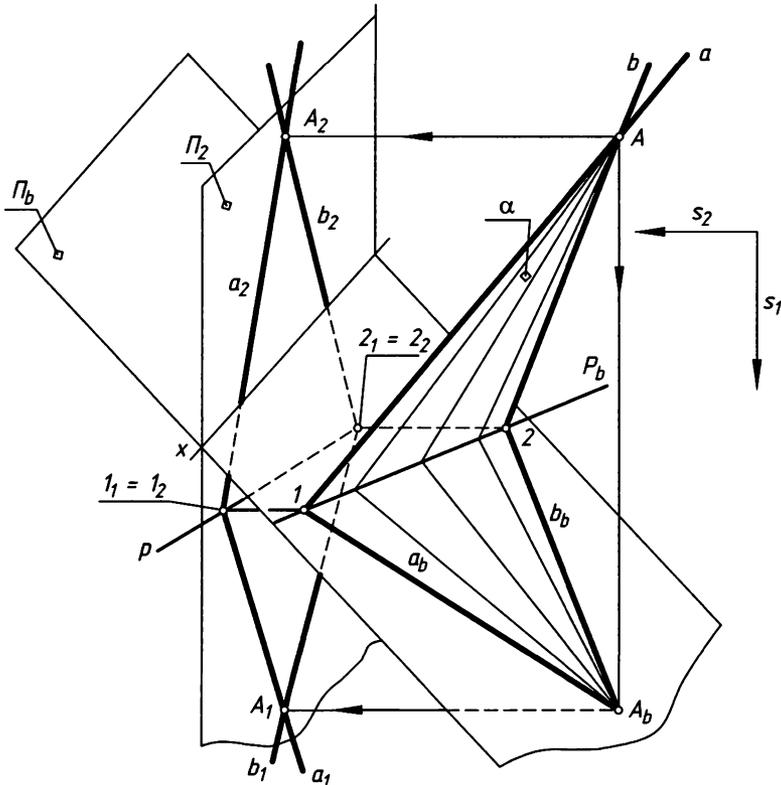


Рис. 5.13. Перспективно-аффинное соответствие и его ортогональная проекция

Таким образом, между плоскостью общего положения  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) и ее вертикальной проекцией  $\alpha_b$  ( $a_b \cap b_b$ ) на биссекторную плоскость  $\Pi_b$  установлено перспективно-аффинное соответствие с осью родства  $\rho_b = \alpha \cap \Pi_b$  или  $\rho_b = \alpha \cap \Pi_b$ . То есть осью родства является прямая пересечения плоскости общего положения с биссекторной плоскостью.

Спроецируем ортогонально (по направлению  $s = s_2$ ) эти поля на совмещенные плоскости  $\Pi_1 = \Pi_2$ :

- $\alpha \rightarrow \alpha_2 = a_2 \cap b_2$  или  $\alpha_2 (A_2, 1_2, 2_2)$ ;
- $\alpha_b \rightarrow \alpha_1 = a_1 \cap b_1$  или  $\alpha_1 (A_1, 1_1, 2_1)$ ;
- $p_b \rightarrow p$ .

По теореме Дезарга мы имеем родственное соответствие ортогональных проекций, в котором  $p$  — ось родства, линия связи  $A_1 A_2$  — направление родства, а горизонтальную проекцию  $\alpha_1 (a_1 \cap b_1)$  можно рассматривать как вторичную проекцию поля  $\alpha_b$  (рис. 5.14, сравните с рис. 5.13).

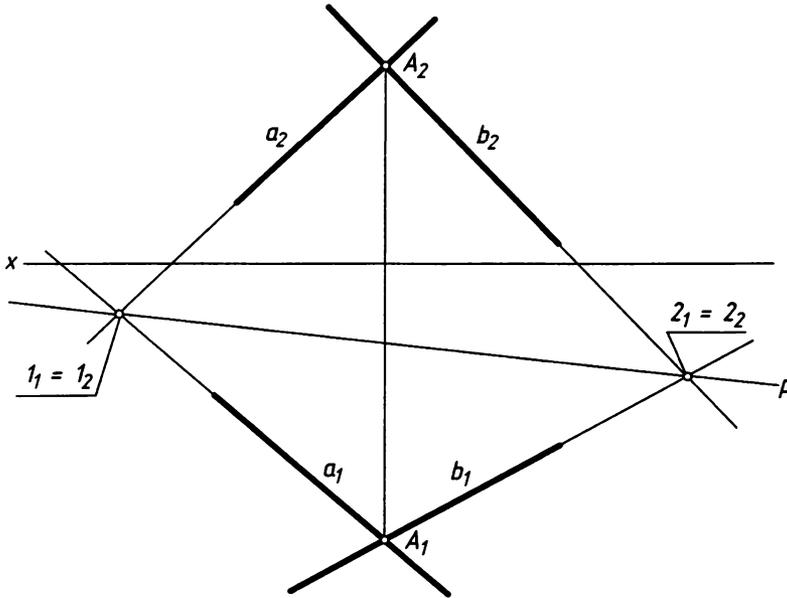


Рис. 5.14. Гомология в ортогональной проекции

Итак, между полями фронтальной и горизонтальной проекции плоскости общего положения устанавливается родственное соответствие, в котором осью родства является прямая линия, проходящая через точки пересечения двух пар соответственных прямых плоскости, а направление родства указывают линии проекционной связи.

Плоскости, пересекающие биссекторную плоскость по одной прямой, устанавливают различные родственные соответствия с общей осью родства.

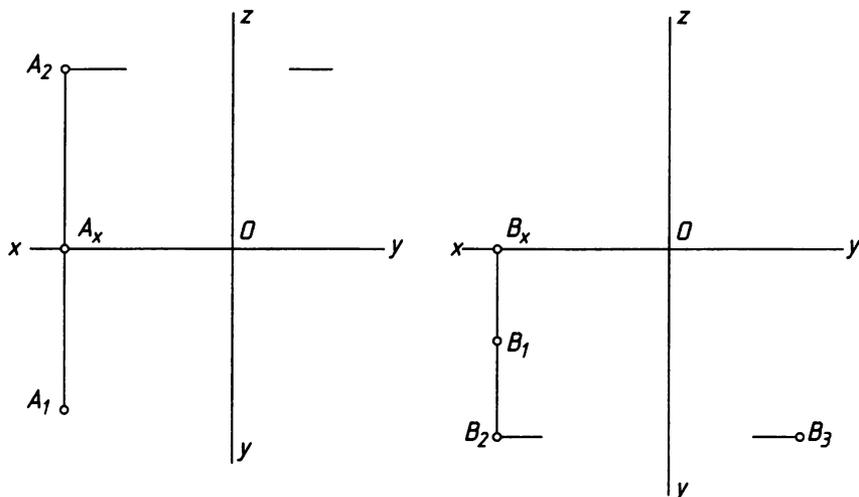
Если ось родства совпадает с осью  $x$  проекций, значит, плоскость общего положения проходит через ось  $x$ .

Родство, устанавливаемое биссекторной плоскостью нечетных четвертей, является симметрией.

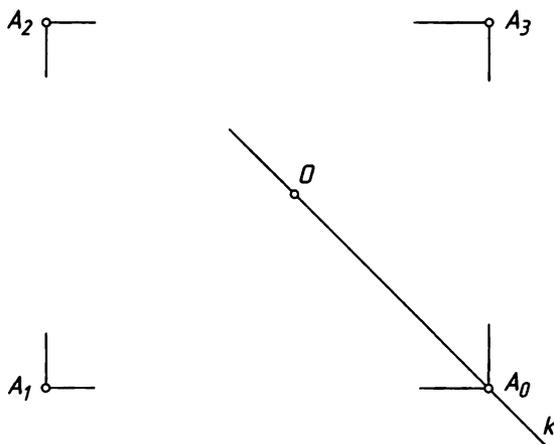
Сама биссекторная плоскость четных четвертей устанавливает тождественное соответствие.

## Вопросы и задания

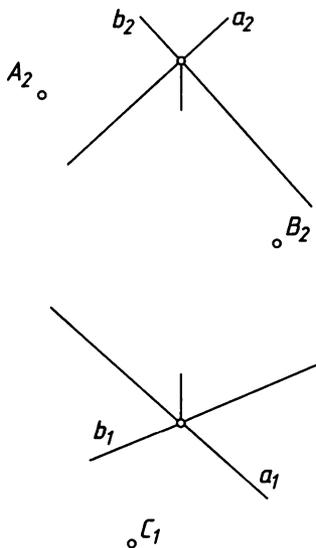
1. Что называют комплексным чертежом?
2. Постройте картину образования эпюра Монжа на примере построения двух изображений точки с осью и безосного. Как можно выбрать ось в безосном чертеже?
3. Покажите аппарат проецирования и постройте двухкартинный комплексный чертеж точки методом двух изображений.
4. Постройте картину образования комплексного чертежа из трех проекций, покажите оси, координаты точки и назовите все элементы, определяющие ее положение.
5. Покажите изображения точки в разных четвертях пространства, сравните знаки их координат.
6. Покажите четную и нечетную биссекторную плоскость и изображения точек, лежащих в этих плоскостях. Какими свойствами обладают координаты этих точек?
7. Постройте комплексный чертеж точки, принадлежащей полю  $\Pi_1$ , полю  $\Pi_2$ , полю  $\Pi_3$ .
8. Как связана проекционная модель, заданная тремя проекциями одной точки? Проясните на примере.
9. Задайте безосный чертеж точек  $A (A_1, A_2, A_3); B (B_1, B_2); C (C_2, C_3); D (D_1, D_3)$ . Постройте третьи проекции точек  $B, C$  и  $D$ . Выберите оси чертежа и запишите координаты каждой точки. Смените положение оси  $x$  и сравните новые координаты точек с предыдущими координатами.
10. Постройте три изображения точек  $A (15, 10, 60), B (30, 50, -10), C (50, -30, 30)$ . Постройте систему координат  $Oxyz$ , у которой начало имеет координаты  $O (15, 20, 10)$ . Запишите координаты точек  $A, B, C, D$  в новой системе.
11. Покажите отрезки, равные расстоянию от точки  $A$  и  $B$  до плоскости проекций  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  и до оси  $x, y, z$ .



12. Постройте натуральную систему координат  $O'xyz$  с началом в точке  $O'$  (15, 10, 10) и запишите координаты точки  $A$  в этой системе, если  $|A_1A_2| = 70$  мм,  $|A_2A_3| = 80$  мм,  $|OA_0| = 35$  мм.



13. Плоскость  $\alpha$  задана двумя пересекающимися прямыми  $a$  и  $b$ :  $\alpha (a \cap b)$ .



Постройте ось родства и изображения треугольника  $ABC$  плоскости  $\alpha$  по заданным изображениям  $A_2, B_2, C_1$  его вершин.

# Глава 6

## АксонOMETРИЧЕСКИЙ ЧЕРТЕЖ

### 6.1. Образование, основные параметры и классификация аксонометрических проекций

Основным недостатком комплексного чертежа является его сравнительно низкая наглядность. Поэтому в инженерной практике при необходимости используют изображения, называемые *аксонометрическими проекциями*. При этом дополнительным условием проецирования, обеспечивающим обратимость чертежа, служит прямоугольная система координат, которую называют натуральной. Главное достоинство этих проекций — наглядность.

*АксонOMETРИЧЕСКИМИ* называют проекции объекта ( $A$ ) вместе с натуральной системой координат ( $Oxyz$ ) на одну плоскость ( $\Pi'$ ) проекций (рис. 6.1).

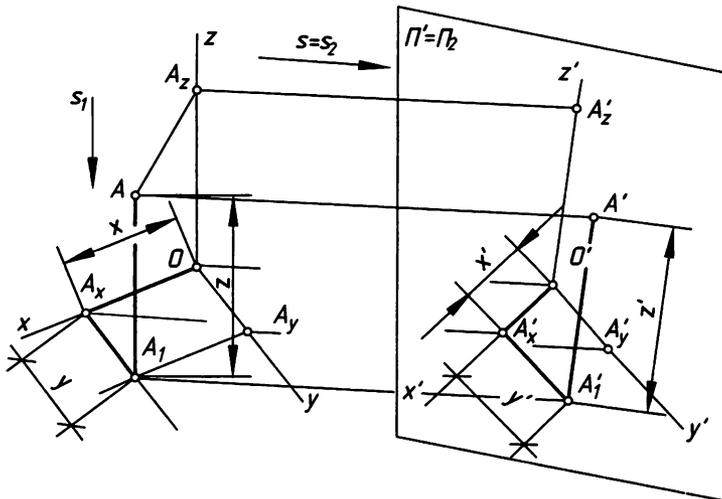


Рис. 6.1. Образование аксонометрической проекции

Возьмем точку  $A$  в натуральной системе координат  $Oxyz$ . В качестве вспомогательной плоскости  $\Pi$ , проекций возьмем координатную плоскость  $xOy$  натуральной

системы координат (см. метод двух изображений в разделах 3.4.1 и 5.1). Вторую вспомогательную плоскость  $\Pi_2$  совместим с основной плоскостью  $\Pi'$  проекций. Несобственные центры проецирования назовём так, чтобы направление  $s$ , проецирования было перпендикулярным  $\Pi_1 \equiv xOy$ , а два других направления совпали:  $s = s_2$ . Построим ортогональную проекцию  $A_1$  точки  $A$  на координатную плоскость  $xOy$ . Обозначим ломаную координатную линию  $OA_1A$ .

Спроецируем натуральную систему координат  $Oxyz$  с объектом  $A$  ( $A_1$ ) по направлению  $s$  параллельного проецирования на плоскость  $\Pi'$ , которую называют *аксонометрической плоскостью проекций*. Далее обозначения, связанные с плоскостью  $\Pi_2$ , выделять не будем, чтобы избавиться от двойного индекса.

На проецирующей прямой  $OO'$  отметим точку  $O'$  ее предполагаемого пересечения с плоскостью  $\Pi'$ , то есть  $O' = (OO') \cap \Pi'$  — параллельная проекция точки  $O$ . Аналогично укажем предполагаемые проекции  $A'_x = (A_1A'_x) \cap \Pi'$ ,  $A'_y = (A_1A'_y) \cap \Pi'$ ,  $A'_z = (A_1A'_z) \cap \Pi'$  и соединим их с точкой  $O'$ . Получим плоскую систему  $O'x'y'z'$ , называемую *аксонометрической системой координат*.

Установим связь между построенной  $O'x'y'z'$  и натуральной  $Oxyz$  системой координат.

Используя свойства 7, 8 и 9 параллельного проецирования (см. раздел 3.2), вычислим показатели искажения по направлениям осей:

$$\square u = \frac{|O'A'_x|}{|OA_x|} = \frac{x'}{x} \text{ — для всех прямых, параллельных оси } x;$$

$$\square v = \frac{|O'A'_y|}{|OA_y|} = \frac{y'}{y} \text{ — для всех прямых, параллельных оси } y;$$

$$\square w = \frac{|O'A'_z|}{|OA_z|} = \frac{z'}{z} \text{ — для всех прямых, параллельных оси } z.$$

Отсюда связь координат:

$$x' = u \cdot x, y' = v \cdot y, z' = w \cdot z.$$

Эта связь обеспечивает обратимость чертежа.

Теперь спроецируем точку  $A$  и ее первичную проекцию  $A_1$  на плоскость  $\Pi'$ . Учитывая свойства проекций параллельных прямых, из точки  $A'_x$  проведем прямую  $A'_xA'_1$  параллельно  $O'y'$  и в пересечении с проецирующей прямой  $AA_1$ , точки  $A_1$  получим  $A'_1$  — вторичную проекцию точки  $A$  ( $A_1$  — первичная проекция,  $A'_1$  — ее вторичная проекция). Ее же можно построить, откладывая координатные отрезки  $x'$  и  $y'$ .

*Аксонометрическая проекция  $A'$  точки  $A$  определится в точке пересечения проецирующей прямой  $AA_1$  с прямой  $A'_1A'_1 \parallel z'$  или построением координатного отрезка  $z'$ , параллельного оси  $O'z'$ . Совокупность изображений  $A'_1$  и  $A'$  называют *аксонометрическим чертёжом*, или *аксонометрией*, точки  $A$ .*

Сравнивая две системы координат, мы видим, что процесс построения изображений ( $A'_1A'$ ) точки  $A$  в аксонометрических осях  $O'x'y'z'$  одинаков с определением положения основания  $A_1$  и оригинала  $A$  в натуральной системе  $Oxyz$ . Разница только в том,

что координатные отрезки  $x, y, z$  натуральной системы взаимно перпендикулярны в пространстве, а в аксонометрической системе их перпендикулярность не сохраняется, но они параллельны проекциям  $x', y', z'$  соответствующих координатных осей. Из последнего замечания следует, что порядок построения точки в аксонометрии может быть и другой. Например, строим координатную ломаную линию  $x'-z'-y'$  (рис. 6.2, а).

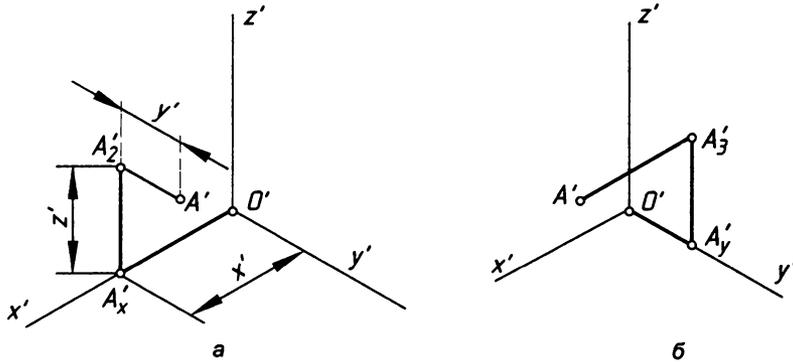


Рис. 6.2. Варианты ломаной координатной линии

В этом случае вторичной проекцией является точка  $A'_2$ , которая получена проецированием проекции  $A_2$  точки  $A$  на координатную плоскость  $xOz$  натуральной системы, которую можно совместить с фронтальной плоскостью проекций комплексного чертежа. И тогда  $A_2$  можно назвать фронтальной проекцией точки  $A$ . Это соответствует новому проекционному аппарату, в котором:  $\Pi_2 = xOz$ ,  $s_2 \perp \Pi_2$ ,  $\Pi' = \Pi_1$  и  $s = s_1$ .

Используя ломаную  $y'-z'-x'$ , будем иметь вторичную проекцию  $A'_3$  на координатную плоскость  $y'Oz'$  проекции  $A_3$  на плоскость  $yOz$ , которую можно совместить с профильной плоскостью проекций комплексного чертежа (рис. 6. 2, б). Соответственно меняется и проекционный аппарат: вместо  $\Pi_2$  используем плоскость  $\Pi_3 = yOz$ ,  $s_2 \perp \Pi_3$ ,  $\Pi' = \Pi_1$  и  $s = s_1$ .

Проводя аналогию с эпюром, в практике для вторичных проекций используют такие условные названия:

- $A'_1$  — вторичная проекция горизонтальной проекции точки  $A$ ;
- $A'_2$  — вторичная проекция фронтальной проекции точки  $A$ ;
- $A'_3$  — вторичная проекция профильной проекции точки  $A$ .

Подводя итог, можно сказать, что для построения аксонометрического чертежа объекта необходимо выбрать аксонометрические оси координат  $O'x'y'z'$  и показатели искажения по ним.

Решение этой задачи дает теорема Польке—Шварца, которая в упрощенном изложении утверждает: *аксонометрические оси на плоскости  $\Pi'$  чертежа и показатели искажения по ним могут быть выбраны произвольно.*

Это основная теорема аксонометрии. Ее открыл в 1853 г. профессор Академии изобразительных искусств и Строительной академии в Берлине Карл Польке

(1810–1876), а первое обобщение и элементарное доказательство сделал немецкий геометр Г. А. Шварц в 1864 г. [31].

Итогом этой теоремы является основное уравнение аксонометрии, которое мы используем без доказательства (более подробно с выводом уравнения можно ознакомиться в работах [13], [16], [31] и др.):

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2 + \operatorname{ctg}^2 \varphi, \quad (1)$$

где  $\varphi = \angle \pi' - \pi''$  — угол между направлением основного проецирования и плоскостью проекций (угол проецирования).

Для любого значения левой части уравнения всегда можно подобрать значение угла  $\varphi$ , удовлетворяющее условию равенства. В действительности на выбор осей и показателей искажения накладываются определенные ограничения. Например, показатель искажения не может быть равен нулю, то есть ни одна координатная ось не может быть проецирующей прямой.

Из уравнения (1) следует, что

$$0 < u \leq N; 0 < v \leq N; 0 < w \leq N$$

$$\text{и } 1 \leq u^2 + v^2 \leq N; 1 \leq u^2 + w^2 \leq N; 1 \leq v^2 + w^2 \leq N,$$

где  $N$  — любое конечное число.

Проекции с углом  $0^\circ < \varphi < 90^\circ$  называются *косоугольными*.

Если  $\varphi = 90^\circ$ , то аксонометрия называется *прямоугольной*, или *ортогональной*. В этом случае уравнение (1) запишется так:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 2. \quad (2)$$

Здесь на показатели искажения накладываются следующие ограничения:

$$0 < u \leq 1; 0 < v \leq 1; 0 < w \leq 1$$

$$\text{и } 1 \leq u^2 + v^2 \leq 2; 1 \leq u^2 + w^2 \leq 2; 1 \leq v^2 + w^2 \leq 2.$$

Из уравнения (2) следует, что мы можем задать в указанных пределах два показателя искажения, а третий вычисляется.

Подробнее о выборе аксонометрических проекций и показателей искажения можно прочитать в специальной литературе, например, в работе [31].

По относительному значению показателей искажения различают следующие виды аксонометрии:

- при  $u \neq v \neq w$  — *триметрическая (триметрия)*;
- при  $u = v \neq w, u = w \neq v, v = w \neq u$  — *диметрическая (диметрия)*;
- при  $u = v = w$  — *изометрическая (изометрия)*.

От удачного выбора параметров аксонометрии зависит конечный результат работы — наглядность изображения. Поэтому принят ГОСТ 2.317-69 «Аксонометрические проекции», который устанавливает стандарты на аксонометрические проекции, применяемые во всех отраслях промышленности и строительства.

## 6.2. Стандартные аксонометрические чертежи

Условимся называть аксонометрию точной, если ее показатели искажения соответствуют основному уравнению аксонометрии. Ниже приведены параметры отдельных стандартных аксонометрических проекций, которые часто используются в учебном процессе и в инженерной практике.

### 6.2.1. Изометрические прямоугольные проекции

Положение осей прямоугольной изометрии показано на рис. 6.3.

Из уравнения (2) для изометрии получим

$$u = v = w = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82.$$

Это значит, что  $x' = 0,82 \cdot x$ ,  $y' = 0,82 \cdot y$ ,  $z' = 0,82 \cdot z$ . Такое умножение значительно усложняет работу. Поэтому применяют показатели:

$$U = m \cdot u = 1, V = m \cdot v = 1, W = m \cdot w = 1,$$

которые называют *приведенными*,  
а коэффициент

$$m = U / u \approx 1,22$$

называют *коэффициентом приведения* и аксонометрию называют *приведенной*. Такой прием не искажает изображения, а соответствует преобразованию подобия (гомотетии) или масштабу увеличения  $M$  1,22:1. Это не стандартный масштаб, и он не указывается на чертеже. Чертеж, на котором не указан масштаб, определяет объект до подобия.

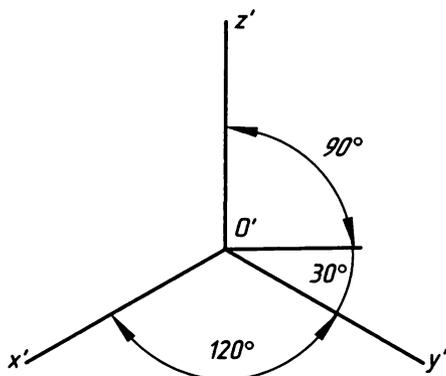


Рис. 6.3. Оси прямоугольной изометрии

Но если мы увеличиваем натуральные координаты, например, в 2 раза, то в соответствующем месте чертежа (например, в основной надписи) необходимо указать стандартный масштаб увеличения 2:1, хотя объект все равно будет определен с точностью до подобия, так как масштаб приведения при этом не учитывается.

Приведенная аксонометрия значительно удобнее в работе, благодаря чему ее часто используют. Это значит, что если нужно по координатам  $x, y, z$  построить точку  $A$  в приведенной изометрии, то непосредственно эти координаты мы и будем откладывать по аксонометрическим осям:  $x' = x, y' = y, z' = z$ .

## 6.2.2. Диметрические прямоугольные проекции

Положение координатных осей прямоугольной диметрии показано на рис. 6.4.

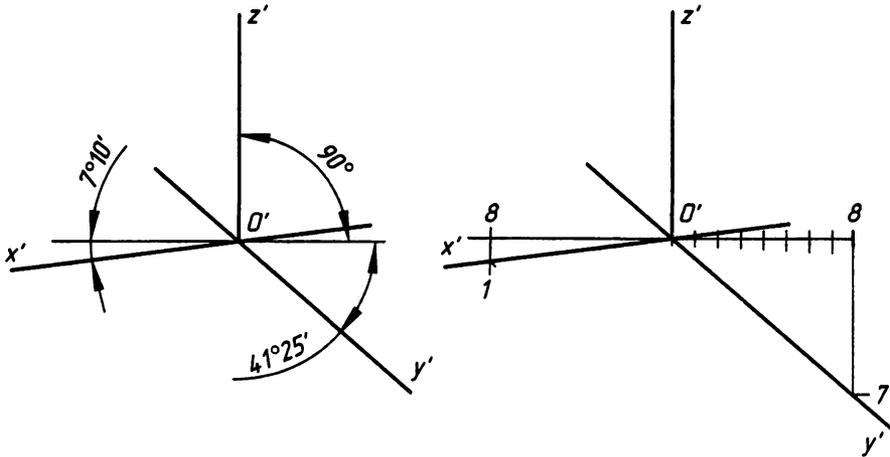


Рис. 6.4. Оси прямоугольной диметрии

Для удобства построения осей рекомендуется от точки  $O'$  влево отложить восемь равных отрезков, а потом вниз один такой же отрезок и полученную точку соединить с  $O'$ . Это будет ось  $x'$ . Затем от точки  $O'$  вправо отложить восемь равных отрезков и вниз семь таких же отрезков. Полученную точку соединить с  $O'$ . Это будет ось  $y'$ .

Здесь принято:  $u = w; v = 0,5u$ .

Подставим эти значения в уравнение (2) и получим  $u = w = 0,94, v = 0,47$ .

Эти числа не очень удобны для работы. Поэтому принимают приведенные показатели искажения:

$$u = w = 1; v = 0,5; m = 1,06.$$

Этот вид аксонометрии удобно применять в тех случаях, когда нужно раскрыть предмет со стороны одной плоскости, например,  $xOz$  или  $yOz$ .

## 6.2.3. Косоугольные фронтальные изометрические проекции

Оси этой проекции показаны на рис. 6.5.

Допускается применять косоугольные фронтальные изометрические проекции с углом наклона оси  $y'$   $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

Показатели искажения:  $u = v = w = 1$ .

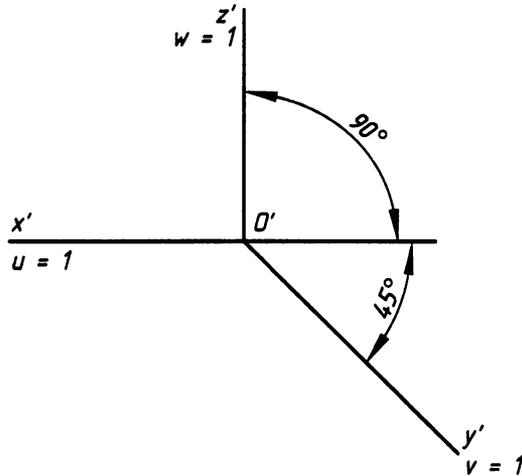


Рис. 6.5. Оси косоугольной фронтальной изометрии

#### 6.2.4. Косоугольные горизонтальные изометрические проекции

Оси этой проекции показаны на рис. 6.6.

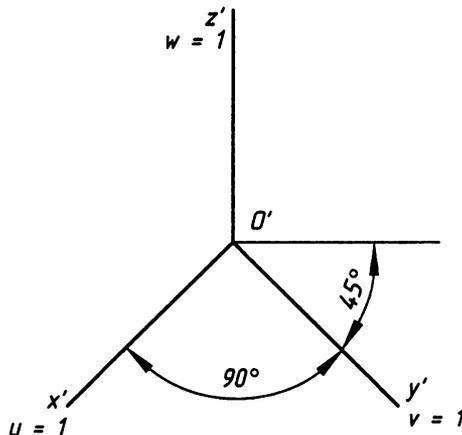


Рис. 6.6. Оси косоугольной горизонтальной изометрии

Допускается применять горизонтальные косоугольные проекции с углом наклона оси  $y'$  равным  $60^\circ$ . Показатели искажения:  $u = v = w = 1$ .

#### 6.2.5. Косоугольные фронтальные диметрические проекции

Координатные оси этих проекций показаны на рис. 6.7.

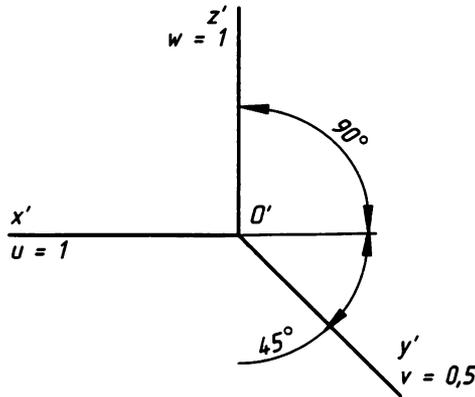


Рис. 6.7. Координатные оси фронтальной косоугольной диметрии

Допускается применять фронтальные диметрические проекции с углом наклона оси  $y'$  равным  $30^\circ$  и  $60^\circ$ .

Показатели искажения:  $u = w = 1, v = 0,5$ .

## Вопросы и задания

1. Какие чертежи называют аксонометрическими?
2. Раскройте проекционный аппарат аксонометрического чертежа.
3. Какой прием используется для обеспечения обратимости аксонометрического чертежа?
4. О чем говорит основная теорема аксонометрии?
5. Что называют показателями искажения в аксонометрии?
6. Как устанавливается связь аксонометрической и натуральной систем координат?
7. Какую линию называют координатной ломаной?
8. Напишите основное уравнение аксонометрии для косоугольного и ортогонального проецирования.
9. Как классифицируют аксонометрические чертежи?
10. Постройте изображение треугольной пластины, заданной вершинами  $A(60, 70, 80)$ ,  $B(30, 10, 100)$ ,  $C(15, 50, 25)$ , в стандартной прямоугольной точной и приведенной изометрии и диметрии. При этом аксонометрические проекции пластин обведите толстыми линиями, а вторичные проекции — тонкими. Сравните полученные аксонометрические картины.
11. Какие проекции называют точными и приведенными? Что называют коэффициентом приведения?

# Глава 7

## Чертежи элементарных геометрических объектов. Позиционные и метрические задачи

*Элементарными* условимся называть такие геометрические объекты, которые в рассматриваемых задачах приняты неделимыми.

В этой главе элементарными объектами мы будем называть неопределяемые геометрические объекты: точку, прямую, плоскость.

Задачи, связанные с относительным расположением геометрических объектов (принадлежности, параллельности, пересечения), называют *позиционными*.

Задачи определения или использования размеров (длин, углов, площадей, объемов) называют *метрическими*.

Задачи, связанные с построением изображений геометрических объектов и их преобразованием, являются *задачами конструирования*, или *синтеза*.

Задачи, связанные с узнаванием геометрических объектов, их обратимостью, являются *задачами анализа*. Их также называют репродуктивными, или аналитическими.

### 7.1. Чертежи точки и прямой линии

Точка задается координатами  $A(xyz)$ , принадлежностью или пересечением геометрических объектов.

Допустим, точка задана координатами:  $A(20, 15, 25)$ . Если размерность не указана, это значит, что масштабный отрезок  $e = 1$  мм,  $x = 20$  мм,  $y = 15$  мм,  $z = 25$  мм.

Построим оси проекций  $Oxyz$  (рис. 7.1, а).

От начала координат  $O$  по оси  $x$  откладываем отрезок  $x = 20$  мм, если  $M 1:1$ . Если масштаб другой, то соответственно изменяем длину отрезка. Пусть, например,  $M 2:1$ , тогда на чертеже нужно отложить отрезок, равный  $2x = 2 \times 20 = 40$  мм. В примере на рис. 7.1 принят  $M 1:1$ . Через точку  $A_x$  проводим вертикальную линию связи и, отложив  $y$ , получаем  $A_y$ , отложив  $z$ , получаем  $A_z$ . Через фронтальную проекцию  $A_2$  точки  $A$  проводим горизонтальную линию связи и, отложив  $y$  от точки  $A_y$ , получаем профильную проекцию  $A_3$  точки  $A$ . Обычно точки  $A_x$  и  $A_z$  на чертеже не указывают.

Получим трехкартинный чертеж точки с осями. В аксонометрии строим координатную ломаную  $x-y-z$  и отмечаем точки  $A'_1$  и  $A'$  (рис. 7.1, б). Если строится безосный чертеж, то выбирается, например, положение фронтальной проекции  $A_2$  (рис. 7.1, в). Затем, отложив отрезок  $(y + z)$  по вертикальной линии связи и  $(x + y)$  по горизонтальной, отмечаем положения горизонтальной  $A_1$  и профильной  $A_3$  проекций.

Часто в работе пользуются двухкартинным чертежом. Тогда на оси  $x$  проекций нужно выбрать начало отсчета  $O$  (рис. 7.1, з) и построить  $(A_1, A_2)$ , как показано на рис. 7.1, а. В таком же безосном чертеже (рис. 7.1, д) координата по оси  $x$  не используется.

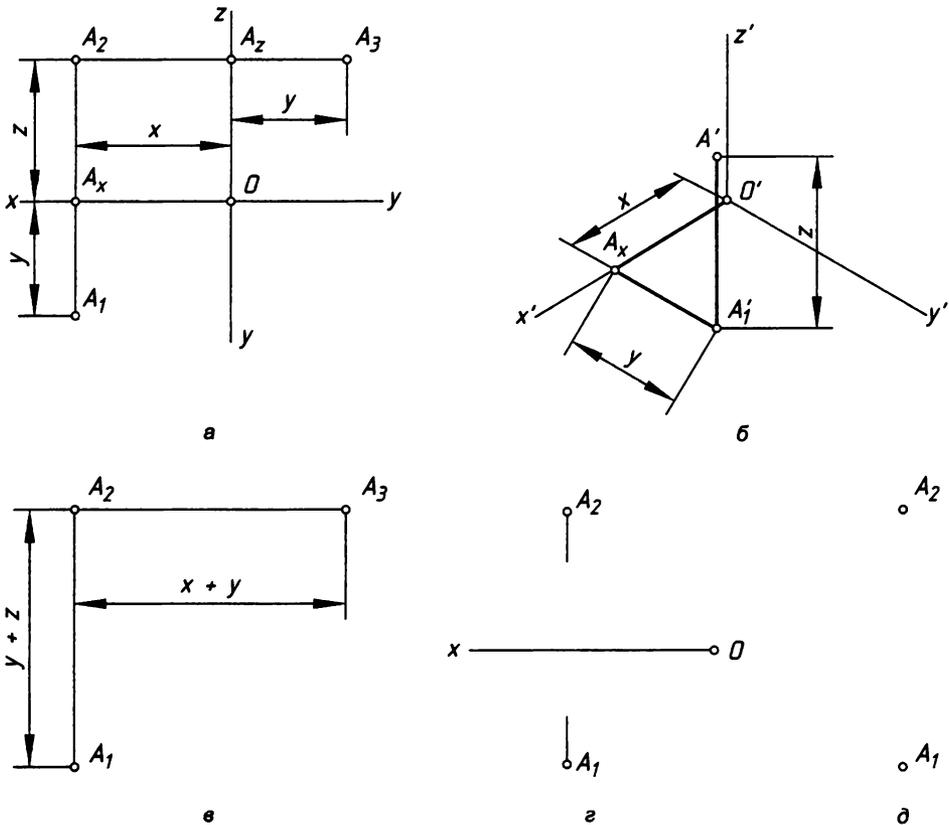


Рис. 7.1. Изображение точки по координатам

Если задан чертеж (рис. 7.2, а) точки  $A (A_1, A_2, A_3)$  и требуется провести анализ ее положения, то для этого удобно использовать аксонометрические проекции в форме эскиза (рисунка), которые помогут получить более наглядное представление о положении объекта в пространстве. Например, отметим точки  $A_x$  и  $A_z$  на эпюре. Построим произвольные аксонометрические оси  $O'x'y'z'$  (удобнее взять их похожими на оси прямоугольной изометрии) и проекции  $A'_1$  и  $A'$  (рис. 7.2, б), приняв отрезки:

$$OA_x = O'A'_x; A_xA_1 = A'_xA'_1; A_2A_x = A'_1A'_x.$$

Эти построения можно сделать эскизно, то есть от руки и в глазомерном масштабе. Такой рисунок помогает создать пространственный образ и понять, что на эюре:

- $A_1A_x = y$  — глубина точки  $A$ , равная расстоянию от точки до фронтальной плоскости проекций.
- $A_2A_z = z$  — высота точки  $A$ , равная расстоянию от точки до горизонтальной плоскости проекций.
- $A_3A_y = x$  — широта точки  $A$ , равная расстоянию от точки до профильной плоскости проекций.

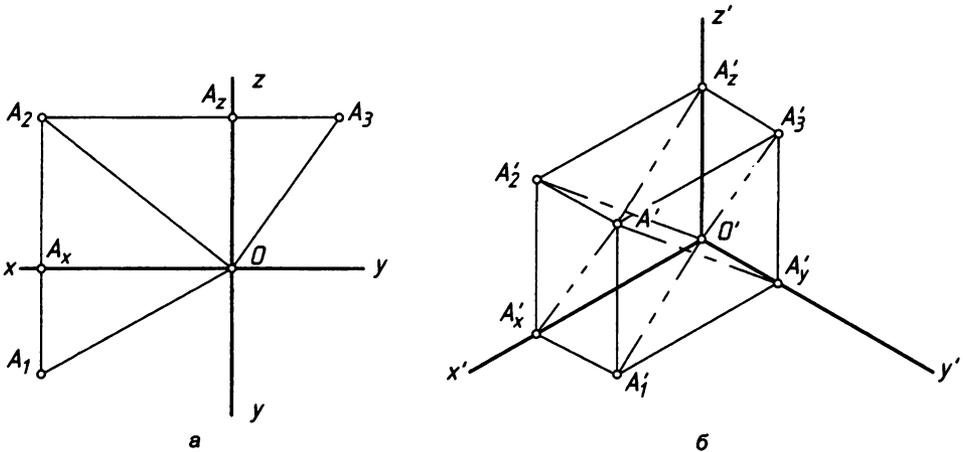


Рис. 7.2. Анализ эюра

- $OA_1$  — расстояние от точки  $A$  до оси  $z$ .
- $OA_2$  — расстояние от точки  $A$  до оси  $y$ .
- $OA_3$  — расстояние от точки  $A$  до оси  $x$ .

Все координаты положительные, следовательно, точка находится в первой четверти.

В общем случае *прямая линия* задается двумя точками (собственными или несобственными). На чертеже (рис. 7.3) прямую линию можно задать различными способами. Например, ее задают проекциями отрезка  $[AB]$  (рис. 7.3, а). Можно прямую линию задать проекциями двух точек  $(CD)$  (рис. 7.3, б) или изображением прямой  $a$  ( $a_1, a_2$ ) произвольной длины (рис. 7.3, в).

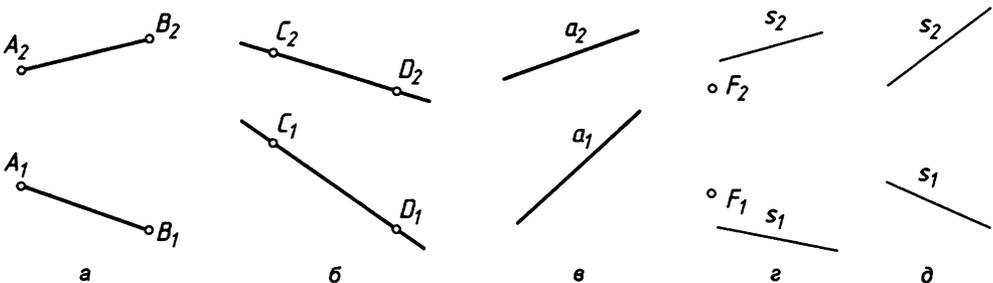


Рис. 7.3. Варианты изображения прямой линии

Можно указать проекции точки  $F (F_1 F_2)$  и направления  $s (s_1 s_2)$ , которому прямая должна быть параллельной (рис. 7.3, з), или проекциями направления  $s (s_1 s_2)$ , которому должно быть параллельно семейство прямых линий (рис. 7.3, д).

*Прямая линия*, произвольно расположенная в пространстве, называется *прямой общего положения* (см. рис. 7.3).

Точка  $A$  принадлежит прямой (рис. 7.4, а), если ее проекции принадлежат соответствующим проекциям прямой, то есть  $A_1 \in d_1, A_2 \in d_2 \Rightarrow A \in d$ . Точка  $B \in d$ , а точка  $D$  не принадлежит  $d$ . Так как  $B_2 = D_2$ , точка  $D$  по отношению к точке  $B$  является фронтально конкурирующей. Она лежит перед прямой, и проекция  $B_2$  не видна, так как она закрылась проекцией  $D_2$ . А точки  $C$  и  $E$  являются горизонтально конкурирующими, так как  $C_1 = E_1$  и точка  $E$  лежит под точкой  $C$ , то есть под прямой, поэтому проекция  $E_1$  не будет видна.

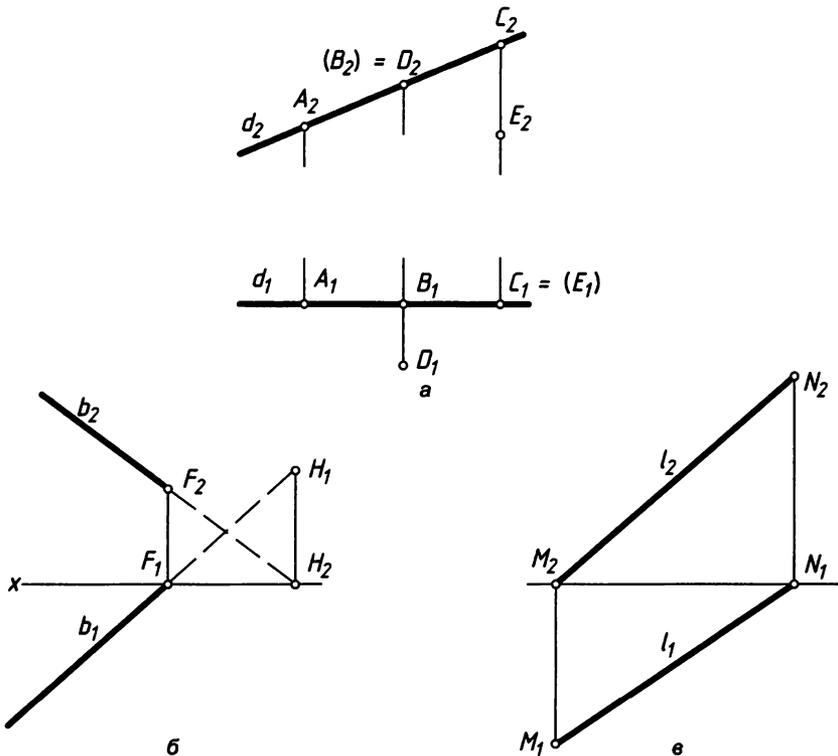


Рис. 7.4. Задачи принадлежности и следы прямой

Точка пересечения прямой с плоскостью проекций называется *следом* этой прямой. Это значит, что след может определяться при заданных плоскостях проекций, а для этого достаточно задать ось  $x$  (рис. 7.4, б). Следу присваивается название той плоскости проекций, которой он принадлежит.

Горизонтальный след  $M = l \cap l_1$  (рис. 7.4, в) совпадает со своей горизонтальной проекцией  $M_1$  и имеет координату  $z_M = 0$ . Следовательно,  $M_2 = l_2 \cap x$ , а  $M_1 = (M_2 M_1) \cap l_1$ .

то есть лежит на  $l$ , и вертикальной линии связи. Аналогично находим фронтальный след  $N = N_2: N_1 = l \cap x$ , так как  $y_n = 0; N_2 = l_2 \cap (N_1, N_2)$ .

На рис. 7.4, б фронтальный след  $F (F_1, F_2)$  находится в первой четверти, а горизонтальный след  $H (H_1, H_2)$  находится во второй четверти (сравните рис. 7.4, б и в по характеру построения следов).

Если заданы оси проекций  $Oxyz$  (рис. 7.5, а) и прямая линия  $a (a_1, a_2)$ , то ее следы можно определить в следующем порядке:

- горизонтальный след  $H: z_n = 0 \Rightarrow H_2 = a_2 \cap x, H_1 = (H_2, H_1) \cap a_1$ ;
- фронтальный след  $F: y_f = 0 \Rightarrow F_1 = a_1 \cap x, F_2 = (F_1, F_2) \cap a_2$ ;
- профильный след  $W: x_w = 0 \Rightarrow W_1 = a_1 \cap y, W_2 = a_2 \cap z$ .

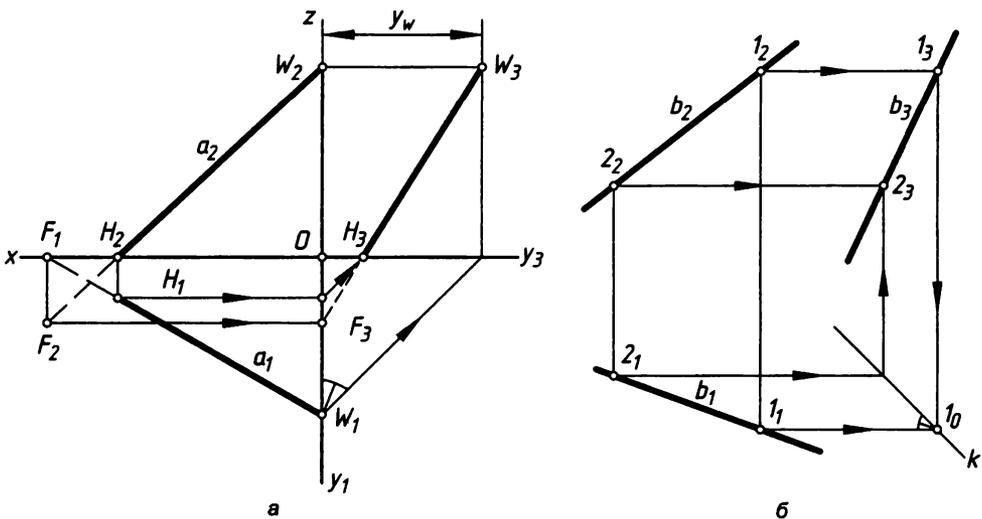


Рис. 7.5. Трехкартинный чертеж прямой линии

Для построения профильной проекции  $W_3$  профильного следа отложим  $y_w = [OW_1]$  или поступим так:

- через  $W_1$  проведем прямую под углом  $45^\circ$  до пересечения с  $y_3$  (это гипотенуза треугольника с катетами  $[OW_1] = y_w$ ) и вертикальную линию;
- из  $W_2$  проводим горизонтальную линию связи ( $W_2, W_3$ ).

Для построения профильной проекции  $a_3$  прямой при известном положении  $W_3$  достаточно построить профильную проекцию  $F_3$  фронтального следа или  $H_3$  горизонтального следа (построения показаны линиями связи со стрелками).

Постройте аксонометрический чертеж прямой линии  $a$  со следами и сравните с эпюром, это интересно.

Если прямая линия  $b$  задана проекциями  $(b_1, b_2)$  в безосном чертеже (рис. 7.5, б) и нужно построить ее профильную  $b_3$  проекцию, то для этого:

- выбирается точка, например  $1(1_1, 1_2)$ , и на горизонтальной линии связи задается ее профильная проекция  $1_3$ ;

- строится ломаная линия связи  $1_1-1_0-1_3$  и постоянная комплексного чертежа  $k$ ;
- выбирается точка  $2_2$  и определяется  $2_1-2_3$ ;
- через  $1_3-2_3$  проводится  $b_3$ .

Можно обойтись без этих построений, если использовать разность глубин  $\Delta y$ .

Из свойств ортогональных проекций (см. раздел 3.3) нам известно, что для определения натуральной величины отрезка  $|AB|$  и угла его наклона к плоскости проекций достаточно построить прямоугольный треугольник, у которого:

- один катет — проекция отрезка;
- другой катет равен разности расстояний концов отрезка до данной плоскости проекций, то есть разности соответствующих координат концов отрезка;
- гипотенуза треугольника равна натуральной величине отрезка;
- угол наклона гипотенузы к проекции отрезка равен углу наклона прямой к данной плоскости проекций.

На рис. 7.6, а показано определение этих параметров способом треугольника на всех проекциях. Здесь:

- $\Delta x = x_A - x_B$ ;  $\Delta y = y_B - y_A$ ;  $\Delta z = z_B - z_A$ ;
- $|AB| = |B_1A^*| = |A_2B^*| = |B_3A^*|$ ;
- $\angle \alpha = (AB) \wedge \Pi_1$ ;  $\angle \beta = (AB) \wedge \Pi_2$ ;  $\angle \gamma = (AB) \wedge \Pi_3$ .

Если нужна только длина отрезка, то достаточно построить один из треугольников, а если нужны углы наклона, то приходится строить треугольники на каждой проекции.

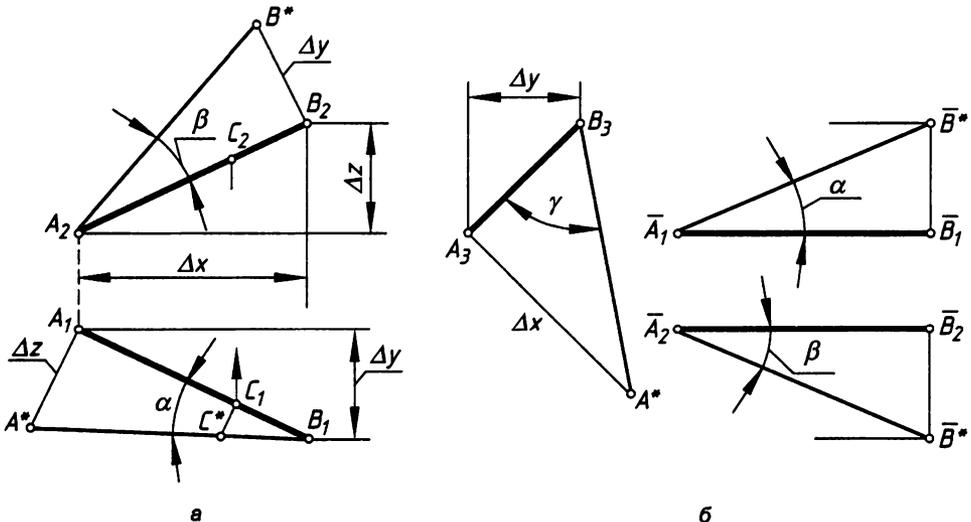


Рис. 7.6. Определение углов наклона и длины отрезка способом треугольника

Так же можно решать обратную задачу. Пусть, например, нужно от точки  $A$  отложить отрезок  $|AC|$ . Тогда от  $A^*$  откладываем  $|A^*C^*| = |AC|$  и  $C^* \rightarrow C_1 \rightarrow C_2$ .

Эти же треугольники можно построить в стороне от проекций объекта (рис. 7.6, б). Например, продолжим горизонтальные линии связи точек  $A_2$  и  $B_2$  за пределы профильной проекции. На одной из них отложим отрезок  $|\bar{A}_1\bar{B}_1| = |A_1B_1|$  и из точки  $B_1$  проведем вертикальную линию до пересечения с горизонтальной линией связи точки  $B_2$ . Получим  $\Delta \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{B}^* \cong \Delta B_1A_1A^*$ . Аналогично, проведем горизонтальные линии через проекции  $A_1$  и  $B_1$ , на одной из них отложим отрезок  $|\bar{A}_2\bar{B}_2| = |A_2B_2|$  и построим  $\Delta \bar{A}_2\bar{B}_2\bar{B}^* \cong \Delta A_2B_2B^*$ . Прием по рис. 7.6, б удобнее, если определяются размеры нескольких отрезков одного объекта.

### 7.1.1. Прямые линии частного положения

Прямые линии, параллельные или перпендикулярные плоскости проекций, называют *прямыми частного положения*.

Прямые линии, параллельные плоскости проекций, называют *прямыми уровня*.

Прямая линия, параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтальной прямой уровня*, или *горизонталью*, ее принято обозначать буквой  $h$  (рис. 7.7, а).

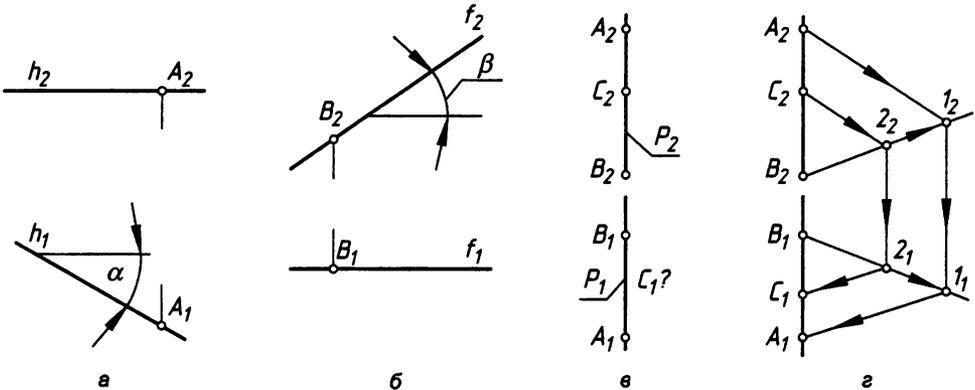


Рис. 7.7. Линии уровня

У горизонтали высоты всех точек одинаковые ( $z = \text{const}$ ), поэтому ее фронтальная проекция  $h_2$  всегда параллельна оси  $x$ . На горизонтальную плоскость она проецируется в натуральную величину  $|h| = h_p$ , а  $\alpha = h \wedge \Pi_2$ . Задав любую проекцию точки  $A \in h$ , по линии связи ( $A, A_2$ ) находим другую проекцию.

Прямая линия  $f \parallel \Pi_2$  называется *фронтальной прямой уровня*, или *фронталью* (рис. 7.7, б). У фронтальной глубина всех точек одинакова ( $y = \text{const}$ ), и поэтому всегда  $f_1 \parallel x$ . Любая точка  $B \in f$ , если  $B_1 \in f_1$  и  $B_2 \in f_2$ ,  $\beta = f \wedge \Pi_1$ .

Прямая линия  $p \parallel \Pi_3$  называется *профильной прямой уровня* (рис. 7.7, в). Между проекциями  $p_1$  и  $p_2$  нет однозначного соответствия. То есть проекции  $A_2$  соответствует множество точек на  $p_1$  и наоборот. В таком случае на прямой необходимо задать две точки, например  $A (A_1, A_2)$  и  $B (B_1, B_2)$ , или профильную проекцию  $p_3$  (на рис. 7.7, в не показана). При заданном отрезке  $[AB]$  можно взять любую точку на прямой, используя свойство пропорциональности.

Пусть, например, мы задали  $\zeta_2$ . Из точек  $A_1$  и  $A_2$  (рис. 7.7, з) проведем произвольные прямые и зададим точку 1 ( $1_1, 1_2$ ). Соединим точку  $B$  с точкой 1 и проведем:  $(\zeta_2, 2_2) \parallel (A_2, 1_2)$ ,  $(2_2, 2_1) \parallel (1_2, 1_1)$ ,  $(2_1, \zeta_1) \parallel (1_1, A_1)$ .

Прямые линии, перпендикулярные плоскости проекций, называются *проецирующими* (рис. 7.8).

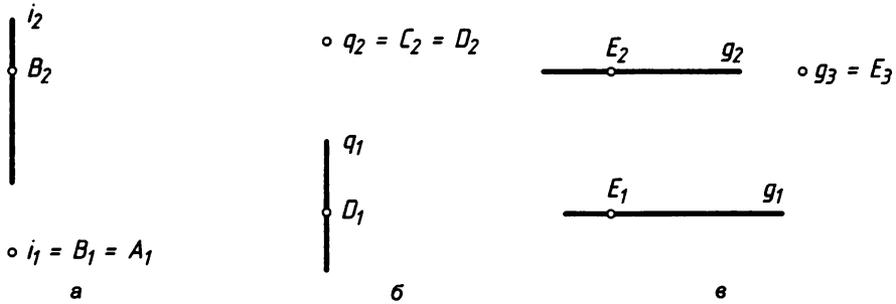


Рис. 7.8. Проецирующие прямые линии

Прямая линия  $i \perp \Pi_1$  называется *горизонтально проецирующей* прямой (рис. 7.8, а). Ее горизонтальная проекция вырождается в точку, и между  $i_1$  и  $i_2$  нет взаимно однозначного соответствия. Например, горизонтальной проекции  $A_1$  некоторой точки  $A$  прямой линии  $i$  соответствует множество фронтальных проекций точек на проекции  $i_2$  прямой, но каждой точке  $B_2$  будет соответствовать точка  $B_1$ . Такое свойство проецирующей прямой линии называют *собирательным*.

Прямая линия  $q \perp \Pi_2$  называется *фронтально проецирующей* прямой (рис. 7.8, б). Она обладает аналогичными свойствами в отношении фронтальной проекции.

Прямая линия  $g \perp \Pi_3$  называется *профильно проецирующей* прямой (рис. 7.8, в). Ее свойства аналогичны в отношении профильной проекции, а фронтальная и горизонтальная проекции параллельны оси  $x$ .

## 7.2. Взаимное расположение прямых линий

Прямые линии  $a$  и  $b$  в пространстве могут быть (рис. 7.9):

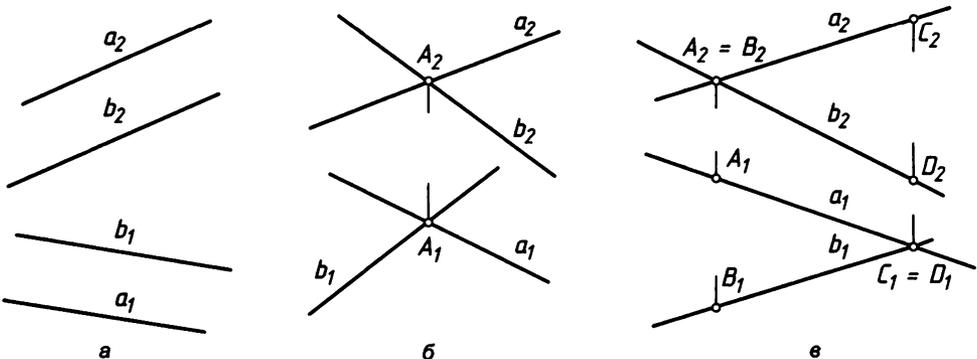


Рис. 7.9. Взаимное расположение прямых линий

- параллельными ( $a \parallel b$ );
- пересекающимися ( $a \cap b$ );
- скрещивающимися ( $a \div b$ ).

Если на чертеже (рис. 7.9, а) проекции  $a_2 \parallel b_2$  и  $a_1 \parallel b_1$  параллельны, то в пространстве  $a \parallel b$  (см. раздел 3.2, свойство 6).

Если на чертеже (рис. 7.9, б) точки пересечения проекций  $a_1 \cap b_1 = A_1$  и  $a_2 \cap b_2 = A_2$  лежат на одной линии связи, то прямые в пространстве пересекаются в точке  $A = a \cap b$  (см. раздел 3.1, следствие свойства 3).

В других случаях прямые линии скрещиваются (рис. 7.9, в). Точки  $A, B$  и  $C, D$  являются фронтально и горизонтально конкурирующими соответственно.

Угол, образованный прямыми линиями, в общем случае проецируется с искажением, в том числе и прямой угол. Исключение составляют случаи, когда плоскость угла параллельна плоскости проекций (см. раздел 3.2, свойства 10 и 11) или когда одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна к ней.

Пусть заданы прямые линии  $a$  и  $b$  так, что  $a \parallel \Pi'$ ,  $b$  — прямая общего положения,  $a \wedge b = \angle ABC = 90^\circ$  (рис. 7.10).

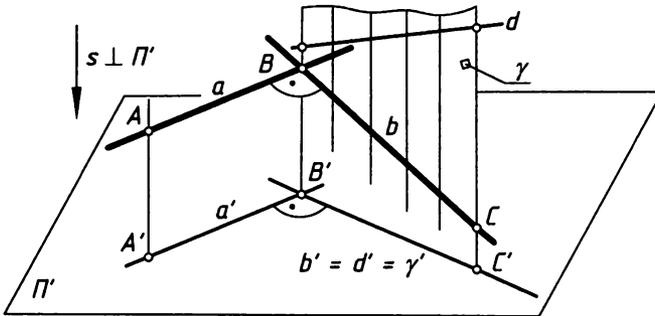


Рис. 7.10. Проекция прямого угла

**Теорема.** Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекций, а другая не перпендикулярна к ней, то его ортогональная проекция на эту плоскость проекций будет тоже прямым углом.

Спроецируем ортогонально  $\angle ABC$  на  $\Pi'$ . По чертежу:  $(AB) \perp \gamma (BC \cap BB')$ . Но  $(A'B') \parallel (AB) \Rightarrow (A'B') \perp \gamma \Rightarrow (A'B') \perp (B'C')$  или  $a' \perp b'$  и  $\angle A'B'C' = 90^\circ$ .

Теорема справедлива не только для пересекающихся прямых линий, но и для любой прямой  $d$  плоскости  $\gamma$ , то есть для скрещивающихся прямых, а также для всей плоскости  $\gamma$ , которая является проецирующей и изображается прямой  $\gamma'$ . Это свойство ортогональных проекций очень важно при решении всех вопросов, связанных с перпендикулярностью.

Пусть, например, задана горизонталь  $h (h_1, h_2)$  (рис. 7.11, а) и точка  $A (A_1, A_2)$ .

Если в пространстве через точку  $A$  провести прямую  $n \perp h$  и взять точку  $B = n \cap h$ , то на изображении получим:  $A_1 \in n_1 \perp h_1, B_1 = h_1 \cap n_1$ , и  $(A_2, B_2) \subset n_2$ . Отрезок  $[AB]$  выражает расстояние от точки  $A$  до прямой  $h$ , а его натуральная величина определена

способом треугольника (см. раздел 3.3) и равна  $|AB| = |A_1B^*|$ . Если  $b_1 \perp h_1$ , то  $b \perp h$  и  $b \div h$ , и совершенно не имеет значения, проходит ли прямая  $b$  через точку  $A$  или нет.

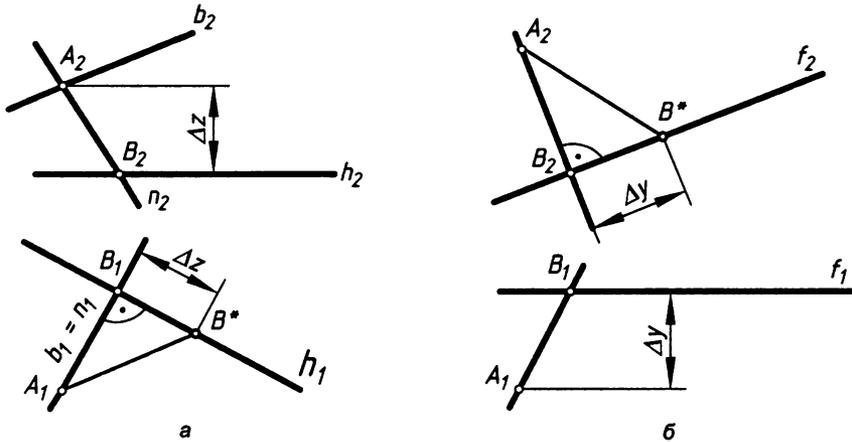


Рис. 7.11. Примеры изображений прямого угла

Углом между скрещивающимися прямыми линиями называют угол, который образуют пересекающиеся прямые линии, проведенные через некоторую точку пространства параллельно скрещивающимся прямым.

На рис. 7.11, б показано определение расстояния  $|AB| = |A_2B^*|$  от точки  $A$  до фронтали  $f$ . Здесь  $f \parallel l_2$ , и на фронтальной проекции прямого угла при вершине  $B$  сохранился, то есть  $(A_2B_2) \perp f_2$ .

### 7.3. Комплексный чертеж плоскости. Задачи принадлежности

Плоскость, произвольно расположенная в пространстве, называется *плоскостью общего положения*. Набор параметров, выделяющий единственную плоскость, называется ее *определителем*. В главе 4 показано, что плоскость задается (моделируется) родством (см. рис. 4.1–4.4). Условия задания родства и являются ее определителем.

На комплексном чертеже используются различные варианты задания плоскости, то есть различные элементы ее родственного соответствия, в основе которых лежит задание проекций трех ее точек (рис. 7.12, а). Тогда задание плоскости записывают так:  $\alpha(ABC)$ . Ими задается и ось, и направление родства.

Если через две точки провести прямую  $b$ , то плоскость будет задана точкой и прямой, то есть  $\alpha(B, b)$  (рис. 7.12, б).

Можно и через точку  $B$  провести прямую  $a \parallel b$ , тогда  $\alpha(a \parallel b)$  (рис. 7.12, в), или  $(AB) \subset d$ ,  $(BC) \subset c$  и  $\alpha(d \cap c)$ , то есть определителем являются пересекающиеся прямые (рис. 7.12, г). Стремясь улучшить наглядность чертежа, используют условную волнистую линию, лежащую в этой плоскости (рис. 7.12, з), или изображение плоской фигуры (рис. 7.12, д).

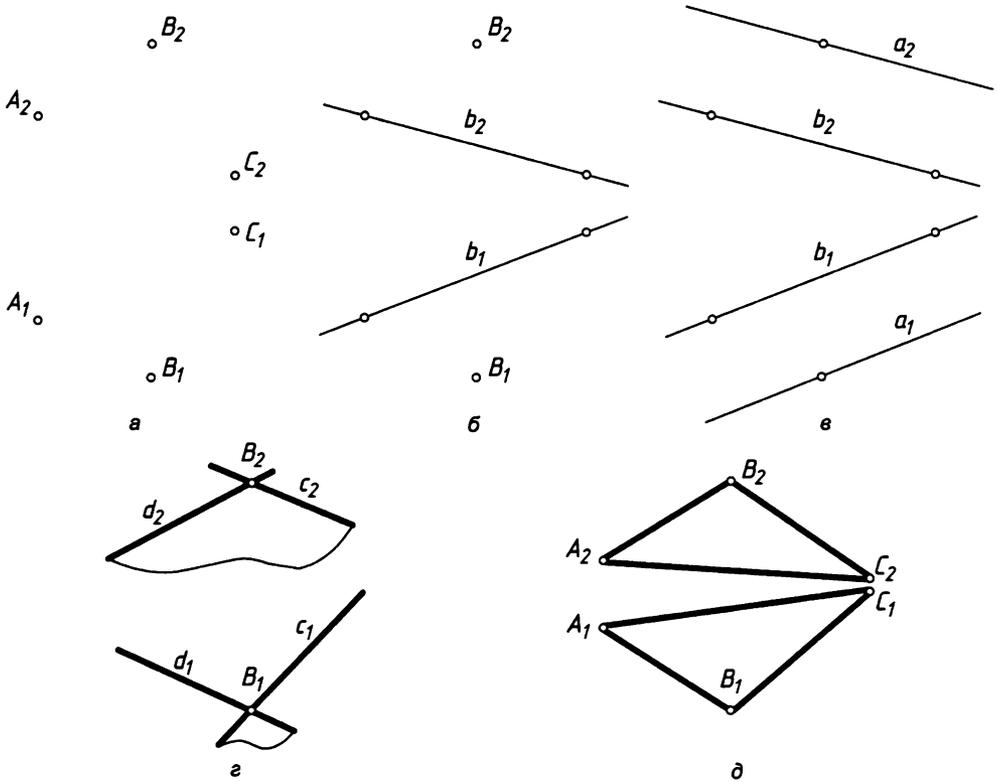


Рис. 7.12. Варианты задания плоскости на чертеже

Плоскость  $\alpha$  может быть задана следами  $h_\alpha^\circ \cap f_\alpha^\circ$  (рис. 7.13). Следом плоскости называют линию ее пересечения с плоскостью проекций.

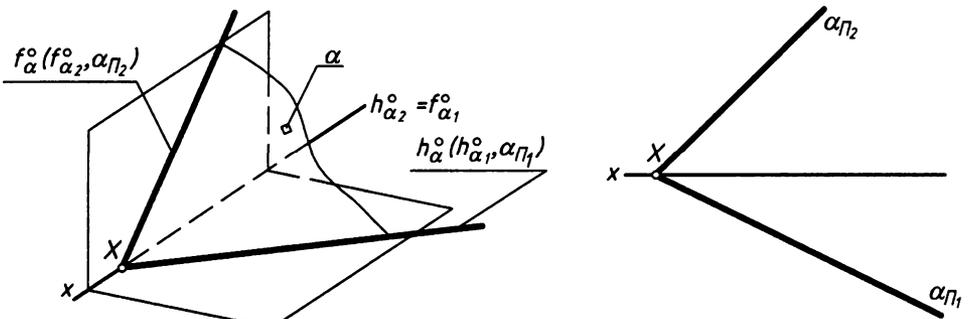


Рис. 7.13. Задание плоскости следами

Линию  $h_\alpha^\circ = \alpha \cap \Pi_1$  называют *горизонтальным следом* плоскости  $\alpha$ , или горизонталью нулевого уровня, так как высота ее точек равна нулю. Его часто обозначают  $\alpha_{\Pi_1}$ , то есть прямая пересечения  $\alpha$  и  $\Pi_1$ . Фронтальная проекция  $h_\alpha^\circ$ , горизонтального следа

$h_\alpha^\circ$  всегда совпадает с осью  $x$  проекций, поэтому ее на чертеже не обозначают, но всегда следует это помнить.

Линию  $f_\alpha^\circ = \alpha \cap \Pi_2$  называют *фронтальным следом* плоскости  $\alpha$ , или фронталью нулевого уровня, так как ее координата  $y = 0$ . Второе обозначение —  $\alpha_{\Pi_2}$ . Горизонтальная проекция  $f_{\alpha_1}^\circ$  фронтального следа совпадает с осью  $x$  и не обозначается.

Если задана одна плоскость, то индекс  $\alpha$ , указывающий обозначение плоскости, можно не писать. Тогда  $\alpha (h^\circ \cap f^\circ)$ , что является заданием плоскости прямыми линиями, которые пересекаются и принадлежат горизонтальной и фронтальной плоскостям проекций соответственно.

Точка  $X = h^\circ \cap f^\circ$  называется *точкой схода следов*, она всегда лежит на оси проекций, но часто не обозначается.

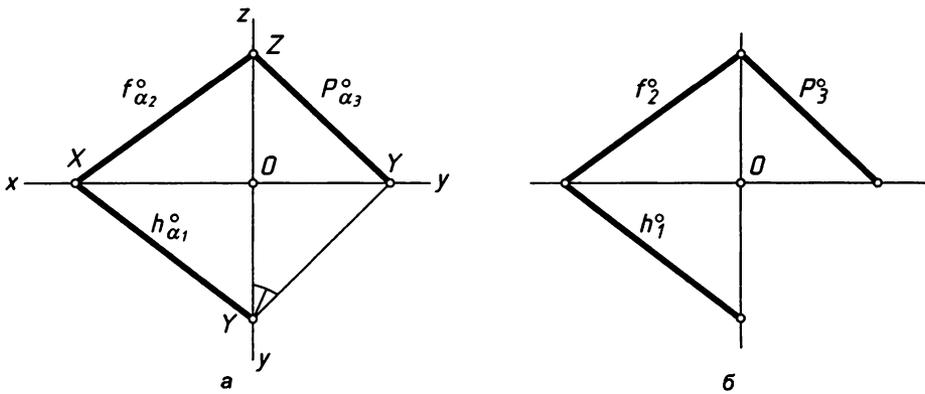


Рис. 7.14. Построение профильного следа

Если задать оси проекций (рис. 7.14, а), то по точкам схода  $Y$  и  $Z$  легко строится профильный след  $p_\alpha^\circ = p_{\alpha_3}^\circ$ . На рис. 7.14, б показано упрощенное обозначение следов.

В задачах принадлежности (инцидентности) используются два признака:

1. Точка принадлежит (инцидентна) плоскости, если она лежит на прямой этой плоскости.
2. Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки этой плоскости.

Пусть дана плоскость  $\alpha (ABC)$  и точка  $D (D_2) \in \alpha$  (рис. 7.15, а). Найти проекцию  $D_1$ . Возьмем в  $\alpha$  прямую, проходящую через точку  $D$ , например ее фронтальную проекцию  $(A_2D_2)$ . Так как прямые  $(BC)$  и  $(AD)$  лежат в одной плоскости, то точка  $1 = (BC) \cap (AD)$  и  $1_2 = (B_2C_2) \cap (A_2D_2)$ , а  $1_1$  находим по линии связи на  $(B_1C_1)$ . Затем проводим прямую линию  $(A_11_1)$  и на ней по линии связи указываем  $D_1$ .

На рис. 7.15, б эта же задача показана для плоскости  $\alpha$ , заданной следами  $(h_\alpha^\circ \cap f_\alpha^\circ)$ . Пусть дана проекция  $D_2$  точки  $D \in \alpha$ . Надо найти горизонтальную проекцию  $D_1$ .

Проведем через точку  $D$  в плоскости  $\alpha$  произвольную прямую  $(1-2)$ . Для этого через  $D_2$  проведем проекцию  $(1_2-2_2)$ , построим проекцию  $(1_1-2_1)$  и на ней по линии связи обозначим  $D_1$ .

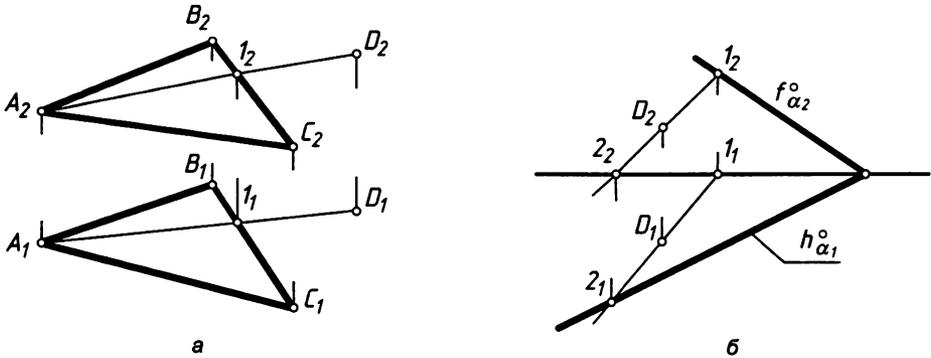


Рис. 7.15. Принадлежность точки и прямой заданной плоскости

Задачи принадлежности удобно решать и с помощью родственного соответствия (см. главу 4 и раздел 5.4). Рассмотрим его применение на примере. На рис. 7.16, а задана плоскость  $\alpha (k \cap l)$  и фронтальная проекция треугольника  $ABC$ , принадлежащего этой плоскости. Нужно построить его горизонтальную проекцию.

Построим двойные точки  $E_0 = l_1 \cap l_2$  и  $F_0 = k_1 \cap k_2$  (рис. 7.16, б) в пересечении соответствующих проекций определителя плоскости и ось  $\rho$  родства, проходящую через них. Продолжим прямую линию  $A_2B_2$  и по точкам  $1_0$  и  $2_0 \rightarrow 2_1$  плоскости построим горизонтальную проекцию  $(1_0 - 2_1)$  этой прямой, а на ней по вертикальным линиям связи построим горизонтальные проекции  $A_1, B_1$  вершин треугольника. Положение горизонтальной проекции  $C_1$  определим с помощью линии  $C_2 \in (3_2 - 4_2) \rightarrow (3_1 - 4_1) \rightarrow C_1$ . Можно использовать и другие прямые плоскости, например,  $BC$  или  $AC$ .

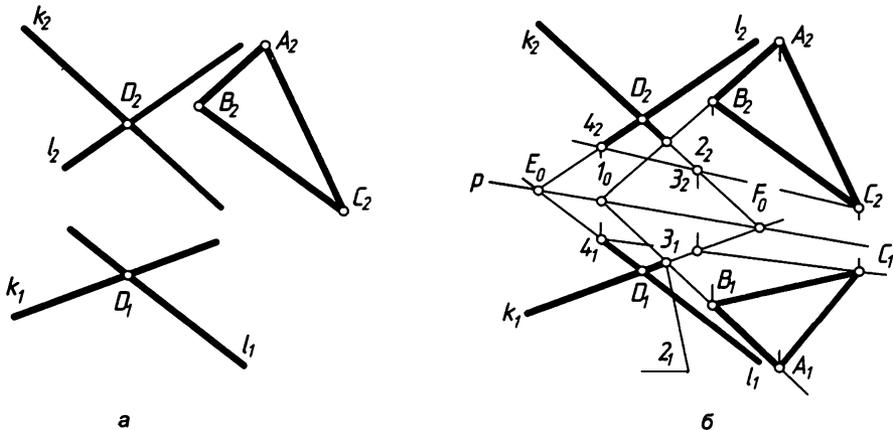


Рис. 7.16. Построение фигуры в плоскости с помощью родства

*Плоскости частного положения* — это плоскости, параллельные или перпендикулярные к плоскостям проекций.

Плоскости, параллельные плоскостям проекций, называют *плоскостями уровня*.

Плоскость, параллельная горизонтальной плоскости проекций, называется *горизонтальной плоскостью уровня* (рис. 7.17).

Так как  $\alpha \parallel \Pi_1$ , то ее фронтальный след  $\alpha_2 \parallel x$ , профильный след  $\alpha_3 \parallel y$ , а горизонтальный след является несобственной линией, и горизонтальной проекцией плоскости  $\alpha$  будет поле точек на  $\Pi_1$ . Это значит, что горизонтальная проекция любых элементов плоскости  $\alpha$  будет изображаться без искажения, а фронтальная проекция вырождается в прямую линию  $\alpha_2$ , то есть она обладает собирательным свойством.

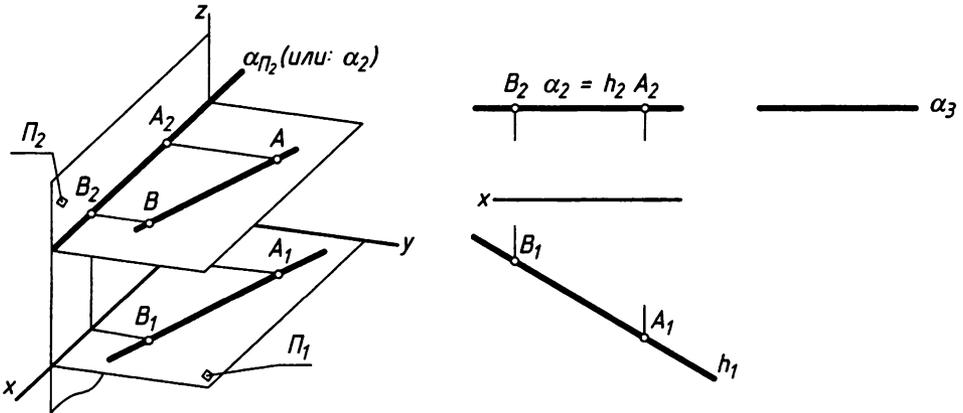


Рис. 7.17. Горизонтальная плоскость уровня

Здесь нет взаимно однозначного соответствия между проекциями точек: каждой точке  $B_1$  или прямой  $h_1$  соответствует единственная точка  $B_2$  или прямая  $h_2$ , но любой точке  $A_2$  или  $B_2$  соответствует множество точек  $A_1$  и  $B_1$  и любой прямой  $h_2$  соответствует множество прямых  $h_1$ . Чтобы в плоскости выделить точку и прямую, нужно показать их горизонтальные проекции  $A_1$  и  $h_1$ , а затем фронтальные проекции  $A_2$  и  $h_2$  (или  $h_2 = \alpha_2$ ). Изображение оси  $x$  при этом не обязательно.

Плоскость  $\beta \parallel \Pi_2$  называется фронтальной плоскостью уровня (рис. 7.18, а).

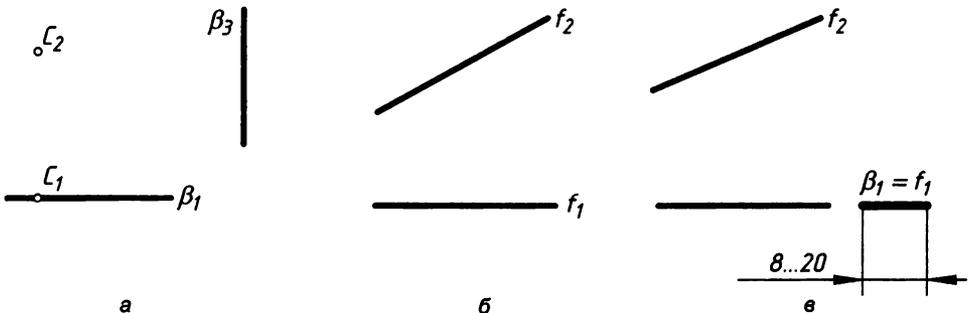


Рис. 7.18. Фронтальная плоскость уровня

Ее горизонтальная проекция совпадает с горизонтальным следом  $\beta_1 \parallel x$ , профильная проекция совпадает с профильным следом  $\beta_3 \parallel z$ , а фронтальной проекцией является поле точек  $\Pi_2$ . Свойства ее аналогичны свойствам плоскости  $\alpha \parallel \Pi_1$ . Все прямые плоскости  $\beta \parallel \Pi_2$  являются фронталями.

Если задана фронталь  $f(f_1, f_2)$  (рис. 7.18, б) и надо провести через нее плоскость уровня, то записывают это так:  $f \subset \beta \parallel \Pi_2$ , а на чертеже (рис. 7.18, в) обозначают  $\beta_1 = f_1$ . Если след  $\beta$ , нужно выделить, то для этого используют линию с разрывом или ее элемент длиной 8–20 мм и примерно в полтора раза толще основной линии изображений (рис. 7.18, в).

Профильную плоскость уровня  $\gamma \parallel \Pi_3$  читателям предлагается исследовать самостоятельно.

Плоскость, перпендикулярная плоскости проекций, называется *проецирующей*.

Плоскость  $\alpha \perp \Pi_1$  называется горизонтально проецирующей (рис. 7.19, а) или вертикальной плоскостью.

Горизонтальная проекция плоскости  $\alpha$  вырождается в прямую, совпадающую с горизонтальным следом  $\alpha_{\Pi_1}$  (или  $\alpha_1$ ), а ее фронтальная проекция совпадает с полем  $\Pi_2$ . Фронтальный след  $\alpha_{\Pi_2} = \alpha \cap \Pi_2$  всегда перпендикулярен оси  $x$  и является горизонтально проецирующей прямой  $i_{\alpha}^0$  нулевого уровня бесконечной длины. На эюре (рис. 7.19, б) с осью  $x$  плоскость задается следами  $\alpha_{\Pi_1} \cap \alpha_{\Pi_2}$ . Если изменить ось  $x$  до положения  $x'$ , что соответствует параллельному переносу плоскостей проекций, то изменится положение только фронтального следа плоскости до  $\alpha'_{\Pi_2}$ :

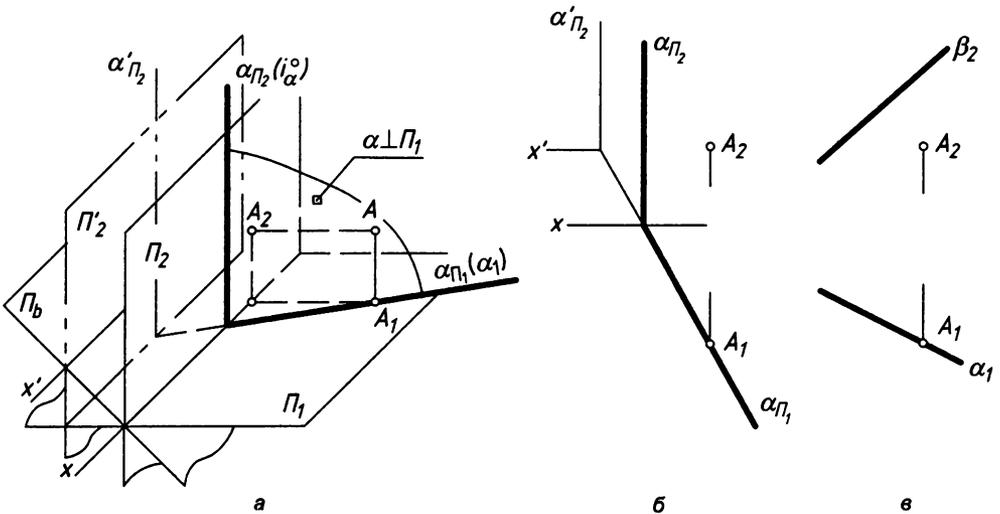


Рис. 7.19. Проецирующие плоскости

Это обстоятельство позволяет на эюре изображать плоскость  $\alpha \perp \Pi_1$  только одним горизонтальным следом  $\alpha_1$  (рис. 7.19, в).

Между проекциями проецирующей плоскости, как и в плоскостях уровня, не устанавливается взаимно однозначного соответствия, то есть проекция  $A_1$  соответствует множество проекций  $A_2$ .

Плоскость  $\beta(\beta_2) \perp \Pi_2$  называется фронтально проецирующей плоскостью (рис. 7.19, в). Ее свойства аналогичны, поэтому здесь не повторяются.

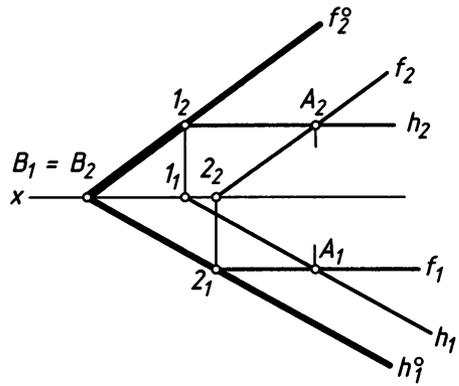
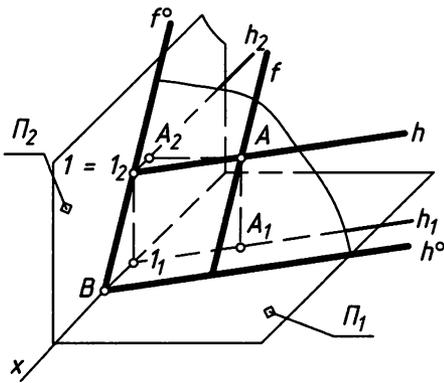
Плоскость  $\gamma \perp \Pi_3$  называется *профильно проецирующей плоскостью*. Ее обычно рассматривают в связи с фронтальной проекцией и осью  $z$ .

### 7.4. Особые линии и замена определителя плоскости

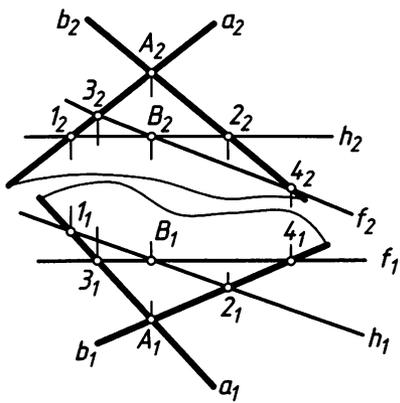
К особым линиям плоскости относят ее линии уровня и линии наибольшего наклона.

Горизонталь  $h$ , проходящая через точку  $A$  плоскости  $\alpha$  (рис. 7.20, а), параллельна горизонтали  $h^\circ$  нулевого уровня (следу) этой плоскости. Очевидно, что семейство горизонталей (фронталей) одной плоскости — это семейство параллельных прямых. Следовательно, и проекции их будут параллельны.

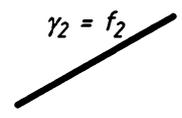
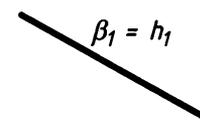
На эюре рис. 7.20, а  $h_2 \parallel x$ . Точка  $1(1_1, 1_2) = h \cap \Pi_2$  — фронтальный след горизонтали,  $h_1 \parallel h_1^\circ$ . Аналогично,  $f_1 \parallel x$ ,  $2(2_1, 2_2) = f \cap \Pi_1$  — горизонтальный след фронтали,  $f_2 \parallel f_2^\circ$ .



а



б



в

г

Рис. 7.20. Линии уровня плоскости

Теперь вместо определителя плоскости  $\alpha (h^\circ \cap f^\circ)$  можно использовать определитель  $\alpha (h \cap f)$ . Если же задан определитель  $\alpha (h \cap f)$ , то, используя следы 1 и 2 линий уровня, легко построить следы  $2_1 \in h_1^\circ \parallel h_1$  и  $1_2 \in f_2^\circ \parallel f_2$  плоскости.

Если известны направления линий уровня, то достаточно и одного следа прямой линии уровня. Например, пусть найден след  $1 (1_1, 1_2) = h \cap \Pi_2$ . Тогда через  $1_2$  проводим след  $f_2^\circ \parallel f_2$ , а через точку схода  $B (B_1 = B_2)$  проводим  $h_1^\circ \parallel h_1$ .

Построение горизонтали плоскости общего положения  $\alpha (a \cap b)$  (рис. 7.20, б) начинают с ее фронтальной проекции  $h_2 \parallel x$  так, чтобы она пересекала уже известные элементы плоскости. В нашем примере:  $1_2 = h_2 \cap a_2 \rightarrow 1_1 \in a_1$ ;  $2_2 = h_2 \cap b_2 \rightarrow 2_1 \in b_1$  и  $(1_1, 2_1) \in h_1$ .

Аналогично строится фронталь  $f: f_1 \parallel x$ ;  $3_1 = f_1 \cap a_1 \rightarrow 3_2 \in a_2$ ;  $4_1 = f_1 \cap b_1 \rightarrow 4_2 \in b_2$ ;  $(3_2, 4_2) \in f_2$ .

В горизонтально проецирующей плоскости  $\beta (\beta_1)$  (рис. 7.20, в)  $h_1 = \beta_1$ , а  $h_2 \parallel x$  можно построить в любом месте. Аналогично для фронтально проецирующей плоскости  $\gamma (\gamma_2)$  (рис. 7.20, г)  $f_2 = \gamma_2$  и  $f_1 \parallel x$ .

Для определения следов  $h^\circ$  и  $f^\circ$  плоскости  $\alpha (a \cap b)$  (рис. 7.21, а) нужно построить два горизонтальных следа  $M (M_1, M_2) = a \cap \Pi_1$  и  $H (H_1, H_2) = b \cap \Pi_1$  линий  $a$  и  $b$  плоскости, точку схода  $N (N_1, N_2) = (M, H_1) \cap x$  и один фронтальный след прямой, например  $V (V_1, V_2) = b \cap \Pi_2$ .

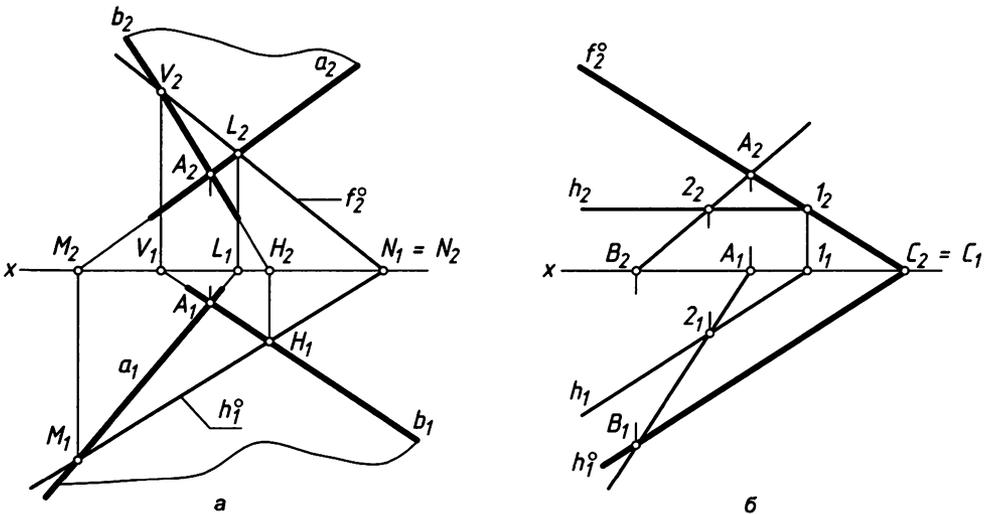


Рис. 7.21. Замена определителя плоскости

Если точка схода  $N$  недоступна (лежит за пределами чертежа), то нужно построить фронтальный след второй прямой:  $L (L_1, L_2) = a \cap \Pi_2$ . Следы  $h^\circ (h_1^\circ)$  и  $f^\circ (f_2^\circ)$  могут служить новым определителем плоскости  $\alpha (h^\circ \cap f^\circ)$ .

Если какой-либо след прямых  $a$  или  $b$  недоступен, в плоскости следует взять дополнительную прямую (удобнее прямую уровня). На рис. 7.21, б в плоскости  $\alpha (h^\circ \cap f^\circ)$  построена прямая  $(AB)$  общего положения и линия уровня  $h$ . Теперь можно использовать определитель плоскости  $\alpha (ABC)$  или  $\alpha ((AB) \cap h)$ .

**Теорема:** *Линии плоскости, перпендикулярные к ее линиям уровня, являются линиями наибольшего наклона этой плоскости к плоскости проекций.*

Возьмем горизонтальную плоскость проекций  $\Pi_1$  (рис. 7.22), плоскость  $\alpha$  и точку  $A \in \alpha$ . Линия уровня  $A \in h \parallel \alpha_{\Pi_1}$ , если след показан.

Проведем в плоскости  $\alpha$  прямую  $A \in l \perp h$  и отметим  $B (B_1) = l \cap \alpha_{\Pi_1}$ . Ортогонально спроецируем  $[AB] \rightarrow [A, B_1]$ . Обозначим:  $\angle \lambda = (AB) \wedge (A, B_1)$  – угол наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости  $\Pi_1$ . Сравним его с углом  $\varphi = (AC) \wedge (A, C_1)$ , где  $AC$  – произвольная прямая той же плоскости.

Треугольники  $AA_1B_1$  и  $AA_1C_1$  прямоугольные,  $AB_1$  и  $AC_1$  – гипотенузы, а  $AA_1$  – общий катет.

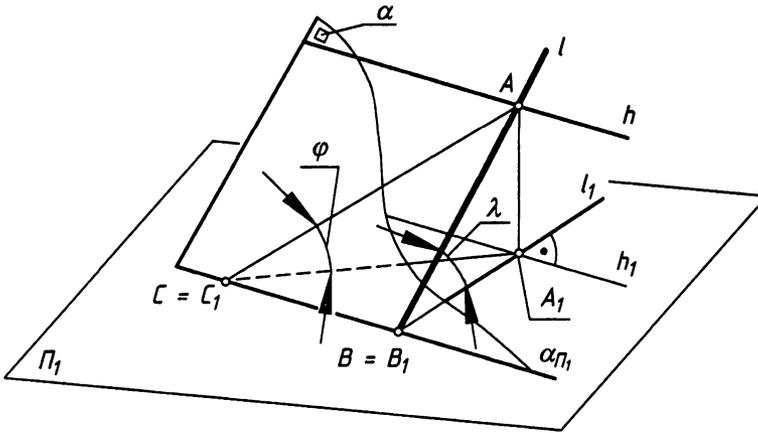


Рис. 7.22. Линия наибольшего наклона плоскости

Для них можно записать

$$\sin \lambda = \frac{AA_1}{AB}; \quad \sin \varphi = \frac{AA_1}{AC},$$

но  $\triangle ABC$  – прямоугольный,  $AC$  – гипотенуза, следовательно, всегда  $AC > AB$  и  $\sin \lambda > \sin \varphi$ , а  $\lambda > \varphi$ . То есть из множества прямых линий плоскости  $\alpha$  семейство прямых  $l$  образует наибольший угол с плоскостью  $\Pi_1$ . Линии  $l$  называются *линиями наибольшего наклона* или *линиями ската* плоскости  $\alpha$ . Угол  $\lambda$  равен двугранному углу  $\alpha \wedge \Pi_1$ , и, чтобы его определить, достаточно найти угол наклона отрезка  $[AB]$  к плоскости проекций, например, способом треугольника (см. раздел 7.1, рис. 7.6). Если плоскостью проекций служит плоскость  $\Pi_2$ , то вместо горизонтали  $h$  нужно взять фронталь  $f$ .

Рассмотрим пример определения углов наклона плоскости  $\alpha (ABC)$  (рис. 7.23). Построим  $h \subset \alpha \rightarrow h_2 \rightarrow h_1$  (рис. 7.23, а). Через точку  $B_1$  проведем горизонтальную проекцию  $(B_1D_1) \perp h_1$ , линии ската  $(BD)$  и построим ее фронтальную проекцию  $(B_2D_2)$ . Из  $\triangle D_1B_1B_2$  определяем  $\angle \lambda = \alpha \wedge \Pi_1$ .

Построим  $f \subset \alpha \rightarrow f_1 \rightarrow f_2$  (рис. 7.23, б) той же плоскости. В произвольном месте построим фронтальную проекцию  $l_2 \perp f_2$ , линии наибольшего наклона плоскости  $\alpha$

к  $\Pi_2$ , возьмем на ней отрезок  $[F_2E_2]$  и построим горизонтальную проекцию  $l_1(F_1E_1)$ . Способом треугольника через  $\Delta F_2E_2E^*$  определяем  $\angle \psi = \alpha \wedge \Pi_2$ .

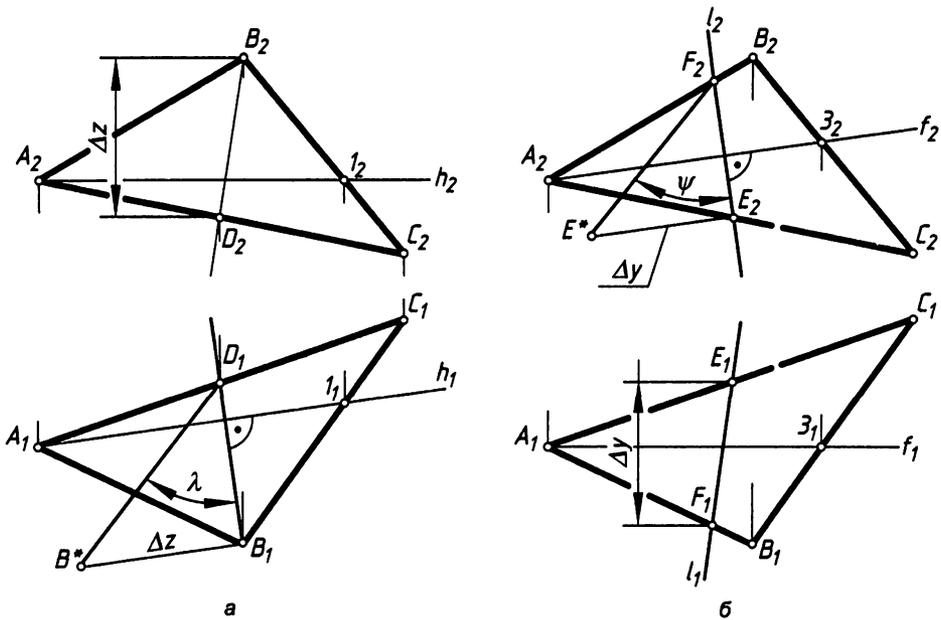


Рис. 7.23. Определение угла наклона плоскости

## 7.5. Относительное положение прямой и плоскости

Прямая линия может принадлежать плоскости ( $l \subset \alpha$ ), быть параллельной плоскости ( $l \parallel \alpha$ ) и пересекаться с ней ( $l \cap \alpha$ ).

Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две ее точки. Эти примеры рассмотрены нами выше.

### 7.5.1. Параллельность прямой и плоскости

*Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости.*

Если через точку  $D(D_1, D_2)$  (рис. 7.24) требуется провести прямую  $l \parallel \alpha$  ( $a \cap b$ ), то нужно через  $D$  провести  $l$  параллельно любой прямой этой плоскости (на рис. 7.24 это не показано).

Если дано  $D_2 \in c_2$  и нужно построить прямую линию  $c \parallel \alpha$ , то для этого:

- построим  $(l_2-2_2) \parallel c_2 \rightarrow (l_1-2_1)$ ;
- через точку  $D_1$  проведем  $c_1 \parallel (l_1-2_1)$ .

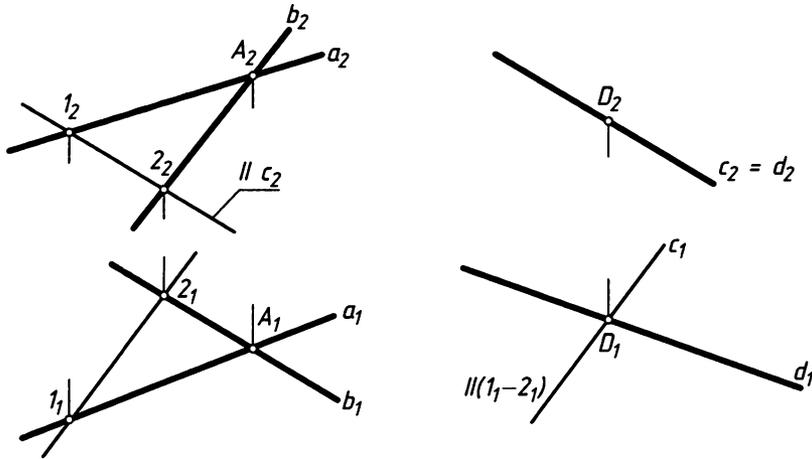


Рис. 7.24. Параллельность прямой и плоскости

Итак,  $c_1 \parallel (1_1-2_1), c_2 \parallel (1_2-2_2) \Rightarrow c \parallel (1-2) \subset \alpha$ .

Если прямая  $d (d_1, d_2)$  задана, то нужно в плоскости  $\alpha$  построить прямую линию в предположении, что она параллельна прямой  $d$ , и сравнить их проекции. Например, построим  $(1_2-2_2) \parallel d_2$ , построим  $(1_1-2_1)$  и сравним с  $d_1$ . Так как  $(1_1-2_1) \parallel d_1$ , то  $d \parallel \alpha$ . В примере задана проецирующая плоскость  $\beta (c \cap d) \perp \Pi_2$ .

Прямая линия параллельна проецирующей плоскости, если одна ее проекция параллельна вырожденной в прямую линии проекции плоскости (рис. 7.25).

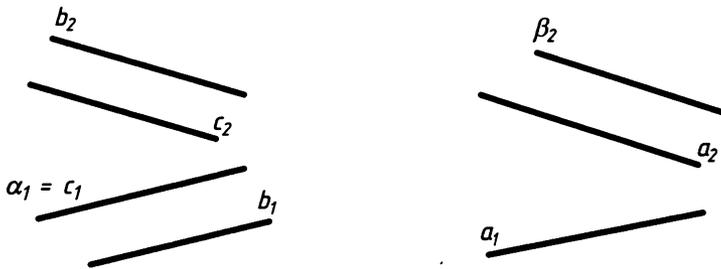


Рис. 7.25. Параллельность прямой и проецирующей плоскости

Если  $b_1 \parallel \alpha_1$ , то в плоскости  $\alpha$  всегда можно найти прямую  $c \parallel b$ , то есть  $c_1 \parallel b_1$  и  $c_2 \parallel b_2$ , следовательно  $b \parallel \alpha$ . Аналогично, если  $a_2 \parallel \beta_2$ , то  $a \parallel \beta$ .

### 7.5.2. Пересечение прямой и плоскости. Видимость

Задача построения точки пересечения прямой с плоскостью является ключевой в задачах пересечения геометрических объектов, и поэтому к ней следует относиться внимательнее.

Рассмотрим относительное положение горизонтально проецирующей плоскости  $\alpha (\alpha_1)$  и прямой общего положения  $b (b_1, b_2)$  (рис. 7.26, а).

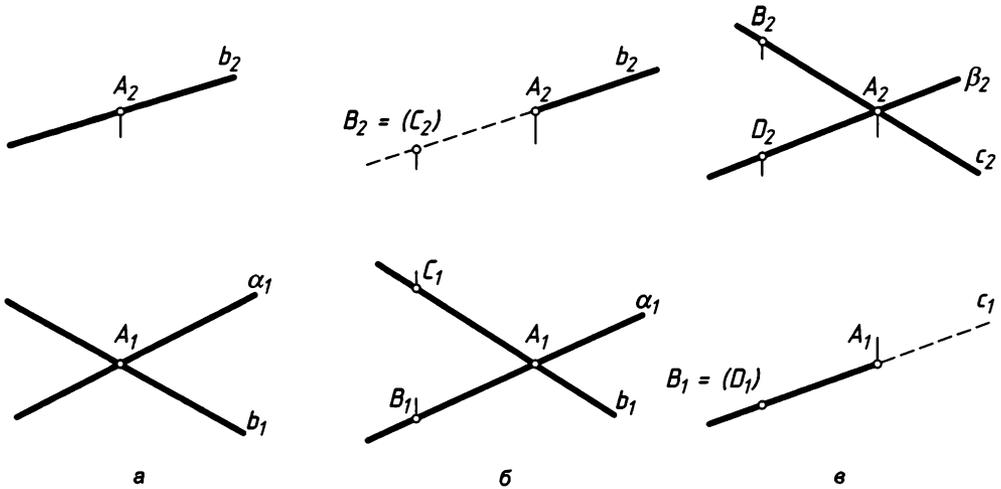


Рис. 7.26. Пересечение прямой линии с проецирующей плоскостью

Так как  $A_1 \in \alpha_p$ , а плоскость обладает собирательным свойством, то  $A \in \alpha$ . Но  $A_1 \in b_1 \cap \alpha_p$ , следовательно,  $A_2 \in b_2$  и  $A = b \cap \alpha$ , то есть точка  $A$  является точкой пересечения прямой  $b$  и плоскости  $\alpha$ . Для определения видимости на фронтальной проекции (рис. 7.26, б) возьмем фронтально конкурирующие точки  $B_2 = C_2$  и посмотрим их горизонтальные  $B_1$  и  $C_1$  проекции. Так как точка  $B_1$  лежит перед точкой  $C_1$  ( $y_B > y_C$ ), то на фронтальной проекции будет видна точка  $B$  ( $B_2$ ), то есть плоскость. В точке  $A$  видимость изменится.

Аналогично рассматривается задача для фронтально проецирующей плоскости  $\beta$  ( $\beta_2$ ) (рис. 7.26, в), где  $A = c \cap \beta$  и на горизонтальной проекции точка  $B$  ( $B_1$ )  $\in c$  ( $c_1$ ) видна, значит, видна прямая до точки  $A$ , а далее не видна.

Пусть задан эюпр плоскости  $\alpha$  ( $ABC$ ) (рис. 7.27, а) и прямой  $l$  общего положения. Построим их аксонометрический чертеж (рис. 7.27, б), где

- $(A'B'C')$  – вторичная проекция плоскости  $\alpha$  ( $ABC$ );
- $(A''B''C'')$  – аксонометрическая (первичная) проекция;
- $l'_1$  – вторичная проекция прямой  $l$ ;
- $l''$  – первичная (аксонометрическая) проекция прямой  $l$ .

Требуется найти точку их пересечения  $M = l \cap \alpha$  и определить относительную видимость. Рассмотрим решение задачи по рис. 7.27, б в аксонометрии.

Алгоритм (порядок) решения:

1.  $l \subset \beta$  – через прямую  $l$  проведем плоскость  $\beta$  – посредник. В качестве посредника чаще всего используется проецирующая плоскость. В примере выбрана горизонтально проецирующая плоскость  $\beta'$  (представьте, что она в пространстве перпендикулярна координатной плоскости  $xOy$ ). Для ее задания достаточно указать вторичную проекцию  $\beta'_1$  ее горизонтального следа, совпадающего с вторичной проекцией  $l'_1$  прямой  $l$  ( $\beta'_1 = l'_1$ ). На рис. 7.27, б для наглядности выделена аксонометрия  $\beta'$  посредника с линией  $l'$  и указан ее профильный след  $\beta'_3 \parallel z'$ .

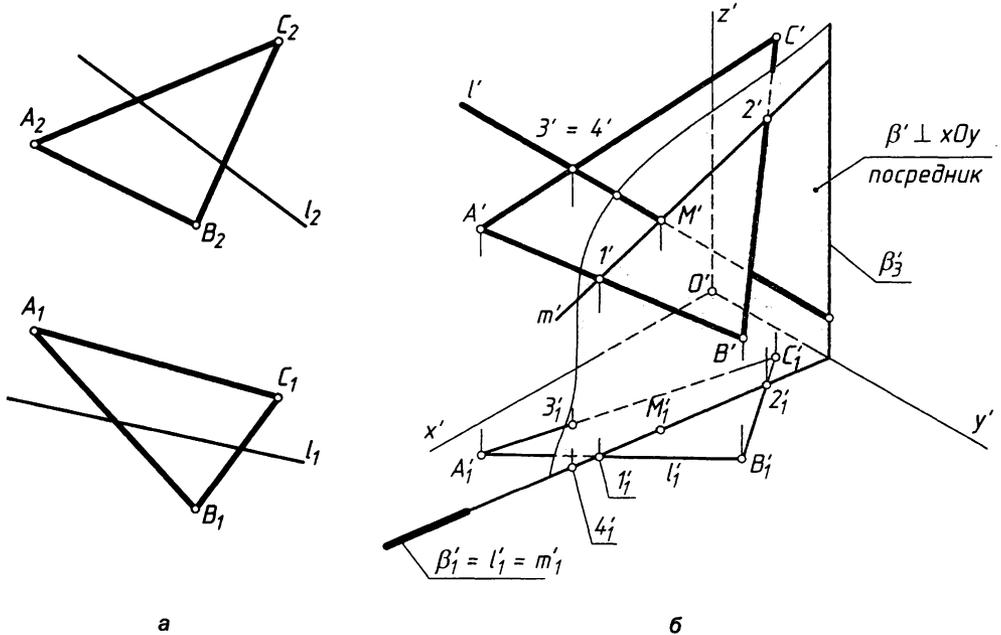


Рис. 7.27. Построение точки пересечения прямой с плоскостью в аксонометрии по вторичной проекции посредника

2.  $m(1-2) = \alpha \cap \beta$  — находим линию  $m$  пересечения заданной плоскости  $\alpha$  и посредника  $\beta$ , для чего определяем ее точки 1 и 2, начиная со вторичной проекции:
  - $1'_i = (A'_i B'_i) \cap \beta'_i \rightarrow 1'_i$ ;  $2'_i = (B'_i C'_i) \cap \beta'_i \rightarrow 2'_i$ ;
  - $(1'_i - 2'_i) \in m'_i = \beta'_i \cap (A'_i B'_i C'_i)$ ;
  - $(1' - 2') \in m' = \beta' \cap (A' B' C')$  — аксонометрия линии пересечения  $\beta$  и  $\Delta ABC$ .
3.  $M = m \cap l = \alpha \cap l$  — находим точку  $M$  пересечения линии  $m$  и заданной прямой  $l$ , которая и будет являться точкой пересечения (встречи) прямой с плоскостью  $\alpha$ :  $M' = m' \cap l' \rightarrow M'_i$ . Задача решена.

Итак, краткая формулировка задачи и решения:

**Алгоритм 7.1**

**Дано:**  $\alpha$  — плоскость,  $l$  — прямая.

**Найти:**  $M = l \cap \alpha$ .

**Решение:**

1.  $l \subset \beta$  — через прямую линию  $l$  проводится проецирующая плоскость  $\beta$ ;
  2.  $m = \alpha \cap \beta$  — строится линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ ;
  3.  $M = l \cap m = l \cap \alpha$  — отмечается точка пересечения (встречи) прямой и плоскости.
- Для определения видимости используем конкурирующие точки 3–4, у которых совпадают аксонометрические проекции  $3' = 4'$ , а на вторичной проекции ближе

к наблюдателю находится точка  $4'_1 \in l'_1$ , следовательно, в этой части аксонометрической проекции видна прямая  $l'$  до точки  $M'$ . В точке  $M'$  видимость изменится.

Рассмотрим это же решение на эпюре (рис. 7.28, а):

1.  $l \subset \beta$  — возьмем  $\beta \perp \Pi_1$  и  $l_1 = \beta_1$ ;
2.  $m(1-2) = \alpha \cap \beta$  — возьмем  $1_1 = (A, B_1) \cap \beta_1 \rightarrow 1_2$ ;  $2_1 = (B, C_1) \cap \beta_1 \rightarrow 2_2$ ;
3.  $M = l \cap m = (1_2-2_2) \in m_2 \cap l_2 = M_2 \rightarrow M_r$

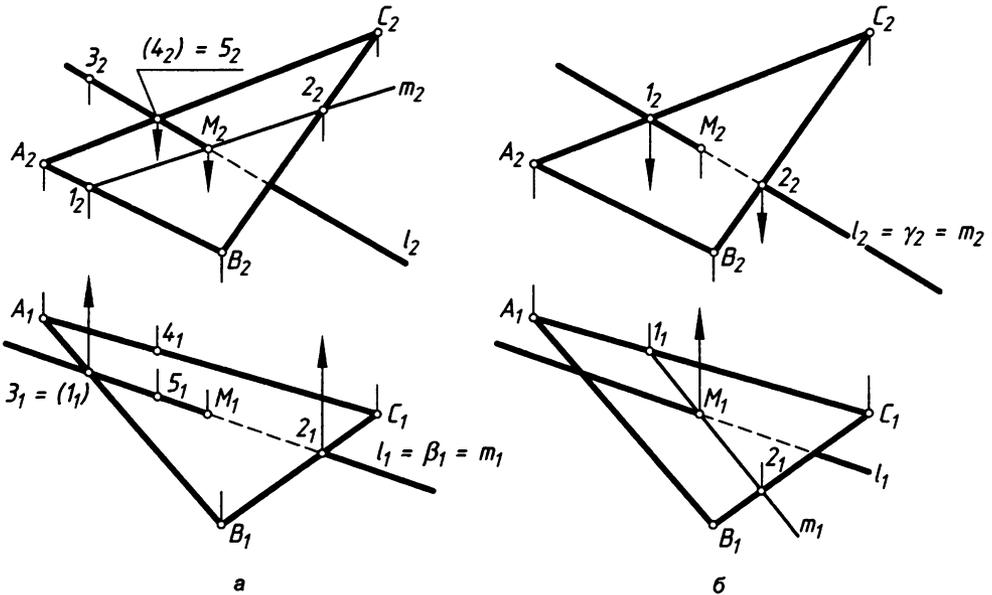


Рис. 7.28. Построение точки пересечения прямой линии с плоскостью на эпюре

Для определения видимости на горизонтальной проекции использованы горизонтально конкурирующие точки  $1 \in (AB)$  и  $3 \in l$ , у которых  $1_1 = 3_1$ . Сравнивая положение проекций  $1_2$  и  $3_2$ , видим, что точка  $3$  лежит выше, следовательно, при взгляде сверху мы будем видеть ее, то есть будем видеть прямую  $l$  ( $l_1$ ) до точки  $M$  ( $M_1$ ).

Для определения видимости на фронтальной проекции использованы фронтально конкурирующие точки  $4 \in (AC)$  и  $5 \in l$ , у которых  $4_2 = 5_2$ , но глубина точки  $5$  ( $5_1$ ) больше, то есть она ближе к наблюдателю, и, следовательно, будет видна прямая линия  $l \ni 5$ .

На рис. 7.28, б показано решение этой же задачи с помощью фронтально проецирующего посредника  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ). Проанализируйте это решение.

На рис. 7.29 задача решена с помощью посредника  $\gamma$  ( $\gamma'$ ), который является проецирующим по отношению к аксонометрической плоскости  $\Pi'$ . На изображении отмечаем след посредника  $\gamma' = l'$ . Затем отмечают точки  $1' \rightarrow 1'_1$ ,  $2' \rightarrow 2'_1$ ,  $M'_1 = (1'_1-2'_1) \cap l'_1 \rightarrow M'$ . Видимость определяется так же, как на рис. 7.27.

Итак, алгоритм 7.1 одинаково работает на эпюре и в аксонометрии — основное различие заключается только в названии проекций.

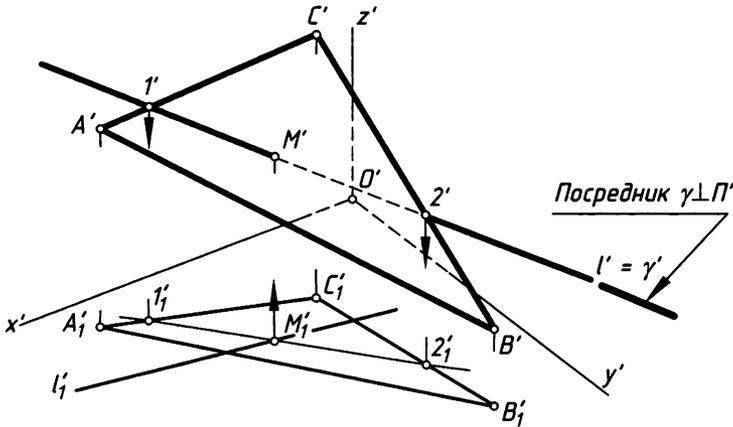


Рис. 7.29. Построение точки пересечения прямой линии с плоскостью по первичной проекции посредника

### 7.5.3. Перпендикулярность прямой и плоскости

В решении ряда задач важно уметь выделить или построить прямые, перпендикулярные плоскости.

Из геометрии известен признак перпендикулярности: *прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.*

С учетом свойства проекций прямого угла в начертательной геометрии этот признак формулируется так: *прямая  $n$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ , если она перпендикулярна пересекающимся линиям уровня этой плоскости* (рис. 7.30, а).

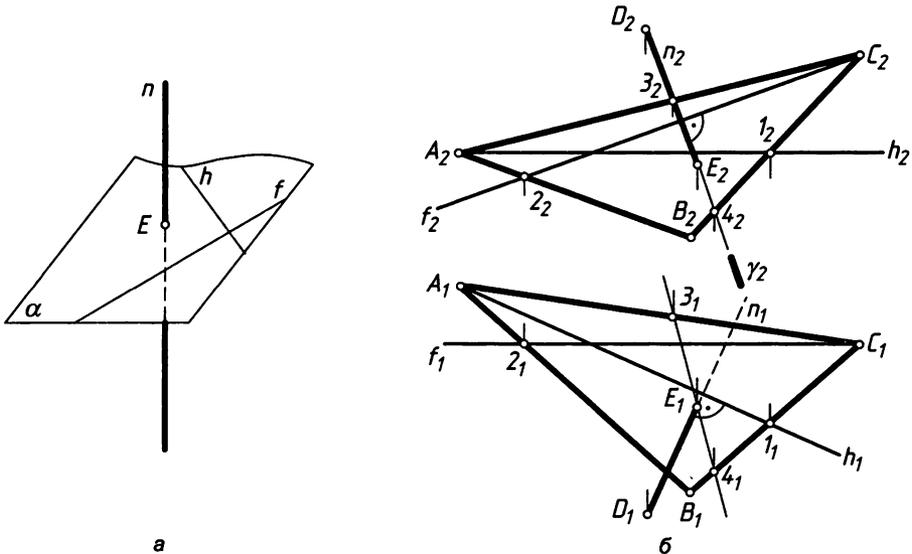


Рис. 7.30. Построение перпендикуляра к плоскости

В конкретных проекциях о перпендикулярности прямой  $n$  и плоскости  $\alpha$  судят так (рис. 7.30, б): прямая линия  $n \perp \alpha$ , если  $n_1 \perp h_1 \subset \alpha$ , а  $n_2 \perp f_2 \subset \alpha$ .

Определим расстояние от точки  $D$  ( $D \in D_2$ ) до плоскости  $\alpha$  ( $ABC$ ). Построим в плоскости горизонталь  $h$  ( $A_2 \in h_2 \rightarrow h_1$ ) и фронталь  $f$  ( $C_1 \in f_1 \rightarrow f_2$ ) и через точку  $D$  проведем прямую  $n \perp \alpha$  ( $h \cap f$ ), то есть  $D_1 \in n_1 \perp h_1$  и  $D_2 \in n_2 \perp f_2$ .

В общем случае нормаль  $n$  не ограничена. Но если определяется расстояние от точки  $D$  до плоскости, то на линии выделяется отрезок  $DE$ , у которого точка  $E = n \cap \alpha$  называется основанием перпендикуляра. Она определена с помощью посредника  $\gamma \perp \Pi_2$ :  $n_2 = \gamma_2 (Z_2 - 4_2) \rightarrow (Z_1 - 4_1) \cap n_1 = E_1 \rightarrow E_2$ .

На чертеже расстояние от точки  $A$  ( $A_1, A_2$ ) (рис. 7.31, а) до прямой линии  $l$  ( $l_1, l_2$ ) общего положения определяют следующим образом (рис. 7.31, б):

- через точку  $A$  проводят плоскость  $\beta \perp l$ , которую задают горизонталью  $h$  ( $A_1 \in h_1 \perp l_1 \rightarrow A_2 \in h_2 \parallel x$ ) и фронталью  $f$  ( $A_2 \in f_2 \perp l_2 \rightarrow A_1 \in f_1 \parallel x$ ); после этих построений будем иметь  $\beta (h \cap f) \perp l$ ;
- определяют точку  $B = l \cap \beta$ :  $l \subset \gamma \perp \Pi_1 \rightarrow l_1 = \gamma_1 (1_1 - 2_1) \rightarrow (1_2 - 2_2) \cap l_2 = B_2 \rightarrow B_1$ ;
- отрезок  $[AB]$  ( $[A_1 B_1] [A_2 B_2]$ ) равен расстоянию от точки  $A$  до прямой линии  $l$  в проекциях. По проекциям определяют натуральную величину отрезка (см. рис. 7.6).

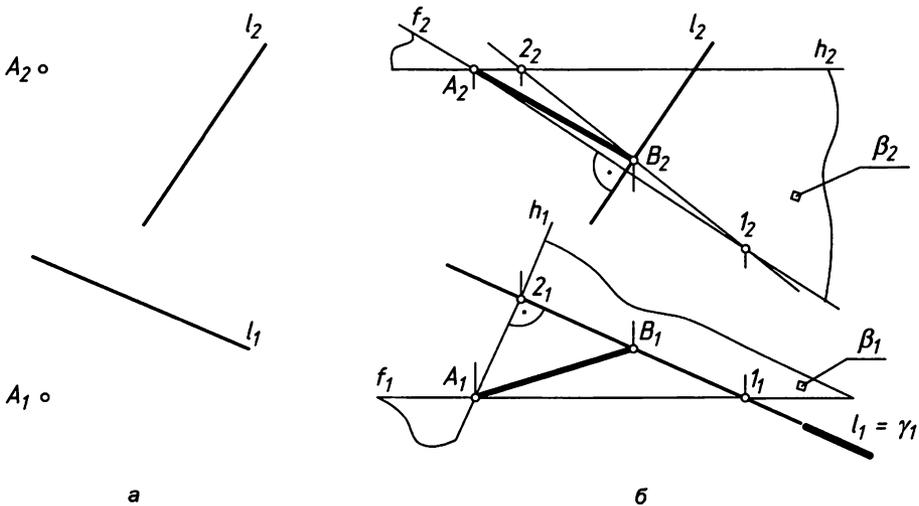


Рис. 7.31. Определение расстояния от точки до прямой линии

## 7.6. Относительное положение двух плоскостей

По взаимному расположению выделяют плоскости параллельные, пересекающиеся и, в частности, перпендикулярные.

### 7.6.1. Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны, если в каждой из них можно построить две пересекающиеся прямые, параллельные другой плоскости.

Плоскости  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) и  $\beta$  ( $c \cap d$ ) общего положения параллельны (рис. 7.32, а), если на чертеже:  $a \parallel c \Rightarrow a_1 \parallel c_1, a_2 \parallel c_2$  и  $b \parallel d \Rightarrow b_1 \parallel d_1, b_2 \parallel d_2$ .

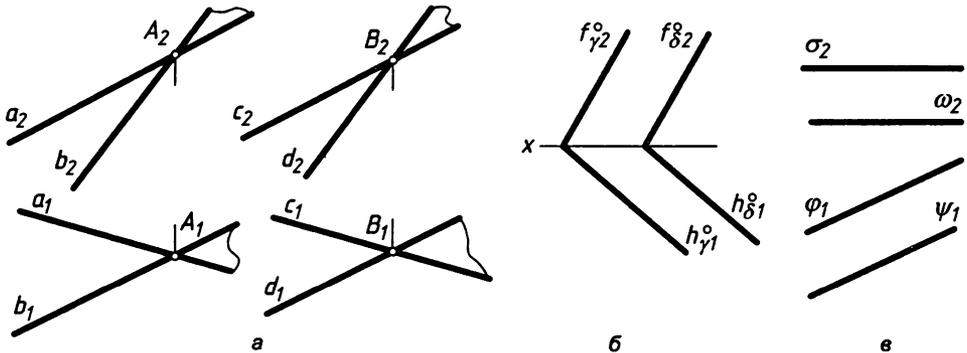


Рис. 7.32. Параллельные плоскости

У параллельных плоскостей  $\gamma$  и  $\delta$  параллельны семейства горизонталей и семейства фронталей, в том числе и следы  $h_{\gamma}^0 \parallel h_{\delta}^0, f_{\gamma}^0 \parallel f_{\delta}^0$  (рис. 7.32, б), или соответствующие следы плоскостей уровня  $\sigma_2 \parallel \omega_2$  и проецирующих  $\varphi_1 \parallel \psi_1$  (рис. 7.32, в).

### 7.6.2. Построение линии пересечения плоскостей

Две плоскости пересекаются по прямой линии. Для ее построения пользуются способом плоскостей-посредников. По способу их применения выделяют два варианта решения задачи:

- способ пересечения (точки встречи) прямой с плоскостью;
- способ плоскостей-посредников.

**Способ пересечения прямой с плоскостью.** Рассмотрим построение линии ( $MN$ ) пересечения плоскостей  $\alpha$  ( $ABC$ ) и  $\beta$  ( $DEF$ ) первым способом. Суть его проста. В одной из плоскостей берется прямая, например ( $DF$ ) (рис. 7.33, а), и определяется точка  $M$  ее пересечения с другой плоскостью, затем берется еще одна прямая в этой же, например ( $DE$ ), или в другой плоскости и опять определяется ее точка  $N$  пересечения со второй плоскостью. Через найденные точки проводят прямую линию ( $MN$ ) =  $\alpha \cap \beta$ .

На эюре (рис. 7.33, б) через прямую  $DF$  ( $D_1F_1$ ) проводим горизонтально проецирующую плоскость  $\gamma$  ( $\gamma_1$ ) и находим  $(1-2) = \gamma \cap \alpha \rightarrow (1_1-2_1) \rightarrow (1_2-2_2)$  и  $M = (1_2-2_2) \cap (DF) \rightarrow (1_2-2_2) \cap (D_2F_2) = M_2 \rightarrow M_1$ .

Для построения точки  $N$  использована фронтально проецирующая плоскость  $\sigma$  ( $\sigma_2$ )  $\supset (DE)$  и прямая  $(3-4) = \sigma \cap \alpha, N_1 = (3_1-4_1) \cap (D_1E_1) \rightarrow N_2$ .

В зависимости от поставленной задачи прямая ( $MN$ ) может быть безграничной или ограничена размерами материальных пластин, отсека плоскости и т. п.

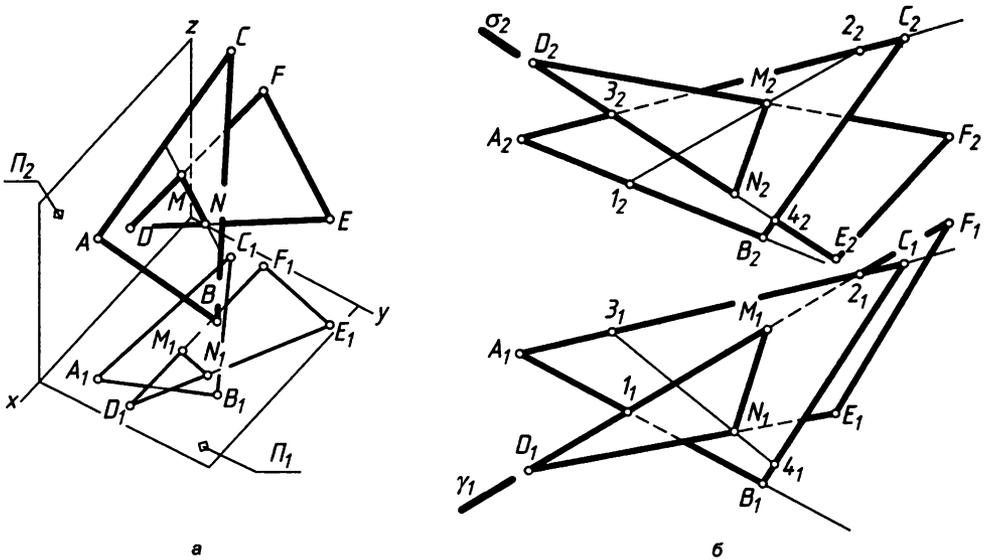


Рис. 7.33. Построение линии пересечения плоскостей способом пересечения прямой с плоскостью

Относительная видимость плоскостей определяется видимостью принадлежащих им прямых. В нашем примере это прямые  $(DE)$  и  $(DF)$ , а прямая  $(MN)$  является границей видимости. На рис. 7.33, б показана видимость ограниченных треугольных пластин (конкурирующие точки не отмечены).

Задачи пересечения прямой линии с плоскостью и двух плоскостей легко решаются с помощью родственного соответствия (см. главу 4 и раздел 5.4). Рассмотрим это на примере рис. 7.34. Дана плоскость  $\alpha (k \cap m)$  и треугольник  $ABC$  своими проекциями (см. рис. 7.34, а).

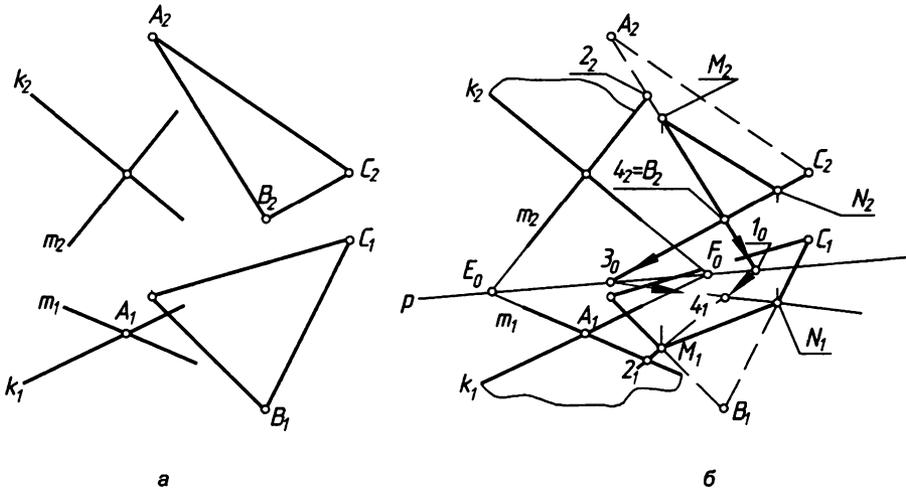


Рис. 7.34. Решение задачи пересечения прямой и плоскостей с помощью родства

Для решения задачи построим точки  $E_0 = m_1 \cap m_2$ ,  $F_0 = k_1 \cap k_2$  и ось  $\rho$  родства плоскости  $\alpha$  (рис. 34, б). Точку  $M = (AB) \cap \alpha$  определим из условия, что  $M_2 \in (A_2 B_2) = (2_2 - 1_0) \rightarrow (1_0 - 2_1) \rightarrow M_1 = (1_0 - 2_1) \cap (A_1 B_1) \rightarrow M_2$  — по вертикальной линии связи, так как линия 1–2 принадлежит плоскости  $\alpha$ , а ее пересечение с прямой  $AB$  определяет единственную точку  $M$ . Аналогично определяем точку  $N$ .

Строим  $(3_0 - 4_2) = (B_2 C_2) \rightarrow (3_0 - 4_1) \rightarrow N_1 = (3_0 - 4_1) \cap (B_1 C_1) \rightarrow N_2$  — по линии связи. По линии  $MN$  треугольник пересекает заданную плоскость. Треугольная пластина показана с учетом видимости относительно плоскости  $\alpha$ .

Но следует не забывать, что в случае, если мы будем искать точки пересечения линий, например,  $m$  и  $k$  плоскости  $\alpha$  с плоскостью  $\beta$  ( $ABC$ ), нужно использовать родство плоскости треугольника  $ABC$ , то есть необходимо построить его ось родства.

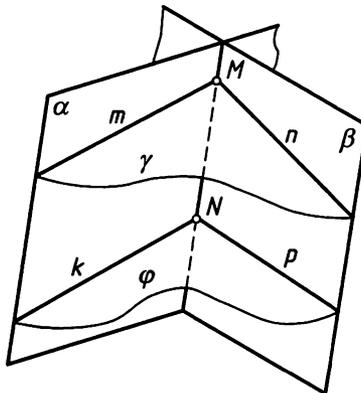
**Способ плоскостей-посредников.** Идея способа вспомогательных секущих плоскостей, которые называют *посредниками*, показана на рис. 7.35.

### Алгоритм 7.2

**Дано:**  $\alpha$  и  $\beta$  — плоскости.

**Найти:**  $l(MN) = \alpha \cap \beta$ .

1.  $\gamma$  — вводится посредник  $\gamma$  — проецирующая плоскость;
2.  $m = \alpha \cap \gamma$  — определяется линия  $m$  пересечения плоскости  $\alpha$  и посредника  $\gamma$ ;
3.  $n = \beta \cap \gamma$  — определяется линия  $n$  пересечения плоскости  $\beta$  и посредника  $\gamma$ ;
4.  $M = m \cap n$  — отмечается точка пересечения линий  $m$  и  $n$ ;
5.  $\varphi$  — вводится второй посредник.



**Рис. 7.35.** Решение задачи пересечения плоскостей способом плоскостей-посредников

Далее повторяются операции 2, 3, 4;

6.  $k = \alpha \cap \varphi$ ;
7.  $p = \beta \cap \varphi$ ;
8.  $N = k \cap p$ ;
9.  $l(MN) = \alpha \cap \beta$  — через точки  $M$  и  $N$  проводится прямая  $l$  пересечения плоскостей.

Пример решения подобной задачи показан на рис. 7.36.

Заданы плоскости  $\alpha (a \cap b)$  и  $\beta (c \parallel d)$ . Нужно построить линию  $(MN)$  их пересечения.

**Решение:**

1.  $\gamma (\gamma_2)$  – посредник, фронтально проецирующая плоскость.

Далее проследите по рис. 7.36:

2.  $\gamma_2 \cap \alpha_2 = m_2 (1_2-2_2) \rightarrow m_1 (1_1-2_1)$ ;

3.  $\gamma_2 \cap \beta_2 = n_2 (3_2-4_2) \rightarrow n_1 (3_1-4_1)$ ;

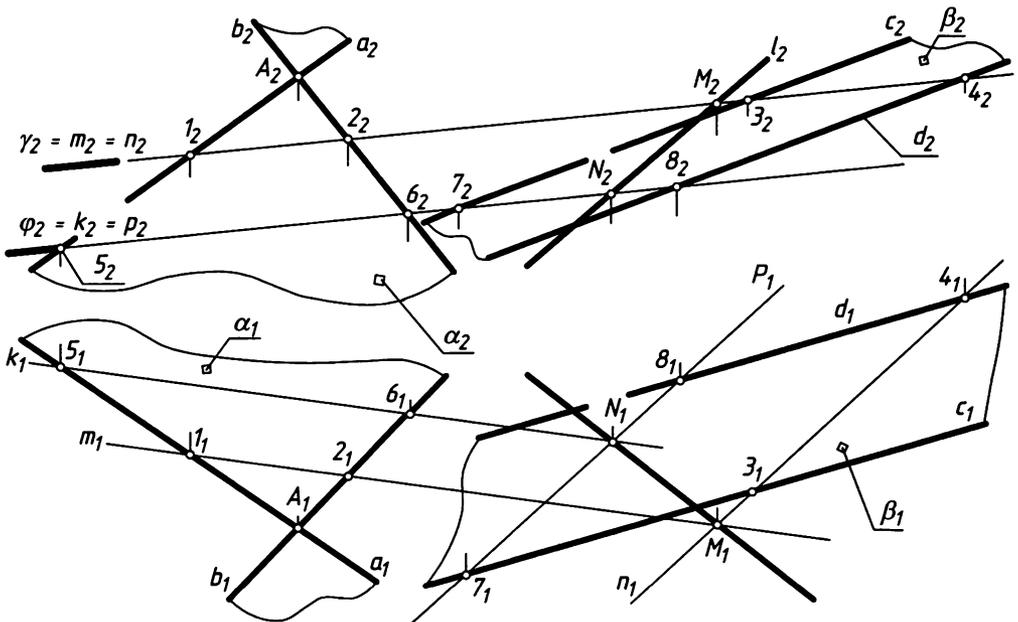
4.  $m_1 \cap n_1 = M_1 \rightarrow M_2$ ;

5.  $\varphi (\varphi_2)$  – второй посредник. Если выбрать  $\varphi \parallel \gamma$ , то прямые пересечения тоже будут параллельны, то есть  $k \parallel m$  и  $p \parallel n$ . Это упрощает построения;

6.  $\varphi_2 \parallel \gamma_2$ ;  $\varphi_2 \cap \alpha_2 = k_2 (5_2-6_2) \rightarrow k_1 (5_1-6_1) \parallel m_1$ ;

7.  $\varphi_2 \cap \beta_2 = p_2 (7_2-8_2) \rightarrow p_1 (7_1-8_1) \parallel n_1$  – здесь достаточно использовать только точки 5 и 7, или 6 и 8, или 5 и 8, или 6 и 7;

8.  $k_1 \cap p_1 = N_1 \rightarrow N_2$  и  $l_1 (M_1 N_1), l_2 (M_2 N_2), l (l_1, l_2) = \alpha \cap \beta$ .



**Рис. 7.36.** Построение линии пересечения плоскостей способом плоскостей-посредников

Если плоскости заданы следами (рис. 7.37, а), то здесь роль посредников выполняют сами плоскости проекций:

1.  $\pi_1$  – посредник.  $\pi_1 \cap \alpha = \alpha_{\pi_1}$  или  $h_{\alpha_1}^\circ \rightarrow h_{\alpha_2}^\circ = x$  – фронтальная проекция горизонтального следа совпадает с осью  $x$  и поэтому на чертеже не обозначается;

2.  $\pi_1 \cap \beta = \beta_{\pi_1}$  или  $h_{\beta_1}^\circ \rightarrow h_{\beta_2}^\circ = x$ ;  $\alpha_{\pi_1} \cap \beta_{\pi_1} = M_1 \rightarrow M_2 \in x$ ;

3.  $\pi_2$  – второй посредник с аналогичными свойствами. Поэтому сразу отмечаем  $N_2 = \alpha_{\pi_2} \cap \beta_{\pi_2} \rightarrow N_1 \in x$  и  $MN (M_1N_1, M_2N_2) = \alpha \cap \beta$ .

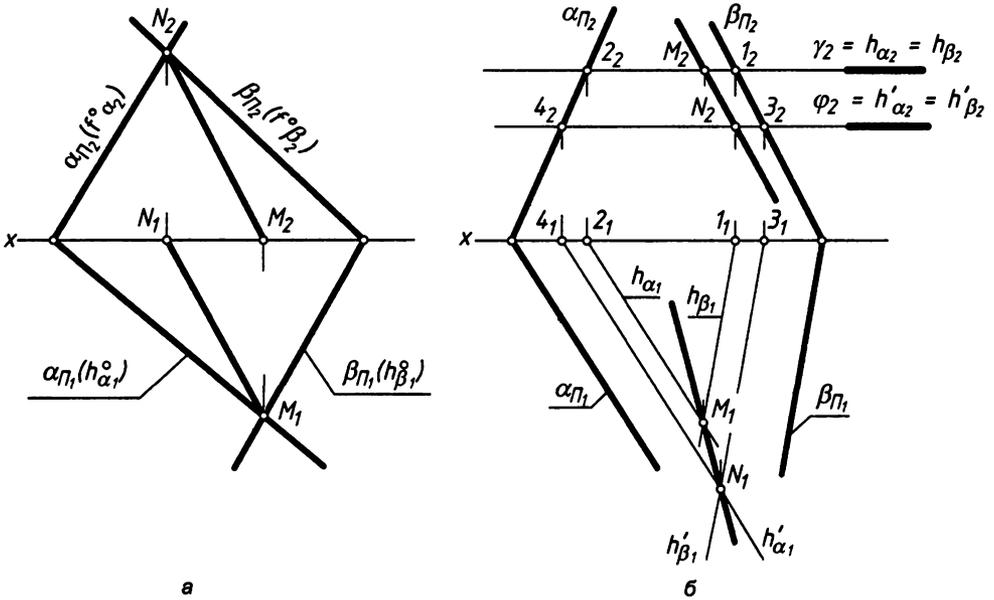


Рис. 7.37. Построение линии пересечения плоскостей, заданных следами

Если точки пересечения следов недоступны, удобно использовать в качестве посредников плоскости уровня, например  $\gamma (\gamma_2) \parallel \pi_1$  и  $\varphi (\varphi_2) \parallel \pi_1$  (рис. 7.37, б).

Они пересекут заданные плоскости по линиям уровня:

- $\gamma \cap \alpha = h_{\alpha_2} \rightarrow h_{\alpha_1} \parallel \alpha_{\pi_1}$ ;  $\gamma \cap \beta = h_{\beta_2} \rightarrow h_{\beta_1} \parallel \beta_{\pi_1}$ ;  $h_{\alpha_1} \cap h_{\beta_1} = M_1 \rightarrow M_2$ .
- $\varphi \cap \alpha = h'_{\alpha_2} \rightarrow h'_{\alpha_1} \parallel \alpha_{\pi_1}$ ;  $\varphi \cap \beta = h'_{\beta_2} \rightarrow h'_{\beta_1} \parallel \beta_{\pi_1}$ ;
- $h'_{\alpha_1} \cap h'_{\beta_1} = N_1 \rightarrow N_2$ ;  $MN (M_1N_1, M_2N_2) = \alpha \cap \beta$ .

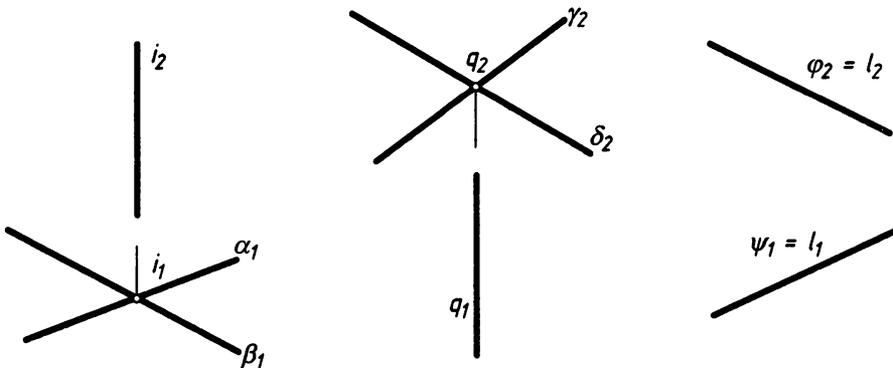


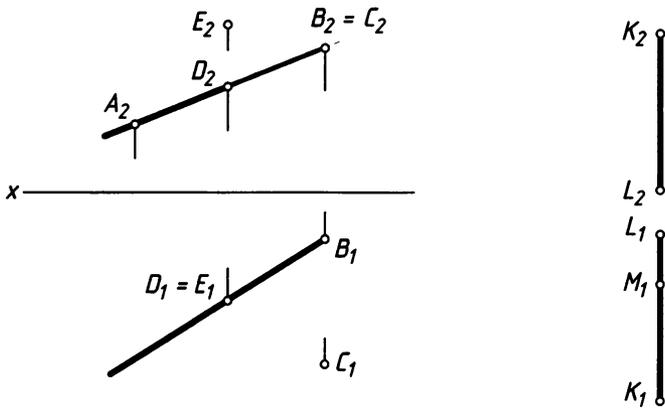
Рис. 7.38. Пересечение проецирующих плоскостей



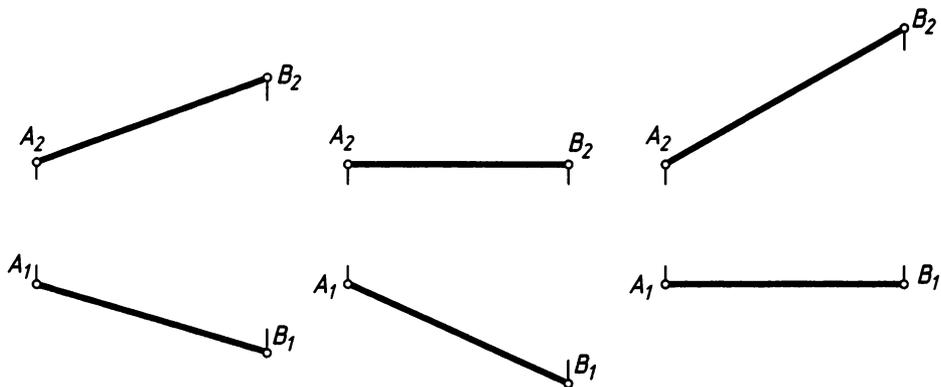
Если требуется выяснить перпендикулярность двух плоскостей, то нужно попытаться построить в одной из них прямую, перпендикулярную другой плоскости.

### Вопросы и задания

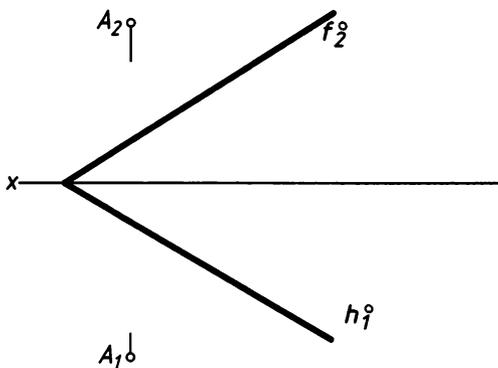
1. Постройте три проекции точек:  $A(40, 30, 50)$ ;  $B(15, -35, 20)$ ;  $C(25, 15, -30)$ ;  $D(30, -20, -40)$ .  
Укажите отрезки, показывающие расстояния от точек  $A, B, C, D$  до плоскостей проекций  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  и до осей  $x, y, z$ . В каких квадрантах находятся эти точки?
2. Постройте в прямоугольной изометрии точки  $A, B, C, D$  по координатам, заданным в предыдущей задаче, и сравните ответы по комплексному чертежу задачи 1 с аксонометрической картиной.
3. Приведите примеры чертежа прямой линии общего положения, прямых линий уровня и проецирующих прямых.
4. Заданы изображения двух прямых линий. Постройте проекции  $A_1$  и  $M_2$  точек, принадлежащих прямым. Как расположены точки  $B$  и  $C$  и  $D$  и  $E$  относительно прямой? Невидимую точку заключите в скобки. Найдите следы прямой  $(AB)$ . Постройте третьи проекции прямых и точек.



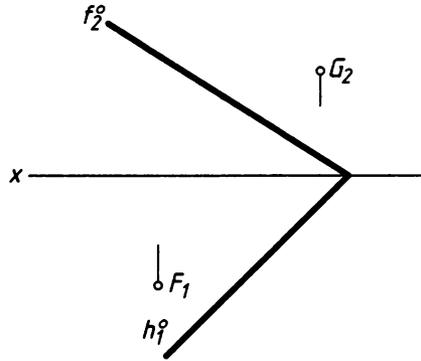
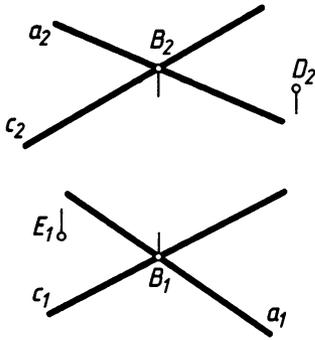
5. Найдите натуральную величину отрезка  $|AB|$  и углы его наклона к  $\Pi_1, \Pi_2$  и  $\Pi_3$ . Графически найдите точку  $C$ , если задано:  $AC:CB = 1:4$ .



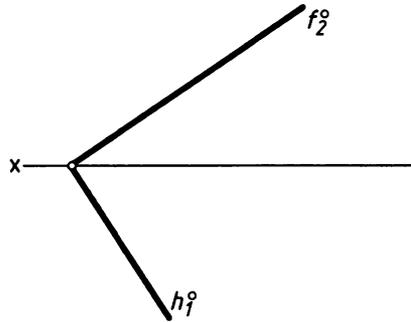
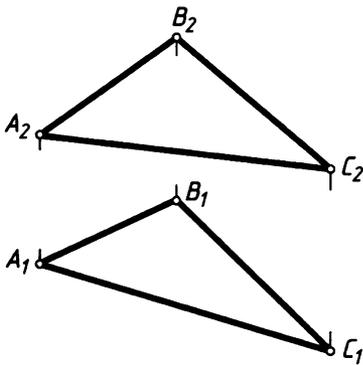
6. По каким признакам различают на чертеже параллельные, пересекающиеся, скрещивающиеся прямые?
7. При каких условиях прямой угол проецируется без искажения?
8. Какие геометрические объекты заданы на чертеже? Найдите расстояние от точки  $A$  до  $h^\circ$  и до  $f^\circ$ .



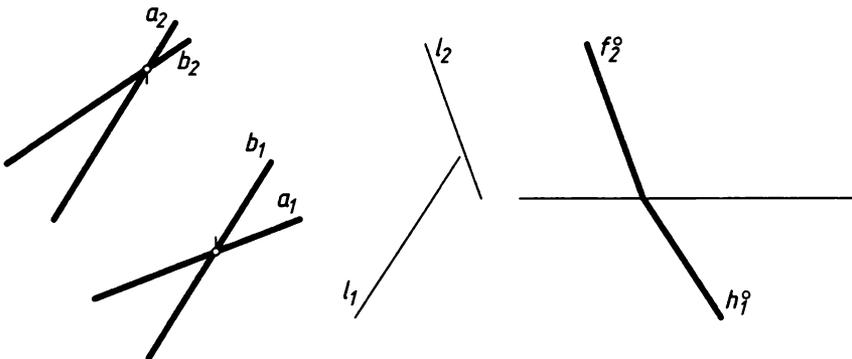
9. Какими геометрическими элементами можно задать плоскость общего и частного положения? Приведите примеры.
10. Что называют следом плоскости?
11. Каковы признаки принадлежности точки и прямой заданной плоскости?
12. Постройте недостающие проекции точек, лежащих в заданных плоскостях.



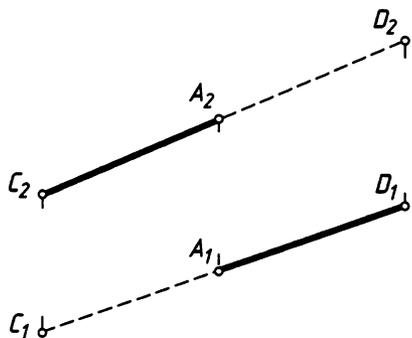
- 13. Какие плоскости называют проецирующими и плоскостями уровня? В чем их различие? Приведите примеры их изображения и обозначения.
- 14. Какие линии плоскости называют особыми?
- 15. Определите углы наклона заданных плоскостей к плоскостям  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  проекций, используя линии наибольшего наклона (л. н. н.). Дайте определение л. н. н.



- 16. Назовите признак параллельности прямой и плоскости. Как расположена прямая линия  $l$  относительно  $\alpha (a \cap b)$  и  $\beta (h^\circ \cap f^\circ)$ ?



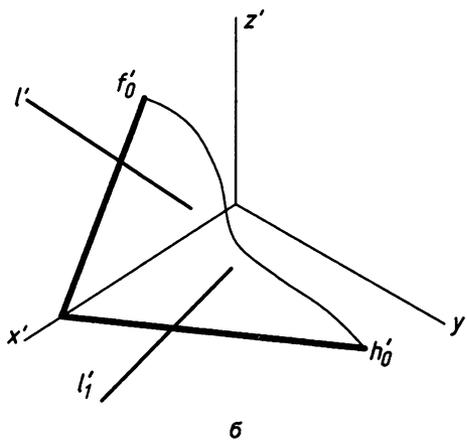
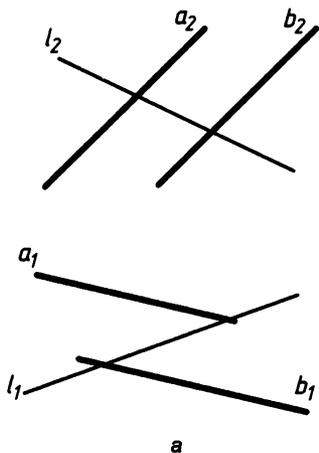
- 17. Через точку  $A$  прямой  $b (c, d)$  проведите плоскости  $\beta \perp \Pi_1$  и  $\gamma \perp \Pi_2$  так, чтобы участки  $[AD]$  и  $[AC]$  прямой  $b$  оказались невидимыми.



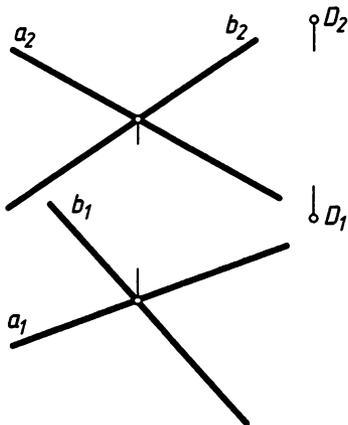
18. Постройте проекции точки  $M$  пересечения прямой  $l$  с плоскостью  $\alpha$ :

- на эюре  $\alpha$  ( $a \parallel b$ );
- в аксонометрии  $\alpha$  ( $h^\circ \cap f^\circ$ ).

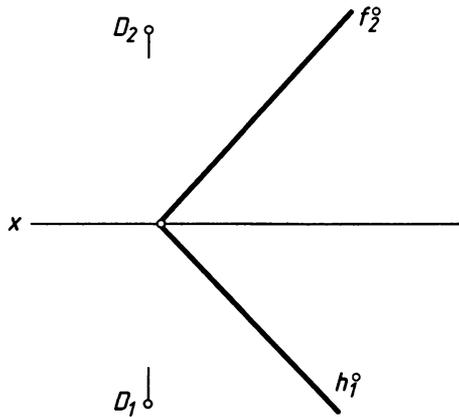
Определите видимость. Запишите алгоритм решения.



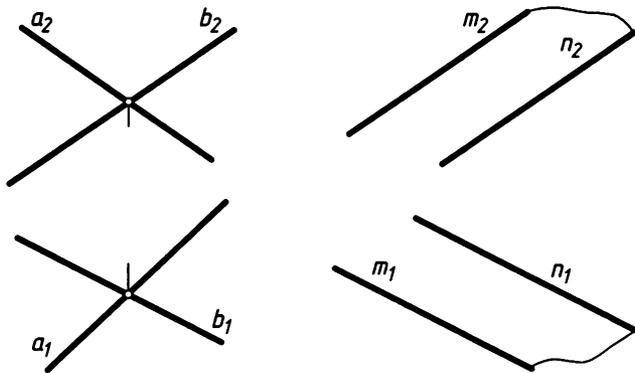
19. Определите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\alpha$  ( $a \cap b$ ).



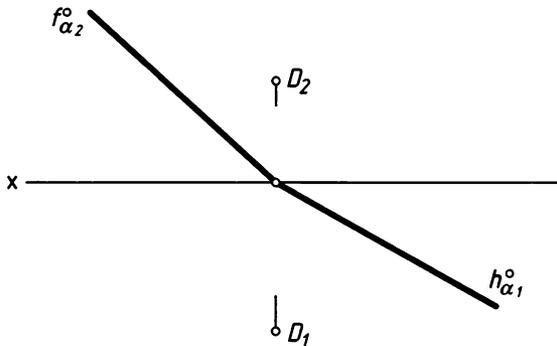
20. На заданном чертеже постройте точку  $F$ , симметричную точке  $D$  относительно плоскости  $\alpha$  ( $h^\circ \cap f^\circ$ ).



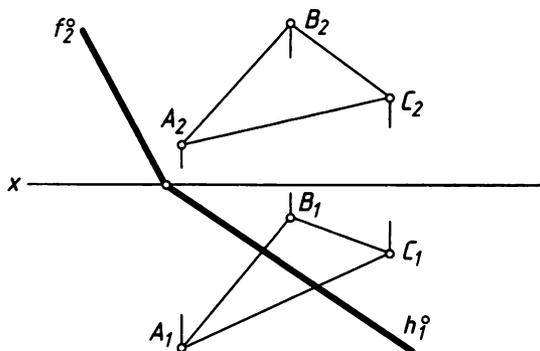
21. Параллельны ли заданные плоскости?



22. Через точку  $D$  проведите плоскость, параллельную плоскости  $\alpha$  ( $h^\circ \cap f^\circ$ ). Найдите расстояние между плоскостями.

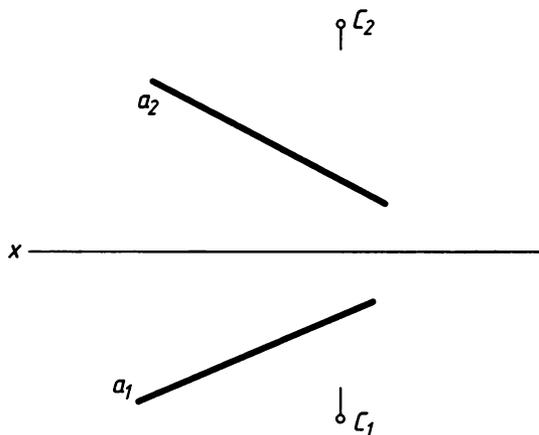


23. Постройте линию  $(MN)$  пересечения плоскостей  $\alpha (h^\circ \cap f^\circ)$  и  $\beta (ABC)$  способом плоскостей-посредников. Покажите видимость  $\Delta ABC$  относительно плоскости.



24. Назовите признак перпендикулярности двух плоскостей.

25. Через точку  $C$  плоскости  $\alpha (C, a)$  проведите плоскость  $\beta \perp \alpha$ , найдите ее следы.



# Глава 8

## Преобразование комплексного чертежа

Решение ряда задач начертательной геометрии упрощается и становится более наглядным, если геометрические объекты занимают частное положение относительно плоскостей проекций или аппарат проецирования выбран таким, что объект проецируется в удобную для решения поставленной задачи форму. Кроме того, по требованию стандартов при параметризации размеры изделий на чертеже указывают на неискаженных геометрических формах, что не всегда удается обеспечить ортогональным проецированием объекта на основные плоскости проекций. Поэтому при решении ряда задач проектировщики пользуются методом, который называют преобразованием чертежа. Разработанные способы преобразования комплексного чертежа можно разделить на две условные группы:

1. Группа, в которой используются преобразования координат или преобразование пространства с сохранением выбранной системы координат. Способы этой группы называют классическими.
2. Группа специальных преобразований.

Классические способы преобразования чертежа используют два направления:

1. Объект остается неподвижным, меняются условия (аппарат) проецирования.
2. Условия проецирования сохраняются, меняется положение объекта в пространстве.

В соответствии с этим преимущественно применяют следующие **способы преобразования чертежа**:

1. По первому направлению:
  - способ замены плоскостей проекций;
  - способ дополнительного проецирования.
2. По второму направлению:
  - способ плоскопараллельного перемещения;
  - способ вращения вокруг проецирующей прямой линии;
  - способ вращения вокруг линии уровня.

Все позиционные задачи, решаемые классическими способами преобразования чертежа, сводятся к следующим четырем основным задачам:

**Задача 1:** преобразовать чертеж прямой общего положения в чертеж прямой уровня.

**Задача 2:** преобразовать чертеж прямой общего положения в чертеж проецирующей прямой линии. Эта задача решается в два этапа: прямая преобразуется в прямую линию уровня, которая затем преобразуется в проецирующую прямую линию.

**Задача 3:** чертеж плоскости общего положения преобразовать в чертеж проецирующей плоскости.

**Задача 4:** чертеж плоскости общего положения преобразовать в чертеж плоскости уровня. Эта задача решается в два этапа: на первом этапе заданная плоскость преобразуется в проецирующую плоскость, а на втором этапе она преобразуется в плоскость уровня.

Эти задачи наиболее часто встречаются в инженерной практике. Классические способы преобразования чертежа отражены в содержании государственных образовательных стандартов по начертательной геометрии. Однако для решения ряда задач специалистами разработаны и используются способы второй группы (способы специальных преобразований):

1. Способ проективных преобразований.
2. Способ бирациональных (кремоновых) преобразований.
3. Способ топологических преобразований.

Мы познакомимся с рядом классических способов преобразования чертежа, а заинтересовавшимся читателям рекомендуем литературу [1], [19], [30], [31].

## 8.1. Преобразование чертежа способом замены плоскостей проекций

Этот способ преобразования базируется на двух основных положениях:

1. Объект сохраняет свое положение в пространстве, а плоскости проекций последовательно меняются. Меняется, соответственно, и аппарат проецирования, который должен обеспечить получение ортогональных проекций в новой системе плоскостей и связь старой и новой систем координат.
2. Любые две взаимно перпендикулярные плоскости могут быть приняты за плоскости проекций, при этом понятие горизонтальной и фронтальной плоскости проекций сохраняется.

Рассмотрим основы и закономерности этого способа на примере точки. Спроецируем точку  $A (A_1, A_2)$  на плоскости  $\Pi_1 \perp \Pi_2$  и отметим ее координаты  $(y, z)$  (рис. 8.1, а). Выберем новую плоскость проекций  $\Pi_4 \perp \Pi_1$  и сохраним за ней название фронтальной плоскости проекций. Условимся называть проекционную систему  $\chi_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  старой, а проекционную систему  $\chi_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$  новой системой,  $\chi_{14}$  — новая ось проекций. Построим ортогональные проекции этой же точки  $A (A_1, A_4)$  в новой системе

и укажем ее координаты  $(y, z)$ . Заметим, что  $|AA_1| = z = z_4$ , то есть при такой замене фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  на новую фронтальную плоскость проекций  $\Pi_4$  высота точки не меняется. Это естественно, так как плоскость  $\Pi_1$  и объект  $A$  не изменили своего относительного положения. Здесь и в дальнейшем новые фронтальные плоскости проекций будем обозначать *четным индексом*, а новые горизонтальные плоскости проекций будем обозначать *нечетным индексом*, начиная с  $\Pi_3$ , так как обозначение  $\Pi_3$  присвоено профильной плоскости проекций. Индекс в обозначении оси  $x_{12}$  в практических работах обычно не используют, как показано на рис. 8.1, б и рис. 8.1, з.

Совместим  $\Pi_4$  с  $\Pi_1$  поворотом вокруг оси  $x_{14}$  (рис. 8.1, б). Получился новый комплексный чертеж с осью  $x_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$  и ортогональными проекциями точки  $A$  ( $A_1, A_4$ ).

Совместим  $\Pi_4$  с  $\Pi_2$  поворотом вокруг оси  $x$  и получим в одной плоскости два взаимосвязанных эпюра точки  $A$  (рис. 8.1, в). Отсюда получаем *правила замены фронтальной плоскости проекций  $\Pi_2$  проекций*:

- для введения новой плоскости проекций достаточно выбрать новую ось  $x_{14}$  проекций;
- новая линия связи ( $A_1, A_4$ ) перпендикулярна новой оси  $x_{14}$  проекций;
- координата  $z$  старой (заменяемой)  $A_2$  проекции равна координате  $z_4$  новой (заменяющей)  $A_4$  проекции.

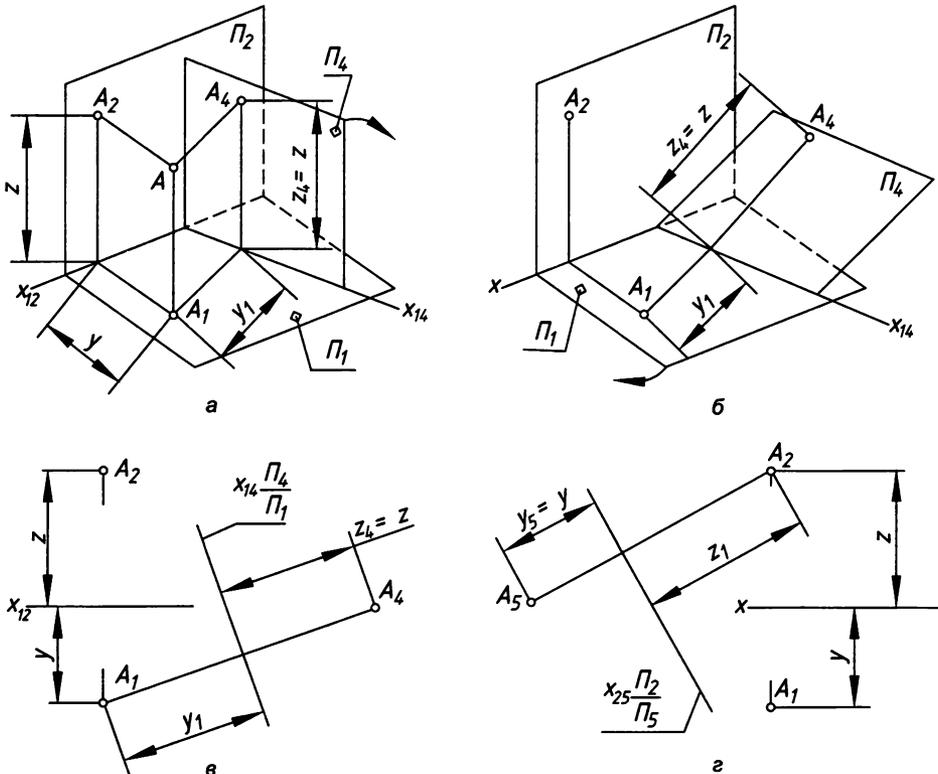


Рис. 8.1. Замена плоскостей проекций

Новая глубина  $y_1$  старой горизонтальной проекции  $A_1$  зависит только от положения оси  $x_{14}$ .

Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость  $\Pi_1$  проекций (рис. 8.1, з) на новую плоскость  $\Pi_5$ . Для этого выбираем положение новой оси  $x_{25}$ , проводим  $A_2A_5 \perp x_{25}$  и от  $x_{25}$  откладываем глубину  $y_5 = y$ .

Если координата  $z$  или  $y$  заменяемой проекции отрицательна, то она откладывается от оси  $x$  по линии связи в сторону остающейся проекции точки. Это значит, что обе проекции точки будут расположены по одну сторону от оси, а точка находится во второй или четвертой четверти новой системы плоскостей.

Пользуясь установленными правилами, можно последовательно заменять одну плоскость проекций за другой (рис. 8.2).

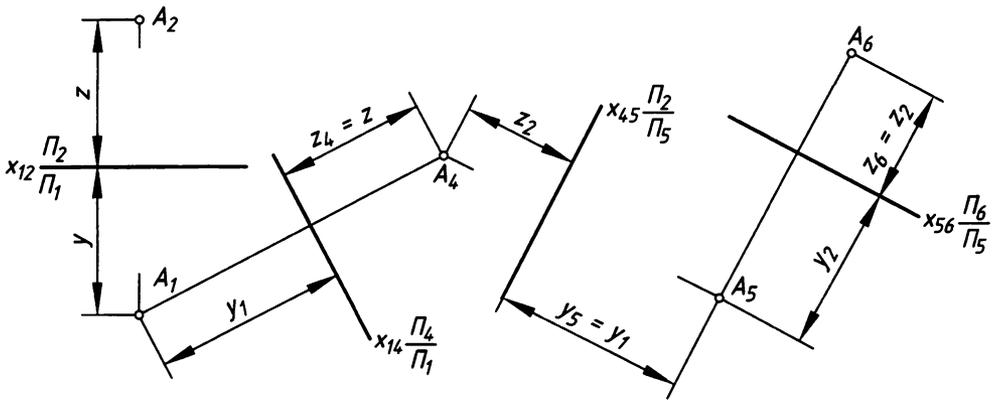


Рис. 8.2. Последовательная замена плоскостей проекций

От системы  $x_{12} = \Pi_1 \cap \Pi_2$  мы перешли к системе  $x_{14} = \Pi_1 \cap \Pi_4$ , заменив фронтальную плоскость проекций; затем перешли к системе  $x_{45} = \Pi_4 \cap \Pi_5$ , заменив горизонтальную  $\Pi_1$  плоскость проекций, где  $A_5$  — новая горизонтальная проекция точки  $A$ ; потом перешли к системе  $x_{56} = \Pi_5 \cap \Pi_6$ , заменив  $\Pi_4$  на  $\Pi_6$ , где  $A_6$  — новая фронтальная проекция точки  $A$ . Соответствующие координаты указаны на чертеже.

Рассмотрим применение описанного способа преобразования чертежа в решении основных позиционных задач.

**Пример 1.** Дана прямая линия ( $AB$ ) ( $A_1B_1, A_2B_2$ ), которую нужно сделать горизонтально проецирующей прямой (рис. 8.3, а).

Это *вторая основная задача*. На первом этапе заменим фронтальную плоскость  $\Pi_2$  проекций на новую  $\Pi_4$  так, чтобы прямая ( $AB$ ) стала фронтальной прямой уровня. Поэтому выбираем  $x_{14} \parallel (A_1B_1)$  (рис. 8.3, б). Ось проекций  $x$  старой системы выбираем так (проходит через точку  $A_2$ ), чтобы было меньше дополнительных построений. Строим новую фронтальную проекцию ( $A_2B_2$ ) прямой линии ( $z_i = z$ ). Решена первая основная задача.

На втором этапе решения новую горизонтальную плоскость  $\Pi_5$  выбираем так, чтобы прямая линия ( $AB$ ) стала горизонтально проецирующей. У такой прямой ось  $x_{45}$  проекций должна быть перпендикулярна фронтальной проекции ( $A_2B_2$ ). По линии

связи откладываем координату  $y$ , заменяемой проекции и получаем  $A_5 = B_5$  — горизонтальную проекцию горизонтально проецирующей прямой ( $AB$ ).

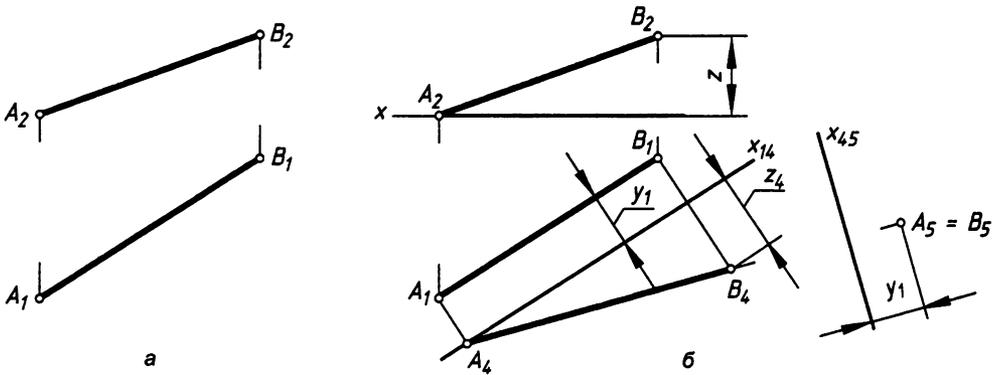


Рис. 8.3. Решение первой и второй основной задачи

**Пример 2.** Задана плоскость  $\alpha$  ( $a \cap b$ ) общего положения (рис. 8.4). Преобразовать чертеж так, чтобы она стала горизонтальной плоскостью уровня.

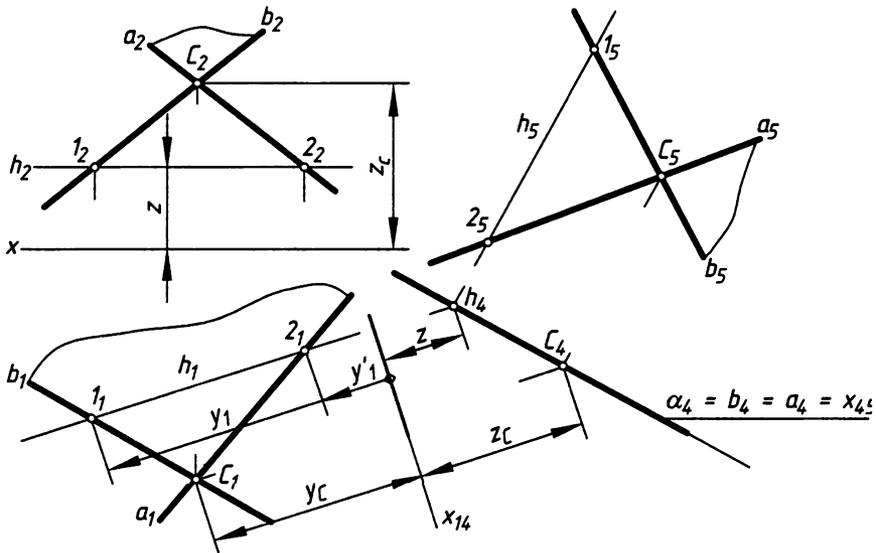


Рис. 8.4. Решение третьей и четвертой основной задачи

Это *четвертая основная задача*. На первом этапе ее решения заменим фронтальную плоскость  $\Pi_2$  проекций на новую  $\Pi_4$  так, чтобы плоскость  $\alpha$  стала фронтально проецирующей. Для этого в плоскости  $\alpha$  построим произвольную горизонталь  $h$  ( $h_2 \rightarrow h_1$ )  $\subset \alpha$  и выберем старую ось  $x$  проекций. В примере ось  $x$  выбрана произвольно, но можно ее выбрать, например, совпадающей с  $h_2$ . Используя признак перпендикулярности плоскостей, строим  $x_{14} \perp h_1$ , тогда прямая  $h$  ( $h_1, h_4$ ) в системе

$x_{4_6} = \Pi_1 \cap \Pi_4$  становится фронтально проецирующей и плоскость  $\alpha(h, C)$  тоже стала фронтально проецирующей. Так решена третья позиционная задача. На втором этапе заменяем горизонтальную проекцию. Выбираем новую ось  $x_{4_5}$  так, чтобы она совпала с фронтальной проекцией  $\alpha_4$  плоскости  $\alpha$ .

Строим новую горизонтальную проекцию, откладывая по линиям связи координаты:  $[h_4 - 2_5] = y'_1$ ,  $[h_4 - 1_5] = y_p$ ,  $[C_4 C_5] = y_C$ . Проводим прямые  $a_5$  и  $b_5$ . Плоскость  $\alpha$  стала горизонтальной плоскостью уровня.

## 8.2. Преобразование чертежа способом плоскопараллельного перемещения

*Плоскопараллельным* называют такое перемещение объекта, при котором все его точки движутся в плоскостях, параллельных одной плоскости, принятой за неподвижную.

Здесь за неподвижные плоскости принимаются плоскости проекций. Одно перемещение объекта производится относительно одной из них. Если этого недостаточно, второе перемещение объекта делают относительно другой плоскости.

При плоскопараллельном перемещении объекта  $[AB]$  относительно горизонтальной плоскости проекций все его точки ( $A$  и  $B$ ) движутся в горизонтальных плоскостях уровня  $\alpha(\alpha_2)$  и  $\beta(\beta_2)$  (рис. 8.5, а). Это значит, что отрезок  $[AB]$  может перемещаться в любое положение, но фронтальные проекции  $A_2$  и  $B_2$  его концов могут перемещаться только по вырожденным проекциям  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  горизонтальных плоскостей уровня, линии которых одновременно служат горизонтальными линиями связи.

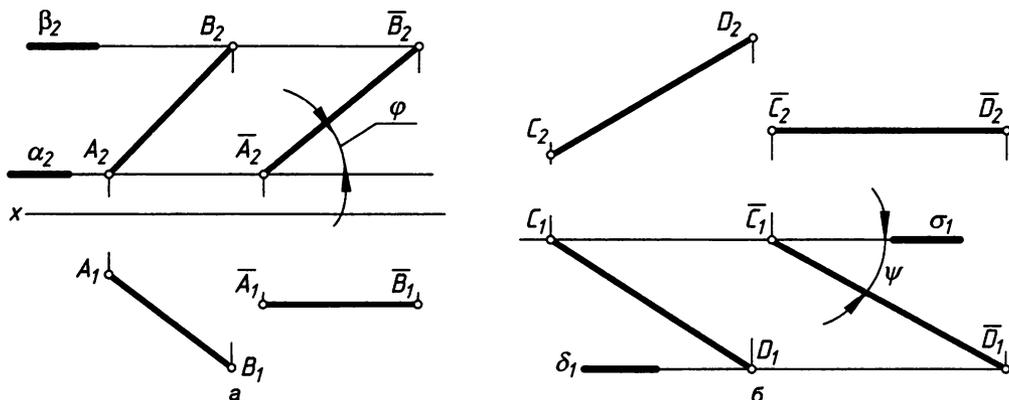


Рис. 8.5. Условия плоскопараллельного перемещения объекта

Так как при этом разность высот ( $\Delta z = z_B - z_A$ ) концов отрезка сохраняется, то угол его наклона к горизонтальной плоскости проекций не меняется и горизонтальная проекция  $[A_1, B_1]$  объекта может перемещаться как угодно, сохраняя при этом свои размеры и форму. Это свойство распространяется на горизонтальную проекцию любой фигуры, перемещающейся относительно горизонтальной плоскости проекций.

На рис. 8.5, а прямая линия  $(AB)$  перемещена до положения фронтальной прямой уровня. Известно, что горизонтальная проекция фронтали параллельна оси проекций  $x$ . Поэтому строим  $[\bar{A}_1\bar{B}_1] \parallel x$  в любом удобном месте, сохраняя равенство  $[\bar{A}_1\bar{B}_1] = [A_1B_1]$  новой и старой горизонтальной проекции. Из точек  $\bar{A}_1$  и  $\bar{B}_1$  проводим вертикальные линии связи и в пересечении их с горизонтальными линиями связи отмечаем новые фронтальные проекции точек  $\bar{A}_2$  и  $\bar{B}_2$ . Новые проекции  $[\bar{A}_1\bar{B}_1] \rightarrow [\bar{A}_2\bar{B}_2]$  изображают отрезок  $[AB] \parallel \Pi_2$ . Следовательно  $[\bar{A}_2\bar{B}_2] = |AB|$ , а  $\varphi = (AB) \wedge \Pi_2$ . Так решена первая основная задача.

На рис. 8.5, б прямая линия  $[CD]$  ( $C, D, C_2D_2$ ) задана безосным чертежом. Переместим ее до положения горизонтали.

При плоскопараллельном перемещении относительно фронтальной плоскости проекций все точки объекта движутся во фронтальных плоскостях ( $\sigma$  и  $\delta$ ) уровня. При этом горизонтальные проекции точек ( $C$  и  $D$ ) перемещаются по прямым ( $\sigma_1$  и  $\delta_1$ ), перпендикулярным вертикальным линиям связи, а фронтальная проекция объекта ( $C_2D_2$ ) может перемещаться произвольно, сохраняя свои размеры и форму.

Известно, что фронтальная проекция горизонтали параллельна оси  $x$  (перпендикулярна вертикальным линиям связи). Поэтому строим  $[\bar{C}_2\bar{D}_2] \perp (D_1D_2)$  в удобном месте и в пересечении вертикальных и горизонтальных линий связи находим новую горизонтальную проекцию  $[\bar{C}_1\bar{D}_1]$  прямой. Новые проекции  $[\bar{C}_2\bar{D}_2] \rightarrow [\bar{C}_1\bar{D}_1]$  изображают отрезок  $[CD] \parallel \Pi_1$  и  $|\bar{C}_1\bar{D}_1| = |CD|$ ,  $\psi = (CD) \wedge \Pi_2$ .

Заметим, что, выбирая положение свободно перемещаемой проекции, мы можем влиять на положение новых проекций на поле чертежа и изображать их справа или слева от старых проекций.

На рис. 8.6 показано решение второй основной задачи.

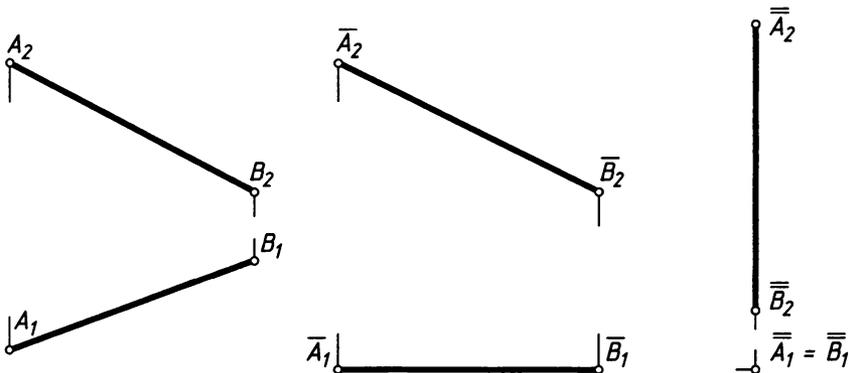


Рис. 8.6. Решение второй основной задачи способом плоскопараллельного перемещения

Зная основные закономерности построений, на чертеже подробно не показывают плоскости уровня и линии связи.

На первом этапе прямую линию  $[AB]$  мы переместили до положения  $[\bar{A}\bar{B}]$  ( $\bar{A}_1\bar{B}_1 \rightarrow \bar{A}_2\bar{B}_2$ ) фронтали, где  $[\bar{A}_1\bar{B}_1] = [A_1B_1]$ , а затем до положения  $[\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}]$  ( $\bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2 \rightarrow$

→  $\bar{A}_1\bar{B}_1$ ) горизонтально проецирующей прямой, где  $[\bar{A}_2\bar{B}_2] = [\bar{A}_2\bar{B}_2]$  и  $[\bar{A}_2\bar{B}_2] \perp x$  или  $[\bar{A}_2\bar{B}_2] \parallel (\bar{B}_1\bar{B}_2)$ . Выбирая положения  $[\bar{A}_1\bar{B}_1]$  и  $[\bar{A}_2\bar{B}_2]$ , управляем размещением новых проекций.

В следующем примере (рис. 8.7) задана плоскость  $\alpha (ABC)$  общего положения проекциями  $(A_1B_1C_1)$  и  $(A_2B_2C_2)$ . Решая третью основную позиционную задачу, мы должны использовать два положения:

- две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через перпендикуляр к другой плоскости;
- прямую линию уровня можно одним преобразованием сделать перпендикулярной (проецирующей) к одной из плоскостей проекций.

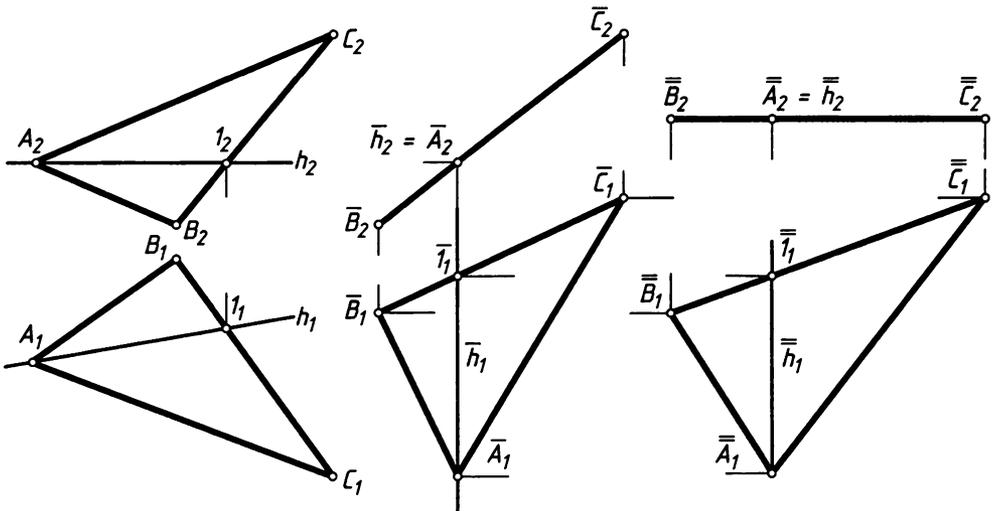


Рис. 8.7. Решение третьей и четвертой основной задачи способом плоскопараллельного перемещения

Построим в плоскости  $(ABC)$  горизонталь  $h ((A_2B_2C_2) \supset h_2 \rightarrow h_1)$  и переместим треугольник относительно горизонтальной плоскости проекций так, чтобы прямая  $h$  стала фронтально проецирующей прямой. Для этого строим в выбранном месте прямую  $\bar{h}_1$  и в любом месте отмечаем точку, например,  $\bar{1}_1$ , от которой откладываем отрезок  $[\bar{1}_1\bar{A}_1] = [1A_1]$ . На этом отрезке строим  $\Delta \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1 \cong \Delta A_1B_1C_1$ . Проводим дуги окружностей из точки  $\bar{1}_1$  радиусом  $|\bar{1}_1\bar{C}_1| = |1C_1|$ , а из точки  $\bar{A}_1$  радиусом  $|\bar{A}_1\bar{C}_1| = |A_1C_1|$  и в пересечении построенных дуг отмечаем точку  $\bar{C}_1$ .

Проводим прямую линию  $(\bar{C}_1\bar{1}_1)$  и на ней изображаем отрезок  $[\bar{C}_1\bar{B}_1] = [C_1B_1]$ . Соединяем вершину  $\bar{A}_1$  с вершинами  $\bar{B}_1$  и  $\bar{C}_1$ . По линиям связи строим новую фронтальную проекцию  $(\bar{A}_2\bar{C}_2\bar{B}_2)$  треугольника и линии  $\bar{h}_2$ . Фигура стала фронтально проецирующей, то есть мы решили третью основную позиционную задачу.

Перемещая фигуру относительно фронтальной плоскости проекций до положения  $(\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2) \perp (\bar{C}_1\bar{C}_2)$ , мы решаем четвертую основную позиционную задачу, то есть преобразуем заданную плоскость в горизонтальную плоскость уровня. Горизонтальная проекция  $(\bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1)$  треугольника определится в пересечении линий связи, и  $\Delta \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1 \cong \Delta ABC$ .

Возвращение к старым проекциям производится в обратном порядке.

Недостатком способа плоскопараллельного перемещения является необходимость построения свободно перемещаемой проекции в новом положении. Зато этот способ позволяет более удобно размещать новые проекции.

### 8.3. Преобразование чертежа способом вращения вокруг проецирующей прямой линии

На рис. 8.8, а изображена горизонтально проецирующая прямая  $i(i_1, i_2) \perp \Pi_1$  и горизонталь  $[AO] (A_1O_1, A_2O_2) \perp i$ , которые задают горизонтально проецирующую плоскость.

Если точку  $A$  вращать вокруг прямой  $i$ , то она будет совершать плоскопараллельное перемещение по окружности радиуса  $R = |AO| = |A_1O_1|$  с центром в точке  $O$ , плоскость которой будет горизонтальной плоскостью уровня. При таком вращении горизонтальная проекция  $A_1$  точки  $A$  будет двигаться по окружности, а фронтальная проекция  $A_2$  будет перемещаться по прямой линии  $(A_2O_2) \perp i_2$ .

Аналогично, при вращении вокруг фронтально проецирующей прямой  $q(q_1, q_2)$  (рис. 8.8, б) точки  $B$  ее фронтальная проекция  $B_2$  будет двигаться по окружности радиуса  $|O_2B_2|$ , а горизонтальная проекция  $B_1$  будет перемещаться по прямой  $(O_1B_1) \perp q_1$ . Если зафиксировать положение  $\bar{A}_1(\bar{B}_2)$  точки, то вторая проекция  $\bar{A}_2(\bar{B}_1)$  определится по линии связи.

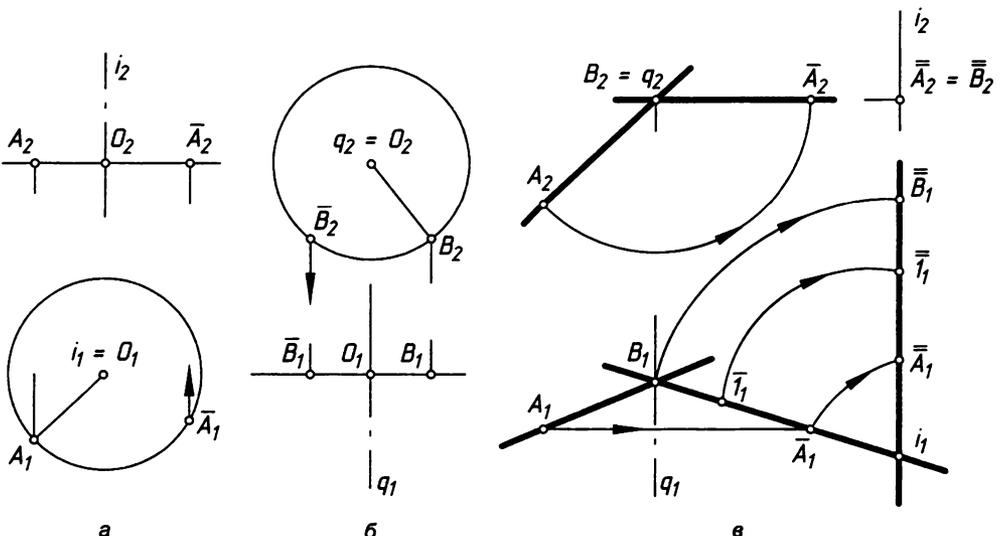


Рис. 8.8. Вращение вокруг проецирующей прямой линии

Пусть задана прямая  $(AB)$  ( $A_1B_1, A_2B_2$ ) общего положения (рис. 8.8, в). Проведем через точку  $B$  ( $B_1, B_2$ ) фронтально проецирующую прямую  $q$  ( $q_1, q_2$ ) и повернем вокруг этой оси прямую  $(AB)$  до положения горизонтали. Так как радиус вращения точки  $B$  равен нулю, то она останется на месте, а проекция  $A_2$  переместится по окружности радиуса  $|B_2A_2|$  в положение  $\bar{A}_2$ , когда  $(B_2\bar{A}_2)$  станет перпендикулярна вертикальной линии  $(B_1, B_2)$  связи. При этом горизонтальная  $A_1$  проекция переместится в положение  $\bar{A}_1$  по прямой  $(A_1\bar{A}_1) \perp q_1$ . В новом положении  $(B_1\bar{A}_1, B_2\bar{A}_2)$  прямая  $(AB)$  стала горизонталью, то есть мы решили первую основную задачу.

Чтобы не было наложения проекций, возьмем проекцию  $i$ , горизонтально проецирующей прямой  $i$  ( $i_1, i_2$ ) на продолжении проекции  $(B_1\bar{A}_1)$  прямой  $(AB)$  и вокруг этой оси повернем линию  $(AB)$  до положения фронтально проецирующей прямой. Для этого из точки  $i$ , радиусом  $|i_1\bar{A}_1|$ ,  $|i_1\bar{B}_1|$  или  $|i_1B_1|$  перемещаем любые точки до положения  $\bar{\bar{A}}_1, \bar{\bar{B}}_1, \bar{\bar{B}}_1$  прямой  $(\bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{B}}_1)$ , а фронтальные проекции  $B_2, \bar{A}_2$  точек переместятся в положение  $\bar{\bar{A}}_2 = \bar{\bar{B}}_2$ . Мы переместили прямую до положения  $(AB)$   $(\bar{\bar{A}}_1\bar{\bar{B}}_1, \bar{\bar{A}}_2\bar{\bar{B}}_2) \perp \Pi_2$ , то есть решили вторую основную задачу.

На рис. 8.9 показан пример решения третьей и четвертой основной задачи.

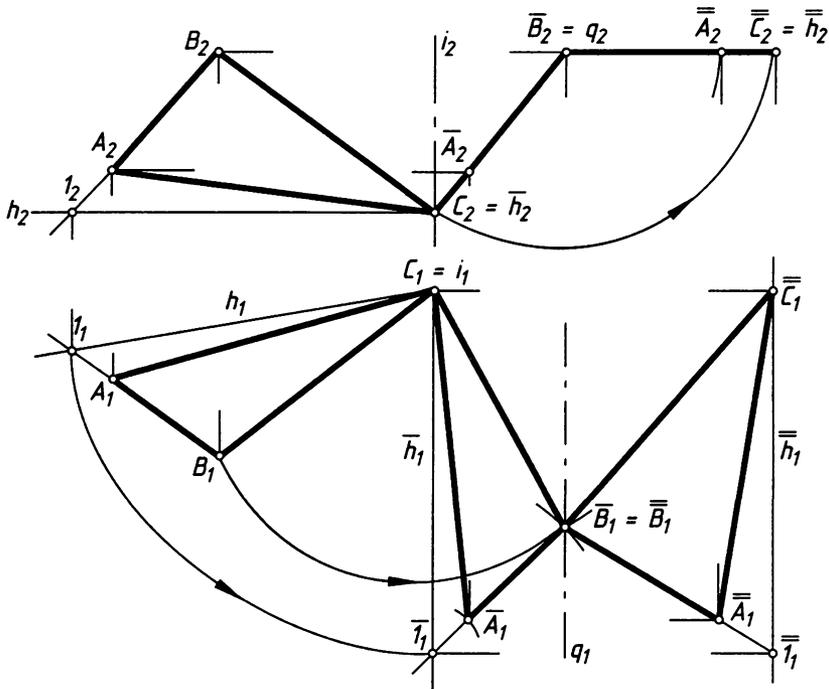


Рис. 8.9. Решение третьей и четвертой основной задачи способом вращения

В плоскости  $(ABC)$  общего положения мы построили горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) и вращением вокруг горизонтально проецирующей прямой  $i$  ( $i_1, i_2$ )  $\in \mathcal{L}(C_1, C_2)$  переместили плоскость до положения  $h_1(\bar{h}_1, \bar{h}_2) \perp \Pi_2 \Rightarrow (\bar{A}_1\bar{B}_1C_1 \rightarrow \bar{A}_2\bar{B}_2C_2) \perp \Pi_2$ , то есть до фронтально проецирующей.

тально проецирующего положения. Так решена третья позиционная задача. После этого через точку  $B$  провели прямую  $q (q_1, q_2) \perp \Pi_2$  и, приняв ее за ось вращения, повернули плоскость до положения  $(\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2 \rightarrow \bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1) \parallel \Pi_1$ , то есть до положения горизонтальной плоскости уровня.

### 8.4. Преобразование чертежа способом вращения вокруг линии уровня

Проведем через точку  $O (O_1, O_2)$  прямой  $[OB] (O_1, B_1, O_2, B_2)$  общего положения горизонталь  $h (h_1, h_2) \perp [OB]$  (рис. 8.10, а). Это значит, что в проекциях  $h_1 \perp (O_1, B_1)$ . Через прямую  $[OB]$  проведем горизонтально проецирующую плоскость  $\gamma (\gamma_1 = [O, B_1])$ . При вращении прямой  $[OB]$  вокруг линии уровня  $h$  точка  $B$  будет двигаться в плоскости  $\gamma$  по окружности радиуса  $|OB|$ . При этом горизонтальная проекция  $B_1$  будет перемещаться по следу  $\gamma_1$ , а фронтальная проекция  $B_2$  будет перемещаться по кривой — фронтальной проекции окружности точки  $B$ . Когда фронтальная проекция  $[O_2, B_2]$  займет положение  $[O_2, \bar{B}_2]$ , прямая  $[OB]$  станет горизонтальной и спроецируется на горизонтальную плоскость в отрезок  $[O_1, \bar{B}_1] = |OB|$ . Чтобы построить точку  $\bar{B}_1$ , используют определение натуральной величины  $|O, B^*| = |OB|$  отрезка способом прямоугольного треугольника  $O_1, B, B^*$ , а затем откладывают  $[O_1, \bar{B}_1] = [O, B^*]$ . Далее, если нужно, по линии связи указывают  $\bar{B}_2$ .

Такой способ преобразования имеет ограниченное применение. Он удобен, например, если нужно определить натуральную величину плоской фигуры.

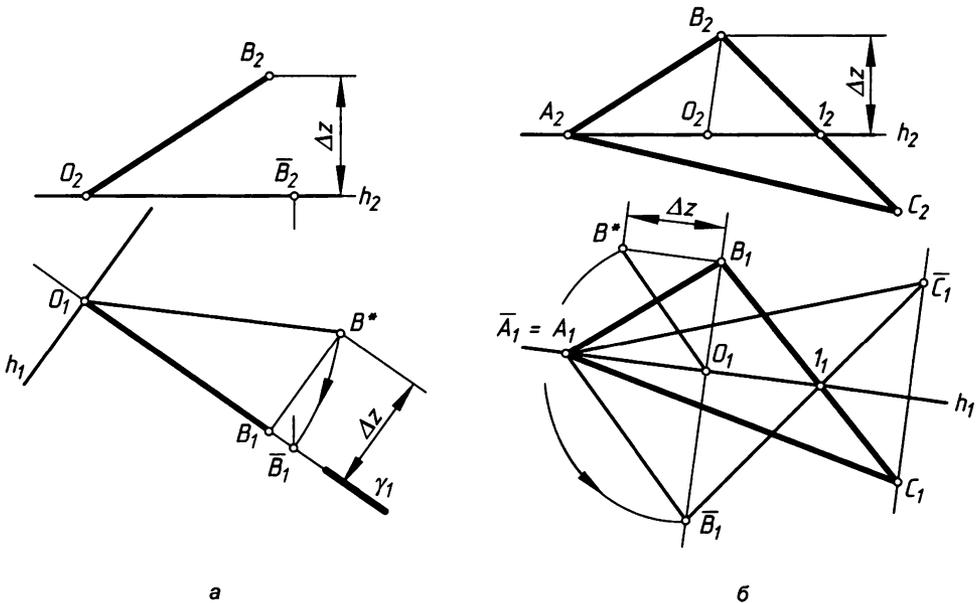


Рис. 8.10. Вращение вокруг линии уровня

Для определения величины  $\Delta ABC$  общего положения (рис. 8.10, б) через вершину  $A (A_1, A_2)$  проведем горизонталь  $h (h_1, h_2)$  и повернем треугольник вокруг нее до по-

ложения горизонтальной плоскости уровня. При этом проекции  $A$ , и  $1$ , останутся без движения, а точки  $B$ , и  $C$ , будут перемещаться по прямым  $(B, \bar{B}_1)$  и  $(C, \bar{C}_1)$ , перпендикулярным  $h$ . Для определения положения точки  $\bar{B}_1$  на прямой  $(B, \bar{B}_1) \perp h$ , построим прямоугольный треугольник  $O, B, B^*$  и из точки  $O$ , проведем окружность радиусом  $|OB| = |O, B^*|$  до пересечения с прямой  $(O, \bar{B}_1)$ .

Из двух возможных точек пересечения этой окружности с прямой линией  $(O, \bar{B}_1)$  выбираем одну точку  $\bar{B}_1$ , удобную для построений. В пересечении прямой линии  $(\bar{B}_1, 1)$  с прямой линией  $(C, \bar{C}_1) \perp h$ , получим вершину  $\bar{C}_1$ .  $\Delta \bar{A}_1 \bar{B}_1 \bar{C}_1 \cong \Delta ABC$ .

Так мы решили четвертую основную задачу за одно преобразование вместо двух, которые приходится делать при использовании предыдущих способов.

## 8.5. Преобразование чертежа способом дополнительного проецирования

Само название способа говорит о том, что по имеющимся ортогональным проекциям чертежа строятся новые проекции объекта, которые называют дополнительными, или вспомогательными, проекциями. При этом используются основные или дополнительные, специально выбранные, плоскости проекций и дополнительные собственные или несобственные центры проецирования.

В настоящее время разработан ряд способов дополнительного проецирования, в которых используется не только прямолинейное ортогональное или косоугольное проецирование, но и криволинейное проецирование, где в качестве проецирующих линий могут быть плоские или пространственные кривые линии. В учебном пособии [30] профессор С. А. Фролов приводит принципиальный обзор различных способов преобразования ортогональных проекций, сравнительную оценку и рекомендации по их использованию, который мы рекомендуем заинтересованному читателю.

Мы на отдельных примерах познакомимся с принципом дополнительного проецирования, которое чаще используется в инженерной практике.

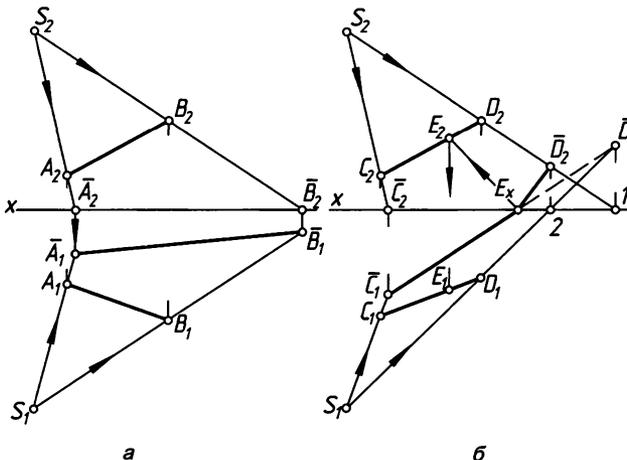


Рис. 8.11. Построение дополнительной центральной проекции отрезка

Рассмотрим построение дополнительной центральной проекции отрезка на основные плоскости проекций по заданным его ортогональным проекциям (рис. 8.11). Новый центр  $S$  проецирования задаем его ортогональными проекциями  $(S, S_2)$ . Построим дополнительную проекцию отрезка  $AB$  ( $A, B, A_2, B_2$ ) на горизонтальную плоскость проекций (рис. 8.11, а).

Для этого через точки  $A$  и  $B$  отрезка проведем проецирующие прямые  $SA$  и  $SB$  и построим их горизонтальные следы. Отрезок  $\bar{A}\bar{B}$  и будет центральной проекцией прямой  $AB$  на горизонтальную плоскость. Фактически мы строим горизонтальный след проецирующей плоскости  $\sigma(S, AB)$ .

Если центр  $S$  рассматривать как точечный источник света, то построенная проекция будет тенью отрезка на горизонтальной плоскости. На этом принципе основано построение теней объектов. Построения понятны из чертежа.

На рис. 8.11, б аналогично построена центральная проекция отрезка  $CD$ . Проекция точки  $D$  находится во второй четверти и, если это тень, нужно найти фронтальный след проецирующей прямой  $SD$ . Участок  $ED$  прямой является центральной проекцией (тенью) на фронтальную (вертикальную) плоскость. Соответствующую точку  $E$  ( $E_2 \rightarrow E_1$ ) определяем обратным построением, которое показано на чертеже. Так можно построить проекции объекта и на другие, специально выбранные плоскости проекций.

На рис. 8.12 показано преобразование плоскости  $\alpha$  ( $c||d$ ) общего положения (рис. 8.12, а) во фронтально проецирующую плоскость.

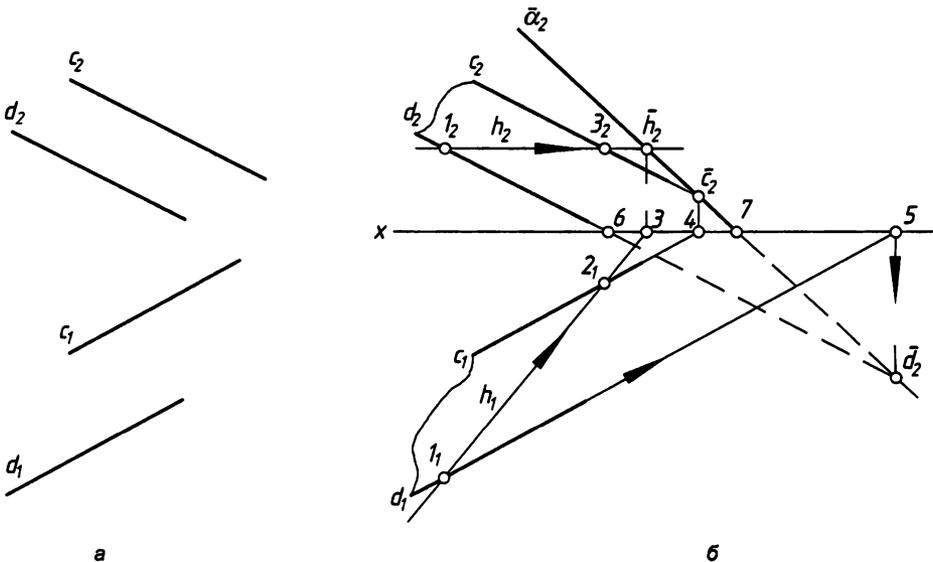


Рис. 8.12. Преобразование плоскости косоугольным проецированием

Плоскость будет проецирующей, если направление косоугольного проецирования параллельно этой плоскости, то есть параллельно любой ее прямой линии. Построим горизонталь  $h$  ( $h, h_2$ ) плоскости и ее фронтальный след  $\bar{h}_2$  (рис. 8.12, б). Аналогично построим фронтальный след прямой  $c$  или  $d$ . Прямая линия, проходя-

щая через эти следы, будет косоугольной проекцией плоскости  $\alpha$  на фронтальную плоскость проекций  $\Pi_2$ . Построения показаны и понятны из чертежа.

Рассмотрим пример определения расстояния от точки  $C$  до прямой  $AB$  (рис. 8.13, а) способом дополнительного проецирования. Построим новую вертикальную плоскость  $\bar{\Pi}$  параллельно прямой линии  $AB$ . Для этого проводим ее горизонтальный след  $h_{\bar{\Pi}}^0$  параллельно  $A_1B_1$ . Спроецируем объект ортогонально на эту плоскость.

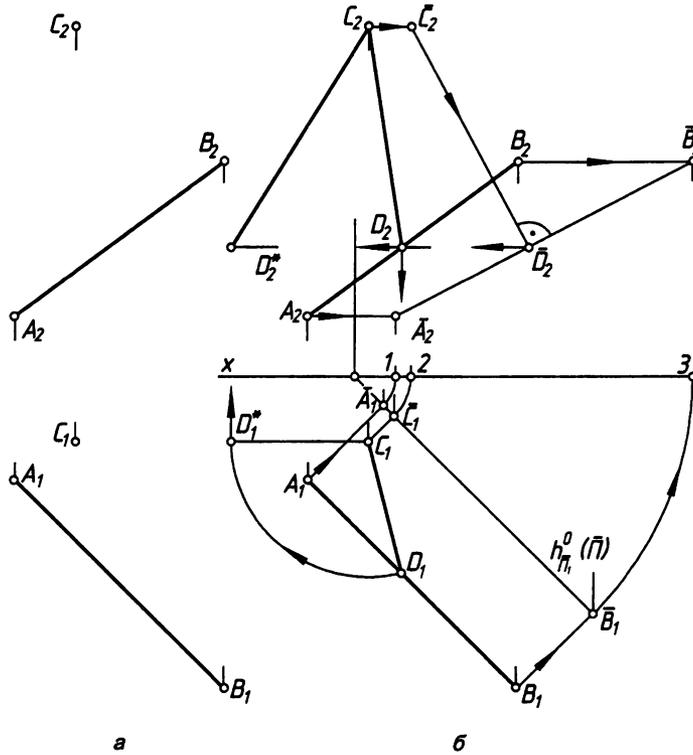


Рис. 8.13. Определение расстояния от точки до прямой линии способом дополнительного проецирования

При этом проекция прямого угла, образованного перпендикуляром, опущенным из точки  $C$  на прямую  $AB$ , будет прямым углом. Чтобы его увидеть без искажения, повернем плоскость вокруг ее вертикального следа до совмещения с фронтальной плоскостью проекций  $\Pi_2$ . При этом фронтальные проекции точек объекта переместятся параллельно оси  $x$  до пересечения с вертикальными линиями связи, проведенными из точек 1, 2 и 3. Из точки  $C_2$  проводим перпендикуляр прямой  $A_2\bar{B}_2$  и отмечаем его основание  $\bar{D}_2$ . Обратным построением отмечаем проекции точки  $D$  ( $D_2 \rightarrow D_1$ ) и строим отрезок  $CD$  ( $C_1D_1, C_2D_2$ ), длина которого равна расстоянию от точки  $C$  до прямой линии  $AB$ . Все построения показаны на чертеже.

Натуральную величину  $C_2D_2^*$  отрезка построили, повернув его до положения фронтали вокруг горизонтально проецирующей прямой (проецирующая прямая на чертеже не показана), проходящей через точку  $C$ .

Аналогично решена задача определения расстояния от точки  $D$  до плоскости  $\alpha$  ( $ABC$ ) (рис. 8.14, а). В плоскости  $\alpha$  построили горизонталь  $h$  (рис. 8.14, б) и перпендикулярно к ней провели новую (горизонтально проецирующую) плоскость проекций  $\sigma$  ( $\sigma \perp h$ ).

При прямоугольном проецировании объекта на плоскость  $\sigma$  ( $\sigma_1$ ) плоскость  $\alpha$  будет по отношению к ней проецирующей, а прямые линии, перпендикулярные  $\sigma$  ( $\sigma_1$ ), будут линиями уровня по отношению к плоскости  $\Pi_1$ . Вращением (показано дугами со стрелками) вокруг вертикального следа  $\sigma_{12}$  (след на чертеже не показан) совместим плоскость  $\sigma$  с фронтальной плоскостью проекций ( $\sigma_1$  совпадет с  $x$ ), построим изображение  $\bar{\alpha}_2$  и отрезок  $\bar{D}_2\bar{E}_2 \perp \bar{\alpha}_2$ , который равен расстоянию от заданной точки до плоскости, то есть  $|\bar{D}_2\bar{E}_2| = |DE|$ .

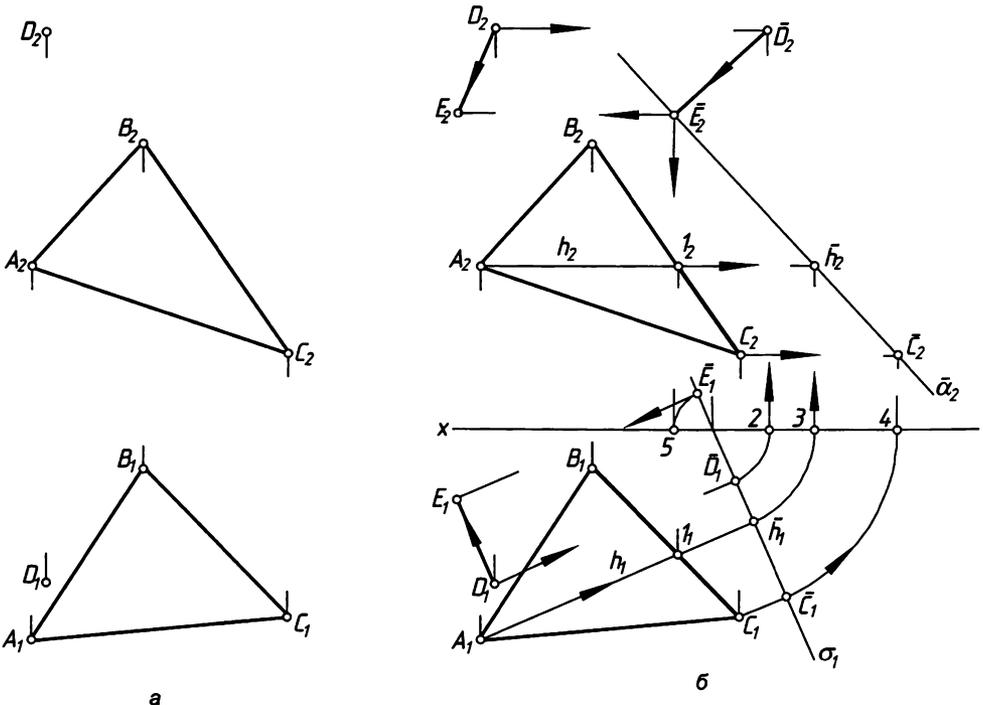


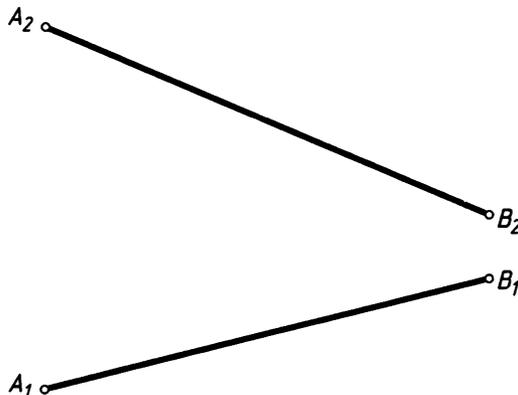
Рис. 8.14. Определение расстояния от точки до плоскости способом дополнительного проецирования

Для построения этого отрезка на исходном чертеже, по вертикальной линии связи с  $E_2$  отмечаем точку 5, обратным вращением строим проекцию  $\bar{E}_1$ , а затем  $E_1 \rightarrow E_2$  из условия, что  $D_1E_1 \perp h_1$ ,  $E_1 = D_1E_1 \cap \bar{E}_1E_1$ ,  $E_2$  находится в пересечении линий связи. Проекции отрезка  $DE$  ( $D_1E_1, D_2E_2$ ) исходного чертежа выражают расстояние от точки  $D$  до плоскости  $\alpha$ .

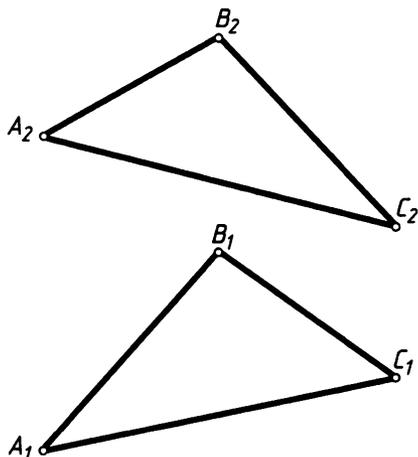
В инженерной практике к каждой задаче подходят индивидуально, выбирают более подходящий способ решения для данных условий и при этом часто пользуются одновременно несколькими способами преобразования.

## Вопросы и задания

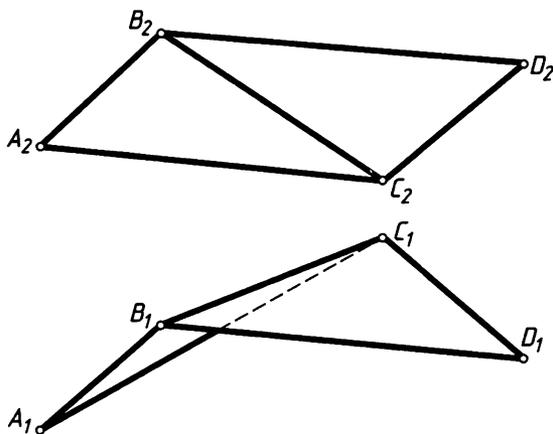
1. Какова цель преобразования чертежа?
2. Какие способы преобразования чертежа вам известны?
3. Какие способы преобразования рассмотрены в этой главе?
4. В чем принципиальное различие рассмотренных способов преобразования чертежа?
5. Назовите основные позиционные задачи, решаемые классическими способами преобразования чертежа.
6. Назовите основные позиционные задачи, решаемые одним преобразованием.
7. Назовите основные задачи, решаемые двумя преобразованиями. Какова последовательность их решения?
8. Назовите основные закономерности способа замены плоскостей проекций. Как задается новая плоскость проекций?
9. Какова связь новых проекций со старыми проекциями при замене плоскостей проекций?
10. Назовите основные закономерности преобразования чертежа способом плоскопараллельного перемещения.
11. Как меняются проекции объекта при его перемещении относительно горизонтальной (фронтальной) плоскости проекций?
12. Вспомните закономерности преобразования чертежа способом вращения вокруг проецирующей прямой.
13. В чем разница способа вращения и плоскопараллельного перемещения?
14. Когда удобно применять вращение вокруг линии уровня?
15. Используя разные способы, преобразуйте чертеж прямой ( $AB$ ) до положения:
  - а)  $[AB] \parallel \Pi_r$ ; б)  $[AB] \perp \Pi_2$ ; в)  $[AB] \parallel \Pi_2$ ; г)  $[AB] \perp \Pi_r$ .



16. Используя разные способы преобразования чертежа, определите натуральную величину  $\triangle ABC$ .



17. Преобразованием чертежа определите натуральную величину двугранного угла  $ABCD$ . Рекомендуется решить задачу разными способами.



18. Задайте чертежи отрезков прямой разного положения и постройте их тени от выбранного точечного источника света.
19. Сами задайте чертеж точки и прямой общего положения. Найдите расстояние от этой точки до прямой способом дополнительного проецирования.

# Глава 9

## Многогранные поверхности

Поверхность изделия, ограниченная отсеками плоскостей, называется *многогранной*, а само изделие (фигуру) в этом случае называют *многогранником*. Каждый отсек плоскости называется *гранью*. Границами грани служит многоугольник, стороны которого называются *ребрами* и являются прямыми пересечениями граней.

Наибольшее применение находят многогранники, которые называют пирамидами, призмами и призматоидами.

*Пирамидой* называют многогранник, основанием которого является многоугольник, а боковыми гранями — треугольники с общей вершиной, называемой вершиной пирамиды (рис. 9.1).

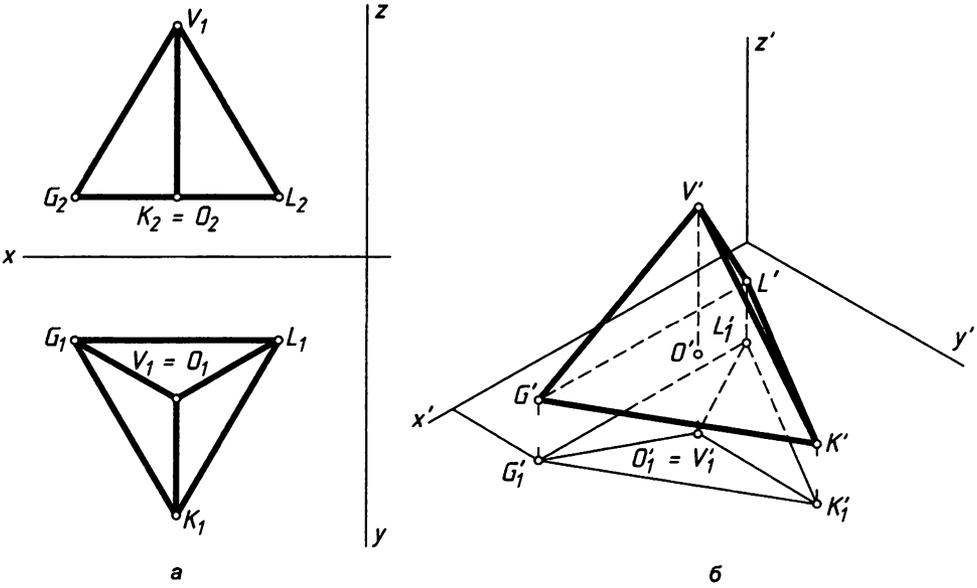


Рис. 9.1. Трехгранная пирамида

Прямые ( $VG, VK, VL$ ) пересечения боковых граней называют *боковыми ребрами*. Прямые пересечения боковых граней с основанием называют *ребрами основания*. Точки пересечения ребер называют *вершинами многогранника*.

В обозначении пирамиды указывают вершину пирамиды и вершины основания, например, на рис. 9.1 –  $VGKL$ .

Ребра многогранной поверхности образуют ее каркас (или сетку). Построение проекций многогранной поверхности сводится к построению проекций ее каркаса (рис. 9.1, а), то есть вершин, соединенных ребрами.

При построении аксонометрического чертежа (рис. 9.1, б) в общем случае изображаются вторичная проекция  $V_1'G_1'K_1'L_1'$  поверхности (обычно тонкими линиями) и ее аксонометрическая проекция  $V_1G_1K_1L_1$ . Для этого выбираются оси  $Oxuz$  натуральной системы, назначается вид аксонометрии (см. главу 6), определяются аксонометрические  $x', y', z'$  координаты вершин и строятся их вторичные и аксонометрические проекции, которые соединяются прямыми линиями.

Многогранник называют *выпуклым*, если он весь лежит по одну сторону от любой из его граней. В этом случае грани и фигуры сечения многогранника тоже являются выпуклыми многоугольниками. Отрезок, измеряемый перпендикуляром  $[VO]$ , опущенным из вершины пирамиды на его основание, называют *высотой пирамиды*.

Пирамиду называют *правильной*, если основанием служит правильный многоугольник и высота пирамиды проходит через центр этого многоугольника (рис. 9.1 и 9.2, а).

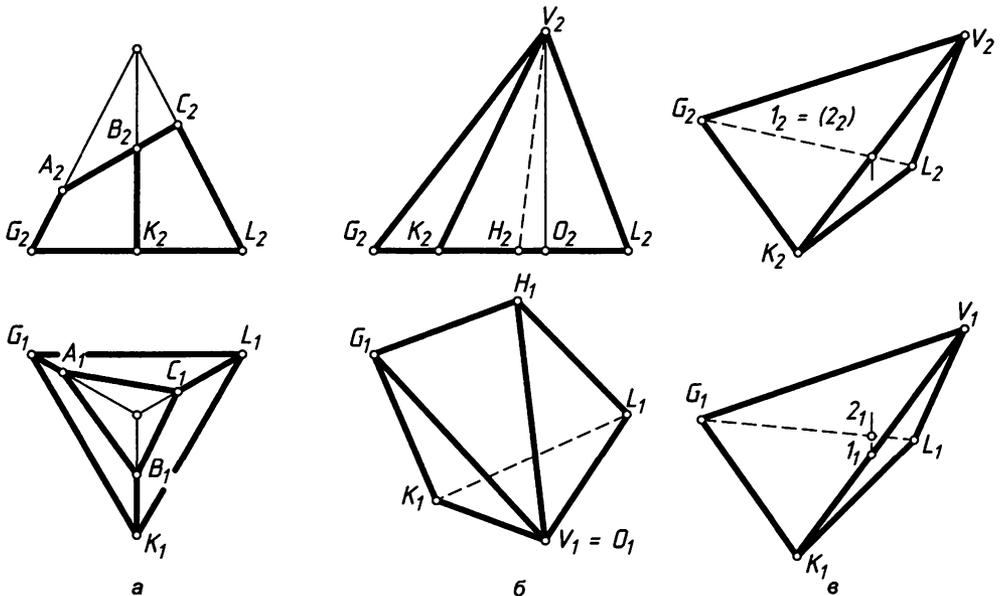


Рис. 9.2. Изображение пирамид

Если вершина отсечена плоскостью  $\alpha (ABC)$ , то пирамида называется *усеченной* (рис. 9.2, а).

В название многогранной поверхности вводят число ее боковых граней. Например, на рис. 9.1, рис. 9.2, *а, в* изображена трехгранная пирамида, а на рис. 9.2, *б* изображена четырехгранная пирамида.

Правильная пирамида, ограниченная четырьмя равносторонними треугольниками, называется *тетраэдром*. У тетраэдра любая грань может служить основанием.

Если вершину  $V$  пирамиды удалить в бесконечность, то ее боковые ребра станут параллельными прямыми, а фигура — призмой (рис. 9.3).

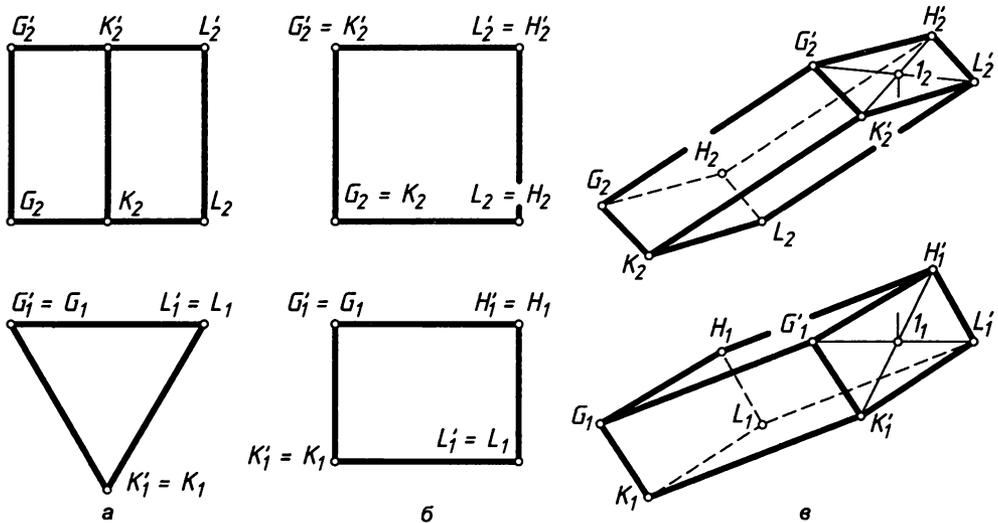


Рис. 9.3. Чертежи призмы

Многогранник, основаниями которого являются многоугольники, а боковыми гранями — параллелограммы, называется *призмой*.

Если боковые ребра перпендикулярны основанию, призма называется *прямой* (рис. 9.3, *а*), иначе ее называют *наклонной* (рис. 9.3, *в*).

Если в основании призмы лежит правильный многоугольник, призма называется *правильной*.

При выпуклом основании призма называется *выпуклой*. Сечения выпуклой призмы плоскостью будут выпуклыми многоугольниками.

Прямая призма, основанием которой является прямоугольник, называется *параллелепипедом* (рис. 9.3, *б*).

В название призмы вводят число ее боковых граней. Например, на рис. 9.3, *а* даны изображения трехгранной призмы, а на рис. 9.3, *б* и *в* — четырехгранной.

При задании каркаса призматической поверхности общего положения свободно можно задать только три вершины многоугольника одного основания и одну вершину многоугольника второго основания.

Например, пусть заданы вершины  $GKL$  ( $G, K, L, G_2, K_2, L_2$ ) (рис. 9.3, в) и вершина  $G'$  ( $G', G_2'$ ). Тогда вершины  $K'$  ( $K', K_2'$ ) и  $L'$  ( $L', L_2'$ ) определяются из условия равенства ребер и свойства проекций параллельных прямых (см. раздел 3.2). А вершины  $H$  ( $H, H_2$ ) и  $H'$  ( $H', H_2'$ ) определяются из условия инцидентности, например, так: задали  $H'_1$ , построили  $K'_1, l_1 \rightarrow K'_2, l_2$  и по линии связи нашли  $H'_2$ .

Правильная призма, ограниченная шестью равными гранями в форме квадратов, называется *гексаэдром или кубом* (рис. 9.4, а).

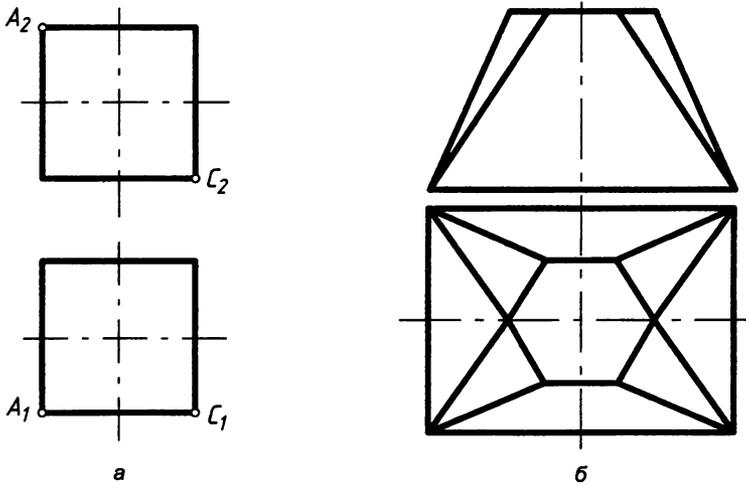


Рис. 9.4. Гексаэдр и призматоид

Многогранная поверхность, состоящая из двух многоугольников — оснований, расположенных в параллельных плоскостях, и боковых граней в форме треугольников или трапеций, называется *призматойдом* (рис. 9.4, б).

## 9.1. Изображение многогранников в аксонометрии

Построение многогранника в аксонометрии можно сделать проще и наглядней, выбрав соответствующим образом вид проекции и оси координат.

Например, систему можно выбрать так, чтобы ось  $z$  совпала с высотой пирамиды (рис. 9.5, а), а ось  $x$  прошла через вершину  $B$ . Тогда вторичная проекция  $S'_1$  (рис. 9.5, б) вершины  $S$  совпадает с началом координат.

По оси  $x'$  откладываем отрезки  $[S'_1 - l'] = [S_1 - l]$  и  $[S'_1 B'] = [S_1 B]$ . Параллельно  $y'$  откладываем отрезки  $[l' - C'] = [l - C]$ ,  $[l' - A'] = [l - A]$ . Мы построили вершины  $A'$ ,  $C'$ ,  $B'$  основания. Отложим по оси  $z'$  высоту  $[S'_1 S'] = [S_1 S_2]$  и соединим вершину  $S'$  пирамиды с вершинами основания. Вершина  $A'$  оказалась внутри изображения грани  $S'B'C'$ , то есть у нее есть конкурирующая точка на ребре  $B'C'$ , и поэтому

она будет невидимой, а следовательно, невидимыми будут ребра  $B'A'$ ,  $C'A'$ ,  $S'A'$ . Это не очень удачный вариант изображения пирамиды. Фактически мы видим только  $\Delta S'B'C'$ , и, чтобы создать образ пирамиды, необходимо строить невидимые ребра.

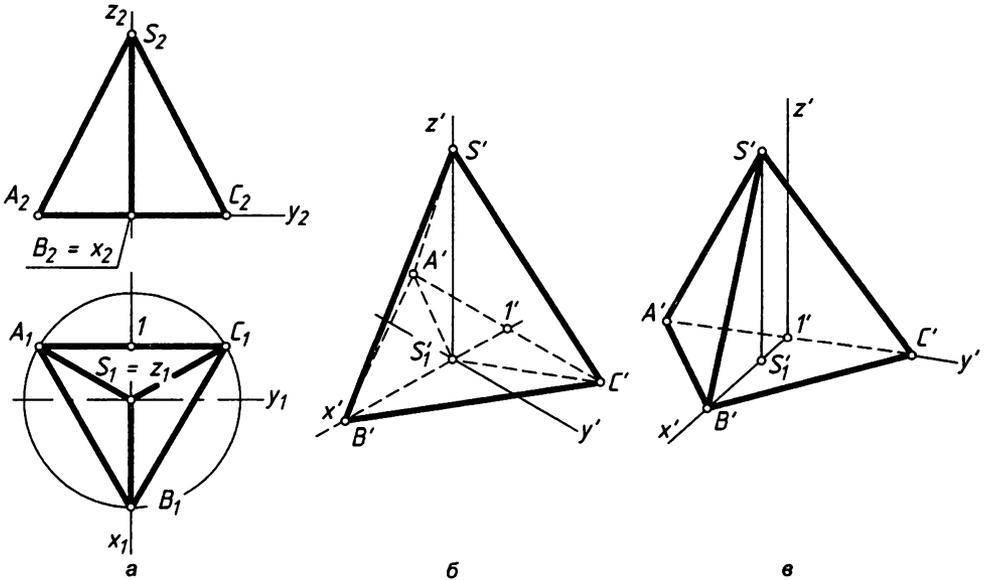


Рис. 9.5. Варианты изображения трехгранной пирамиды

Если одна грань поверхности совпадает с координатной плоскостью (в данном примере основание  $A'B'C'$  лежит в плоскости  $x'O'y'$ ), то вторичные проекции вершин принято не обозначать. В примере не обозначены вторичные проекции  $B'_1 = B'$ ,  $C'_1 = C'$ ,  $A'_1 = A'$ . Также не показывают и вторичные проекции ребер  $[A'_1S'_1]$ ,  $[B'_1S'_1]$  и т. д., так как при необходимости они легко строятся и используются в решении позиционных или метрических задач. Таким приемом мы будем в дальнейшем широко пользоваться. На рис. 9.5, *в* эта же пирамида построена в прямоугольной диметрии. Здесь ребро  $[A'C']$  построили прямо на оси  $y'$ , а по оси  $x'$  отложили высоту  $[1'B'] = 0,5 [1B_1]$  основания и  $[B'S'_1] = 0,5 [B_1S_1]$ , чтобы построить вершину  $S'$  на отрезке  $[S'_1S'] = [B_2S_2]$ . В данном случае такое изображение более наглядно.

Сравнивая рис. 9.5, *б* и рис. 9.5, *в*, мы видим влияние коэффициента приведения. На рис. 9.5, *б* изображение увеличено в 1,22 раза, а на рис. 9.5, *в* всего в 1,06 раза и поэтому больше гармонирует с изображениями рис. 9.5, *а*.

На рис. 9.6 построены изображения параллелепипеда на эюре и в прямоугольной изометрии.

Если диагонали  $[AC]$ ,  $[BD]$  основания разместить по осям  $x'$ ,  $y'$ , то изображение фигуры получится недостаточно наглядным (рис. 9.6, *б*). Если ребра параллельны осям (рис. 9.6, *в*), изображение становится наглядней.

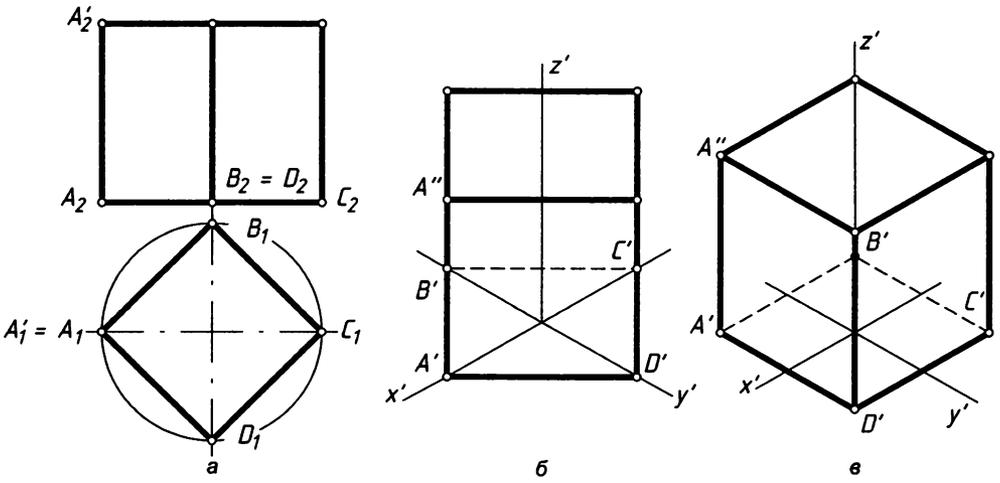


Рис. 9.6. Варианты изображения параллелепипеда

При построении шестигранной призмы (рис. 9.7) по одной из осей отмечают вершины  $D', A'$ , а затем строят ребра  $[C'B']$ ,  $[E'F']$ , параллельные той же оси. Из каждой вершины строят боковое ребро и вершины соединяют ребрами основания. На рис. 9.7, б показана призма в прямоугольной приведенной изометрии, а на рис. 9.7, в — в диметрии.

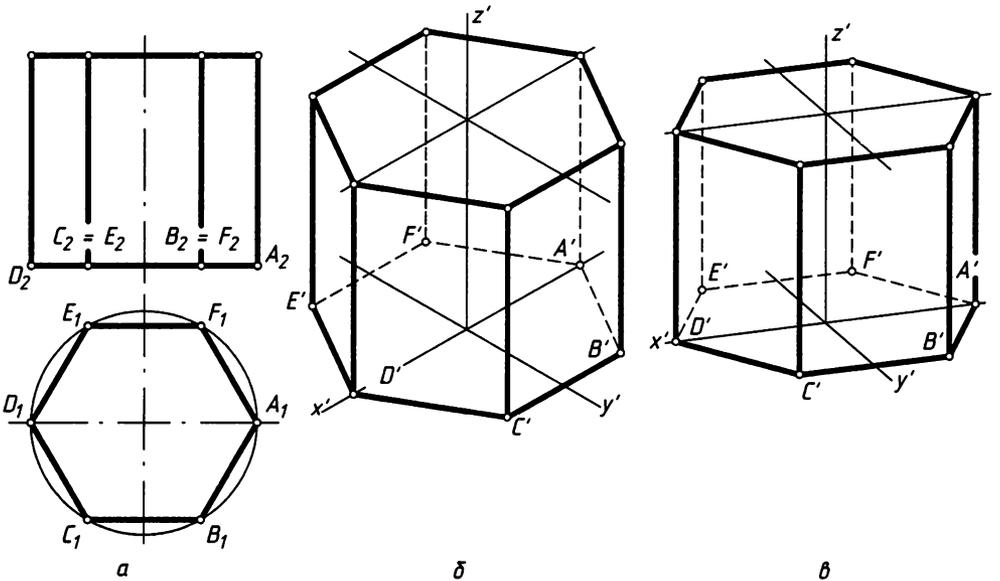


Рис. 9.7. Варианты изображения шестигранной призмы

Из анализа изображений видно, что выбором осей мы можем не только влиять на наглядность изображения в целом, но и делать более выразительными отдельные элементы изделия.

## 9.2. Решение отдельных позиционных и метрических задач с многогранниками

Решение задач с многогранными поверхностями является наглядным примером использования закономерностей и способов решения задач с рассмотренными в главах 7 и 8 элементарными геометрическими объектами.

### 9.2.1. Задачи принадлежности

Так как каждая грань — это плоскость, ограниченная многоугольником, для грани действуют все признаки инцидентности, определенные нами ранее для плоскости. На рис. 9.8 показаны решения одной типовой задачи на разных многогранниках.

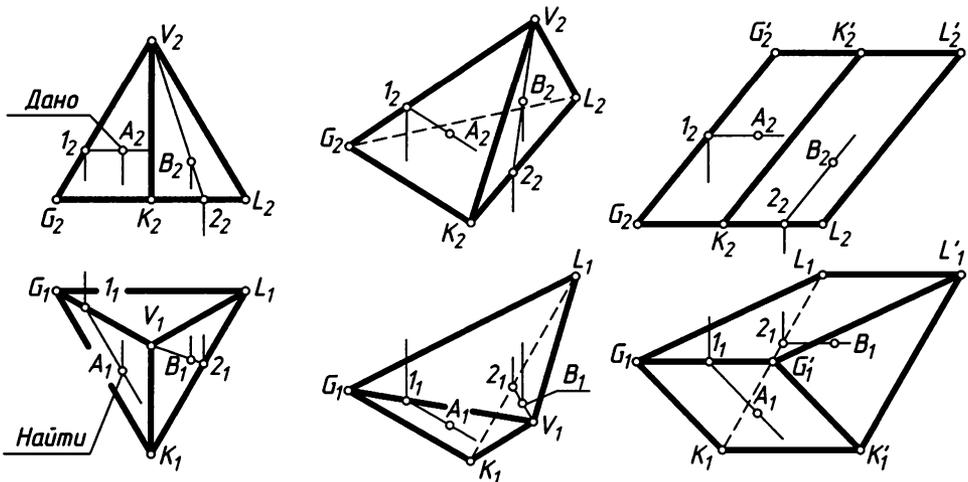


Рис. 9.8. Задачи принадлежности на многогранных поверхностях

Пусть задана фронтальная проекция точки  $A$  ( $A_2$ ) на видимой грани поверхности. Для построения горизонтальной проекции  $A_1$  нужно в грани построить любую прямую, проходящую через точку  $A$ , тогда соответствующие проекции точки будут лежать на проекциях этой прямой. Удобно использовать прямую линию, параллельную ребру основания, например  $(1_2 A_2) \parallel (G_2 K_2) \rightarrow (1_1 A_1) \parallel (G_1 K_1)$ . Можно также через проекцию  $B_2 \in (VKL)$  и вершину  $V_2$  провести прямую  $(V_2 2_2) \rightarrow (V_1 2_1)$  и по линии связи взять  $B_1$ . В призме через  $B_2$  проводим прямую линию  $(B_2 2_2) \parallel (K_2 K_2')$ , находим  $2_1$ , через нее проводим прямую параллельно  $(K_1 K_1')$  и на ней по линии связи  $(B_2 B_1)$  находим  $B_1$ . Использование свойства параллельности и заданных вершин сокращает объем работы.

### 9.2.2. Пересечение многогранной поверхности с плоскостью и прямой линией

Фигуру, полученную при пересечении поверхности с плоскостью, называют *сечением*. Сечение изображается плоской фигурой, если оно рассматривается самостоя-

тельно или как часть изделия, оставшегося после удаления отсеченной доли. Тогда оставшаяся часть изделия называется усеченной, или срезанной. Сечение может изображаться линией, лежащей на поверхности изделия и являющейся границей сечения. Эта линия называется линией сечения или линией среза.

На рис. 9.9, а показана линия (1–2–3) сечения пирамиды плоскостью  $\beta (\beta_2) \perp \Pi_2$ , которая строится по точкам  $1_2-2_2-3_2$  пересечения фронтальных проекций ребер с проекцией секущей плоскости.

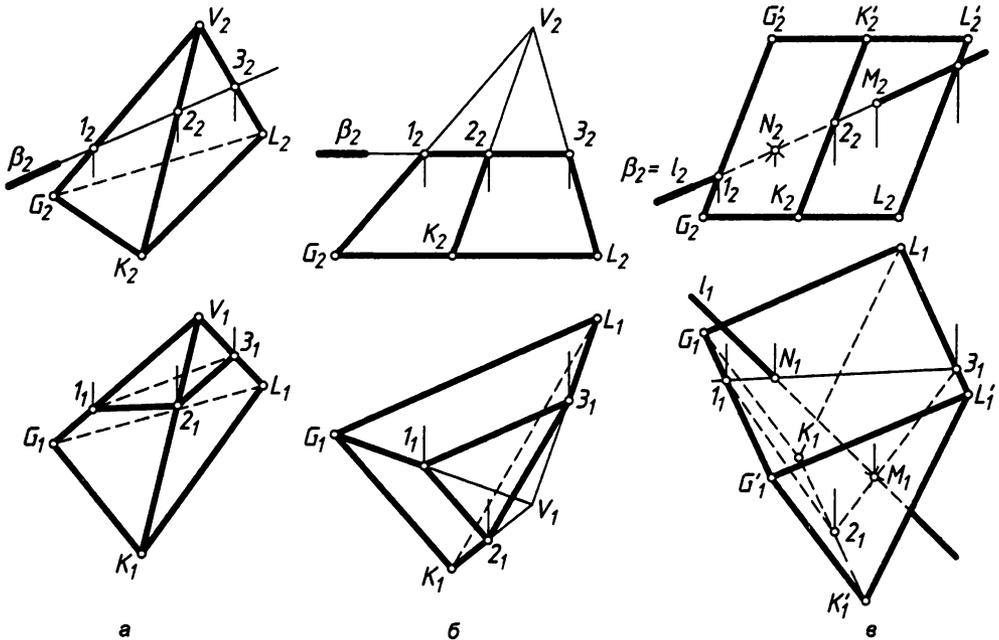


Рис. 9.9. Сечение фигуры и пересечение поверхности прямой линией

Фигура сечения (1–2–3) многогранника плоскостью  $\beta (\beta_2)$ , которая параллельна его основанию, подобна фигуре основания (рис. 9.9, б).

Для определения точек (MN) пересечения прямой  $l (l_1, l_2)$  с многогранной поверхностью (рис. 9.9, в) используют проецирующую плоскость. Например,  $l \subset \beta \perp \Pi_2 \rightarrow l_2 = \beta_2$ , далее строят сечение (1–2–3) поверхности и в пересечении проекции прямой с многоугольником сечения находят искомые точки:  $\beta_2 = l_2 = (1_2-2_2-3_2) \rightarrow (1_1-2_1-3_1) \cap l_1 = (M_1N_1) \rightarrow (M_2N_2)$ .

Видимость определяется с помощью конкурирующих точек.

Можно через прямую  $l$  провести вспомогательную плоскость  $\beta (l \cap b)$  параллельно боковым ребрам призмы (рис. 9.10, а). Для этого на прямой  $l$  выбирают точку  $1 (1_1, 1_2)$ , через нее проводят прямую  $b (b_1, b_2)$  параллельно проекциям боковых ребер и определяют линию пересечения (2–3)  $\rightarrow (2_2-3_2) \rightarrow (2_1-3_1)$  плоскости основания призмы с построенной плоскостью. Плоскость  $\beta (l \cap b)$  пересечет призму по

прямым, параллельным боковым ребрам. Начинаются эти прямые в точках 4, и 5, пересечения следа (2<sub>1</sub>-3<sub>1</sub>) с фигурой основания. Их пересечение с l<sub>1</sub> определит точки M<sub>1</sub> → M<sub>2</sub> и N<sub>1</sub> → N<sub>2</sub> пересечения прямой с призмой.

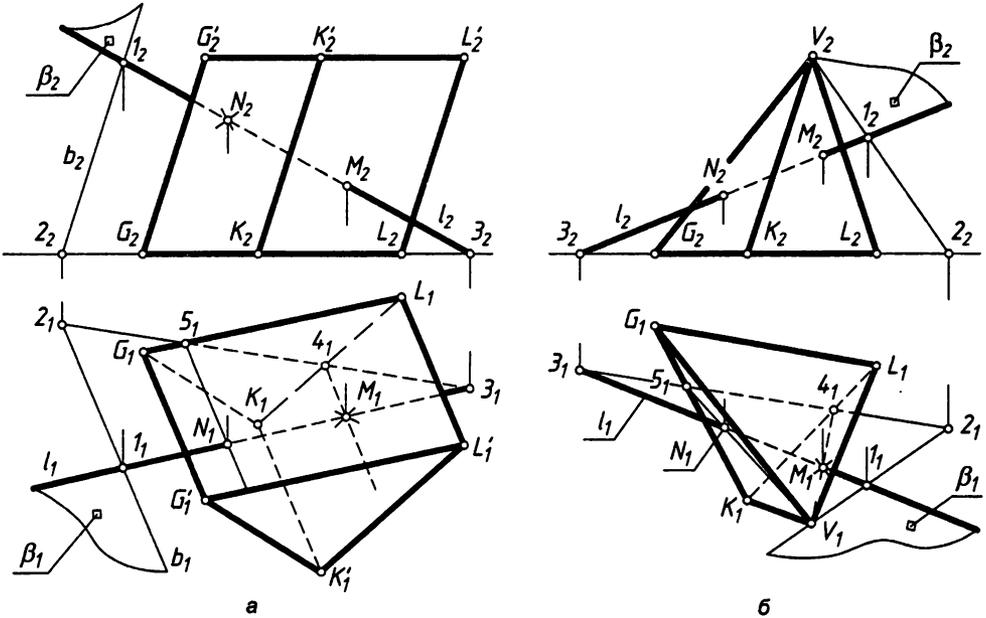


Рис. 9.10. Пересечение с прямой линией

Аналогично можно найти пересечение прямой l (l<sub>1</sub>l<sub>2</sub>) с пирамидой (рис. 9.10, б), если секущую плоскость задать вершиной V и прямой l: β(V, l).

Возьмем прямую (V-1) и найдем ее пересечение 2 (2<sub>2</sub> → 2<sub>1</sub>) с плоскостью основания (GKL). Построим также 3<sub>2</sub> = l<sub>2</sub> ∩ (G<sub>2</sub>K<sub>2</sub>L<sub>2</sub>) → 3<sub>1</sub> и след (2<sub>1</sub>-3<sub>1</sub>).

Пересечение следа с основанием определяет фигуру (4<sub>1</sub>-5<sub>1</sub>-V<sub>1</sub>) сечения пирамиды плоскостью β и точки N<sub>1</sub> → N<sub>2</sub>, M<sub>1</sub> → M<sub>2</sub> пересечения прямой l с пирамидой.

Пересечение многогранной поверхности с плоскостью общего положения строят двумя способами: способом *пересечения прямой линии с плоскостью* (его еще называют *способом ребер*) и способом *плоскостей-посредников* (или *способом граней*).

На рис. 9.11, а показано построение на пирамиде VGKL линии сечения ABC плоскостью β (DEF) *способом ребер*.

Через ребро VG провели фронтально проецирующую плоскость γ (γ<sub>2</sub> = V<sub>2</sub>G<sub>2</sub>). Построили прямую (1-2)(1<sub>2</sub>-2<sub>2</sub> → 1<sub>1</sub>-2<sub>1</sub>) = γ ∩ β и точку A (A<sub>1</sub> = (1<sub>1</sub>-2<sub>1</sub>) ∩ V<sub>1</sub>G<sub>1</sub> → A<sub>2</sub>) = VG ∩ β пересечения ребра с заданной плоскостью. Затем через ребро VL провели фронтально проецирующую плоскость δ (δ<sub>2</sub> = V<sub>2</sub>L<sub>2</sub>), построили прямую δ ∩ β = (3-4) → (3<sub>2</sub>-4<sub>2</sub>) → (3<sub>1</sub>-4<sub>1</sub>) и точку B (B<sub>1</sub> = (3<sub>1</sub>-4<sub>1</sub>) ∩ V<sub>1</sub>L<sub>1</sub> → B<sub>2</sub>) = VL ∩ β.

Для ребра  $VK$  применили горизонтально проецирующую плоскость  $\varphi$  ( $\varphi_1 = VK_1$ ), построили  $\varphi \cap \beta = (5-6) \rightarrow (5_1-6_1) \rightarrow (5_2-6_2) \cap (V_2K_2) = C_2 \rightarrow C_1$ . Этот способ наиболее часто используется для решения подобных задач.

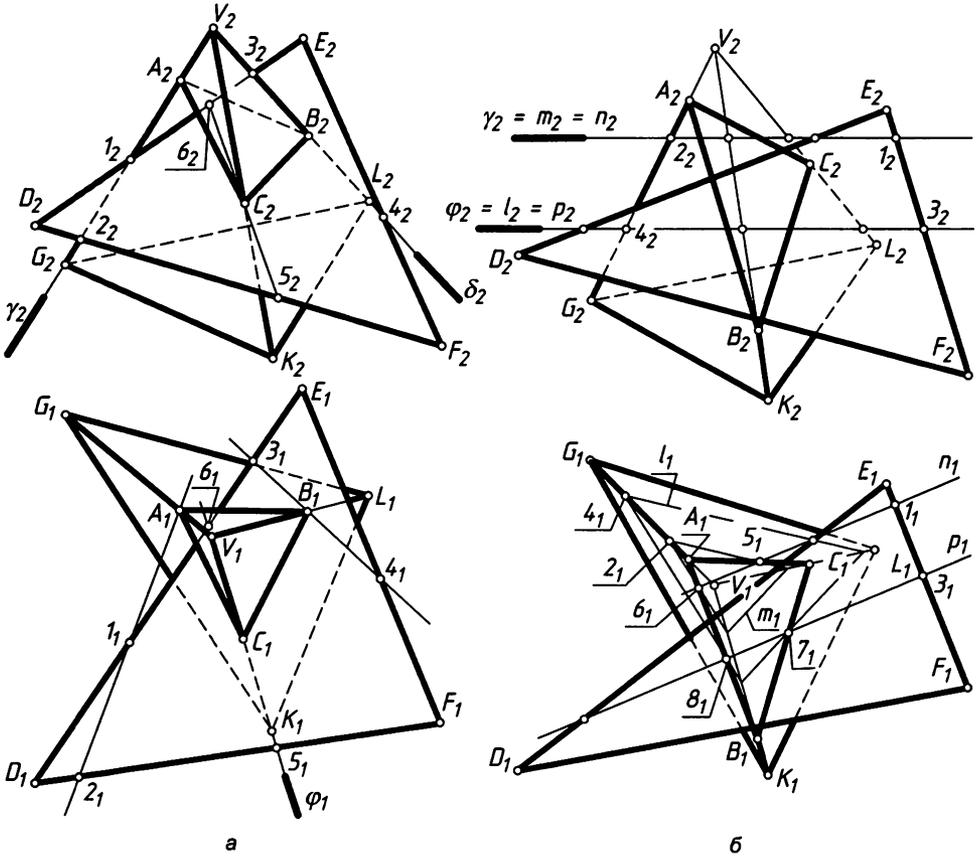


Рис. 9.11. Пересечение пирамиды с плоскостью общего положения

Способом граней строятся линии пересечения плоскостей с помощью плоскостей-посредников (см. подраздел 7.6.2).

На рис. 9.11, б посредником выбрана горизонтальная плоскость уровня  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) и  $\varphi$  ( $\varphi_2$ ), причем  $\gamma \parallel \varphi$ . Это удобно, так как фигуры пересечения параллельных плоскостей с многогранной поверхностью будут подобны вследствие параллельности сторон, параллельными будут и прямые пересечения с плоскостью  $\beta$  ( $DEF$ ).

Строим прямую линию  $n$  ( $n_2 \rightarrow n_1$ ), проходящую через точку  $1$  ( $1_2 \rightarrow 1_1$ ), и прямую  $p$  ( $p_2 \rightarrow p_1$ )  $\supset$   $3$  ( $3_2 \rightarrow 3_1$ ) пересечения посредников  $\gamma$  и  $\varphi$  с плоскостью  $\beta$  ( $DEF$ ). Строим треугольники  $m$  ( $m_2 \rightarrow m_1$ )  $\supset$   $2$  ( $2_2 \rightarrow 2_1$ ) и  $l$  ( $l_2 \rightarrow l_1$ )  $\supset$   $4$  ( $4_2 \rightarrow 4_1$ ). С целью сокращения обозначений, загромождающих изображения, на линиях пересечения объектов с посредником обозначены только по одной точке пересечения ( $1, 2, 3$  и  $4$ ), а другие аналогичные построения понятны из чертежа и не обозначены.

Точки  $b_1 = n_1 \cap m_1$  и  $\beta_1 = p_1 \cap l_1$ , определяют горизонтальную проекцию  $AB$ , линии  $AB$  пересечения грани  $VGK$  с плоскостью  $(DEF)$ . Через точку  $5_1 = n_1 \cap m_1$ , проводим горизонтальную проекцию  $A_1c_1$ , прямой линии  $AC = VGL \cap DEF$ . Горизонтальная проекция  $B_1c_1$ , прямой линии  $BC = VKL \cap DEF$  должна пройти через точку  $7_1 = l_1 \cap p_1$ . Следует помнить, что соединять прямой можно только те точки, которые лежат в одной плоскости (грани).

Если на рис. 9.11, *a* показана линия  $ABC$  сечения с учетом ее видимости на цельной пирамиде, то на рис. 9.11, *б* вершина предполагается отсеченной, поэтому она показана тонкой линией, а сечение и прямые плоскости  $DEF$  показаны видимыми, то есть основными линиями. В обоих случаях  $\Delta DEF$  рассматривается как материальное тело.

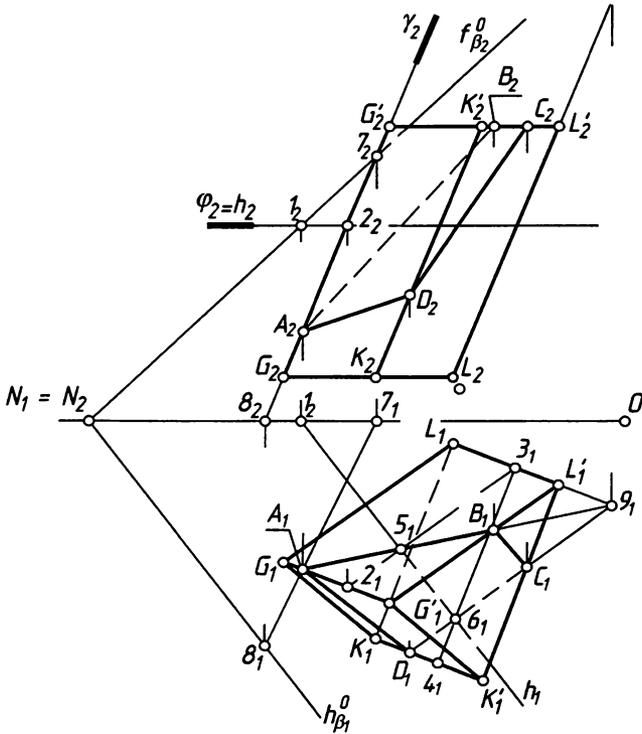


Рис. 9.12. Построение сечения трехгранной призмы

На рис. 9.12 построено сечение  $(ABCD)$  призмы  $GKLG'K'L'$  плоскостью  $\beta (h_\beta^0 \cap f_\beta^0)$ . Здесь рассмотрим следующий вариант решения поставленной задачи. Вначале введем вспомогательную горизонтальную плоскость уровня  $\varphi (\varphi_2)$  так, чтобы она пересекла всю призму. Фигура такого сечения призмы будет подобна ее основанию. Для построения этой фигуры по проекции  $2_2$  точки  $2 = (GG') \cap \varphi$  строим горизонтальную проекцию  $2_1$  и через нее проводим линию  $(2_1-3_1) \parallel GL$ , и линию  $(3_1-4_1) \parallel LK$ , пересечения граней с плоскостью  $\varphi$ . В этой же плоскости лежит горизонталь  $h = \beta \cap \varphi : h_2 \cap f_{\beta_2}^0 = 1_2 \rightarrow 1_1 \in h_1 \parallel h_{\beta_1}^0$ . Точки пересечения  $5_1 = (2_1-3_1) \cap h_1, 6_1 = (3_1-4_1) \cap h_1$ , являются горизонтальными проекциями точек 5 и 6 пересечения горизонтали  $h$  с гранями

призмы и принадлежат фигуре сечения призмы плоскостью  $\beta$ . Их фронтальные проекции не показаны, так как в этом нет необходимости.

Затем построим точку  $A = (GG') \cap \beta$ . Для этого используем фронтально проецирующую плоскость  $\gamma \supset (GG') \Rightarrow \gamma_2 = (G_2G'_2)$ , строим линию пересечения  $(7-8) = \beta \cap \gamma \rightarrow (7_2-8_2) \rightarrow (7_1-8_1)$  и проекции  $A_1 = (7_1-8_1) \cap (G_1G'_1) \rightarrow A_2$  точки пересечения ребра с плоскостью  $\beta$ .

Через точки  $A$  и  $5$ , проводим горизонтальную проекцию  $A_19_1$  линии пересечения грани  $GG'L'L$  с плоскостью  $\beta$  до ее пересечения с проекцией ребра  $LL'$ . Это пересечение произошло на продолжении ребра в точке  $9$  ( $9_1$ ) (фронтальная проекция точки  $9$  показана без обозначения). Следовательно, плоскость  $\beta$  пересекает ребро  $G'L'$  основания призмы и действительная линия сечения грани ограничена отрезком  $AB$  ( $A_1B_1 \rightarrow A_2B_2$ ). Построением проекции прямой ( $9_1-6_1$ ) находим точки ( $C_1D_1 \rightarrow C_2D_2$ ) фигуры сечения и строим всю фигуру  $ABCD$  ( $A_1B_1C_1D_1 \rightarrow A_2B_2C_2D_2$ ) с учетом видимости соответствующих граней. Задача решена.

Этот же прием решения использован и на аксонометрическом чертеже (рис. 9.13). Здесь построены аксонометрическая проекция  $G'K'L'G''K''L''$ , вторичная горизонтальная проекция  $G_1'K_1'L_1'G_1''K_1''L_1''$  аналогичной призмы и проекции следов секущей плоскости  $\beta$  ( $h^0 \cap f^0$ ).

Построим вспомогательную плоскость  $\phi \perp l'$  (проецирующую по отношению к аксонометрической плоскости проекций) так, чтобы она была параллельной горизонтальному следу плоскости  $\beta$  (это не обязательно, но удобно). Для этого построим  $\phi' \parallel h^{0'}$ . Строим проекции фигуры сечения призмы этой плоскостью: ( $2'-3'-4'$ )  $\rightarrow$  ( $2'_1-3'_1-4'_1$ ). Строим вторичную проекцию  $h_1'$ , горизонтали  $h = \beta \cap \phi$ , проходящей через точку  $1: \phi' \cap f^{0'} = l' \rightarrow l'_1 \in h_1', \parallel h^{0'}$ . Отмечаем точки пересечения вторичных проекций построенной фигуры и горизонтали:  $5'_1 = (2'_1-3'_1) \cap h_1'$ ;  $6'_1 = (3'_1-4'_1) \cap h_1'$ . Эти точки

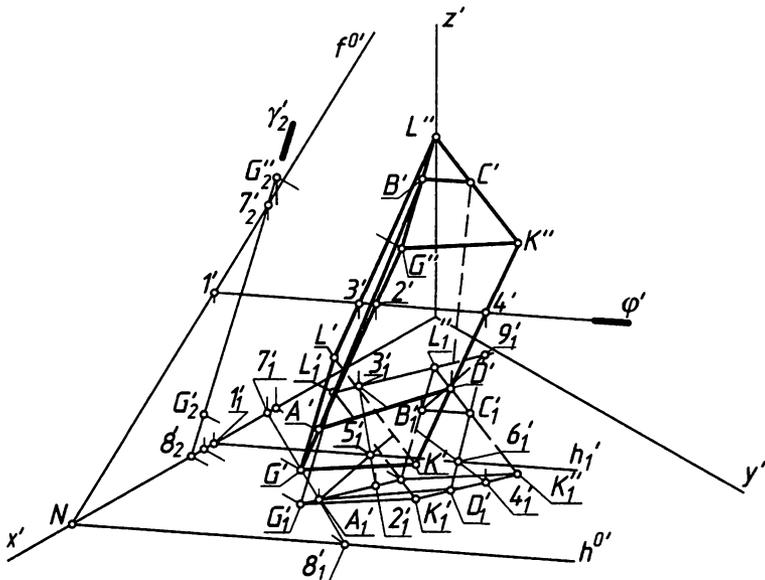


Рис. 9.13. Построение сечения призмы в аксонометрии

принадлежат линии сечения призмы плоскостью  $\beta$ . Построим точку  $A$  пересечения ребра  $GG'$  с плоскостью  $\beta$ . Для этого построим фронтальную вторичную проекцию  $G_2'G_2''$  ребра, введем вспомогательную проецирующую плоскость  $\gamma(\gamma_2')$ , проходящую через это ребро, и построим линию  $(7-8) = \beta \cap \gamma: (7_2'-8_2') \rightarrow (7_1'-8_1')$ . Теперь строим точку  $A = (GG') \cap \beta: A_1' = (G_1'G_1'') \cap (7_1'-8_1') \rightarrow A'$ . Строим прямую линию  $(A_1'-5_1')$  до пересечения с продолжением вторичной проекции  $L_1'L_1''$  ребра  $LL'$  в точке  $9_1'$ . Реальная линия сечения этой грани ограничена отрезком  $AB$ , изображенным проекциями  $(A_1'B_1') \rightarrow (A'B')$ . Соединив проекции  $9_1'$  и  $6_1'$  точек одной грани, определим точки  $C (C_1' \rightarrow C')$  и  $D (D_1' \rightarrow D')$  фигуры сечения. Оформляем фигуру сечения  $ABCD (A_1'B_1'C_1'D_1' \rightarrow A'B'C'D')$  с учетом видимости граней.

Чтобы выделить аксонометрическую проекцию объекта, его вторичную проекцию основной линией не обводят, и видимость на ней не определяется.

Сравнивая решения по рис. 9.12 и 9.13, мы еще раз убеждаемся, что алгоритмы решения подобных задач на эпюре и в аксонометрии одинаковы.

### 9.2.3. Пересечение многогранных поверхностей

Построение линий пересечения многогранных поверхностей сводится к построению линий пересечения плоскостей (граней), ограниченных прямыми (ребрами). Для этого пользуются двумя известными способами:

- способ пересечения прямой с плоскостью (способ ребер);
- способ плоскостей-посредников (способ граней).

В первом случае определяют точки пересечения ребер одной поверхности с гранями (плоскостями) другой, а потом определяют точки пересечения ребер второй поверхности с гранями первой. Полученные точки последовательно соединяют прямыми линиями. Здесь важно проследить за тем, чтобы соединяемые точки лежали в одной и той же грани первого и второго многогранника. При этом общая линия пересечения должна лежать внутри очерка как одной, так и другой поверхности.

В способе граней строится линия пересечения двух плоскостей — граней, а затем выделяется та ее часть, которая принадлежит одновременно двум граням.

На рис. 9.14 показан пример построения линии пересечения пирамиды и призмы способом ребер, который чаще используется на практике.

При выборе плоскостей-посредников рекомендуется проанализировать возможные варианты и выбрать наиболее простой. В примере на рис. 9.14 выбраны фронтальные плоскости уровня  $\gamma \parallel \sigma \parallel \varphi \parallel \Pi_2$ . Они удобны тем, что пересекают пирамиду по треугольникам, подобным треугольнику  $G_2V_2\perp_2$ . Построения сводятся к тому, что на пересечении проекции  $\gamma$ , плоскости  $\gamma$ , проходящей через ребро  $EE'$  призмы, с ребрами пирамиды отмечаем проекции  $6_2, 7_2, 8_2$  точек, по линиям связи отмечаем  $6_1, 8_1$  и через них проводим прямые, параллельные, соответственно ребрам  $G_2V_2$  и  $L_2V_2$ .

Эти прямые пересекутся в точке  $7_2$  ребра  $K_2V_2$  и в точках  $1_2$  и  $1_2'$  с проекцией  $E_2E_2'$  ребра  $EE'$  призмы. По линиям связи находим  $1_2 \rightarrow 1_1, 1_2' \rightarrow 1_1'$ . Точки  $1 (1_1, 1_2) = (EE') \cap (GVK)$  и  $1' (1_1', 1_2') = (EE') \cap (LVK)$  являются точками пересечения ребра призмы с гранями

пирамиды. Отрезок  $[1-1']$  проходит внутри пирамиды. Точки лежат на видимых гранях призмы и пирамиды, следовательно, они тоже видимые.

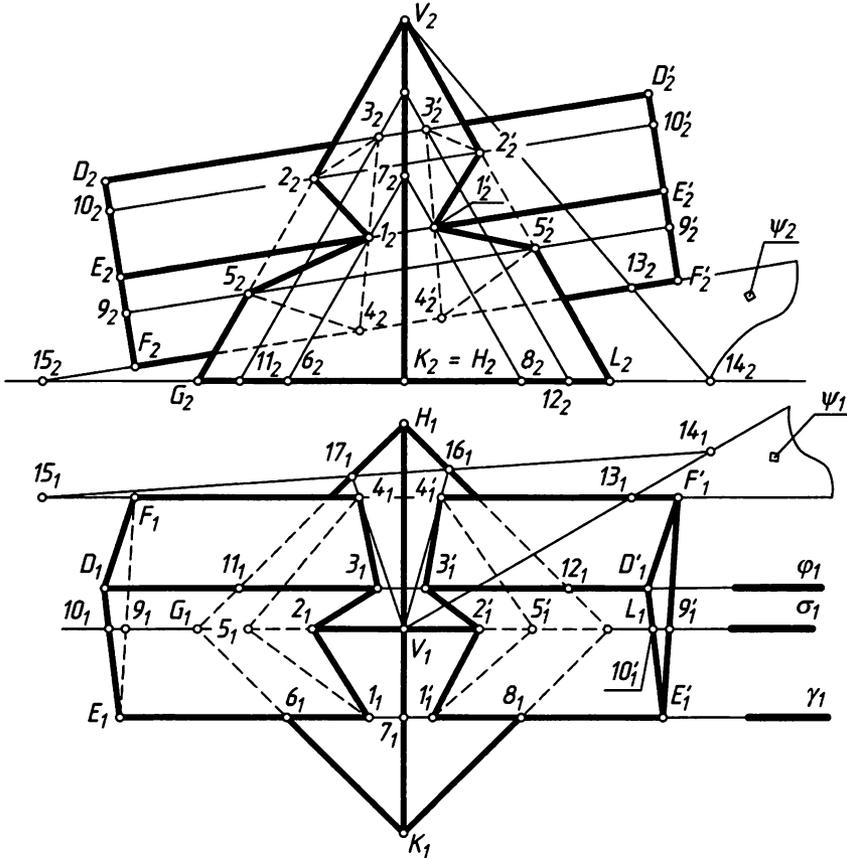


Рис. 9.14. Пересечение призмы и пирамиды

Плоскость  $\sigma$  проходит через ребра  $GV$  и  $LV$  пирамиды и пересекает призму по прямоугольнику  $(9'-9-10-10')$  ( $9'_1 \rightarrow 9'_2, 9_1 \rightarrow 9_2, 10_1 \rightarrow 10_2, 10'_1 \rightarrow 10'_2$ ). Точки  $2(2_2 \rightarrow 2_1) = (10-10') \cap GV, 2'(2'_2 \rightarrow 2'_1) = (10-10') \cap LV, 5(5_2 \rightarrow 5_1) = (9-9') \cap GV, 5'(5'_2 \rightarrow 5'_1) = (9-9') \cap LV$  являются видимыми точками пересечения боковых ребер пирамиды с гранями призмы. Отрезки  $[1-2]$  и  $[1'-2'], [1-5]$  и  $[1'-5']$  являются частью линии пересечения многогранников. Горизонтальные проекции  $(1_1-5_1)$  и  $(1'_1-5'_1)$  не видны, так как принадлежат невидимой на виде сверху грани  $(E_1, F_1, F'_1, E'_1)$  призмы. Через ребро  $DD'$  проведена плоскость  $\phi \rightarrow \phi_1; 11_1 = (GH_1) \cap \phi_1 \rightarrow 11_2; 12_1 = (LH_1) \cap \phi_1 \rightarrow 12_2$ .

Через точки  $11_2$  и  $12_2$  проводим прямые параллельно боковым ребрам пирамиды  $G_2V_2$  и  $L_2V_2$  и отмечаем точки  $3_2 \rightarrow 3_1, 3'_2 \rightarrow 3'_1$  их пересечения с ребром  $DD'$  призмы. Соединяем  $[2_1-3_1], [2'_1-3'_1]$  основными линиями, так как точки  $2$  и  $3$  принадлежат видимым на фронтальной проекции граням  $GVH$  и  $LVH$  пирамиды.  $[2_2-3_2], [2'_2-3'_2]$  — штриховыми линиями, так как точки  $2$  и  $3$  принадлежат невидимым на фронтальной проекции граням  $GVH$  и  $LVH$  пирамиды.

Для определения точек  $4$  и  $4'$  пересечения ребра  $FF'$  призмы с пирамидой можно было использовать такие же плоскости уровня. Но на рис. 9.14 показан пример использования и других посредников. Через вершину  $V$  пирамиды и ребро  $(FF')$  призмы проведем плоскость  $\psi ((V-13) \cap FF') \rightarrow \psi_1 ((V_1-13) \cap FF'_1) \rightarrow \psi_2 ((V_2-13_2) \cap F_2F'_2)$  общего положения, найдем ее горизонтальный след  $(14-15) \rightarrow (14_2-15_2) \rightarrow (14_1-15_1)$  и горизонтальную проекцию  $(17_1-V_1-16_1)$  треугольника пересечения с пирамидой. Точки  $4$  ( $4_1 = (V_1-17_1) \cap FF'_1 \rightarrow 4_2$ ) и  $4'$  ( $4'_1 = (V_1-16_1) \cap FF'_1 \rightarrow 4'_2$ ) пересечения ребра  $FF'$  с треугольником и будут искомыми. Плоскость  $\psi$  является плоскостью общего положения. Такие плоскости бывают удобны.

Соединяем точки  $3-4$  и  $4-5$  с учетом их видимости. Фигуры  $(1-2-3-4-5)$  и  $(1'-2'-3'-4'-5')$  являются линиями пересечения данных многогранников. Если нужно выполнить отверстие в многограннике, то эта линия будет являться контуром этого отверстия.

### 9.2.4. Метрические задачи

Рассмотрим следующие метрические задачи с многогранными поверхностями:

1. Определение углов наклона граней.
2. Определение высоты фигуры.
3. Построение развертки многогранной поверхности.

Угол наклона грани к плоскости проекций определяется с помощью ее линии наибольшего наклона (см. раздел 7.4).

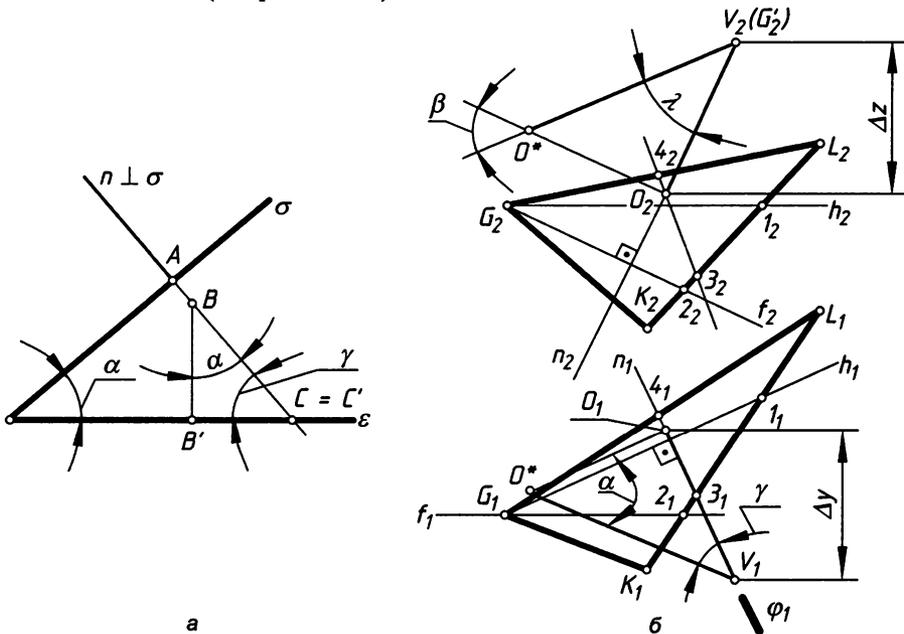


Рис. 9.15. Определение высоты и углов наклона

Эту же задачу можно решить и с помощью нормали (перпендикуляра)  $n$  к плоскости грани. Рассмотрим это на примере. Допустим, что заданы проецирующие плоскости  $\sigma$  и  $\epsilon$  (рис. 9.15, а).

Через произвольную точку  $A$  плоскости  $\sigma$  проведем прямую  $n \perp \sigma$  и возьмем на ней любой отрезок  $[BC]$ . Спроецируем ортогонально этот отрезок на плоскость  $\varepsilon$ :  $[BC] \rightarrow [B'C']$ . Отметим углы:

- $\alpha$  — угол наклона плоскости  $\sigma$  к плоскости  $\varepsilon$ ;
- $\gamma$  — угол наклона прямой  $n$  к плоскости  $\varepsilon$ , равный углу наклона оригинала  $[BC]$  к своей проекции  $[B'C']$  или  $n$  к  $n'$ .

Треугольник  $BB'C'$  нам знаком из свойств ортогонального проецирования и раздела 7.1. Определяя натуральную величину отрезка способом треугольника, мы одновременно определяем его угол наклона  $\gamma$  к данной плоскости проекций  $\varepsilon$ , а второй острый угол  $\alpha$  равен углу наклона плоскости  $\sigma$ .

Этот прием удобен, особенно в случаях, когда попутно решаются другие задачи, например определение высоты фигуры.

*Высотой пирамиды* называют кратчайшее расстояние от ее вершины до основания.

*Высотой призмы* называют расстояние между ее параллельными основаниями.

Для определения высоты пирамиды по рис. 9.15 изобразим отдельно ее основание  $GKL$  и вершину  $V$  (рис. 9.15, б — боковые ребра не показаны). В плоскости основания построим горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) и фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ). Из вершины  $V$  ( $V_1, V_2$ ) проведем нормаль  $n$  ( $n_1, n_2$ ) к плоскости  $GKL$  основания ( $n_1 \perp h_1, n_2 \perp f_2$ ) и построим точку  $O$  ( $O_1, O_2$ ) =  $n \cap (GKL)$ . Для этого мы провели горизонтально проецирующую плоскость  $\varphi$  ( $\varphi$ ) через прямую  $n$  ( $n_1$ ), построили прямую  $(3-4)$  ( $3_1-4_1, 3_2-4_2$ ) =  $\varphi \cap (GKL)$  и отметили точку  $O = (3-4) \cap n$ . Затем строим  $\Delta V, O, O^*$ , в котором:  $[O, O^*] = \Delta z$ ;  $[V, O^*] = [VO]$  — высота пирамиды;  $\gamma$  — угол наклона высоты (нормали) к горизонтальной плоскости проекций;  $\alpha$  — угол, равный углу наклона основания (границы) ( $GKL$ ) к горизонтальной плоскости проекций. Прямая линия  $(3-4)$  является линией наибольшего наклона (линией ската) плоскости ( $GKL$ ) к горизонтальной плоскости проекций. Фронтальная проекция  $n_2$  нормали по направлению совпадает с фронтальной проекцией линии наибольшего наклона плоскости ( $GKL$ ) к фронтальной плоскости проекций. По аналогии с линией  $(3-4)$  можно построить ее горизонтальную проекцию. В треугольнике  $V_2, O_2, O^*$ :  $[O_2, O^*] = \Delta y$ ;  $[V_2, O^*] = [VO]$ ;  $\lambda$  — угол наклона нормали  $n$  к фронтальной плоскости проекций;  $\beta$  — угол, равный углу наклона плоскости ( $GKL$ ) к фронтальной плоскости проекций.

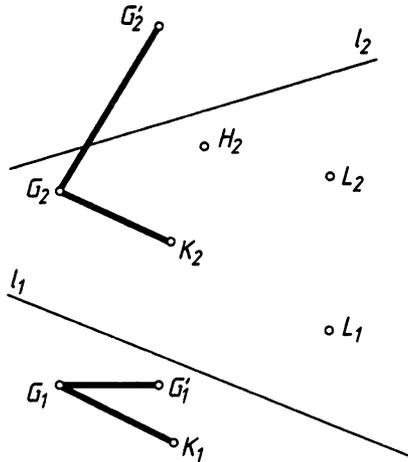
Если в этом решении точку  $V(V_2)$  заменить точкой  $G'(G'_2)$  и рассматривать ее как конец ребра  $GG'$  призмы, то отрезок  $G'O$  будет равен высоте этой призмы.

Построение развертки многогранных поверхностей рассмотрено в главе 13.

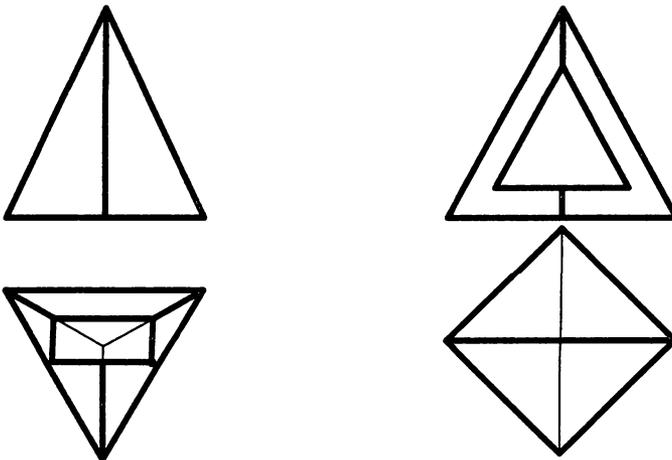
## Вопросы и задания

1. Какие поверхности называют многогранными?
2. Что называют гранью, ребром? Какие названия им присваивают?
3. Чем отличается призма от пирамиды?
4. Как изображается многогранная поверхность?

5. Как определяется видимость ребер и граней?
6. Приведите примеры изображения многогранной поверхности на эюре и в аксонометрии.
7. Постройте три вида призмы  $GKLHG'K'L'H'$  общего положения, точки ее пересечения с прямой линией  $l$  и определите относительную видимость граней и линии  $l$ . Определите высоту призмы и угол наклона ее основания к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций, не используя линии наибольшего наклона.



8. Назовите поверхности и постройте три изображения каждой фигуры со сквозным отверстием. На виде слева сделайте профильный разрез. Назовите форму отверстия.



9. Постройте прямоугольную изометрию и диметрию фигур из задания 8. Сквозное отверстие в пирамиде покажите разрезом.

# Глава 10

## Кривые линии и свойства их проекций

### 10.1. Основные понятия и свойства проекций кривых линий

В начертательной геометрии кривые линии принято рассматривать как линии пересечения поверхностей или как траекторию  $k$  непрерывно движущейся точки  $A$  (кинематический способ образования) (рис. 10.1). Сама линия также называется *непрерывной*.

Различают линии плоские и пространственные. *Плоской* называют линию, все точки которой принадлежат одной плоскости. Если линия описывается уравнением, то она называется *закономерной*. Другие линии называют *незакономерными*. Закономерные линии называют *алгебраическими*, если они описываются алгебраическим уравнением в прямоугольной системе координат, или *трансцендентными*.

Алгебраическая линия характеризуется *порядком*. Порядок плоской кривой линии определяется числом возможных точек ее пересечения с произвольной прямой линией, включая и мнимые точки. Порядок пространственной кривой определяется числом возможных точек ее пересечения с плоскостью, включая и мнимые точки.

Прямая линия  $l$ , пересекающая кривую  $k$ , называется *секущей*.

Если зафиксировать точку  $A_3$  кривой (рис. 10.1,  $a$ ), а точку  $A_2$  приближать к ней, то секущая  $l \supset (A_2 A_3)$  будет поворачиваться вокруг точки  $A_3$  и при стремлении  $A_2$  к  $A_3$  секущая займет положение линии  $t$ , которая называется *касательной (полукасательной) к кривой* в точке  $A_3$ . Аналогичные рассуждения можно применить к секущей  $l_2$  и точкам  $A_3$  и  $A_4$ . Если кривая линия пространственная, то в предельных положениях пересекающиеся линии  $l_1$  и  $l_2$  образуют соприкасающуюся плоскость. У плоской кривой линии при стремлении точек  $A_2$  и  $A_4$  к  $A_3$  полукасательные могут совпадать и тогда образуется одна касательная прямая линия.

Если через бесконечно близкие точки  $(A_2 A_3 A_4)$  плоской кривой провести окружность, то ее радиус  $R$  называют *радиусом кривизны* кривой  $k$  в окрестности точки  $A_3$ , а точка  $O$  называется *центром кривизны*.

Прямая линия  $n \supset (OA_3) \perp t$  называется *нормалью* кривой в точке  $A_3$ .

Отношение  $k = \frac{1}{R}$  называется *кривизной кривой* в окрестности заданной точки.

Если касательная  $t$  при скольжении по кривой не меняет своего направления движения (вращения), то кривая называется *гладкой*, а ее точки называются *правильными*, или *регулярными* (рис. 10.1, а). Другие точки называют *особыми*, или *специальными*.

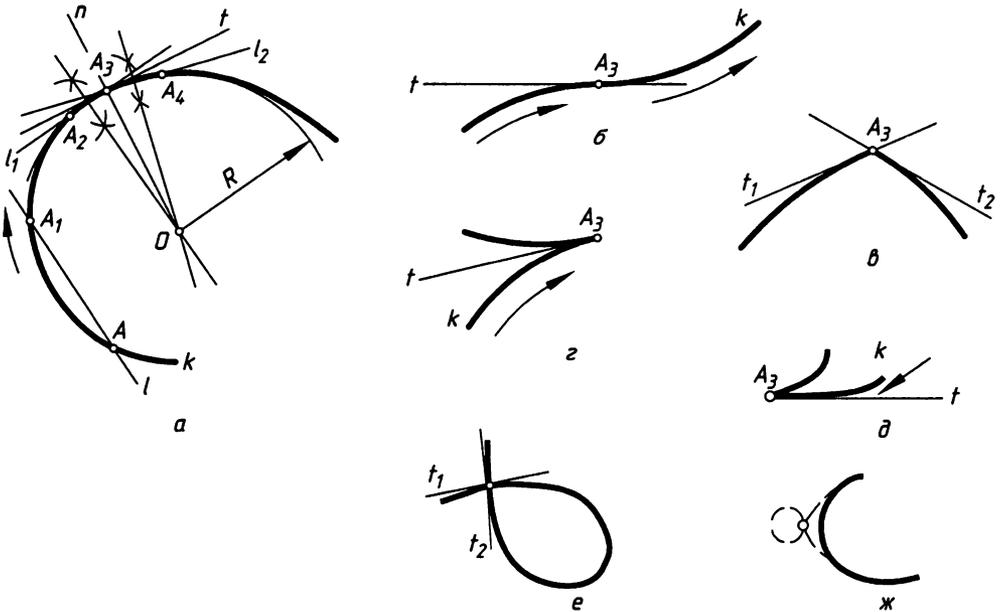


Рис. 10.1. Основные понятия кривой линии

Точка  $A_3$  кривой (рис. 10.1, б), в которой точки типа  $A_2$  и  $A_4$  (рис. 10.1, а) находятся по разные стороны от нее, но не меняется направление нормали кривой (меняется направление движения касательной), а направление движения точки по линии сохраняется, называется *точкой перегиба*.

Точка  $A_3$  кривой (рис. 10.1, в), в которой полукасательные не совпадают, а нормаль находится по одну сторону от кривой, называется *точкой излома*. В точке излома полукасательные кривых могут совпасть, но при этом сами кривые в ее окрестности имеют разное значение радиуса кривизны.

Точка  $A_3$  кривой (рис. 10.1, г), в которой полукасательные совпадают, но меняется направление нормали, называется *точкой заострения* (или *точкой возврата первого рода*).

Точка  $A_3$  кривой (рис. 10.1, д), в которой полукасательные совпадают, а направление нормали не меняется, называется *точкой возврата второго рода* (*точкой клюва*).

Точка, через которую проходят две различные ветви кривой (рис. 10.1, е), называется *узловой*. Точка, в которой пересекаются мнимые ветви кривой, называется *изолированной* (рис. 10.1, ж). Точки возврата, узловые и изолированные, называют *двойными*.

Отдельные свойства проекций линий показаны нами в разделах 3.1, 3.2. На рис. 10.2 показана кривая линия  $k$  и ее параллельная проекция  $k'$ , из анализа которой можно сделать вывод о дополнительных свойствах проекций кривых линий.

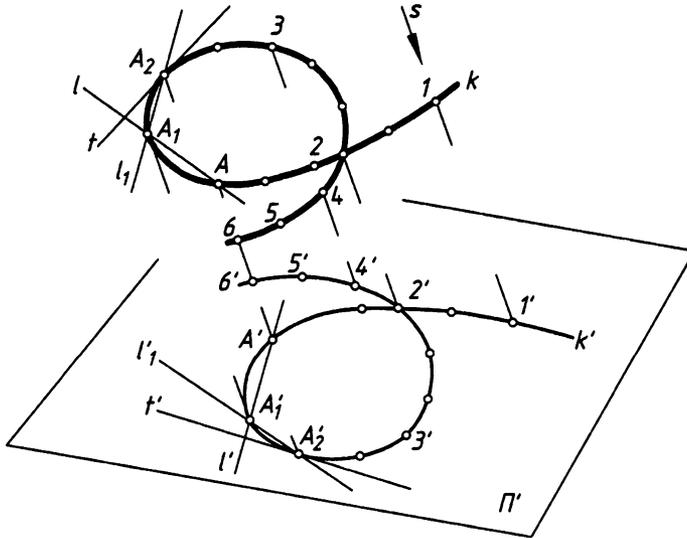


Рис. 10.2. Параллельная проекция кривой линии

Секущая  $l$  кривой линии проецируется в секущую  $l'$  на ее проекции, если она не вырождается в точку. Это следует из условия принадлежности точек пересечения.

Если зафиксировать точку  $A_2$  ( $A_2'$ ), а точку  $A_1$  ( $A_1'$ ) приближать к точке  $A_2$  ( $A_2'$ ), то секущая  $l$ , ( $l_1$ ) перейдет в касательную  $t$  ( $t'$ ). Следовательно, касательная к кривой линии проецируется в касательную на ее проекции, если не вырождается в точку.

Если кривая линия плоская, то одноименные проекции произвольных секущих ( $AC$ ) и ( $BD$ ) (рис. 10.3, а) пересекутся в точках, лежащих на одной линии связи.

В примере на рис. 10.3, а точки 1, 2 и 3, 4 являются конкурирующими, следовательно, кривая линия пространственная. Для приближенного построения касательной из точки  $A$  ( $A_1, A_2$ ) к плоской кривой линии  $k$  ( $k_1, k_2$ ) (рис. 10.3, б) удобно воспользоваться способом секущих. Через точку  $A$  проводят секущие в области ожидаемой точки касания и через середины хорд проводят кривую линию  $l$  ( $l_2$ ). Точка  $B_2$  пересечения заданной кривой линии  $k_2$  и построенной  $l_2$  и будет являться точкой касания. Другая проекция точки касания определится по линии связи. Касательная  $t$  ( $t_1, t_2$ ) проходит через точки ( $AB$ ).

Для определения длины линии, например длины трубопровода, проложенного в сложных условиях, или длины сварного шва в сложных изделиях, пользуются способом хорд и преобразованием чертежа способом плоскопараллельного перемещения. Для этого на одной проекции кривую линию заменяют ломаной. На рис. 10.4 горизонтальная проекция линии разбита на участки с равными хордами.

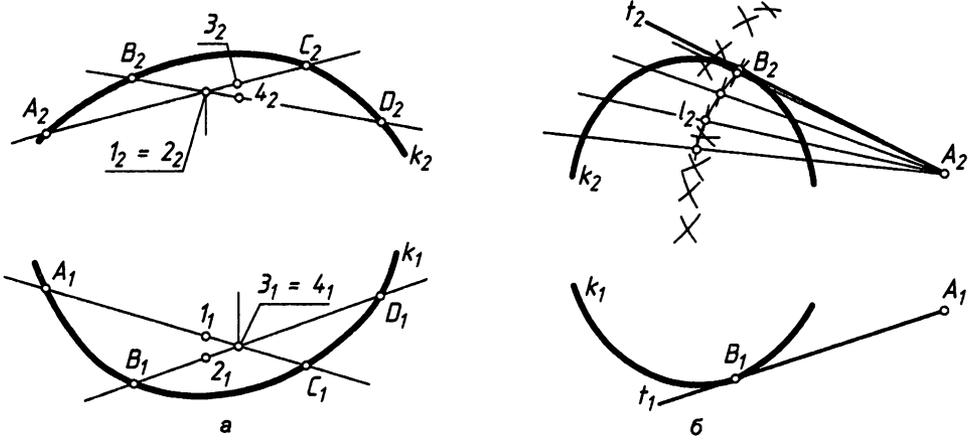


Рис. 10.3. Проверка свойства кривой линии и построение касательной прямой на эпюре

Точки (через одну) помечены цифрами. По линиям связи отмечаем фронтальные проекции этих точек.

Горизонтальную проекцию  $1, \dots, 6$ , заменяем прямой  $\bar{1} \dots \bar{6}$  с равными хордами (спрямляем кривую), а новые фронтальные проекции концов хорд находим в пересечении линий связи: горизонтальных от старой проекции и вертикальных от новой проекции.

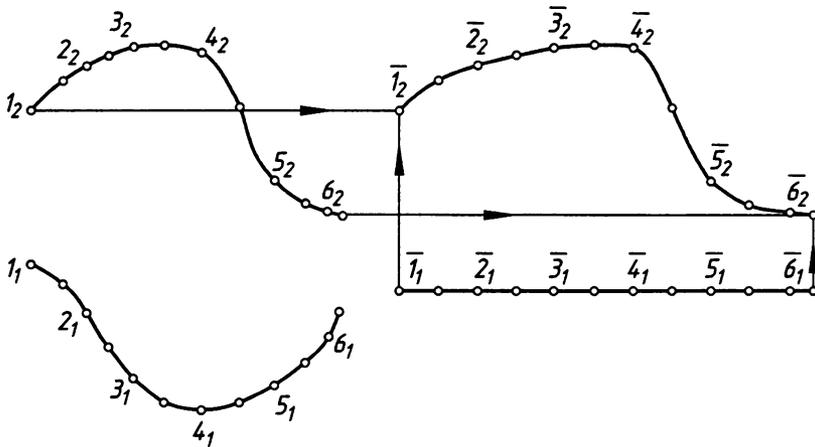


Рис. 10.4. Спрявление линии

На рис. 10.4 линии связи показаны только для точки 1 ( $1_2 \rightarrow \bar{1}_2, \bar{1}_1 \rightarrow \bar{1}_2$ ) и для последней точки кривой, не отмеченной цифрой. Если фронтальную проекцию кривой заменить ломаной, используя те же хорды или сделав новую разметку, и отложить отмеченные хорды на одной прямой, получим полное спрявление заданной кривой (с точностью до разности длин ломаной линии и действительной).

## 10.2. Проекционные свойства окружности и построение ее проекций

Рассмотрим плоские поля  $\Pi$  и  $\Pi'$  (см. главу 4), аффинное соответствие которых задано осью родства  $\rho$  и соответственными точками  $O \rightarrow O'$ . Точку  $O$  примем за центр окружности поля  $\Pi$  (рис. 10.5, а). Два диаметра ( $AB$  и  $CD$ ), каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру (рис. 10.5, б), называют *сопряженными*.

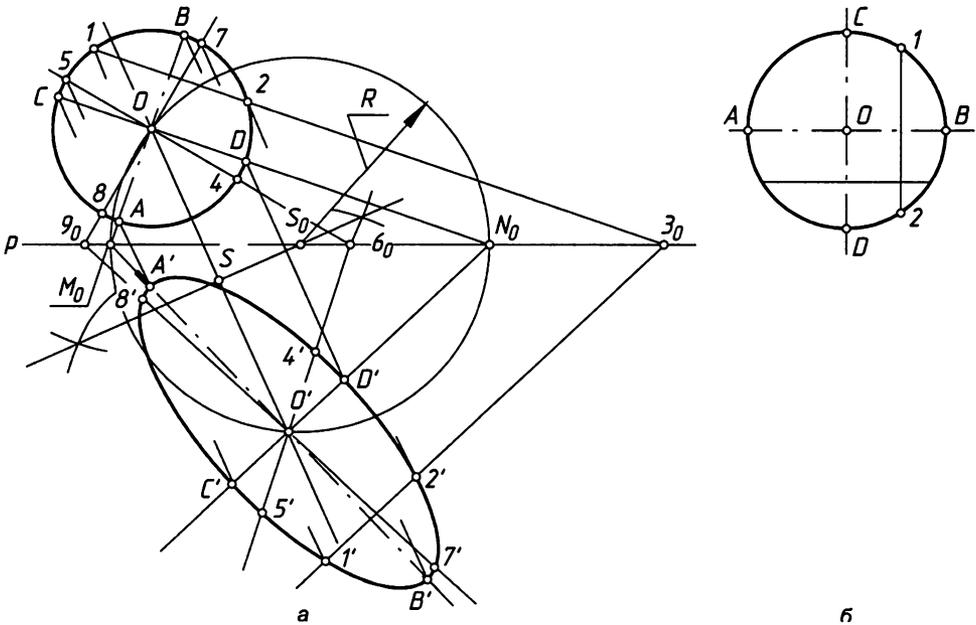


Рис. 10.5. Аффинное соответствие окружности и эллипса

У окружности сопряженные диаметры взаимно перпендикулярны. Возьмем в окружности произвольные сопряженные диаметры  $(4-5) \perp (7-8)$ . Найдем соответственные им диаметры  $(4'-5')$  и  $(7'-8')$ . Для этого через точки  $6_0$  и  $9_0$  проведем соответственные прямые  $(6_0-O')$ ,  $(9_0-O')$  и по направлению  $OO'$  родства найдем на них точки  $(4 \rightarrow 4')$ ,  $(5 \rightarrow 5')$ ,  $(7 \rightarrow 7')$ ,  $(8 \rightarrow 8')$ .

Учитывая свойства параллельного проецирования (сохранение пропорциональности, параллельности), мы можем отметить, что сопряженные в поле  $\Pi$  диаметры  $(4-5) \perp (7-8)$  сохранили свойство сопряженности в поле  $\Pi'$ , но утратили перпендикулярность, то есть линия  $(4'-5')$  не перпендикулярна линии  $(7'-8')$ .

Таким образом, каждому диаметру поля  $\Pi$  будет соответствовать диаметр поля  $\Pi'$ , и все они пересекаются в точке  $O$ , которая делит их пополам. Это значит, что в поле  $\Pi'$  мы получим центрально симметричную фигуру, но не окружность, так как диаметры окружности проецируются в отрезки разной длины.

В середине отрезка  $[OO']$  возьмем точку  $S$  и построим прямую  $(SS_0) \perp (OO')$ . Точку  $S_0$  примем за центр окружности радиуса  $R = |S_0O| = |S_0O'|$ . Отметим точки  $M_0, N_0$  пересечения этой окружности с осью родства, соединим их с точками  $O$  и  $O'$  и заметим, что прямому углу  $M_0ON_0$  поля  $\Pi$  соответствует прямой угол  $M_0O'N_0$  поля  $\Pi'$ . Это значит, что сопряженные диаметры  $[AB] \perp [CD]$  поля  $\Pi$  останутся перпендикулярными в поле  $\Pi'$ , то есть  $[A'B'] \perp [C'D']$ .

Направления, соответствующие этим диаметрам, называются *главными направлениями родства*.

Если взять хорду  $(1-2) \parallel (CD)$ , то ей будет соответствовать хорда  $(1'-2') \parallel (C'D')$ , то есть мы получили фигуру, в которой диаметры  $[A'B']$ ,  $[C'D']$  являются осями симметрии. Полученная фигура обладает осевой и центральной симметрией и называется *эллипсом*. Диаметр  $[C'D']$  называется *малой осью* эллипса, а диаметр  $[A'B']$  называется *большой осью*.

Таким образом, эллипс является фигурой, аффинно соответственной окружности. Используя аффинное соответствие, по двум сопряженным диаметрам можно построить эллипс и касательную к нему.

Например, пусть даны произвольные сопряженные диаметры  $[A'B']$ ,  $[C'D']$  поля  $\Pi'$  (рис. 10.6, а). Для построения эллипса возьмем прямую  $(A'B')$  за ось родства, совместим диаметры  $[A'B'] = [AB]$  поля  $\Pi$  и  $\Pi'$  и построим окружность радиуса  $|OA|$  (рис. 10.6, б). Диаметру  $[AB]$  поля  $\Pi$  будет сопряженным диаметр  $[CD] \rightarrow [C'D']$ . Соответственные точки  $C \rightarrow C'$ ,  $D \rightarrow D'$  определяют направление родства. Отсюда вытекает следующий порядок построения других точек эллипса.

Строим хорду  $(1-2) \parallel (CD)$ . Через точку  $3_0$  проводим прямую параллельно  $(C'D')$ , из точки 1 проводим  $(1-1') \parallel (CC')$ , из точки 2 проводим  $(2-2') \parallel (DD')$  и в пересечениях получаем точки  $1'$  и  $2'$  эллипса. Дальнейшие построения проводятся аналогично. На правой половине эллипса (рис. 10.6, б) специально показано, что не обязательно проводить все линии, достаточно делать необходимые засечки.

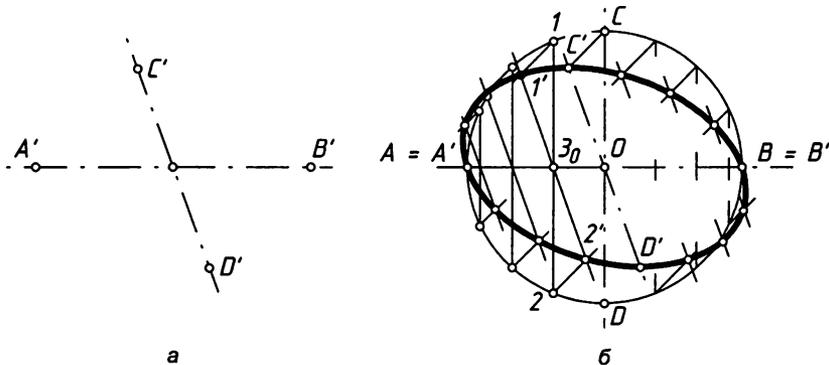


Рис. 10.6. Построение эллипса по сопряженным диаметрам

Если из точки  $M'$  поля  $\Pi'$  нужно провести касательную к эллипсу, заданному сопряженными диаметрами (рис. 10.7, а), то для этого не обязательно строить эллипс. На

диаметре  $[A'B'] = [AB]$  построим окружность и сопряженный диаметр  $[CD]$ . Примем отрезок  $[M'O]$  за диаметр и на нем построим окружность радиуса  $[O, M'] = [O, O]$ . В пересечении окружностей отметим точки  $N$  и  $K$ . Углы  $\angle M'NO = \angle M'KO = 90^\circ$ , следовательно,  $(OK) \perp (M'K)$ , то есть прямые  $(M'K)$  и  $(M'N)$  касаются окружности в точках  $K$  и  $N$ .

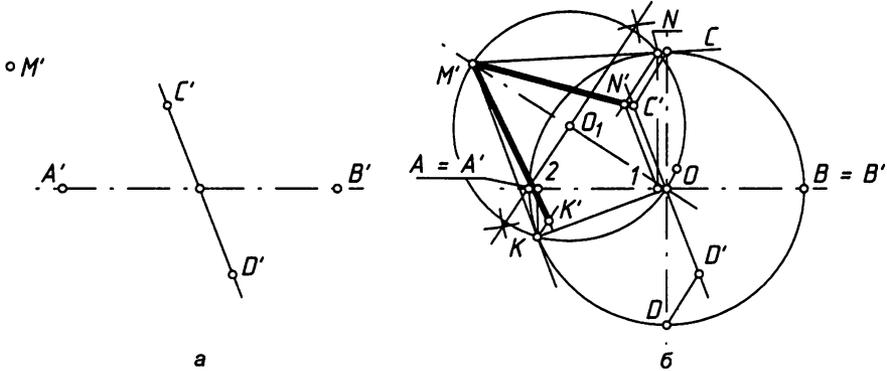


Рис. 10.7. Построение касательной к эллипсу

А теперь найдем родственные им точки в поле  $\Pi'$ . Для этого установим направление  $(CC')$  и  $(DD')$  родства и построим  $(1-N) \parallel (OC) \rightarrow (1-N') \parallel (OC') \rightarrow (NN') \parallel (CC') \rightarrow N'$  — точка касания на эллипсе, прямая  $(M'N')$  — касательная эллипса. Аналогично:  $(2-K) \rightarrow (2-K') \parallel (OD') \rightarrow (KK') \parallel (DD')$  — касательная эллипса.

### 10.2.1. Ортогональная проекция окружности

Ортогональная проекция окружности наиболее часто встречается в практике инженерных изображений, поэтому уделим ей дополнительное внимание.

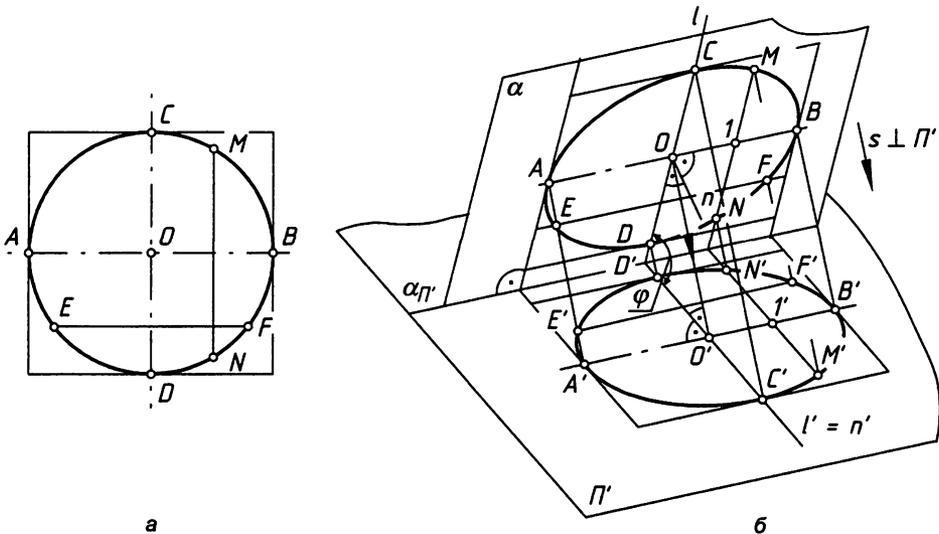


Рис. 10.8. Ортогональное проектирование окружности

Возьмем окружность и в ней сопряженные диаметры  $[AB] \perp [CD]$  и параллельные им хорды  $[EF]$ ,  $[MN]$  (рис. 10.8, а). При построении изображения часто пользуются описанным квадратом, который образуют касательные к окружности, параллельные сопряженным диаметрам.

Поместим окружность в плоскость  $\alpha$  так, чтобы диаметр  $[AB]$  стал линией уровня, то есть  $[AB] \parallel \alpha_{\pi'} = \alpha \cap \pi'$  (рис. 10.8, б). Тогда диаметр  $[CD]$  будет линией наибольшего наклона плоскости  $\alpha$  к плоскости  $\pi'$ . Спроецируем отмеченные геометрические элементы по направлению  $s \perp \pi'$  на плоскость  $\pi'$ . Диаметр  $[CD]$  будет иметь проекцию  $[C'D'] \perp \alpha_{\pi'}$ , а  $[AB] \rightarrow [A'B'] = [AB] \parallel \alpha_{\pi'} \Rightarrow [C'D'] \perp [A'B']$ , то есть выбранные сопряженные диаметры совпадают с главными направлениями родственных полей  $\alpha$  и  $\pi'$  и сохраняют свою перпендикулярность в поле  $\pi'$ . Обозначим  $\angle \varphi = \alpha \wedge \pi' = (CD) \wedge (C'D')$  и запишем

$$\frac{[C'D']}{[CD]} = u = \cos \varphi \text{ или } [C'D'] = [CD] \cdot \cos \varphi.$$

Если обозначить  $d = |AB|$ , то  $[A'B'] = d$ , а  $[C'D'] = d \cdot \cos \varphi$ .

Совместим диаметры  $[AB] = [A'B']$  (рис. 10.9, а), построим окружности радиуса  $[OA] = 0,5 \cdot d$  и радиуса  $[OC'] = 0,5 \cdot d \cdot \cos \varphi$ , обозначим  $d = 2a$  и  $d \cdot \cos \varphi = 2b$  (рис. 10.9, б).

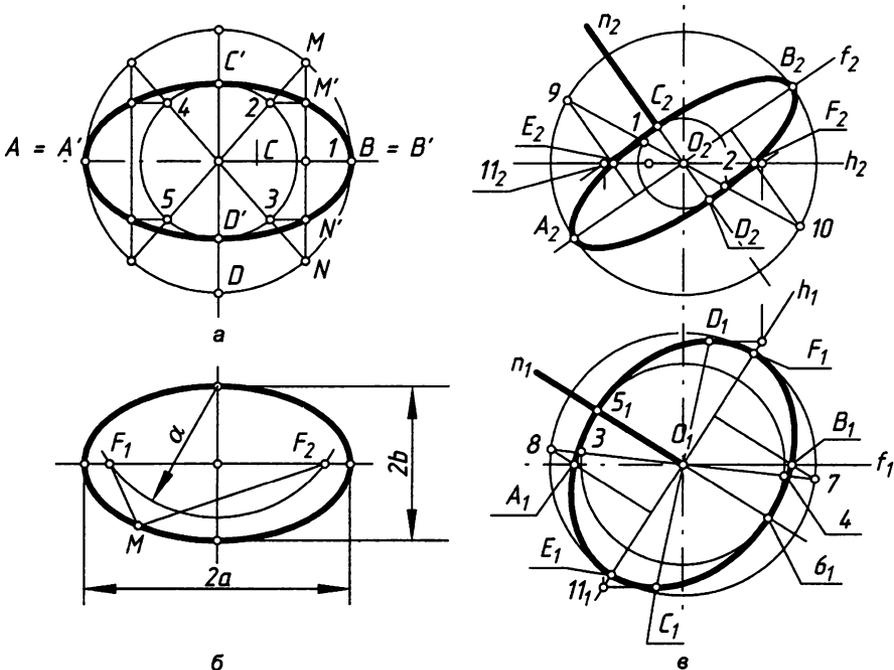


Рис. 10.9. Построение ортогональной проекции окружности

Диаметр  $[A'B'] = 2a$  является большой осью эллипса, а  $[C'D'] = 2b$  — малой осью эллипса. Точки  $F_1$  и  $F_2$  называют фокусами эллипса. Эллипс обладает таким свойс-

твом, что для каждой точки  $M$  удовлетворяется равенство  $[F_1 M] + [F_2 M] = 2a$ . Точки  $F$  называют фокусами эллипса.

Если в точке  $O$  (см. рис. 10.8, б) построить нормаль  $n \perp \alpha$ , то  $n'$  сохранит свою перпендикулярность к  $(A'B')$  и, следовательно,  $n' = l'$ . Это значит, что малая ось эллипса по направлению совпадает с проекцией нормали к плоскости окружности.

По рис. 10.8 и 10.9, а видно, что в ортогональных проекциях сохраняется аффинное соответствие эллипса окружности, которое формулируется так:

*Ортогональной проекцией окружности является эллипс, большая ось которого равна ее диаметру  $d$ , а малая ось равна произведению  $d \cdot \cos \varphi$  и параллельна проекции  $n'$  нормали  $n$  ее плоскости.*

Любой точке  $M$  окружности соответствует точка  $M'$  эллипса, которая может быть определена следующим образом. Строим прямую линию  $[OM]$  и  $[MN] \perp (A'B')$ , из точки  $2$  проводим  $[2-M'] \parallel (A'B')$  и  $M' = (M-1) \cap (2-M')$ . Рассматривая треугольник  $(O-1-M)$ , можно записать:

$$\frac{OC'}{OC} = \frac{O2}{OM} = \frac{1-M'}{1-M} = \cos \varphi = u,$$

то есть точка  $M'$  действительно является проекцией точки  $M$ .

Аналогично определены точка  $N'$  и симметричные им точки на хордах (2-4) и (3-5).

Отмеченные свойства широко используются при построении ортогональных проекций окружности, как на эпюре, так и в аксонометрии.

Для построения изображений окружности диаметра  $d$  достаточно знать проекции  $(O_1, O_2)$  центра и проекции  $(n_1, n_2)$  нормали  $n$  (рис. 10.9, в) ее плоскости. Дальнейшие построения можно провести в следующем порядке. Построим горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) так, чтобы  $h_1 \perp n_1$ , и на  $h_1$  отметим отрезок  $[E_1, F_1] = d$  — это большая ось горизонтальной проекции. По линии связи отметим проекции  $E_2$  и  $F_2$ . Построим фронталь  $f$  ( $f_1, f_2$ ) так, чтобы  $f_2 \perp n_2$ , и на  $f_2$  отметим отрезок  $[A_2, B_2] = d$  — это большая ось фронтальной проекции. По линии связи отметим проекции  $A_1, B_1$ . Построим окружности на больших осях эллипсов (радиусами  $[OF_1]$  и  $[OB_2]$ ). Через точки  $A_1, B_1$  и  $E_2, F_2$  проведем перпендикуляры к большим осям  $[EF_1]$  и  $[A_2B_2]$  соответственно. Точки 7, 8 и 9, 10 их пересечения с большой окружностью соединяем с центром  $O_1$  и  $O_2$ . Теперь из тех же точек  $A_1, B_1$  и  $E_2, F_2$  проводим прямые параллельно большим осям и отмечаем точки:  $1 = (9-O_2) \cap (E_2-1)$ ;  $2 = (10-O_2) \cap (F_2-2)$ ;  $3 = (8-O_1) \cap (A_1-3)$ ;  $4 = (7-O_1) \cap (B_1-4)$ . Отрезки  $[1-2] = d \cdot \cos \varphi = 2b_1$ , где  $\varphi = \alpha \wedge \Pi_2$ , а  $[3-4] = d \cdot \cos \psi = 2b_2$ , где  $\psi = \alpha \wedge \Pi_1$ . Чтобы определить размер малой полуоси  $b_1$  на горизонтальной проекции и  $b_2$  на фронтальной проекции, достаточно определить по одной точке: 1 или 2, 3 или 4. Радиусом  $R_1 = b_1$  и  $R_2 = b_2$  строим малые окружности и на проекциях  $n_1, n_2$  нормали отмечаем малые оси  $[5_1-6_1] = 2b_1$ ,  $[C_2D_2] = 2b_2$ . Другие точки эллипсов строятся по рис. 10.9, а. Проекцию  $C_1$  по  $C_2$  построим на прямой  $(C_2-11_2) \parallel f_2 \rightarrow (11_1-C_1) \parallel f_1$  и по линии связи  $(C_1-C_2)$ . Аналогично можно найти  $D_1, [C_1D_1]$  — горизонтальную проекцию диаметра  $CD$ . Так же можно построить проекции  $5_2$  и  $6_2$  точек 5 и 6 по их горизонтальным проекциям  $5_1$  и  $6_1$  (на рис. 10.9 не показаны).

У окружности, лежащей во фронтально проецирующей плоскости, фронтальная проекция вырождается в прямую линию (рис. 10.10), а горизонтальная проекция может быть построена способом хорд. Диаметр  $[CD]$  будет линией наибольшего наклона, а его горизонтальная проекция  $[C_1D_1] = 2b$ . Диаметр  $[AB] \perp \Pi_2$  и  $[A_1B_1] = d = 2a$ . Возьмем новую горизонтальную плоскость  $\Pi_5$  так, чтобы она совпала с плоскостью окружности. Для этого возьмем новую ось  $x_{25} = \Pi_2 \cap \Pi_5 = (C_2D_2)$ , а старую  $x = (C_1D_1)$ . Построим новую горизонтальную проекцию  $(C_5A_5D_5)$  полуокружности радиуса  $[O_2C_2] = 0,5d$ . Возьмем фронтально проецирующую хорду  $3_2 = 3_2'$ . Длина полухорды равна  $[3_2-3_5]$ . Строим вертикальную линию связи  $(3_2-3_1)$ , на ней от оси  $x = (C_1D_1)$  откладываем отрезки  $[3_2-3_5]$  и получаем длину  $[3_1-3_1']$ , равную длине полной хорды  $[3-3']$  натуральной окружности. Так построены точки 1, 2, 4 и симметрично взятые точки 5, 6, 7 и другие.

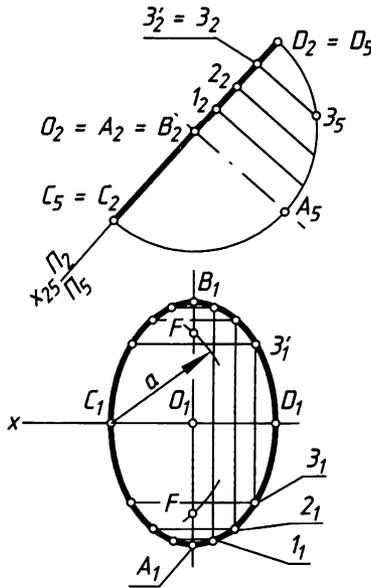


Рис. 10.10. Окружность в проецирующей плоскости

Эллипс можно получить преобразованием растяжения (рис. 10.11).

Если взять окружность радиуса  $R = [OA]$  и хорды 1, 2, 3 (рис. 10.11, а), параллельные этому направлению, то растяжением называют такое преобразование, при котором

отношение  $K = \frac{[OA']}{[OA]}$  — величина постоянная для всех отрезков данного направления.

При растяжении  $K > 1$ . Это значит, что если от диаметра  $[C'D']$  отложить отрезок  $[OA'] = K [OA]$ ,  $[1_0-1'] = K [1_0-1]$  и т. д., то получим точки  $A', 1'$  и т. д. эллипса.

Такое умножение можно производить графически с помощью масштабного треугольника (рис. 10.12), в котором  $\text{tg } \alpha = K$ , а  $[AB] = [OA] \cdot \text{tg } \alpha = K [OA]$ . Для построения треугольника надо по направлению  $(OA)$  отложить выбранную величину и построить второй катет  $[AB] \perp [OA]$ . Гипотенуза  $(OB)$  будет масштабной шкалой. Если теперь по  $(OA)$  отложить отрезок  $d$ , то отрезок  $m = d \cdot \text{tg } \alpha = Kd$ .

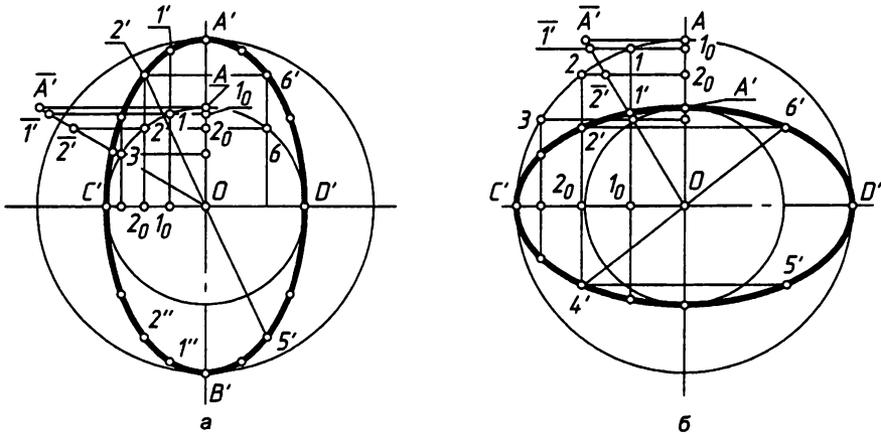


Рис. 10.11. Преобразование растяжения и сжатия

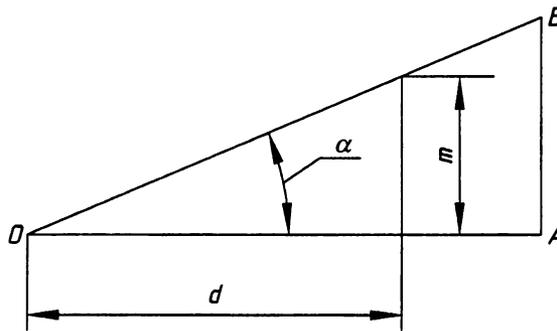


Рис. 10.12. Масштабный треугольник

В нашем примере (см. рис. 10.11, а) совместим катет  $[OA]$  с радиусом преобразуемой окружности и построим катет  $[AA'] \perp [OA]$  и  $[AA'] = [OA'] = K [OA]$ . Гипотенуза  $OA'$  будет масштабной шкалой. Если через точку 1 провести прямую  $(1-1') \parallel (AA')$ , то  $[0-1_0] = [1_0-1] \parallel (OA)$ , то есть произошло откладывание полухорды точки 1 на катете  $[OA]$ , а результат умножения  $[1_0-1']$  откладываем от диаметра  $[C'D']$  отрезком  $[1_0-1']$  и получаем точку 1'. Симметрично ей относительно  $(C'D')$  отмечаем точку 1''. Далее берем точку 2 окружности, измеряем отрезок  $[2_0-2'] \parallel (AA')$ , откладываем его от точки  $2_0$  оси  $(C'D_0)$  и получаем точки 2' и 2'' эллипса. На продолжении прямой  $(2'-2)$  можно получить точку б, а затем б', которая симметрична точке 2' относительно большей оси. Можно использовать центральную симметрию  $[0-2'] = [0-5']$  для второй половины эллипса. Рассмотренное преобразование является частным случаем аффинного преобразования, в котором прямая линия  $(C'D')$  является осью родства, а направление родства перпендикулярно оси.

Если точке А соответствует точка А' (см. рис. 10.11, б) и при этом  $K = [OA'] : [OA] < 1$ . получаем преобразование сжатия окружности радиуса  $R = [OA]$  с осью родства  $(C'D')$ . Перпендикулярно  $(OA)$  в точке А отложим отрезок  $[AA'] = [OA']$  и проведем

гипотенузу  $[O\bar{A}']$ . На большой окружности выбираем точки 1, 2, 3, ..., проводим хорды  $[1-1_0], [2-2_0] \dots \parallel [OA]$  и  $\perp [OA]$ . От прямой  $(C'D')$  вверх и вниз параллельно  $(OA)$  откладываем отрезки  $[1_0-1'] = [1_0-\bar{1}']$ ,  $[2_0-2'] = [2_0-\bar{2}']$  и т. д.

Этот же прием можно использовать при построении касательной из точки  $B$  к эллипсу (рис. 10.13, а).

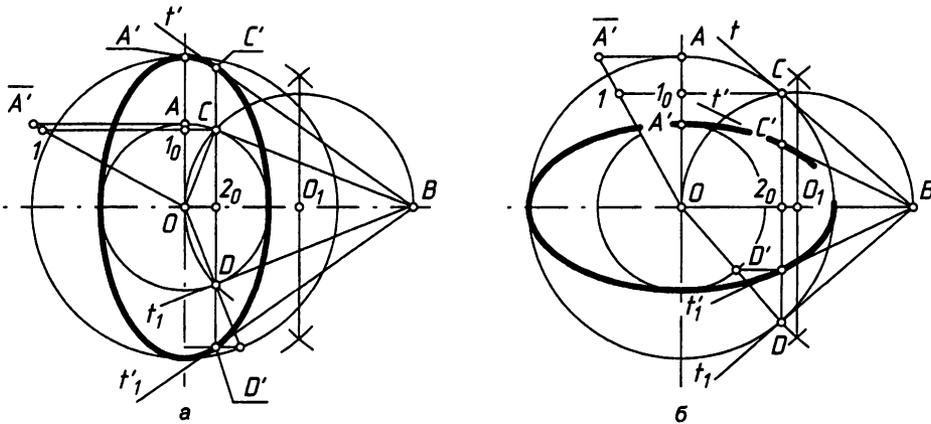


Рис. 10.13. Построение касательной к эллипсу

Принимаем за диаметр отрезок  $[OB]$ , делим его пополам, строим окружность радиуса  $[OB]$  и отмечаем точки  $C$  и  $D$  ее пересечения с малой окружностью, если эллипс получен преобразованием растяжения, и с большой окружностью, если эллипс получен преобразованием сжатия (рис. 10.13, б). Из точки  $A$  проводим катет  $[A\bar{A}'] = [OA']$  перпендикулярно  $[OA]$ , строим гипотенузу  $[O\bar{A}']$ , а через точку  $C$  проводим прямую  $(CC') \parallel OA$  и на ней откладываем отрезок  $[2_0-C'] = [1_0-1]$ . Точка  $C'$  будет точкой касания прямой  $(BC')$ . Точку  $D'$  можно построить так же, или взять симметрично  $C'$ , или построить по рис. 10.9, а.

### 10.3. Построение линий в аксонометрии

Аксонометрические проекции линии строятся по инцидентным ей точкам. При этом знание геометрических свойств линии позволяет использовать приемы, ускоряющие процесс построения.

Рассмотрим построение кривой линии  $(AB)$  (рис. 10.14, а) в приведенной прямоугольной диметрии (рис. 10.14, б). Выберем оси  $Oxuz$  на эпюре, если они не заданы, а на кривой зададим ряд точек  $(1...4)$ . Дальнейший процесс сводится к построению каждой точки по ее координатам. В примере на рис. 10.14 рассмотрен следующий процесс построения.

На фронтальной проекции с помощью линий связи выделены отрезки, выражающие координаты  $x$  и  $z$  каждой точки. Так как по оси  $y'$  в диметрии показатель искажения  $v = 0,5$ , координату  $y_b = [B_x B_y]$  разделили пополам. Для этого через точ-

ку  $B_1$  провели прямую параллельно оси  $x$ , на ней вправо отложили произвольные отрезки  $[B_1-7] = [7-8]$  и из точки 7 провели прямую параллельно прямой  $[B_x-8]$ . Полученную точку с помощью циркуля перенесем в положение  $B_0$ .

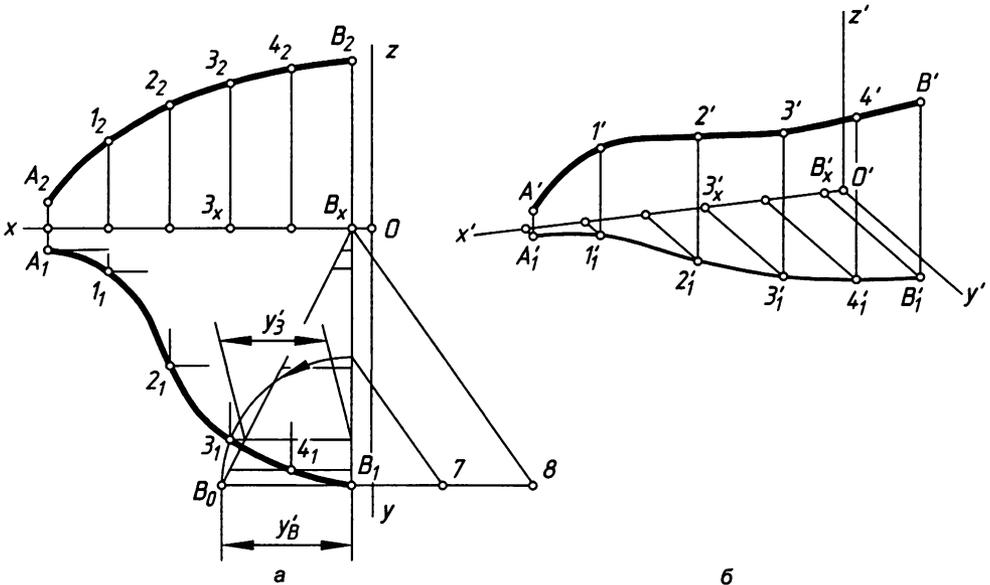


Рис. 10.14. Построение кривой линии по координатам точек

В прямоугольной диметрии глубина точки  $B$  равна  $y'_B = [B'_B_0] = 0,5 [B_x B_0] = 0,5 y_B$ . Проведем прямую линию  $[B_0 B_x]$ . Треугольник  $B_0 B_x B_1$  является масштабным для координаты  $y$ . Если через горизонтальную проекцию любой точки кривой, например через  $3_1$ , провести параллельно оси  $x$  линию, то ее часть внутри треугольника  $y'_3 = 0,5 y_3 = [3'_x - 3'_1]$ , то есть она равна координате  $y$  точки  $3$  в диметрии.

Теперь удобно поступить так. Наложим ровной кромкой кусочек бумаги на ось  $Ox$  эюра, отметим на ней все точки  $O, B_x, 3_x$  и другие, ограничивающие координату  $x$ . Теперь эту же кромку наложим на ось  $O'x'$  аксонометрии и отметим на оси эти же точки, а через них параллельно  $y'$  проведем прямые, на которых отложим соответствующие координаты  $y'$  из масштабного треугольника ( $[B'_x B'_1] = y'_B, [3'_x - 3'_1] = y'_3$  и т. д.). Так получим вторичные проекции точек  $A'_1, 1'_1, \dots, 4'_1, B'_1$  кривой. От них проводим вертикальные линии, на которых откладываем отрезки, взятые на фронтальной проекции кривой и выражающие координату  $z$  отмеченных точек. Получим аксонометрические проекции точек  $A', 1', \dots, 4', B'$ . Соединяем точки плавными кривыми:  $(A'_1 B'_1)$  — вторичная проекция кривой,  $(A' B')$  — аксонометрическая проекция кривой.

Для плоской кривой удобно использовать способ хорд (рис. 10.15). Для этого удобным образом выбирается общая секущая. На рис. 10.15, а через точку  $B_1$  проведена хорда  $[B_1 C_1] \parallel x$  и через ее середину  $2_1$  проведена секущая  $(A_1-5_1)$ , а потом построены их фронтальные проекции:  $[B_2 C_2], 2_2, (A_2-5_2)$ . На секущей выбраны точки  $(1..5)$ . Через них проведены проекции фронталей. Фронталь точки 5 является касательной.

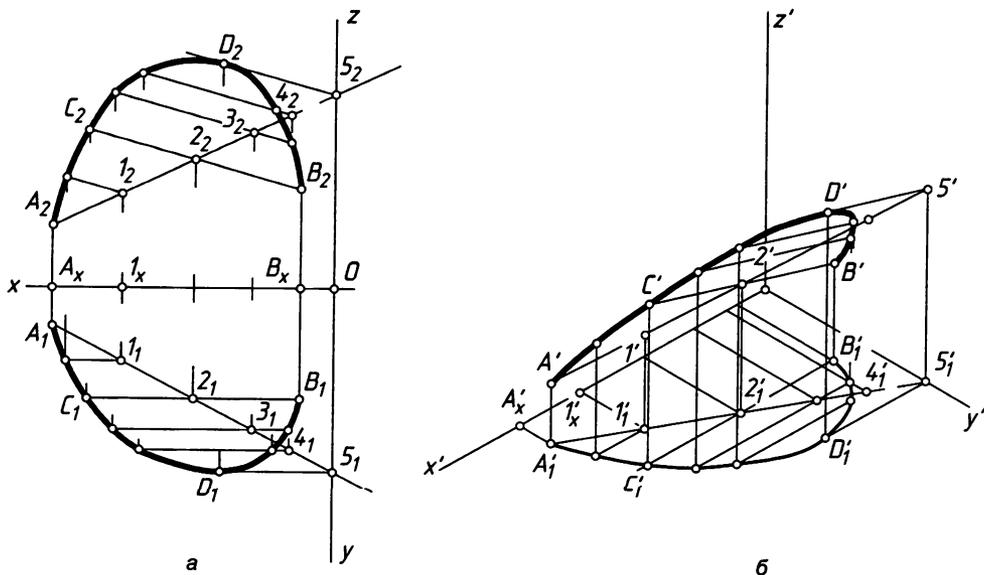


Рис. 10.15. Построение аксонометрии кривой линии способом хорд

В приведенной прямоугольной изометрии (рис. 10.15, б) показатели искажения по осям равны единице. С помощью бумаги отрезок  $[OA_x]$  (рис. 10.15, а) со всеми отметками переносим на ось  $O'x'$  (рис. 10.15, б), через них проводим прямые параллельно  $y'$ , откладываем  $[A_x'A_1'] = [A_xA_1]$ ,  $[O'-5_1'] = [O-5_1]$ , строим прямую  $(A_1'-5_1')$  и отмечаем точки  $(1'_1 \dots 5'_1)$ .

Через полученные точки проводим хорды параллельно оси  $x'$  и на них откладываем их длину, измеряя с эюра:  $[B_1'C_1'] = [B_1C_1]$ ,  $[5_1'-D_1] = [5_1'-D_1]$  и т. д. По вертикали откладываем  $[A_1'A_2'] = [A_1A_2]$ ,  $[5_1'-5_2'] = [O-5_2]$ , строим секущую  $(A_2'-5_2')$ , на ней строим точки  $(1'_2 \dots 4'_2)$ . Откладываем отрезок  $[B_2'B_1'] = [B_2B_1]$ , строим хорду  $[B_1'-2'_2-C_1']$  и параллельно ей строим другие хорды, а по вторичной проекции находим их длину. Построенные точки соединяем плавной кривой, соблюдая последовательность их расположения.

Если плоская кривая линия симметричная и ее плоскость параллельна одной из координатных плоскостей, а ось симметрии параллельна координатной оси, то задача значительно упрощается (рис. 10.16).

Выбираем оси проекций так, чтобы ось  $x$  совпала с хордой  $[A_2B_2]$  (рис. 10.16, а), а ось  $y$  прошла через точку  $D$  ( $D_1D_2$ ). На эюре построим хорды — горизонталь. Если построим диметрия (рис. 10.16, б), то по оси  $y'$  отложим отрезок  $[O'D'] = 0,5 [D_1D_2]$  и построим вертикальную линию  $(D'C')$ . На  $[C_2D_2]$  наложим кромку бумаги, отметим все пересечения с хордами и перенесем все на  $[D'C']$ . Через отметки проведем направления хорд параллельно оси  $D'O'x'$ . Замеряя полухорды на эюре от оси  $[D_2C_2]$ , откладываем их значения от оси  $[D'C']$  соответственно. Полученные точки соединяем плавной кривой. Ось  $C'D'$  удобно совместить с осью  $z'$ .

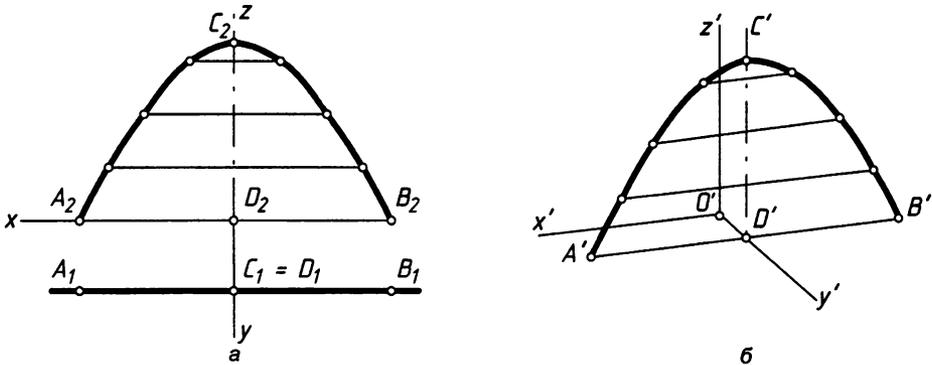


Рис. 10.16. Плоская кривая линия частного положения

В инженерной практике построения аксонометрических изображений наиболее часто встречаются случаи, когда плоскость окружности параллельна одной из координатных плоскостей натуральной системы. Проекции таких окружностей строят по большой и малой оси эллипса, положение и величина которых указаны в стандартных аксонометрических проекциях (ГОСТ 2.317-69).

В прямоугольной аксонометрии направление малой оси 2 (рис. 10.17) эллипса совпадает с той координатной осью, направление которой перпендикулярно плоскости окружности в натуральной системе, то есть совпадает с направлением нормали к плоскости окружности.

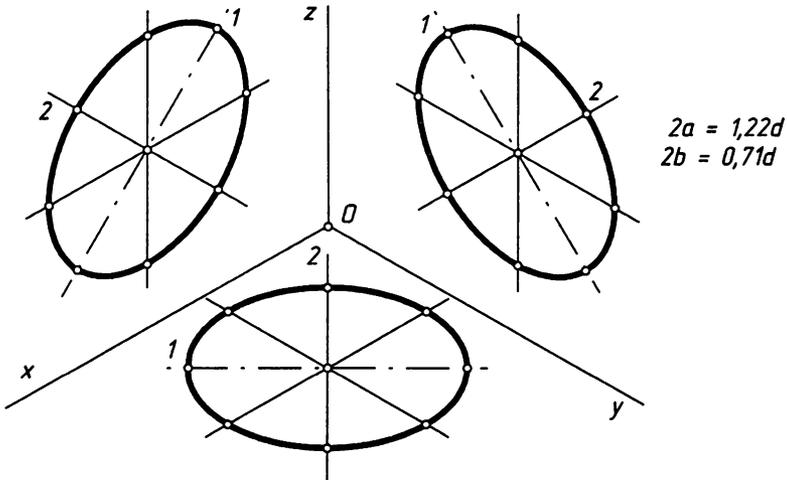


Рис. 10.17. Оси эллипсов в прямоугольной изометрии

Например, если плоскость окружности параллельна  $xOy$ , то малая ось 2 параллельна оси  $z$ , а большая ось 1 к ней перпендикулярна. Соответственно, для плоскости  $yOz$  малая ось 2 параллельна оси  $x$ , а для плоскости  $xOz$  малая ось 2 параллельна оси  $y$ .

Это же правило справедливо и для диметрии (рис. 10.18).

В прямоугольной изометрии оси равны (см. рис. 10.17):

- в точной изометрии:  $2a = d$  — большая ось,  $2b = 0,58d$  — малая ось;
- в приведенной изометрии:  $2a = 1,22d$  — большая ось,  $2b = 0,71d$  — малая ось, где  $d$  — диаметр проецируемой окружности.

В диметрии размеры осей эллипсов равны (см. рис. 10.18):

- в точной диметрии:
  - в плоскости, параллельной  $xOy$  или  $yOz$ ,  $2a = d$ ,  $2b = 0,33d$ ;
  - в плоскости, параллельной  $xOz$ ,  $2a = d$ ,  $2b = 0,9d$ ;
- в приведенной диметрии:
  - в плоскости, параллельной  $xOy$  или  $yOz$ ,  $2a = 1,06d$ ,  $2b = 0,35d$ ;
  - в плоскости, параллельной  $xOz$ ,  $2a = 1,06d$ ,  $2b = 0,95d$ .

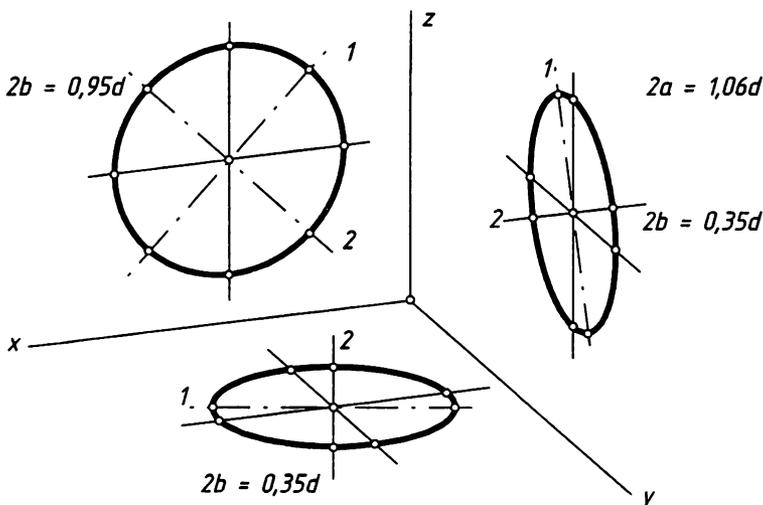


Рис. 10.18. Оси эллипсов в прямоугольной диметрической проекции

Примеры изображения окружностей и параметры осей приведенной аксонометрии показаны на рис. 10.17 и 10.18.

При построении эллипса строятся соответствующие оси и два сопряженных диаметра, параллельных координатным осям данной плоскости. Например, в приведенной аксонометрии при построении эллипса, параллельного плоскости  $xOy$ :

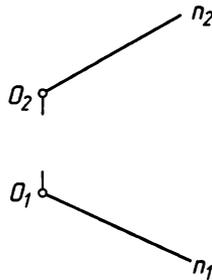
- по рис. 10.17: по оси 2 откладываем  $2b = 0,71d$ , по оси 1 откладываем  $2a = 1,22d$ , а по направлениям, параллельным осям  $x$  и  $y$ , откладываем  $d$ ;
- по рис. 10.18: по оси 2 откладываем  $2b = 0,35d$ , по оси 1 откладываем  $2a = 1,06d$ , а по направлению оси  $x$  откладываем  $d$ , по направлению оси  $y$  откладываем  $0,5d$ .

Так получается восемь точек, по которым строится эллипс. Если эллипс крупный, то строятся дополнительные точки одним из способов, показанных в разделе 10.2. Эллипсы в других плоскостях можно построить по двум сопряженным диаметрам (см. раздел 10.2) или одним из способов, изложенных в начале данного подраздела.

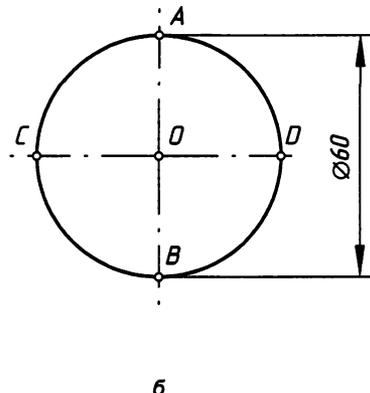
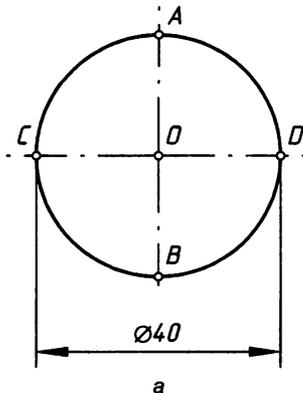
Более подробные сведения о построениях окружности в аксонометрических проекциях можно узнать в [31], [16].

## Вопросы и задания

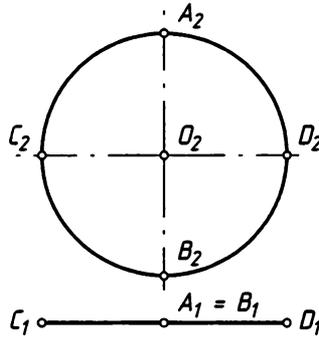
1. Поясните кинематический принцип образования кривой линии и раскройте понятия: секущая, касательная, нормаль и кривизна кривой линии.
2. Задайте две проекции любой кривой линии и убедитесь, что она не плоская. Постройте аксонометрическую проекцию этой линии.
3. Назовите основные свойства проекций кривой линии.
4. Какие кривые линии называют алгебраическими? С какими из них вы наиболее часто встречаетесь в быту?
5. Как узнать по чертежу, что кривая плоская?
6. Как по чертежу определить длину произвольной кривой линии?
7. Сформулируйте свойства ортогональной проекции окружности.
8. Какие диаметры называют большой и малой осью эллипса?
9. Постройте два изображения окружности диаметра 50 мм по заданному центру  $O (O_1, O_2)$  и проекциям нормали  $n (n_1, n_2)$  к ее плоскости.



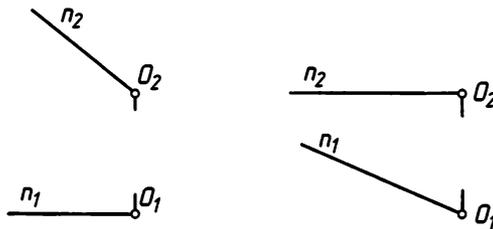
10. Постройте эллипс, полученный преобразованием растяжения — сжатия, если  $K = |A'B'| : |CD|$  равно: а)  $K = 2$ ; б)  $K = 0,5$ .



11. Постройте изображения заданной окружности, повернув ее вокруг  $(AB)$  на  $45^\circ$ .



12. Постройте изображения окружности диаметра 50 мм по заданному центру  $O$  ( $O_1, O_2$ ) и нормали  $n$  ( $n_1, n_2$ ).



13. Постройте изображения окружности задачи 12 в прямоугольной изометрии и диметрии. Постройте эту же окружность в таком положении, когда направление нормали  $n$  совпадает с направлением одной из координатных осей.

# Глава 11

## Поверхности

Поверхностью будем называть совокупность упорядоченного множества точек или линий, ограничивающих некоторый объем или разделяющих пространство.

Если эта совокупность описывается уравнением вида  $F(x, y, z) = 0$ , то поверхность называют *закономерной*. В зависимости от вида уравнения поверхность называют *алгебраической*, или *трансцендентной*.

Одной из характеристик алгебраической поверхности является ее *порядок*, который равен степени ее уравнения в декартовых координатах. В начертательной геометрии *порядок поверхности* определяют числом возможных точек ее пересечения с произвольной прямой линией, включая и мнимые точки.

На чертеже поверхность задают очерком и конечным числом точек или линий, называемых каркасом поверхности.

### 11.1. Кинематический способ образования, понятие каркаса и определителя поверхности

В начертательной геометрии к образованию поверхности подходят с позиций движения, кинематики, и поэтому этот способ назван кинематическим. Такой подход обусловлен не только необходимостью обеспечения наглядности изображений и возможности решения определенных геометрических задач на чертеже, но и необходимостью воспроизводства поверхностей, то есть их формирования, изготовления и обработки.

*Поверхностью  $\alpha$  будем называть траекторию непрерывно движущейся линии  $g$  (рис. 11.1), называемой образующей.*

Допустим, что поверхность  $\alpha$  образуется движением линии  $g$  (рис. 11.1, *a*) в направлении стрелки. Ограничив длину образующей и изобразив ее начальное и конечное положение, получим очерк поверхности. По рис. 11.1 видно, что такое изображение не наглядно и не определено. Поверхность задана, если мы можем на ней взять (построить) любую точку и решать другие геометрические задачи.

Зафиксируем положения  $g, g_1, g_2, \dots, g_n$  (рис. 11.1, б) образующей через определенные промежутки времени. Их совокупность называется *семейством образующих поверхности*.

На линии  $g$  отметим ряд точек, траектория движения которых образует линии  $d, d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$  называемые *семейством направляющих*.

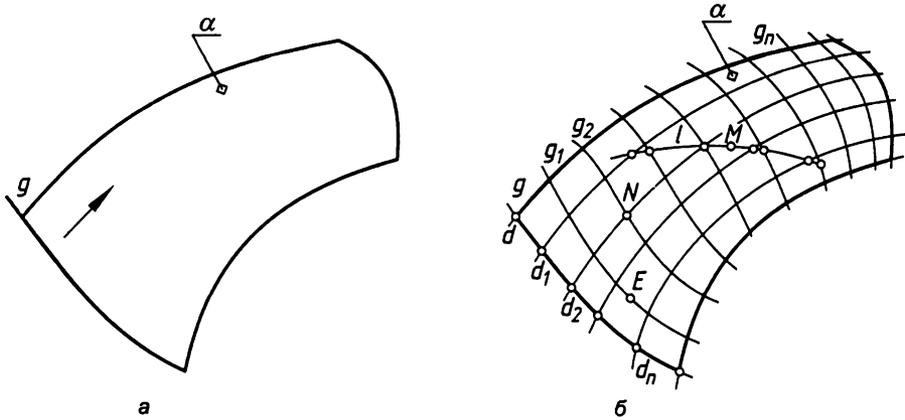


Рис. 11.1. Образование и каркас поверхности

Каждая линия семейства образующих пересекает все линии семейства направляющих. Эти семейства образуют сетку, называемую *каркасом поверхности*. Очевидно, что любая точка  $E$  или  $N$  принадлежит поверхности, если она лежит на линии каркаса этой поверхности. Точку  $N$  пересечения линий каркаса называют *узловой*. А для того чтобы построить точку  $M$  на поверхности, необходимо построить какую-либо линию  $l$  на этой поверхности так, чтобы она проходила через точку  $M$ , то есть  $M \in \alpha$ , если  $M \in l \subset \alpha$ . Принадлежность линии  $l$  поверхности  $\alpha$  определяется точками ее пересечения с линиями каркаса. В промежутке между линиями каркаса точка  $M$  (и сама поверхность) определена не точно. Очевидно, что чем гуще каркас, тем точнее задана поверхность, чем проще линия  $l$ , тем легче с ней работать.

Из примера (см. рис. 11.1) видно, что для определенности образования поверхности необходимо задать:

- форму и размеры образующей;
- положение образующей в пространстве;
- закон изменения образующей в процессе движения;
- закон движения образующей.

Обеспечение этих условий является не простой задачей. Поэтому при задании поверхностей вводятся определенные ограничения. В начертательной геометрии широко используется графический способ задания поверхности, при котором задается форма образующей и закон ее движения, который оговаривается условиями или направляющими линиями и поверхностями. Таким образом, мы подошли к важному понятию определителя поверхности.

*Совокупность условий (параметров), однозначно определяющих данную поверхность, называют ее определителем.*

В определителе выделяют геометрическую ( $\Gamma$ ) и алгоритмическую  $[A]$  часть. Геометрическая часть определителя содержит форму образующей и направляющих, а алгоритмическая часть задает закон движения и изменения формы образующей в процессе движения. Общий определитель записывается в виде:

$$\alpha(\Gamma)[A].$$

Геометрическая часть определителя может задаваться в виде числа, например  $R50$ , или проекциями геометрических объектов, например, проекциями образующей линии и оси вращения, а алгоритмическая — в виде геометрических условий (описания), например словом «сфера» или «вращение».

Выделенные параметры определяют форму и размеры поверхности или только форму, и поэтому называются *параметрами формы*. Если необходимо определить положение поверхности в пространстве, то в определитель вводят параметры, которые называют *параметрами положения*.

Например, закон образования и радиус  $R50$  мм сферы являются ее параметрами формы. Три координаты положения центра сферы в пространстве являются ее параметрами положения.

Каркас поверхности строят с учетом ее свойств и часто для этого используют плоские и цилиндрические сечения. Например, поверхность определенного участка местности задается линиями плоских сечений, которые называют горизонталями, а их строят с помощью специальных геодезических съемок (см. пример на рис. 3.12). С помощью каркаса поверхности решаются все *позиционные и метрические* задачи.

## 11.2. Классификация поверхностей

Понятие поверхности используется не только для выделения формы геометрических тел, но и для описания физических, химических моделей и т. д. Формы поверхностей настолько многообразны, что их общей классификации не существует. Однако в практической деятельности человека широко используются поверхности, которые необходимо строить, обрабатывать, рассчитывать, создавать, исследовать и изучать. Поэтому выделение поверхностей с определенными геометрическими свойствами, условная классификация необходима для того, чтобы упростить изучение их множества, объединив в определенные группы по заданным признакам. Одним из признаков классификации поверхностей могут служить составные части их определителя.

По *закону движения* образующей выделяют группы поверхностей:

- общего вида;
- винтовые;
- вращения;
- переноса.

По *форме образующей* различают поверхности:

- нелинейчатые (образующая — кривая линия);
- линейчатые (образующая — прямая линия).

Нелинейчатые поверхности делят на группы:

- поверхности с образующей переменного вида;
- поверхности с образующей постоянного вида.

Линейчатые поверхности *по условию движения* образующей объединяют в группы:

- с одной направляющей линией и дополнительным условием движения;
- с двумя направляющими линиями и направляющей поверхностью;
- с тремя направляющими линиями.

Примером поверхности общего вида может служить рис. 11.1. Здесь поверхность образована криволинейной образующей переменного вида, перемещающейся по направляющим переменного вида.

С более подробной классификацией поверхностей, сопровождаемой наглядными иллюстрациями, можно познакомиться в работе [9].

## 11.3. Поверхности вращения

*Поверхность  $\alpha$ , образованная вращением образующей  $g$  вокруг неподвижной оси  $i$ , называется поверхностью вращения.*

Эти поверхности часто встречаются в природе, широко используются на практике и удобны для иллюстрации алгоритмов решения общих прикладных задач.

Рассмотрим поверхность  $\alpha(g, i)$  [Вращение] (рис. 11.2), где

- $g$  — образующая — пространственная кривая линия;
- $i$  — ось вращения — горизонтально проецирующая прямая.

Выделим на образующей (см. проекции  $g_1$  и  $g_2$ ) характерные точки:

- $A(A_1, A_2), D(D_1, D_2)$  — концевые точки кривой;
- $B(B_1, B_2)$  — самая близкая к оси вращения;
- $C(C_1, C_2)$  — наиболее удаленная от оси вращения.

Отметим на кривой ряд случайных точек (1, 2, 3, 4).

При вращении образующей каждая ее точка (например, 3) описывает окружность, плоскость  $\phi_2$  которой перпендикулярна оси вращения, а центр лежит на оси вращения. Эти окружности называют параллелями.

*Параллелью называют линию сечения поверхности плоскостью  $\phi(\phi_2)$ , перпендикулярной оси вращения.*

Тогда, когда ось  $i \perp P$ , плоскости параллелей являются горизонтальными плоскостями уровня, а линии, в них лежащие, в том числе и радиусы, являются горизонталями. Следовательно, горизонтальные проекции параллелей — это окружности, радиусы которых равны расстоянию от  $i$ , до выбранной точки на проекции образующей  $g_1$ , а фронтальные проекции параллелей — прямые, перпендикулярные проекции  $i$ , оси вращения.

Например, для построения параллели точки  $Z(Z, Z_2)$  поступаем так:

- радиусом  $R = [i_1 Z_1]$  на горизонтальной плоскости проекций строим окружность и на ней отмечаем точку  $\bar{Z}_1$  пересечения с плоскостью  $\sigma(\sigma_1) \parallel \Pi_2$ ;
- на фронтальной плоскости проекций по линии связи отмечаем точку  $\bar{Z}_2$  и строим проекцию параллели  $\perp i_2$ .

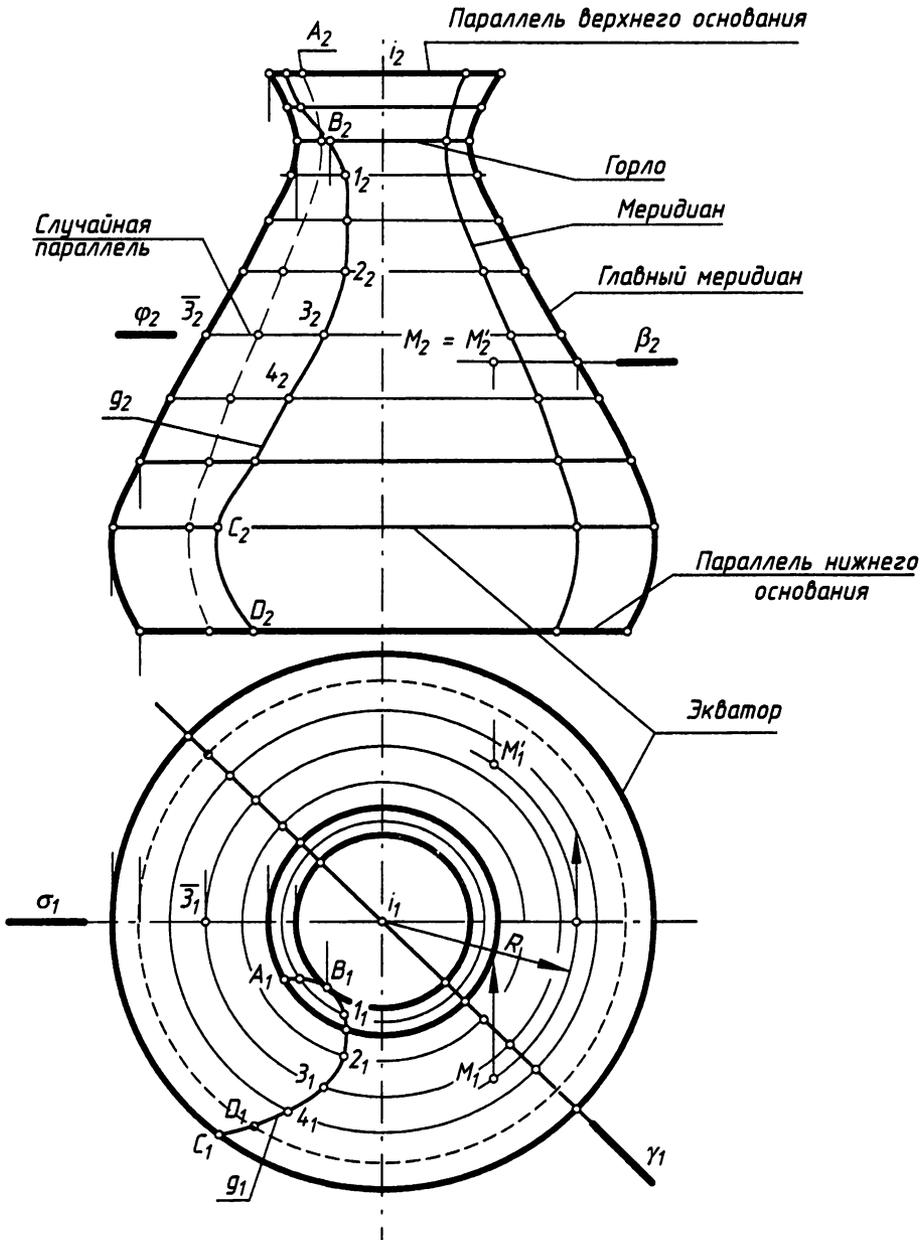


Рис. 11.2. Поверхность вращения

Фронтальной проекцией параллели будет отрезок, равный диаметру проецируемой окружности. Поэтому при ее построении удобно использовать радиус  $R$  окружности, откладывая на фронтальной проекции отрезки симметрично относительно  $i_2$ . Так строятся проекции параллелей всех, намеченных на образующей, точек.

*Линия сечения поверхности плоскостью  $\gamma$  ( $\gamma_i$ ), проходящей через ось вращения, называется меридианом поверхности (случайным меридианом).* Строится случайный меридиан по точкам пересечения параллелей с секущей плоскостью (точки выделены кружочками).

Пересечение поверхности с фронтальной плоскостью  $\sigma$  ( $\sigma_i$ ) уровня, проходящей через ось вращения, образует меридиан, который называется *главным меридианом поверхности*. Он является очерком фронтальной проекции. Все меридианы поверхности являются конгруэнтными (одинаковыми) линиями. Главный меридиан является *границей видимости* фронтальных проекций точек поверхности.

Параллели концов  $A$  и  $D$  образующей называют основаниями поверхности.

Наименьшая параллель поверхности называется *горлом*. Наибольшая параллель поверхности вращения называется *экватором*. Поверхность может иметь не одно горло и несколько экваторов.

Изображение горизонтальной проекции поверхности формируется видимыми параллелями, кроме случайных параллелей. Изображение случайных параллелей используется для придания выразительности или для решения каких-либо геометрических задач.

На рис. 11.2 видимыми параллелями на горизонтальной проекции являются верхнее основание (параллель точки  $A$ ), горло (параллель точки  $B$ ) и экватор (параллель точки  $C$ ). Если основания закрыты, то горло будет невидимым.

Параллели и меридианы являются *геодезическими линиями*. Они организуют *координатную сетку* на поверхности по типу координатной сетки на плоскости. Параллели и меридианы пересекаются под прямым углом. Обычно их семейства используются для построения каркаса поверхности.

Построение точки  $M$  на поверхности легко производится с помощью параллели. Если задана фронтальная проекция  $M_2$ , то для построения ее горизонтальной проекции нужно:

- через  $M_2$  провести проекцию параллели плоскости  $\beta$  ( $\beta_2$ ), проходящей через точку  $M$  (на рис. 11.2 построена ее часть);
- построить горизонтальную проекцию этой параллели (на рис. 11.2 показана ее дуга);
- по линии связи на ней взять точки  $M_1$  и  $M_1'$  — это фронтально конкурирующие точки.

Очевидно, что и на фронтальной проекции будут конкурирующие точки  $M_2 = M_2'$ . Для определенности необходимо оговорить условия видимости. Если  $M_2$  — видимая точка, то ее горизонтальная проекция —  $M_1$ . Если задана горизонтальная проекция точки  $M$  ( $M_1$ ), то строят дугу окружности радиуса  $R = [i, M_1]$ , находят ее фронтальную проекцию и на ней точку  $M_2$ . Так можно построить любую точку и линию на поверхности.

В нашем примере поверхность образована вращением произвольной линии  $g$ , но эта же поверхность получится при вращении плоской линии — меридиана поверхности. Это свойство дает возможность выбора образующей.

Поверхность может быть образована поступательным перемещением окружности (параллели) переменного радиуса вдоль оси  $i$  поверхности.

В поверхность можно вписать сферы, которые могут служить образующими.

Все это говорит о том, что при проектировании поверхности необходимо исследовать возможности и выбирать наиболее удобный способ ее реализации. Эти же возможности надо использовать и в задачах преобразования чертежа.

### 11.3.1. Алгебраические поверхности вращения

**Теорема.** При вращении алгебраической кривой  $n$ -го порядка вокруг неподвижной оси в общем случае образуется алгебраическая поверхность порядка  $2n$ .

Примем эту теорему без доказательства, но проиллюстрируем ее на примере вращения окружности  $g$  ( $g_2$ ) вокруг оси  $i$  ( $i_2$ ) (рис. 11.3 — показана только фронтальная проекция).

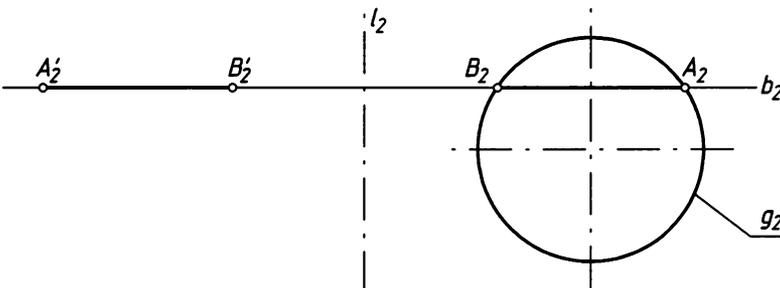


Рис. 11.3. Пример определения порядка поверхности

Для простоты возьмем случай, когда ось вращения  $i$  ( $i_2$ ) и образующая окружность  $g$  ( $g_2$ ) лежат в плоскости главного меридиана. Прямая  $b$  пересекает окружность в двух точках  $A$  ( $A_2$ ) и  $B$  ( $B_2$ ), каждая из которых при вращении линии  $g$  образует параллель. Прямая  $b$  эти параллели, а следовательно и поверхность, пересечет в точках  $A_2-A_2'$  и  $B_2-B_2'$ , то есть получится поверхность четвертого порядка.

При вращении подобной образующей вокруг собственной оси симметрии порядок поверхности равен порядку кривой.

Рассмотрим широко применяемые на практике алгебраические поверхности вращения.

При вращении отрезка  $[AB]$  прямой (рис. 11.4, а), заданного параметром формы  $H$  (длина отрезка), параметрами положения  $R$  и параллельностью оси вращения  $i$ , образуется поверхность вращения второго порядка, называемая *прямым круговым цилиндром* (рис. 11.4, б). Меридианом поверхности являются прямые линии (на рис. 11.4 показано сечение плоскостью  $\gamma$ ). В данном положении цилиндр называется горизонтально проецирующим и однозначно можно задать только фронтальную проекцию  $M_2$  точки  $M$ .

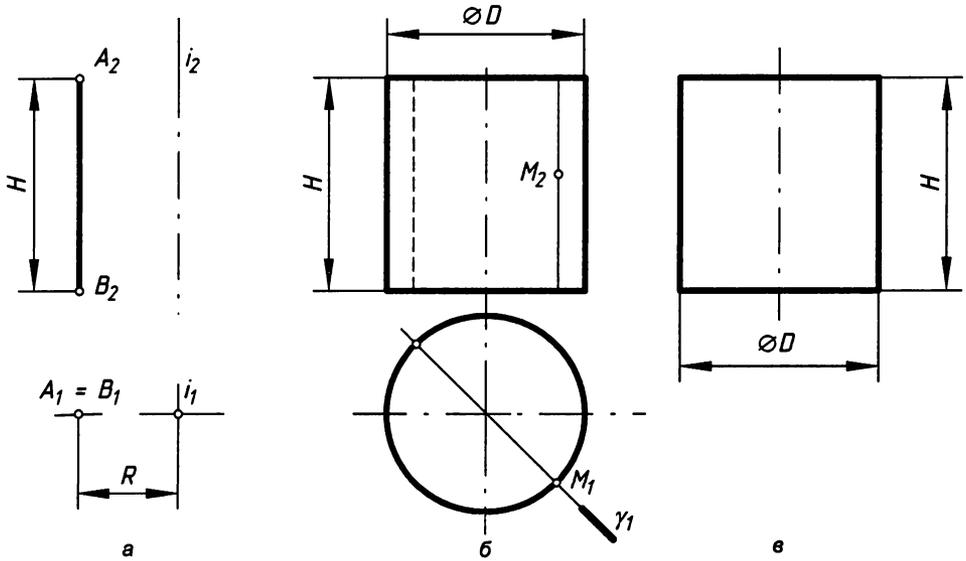


Рис. 11.4. Прямой круговой цилиндр

Цилиндр характеризуется параметрами формы:  $\varnothing D$  — диаметр цилиндра,  $H$  — высота. В инженерной графике знак  $\varnothing$  диаметра может заменять целое изображение. Например, без указания параметров формы цилиндр необходимо изображать по рис. 11.4, б, а с параметрами формы достаточно одного изображения (рис. 11.4, в), так как параметр  $\varnothing D$  указывает, что основанием является окружность.

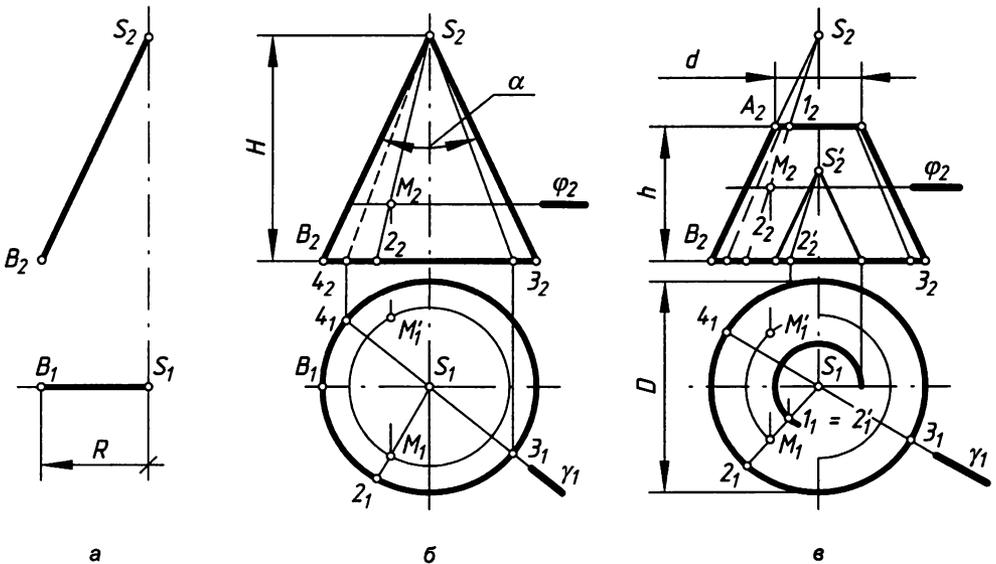


Рис. 11.5. Прямой круговой конус

Если образующая  $[SB]$  (рис. 11.5, а) пересекает ось вращения, то образуется поверхность *прямого кругового конуса* (рис. 11.5, б), в котором точка  $S$  называется вершиной, а параллель точки  $B$  называется основанием.

Конус можно задать одним изображением, если при этом указать параметры формы: высоту  $H$  и диаметр  $\varnothing D$  параллели на расстоянии  $H$  от вершины  $S$  или угол  $\alpha$  при вершине конуса.

Конус, ограниченный параллелью точки  $A$  ( $A_2$ ), называется *усеченным* (рис. 11.5, в). Он может быть задан такими же параметрами формы, как и полный конус, или диаметрами оснований и высотой. Параллель точки  $A$  называют *верхним основанием*, а точки  $B$  — *нижним*.

Меридианом поверхности, лежащим в плоскости  $\gamma$ , являются прямые  $S-3$  и  $S-4$ . Для построения точки  $M$  поверхности удобно использовать параллель плоскости  $\varphi$  ( $\varphi_2$ ) или образующую  $S-2$ . Образующую  $S-2$  усеченного конуса (рис. 11.5, в) при недоступной вершине  $S$  ( $S_2$ ) можно построить с помощью точек  $1-2$  параллелей оснований или с помощью образующей  $S'-2'$  ( $S'_2 - 2'_2, S'_1 - 2'_1$ ) подобного конуса, у которого  $(S'-2') \parallel (S-2)$ , а  $S'_1 = S_1$  (на рис. 11.5, в  $S'_1$  не отмечено).

При вращении отрезка  $[AB]$ , скрещивающегося с осью  $i$  (рис. 11.6, а), образуется поверхность *однополостного гиперboloида вращения* (рис. 11.6, б).

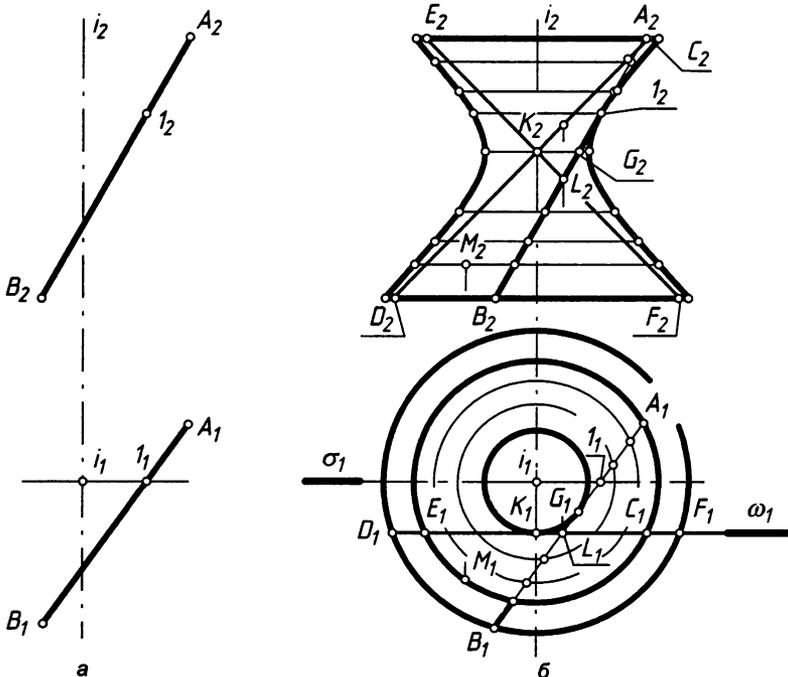


Рис. 11.6. Однополостный гиперboloид вращения

Очерк поверхности строится с помощью параллелей точек: точки  $A, B$  описывают параллели основания; точка  $G$  — горло;  $1$  — точка главного меридиана ( $1 = [AB] \cap \sigma$ ),

являющаяся границей видимости образующей  $[AB]$  на фронтальной проекции; случайные точки (выделены, но не обозначены на чертеже буквами или цифрами) описывают случайные параллели. Главным меридианом поверхности является гипербола. Сечением поверхности плоскостью  $\omega$  ( $\omega_i$ ), параллельной оси  $i$  вращения и касающейся горла, будут прямые  $[CD]$  и  $[EF]$ . Прямая линия  $[CD]$  входит в семейство образующих  $[AB]$ , и между собой они не пересекаются. Прямая линия  $[EF]$  — представитель второго семейства образующих, пересекающих все образующие первого семейства, то есть  $K = [CD] \cap [EF]$ ,  $L = [AB] \cap [EF]$ . Это значит, что линии семейства  $[AB]$  могут быть образующими, а линии семейства  $[EF]$  их направляющими, и наоборот. Оба семейства образуют линейчатый каркас поверхности. Это свойство гиперboloида использовал известный русский инженер, почетный член Академии наук СССР В. Г. Шухов (1853–1939) в строительстве радиомачт, опор и башен, которые были прочными и сравнительно легкими. Оно широко используется и в других отраслях промышленности, в том числе и в машиностроении.

Для построения любой точки  $M(M_1, M_2)$  поверхности удобно использовать параллели. Если задана горизонтальная  $M_1$  проекция точки, то можно использовать образующую, которую нужно провести через  $M_1$  касательно к горлу и взять соответствующие точки на основаниях (на рис. 11.6 не показано).

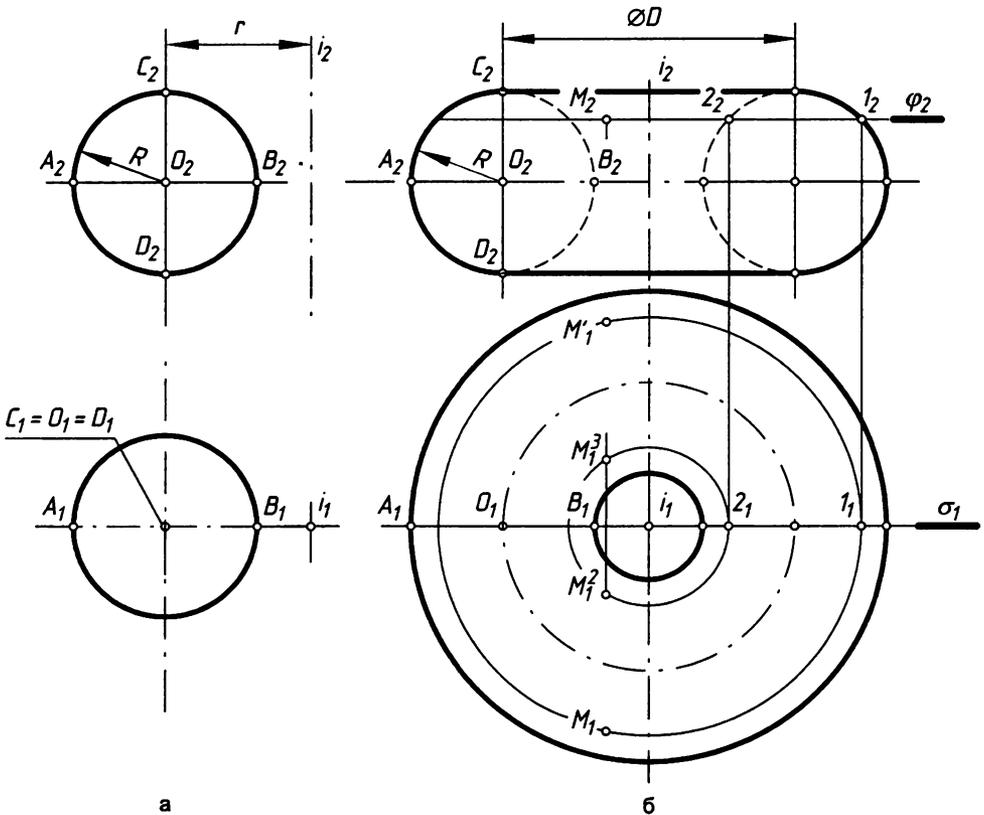


Рис. 11.7. Образование сферы и открытого тора

При вращении окружности ( $ACBD$ ) вокруг собственной оси симметрии (например,  $CD$ ) образуется поверхность, называемая сферой (рис. 11.7, *a*). Меридиан ( $ACBD$ ) и экватор (параллель точки  $A$ ) сферы являются конгруэнтными линиями. Для построения любой точки поверхности используются параллели.

Если окружность радиуса  $R$  (рис. 11.7, *a*) с центром  $O$  ( $O_1O_2$ ) вращать вокруг оси  $i$  ( $i_1i_2$ ), то при  $r > R$  образуется поверхность открытого тора (рис. 11.7, *б*). Параллели точек  $C$  и  $D$  называют основаниями тора, точки  $B$  — горлом, точки  $A$  — экватором.

Траекторию точки  $O$  называют внутренней осью симметрии. Тор задается параметрами  $R$  и  $r$  или  $R$  и  $\varnothing D$ . Меридиан тора — две окружности плоскости  $\sigma$  ( $\sigma_1$ ). В сечении  $\varphi$  ( $\varphi_2$ ) образуются параллели точки 1 и 2. Поэтому одной фронтальной проекции  $M_2$  точки  $M$  будут соответствовать четыре горизонтальные проекции фронтально конкурирующих точек.

Если  $r < R$ , образуется поверхность закрытого тора (рис. 11.8, *a*), который задается параметрами формы  $R$ ,  $H$  и  $\varnothing D$ . Поверхность, образованная внутренней стороной вращающейся дуги радиуса  $R$ , называется глобoidом (рис. 11.8, *б*). Его параметры формы показаны на чертеже.

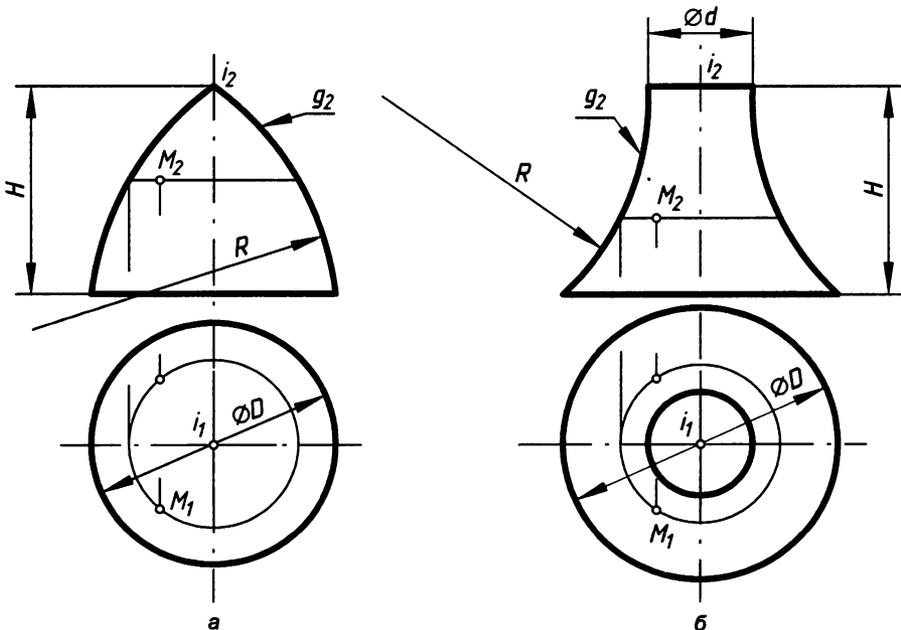


Рис. 11.8. Закрытый тор и глобoid

При вращении эллипса вокруг большой оси образуется поверхность вытянутого эллипсоида (рис. 11.9, *a*), а при вращении эллипса вокруг малой оси (рис. 11.9, *б*) образуется сжатый эллипсоид.

На рис. 11.8 и рис. 11.9 показано построение точки, принадлежащей поверхности.

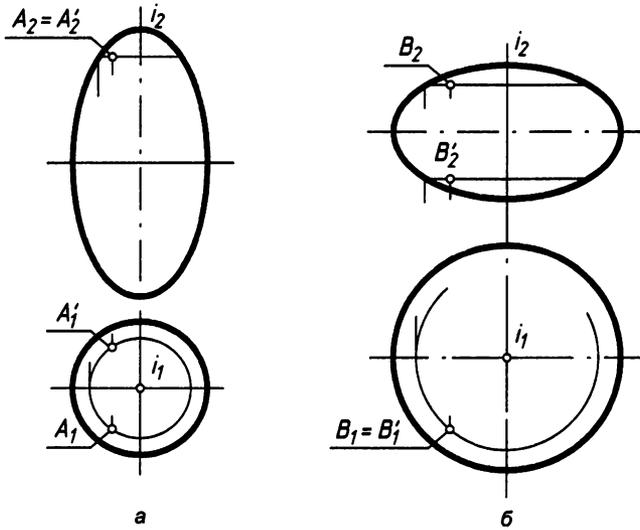


Рис. 11.9. Эллипсоид вращения

При вращении параболы  $g$  ( $g_2$ ) вокруг оси симметрии  $i$  ( $i_2, i_3$ ) образуется поверхность параболоида (рис. 11.10). Параболой называют кривую, каждая точка  $N$  которой расположена на одинаковых расстояниях  $R$  от заданной прямой  $d$  и точки  $F$ . Прямая  $d$  называется директрисой, точка  $F$  — фокусом, точка  $O$  — вершиной, отрезок  $p$  — параметром параболы.  $[KO] = [OF]$ . Построение параболы (см. точку  $N$ ) и точки  $M$  показано на чертеже.

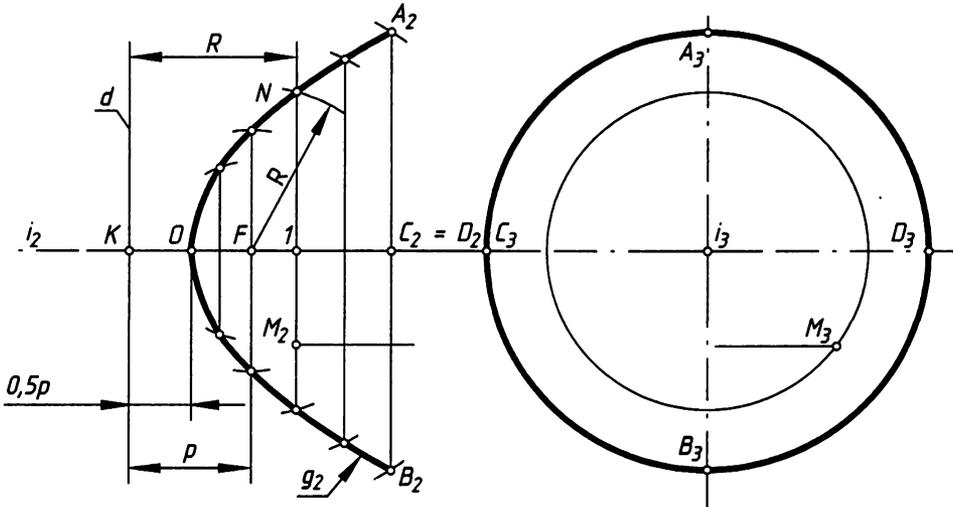


Рис. 11.10. Параболоид вращения

При вращении гиперболы  $g$  ( $g_2$ ) вокруг оси  $i$  ( $i_2$ ) образуется поверхность, называемая однополостным гиперболоидом (рис. 11.11, а), а при вращении вокруг оси  $q$  ( $q_2$ ) — двухполостным гиперболоидом (рис. 11.11, б).

Гиперболой называют кривую, у которой разность ( $R - R_1$ ) расстояний от любой ее точки  $N(N_2)$  до фокусов  $F_2, F'_2$  есть величина постоянная:  $R - R_1 = 2a$ .

Гипербола имеет симметричные ветви:  $g_2$  и  $g'_2$ . Точки  $A_2$  и  $A'_2$  называют вершинами гиперболы, прямую  $i(i_2)$  — мнимой осью, прямую  $q(q_2)$  — действительной осью. Прямые линии  $a(a_2)$  и  $b(b_2)$  называют асимптотами. Для построения точек гиперболы можно поступить так:

- на оси  $q_2$  от  $F_2$  отмечают ряд точек 1, 2, 3, ...,  $n$ ;
- измеряют отрезок  $R$  от вершины  $A'_2$  до выбранной точки (3) и из фокуса  $F_2$  строят дугу этого радиуса;
- измеряют отрезок  $R_1$  от вершины  $A_2$  до этой же точки (3) и из фокуса  $F'_2$  проводят дугу;

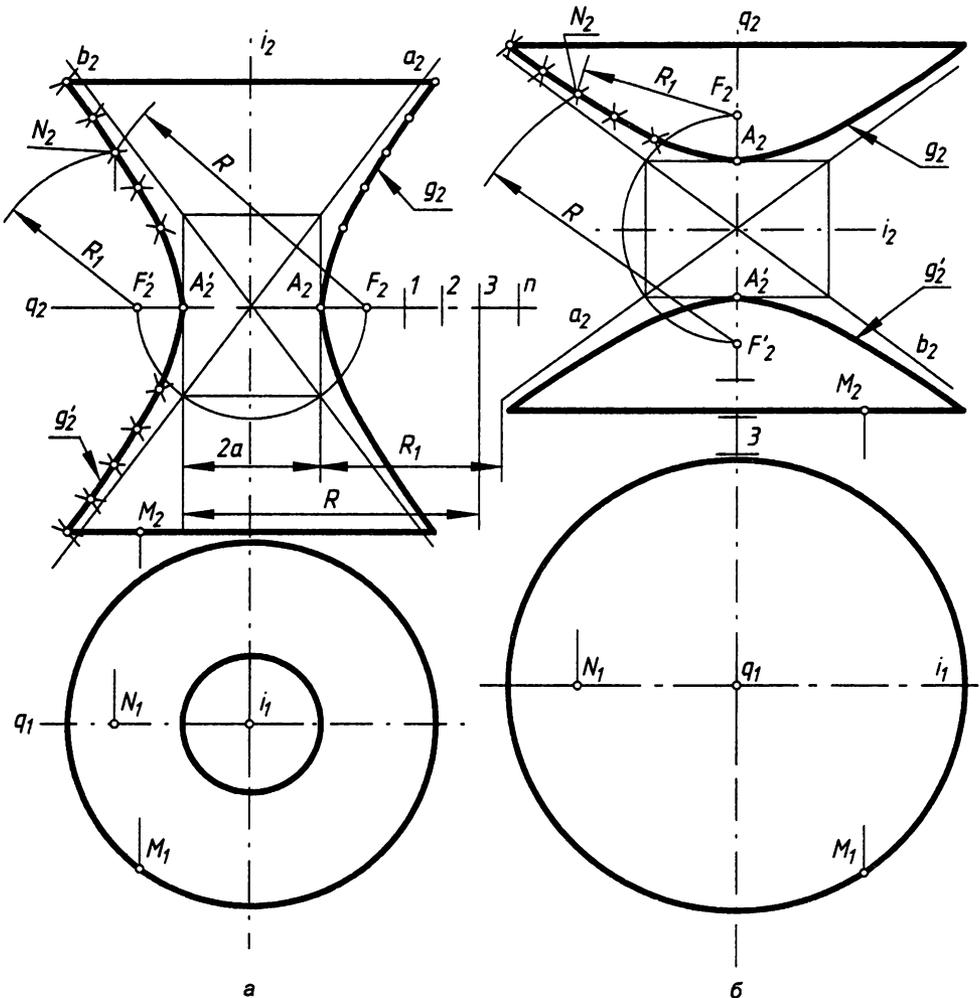


Рис. 11.11. Поверхности гиперboloида

□ в пересечении дуг отмечают точку  $N_2$  гиперболы. Другие точки находят аналогично или по закону симметрии.

На однополостном гиперболоиде можно построить семейства прямых линий (см. рис. 11.6).

## 11.4. Пересечение поверхности с линией, цилиндрической проецирующей поверхностью и плоскостью

Если задана некоторая линия  $l (l_1, l_2)$  (рис. 11.12, а), то через нее можно провести цилиндрическую поверхность  $\beta$  (рис. 11.12, б).

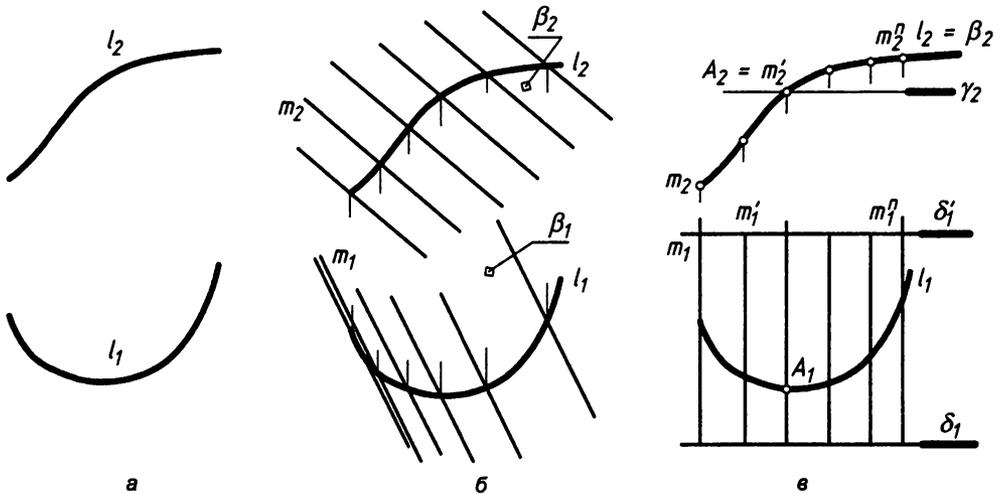


Рис. 11.12. Введение цилиндрической проецирующей поверхности

*Цилиндрической* называют поверхность, образованную движением прямолинейной образующей  $m$ , которая параллельна одному направлению, по направляющей  $l$  (см. подраздел 11.5.1). Если образующая линия  $m$  перпендикулярна плоскости проекций, то цилиндрическую поверхность называют проецирующей (на рис. 11.12, в поверхность  $\beta$  — фронтально проецирующая поверхность).

В примере на рис. 11.12, в фронтальная проекция  $\beta_2$  поверхности будет совпадать с проекцией  $l_2$ , а горизонтальной проекцией будет поле точек или семейство  $m_1, \dots, m_2$  проекций образующих. Образующая может быть любой длины, поверхность можно ограничить, например, плоскостями  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Следовательно, для введения такой поверхности при заданной линии  $l$  достаточно на чертеже ввести обозначение  $\beta_2 = l_2$ , если поверхность фронтально проецирующая, или  $\beta_1 = l_1$ , если поверхность горизонтально проецирующая. Пересечение фронтально (горизонтально) проецирующей цилиндрической поверхности с фронтально (горизонтально)

проецирующей плоскостью будет происходить по образующей, которая легко строится, например:

$$A_2 = l_2 \cap \gamma_2 \rightarrow A_1, m_2' = \beta_2 \cap \gamma_2 \rightarrow m_1'.$$

Если линия  $l$  будет прямой, то поверхность  $\beta$  будет проецирующей плоскостью. То есть введение цилиндрической проецирующей поверхности аналогично введению проецирующей плоскости.

Пусть задана поверхность  $\alpha$  ( $\alpha, \alpha_2$ ) закрытого тора и линия  $l$  ( $l_1, l_2$ ) (рис. 11.13). Требуется найти точки  $(M, N)$  пересечения линии с поверхностью:

$$(M, N) ? = l \cap \alpha.$$

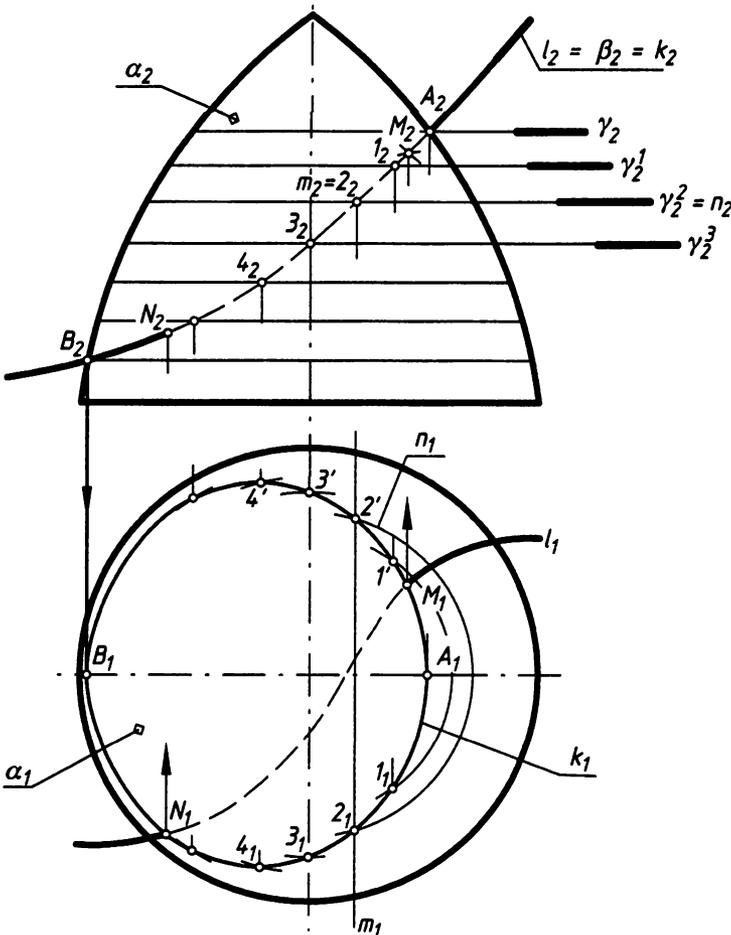


Рис. 11.13. Пересечение поверхности с линией

Примем линию  $l$  за направляющую и введем фронтально проецирующую цилиндрическую поверхность-посредник  $\beta$ . Эта операция на рис. 11.13 свелась к обозна-

чению:  $l_2 = \beta_2$ . Теперь необходимо построить линию  $k$  пересечения поверхностей  $\beta$  и  $\alpha$ :  $k = \beta \cap \alpha$ .

Для этого используются плоскости-посредники, которые пересекают поверхности  $\beta$  и  $\alpha$  по простым линиям. Порядок решения задачи запишем следующим образом.

1. Отметим точки  $A (A_2 \rightarrow A_1)$  и  $B (B_2 \rightarrow B_1)$  пересечения главного меридиана поверхности  $\alpha$  с посредником  $\beta$ . Эти точки называют опорными, они являются верхней и нижней границей линии пересечения посредника с поверхностью.
2. Вводим плоскости-посредники  $\gamma (\gamma^1, \gamma^2, \dots, \gamma^n)$  так, чтобы поверхность  $\alpha$  пересекалась по параллелям, а  $\beta$  — по прямым линиям. Например, плоскость  $\gamma^2 (\gamma_2^2)$  пересекает поверхности по линиям:
  - $\gamma_2^2 \cap \alpha_2 = n_2 \rightarrow n_1$  — проекции параллели  $n$ ;
  - $\gamma_2^2 \cap \beta_2 = m_2 \rightarrow m_1$  — проекции образующей  $m$  цилиндра.

На рис. 11.13 горизонтальные проекции параллелей  $n$  построены только в зонах пересечения с образующей  $m$ .

3. Отмечаем точки  $(1, 2, 3, \dots, n)$  пересечения линий  $m$  и  $n$ . В нашем примере  $n_1 \cap m_1 = (2_p, 2'_1) \rightarrow (2_2 = 2'_2)$  — фронтально конкурирующие точки (на рис. 11.13 точка  $2'_1$  и другие невидимые на фронтальной проекции точки не обозначены, чтобы не перегружать чертеж).

4. Так строится достаточное для построения линии  $k$ , количество точек, а  $k_2 = \beta_2$ . Построенная линия  $k (k_1, k_2) = \alpha \cap \beta$  является линией пересечения поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ , а если  $l$  — прямая и  $\beta$  — плоскость, то  $k$  называется линией сечения. Если одна проекция ( $k_2$ ) линии сечения известна, то другую проекцию строят по принадлежности, что мы, по сути своей, и сделали. Мы рассмотрели общий подход к решению задачи.

Линии  $l$  и  $k$  лежат на поверхности  $\beta$ , следовательно, точки  $(M_p, N_1) = l_1 \cap k_1$  пересечения их проекций определяют точки  $(M, N)$  пересечения линии  $l$  с поверхностью  $\alpha$ , то есть:

$$l_1 \cap k_1 = (M_p, N_1) \rightarrow (M, N).$$

Участок  $(M, N_1)$  линии  $l_1$  проходит внутри поверхности и является невидимым, а на фронтальной проекции не видна точка  $M_2$ , так как точка  $M$  лежит за плоскостью главного меридиана.

Запишем в кратком выражении общий алгоритм решения подобной задачи.

#### Алгоритм 11.1

**Дано:**  $\alpha$  — поверхность,  $l$  — линия.

**Найти:**  $(M, N, \dots) ? = l \cap \alpha$ .

**Решение:**

1.  $l \subset \beta$  — через линию  $l$  проводится проецирующая поверхность  $\beta$ .
2.  $k = \beta \cap \alpha$  — строится линия пересечения поверхностей  $\beta$  и  $\alpha$ , для чего:
  - 1)  $\gamma$  — вводится проецирующая плоскость, пересекающая поверхности по простым линиям;
  - 2)  $n = \gamma \cap \alpha$  — строится простое сечение (параллель) поверхности  $\alpha$ ;

- 3)  $m = \gamma \cap \beta$  — строится простое сечение (прямая) поверхности  $\beta$ ;
  - 4)  $(l, l') = n \cap m$  — отмечаются точки пересечения линий  $n$  и  $m$ ;
  - 5) действия 1–4 повторяются до момента достижения необходимого для построения линии  $k$  количества точек;
  - 6) построенные точки обводятся плавной кривой  $k$ .
3.  $(M, N, \dots) = k \cap l$  — отмечаются проекции точек пересечения линий  $k$  и  $l$ . Это и будут искомые точки.

Данный алгоритм показан на примере поверхности вращения. Однако он является общим для любых поверхностей. Пункт 2 алгоритма 11.1 имеет самостоятельное значение при решении задач сечения поверхностей или пересечения с проецирующей поверхностью. По содержанию этот этап имеет большое сходство с алгоритмом 7.2, рассмотренным в подразделе 7.6.2.

Рассмотрим задачу пересечения прямой  $l (l_1, l_2)$  с поверхностью  $\alpha (\alpha_1, \alpha_2)$  (рис. 11.14).

Проведем через прямую  $l$  горизонтально проецирующую плоскость  $\beta (\beta_1)$ , обозначив  $l_1 = \beta_1$ , на рис. 11.14, *а*. Выделим на поверхности опорные точки:

- $A, D$  — точки пересечения параллели основания с плоскостью  $\beta$ ;
- $B_1 = (S_1, B_1) \cap \beta_1, (S_1, B_1) \perp \beta_1$  — точка касания параллели конуса с плоскостью  $\beta$ , которая является вершиной линии сечения;
- $C$  — граница видимости линии сечения лежит на главном меридиане конуса.

Наметим ряд случайных параллелей, полученных сечением конуса плоскостью типа  $\gamma (\gamma_2)$ ; отметим проекции точек их пересечения с плоскостью  $\beta$  и соединим плавной кривой  $k_2$ . Выделяем проекции  $(M_2, N_2) = k_2 \cap l_2 \rightarrow (M_1, N_1) \in l_1$ . Точки  $M (M_1, M_2)$  и  $N (N_1, N_2)$  являются точками пересечения прямой  $l$  с поверхностью  $\alpha$ .

Но проецирующий посредник не всегда обеспечивает кратчайшее решение задачи. На рис. 11.14, *б* эта же задача решена с помощью плоскости  $\beta (\beta_1, \beta_2)$  общего положения, проходящей через вершину  $S$  конуса. Чтобы задать такую плоскость, проведем через  $S_2$  произвольную прямую  $(S_2, A_2)$ , построим горизонтальную проекцию  $A_1$  точки ее пересечения заданной прямой  $l$  и проведем  $(S, A_1)$ . Найдем горизонтальные следы линий  $(SA)$  и  $l$ , совместив горизонтальную плоскость проекций с основанием конуса:

$C_2 = l_2 \cap x \rightarrow C_1$  — горизонтальный след прямой  $l$ ;  $B_2 = (S_2, A_2) \cap x \rightarrow B_1$  — горизонтальный след прямой  $(SA)$ .  $(CB) = \beta \cap \Pi_1$  — горизонтальный след плоскости  $\beta$ . Фигура  $1_1 - S_1 - 2_1$  является горизонтальной проекцией сечения конуса плоскостью  $\beta$ , а  $N_1 = (S_1 - 1_1) \cap l_1$  и  $M_1 = (S_1 - 2_1) \cap l_1$  — горизонтальные проекции точек  $(M, N) = l \cap \alpha$ . Их фронтальные проекции  $M_2, N_2$  отмечаем по линии связи.

На рис. 11.14, *в* точки пересечения построены способом дополнительного центрального проецирования, а на рис. 11.14, *г* способом параллельного проецирования объекта на горизонтальную плоскость, совпадающую с основанием поверхности. В первом случае центр проецирования совпадает с вершиной конуса, а во втором случае направление проецирования параллельно образующим цилиндра. В пересечении новых проекций поверхностей и линии  $\bar{A}_1\bar{B}_1$  отмечаем точки  $\bar{M}_1, \bar{N}_1$  и обратным проецированием находим проекции  $M_1, N_1$ , а по линиям связи отмечаем проекции  $M_2, N_2$ . Все построения показаны и понятны из чертежа.

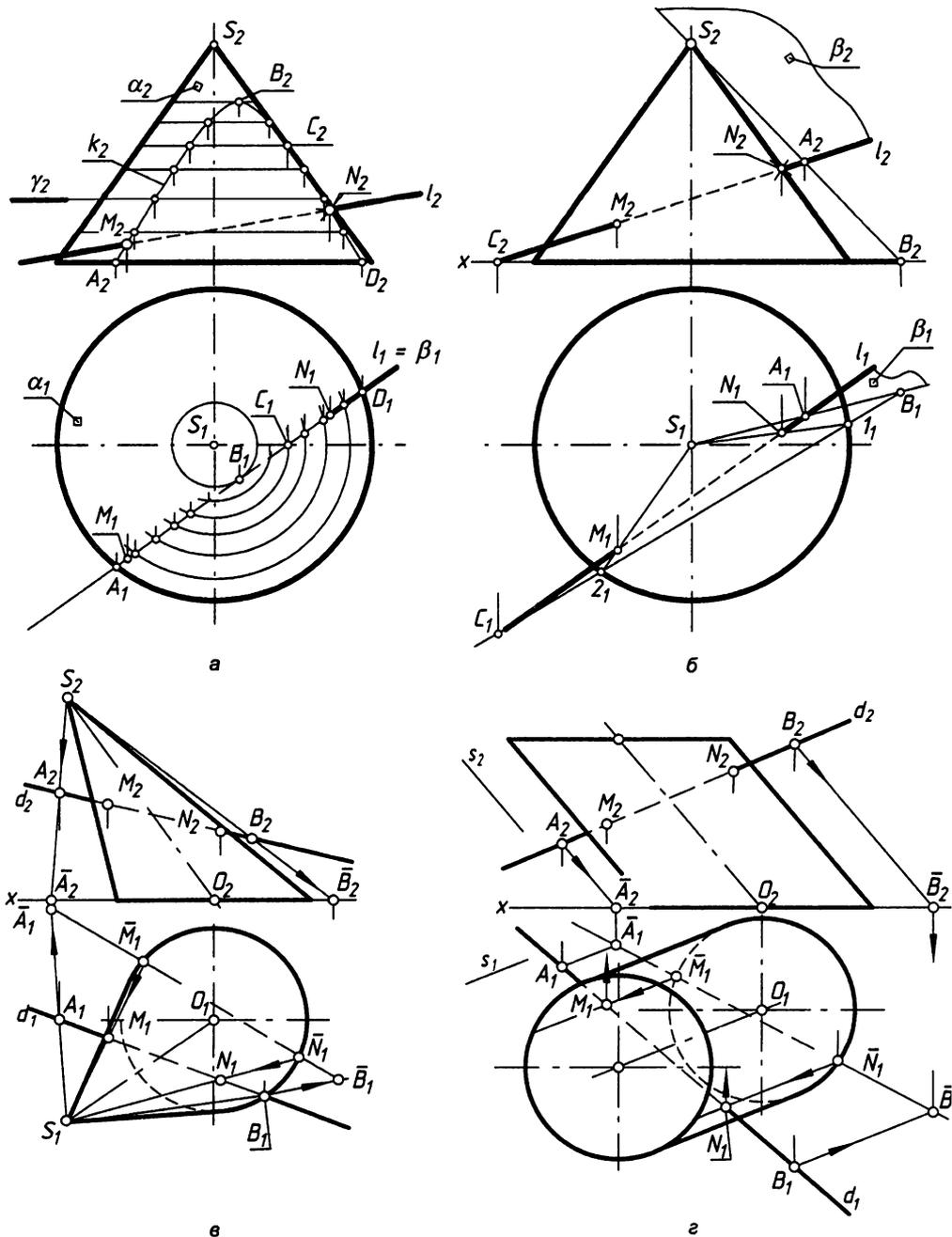


Рис. 11.14. Пересечение поверхности прямой линией

Приведенные примеры показывают, что в конкретной задаче следует проанализировать возможные варианты решения и выбрать наиболее простой.

### 11.4.1. Построение сечений поверхностей

Фигуру, полученную при сечении поверхности плоскостью, называют *фигурой сечения* (сечением, срезом), а ее границу называют *линией сечения* (линией среза). Если сечение является воображаемой операцией, которая производится с целью демонстрации формы изделия, то материальную часть фигуры сечения принято заштриховывать, а изображение определенным образом оформляют. Эти правила рассматриваются в курсе инженерной графики (черчения).

А если сечение (срез) является функциональной частью (частью формы) изделия или рассматривается только линия пересечения поверхности с плоскостью, то фигуру сечения не штрихуют. Рассмотрим использование сечений в образовании определенных форм изделий на примере часто применяемых поверхностей вращения, но запомним, что эти же понятия и приемы используются и при работе с другими поверхностями.

Границами сечения цилиндра плоскостью типа  $\gamma$  (рис. 11.15), параллельной оси вращения, являются образующие, проходящие через точки  $(1-2)$ ,  $(1'-2')$ . На фронтальной проекции конкурирующие точки  $1'_2$  и  $2'_2$  не обозначены, чтобы не загромождать изображения. Этот прием используется и в других примерах.

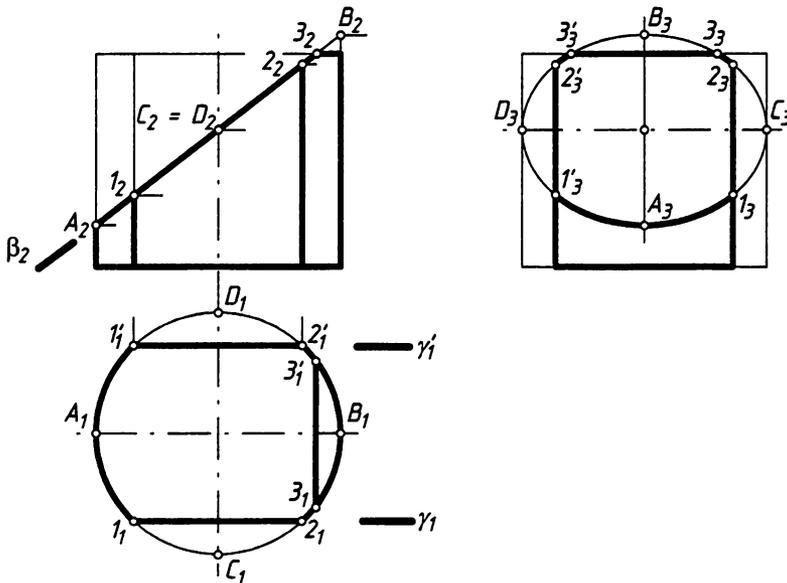


Рис. 11.15. Построение линий среза цилиндра

Сечением цилиндра плоскостью  $\beta$ , образующей острый угол с осью вращения, является эллипс с сопряженными диаметрами  $[AB]$  и  $[CD]$ . На рис. 11.15 его фронтальная проекция изображается прямой  $[A_2B_2]$ , горизонтальная проекция — окружностью, а профильная — эллипсом. Плоскость  $\beta$  пересекается с верхним основанием цилиндра по прямой линии  $3-3'$ . Толстой линией обведены изображения изделия, полученного из цилиндрической заготовки, срезанной плоскостями.

Сечение сферы плоскостью всегда ограничено окружностью (рис. 11.16), центром которой является основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы на секущую плоскость.

Фронтальная проекция среза сферы плоскостью  $\beta (\beta_2) \perp \Pi_2$  изобразится отрезком  $[A_2 B_2]$  — хордой главного меридиана, а горизонтальная и профильная проекция — эллипсом с сопряженными диаметрами  $[AB]$  и  $[CD]$ . Центр эллипса — точка пересечения нормали  $n$  с плоскостью  $\beta$ ;  $[C, D_1] = [C_3, D_3] = [A_2, B_2]$ . При построении проекций вначале находят опорные точки линии среза:

- $A, B, C, D$  — концы сопряженных диаметров;
- $1-1'$  — точки пересечения профильного меридиана сферы с плоскостью  $\beta$ ; для этого через точку  $1_2$  проводят параллель, строят ее горизонтальную проекцию, отмечают  $1_1$  и  $1'_1$ , а по горизонтальной линии связи отмечают  $1_3$  и  $1'_3$  из условия  $[1_3-1'_3] = [1_1-1'_1]$ ;
- $2-2'$  — точки на экваторе сферы,  $[2_3-2'_3] = [2_1-2'_1]$ .

Если нужно, строят случайные точки с помощью параллелей  $\delta (\delta_2)$  или большой  $[CD]$  и малой  $[AB]$  оси эллипса.

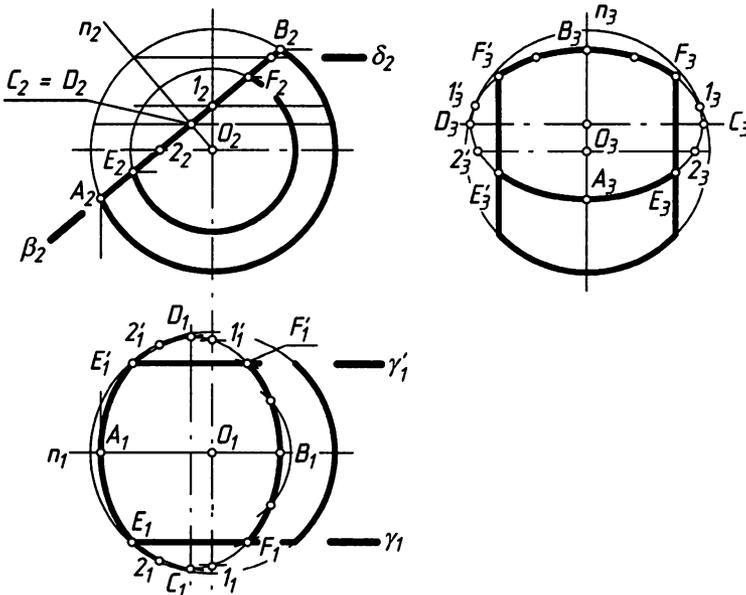


Рис. 11.16. Построение линий среза сферы

В примере на рис. 11.16 сфера срезана симметричными фронтальными плоскостями уровня  $\gamma$  и  $\gamma'$ . Точки  $E, E'$  и  $F, F'$  получены пересечением этих линий среза с плоскостью  $\beta$  и тоже принадлежат эллипсу  $(ABCD)$ .

Рассмотрим возможные варианты линий, которые образуются при пересечении конуса с плоскостью. Плоскость  $\beta (\beta_2)$ , проходящая через вершину конуса, пересекает его по образующим  $S-1$  и  $S-1'$ , а плоскость  $\gamma (\gamma_2)$ , перпендикулярная оси, — по параллели (рис. 11.17).

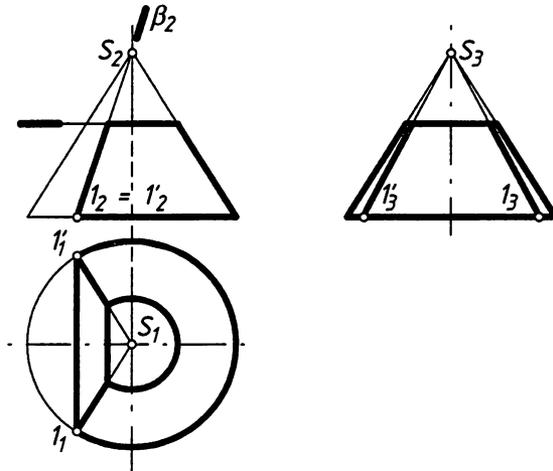


Рис. 11.17. Сечение конуса по образующим и параллелям

Фигурой сечения конуса плоскостью  $\beta$  ( $\beta_2$ ), пересекающей все его образующие, будет эллипс (рис. 11.18).

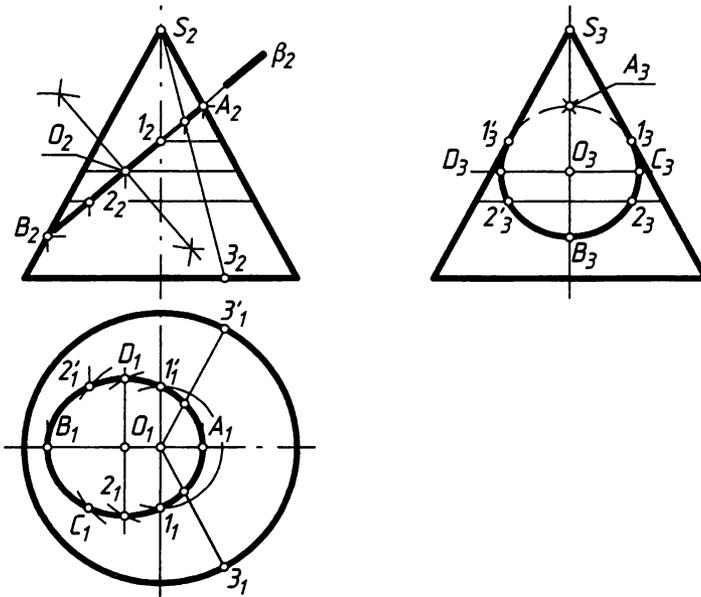


Рис. 11.18. Сечение конуса по эллипсу

Центр эллипса находится в точке  $O$ , которая делит отрезок  $AB$  пополам. Построение проекций эллипса понятно из чертежа.

Плоскость  $\beta$  ( $\beta_2$ ), параллельная одной образующей конуса, пересекает его по параболе (рис. 11.19).

Здесь рассматривается линия сечения, лежащая на поверхности конуса. Особыми (опорными) точками линии сечения являются точки (рис. 11.19, а):

- 1 ( $1_2 \rightarrow 1_1$ ) – вершина параболы;
- 2 ( $2_2 \rightarrow 2_1, 2'_1$ ) – на профильном меридиане;
- 3 ( $3_2 \rightarrow 3_1, 3'_1$ ) – на основании.

Случайные точки определяют с помощью параллелей или меридианов (образующих).

Для определения натуральной величины фигуры сечения используют преобразование, например, способом замены плоскостей проекций (см. главу 8.). Для этого удобно ось  $x$  старой системы выбрать совпадающей с осью симметрии горизонтальной проекции сечения, а в новой системе  $x_1 \parallel \beta_2$ . В этом случае след секущей плоскости  $A-A$  изображается разомкнутой линией (см. раздел 2.1) со стрелками, которые ставятся на расстоянии 2–3 мм от внешних концов этой линии, и указывается направление взгляда, а обозначается плоскость буквами кириллицы (русского алфавита) в алфавитном порядке без обозначения  $\beta_2$ . Буквы пишут на горизонтальной строке с внешних сторон стрелок (по отношению к изображению) (рис. 11.19, а). Новая горизонтальная проекция на  $\Pi_5$  сечения не обозначается, если она построена в проекционной связи. Строят новые проекции  $1_5, 2_5-2'_5, 3_5-3'_5$  опорных точек по линиям связи  $1_2 \rightarrow 1_5, 2_2 \rightarrow 2_5, 3_2 \rightarrow 3_5$ , на которых симметрично оси  $x_1$ , откладывают отрезки  $[2_5-2'_5] = [2_1-2'_1], [3_5-3'_5] = [3_1-3'_1]$ , а затем с помощью параллелей строят проекции случайных точек и соединяют их кривой линией.

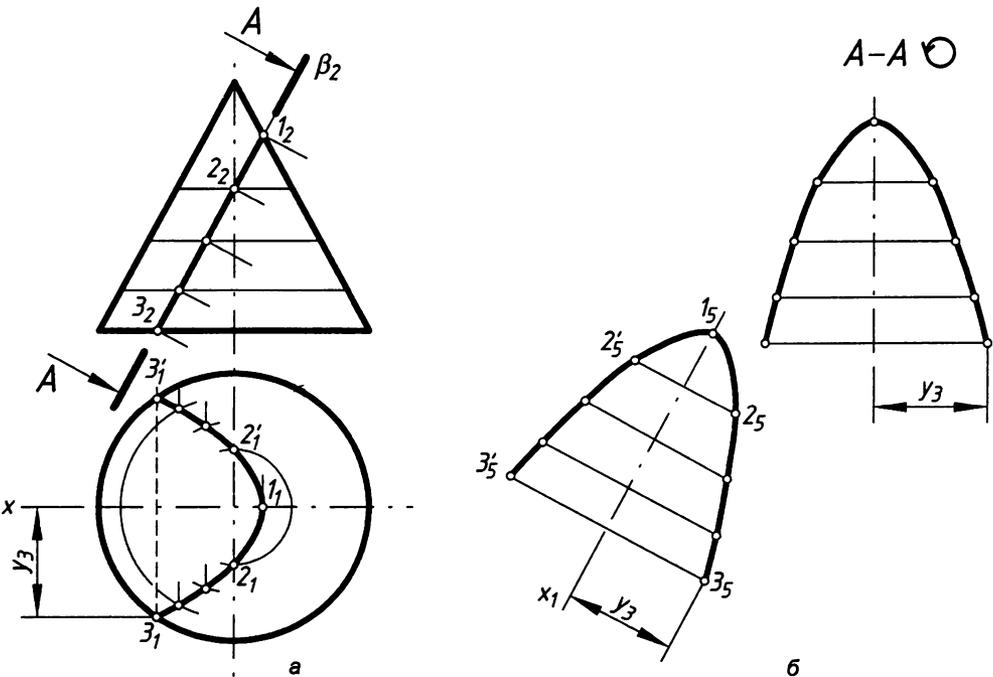


Рис. 11.19. Сечение конуса по параболе

Изображение сечения может быть повернуто до положения, соответствующего главному виду (рис. 11.19, б). В этом случае на оси симметрии сечения откладывают отрезок, равный  $[1_2-3_2]$ , а затем отрезки между параллелями, измеренные по линии  $[1_2-3_2]$ , далее проводят в точках деления горизонтальные линии и на них откладывают соответствующие координаты  $y$ , например  $y_3$  (как в предыдущем случае). В этом случае над изображением пишут наименование секущей плоскости ( $A-A$ ) и знак «повернуто». Знак в виде окружности со стрелкой выполняют тонкой линией по размеру шрифта. Наименования точек на сечении обычно не указывают, так как их соответствие основным изображениям считается вполне понятным.

Если секущая плоскость  $\beta$  ( $\beta_2$ ) параллельна каким-либо двум образующим ( $S-5$ ), ( $S-5'$ ) конуса, то линией его сечения будет гипербола (рис. 11.20).

Здесь особыми являются точки:

- $1(1_2 \rightarrow 1_1 \rightarrow 1_3)$  – вершина гиперболы;
- $3(3_2 \rightarrow 3_3 \rightarrow 3_1)$  – точки профильного меридиана;
- $4(4_2 \rightarrow 4_1 \rightarrow 4_3)$  – точки параллели основания.

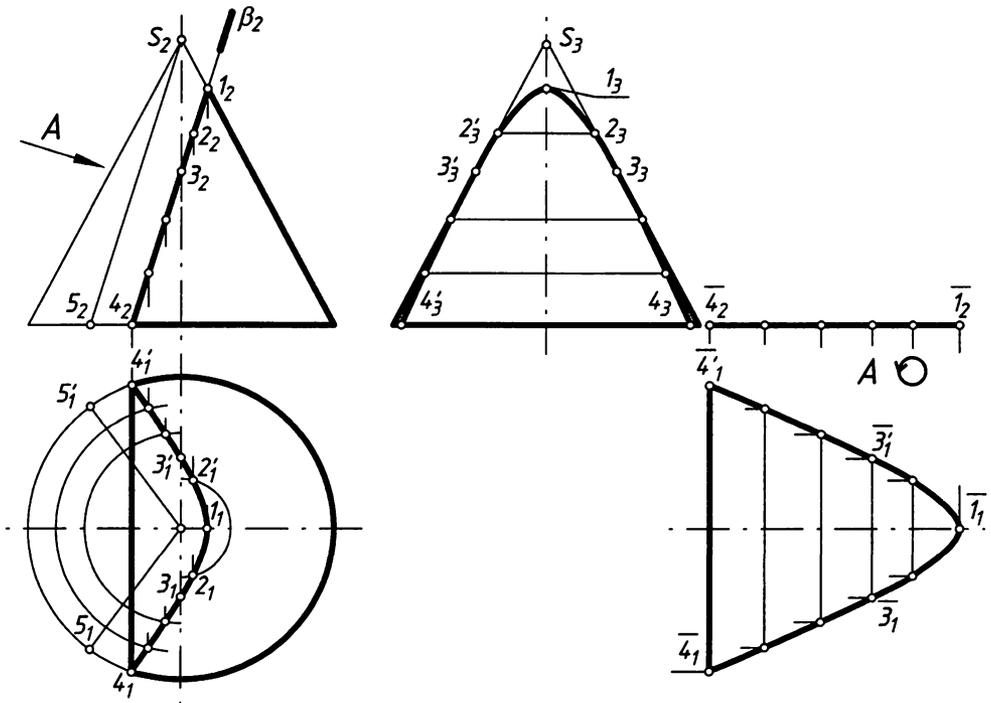


Рис. 11.20. Сечение конуса по гиперболе

В примере на рис. 11.20 рассматривается случай, когда часть конуса удалена, и плоскость среза является составной частью поверхности детали. Для построения натуральной величины фигуры среза воспользовались преобразованием чертежа

способом плоскопараллельного перемещения (см. главу 8), переместив фигуру среза относительно фронтальной плоскости проекций до положения  $[\bar{4}_2 - \bar{1}_2]$ .

При этом горизонтальные проекции точек  $(1, \dots, 4_1)$  переместятся параллельно оси  $x$  проекций до положения  $(\bar{1}_1 \dots \bar{4}_1)$ .

В инженерной практике проекцию  $[\bar{1}_2 - \bar{4}_2]$  совмещают с осью симметрии фигуры среза (то есть совмещают точки  $\bar{1}_1 = \bar{1}_2$ ) и от нее откладывают координаты  $y$  линии среза, а ее точки не обозначают и плоскость  $\beta$  не показывают.

Такое изображение фигуры среза оформляется как дополнительный, или местный, вид:

- у основного изображения ставится стрелка, изображающая направление взгляда, которая обозначается русской буквой;
- над изображением среза пишется та же буква со знаком «повернуто», если нарушена проекционная связь с тем изображением, на котором указано направление взгляда.

Подобное изображение называют местным видом, если оно ортогонально спроецировано на плоскость, параллельную одной из основных плоскостей проекций. В противном случае его называют дополнительным видом (как на рис. 11.20).

Точно так же это изображение можно построить с вертикальной осью симметрии, как на рис. 11.19, б. Если внимательно сравнить способы построения фигуры сечения по рис. 11.19 и по рис. 11.20, то легко заметить, что они отличаются только рассуждениями, теоретическим подходом, а реализуются одинаковыми действиями.

## 11.4.2. Сечение поверхности плоскостью общего положения

При построении линии или фигуры сечения необходимо знать свойства и каркас данной поверхности. Общее решение проводится по пункту 2 алгоритма 11.1 (см. раздел 11.4). Начинать решение следует с поиска опорных точек: точки пересечения очерка, границы видимости, точки с наименьшими и наибольшими координатами, точки возможного самопересечения кривой и т. п.

Рассмотрим общее решение задачи на примере сечения конуса (рис. 11.21) плоскостью  $\beta (a \cap b)$ .

Плоскость  $\gamma (\gamma_1)$  главного меридиана пересекается с плоскостью  $\beta$  по фронтале  $f (f_1, f_2)$ , которая пересекает фронтальный очерк в точках  $F_2 \rightarrow F_p, E_2 \rightarrow E_p$ , являющихся границами видимости фронтальной проекции сечения. Через точку  $S_2$  пересечения  $f_2$  с осью вращения проведем горизонтальную плоскость  $\varphi (\varphi_2)$  уровня. Она пересечется с плоскостью  $\beta$  по горизонтали  $h_2 \rightarrow h_p$ , а с конусом по параллели, пересечение которых определит случайные точки (на рис. 11.21 они показаны, но не обозначены). Проведем посредник  $\sigma (\sigma_1) \perp h (h_1)$ , который пересечется с заданной плоскостью по линии  $(4-5) (4_1-5_1 \rightarrow 4_2-5_2)$  ее наибольшего наклона к горизонтальной плоскости проекций, а с конусом по образующим  $(S-6) (S_1-6_1 \rightarrow S_2-6_2)$  и  $(S-7) (S_1-7_1 \rightarrow S_2-7_2)$ . Пересечение этих линий определяет самую высокую  $A (A_2 \rightarrow A_1)$  и самую низкую точку  $B (B_2 \rightarrow B_1)$  фигуры сечения. Эти точки показывают, что

кривая будет замкнутой, следовательно, линией сечения будет эллипс (см. подраздел 11.4.1 и рис. 11.18).

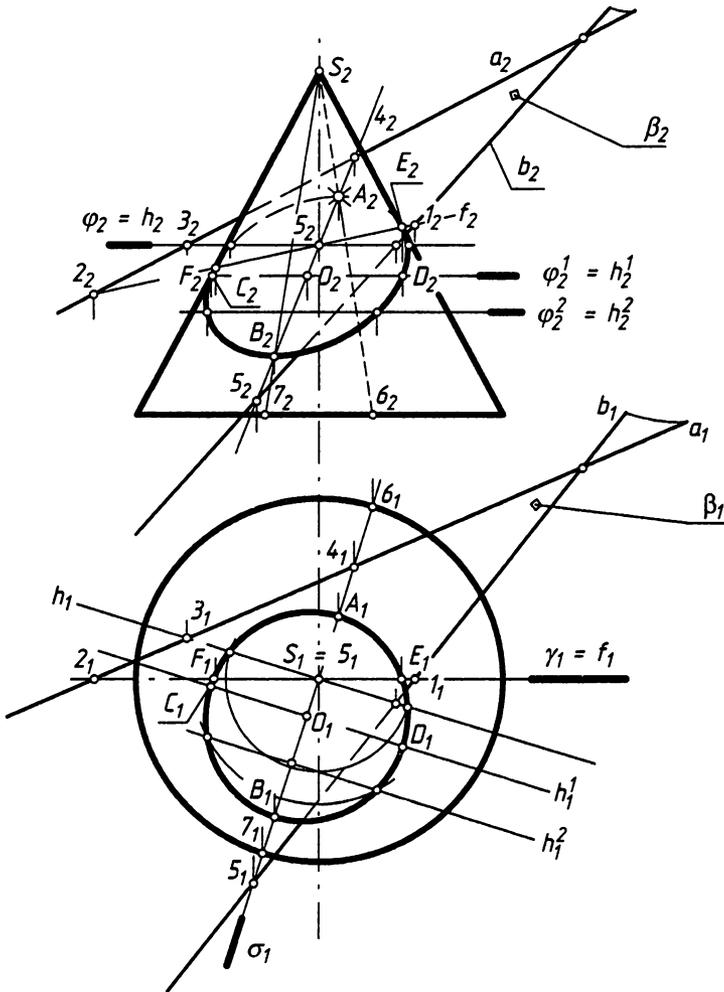


Рис. 11.21. Пересечение конуса с плоскостью общего положения

Разделив отрезок  $[A_2B_2]$  пополам, получим точку  $D$  ( $D_2 \rightarrow D_1$ ) — центр эллипса, а с помощью плоскости  $\varphi^1$  ( $\varphi_2^1$ ) горизонтального уровня построим параллель, горизонталь  $h^1$  ( $h_2^1 \rightarrow h_1^1$ ) и точки  $C$  ( $C_1 \rightarrow C_2$ ),  $D$  ( $D_1 \rightarrow D_2$ ) второго сопряженного диаметра эллипса. С помощью посредника  $\varphi^2$  ( $\varphi_2^2$ ) к найденным точкам добавим случайные точки и все соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

Эту задачу можно привести к виду, показанному на рис. 11.18, если одним из способов преобразования чертежа сделать плоскость  $\beta$  проецирующей, сохранив вертикальное положение оси конуса. Из сравнения примеров легко заметить, что при частном положении секущей плоскости решение подобной задачи значительно упрощается.

## 11.5. Линейчатые поверхности

Поверхности, образованные движением прямолинейной образующей, называются *линейчатыми*.

Доказано, что для определенности движения прямолинейной образующей необходимо задать три параметра, например, три направляющие  $b, c, d$  (см. ниже подраздел 11.5.3). Тогда определитель линейчатой поверхности можно записать так:  $\alpha(b, c, d)$ . В зависимости от частных условий, задающих движение образующей, класс линейчатых поверхностей делят на группы, а внутри каждой группы поверхности делят на виды в зависимости от внутренней характеристики условий движения (от формы и относительного положения направляющих).

### 11.5.1. Линейчатые поверхности с одной направляющей линией и дополнительным условием движения

Выберем направляющие определителя поверхности  $\alpha(b, c, d)$  так, чтобы две направляющие пересеклись в точке  $S = b \cap c$ , а направляющей  $d$  была пространственная кривая линия (рис. 11.22, а). Тогда через точку  $S$  и любую точку направляющей  $d$  можно провести только одну образующую. Определитель поверхности запишется так:  $\alpha(d, S)$ , где:  $d, S$  — направляющие. То есть здесь дополнительным условием движения образующей является условие, что она во всех положениях проходит через одну точку.

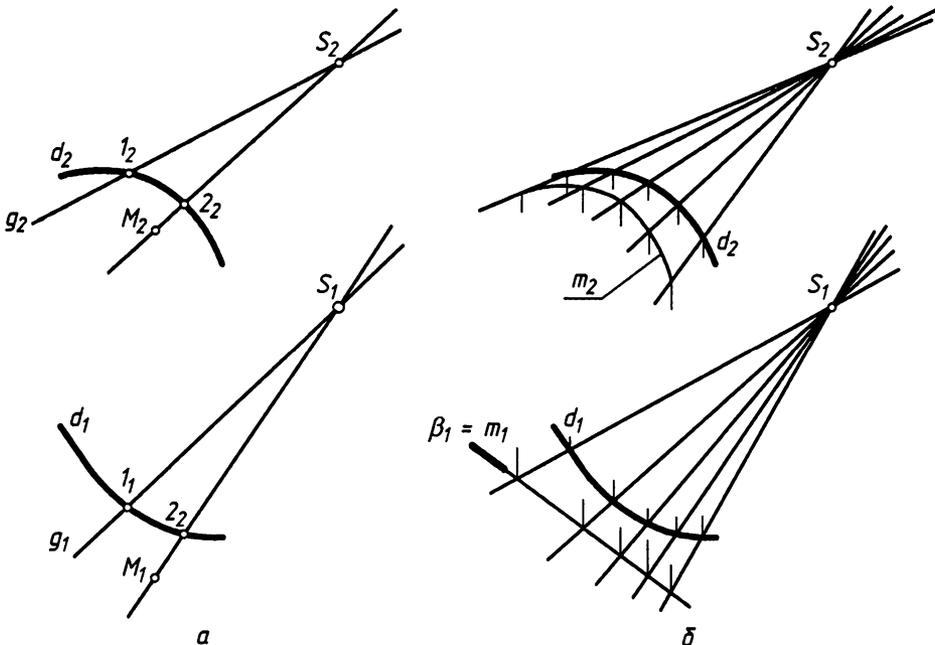


Рис. 11.22. Образование конической поверхности

Если образующая  $g$  ( $g, g_2$ ) перемещается по направляющей  $d$  ( $d, d_2$ ) и при этом все время проходит через фиксированную точку  $S$  ( $S, S_2$ ), то образуется *поверхность*, которая называется *конической* (конусом). Точка  $S$  называется вершиной конуса. Любую точку  $M$  ( $M, M_2$ ) поверхности строят с помощью образующей  $S-2$ . При продолжении образующей получается вторая коническая поверхность с той же вершиной (рис. 11.22, б). Поверхность можно ограничить, например, сечением  $\beta$  ( $\beta, \beta_1$ ), тогда линия  $m$  ( $m, m_2$ ) будет основанием конуса, а  $d$  — линия на поверхности. Так можно построить любую линию или сечение поверхности.

Если вершину  $S$  сделать несобственной, то образуется цилиндрическая поверхность (рис. 11.23).

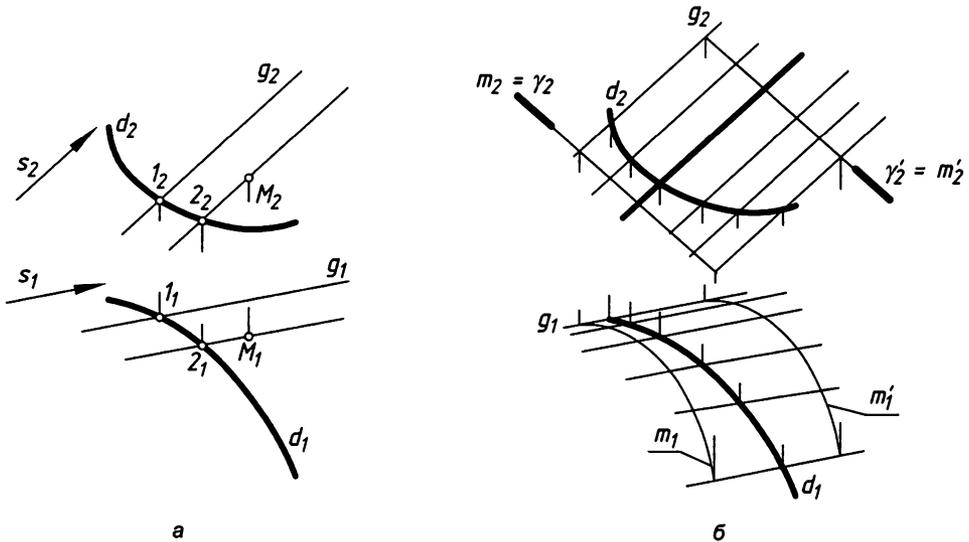


Рис. 11.23. Образование цилиндрической поверхности

Она задается направляющей линией  $d$  и условием движения образующей  $g$  (рис. 11.23, а), которая всегда должна быть параллельной заданному направлению  $s$ . Если направляющей  $d$  служит плоская кривая линия, то направление  $s$  должно быть не параллельным этой плоскости. Если задана точка  $M$  ( $M_2$ ) на поверхности, то через нее проводят образующую и по линии связи находят  $M_p$ , и наоборот, если задана проекция  $M_p$ . Определитель цилиндра:  $\alpha(d, s)$ .

Длину образующих можно ограничить, например, сечениями  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) и  $\gamma'$  ( $\gamma_2'$ ), тогда линии  $m$  и  $m'$  будут основаниями цилиндра (рис. 11.23, б). Эти же линии могут служить направляющими, тогда линия  $d$  будет просто кривой, лежащей на поверхности. Так, используя каркас, можно построить любую линию на цилиндре.

Поверхность, образованная движением образующей  $g$ , которая касается пространственной направляющей линии  $d$ , называется *поверхностью с ребром возврата* или *торсом* (рис. 11.24, а).

Направляющая  $d$  называется ребром возврата. Здесь образование поверхности толкуется так, что направляющими служат две конгруэнтные кривые ( $b \cong c$ ), которые имеют однозначно соответственные точки  $A_b$  и  $A_c$ , расположены бесконечно

близко и в пределе совпадают. То есть здесь тоже используется три параметра: две линии и соответственные точки. Определитель поверхности запишется так:  $\alpha(d)$  [Касание]. В нашем примере показано пересечение прямой линии  $l$  с поверхностью тора в двух точках:  $M$  и  $M'$ . При этом точку  $M$  мы видим на одной стороне, а точку  $M'$  на другой стороне полости тора. Линии  $m$  и  $n$  — просто линии на поверхности, ограничивающие длину образующих.

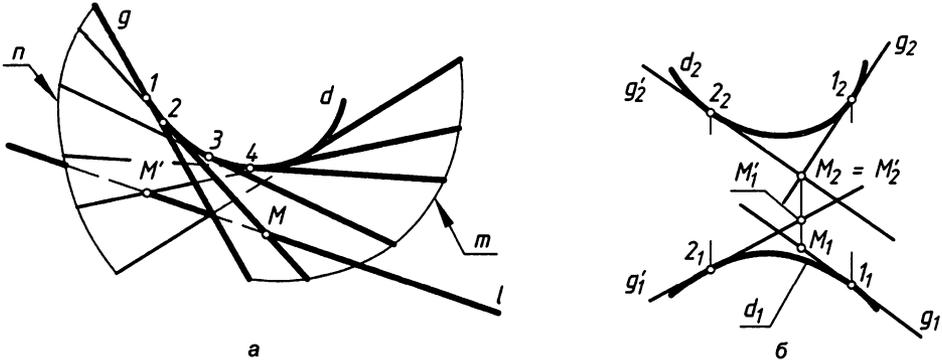


Рис. 11.24. Образование тора

На эюре поверхность можно задать направляющей  $d$  ( $d, d_2$ ) (рис. 11.24, б). Если на этой поверхности задана точка  $M$  своей фронтальной  $M_2$  проекцией, то для построения ее горизонтальной проекции проводят образующие  $g_2$  и  $g'_2$  касательно к  $d_2$  и строят точки касания  $1_2 \rightarrow 1_1, 2_2 \rightarrow 2_1$ . В этих точках строят горизонтальные проекции  $g_p, g'_p$  касательных к  $d_p$ . По линии связи мы видим, что точке  $M_2$  соответствуют проекции фронтально конкурирующих точек  $M_1$  и  $M'_1, M_2 = M'_2$ .

Поверхности с ребром возврата относят к числу развертывающихся, что следует из принципа образования поверхности. В упрощенном варианте это объясняется так. Касательная  $g$  (рис. 11.24, а) — это предельное положение секущей 1–2, когда точки 1 и 2 кривой  $d$  сближаются до бесконечно малой величины. Следующая секущая будет проходить через точки 2–3. Следовательно, в точке 2 секущие пересекаются, а пересекающиеся прямые образуют плоскость. В точке 3 вторая секущая пересекается с секущей 3–4, и т. д. И так поверхность как бы складывается из отсеков плоскостей. А плоскости совмещаются с плоскостью.

## 11.5.2. Линейчатые поверхности с двумя направляющими линиями и направляющей поверхностью

Допустим, что определитель линейчатой поверхности  $\alpha$  задан двумя направляющими  $d, b$  (рис. 11.25, а).

В этом случае через произвольную точку  $A$  направляющей  $d$  можно провести множество образующих  $g$ , пересекающих направляющую  $b$ . Чтобы движение образующей стало определенным, нужно дополнительное условие. Возьмем в качестве направляющей несобственную линию  $c_\infty$  плоскости  $\sigma$  (рис. 11.25, б). Тогда образующая  $g$  при своем движении всегда будет параллельна этой плоскости (как на

рис. 11.25, б). Определитель поверхности запишется так:  $\alpha(b, d, \sigma)$ . При этом плоскость  $\sigma$  называется *плоскостью параллелизма* или *направляющей плоскостью*.

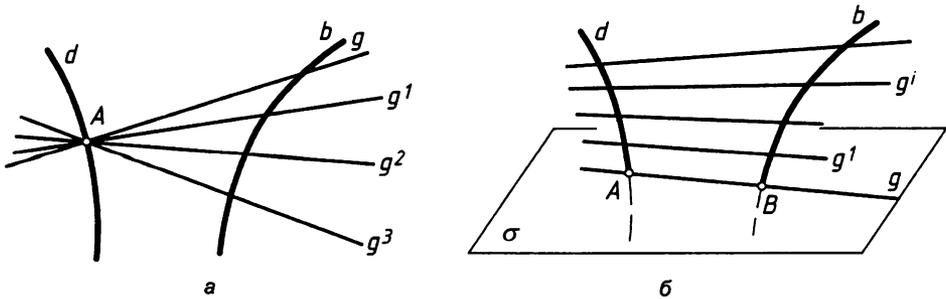


Рис. 11.25. Направляющая плоскость

Поверхности с двумя направляющими и плоскостью параллелизма называют *поверхностями Каталана* (по имени бельгийского математика Каталана, исследовавшего свойства этих поверхностей). В примере предполагается, что  $g(AB) \subset \sigma, g' \parallel \sigma, g' \parallel \sigma$ , то есть в каждом положении образующая пересекает направляющие  $d, b$  и параллельна плоскости  $\sigma$ .

На эюре (рис. 11.26) поверхность задается изображением направляющих  $d(d_1, d_2), b(b_1, b_2)$  и плоскости параллелизма  $\sigma(h_\sigma^d \cap f_\sigma^b)$ . Если образующие линии параллельны горизонтально проецирующей плоскости  $\sigma$ , то их горизонтальные проекции  $g_1, g_1^1, \dots, g_1^i, \dots, g_1^n$  параллельны следу  $h_\sigma^d$ . Строим семейство этих проекций, а по точкам их пересечения с направляющими строим фронтальные проекции  $g_2, g_2^1, \dots, g_2^i, \dots, g_2^n$  образующих.

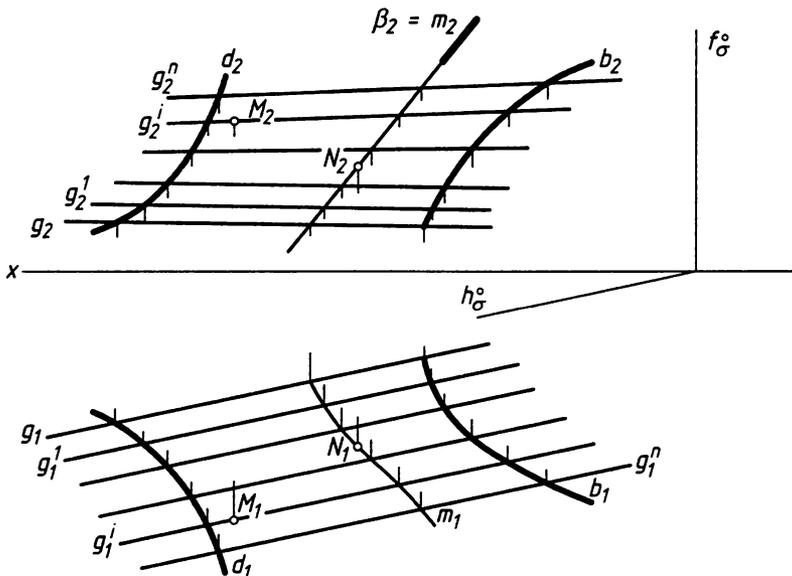


Рис. 11.26. Поверхность цилиндрида

Если задана горизонтальная проекция  $M_1$  точки поверхности, то для построения ее фронтальной проекции  $M_2$  используют образующую: через  $M_1$  проводят  $g_1^i$ , строят  $g_2^i$  и по линии связи отмечают  $M_2$ . Если задана фронтальная проекция  $N_2$  точки поверхности, то для построения ее горизонтальной проекции нужно построить линию  $m$  ( $m_2 \rightarrow m_1$ ) сечения поверхности плоскостью  $\beta$  ( $\beta_2$ ), проходящей через точку  $N$ , или через  $N$  провести удобную линию на поверхности, а на ней взять точку  $N_1$ .

Линейчатая поверхность с двумя криволинейными направляющими и плоскостью параллелизма называется *цилиндромом*.

Если одна из направляющих — плоская кривая, а ее плоскость перпендикулярна плоскости параллелизма, то *цилиндром* называют *прямым*.

При построении изображений удобно плоскости проекций выбирать таким образом, чтобы одна из них была параллельна плоскости параллелизма.

На рис. 11.27 построено изображение части поверхности с направляющими  $d$  ( $d_1, d_2$ ) — кривая линия,  $b$  ( $b_1, b_2$ ) — прямая и плоскостью параллелизма  $\mathcal{P}_1$  — горизонтальная плоскость проекций, то есть здесь все образующие — горизонтали.

Поверхность с плоскостью параллелизма, у которой одна из направляющих является прямой линией, называется *коноидом*.

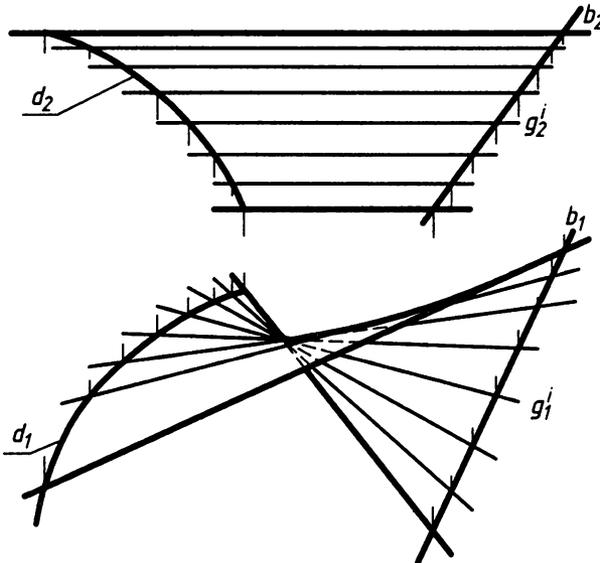


Рис. 11.27. Поверхность коноида

Если направляющая прямая  $b$  перпендикулярна плоскости параллелизма, *коноид* называется *прямым*. Очерком поверхности будет огибающая положений образующих и установленные границы — линии поверхности (образующие, сечения, направляющие или другие линии). Точка или линия на поверхности строится по аналогии с рис. 11.26 и 11.1.

Поверхность с плоскостью параллелизма и двумя скрещивающимися прямолинейными направляющими называется *гиперболическим параболоидом*, или «*косой плоскостью*». На рис. 11.28 построены изображения отсека линейчатого параболоида с направляющими  $d$  ( $d_1, d_2$ ),  $b$  ( $b_1, b_2$ ) и плоскостью параллелизма  $\Pi_2$ . В этом случае все образующие — фронтолы.

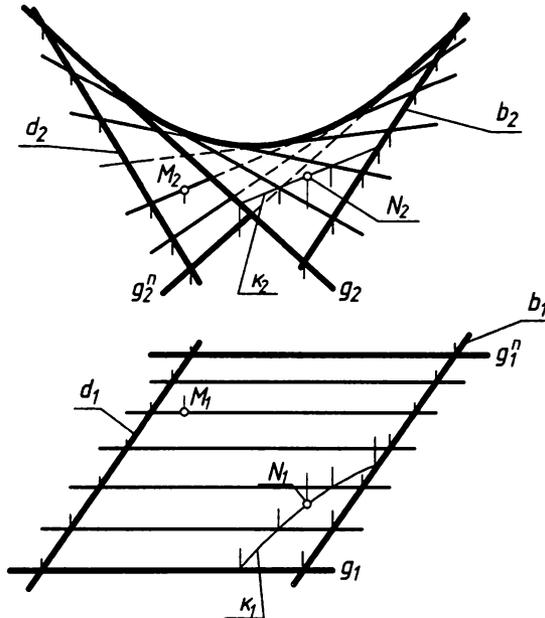


Рис. 11.28. Гиперболический параболоид

Очерком поверхности является парабола. Косая плоскость пересекается плоскостями по прямым, гиперболам и параболам. Она имеет два семейства линий, образующих сетчатый каркас прямых линий, и две плоскости параллелизма. Вторая плоскость параллелизма параллельна направляющим  $d$ ,  $b$ . Если взять две образующие  $g$  (например,  $g$  и  $g'$ ) за направляющие, плоскость параллелизма  $\varphi(d' \cap b')$ , где  $d' \parallel d$ ,  $b' \parallel b$ , и перемещать линию  $b$  или  $d$ , то получится новое семейство образующих. Каждая линия семейства  $g$  пересекает все линии семейства  $b$  (или  $d$ ), и наоборот, но между собой линии одного семейства не пересекаются. Задача принадлежности решается по аналогии с рис. 11.26 и показана для точек  $M$  ( $M_1 \rightarrow M_2$ ) и  $N$  ( $N_2 \rightarrow N_1$ ) на рис. 11.28. Поверхности Каталана находят широкое применение в технике, строительстве и архитектуре.

### 11.5.3. Линейчатые поверхности с тремя направляющими

Зададим определитель линейчатой поверхности тремя собственными направляющими линиями:  $\alpha$  ( $b, c, d$ ). Рассмотрим случай, когда направляющими служат кривые линии (рис. 11.29).

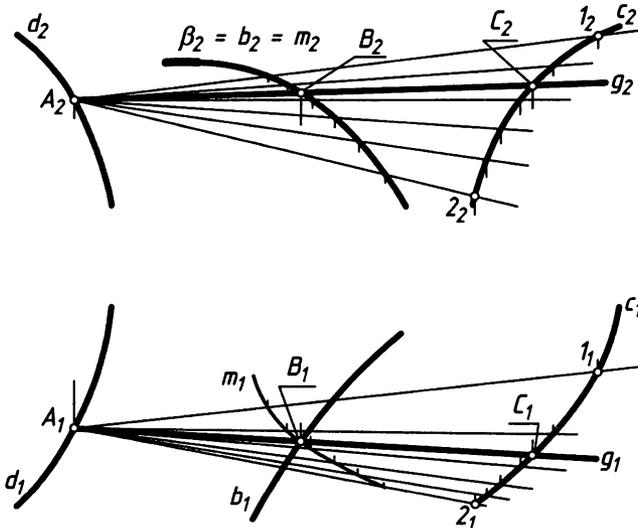


Рис. 11.29. Построение образующей линейчатой поверхности общего вида

На направляющей  $d$  возьмем точку  $A (A_1, A_2)$ . Через нее нужно провести прямую линию  $g$ , пересекающую прямые  $b$  и  $c$ . Для этого построим ряд образующих конической поверхности с вершиной в точке  $A$  и направляющей  $c (c_1, c_2)$ . Через линию  $b$  проведем цилиндрическую фронтально проецирующую поверхность  $\beta (b_2 = \beta_2)$  и построим линию  $m (m_2 \rightarrow m_1)$  ее пересечения с конусом.

Точка  $B = m \cap b (m_1 \cap b_1 = B_1 \rightarrow B_2)$  лежит на поверхности конуса, и образующая  $g (A, B_1, C_1 \rightarrow A_2, B_2, C_2)$  пересекает все три направляющие, то есть она принадлежит заданной поверхности. Затем на направляющей  $d$  выбирается новая точка, строится новый конус, определяется его пересечение с направляющей  $b$  и строится новая образующая. Так строится весь каркас поверхности.

Таким образом, мы показали, что три направляющие однозначно определяют положение образующих линейчатой поверхности, о чем было сказано в начале раздела. Конечно, вдумчивый читатель может задать нам целый ряд вопросов, которые надлежит исследовать, но они выходят за пределы нашей программы. Отметим только, что такой определитель линейчатой поверхности является общим, а другие группы поверхностей рассматривают как частные случаи.

Линейчатые поверхности с криволинейными направляющими называют поверхностями общего вида. Если одной из направляющих является прямая линия, поверхность называют дважды косым цилиндроидом. Если две направляющие прямые, то поверхность называют дважды косым коноидом. Предлагаем читателю задать определитель, построить изображения и исследовать эти поверхности самостоятельно или обратиться к рекомендуемой литературе, например, [9].

Если направляющими являются три скрещивающиеся прямые (рис. 11.30), образуется поверхность *однополостного гиперболоида* (см. рис. 11.6 и 11.11). Здесь точка  $A (A_1, A_2)$  и прямая  $c (c_1, c_2)$  образуют плоскость  $(\Delta A-1-2)$ . Плоскость-посредник  $\beta (\beta_2)$  пересекает ее по прямой  $3-4 (3_2-4_2 \rightarrow 3_1-4_1)$ , а  $b_1 \cap (3_1-4_1) = E_1 \rightarrow E_2$  — точка

пересечения плоскости с направляющей  $b$ . Прямая линия ( $AEF$ ) является образующей  $g$  ( $g_1, g_2$ ). Эту же линию можно построить как линию пересечения плоскостей  $\gamma(A, c)$  и  $\delta(A, b)$ . Меняя положение точки  $A$  на линии  $d$ , строят семейство образующих линий.

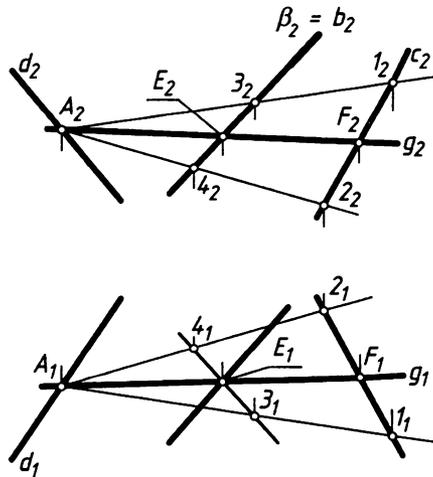


Рис. 11.30. Определитель однополостного гиперболоида

## 11.6. Винтовые поверхности

*Винтовой называют поверхность, образованную винтовым движением образующей.*

*Винтовым называют движение, при котором каждая точка  $A$  образующей (рис. 11.31) вращается вокруг неподвижной оси  $i$  и одновременно перемещается поступательно вдоль этой оси.*

Рассмотрим движение точки  $A$  за один оборот, во время которого она переместится вдоль оси на величину  $P$ .

Прямая линия  $i$  называется осью винтовой линии, или поверхности. Расстояние от точки  $A$  до оси называют радиусом  $r$  винтовой линии. Представим себе, что точка  $A$  движется по цилиндру радиуса  $r$  и высотой  $P$ . Разделим на виде сверху один оборот на 12 равных частей и отметим в этих частях положение точки цифрами, начиная с нуля. Высоту  $P$  подъема также разделим на 12 равных частей. При повороте точки в положение 1, на горизонтальной проекции ее фронтальная проекция переместится в положение  $1_2$ , и так для каждого положения. Соединив плавной кривой все фиксированные положения точки  $A$ , получим фронтальную проекцию ее траектории, а горизонтальной проекцией будет окружность.

Траектория движения точки  $A$  называется *винтовой линией*. Винтовая линия постоянного радиуса  $r$  называется *гелисой*, или *цилиндрической винтовой линией*. Величина  $P$  подъема винтовой линии за один оборот называется *шагом*.

Если взять винтовую линию и ось  $i$  за направляющие, а горизонтальную плоскость проекций за направляющую плоскость (или плоскость параллелизма), то при дви-

жении прямолинейной образующей получается винтовая поверхность, которая называется *прямым винтовым коноидом*, или *геликоидом*.

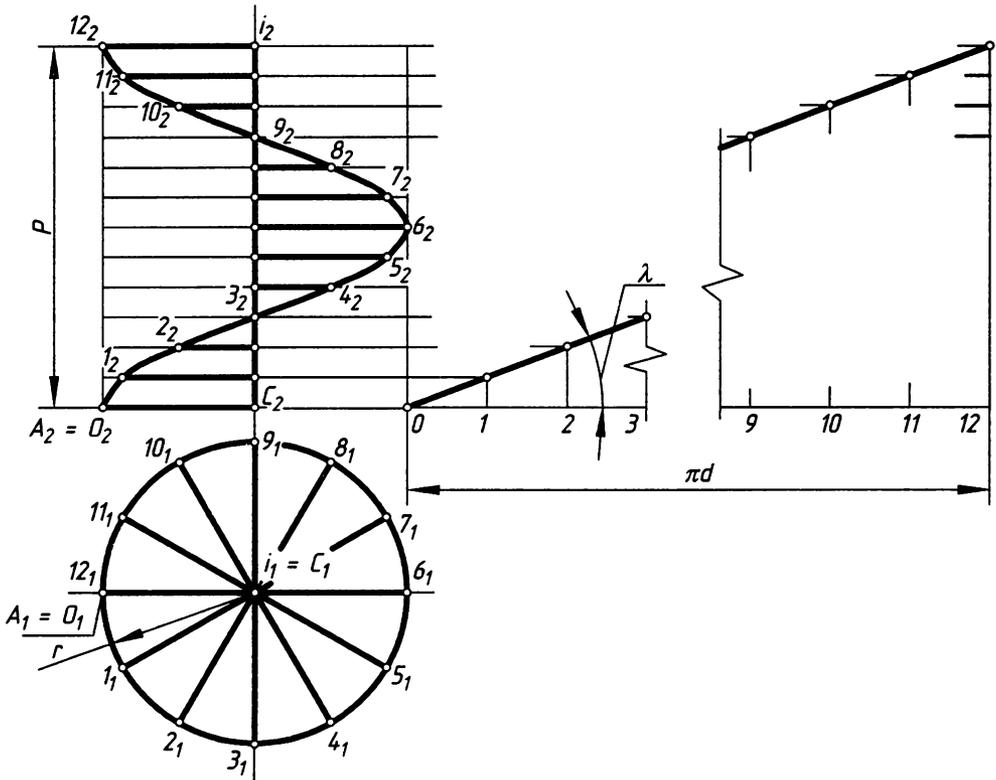


Рис. 11.31. Образование винтовой линии и поверхности

Если образующая прямая линия ( $AC$ ) пересекает ось  $i$  винтовой поверхности под прямым углом, геликоид называют *прямым* (см. рис. 11.31).

Если образующая пересекается с осью винтовой поверхности, геликоид называется *закрытым*, а если скрещивается с осью, геликоид называется *открытым*. Закрытый наклонный геликоид называют архимедовым.

Сечения винтовой поверхности соосными цилиндрами образуют винтовые параллели. Каркас поверхности составляется семейством образующих и семейством винтовых параллелей. Все винтовые параллели имеют одинаковый шаг.

Сечения поверхности плоскостями, проходящими через ось, называют меридианами, а сечения, перпендикулярные оси  $i$ , называют нормальными сечениями. В нормальном сечении архимедова геликоида получается спираль Архимеда. На рис. 11.32 показана линия сечения геликоида плоскостью  $\beta$  ( $\beta_1$ )  $\perp i$ . Она построена по точкам пересечения образующих поверхности с секущей плоскостью.

Цилиндрическую винтовую линию можно развернуть на плоскость. Длину  $\pi d$  окружности основания цилиндра разделим на 12 равных частей. Каждой части

соответствует  $1/12 P$  подъема винтовой линии. Ее разверткой является гипотенуза треугольника, катеты которого равны  $\pi d$  и  $P$  (на рис. 11.31 изображение развертки дано с разрывом).

Угол  $\lambda$  называется углом подъема винтовой линии:

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{P}{\pi d}.$$

Этот угол имеет большое значение в техническом использовании винтовых поверхностей. Несмотря на простоту развертки винтовой параллели, винтовая поверхность не является развертывающейся.

Если образующая ( $AC$ ) пересекает ось винтовой поверхности под острым углом, геликоид называется наклонным, или архимедовым (рис. 11.32, *a*).

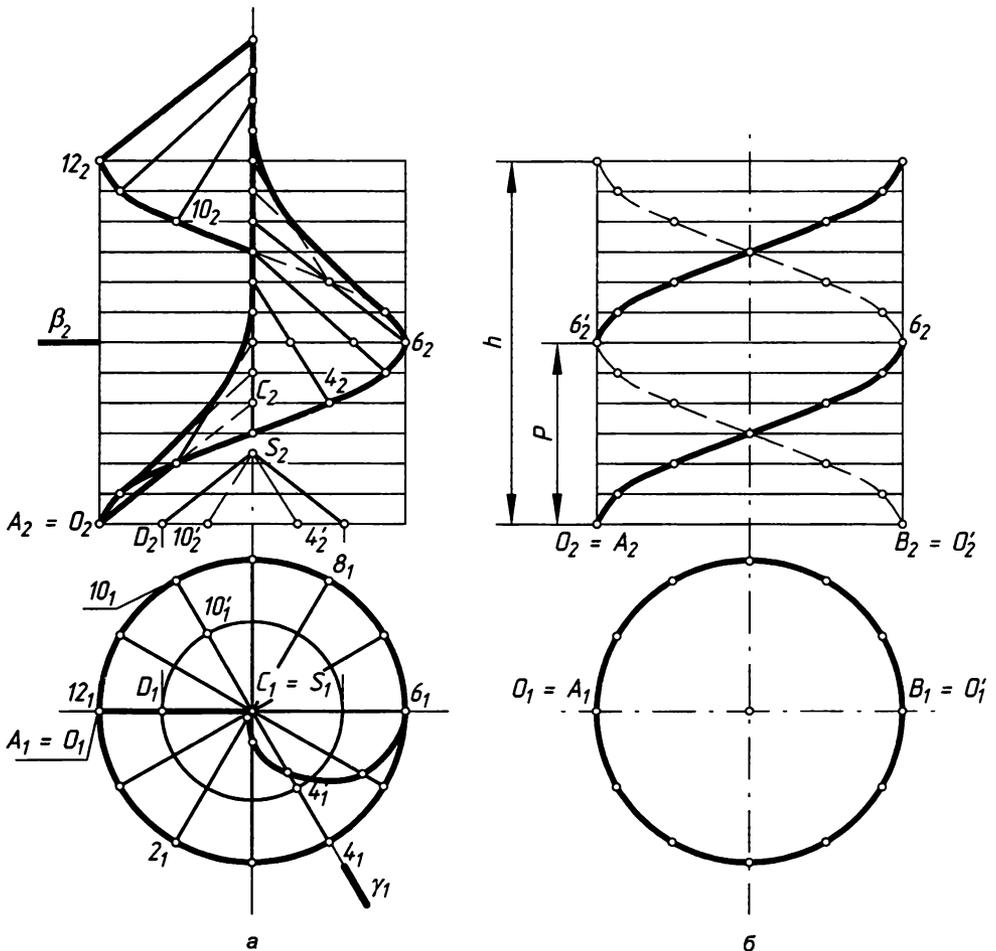


Рис. 11.32. Наклонный геликоид и двухзаходная винтовая линия

Очерком поверхности является линия, огибающая положения образующей линии. Положения образующей строятся аналогично рис. 11.31, если учесть, что каждая точка образующей при поступательном движении перемещается на одинаковую высоту, пропорциональную углу поворота, то есть на сколько поднимется точка  $A (A_2)$ , на столько же поднимется и точка  $C (C_2)$ .

Если синхронно с образующей ( $AC$ ) вращать прямую линию  $SD \parallel AC$ , то последняя опишет поверхность, которая называется направляющим конусом. Это значит, что меридианальные сечения наклонного геликоида и конуса вращения параллельны, то есть подобный конус является направляющей поверхностью наклонного винтового коноида. Например, плоскость  $\gamma (\gamma)$  пересекает геликоид по образующим положениям  $4 (4_1-4_2)$  и  $10 (10_1-10_2)$ , а направляющий конус по образующим  $(S-4')$  ( $S_1-4'_1 \rightarrow S_2-4'_2$ ) и  $(S-10')$  ( $S_1-10'_1 \rightarrow S_2-10'_2$ ), которые попарно параллельны. Это обстоятельство удобно использовать для построения случайных образующих поверхности геликоида.

Если образующую ( $AC$ ) продолжить за ось, то образуется вторая полость винтовой поверхности.

Рассмотренные нами винтовая линия и поверхности называют однозаходными. Если синхронно с точкой  $A (A_1, A_2)$  совершает винтовое движение точка  $B (B_1, B_2)$ , то на той же высоте образуется две винтовые линии (рис. 11.32, б), которые называют двухзаходными. Так могут образовываться многозаходные винтовые линии. В этом случае величина  $h$  называется ходом, а шагом  $P$  называют расстояние между одноименными точками соседних профилей, измеренное параллельно оси винта. Ход и шаг имеют зависимость:

$$h = n \cdot P,$$

где  $n$  — число заходов.

На практике широко используют комбинацию винтовых поверхностей, образованных сложными линиями, например, такими как треугольник, трапеция, прямоугольник, дуги окружности. Тело, ограниченное винтовыми поверхностями, изготовленными на поверхности вращения, называют винтом.

Винтовые линии и поверхности обладают свойством сдвигаемости, то есть конгруэнтные винтовые линии могут, вращаясь, скользить друг по другу. Это свойство нашло очень широкое применение в науке и технике.

Винтовые линии и поверхности называют правыми, если при взгляде навстречу подъему мы видим вращение против часовой стрелки (рис. 11.31 и 11.32, а). В противном случае винтовые линии называют левыми.

Например, если по рис. 11.32, б представить винтовые линии на материальном цилиндре, то участок  $A_2-b_2$  правой линии будет виден, а участок  $B_2-b'_2$  — не виден, а у левой линии — наоборот. Можно сказать, что видимый участок правой винтовой линии поднимается слева вверх направо.

Если за образующую взять прямую линию  $[AB]$  ( $A, B, A_2, B_2$ ), получатся две симметричные полости прямого геликоида.

На поверхности конуса образуется коническая винтовая линия и поверхность. Более подробно с винтовыми поверхностями можно познакомиться в работах [1], [6], [31].

## 11.7. Нелинейчатые поверхности

Нелинейчатые поверхности образуются движением произвольной кривой. Если при этом кривая меняет свои размеры и (или) форму, то образуется нелинейчатая поверхность с образующей переменного вида или поверхность общего вида (пример см. на рис. 11.1).

При движении замкнутой плоской кривой переменного вида образуется *каналовая* поверхность (рис. 11.33, а).

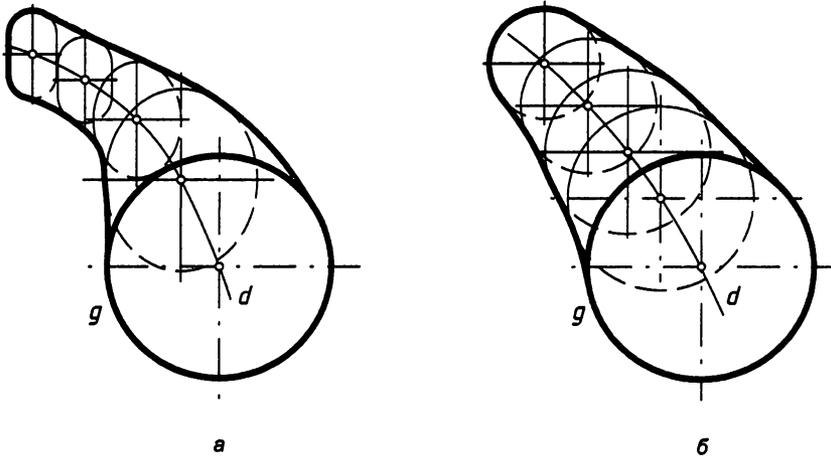


Рис. 11.33. Каналовая и циклическая поверхности

Для определенности движения плоскость образующей ориентируется относительно направляющей  $d$ .

При движении окружности переменного радиуса, ориентированной к направляющей  $d$ , образуется *циклическая* поверхность (рис. 11.33, б). Если радиус не меняется, поверхность называют *трубчатой*.

Если образующая в процессе движения не меняется, получим поверхность общего вида с постоянной образующей (рис. 11.34, а). Поверхность, образованную поступательным перемещением образующей, называют поверхностью параллельного переноса (рис. 11.34, б).

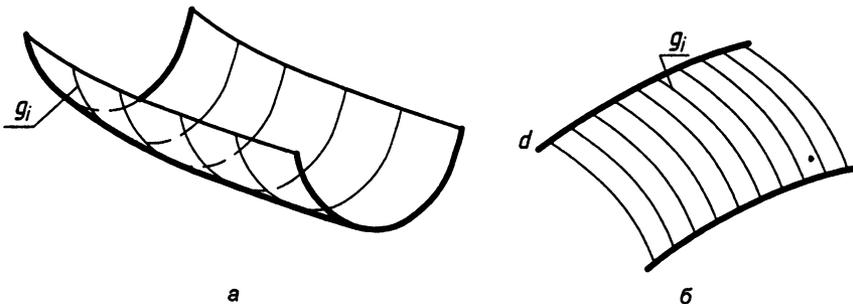


Рис. 11.34. Поверхности с образующей постоянного вида

## 11.8. Изображение поверхностей в аксонометрии

Мы уже знакомы с построением аксонометрических проекций линий (см. подраздел 7.5.2, раздел 10.3) и многогранных поверхностей (см. раздел 9.1). Изображения других поверхностей строятся с помощью их линий каркаса.

При построении изображений поверхностей вращения аксонометрические оси рекомендуется выбирать так, чтобы плоскости параллелей были параллельны одной из координатных плоскостей.

На рис. 11.35 показано построение изображений цилиндра с натуральной системой координат  $Oxyz$ .

По координатам строится вторичная проекция  $O'_1$ , или  $O'_2$ , или  $O'_3$  центра  $O$  ( $O_1, O_2$ ) нижнего основания поверхности. Вторичная проекция цилиндра в координатной плоскости, соответствующей горизонтальной плоскости  $xOy$ , будет эллипсом (см. разделы 10.2, 10.3) с центром  $O'_1$ . По координате  $z$  строится аксонометрия нижнего с центром  $O'$  и верхнего основания цилиндра. Очерк цилиндра — его образующие, касательные к основаниям, и параллели оснований.

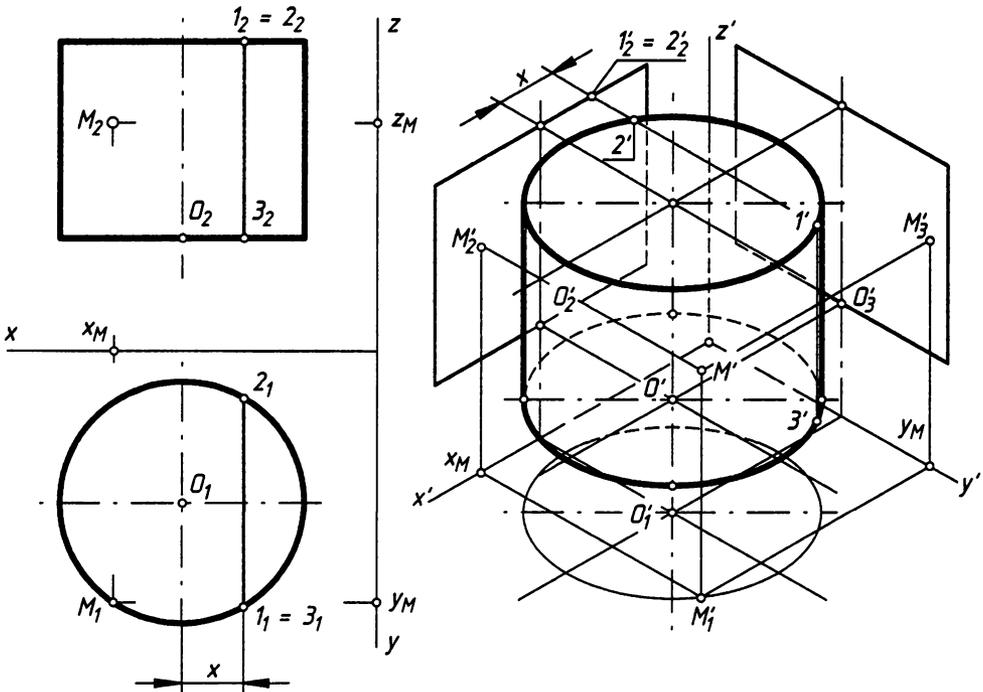


Рис. 11.35. Построение прямоугольной изометрической проекции цилиндра

Вторичная проекция цилиндра на координатных плоскостях, соответствующих плоскостям  $xOz$  и  $yOz$ , будет параллелограммом — проекцией прямоугольника, которым он

изображается на соответствующих проекциях эпюра. Так как в натуральной системе координат мы вначале проецируем объект на одну из координатных плоскостей, которые соответственно параллельны плоскостям ортогональных проекций, то в практике построения аксонометрии их названия переносят и на вторичные проекции. Например, название вторичной проекции в координатах  $x'O'y'$  ассоциируется с названием горизонтальной проекции в координатах  $xOy$  натуральной системы, то есть не говорят вторичная проекция ортогональной горизонтальной проекции, а говорят — горизонтальная вторичная проекция. Так и в отношении других проекций.

Для построения аксонометрии цилиндра по фронтальной вторичной проекции можно поступить так: найти аксонометрию центров оснований, построить эллипсы оснований и очерк цилиндра.

Эллипсы оснований можно строить одним из способов построения проекции окружности, рассмотренных в параграфе 10.2, а можно по хордам, как показано на рис. 11.35. Возьмем хорду  $(1-2)$  ( $1_1-2_1, 1_2=2_2$ ) и образующую  $(1-3)$  ( $1_1=3_1, 1_2-3_2$ ). По координате  $x$  строится хорда  $(1'-2')$  верхнего основания и образующая  $(1'-3')$ . В этом случае удобно брать симметричную ей хорду.

Так строится нужное количество точек, а по ним строятся проекции оснований и очерк. Аналогичные построения можно выполнить по профильной вторичной проекции.

Любая точка  $M$  поверхности строится по координатам  $(x_n, y_n, z_n)$ . На рис. 11.35 показаны три возможных варианта построения точки  $M$ . Четвертым вариантом может служить хорда типа  $(1'-2')$  (на рис. 11.35 этот вариант не показан).

Если начало координат  $O$  совместить с центром нижнего основания цилиндра, то его горизонтальная вторичная проекция совпадет с аксонометрией нижнего основания, а фронтальная и профильная вторичная проекция совместится с фронтальным и профильным меридианом цилиндра. В этом случае построения упрощаются.

На рис. 11.36, *a* построена прямоугольная изометрия конуса, основание которого лежит в плоскости  $x'O'y'$ , а ось  $z'$  совпадает с осью вращения (на рис. 11.36 координатные оси не обозначены). Очерком конуса являются образующие, проведенные из вершины  $S'$  касательно к основанию. Любая точка  $M$  ( $M', M'_i$ ) на поверхности конуса определяется с помощью образующей  $S'A'$  и ее вторичной проекции  $S'_iA'$  или общим способом координат.

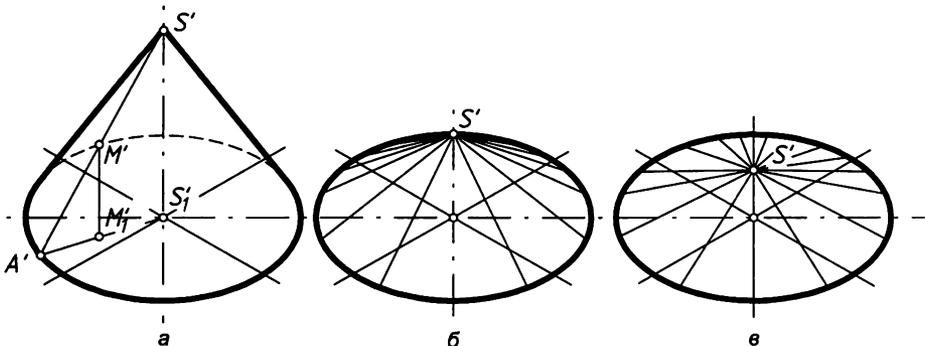


Рис. 11.36. Изометрия конуса

При малой высоте  $[S'S']$  конуса аксонометрия вершины  $S'$  может оказаться на линии основания (рис. 11.36, б) или внутри изображения основания (рис. 11.36, в). В этом случае очерковых образующих конуса нет, и говорят об исчезновении очерка, то есть конус изображается одним эллипсом основания. Чтобы придать наглядность такому изображению, показывают вершину и ряд образующих (семейство меридианов) поверхности. При этом следует изображать оси эллипсов и аксонометрические оси без их обозначения. Такое изображение осей используется и в других случаях.

Сфера в прямоугольной аксонометрии проецируется в окружность радиуса  $R$ . В приведенной изометрии этот радиус нужно умножить на коэффициент приведения 1,22 (рис. 11.37, а), а в диметрии — на 1,06 (рис. 11.37, б).

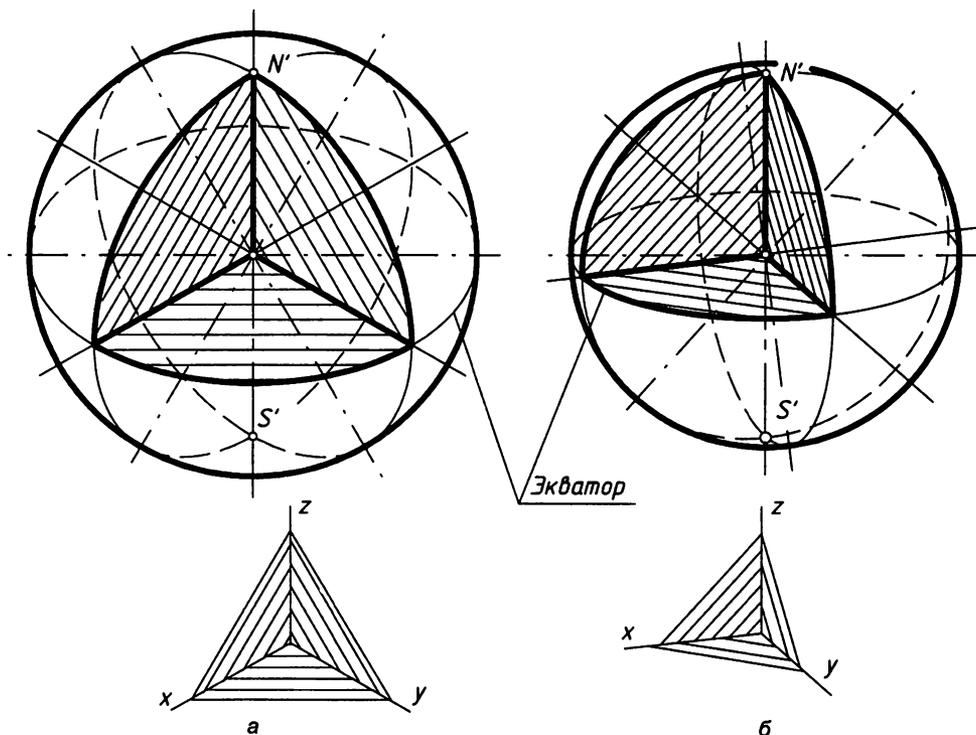


Рис. 11.37. Изображение сферы в прямоугольной аксонометрии

Для лучшей наглядности кроме аксонометрических осей на сфере изображают ряд линий каркаса. Например, на рис. 11.37 изображены экватор сферы, фронтальный и профильный меридианы. Точки  $N'$  и  $S'$  пересечения меридианов соответствуют вершинам сферы (точки на оси вращения). Если рассматривается материальное тело, ограниченное поверхностью сферы (шар), то изображение может сопровождаться вырезом координатными плоскостями. Материал в плоскостях выреза заштриховывают, как показано на рис. 11.37. В изометрии по осям от начала координат откладывают одинаковые отрезки прямых и концы этих отрезков соединяют прямыми линиями, которые показывают направление штриховки по координатным

плоскостям. В диметрии по оси  $u$  нужно отложить половину такого отрезка, а другие построения делаются по аналогии с изометрией. Вырез создает впечатление объема и глубины. Для построения изображений других поверхностей вращения используют:

- способ параллелей;
- способ сфер;
- способ меридианов.

**Способ параллелей** удобен при построении вытянутых вдоль оси вращения поверхностей. На поверхности выбирается ряд параллелей (рис. 11.38), для которых строятся аксонометрические проекции. Огибающая проекций этих параллелей и будет очерком поверхности.

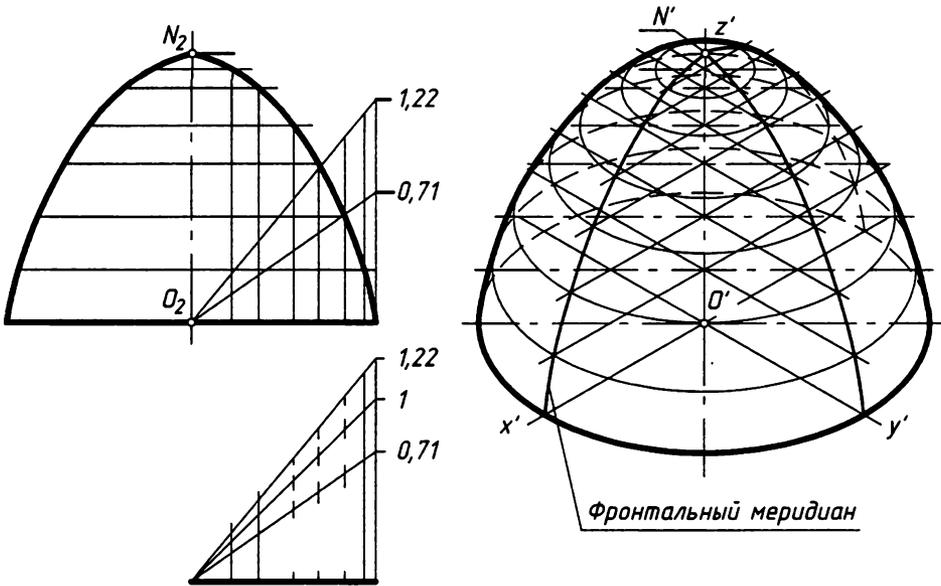


Рис. 11.38. Построение аксонометрической проекции поверхности способом параллелей

Чтобы улучшить наглядность изображения, очерк поверхности дополняется изображением осей, высоты  $[O'N'] = [O_2N_2]$ , отдельных параллелей или меридианов. Если точки параллелей, лежащие в плоскости  $x'O'z'$ , соединить плавной кривой, получится фронтальный меридиан поверхности. Аналогично строится профильный меридиан по координате  $y$ . При построении ближе к вершине параллели следует брать чаще, пока последующая параллель не окажется внутри предыдущей, начиная с основания.

Вершину очерка можно определить более точно по углу аксонометрического проецирования, если в этом есть необходимость. Более подробно это можно изучить в [21, 32].

При построении параллелей удобно пользоваться масштабным треугольником (см. подраздел 10.2.1, рис. 10.13). Выгодно его совместить с изображением поверхности, взяв начало координат в точке  $O_2$ . Построения показаны на чертеже.

Рекомендуется следующий порядок построения эллипсов, начиная с основания:

- измеряем отрезок, равный радиусу параллели, и откладываем его по аксонометрическим осям, где показатель искажения равен единице;
- откладываем этот же отрезок по горизонтальному катету масштабного треугольника, а по вертикальной линии получаем его значение с учетом показателя искажения и эти отрезки откладываем по соответствующим осям;
- затем измеряем от точки  $D_2$  высоту следующей параллели и откладываем ее от точки  $D'$  по оси  $z'$ , если масштабы построения совпадают; строим оси нового эллипса и сам эллипс, как в предыдущем случае.

Если образующей линией служит составной геометрический объект, то ее следует проанализировать, выделить элементарные линии и связи (геометрические отношения) между ними.

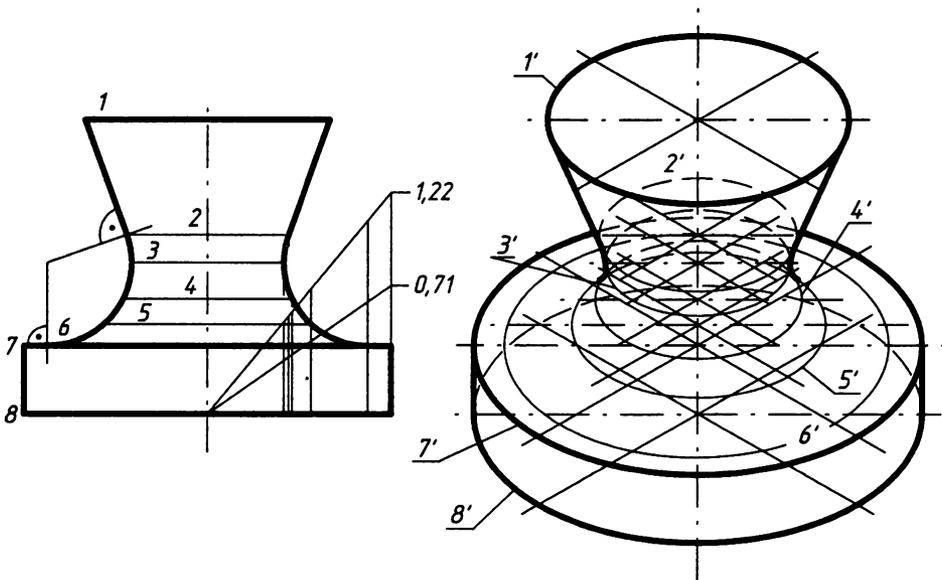


Рис. 11.39. Аксонометрия объекта со сложной образующей

Например, на рис. 11.39 показано изделие с составной образующей. Между параллелями 1 и 2 проходит прямая линия, образующая усеченный конус. Между параллелями 2 и 6 образующей служит дуга окружности, касательная к образующей конуса и к прямой линии 6–7 и описывающая глобоид. Прямая 6–7 описывает плоское кольцо, плоскость которого касается глобоида по параллели 6. Прямая 7–8 параллельна оси вращения и описывает поверхность цилиндра. Так из анализа образующей мы выяснили, что наше изделие состоит из цилиндра, глобоида и конуса с плавным переходом от одной поверхности к другой.

В аксонометрии необходимо построить параллели 1, 2, 6, 7, 8, горло 3 глобоида и несколько случайных параллелей (на рис. 11.39 взяты параллели 4 и 5). Масштабный треугольник построен прямо на радиусе нижнего основания цилиндра. В аксонометрии к эллипсам 1' и 2' проводим очерковые касательные, а для параллелей 2', 3',

4', 5' глобоида проводим линию, их огибающую. Ее нам удастся построить только для этих параллелей. На параллели 5' очерк заканчивается. Параллель 6' не будет участвовать в образовании очерка изделия. В этом случае говорят, что очерк исчез (по аналогии с рис. 11.36).

**Способ сфер** использует два положения:

- в поверхность вращения можно вписывать сферы;
- ортогональной проекцией сферы является окружность радиуса  $mR$ , где  $m$  — коэффициент приведения,  $R$  — радиус вписанной сферы на эпоуре.

Очерком поверхности будет огибающая аксонометрических проекций вписанных сфер.

На рис. 11.40, а построена фронтальная проекция поверхности вращения, образующая которой состоит из дуги радиуса  $R_1$  и дуги радиуса  $R_2$ , которые сопрягаются в точке 6. В аксонометрии (рис. 11.40, б) строим эллипсы 1' и 4' оснований 1 и 4. Выделяем параллели 2 (горла) и 3 (экватора), а в аксонометрии точки 2' и 3' лежат на большой оси и принадлежат очерку, как у цилиндра (вписанный в горло цилиндр и описанный у экватора поверхности).

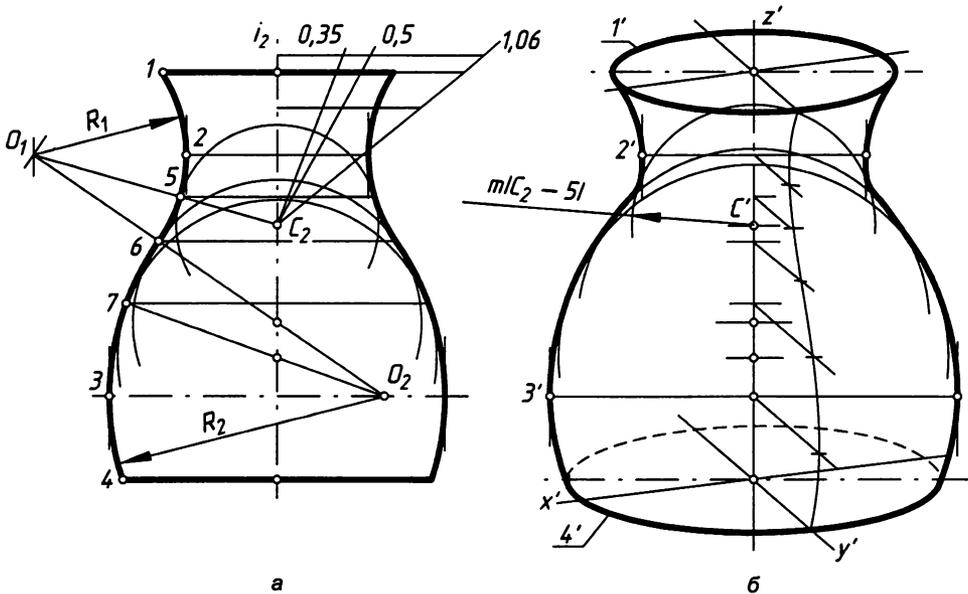


Рис. 11.40. Построение аксонометрии способом сфер

Возьмем произвольную точку 5 и из центра  $O_1$  проведем через нее прямую до пересечения с осью  $i_2$  в точке  $C_2$ , которую примем за центр вписываемой сферы. Из центра  $C_2$  радиусом  $[C_2-5]$  проведем окружность, которая изображает сферу, вписанную в поверхность и касающуюся с ней по параллели 5 (окружности сфер построены не полностью). В аксонометрии по оси координат  $z'$  отмечаем точку  $C'$  по высоте точки  $C_2$  и из нее строим изображение этой сферы — окружность радиуса  $m[C_2-5]$ . Для удобства катет натуральных радиусов масштабного треугольника совмещен

с осью  $i_2$  вращения, а масштабные прямые помечены коэффициентами прямоугольной диметрии. Начало отсчета находится в точке  $C_2$ . Это еще один вариант использования масштабного треугольника.

Из точки пересечения оси  $i_2$  с межцентральной прямой  $[O, O_2]$  проведем сферу, касающуюся поверхности по параллели  $b$  точки сопряжения, и эту же сферу строим в аксонометрии, умножив радиус на  $m = 1,06$ .

Проведем нормаль к образующей в случайной точке  $7$  до пересечения с осью  $i_2$  и из этой точки построим вписанную сферу, которая касается поверхности по параллели  $7$ . Эту сферу строим в аксонометрии.

Очерк поверхности (рис. 11.40, б) будет касаться основания  $1'$ , пройдет через точку  $2'$ , коснется построенных сфер, пройдет через точку  $3'$  и завершится касанием основания  $4'$ .

По координатам параллелей касания можно построить меридианы поверхности. Например, для построения профильного меридиана отметим центры параллелей касания, взяв их координаты  $z$  из эюра, через них проведем оси по направлению  $y'$  и на них отложим радиусы параллелей, умноженные на  $0,5$ . Плавная кривая, проходящая через отмеченные точки, и будет профильным меридианом. Аналогично можно построить любой другой меридиан, определив показатель искажения по выбранному направлению.

Во многих случаях этот способ удобен и имеет очевидные преимущества (не надо строить много эллипсов). Особенно он удобен при построении вытянутых поверхностей вращения, циклических и трубчатых поверхностей (рис. 11.41).

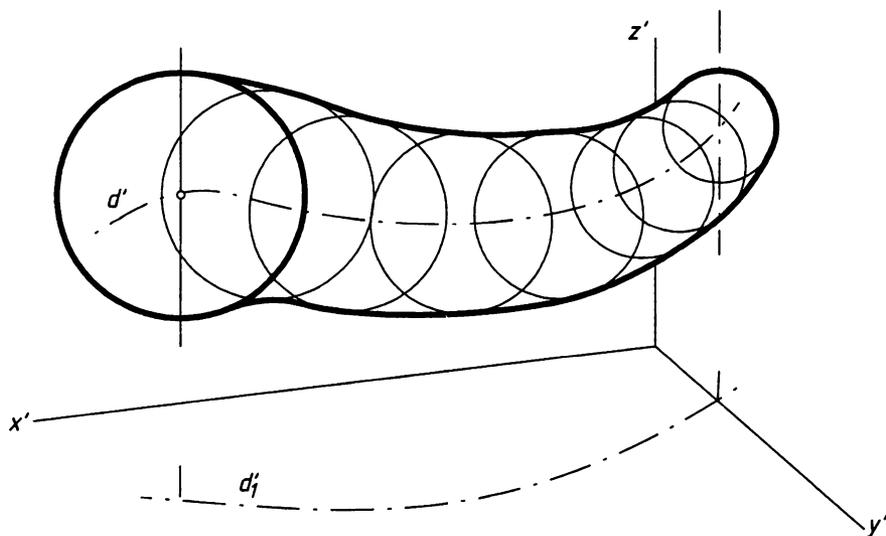


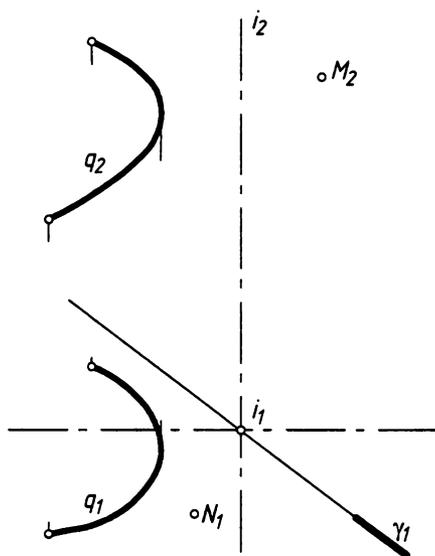
Рис. 11.41. Аксонометрическая проекция циклической поверхности

**Способ меридианов** применяется для сжатых поверхностей вращения. При этом строится ряд меридианов поверхности и огибающая их линия (очерк).

Изображения других поверхностей строятся с помощью их линий каркаса.

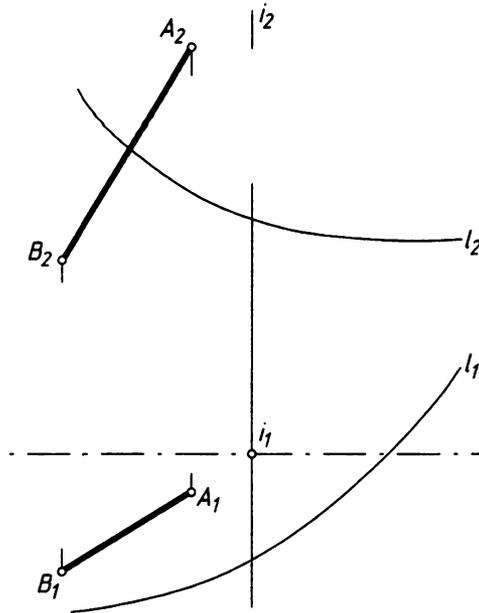
## Вопросы и задания

1. Что называют поверхностью? Как задают поверхности на чертеже?
2. В чем заключается кинематический способ образования поверхностей? Что называют определителем поверхности?
3. Что называют каркасом поверхности? Какие параметры называют параметрами формы поверхности, а какие параметрами положения?
4. Как решается задача принадлежности точки заданной поверхности?
5. Как классифицируются поверхности?
6. Что называют поверхностью вращения? Чем образуется ее каркас?
7. Что называют параллелью, меридианом, главным меридианом, горлом, экватором?
8. Постройте изображения поверхности  $\alpha(q, i)$  [Вращение] и точек  $M$  и  $N$  на ней. Покажите главный меридиан, основания, горло, экватор. Постройте случайный меридиан плоскости  $\gamma(\gamma_1)$ .

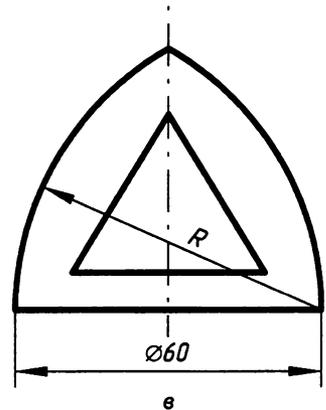
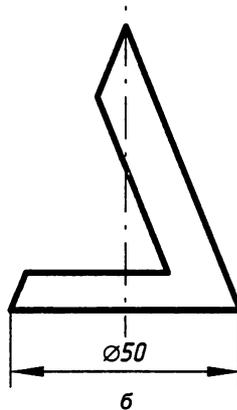
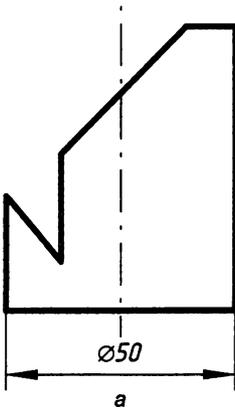


9. Какие поверхности называют алгебраическими? Приведите примеры.
10. Какие поверхности вращения имеют образующей прямую линию? Приведите примеры.
11. Какие поверхности образуются при вращении окружности или ее дуги?
12. Какие поверхности образуются при вращении эллипса, гиперболы, параболы?

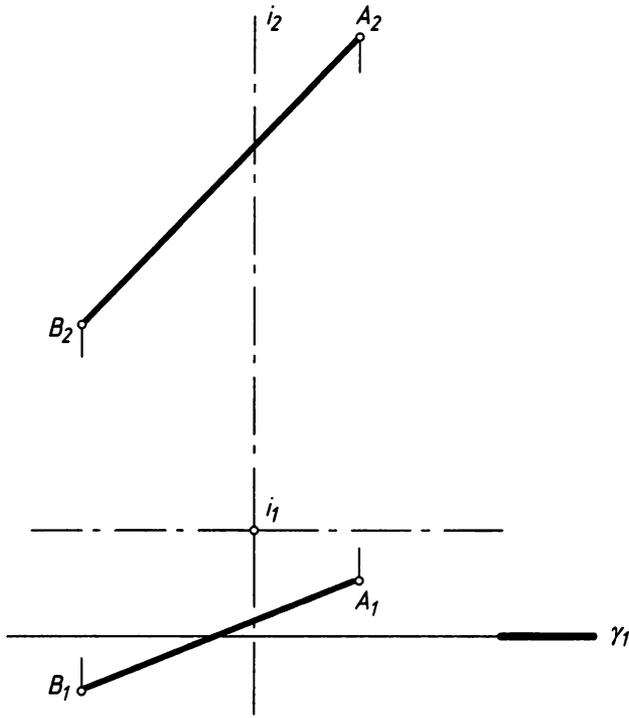
13. Постройте изображения поверхности вращения  $\alpha$  ( $AB, i$ ), найдите точки пересечения с линией  $l$  и определите видимость. Запишите алгоритм построения точек пересечения.



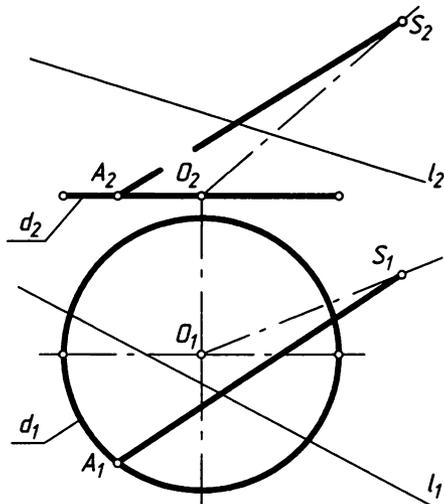
14. Назовите каждую поверхность и постройте по три их изображения со сквозными вырезами.



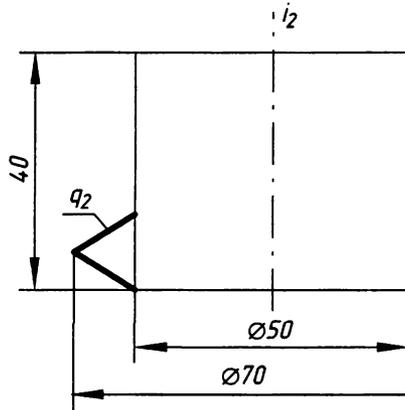
15. Постройте изображения поверхности вращения  $\alpha (AB, i)$ , назовите ее, постройте линию сечения плоскостью  $\gamma (\gamma_1)$  и найдите сечение по двум пересекающимся образующим.



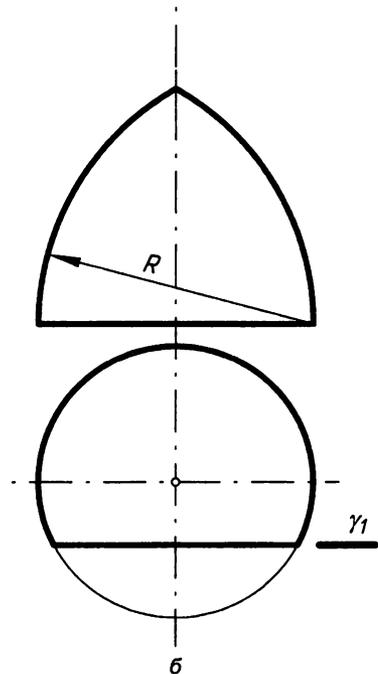
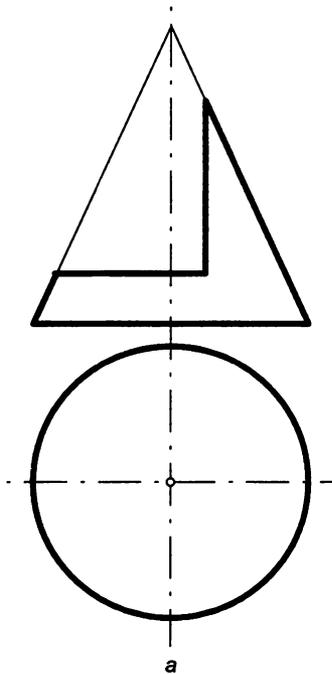
16. Постройте линейчатую поверхность  $\alpha (SA, d)$ :  $SA$  — образующая,  $d$  — направляющая. Найдите точки пересечения с линией  $l$  и определите видимость.



17. Дайте определение винтовой поверхности и приведите их классификацию.
18. Постройте два изображения правых винтовых поверхностей по заданным параметрам:  $q$  ( $q_2$ ) – образующая,  $i$  ( $i_2$ ) – ось поверхности. Образующая совершает один оборот. Назовите поверхности.



19. Как строятся аксонометрические проекции поверхностей вращения? Назовите способы построения и поясните их принцип.
20. Постройте аксонометрические проекции заданных поверхностей:
  - а) прямоугольную изометрию; б) прямоугольную диметрию.



# Глава 12

## Построение линий пересечения поверхностей

Задача построения линий пересечения поверхностей имеет большое практическое значение не только для построения изображений изделий, но и для их производства.

Решается эта задача, как и предыдущие позиционные задачи, методом посредников (рис. 12.1).

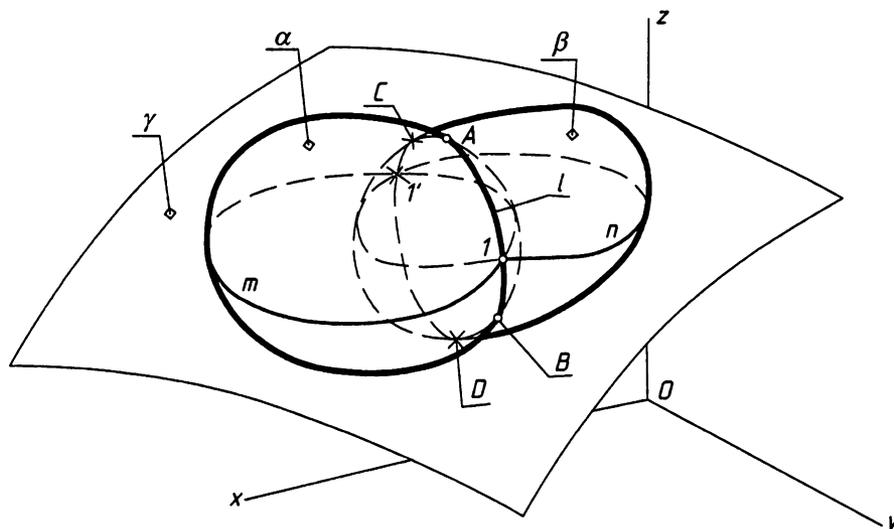


Рис. 12.1. Общий алгоритм решения задачи пересечения поверхностей

Пусть заданы произвольные поверхности  $\alpha$  и  $\beta$ . Общий метод построения линии  $l = \alpha \cap \beta$  их пересечения следующий.

1. Вводится поверхность  $\gamma$  в качестве посредника, которая выбирается так, чтобы она пересекала заданные поверхности по наиболее простым (прямым или окружностям) линиям  $m$  и  $n$ .

2. Строится  $m = \gamma \cap \alpha$  — линия пересечения посредника  $\gamma$  с заданной поверхностью  $\alpha$ .
3. Строится  $n = \gamma \cap \beta$  — линия пересечения посредника  $\gamma$  с заданной поверхностью  $\beta$ .
4. Отмечаются точки  $(1-1') = m \cap n$  пересечения найденных линий  $m$  и  $n$ . Эти точки принадлежат линии  $l$  пересечения поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ .

Эта операция повторяется столько раз, сколько необходимо для полного построения линии пересечения.

Точки типа  $1, 1'$  называются случайными. Построение линии следует начинать с точек, которые называют специальными или опорными. К таким точкам относят:

- точки пересечения очерка одной поверхности с другой поверхностью (точки типа  $A, B$  и  $C, D$  в примере на рис. 12.1). У поверхностей с общей плоскостью симметрии, возможно, будут точки взаимного пересечения очерков;
- точки границ видимости на каждом изображении;
- точки с наибольшими и наименьшими координатами  $x, y, z$ .

Приемы построения опорных точек могут быть разные и могут отличаться от общего способа построения случайных точек в данной задаче.

Построенные точки последовательно соединяют плавной кривой линией  $l$  с учетом ее видимости.

На рис. 12.1 и в дальнейшем посредник не оказывает влияния на видимость геометрических элементов изделия, а тонкие линии оставлены для пояснения построений.

В зависимости от формы посредника  $\gamma$  выделяют следующие способы построения линий пересечения поверхностей:

- способ плоскостей;
- способ концентрических сфер;
- способ эксцентрических сфер;
- способ цилиндров;
- способ конусов.

Широкое применение имеют первые три способа. Их мы рассмотрим на примерах.

## 12.1. Построение линий пересечения поверхностей способом плоскостей

При пересечении многогранной поверхности с криволинейной задача сводится к построению точек пересечения прямых (ребер многогранной поверхности) и линий пересечения плоскостей (граней) с другой поверхностью (см. раздел 11.4). В зависимости от формы поверхностей и их взаимного расположения используют различные приемы построения точек линий их пересечения, в том числе и способы преобразования чертежа. Рассмотрим это на примерах.

На рис. 12.2 показан пример построения линий пересечения поверхностей наиболее простого изделия, образованного прямой трехгранной призмой и прямым круговым конусом.

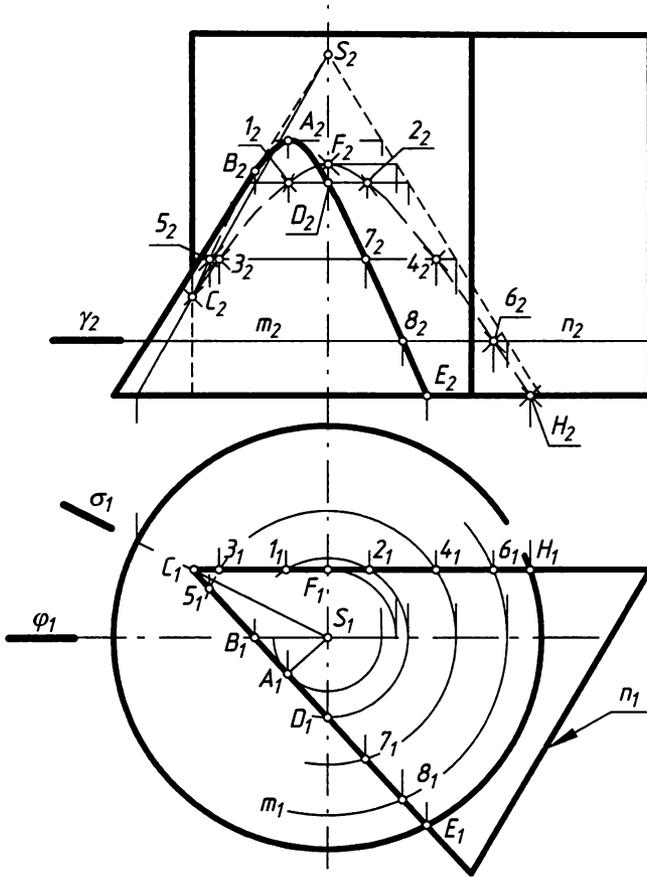


Рис. 12.2. Построение линий пересечения призмы с конусом

Опорные точки в задаче обозначены буквами, а случайные — цифрами. Заметим, что плоскости граней призмы горизонтально проецирующие, и, следовательно, горизонтальные проекции линий их пересечения с конусом уже известны. Подобные задачи мы уже рассматривали в разделах 9.2 и 11.4. Построения фронтальной проекции начнем с точек  $E_1 \rightarrow E_2, H_1 \rightarrow H_2$  пересечения параллели основания конуса с основанием призмы, так как они лежат в одной плоскости и их горизонтальные проекции пересекаются.

На горизонтальной проекции видно, что с конусом пересекается одно боковое ребро. Проведем через вершину  $S$  конуса и это ребро посредник  $\sigma (\sigma_1) \perp P_r$ , который пересечет конус по образующей с горизонтальной проекцией  $(S, C_1)$ . Строим фронтальную проекцию этой образующей и в пересечении с фронтальной проекцией ребра отмечаем точку  $C_2$  крестиком, так как точка  $C$  лежит за плоскостью  $\varphi (\varphi_1)$  главного меридиана и на фронтальной проекции не видна, так же как точка  $H (H_2)$ .

Фронтальную проекцию  $B_2$  точки  $B$  ( $B_1$ ) пересечения главного меридиана с гранью призмы отмечаем по линии связи  $B_1 \rightarrow B_2$ . Эта точка является границей видимости на фронтальной проекции.

Известно, что в сечении конуса плоскостью, параллельной его оси, образуется гипербола. Следовательно, в нашем случае грани с конусом пересекаются по гиперболам. Из точки  $S_1$  опустим перпендикуляры на грани и отметим точки  $A_1$  и  $F_1$  — горизонтальные проекции вершин гипербол. Построим параллели, радиусы которых равны отрезкам  $[S_1, A_1]$  и  $[S_1, F_1]$  соответственно, укажем их фронтальные проекции и по линии связи отметим фронтальные проекции  $A_2$  и  $F_2$  вершин с учетом видимости.

Фронтальную проекцию  $D_2$  точки  $D$  профильного меридиана определим с помощью параллели, радиус которой равен отрезку  $[S_1, D_1]$ .

На рис. 12.2 параллели показаны не полностью, а только в той части, где они нужны для пояснения и определения необходимых точек. Это сделано с целью освобождения изображений от лишних линий. Такой прием будет использоваться и в других примерах. Параллель, проходящая через точку  $D$ , пересекает грани и в других точках, например  $1$  ( $1_1 \rightarrow 1_2$ ) и  $2$  ( $2_1 \rightarrow 2_2$ ), которые относятся к категории случайных, и их полезно отметить.

Для построения случайных точек в примере удобно использовать горизонтальные плоскости уровня  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ). Плоскость  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) рассекает конус по параллели  $m$  ( $m_2 \rightarrow m_1$ ), а призму по треугольнику  $n$  ( $n_2 \rightarrow n_1$ ), конгруэнтному основанию. Пересечение их горизонтальных проекций определяет точки  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$  и  $\beta_1 \rightarrow \beta_2$ . Аналогично определены точки  $5_1 \rightarrow 5_2$ ,  $7_1 \rightarrow 7_2$ ,  $3_1 \rightarrow 3_2$ ,  $4_1 \rightarrow 4_2$ .

Полученные точки одной грани последовательно соединяются плавной кривой с учетом видимости. После построения кривой обводятся видимые участки очерков поверхностей.

Во многих случаях есть несколько приемов решения одной и той же задачи. Их выбор определяется конструктором, который стремится обеспечить качественное решение при меньших затратах труда. Например, можно рассекать конус по образующим (типа сечения плоскостью  $\sigma$  ( $\sigma_1$ )) и отмечать точки их пересечения с соответствующими гранями.

На рис. 12.3 рассмотрен пример построения линий пересечения аналогичного конуса  $\alpha$  с наклонной призмой  $\beta$ . Здесь использованы только самые необходимые обозначения, чтобы не перегружать чертеж.

Ребро  $LL'$  не пересекает конус. Точки  $A$  ( $A_1 \rightarrow A_2$ ) и  $B$  ( $B_1 \rightarrow B_2$ ) пересечения других боковых ребер с конусом определим способом дополнительного параллельного проецирования объекта на плоскость его оснований по направлению  $s$  ( $s_1, s_2$ )  $\parallel GG'$ . Параллель основания конуса не изменит своего положения, а его вершина  $S$  изобразится точкой  $\bar{S}_1$ . Проекция призмы совпадет с ее нижним основанием, то есть, например, ребро  $GG'$  изобразится точкой, совпадающей с  $G'_1$ . Очевидно, здесь же будет и дополнительная проекция точки  $A = (GG') \cap \alpha$ . Построим образующую  $\bar{S}_1, l_1$ , проходящую через эту точку, и обратным проецированием построим ее ортогональную проекцию  $1, S_1 \rightarrow 1_2, S_2$ , а в пересечении с ребром отметим точку  $A$  ( $A_1 \rightarrow A_2$ ). Аналогичным построением определяем положение точки  $B$  ( $B_1 \rightarrow B_2$ ) =  $(KK') \cap \alpha$ . Для построения вершины  $C$  гиперболы введем новую фронтальную плоскость проекций  $\Pi_4 \perp GK$  ( $x_k \perp GK_1$ ) и построим новую фронтальную проекцию конуса и призмы.

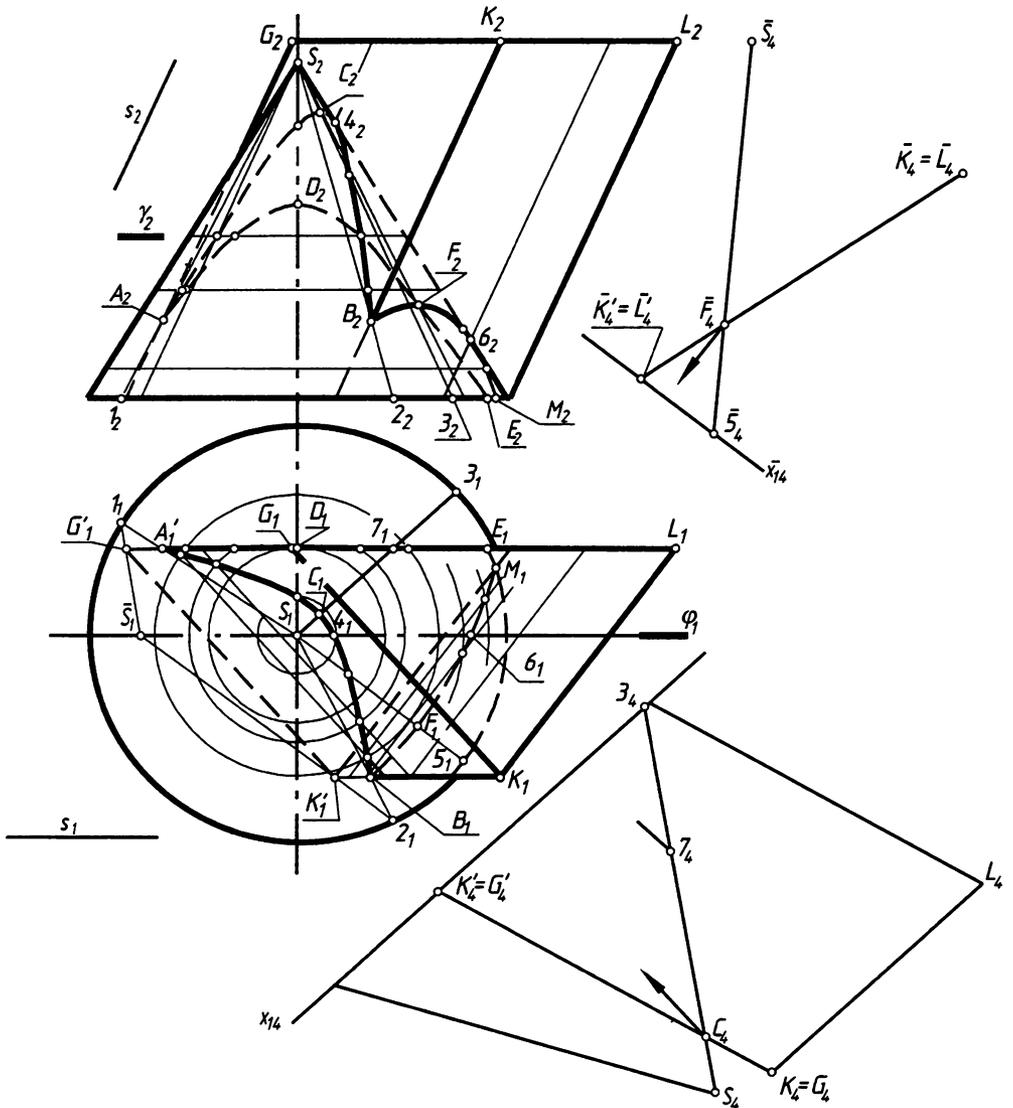


Рис. 12.3. Построение линии пересечения поверхностей с использованием преобразования чертежа

Грань  $GK_4K'G'$  стала проецирующей и ее пересечение  $C_4$  с фронталью (образующей конуса)  $S_43_4$  определяет положение точки  $C$ : по линиям связи строим  $S_13_1 \parallel x_{14} \rightarrow C_1 \rightarrow S_23_2 \rightarrow C_2$ . Попутно отмечаем случайную точку  $7_1 \rightarrow 7_2$  (проекция  $7_2$  точки не показана). Для построения вершины  $F$  гиперболы введем новую фронтальную плоскость проекций  $\bar{\pi}_4 \perp KL$ . На этой плоскости построена проекция только одной грани  $KLL'K'$ , которая стала проецирующей, и образующей  $S-5$ , которая является фронталью. Далее строим  $\bar{F}_4 \rightarrow S_15_1 \rightarrow F_1 \rightarrow S_25_2 \rightarrow F_2$ . Отмечаем опорные точки

$M (M_1 \rightarrow M_2)$  и  $E (E_1 \rightarrow E_2)$ . Границы видимости  $4 (4_2 \rightarrow 4_1)$  и  $6 (6_2 \rightarrow 6_1)$  определяем с помощью сечения поверхностей плоскостью  $\phi (\phi_1) \parallel \Pi_2$ . Вершину  $D (D_1 \rightarrow D_2)$  гиперболы определяем с помощью параллели, касающейся грани  $GLL'G'$ . На этом построение специальных (опорных) точек закончено. Случайные точки строим с помощью горизонтальных сечений поверхностей плоскостями типа  $\gamma (\gamma_2)$ . После этого строим плавные кривые пересечений и обводим изображения с учетом видимости. Заметим, что преобразования чертежа значительно помогли нам в построениях.

На рис. 12.4 показано изделие, в котором использованы поверхности прямого кругового цилиндра и закрытого тора. Если построены три вида объекта, то здесь удобно использовать профильную проекцию поверхностей и горизонтальную плоскость уровня  $\gamma (\gamma_2, \gamma_3)$ .

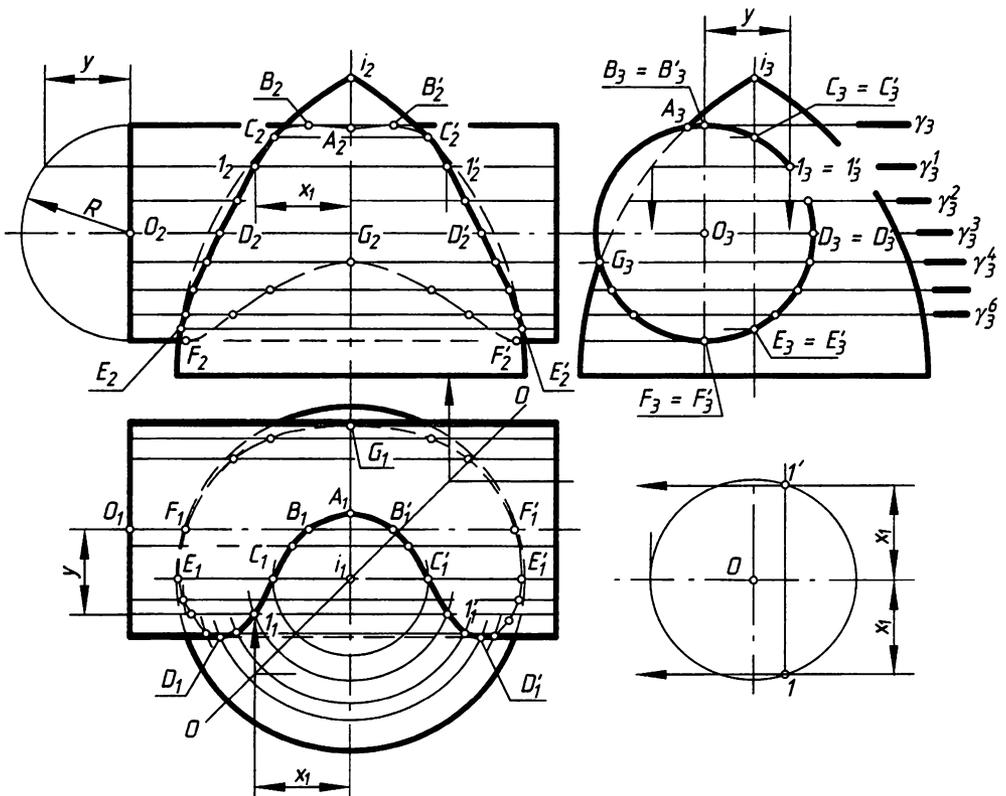


Рис. 12.4. Пересечение цилиндра и тора

Пересечение профильных очерков определяет опорные точки  $A_3$  и  $G_3$ . Проекции  $A_2$  и  $B_2$  находим по горизонтальным линиям связи, а  $A_1$  и  $G_1$  по координате  $y$ , измеренной от вертикальной плоскости симметрии цилиндра или от оси  $i (i_3, i_1)$  тора. Плоскость  $\gamma (\gamma_2, \gamma_3)$  пересекает тор по параллели и проходит через образующую фронтального очерка цилиндра. Пересечение их горизонтальных проекций опре-

деляет точки  $B (B_1 \rightarrow B_2)$  и  $B' (B'_1 \rightarrow B'_2)$ . Это самые высокие точки, и они же являются верхней границей видимости для цилиндра.

Точно так же находим самые нижние точки  $F (F_1 \rightarrow F_2)$  и  $F' (F'_1 \rightarrow F'_2)$  (для них посредник не обозначен, а точки  $F_1$  и  $F'_1$  определены засечками из  $i_1$  без построения всей параллели).

Точки  $C (C_3 \rightarrow C_2 \rightarrow C_1)$ ,  $C' (C'_3 \rightarrow C'_2 \rightarrow C'_1)$  и  $E (E_3 \rightarrow E_2 \rightarrow E_1)$ ,  $E' (E'_3 \rightarrow E'_2 \rightarrow E'_1)$  пересечения главного меридиана тора с цилиндром определяются по линиям связи и не требуют дополнительных построений.

Точки  $D (D_1 \rightarrow D_2)$ ,  $D' (D'_1 \rightarrow D'_2)$ , принадлежащие образующей горизонтального очерка цилиндра, определяются с помощью посредника  $\gamma (\gamma_3^3)$ . На профильной проекции берем радиус параллели тора в плоскости  $\gamma_3^3$ , этим радиусом строим окружность с центром  $i_p$ , и ее пересечение с очерком цилиндра определяет точки  $D_1$  и  $D'_1$ .

Для определения случайных точек  $1$ ,  $1'$  используем посредник  $\gamma^1 (\gamma_3^1)$ , который пересекает цилиндр по образующей, находящейся на расстоянии  $u$  от вертикальной плоскости симметрии цилиндра. Если на горизонтальной проекции расстояние  $u$  отложить от оси цилиндра в соответствующую сторону, то мы построим горизонтальную проекцию этой образующей, а ее пересечение с проекцией соответствующей параллели тора определит случайные точки  $1_1$  и  $1'_1$  линии пересечения. По линиям связи отмечаем точки  $1_2$ ,  $1'_2$  на фронтальной проекции.

Часто в реальных чертежах мы имеем только две проекции. Можно обойтись и без профильной проекции, если построить дугу окружности основания радиуса  $R$  из проекции  $D_2$  центра основания цилиндра, которую можно рассматривать как проекцию цилиндра на плоскость, перпендикулярную его оси. Тогда координата  $u$  любой образующей плоскости  $\gamma$  определяется по этой дуге, как показано на рис. 12.4 для образующей плоскости  $\gamma (\gamma_3^3)$ . То есть на фронтальной проекции выбирается положение образующей, замеряется ее координата  $u$  на построенной полуокружности, строится горизонтальная проекция образующей и соответствующей параллели тора, а их пересечение определяет точки типа  $1_1$  и  $1'_1$ .

Можно построить линию пересечения поверхностей по фронтальной и профильной проекции, если координату  $x$  ее точек определять с помощью простого дополнительного построения. На вертикальной оси профильной проекции поверхности вращения выбираем произвольную точку  $D$ , из нее строим параллель, профильная проекция которой проходит через выбранные точки (в примере точки  $1$  и  $1'$ ). По вертикальной линии связи отмечаем эти точки на построенной параллели и определяем их координату  $x$ , а по ней строим проекции  $1_2$  и  $1'_2$ . Переносить этот отрезок (в примере  $x$ ) удобно через линию  $o-o$ , которая проходит под углом  $45^\circ$  через точку (в примере  $i_1$ ) пересечения вертикальной оси соответствующей поверхности с горизонтальной линией связи точки  $D$ .

Аналогично построены случайные точки с помощью посредников  $\gamma^2, \gamma^4, \gamma^5, \gamma^6$ .

Полученные точки соединяются плавной кривой с учетом видимости. Порядок кривой определяется произведением порядков пересекающихся поверхностей. Это значит, что в рассмотренном примере мы построили проекции кривой четвертого порядка.

## 12.2. Построение линий пересечения поверхностей способом концентрических сфер

Способ *концентрических сфер* применяется в следующих случаях:

1. Пересекаются поверхности вращения.
2. Оси вращения поверхностей пересекаются.
3. Пересекающиеся оси вращения образуют плоскость уровня, или проецирующую плоскость.

Способ концентрических сфер основан на свойстве *соосных поверхностей вращения*, которые *всегда пересекаются по параллелям*. Это свойство легко проследить на примере (рис. 12.5).

Пусть заданы поверхности вращения:

- $\alpha(g, i)$ , где  $g$  — образующая,  $i$  — ось вращения, обе линии расположены во фронтальной плоскости уровня (рис. 12.5, а);
- $\gamma(b, i)$ , где  $b$  — образующая,  $i$  — та же ось вращения, которые расположены в той же фронтальной плоскости уровня (см. рис. 12.5, а).

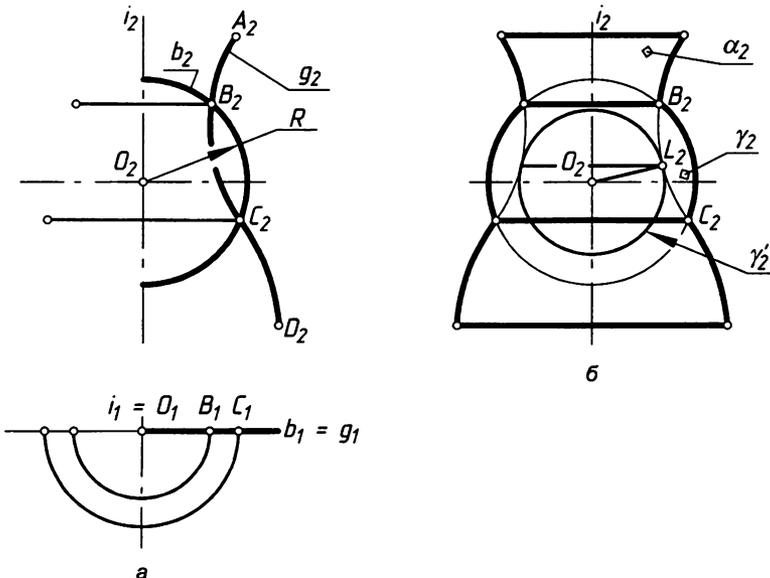


Рис. 12.5. Пересечение соосных поверхностей вращения

Если заданные образующие пересекаются в точках  $(B, C) = b \cap g$ , то при вращении эти точки опишут параллели, фронтальные проекции которых будут прямыми линиями, перпендикулярными оси вращения, и которые будут принадлежать обеим поверхностям, следовательно, будут являться линиями их пересечения (рис. 12.4, б).

Если образующая  $b$  ( $b_2$ ) является дугой окружности радиуса  $R$  с центром  $O$  ( $O_2$ ) на оси  $i$  ( $i_2$ ) вращения, то поверхность  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) будет сферой, соосной с поверхностью  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ). Сфера замечательна тем, что любая прямая, проходящая через ее центр  $O$  ( $O_2$ ), может быть принята за ось вращения. Из одного центра  $O$  ( $O_2$ ) можно построить множество сфер, которые называют концентрическими. С изменением радиуса  $R$  сферы будут меняться и параллели ее пересечения с поверхностью  $\alpha$ . Сфера  $\gamma'$  ( $\gamma'_2$ ), вписанная в поверхность  $\alpha$  ( $\alpha_2$ ), будет иметь с ней параллель касания, которую описывает точка  $L$  ( $L_2$ ) касания меридианов поверхностей.

Сфера меньшего, чем у  $\gamma'$  ( $\gamma'_2$ ), радиуса будет находиться внутри поверхности  $\alpha$ , не имея с ней общих линий.

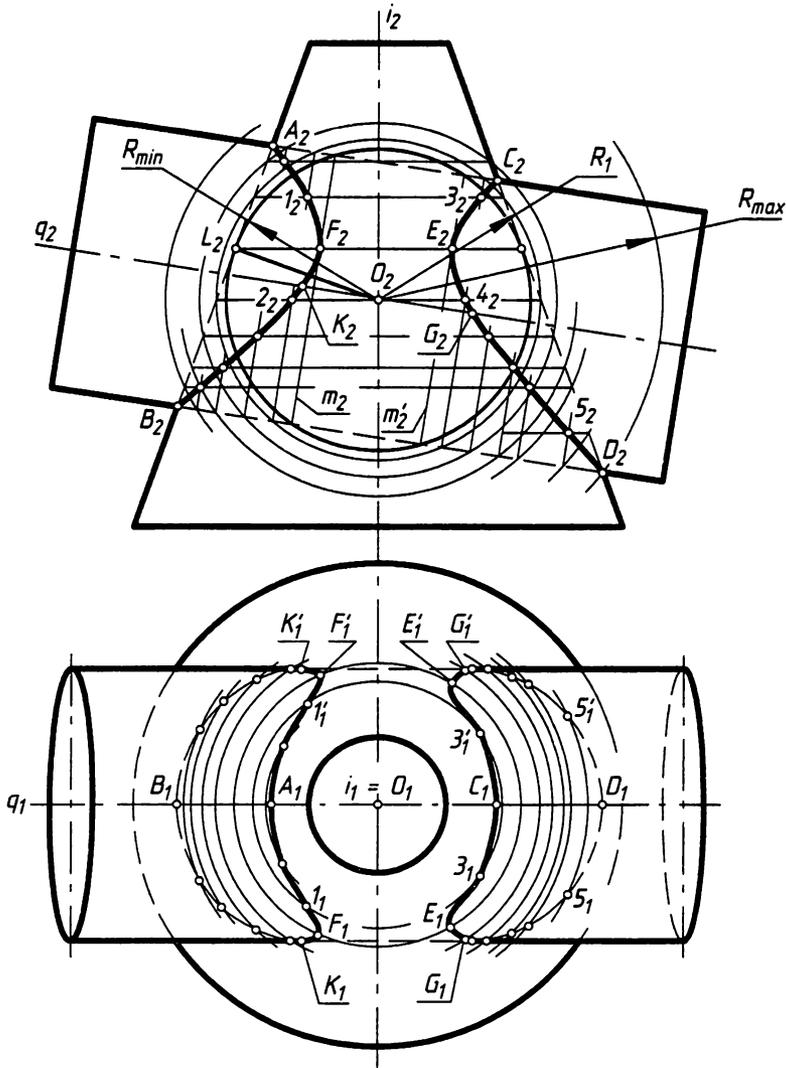


Рис. 12.6. Применение способа концентрических сфер

Рассмотрим пример применения концентрических сфер для построения линии пересечения поверхностей цилиндра и конуса вращения (рис. 12.6). Отметим опорные точки  $A (A_2)$ ,  $B (B_2)$ ,  $C (C_2)$ ,  $D (D_2)$  пересечения очерковых линий, лежащих в общей плоскости симметрии поверхностей.

Выберем центр  $O (O_1, O_2)$  вспомогательных сфер в точке пересечения осей вращения  $i (i_1, i_2)$  и  $q (q_1, q_2)$ . Сфера, вписанная в одну из поверхностей и пересекающая другую поверхность, будет являться сферой наименьшего радиуса  $R_{\min}$ . Если взять сферу еще меньше, она не будет иметь общих линий ни с одной из поверхностей и поэтому не подходит для решения поставленной задачи.

Из точки  $O_2$  проведем перпендикуляр к очерковой образующей конуса. Его основание  $L_2$  будет принадлежать параллели касания сферического посредника радиуса  $R_{\min} = [O_2 L_2]$  с конусом, а с цилиндром эта сфера пересечется по параллелям  $m (m_2)$  и  $m' (m'_2)$ , пересечение которых с параллелью конуса определит точки  $F_2$  и  $E_2$  линии пересечения. Цилиндр дважды пересекает коническую поверхность. Линии пересечения симметричны относительно общей плоскости симметрии, образованной осями  $i \cap q$ , и на фронтальную плоскость проецируются кривыми второго порядка (гиперболами).

Если увеличивать диаметр цилиндра, то точки  $E, F$  будут сближаться. Когда радиус цилиндра будет равен  $R_{\min}$ , точки  $E$  и  $F$  совпадут, линии пересечения распадутся на две плоские кривые (эллипсы). При дальнейшем увеличении радиуса цилиндра точки  $E, F$  будут расходиться, но уже в направлении оси  $i (i_2)$  конуса, то есть конус будет врезаться в цилиндр или пронизать его.

Сфера радиуса  $R$ , пересечет обе поверхности по двум параллелям, пересечение которых определит точки 1 ( $1_2$ ), 2 ( $2_2$ ) и 3 ( $3_2$ ), 4 ( $4_2$ ).

Увеличивая последовательно сферы, строят другие необходимые точки линий пересечения. Наибольший радиус  $R_{\max}$  сферы равен расстоянию от центра сфер  $O (O_2)$  до наиболее удаленной точки пересечения очерков (в примере —  $D_2$ ). В примере на рис. 12.6 многие параллели построены не полностью, чтобы не загромождать изображение лишними линиями, а в инженерной работе ограничиваются необходимыми засечками. Полученные точки соединяют плавной кривой линией.

Пересечение образующих горизонтального очерка цилиндра, лежащих во фронтально проецирующей плоскости, с построенными линиями показывает точки  $K (K_2)$  и  $G (G_2)$ , которые являются границами видимости на горизонтальной проекции ( $K_p, K'_p$  и  $G_p, G'_p$ ). Эти точки относятся к числу опорных. Их можно определить, как точки пересечения прямых (образующих) с конусом или как точки пересечения проекций этих прямых с проекциями построенных линий пересечения, что сделано в нашем примере.

Для построения горизонтальной проекции линии пересечения используются линии связи и соответствующие параллели одной из поверхностей. Например, параллели конуса, проходящей через проекции  $1_2$  и  $3_2$ , на горизонтальной проекции будут соответствовать фронтально конкурирующие точки  $1_p, 1'_p$  и  $3_p, 3'_p$  линии пересечения. Таким образом, у каждой параллели будут пары точек, кроме точек  $A, B, C, D$  пересечения очерков.

При построении горизонтальной проекции линии пересечения можно использовать любые другие параллели или линии каркаса в дополнение или взамен использованных ранее линий. Можно, например, заказать горизонтальную проекцию параллели, построить ее фронтальную проекцию, отметить точки пересечения с указанными линиями и по линиям связи отметить их на горизонтальной проекции.

Способ концентрических сфер достаточно прост, удобен, позволяет построить проекции линий пересечения на одном изображении, не обращаясь к другому изображению.

### 12.3. Построение линий пересечения поверхностей способом эксцентрических сфер

Способ *эксцентрических сфер* применяется в следующих случаях:

1. Пересекаются поверхности вращения, оси которых не пересекаются, или одна из поверхностей является поверхностью вращения, а другая имеет круговые сечения.
2. Обе поверхности имеют общую плоскость симметрии.
3. Плоскость симметрии поверхностей параллельна одной из плоскостей проекций (является плоскостью уровня).

Этот способ использует свойства поверхностей вращения, отмеченные в способе концентрических сфер, и дополнительно следующее свойство сфер (рис. 12.7).

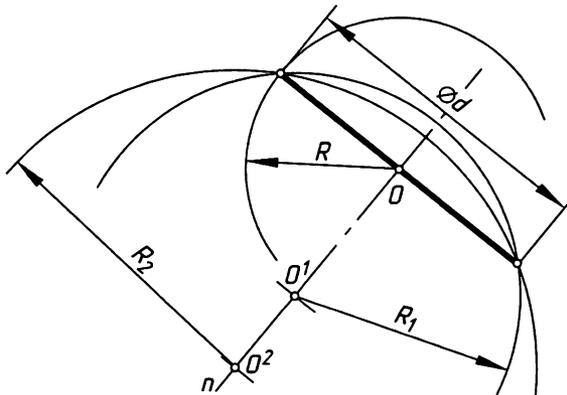


Рис. 12.7. Построение проекции сферы по заданной проекции окружности

Возьмем окружность диаметра  $d$  в проецирующей плоскости и через ее центр  $O$  проведем нормаль  $n$  к плоскости окружности. На изображении это будет прямая линия длиной  $d$ , через середину которой проведен перпендикуляр  $n$ .

Любая точка ( $O, O', O^2$ ) на линии  $n$  может быть принята за центр сферы, на которой лежит эта окружность. Минимальная сфера с центром в точке  $O$  будет иметь радиус,



с проекцией  $m_2$  кругового сечения. В пересечении кругового сечения  $m$  ( $m_2$ ) с параллелью конуса  $p$  ( $p_2$ ) получим пару конкурирующих случайных точек  $l, l'$ . На рис. 12.8 отмечена проекция  $l_2 = m_2 \cap p_2$  точки  $l$  линии пересечения, а конкурирующая точка не обозначена, чтобы не загромождать изображение.

Затем выполняется новое сечение плоскостью  $\gamma^1$  ( $\gamma_2^1$ ), по которому строится новая сфера и точки пересечения. Такой прием применяют необходимое количество раз.

Для определения точки  $C$  ( $C_2$ ) пересечения, которая является границей видимости на виде сверху цилиндра, можно поступить следующим образом. Возьмем параллель конуса, лежащую в одной плоскости  $\sigma$  ( $\sigma_2$ ) с образующими цилиндра, и отметим на ней точку  $K_2$ . Из этой точки построим перпендикуляр к образующей конуса, в пересечении которого с осью  $i$  ( $i_2$ ) возьмем центр сферы  $O_2^n$ . Если построить сферу радиуса  $R^n = [O_2^n K_2]$ , то она будет вписана в конус и коснется его по параллели точки  $K$  ( $K_2$ ). Эта же сфера пересечет цилиндр по окружности в плоскости  $\gamma^n$  ( $\gamma_2^n$ ), пересечение которой с параллелью определит точку  $C$  ( $C_2$ ).

Эту же точку можно определить без построения сферы и плоскости  $\gamma^n$ , если из точки  $O_2^n$  провести прямую перпендикулярно направлению посредников  $u$  до пересечения с  $q_2$ , то есть  $C_2 = q_2 \cap (O_2^n C_2)$ , а  $(O_2^n C_2) \perp \gamma_2$ .

Этот способ также позволяет построить линию пересечения, не обращаясь к другой проекции. Но следует обратить внимание на необходимость тщательных и аккуратных построений.

На рис. 12.9 показан пример решения аналогичной задачи при пересечении конуса с поверхностью открытого тора. Здесь показаны две проекции (два вида) поверхностей, но решать задачу можно вначале на фронтальной проекции, а потом на горизонтальной, или параллельно. Вид сверху показан только для демонстрации его построения.

Фронтально проецирующая прямая  $q$  ( $q, q_2$ ) является осью вращения тора и лежит в одной плоскости с образующей его окружностью.

□  $v$  ( $v, v_2$ ) — внутренняя ось симметрии тора;

□  $i$  ( $i, i_2$ ) — ось вращения конуса.

Меридиональные сечения тора (плоскостями  $\gamma$ , проходящими через ось вращения  $q$ ) будут круговыми. Мы как бы фиксируем движение образующей окружности в отдельных положениях. Например, круговое сечение тора плоскостью  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) изобразится отрезком [3–4] с точкой  $K_2 = v_2 \cap (3-4)$ , которая является проекцией центра кругового сечения. Через точку  $K$  ( $K_2$ ) проведем нормаль  $n$  ( $n_2$ ) к плоскости  $\gamma$ : ( $K_2 \in n_2 \perp \gamma_2$ ). Точка  $O_2 = n_2 \cap i_2$  будет проекцией центра сферы радиуса  $R$ , которая и является основным посредником.  $R = [O_2-3] = [O_2-4]$ . Если равенства отрезков  $[O_2-3]$  и  $[O_2-4]$  не получается, следует более точно определить положение центра  $O_2$ .

Введенная сфера пересечет тор по окружности [3–4], а конус по параллели [5–6]. Их пересечение определит положение пары фронтально конкурирующих точек  $l = l'$  (на фронтальной проекции обозначена только точка  $l_2$ ).

Далее делаются новые круговые сечения плоскостями  $\gamma^1$  ( $\gamma_2^1$ ) ...  $\gamma^n$  и строится необходимое количество точек, по которым проводится плавная кривая пересечения. Начинать построение следует с выделения опорных точек. На рис. 12.9 точки

$A (A_2)$  и  $B (B_2)$  являются точками пересечения очерков поверхностей, а точка  $C (C_2)$  выделена после построения линии пересечения.

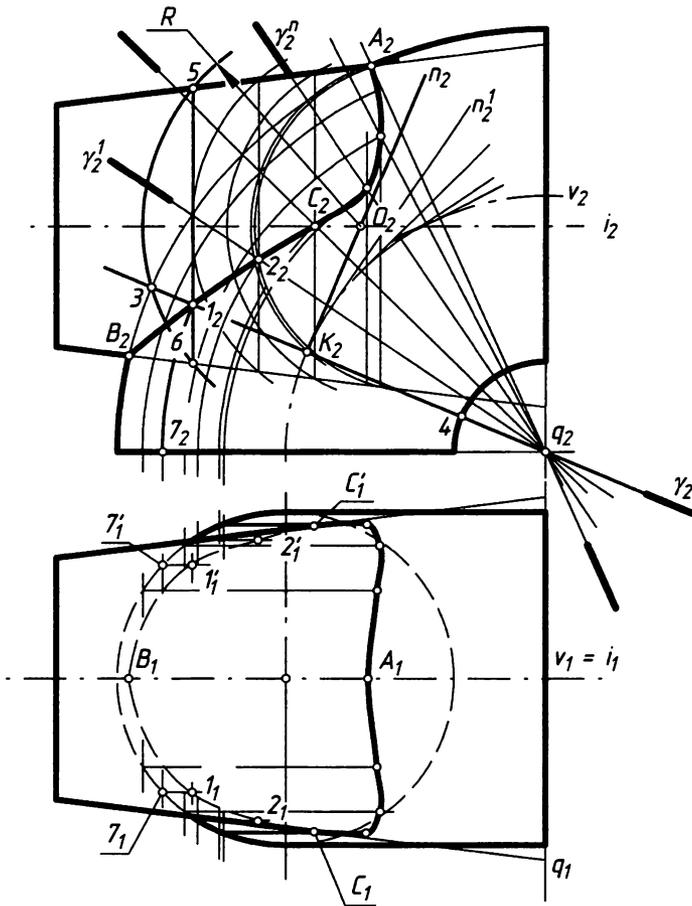


Рис. 12.9. Пересечение конуса с тором

Для построения горизонтальной проекции линии пересечения удобно использовать параллели тора. Их плоскости перпендикулярны оси вращения  $q (q, q_2)$ . Поэтому фронтальные проекции параллелей тора будут окружностями с центром  $q_2$ , а их горизонтальные проекции — прямыми, перпендикулярными  $q_1$ .

Точки  $A$ , и  $B$ , находим по линии связи. Точки  $C$ , и  $C_1'$  определятся по линии связи на очерковых образующих конуса, они являются границей видимости на горизонтальной проекции: все, что ниже их, не видно.

Через точку  $1_2$  радиусом  $[q_2 - 1_2]$  проведем проекцию параллели и отметим точку  $7_2$  ее пересечения с образующей окружностью. По линии связи отметим горизонтальные проекции  $7_1$  и  $7_1'$ , а через них проведем перпендикулярно  $q_1$  прямые — проекции фронтально конкурирующих параллелей, на которых по

линии связи отмечаем проекции  $1$ , и  $1'$ . Так строятся все необходимые точки и соединяются плавной кривой с учетом видимости, а затем обводятся очерки поверхностей.

При решении учебных задач рекомендуется все линии построения сохранить, как показано на предыдущих рисунках. В инженерных задачах при построениях делают необходимые засечки, а потом ненужные линии удаляются.

## 12.4. Частные случаи пересечения поверхностей второго порядка

Поверхности второго порядка широко используются в различных изделиях. При построении линии их пересечения можно использовать рассмотренные нами способы. Но в частных случаях эти линии можно построить быстрее и точнее, если использовать известные теоремы, которые мы примем без доказательств.

**Теорема 1.** Если две поверхности  $\alpha$  и  $\beta$  второго порядка (рис. 12.10) имеют одну общую кривую второго порядка ( $k = \alpha \cap \beta$ ), то они пересекаются еще по одной кривой второго порядка ( $l = \alpha \cap \beta$ ).

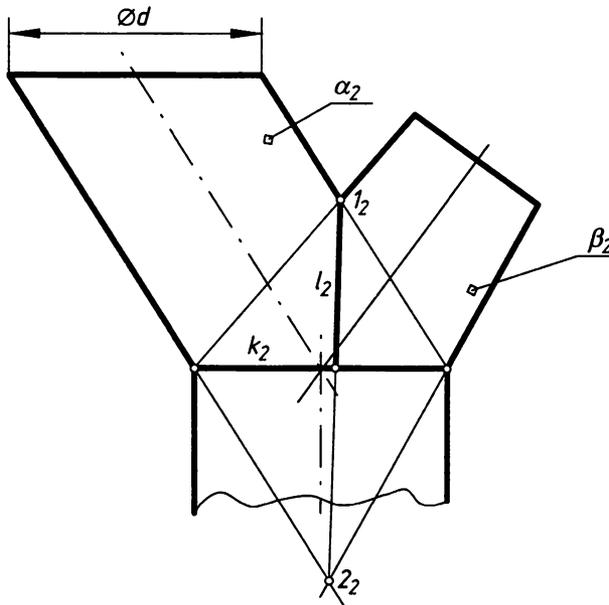


Рис. 12.10. Частный случай построения линий пересечения поверхностей

Общая плоскость симметрии поверхностей является плоскостью уровня, а плоскость окружности  $k$  ( $k_2$ ) проецирующая. Ее можно принять за направляющую поверхностей  $\alpha$  и  $\beta$ , и одновременно она является линией второго порядка их пересечения. Плоскость второй линии пересечения  $l$  ( $l_2$ ) тоже будет проецирующей, и для ее построения достаточно соединить прямой линией опорные точки  $1_2$  и  $2_2$  пересечения очерков.

**Теорема 2.** Если две поверхности второго порядка (рис. 12.11) имеют две точки ( $E$  и  $F$ ) соприкосновения, то линия их пересечения распадается на две кривые второго порядка, которые пересекаются в указанных точках.

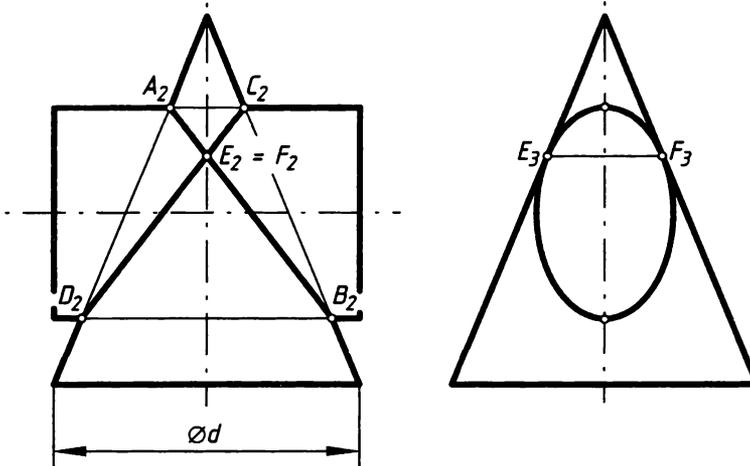


Рис. 12.11. Пересечение поверхностей с двойным соприкосновением

Линии пересечения поверхностей определяются точками  $A, B$  и  $C, D$  пересечения их очерков и фронтально конкурирующими точками  $E$  и  $F$  соприкосновения поверхностей.

**Теорема 3 (теорема Г. Монжа).** Если две поверхности второго порядка описаны около третьей поверхности второго порядка или вписаны в нее, то они пересекаются по двум кривым второго порядка. Плоскости этих кривых пересекаются по прямой, соединяющей точки пересечения линий касания (рис. 12.12).

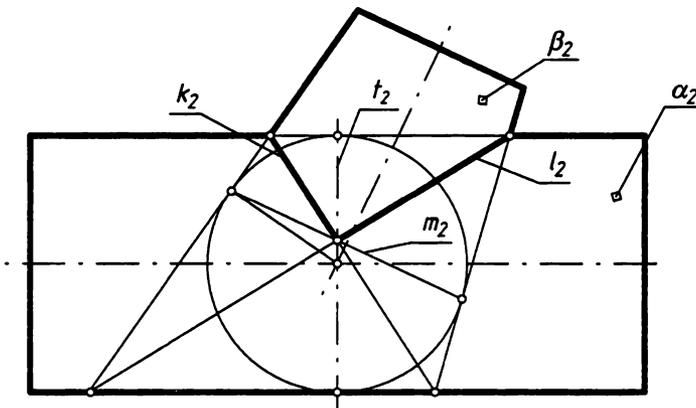


Рис. 12.12. Пересечение поверхностей, описанных около сферы

Поверхности  $\alpha$  и  $\beta$  касаются сферы по окружностям  $t$  ( $t_2$ ) и  $m$  ( $m_2$ ), плоскости которых проектирующие. Линия их пересечения будет проектирующей прямой.



плоскость  $\gamma (\gamma_2)$ , которая пересечет поверхность по линии  $d$  ( $d_p$ , обозначение  $d_2$  не показано), и построить касательную  $b$  ( $b_1 \rightarrow b_2$ ) к этому эллипсу. Геометрическое место касательных в точке  $M$  образует плоскость  $\delta$  ( $h \cap b$ ), которая соприкасается с цилиндром по образующей  $l$  ( $l_1, l_2$ ). На рис. 12.13, *a* условно (для наглядности) выделен отсек плоскости  $\delta$ . Здесь и в последующих рисунках принято условие, что построенные касательные плоскости не изменяют видимости основного объекта.

Следовательно, касательная плоскость является геометрическим местом прямых линий, касательных к поверхности в заданной регулярной точке.

Если касание поверхности с плоскостью происходит по прямой линии, то точки этой линии называются *параболическими*. К поверхностям с параболическими точками относятся цилиндры, конусы и торсы. Их называют поверхностями нулевой кривизны.

Через произвольную точку  $N$  ( $N_1, N_2$ ) (рис. 12.13, *б*) можно провести множество касательных к поверхности цилиндра. Например, к линии сечения  $a$  ( $a_1$ ) плоскостью  $\gamma$  ( $\gamma_2$ ) проведены касательные горизонталь  $h$  и  $h'$ . Через прямую  $b$  ( $b_1, b_2$ ), параллельную образующим цилиндра, проведены две плоскости, которые соприкасаются с цилиндром по линиям  $l$  и  $l'$ . Построения показаны и понятны на рис. 12.13, *б*. Эти плоскости можно рассматривать как грани призмы, в которую вписан цилиндр. То есть касание является частным случаем пересечения геометрических объектов.

На рис. 12.14 показано построение прямой и плоскости, касательной к конусу.

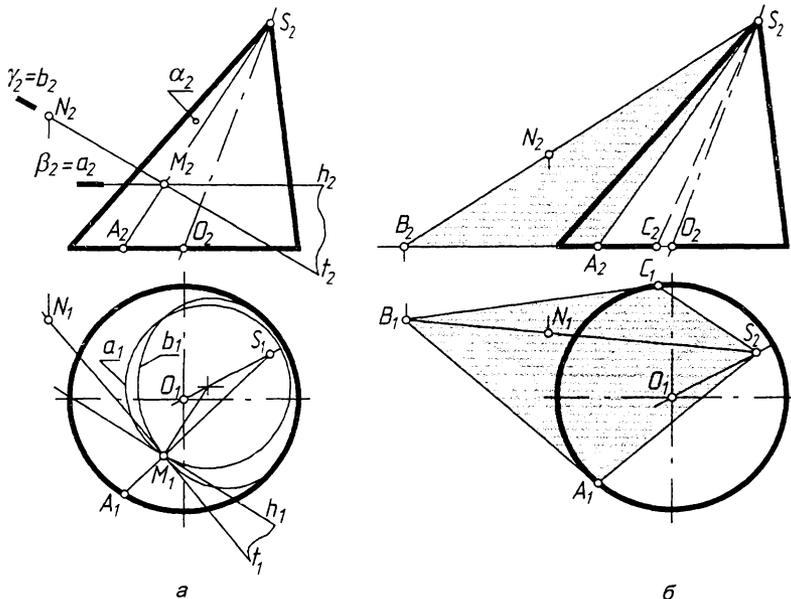


Рис. 12.14. Построение плоскости, касательной к конической поверхности

На рис. 12.14, *a* в точке  $M$  поверхности построена касательная горизонталь  $h$  ( $h_1, h_2$ ) и касательная  $t$  ( $t_1, t_2$ ) общего положения, проходящая через заданную точку  $N$ .

Горизонталь  $h$  касается параллели  $a$ , лежащей в плоскости  $\beta$ , а линия  $t$  касается эллипса, по которому плоскость  $\gamma$  пересекает поверхность конуса. Эти касательные принадлежат плоскости, которая соприкасается с конусом по линии  $SA$ .

Для построения плоскости, проходящей через заданную точку  $N$  (см. рис. 12.14, б) и соприкасающейся с конусом, проведем прямую  $SN$ , построим ее горизонтальный след  $B = SN \cap \Pi_1$  и касательные  $BA$  и  $BC$  к линии основания. Мы построили плоскости  $\delta (SB \cap BA)$  и  $\delta' (SB \cap BC)$ , которые соприкасаются с конусом по образующим  $SA$  и  $SC$ . Получается конус, вписанный в трехгранную пирамиду, или пирамида, у которой одна грань заменена конической поверхностью. Однако на поверхности могут быть точки, в которых невозможно провести касательную. Например, вершина  $S$  поверхности, в которой линии меридиана пересеклись. Такие точки называют особыми.

Построение касательной в точке  $M$  сферы показано на рис. 12.15, а. Через точку  $M$  сферы провели секущие плоскости  $\beta (\beta_2 \parallel \Pi_1)$  и  $\gamma (\gamma_1 \parallel \Pi_2)$ . В точке  $M$  построили касательные линии уровня  $h (h_1 \rightarrow h_2)$  и  $f (f_2 \rightarrow f_1)$  к соответствующим линиям сечения.

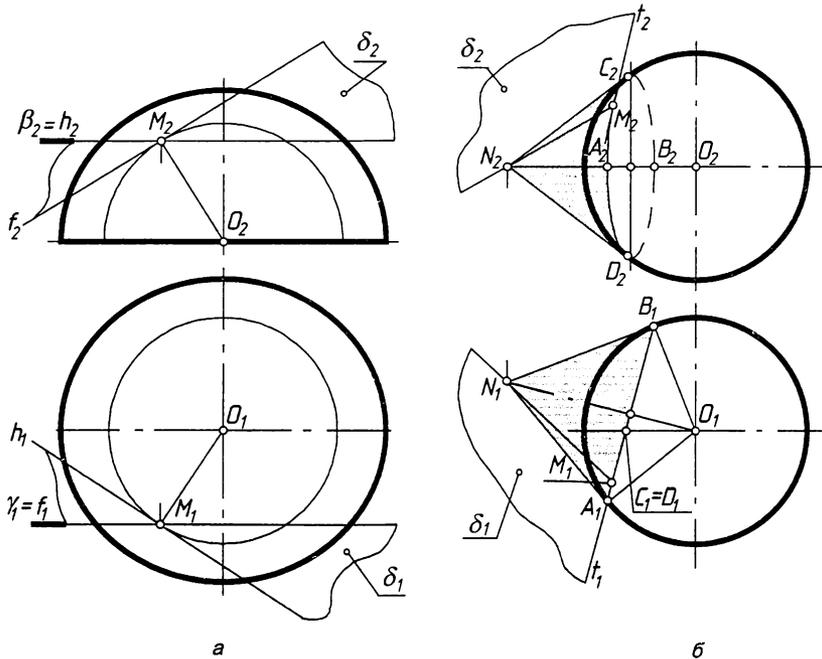


Рис. 12.15. Построение касательной к поверхности с эллиптическими точками

Эти линии определяют положение касательной плоскости  $\delta (h \cap f)$  в точке  $M$ . Точки касания, в окрестности которых поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости, называются *эллиптическими*. Поверхности только с эллиптическими точками называют поверхностями положительной кривизны, или выпуклыми. Множество касательных линий, проходящих через внешнюю точку  $N$  (рис. 12.15, б), образует коническую поверхность, которая касается сферы по окружности  $ACBD$

(выделены только точки, принадлежащие линиям очерка поверхностей). Касательные плоскости, проходящие через точку  $N$ , касаются конической поверхности по ее образующим. Чтобы выделить конкретную плоскость  $\delta(\delta, \delta_2)$ , надо на линии касания взять точку  $M$  и через нее провести касательную  $NM$  и касательную  $t(t_1, t_2)$  к линии соприкосновения конуса с поверхностью. То есть через точку  $N$  можно провести множество касательных плоскостей, но все они будут касаться поверхности только в точках, лежащих на линии  $ACBD$ .

На рис. 12.16 показана поверхность глобоида, образованного вращением окружности радиуса  $R$ .

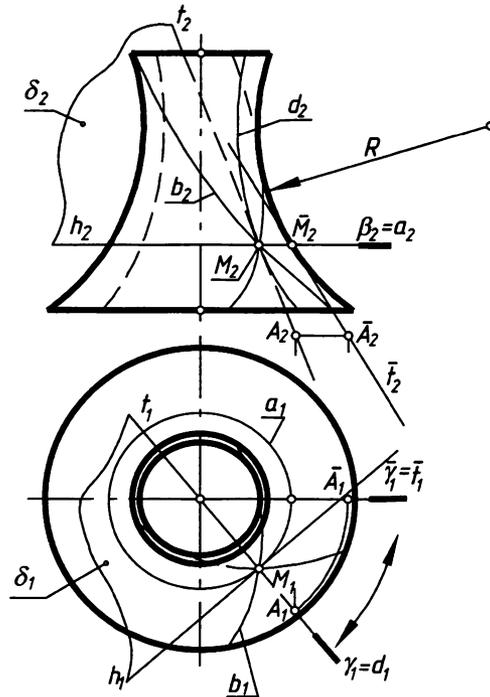


Рис. 12.16. Построение касательной к поверхности с гиперболическими точками

Для построения касательной линии в точке  $M$  поверхности воспользуемся сечением плоскостью  $\beta(\beta_2)$  и проведем горизонталь  $h(h_2)$ , касательную к параллели  $a(a_2)$ . При сечении поверхности плоскостью  $\gamma(\gamma_1)$ , проходящей через ось вращения, получим линию  $d(d_2)$  меридиана с точкой  $M$ . Вращением преобразуем эту плоскость до положения  $\bar{\gamma}_1$  фронтальной плоскости уровня. В точке  $M$  построим касательную  $\bar{t}(\bar{t}_1, \bar{t}_2)$  к линии меридиана. На этой касательной отметим произвольную точку  $\bar{A}(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$  и обратным вращением построим ее действительное положение  $A(A_1, A_2)$ . Касательная  $t(t_1, t_2)$  проходит через точки  $(AM)$ . Из чертежа видно, что вся линия  $t$ , кроме точки касания, расположена внутри поверхности. Следовательно, касательная в точке  $M$  плоскость  $\delta(h \cap t)$  пересекает поверхность по линии  $b(b_2)$ , имеющей двойную точку  $M$ .

Точки ( $M$ ) поверхности, в окрестности которых касательная плоскость  $\delta$  пересекает поверхность по действительным линиям  $b$ , называют гиперболическими, а поверхность называют вогнутой, или поверхностью отрицательной кривизны.

Поверхности, имеющие различные виды точек касания, называют поверхностями двоякой кривизны.

## 12.6. Построение линий пересечения поверхностей на аксонометрическом чертеже

Эта задача решается на основе свойств аксонометрических проекций и приемов построения линий и поверхностей, рассмотренных в разделах 6.1, 6.2, 9.1, 10.3, 11.8. Обычно аксонометрические проекции строятся по комплексному чертежу, поэтому любую линию можно построить по координатам выбранных на ней точек.

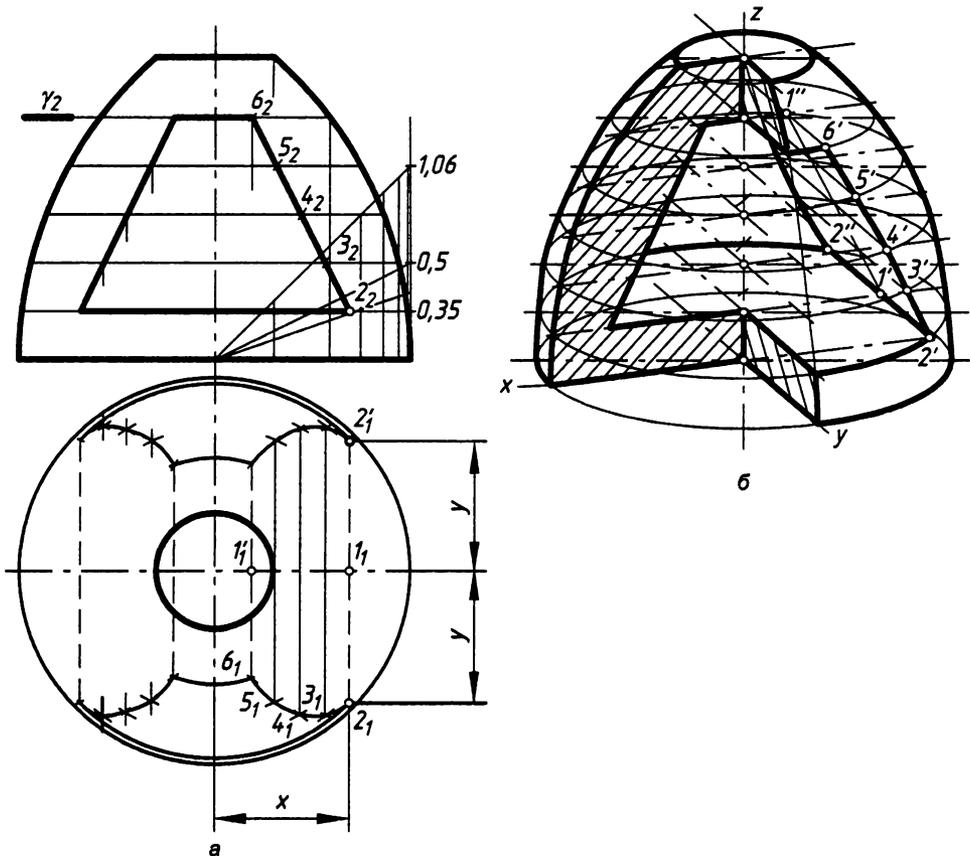


Рис. 12.17. Построение линий пересечения тора с многогранной поверхностью

Однако при этом полезно знать ряд приемов, которые помогают не только ускорить процесс построения, но и выполнить работу на более высоком профессиональном уровне.

Рассмотрим пример построения в прямоугольной диметрии изображения детали, образованной поверхностью закрытого тора со сквозным призматическим отверстием (рис. 12.17).

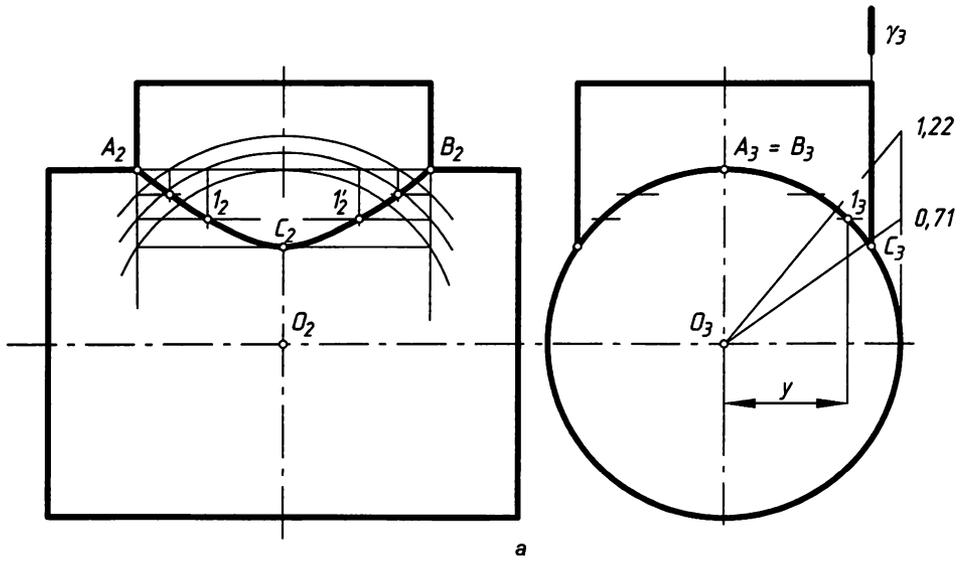
Рассекая поверхности горизонтальными плоскостями уровня, строим линии пересечения граней отверстия с поверхностью на виде сверху (рис. 12.17, а). Используя эти же плоскости, строим очерк поверхности тора способом параллелей (рис. 12.17, б). В плоскости нижней грани по координате  $x$  строим точку  $1'$  и аналогично в верхней грани — точку  $1''$ . Прямая  $1'-1''$  (или  $1_1-1'_1$  на эпюре) является осью симметрии линии пересечения тора с боковой гранью, то есть она делит хорды типа  $2-2'$  пополам (см. вид сверху). Через точку  $1'$  проводим прямую параллельно оси  $y$ , и ее пересечение с параллелью нижней грани даст точки  $2'-2''$  линии пересечения. Отрезок  $[1'-2']$  равен координате  $y$ , умноженной на показатель искажения (в примере  $v = 0,5$ ). Пересечение прямой ( $1'-1''$ ) с осями  $x$ , проведенными на выбранных высотах (в плоскостях построенных параллелей), покажет положение хорд для точек  $3...6$ . Отметив точки пересечения этих хорд со своими параллелями или откладывая координаты  $y$  с учетом показателя искажения  $v$ , получим точки  $3'...6'$  и симметричные им точки линии пересечения. Выполненный разрез увеличивает наглядность изображения. Для выделения материальной части детали используется ее графическое обозначение (штриховка).

Линия пересечения цилиндрических поверхностей на эпюре (рис. 12.18, а) построена способом концентрических сфер. А для построения линии пересечения в аксонометрической проекции удобно воспользоваться посредниками — фронтальными плоскостями уровня (типа  $\gamma$ ), которые параллельны осям вращения цилиндров.

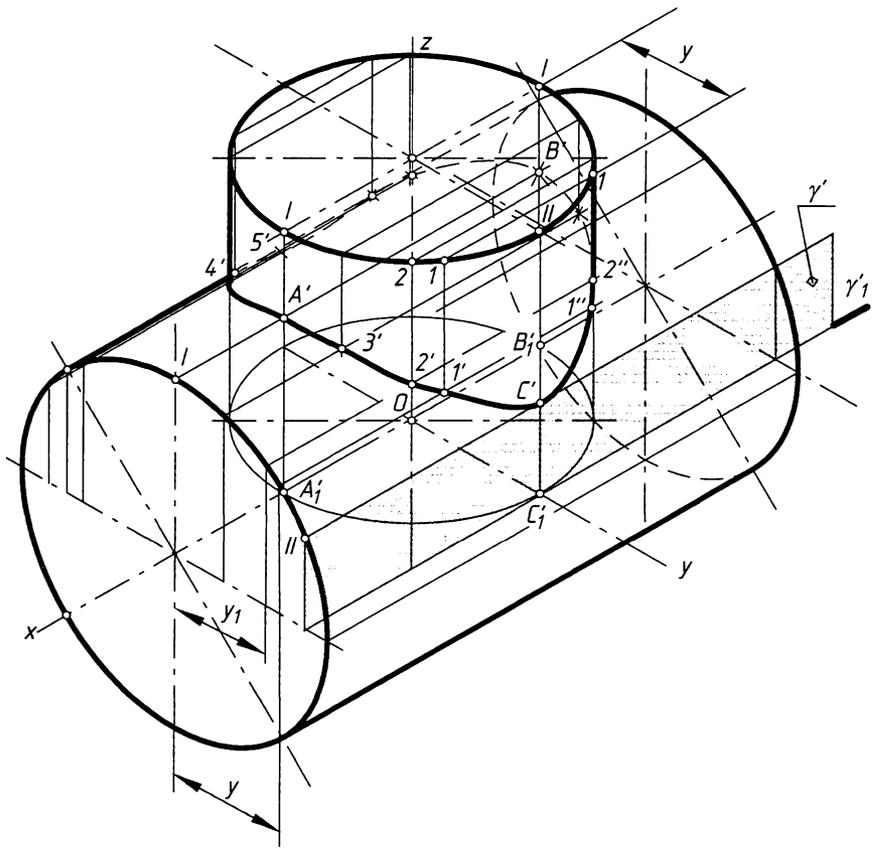
Возьмем начало аксонометрических осей координат в точке  $O$  пересечения осей вращения поверхностей (рис. 12.18, б) и построим прямоугольную изометрию цилиндров. Вторичная проекция горизонтального цилиндра на плоскость  $xOy$  будет изображаться четырехугольником, а вертикального цилиндра — эллипсом (изображения показаны тонкими линиями).

Плоскость  $xOz$  рассекает цилиндры по образующим  $l-A'-B'$  и  $l-A''_1-B''_1$  в пересечении которых находим опорные точки  $A$  ( $A'$ ) и  $B$  ( $B'$ ). Точку  $C$  ( $C'$ ) определим с помощью касательной плоскости  $\gamma$  ( $\gamma', \gamma''$ ), которая пересечет горизонтальный цилиндр по образующей  $ll-C'$  и коснется вертикального цилиндра по образующей  $ll-C'_1$ . Их пересечение определит точку  $C'$ . Очевидно, что ее можно построить и по координате  $z$ , откладывая отрезок:  $[C'_1 C'] = [O_2 C_2]$ .

Вместо вторичных проекций цилиндров можно использовать их основания, которые посредник пересекает по хордам типа  $(1-1)$  на расстоянии  $y$  от плоскости  $xOz$ . По концам хорд строятся образующие цилиндров, а их пересечение определяет искомые точки ( $1'-1''$ ). Так можно выбирать нужные образующие цилиндров. Например, точка  $2''$  принадлежит очерковой образующей вертикального цилиндра, хорда которой находится на расстоянии  $y$ , от плоскости  $xOz$ . Одновременно определяется точка  $2'$ , а по симметричной хорде определяется точка  $4'$  и ей симметричная. Аналогично определены точки:  $5'$  — на очерке горизонтального цилиндра,  $3'$  — случайная точка (по заказу).



a



б

Рис. 12.18. Построение линии пересечения цилиндров

Полученные точки соединяют плавной кривой с учетом видимости. Необходимо заметить, что эюр (рис. 12.18, а) служил нам лишь иллюстрацией, помогающей понять процесс построения, а линия в аксонометрии построена самостоятельно.

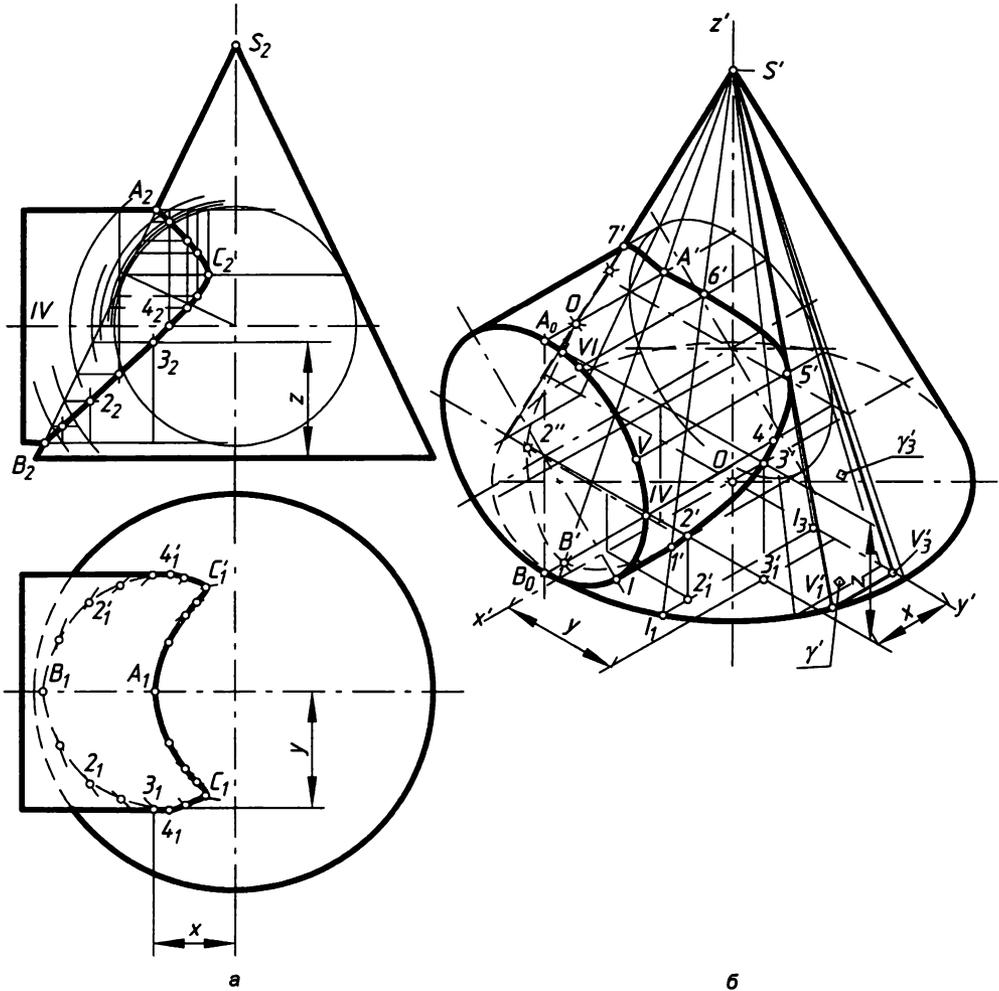


Рис. 12.19. Построение линии пересечения цилиндра с конусом

У линии пересечения цилиндра с конусом (рис. 12.19, а) любую точку  $Z$  строим по координате  $x, y \rightarrow Z_1'$  и координате  $z \rightarrow Z'$  (рис. 12.19, б), то есть с помощью координатной ломаной линии. Аналогично построена точка  $2 (2_1', 2')$ .

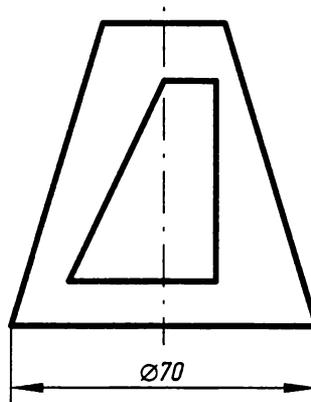
Координатным способом можно построить всю линию. Но и здесь удобно воспользоваться вспомогательными профильно проецирующими плоскостями  $\gamma (\gamma', \gamma_3)$ , проходящими через вершину  $S (S')$  конуса, если построить вторичную проекцию поверхностей на плоскость  $yOz$ . След  $\gamma_3'$ , касательный вторичной проекции цилиндра, показывает образующую  $V$ , по которой плоскость  $\gamma$  соприкасается с

цилиндром. А горизонтальный след  $V_1'-V_3'$  показывает образующую  $S'-V_1'$  пересечения конуса с плоскостью  $\gamma$ . Пересечение образующих определяет опорную точку  $5'$  линии пересечения. Как и в предыдущем примере, здесь появляется возможность заказных сечений. Например, плоскость  $S'-l_3-l_1$  пересекает конус по образующей  $S'-l_1$ , а цилиндр по очерковой образующей  $l$ . Их пересечение определяет точку  $1'$  — границу видимости линии пересечения. Эта же плоскость пересекает цилиндр и по образующей  $VI$ , которая определяет точку  $6'$ . Аналогично определяется точка  $7'$  и вторая точка  $O$  на этой же образующей конуса (обозначена крестиком). По образующим  $A_0$  и  $B_0$  определены опорные точки  $A'$  и  $B'$ . Точка  $4'$  определена отрезком  $[IV-4'] = [IV-4_2]$  на эюре.

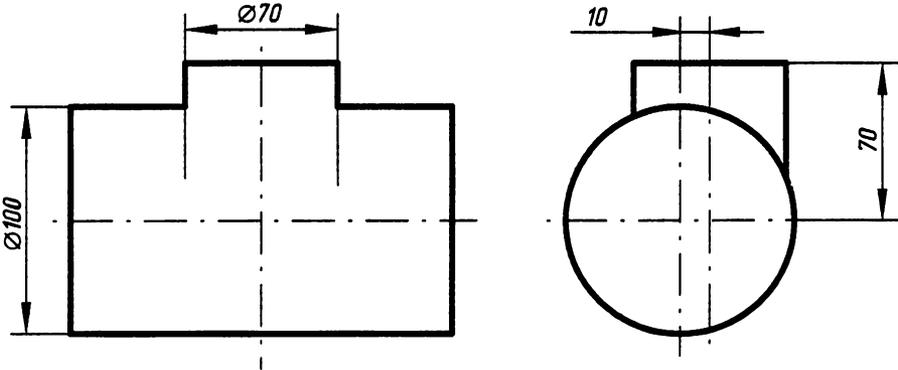
Приведенные примеры показывают, что универсальным является способ координат, но, если имеется возможность, следует пользоваться соответствующими посредниками, особенно при определении опорных точек, что повышает точность и придает уверенность в правильности построений.

## Вопросы и задания

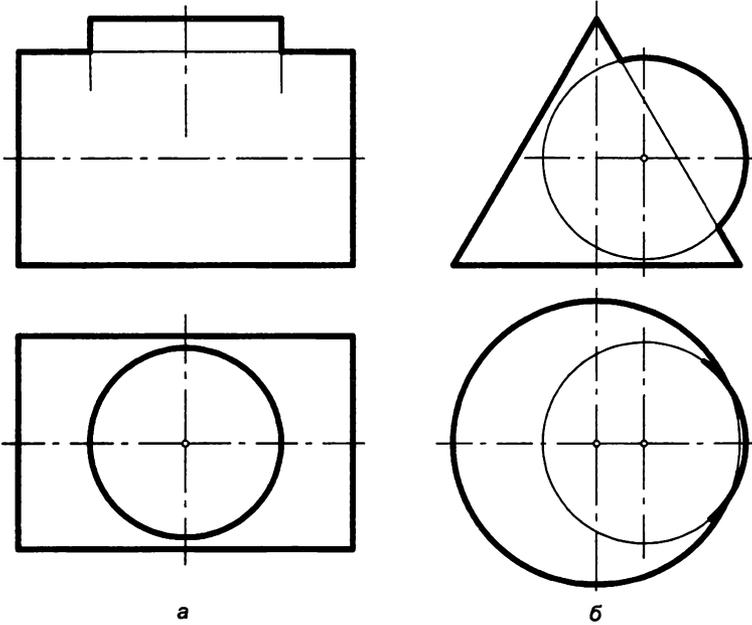
1. Поясните общий алгоритм построения линий пересечения поверхностей.
2. Какие способы построения линий пересечения поверхностей вы изучали?
3. Постройте три проекции конуса со сквозным отверстием.



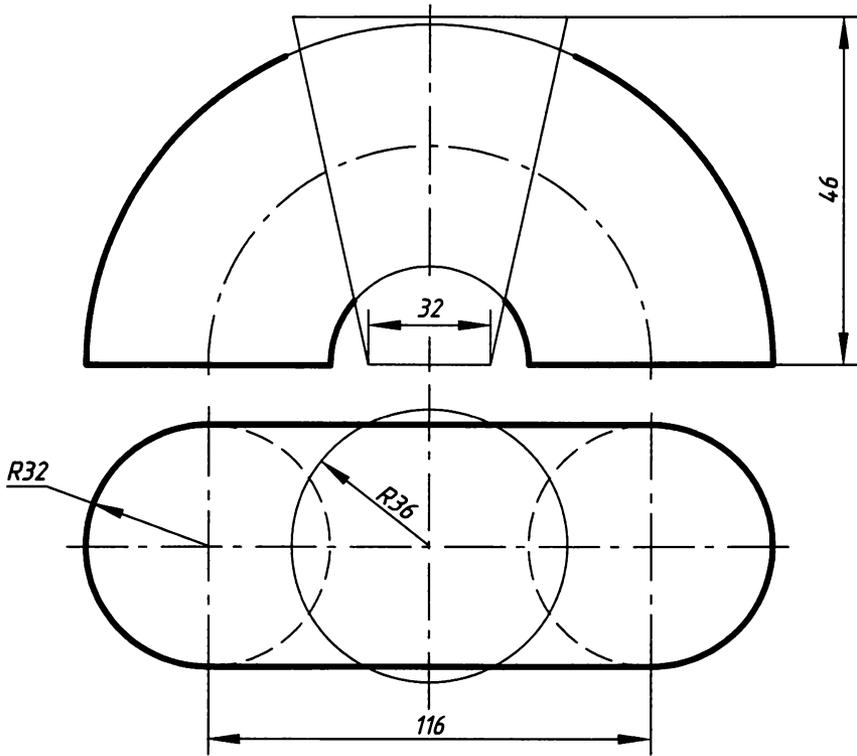
4. Постройте три вида заданных цилиндров с линией их пересечения. Какой способ здесь пригоден?



5. Постройте линии пересечения заданных поверхностей способом концентрических сфер.



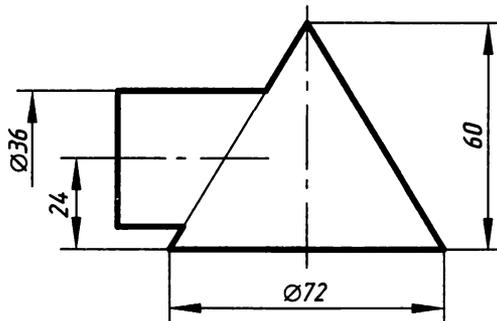
6. Постройте изображения тора со сквозным коническим отверстием.



7. Постройте изображение фигуры из задачи 3 в прямоугольной изометрии.

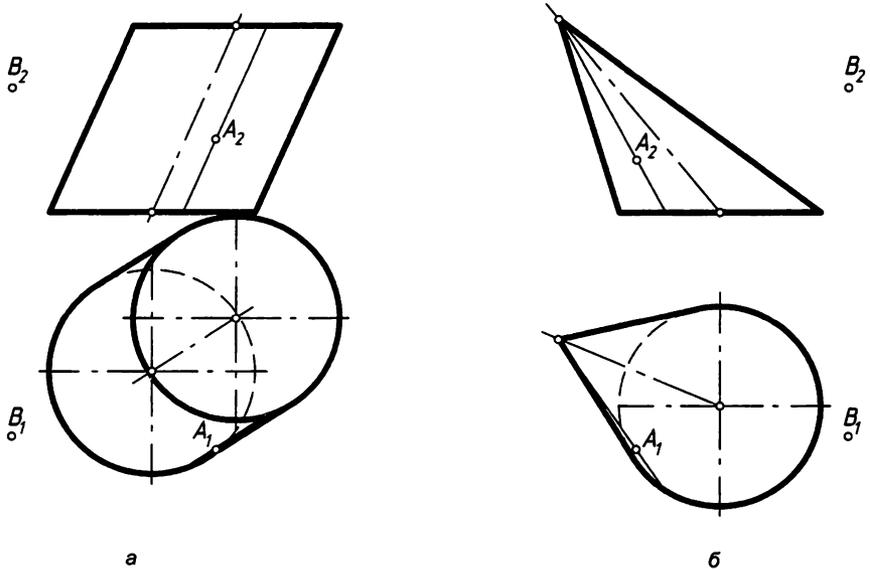
8. Постройте изображение фигуры из задачи 4 в прямоугольной диметрии.

9. Постройте в прямоугольной диметрии заданные поверхности с линией их пересечения.

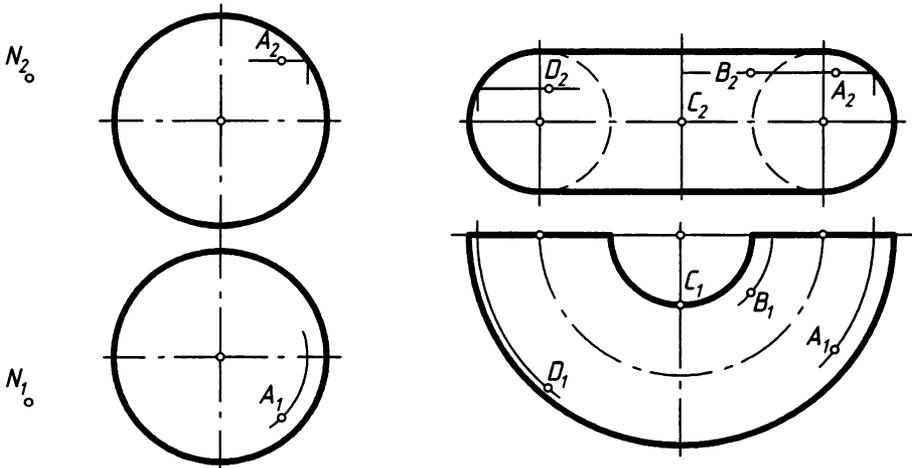


10. Что служит признаком касания прямой линии или плоскости с заданной поверхностью?

11. Постройте любую прямую линию, касательную к заданной поверхности в точке  $A$ , и плоскости, касательные к соответствующей поверхности и проходящие через точку  $B$ .



12. В точках  $A$  и  $B$  постройте любые прямые линии, касательные к поверхностям; постройте плоскости, касательные к поверхности в точках  $C$  и  $D$ ; через точку  $N$  проведите плоскость, касательную к сфере, и исследуйте возможные варианты положения этих плоскостей.



# Глава 13

## Развертка поверхностей

### 13.1. Основные понятия и свойства разверток

При разработке способов построения и изучении свойств разверток поверхность представляется бесконечно тонкой нерастяжимой пленкой.

Допустим, задана линейчатая поверхность  $\alpha$  ( $GKLL'K'B'$ ) (рис. 13.1, а), которая образована поступательным перемещением отрезка  $LL'$  по направляющим линиям  $GL$  и  $G'L'$ . На поверхности лежат линии  $l$  и  $q$ , линия  $(AB)$  и замкнутая линия, ограничивающая площадь  $F$ . Угол  $\varphi$  между касательными  $t$  и  $p$  ( $\varphi = t \wedge p$ ) называют углом между кривыми  $l$  и  $q$  ( $\varphi = l \wedge q$ ) в точке их пересечения.

*Разверткой поверхности* называют фигуру, полученную совмещением поверхности с плоскостью путем изгибания.

Представим себе, что мы образующую линию  $[LL']$  совместили с плоскостью, а направляющие  $(LKG)$  и  $(L'K'B')$  растянули в прямые линии  $(L_0G_0)$  и  $(L'_0G'_0)$  (рис. 13.1, б). Тогда заданная поверхность изобразится плоской фигурой  $(G_0G'_0L'_0L_0)$ , которая и будет разверткой этой поверхности.

Аналогичное совмещение данной поверхности с плоскостью можно произвести, вращая поверхность вокруг линии  $(LL')$  в направлении круговой стрелки  $d$  (рис. 13.1, а) и изгибая до совмещения с плоскостью. Фигура  $(G_0G'_0L'_0L_0)$  тоже будет разверткой данной поверхности (рис. 13.1, в).

Отличие полученных разверток заключается в том, что на рис. 13.1, б мы видим верхнюю, или внешнюю, сторону поверхности, которую называют *лицевой*, а на рис. 13.1, в показана внутренняя сторона поверхности, которую в практике называют *изнаночной* или *обратной*. Они конгруэнтны, то есть их можно совместить, накладывая изнаночную сторону на лицевую сторону. Но при построении развертки важно на конкретном изображении строить какую-либо одну сторону, чтобы не перепутать положение геометрических элементов с их зеркальным изображением. Разобраться в этом можно, сопоставляя стороны поверхности и развертки, а также используя правило обхода контура. Например, контур поверхности  $GGL'L'L$  (рис. 13.1, а) мы обходим по направлению движения часовой стрелки

(если смотреть сверху). Этот же контур  $G_0 G'_0 L'_0 L_0$  лицевой развертки (рис. 13.1, б) обходится в том же направлении. А у изнаночной развертки (рис. 13.1, в) обход контура  $G_0 G'_0 L'_0 L_0$  противоположный, то есть не совпадает с обходом на главном изображении поверхности.

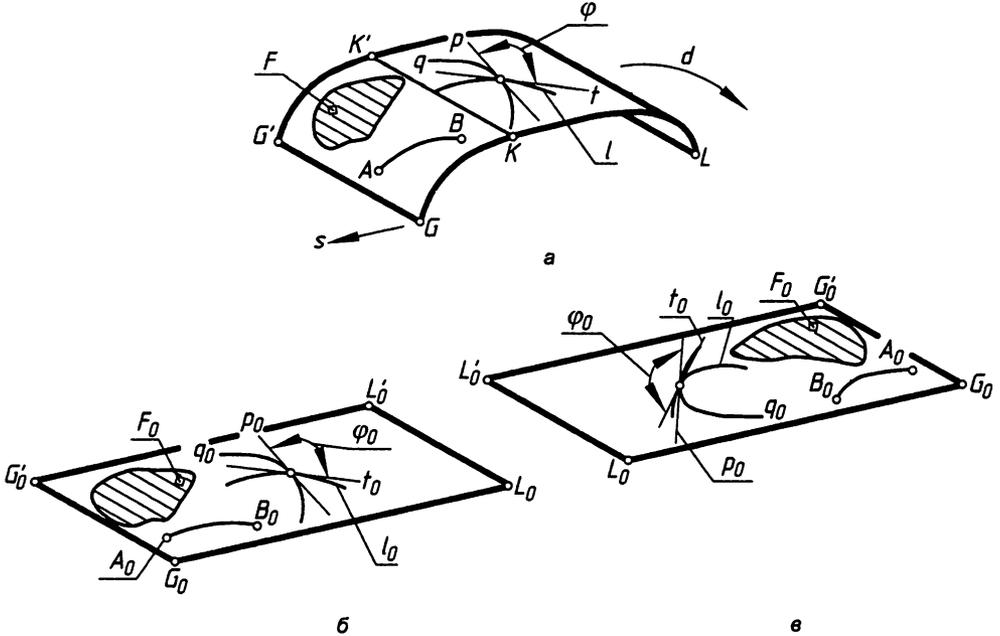


Рис. 13.1. Основные свойства развертки поверхности

Развертка конгруэнтна поверхности, то есть если ее наложить на поверхность, то соответствующие точки совпадут. Это значит, что между множествами точек поверхности и развертки устанавливается взаимно однозначное соответствие, которое позволяет сформулировать следующие *основные свойства разверток*:

1. Длины линий  $((AB), l, q)$  на поверхности и на развертке одинаковые.
2. Углы  $(\varphi)$  между обыкновенными линиями  $(q$  и  $l)$  на поверхности равны соответствующим углам  $(\varphi_0 = q_0 \wedge l_0)$  на развертке.

Преобразование, в котором сохраняется равенство углов и отрезков, называют конформным, а поверхность и развертку называют эквиформными.

Это свойство не распространяется на особые линии. Например, углы между образующими конуса на поверхности и на развертке разные.

3. Параллельные прямые линии на поверхности остаются параллельными на развертке. Это вытекает из второго свойства.
4. Площади  $(F)$ , ограниченные замкнутой линией на поверхности и на развертке, равны:  $(F = F_0)$ . Площадь развертки равна площади самой поверхности.

Преобразования, в которых сохраняется равенство площадей, называют эквиаренальными.

5. Прямая линия на поверхности переходит в прямую линию на развертке.
6. Прямая линия между двумя точками на развертке соответствует кратчайшему расстоянию между этими точками на поверхности. Эти линии на поверхности называют геодезическими линиями.

Развертываемыми являются поверхности, состоящие только из параболических точек, и они обладают указанными свойствами. Касательная плоскость, построенная в какой-либо точке развертываемой поверхности, касается ее во всех точках прямолинейной образующей, проходящей через эту точку. К развертываемым поверхностям относятся многогранные и линейчатые поверхности с ребром возврата (торсы), цилиндры и конусы.

Другие поверхности относятся к классу неразвертываемых поверхностей.

Развертки находят самое широкое применение в различных отраслях промышленности, в том числе нефтехимической и газовой. Например, для изготовления цилиндрических, сферических и каплевидных резервуаров, колонн, теплообменных и других аппаратов, воздухопроводов и других изделий используется листовой материал, который раскраивается с помощью разверток.

По возможностям и способам построения различают развертки *точные, приближенные и условные*.

## 13.2. Развертка многогранных поверхностей

Развертки многогранных поверхностей относятся к числу точных. Их построение сводится к последовательному построению граней поверхности на одной плоскости.

### 13.2.1. Построение развертки многогранной поверхности общего положения

*Разверткой многогранной поверхности* называют фигуру, полученную последовательным совмещением ее граней с плоскостью.

Развертка — это выкройка, с помощью которой можно изготовить данную фигуру из листового материала. Очевидно, чтобы получить такую выкройку, необходимо разрезать поверхность по каким-то ребрам или ребрам и граням.

Рассмотрим принцип построения развертки на примере трехгранной пирамиды  $VGKL$  общего положения с фигурой сечения  $ABC$  (рис. 13.2).

Прежде всего необходимо знать размеры ребер. Для их определения воспользуемся способом треугольников (см. раздел 7.1) или преобразованием чертежа (см. главу 8) способом плоскопараллельного перемещения.

Условимся обозначать концы отрезков, изображающих натуральную величину ребра (в масштабе чертежа), с индексом «0».

По горизонтальной линии связи ( $V_2V_0$ ) отметим в удобном месте точку  $V_0$ , проведем вертикальную линию и на уровне концов  $L_2, G_2, K_2$  боковых ребер отметим на ней точки, через которые проведем тонкие горизонтальные линии.

На уровне точки  $L_2$  от точки  $\bar{V}$  отложим вправо отрезок горизонтальной проекции  $[V_1L_1]$  ребра  $[VL]$  и обозначим его  $[\bar{V}_1\bar{L}_1]$ . Гипотенуза  $[V_0L_0]$  треугольника равна длине ребра  $[VL]$ , то есть  $|V_0L_0| = |VL|$  в масштабе заданного чертежа. Точка  $C_0$  фигуры сечения определится по горизонтальной линии связи ( $C_2C_0$ ).

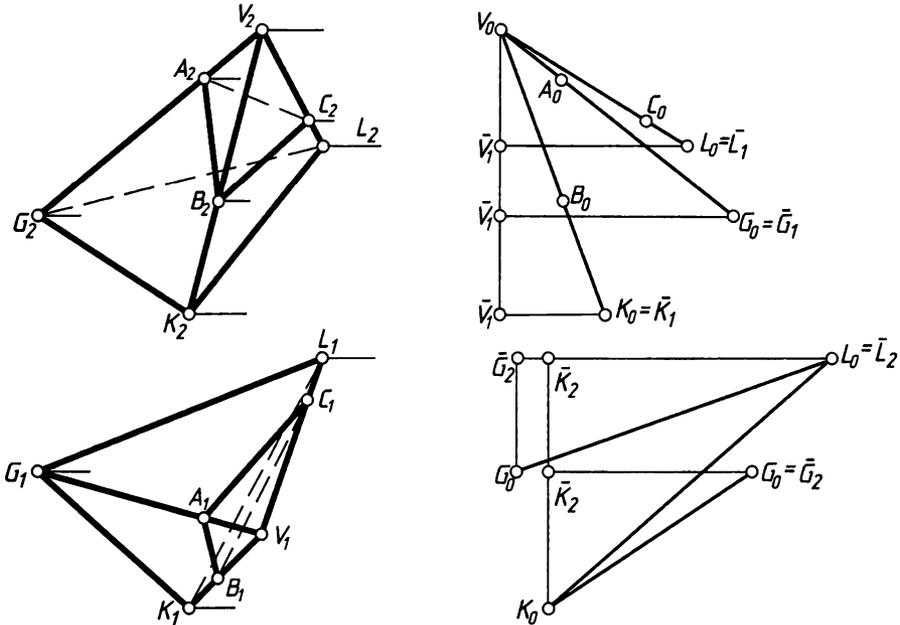


Рис. 13.2. Определение размеров ребер

Аналогично на высоте проекции  $G_2$  вершины  $G$  откладываем  $[\bar{V}_1\bar{G}_1] = [V_1G_1]$ , обозначаем  $G_0 = \bar{G}_1$  и проводим прямую  $[V_0G_0] = [VG]$ , отмечаем  $A_0$ .

На уровне  $K_2$  откладываем  $[\bar{V}_1\bar{K}_1] = [V_1K_1]$ , отмечаем  $K_0 = \bar{K}_1$  и проводим  $[V_0K_0] = [VK]$ , отмечаем  $B_0$ .

В проделанных построениях отрезки прямых линий  $V_0\bar{V}_1$  выражают разность высот концов соответствующих ребер.

Чтобы не загромождать построения, ребра основания ( $GKL$ ) определены по их фронтальным проекциям с использованием разности глубин.

Из вершин  $G, K, L$  провели горизонтальные линии, определяющие  $\Delta u$ . Взяли на уровне  $L_1$  произвольную точку  $\bar{K}_2$  и провели вертикальную линию ( $\bar{K}_2K_0$ ). От точки  $\bar{K}_2$  отложили вправо отрезок  $[\bar{K}_2\bar{L}_2] = [KL]$ , отметили точку  $L_0 = \bar{L}_2$  и соединили ее с точкой  $K_0$ . Отрезок  $[K_0L_0]$  равен ребру  $[KL]$ .

Отметим точку  $\bar{K}_2$  на уровне вершины  $G$ , и отложим  $[\bar{K}_2\bar{G}_2] = [GL]$ , отметим  $G_0 = \bar{G}_2$  и проведем  $[G_0K_0] = [GK]$ .

Длину  $[G_2L_2]$  фронтальной проекции ребра  $[GL]$  отложим на уровне  $L_1$  от точки  $\bar{L}_2$  влево:  $[\bar{L}_2\bar{G}_2] = [L_2G_2]$ ;  $\bar{G}_2G_0 = \Delta y = (y_g - y_l)$  и  $[G_0L_0] = [GL]$ .

Для построения развертки в том же масштабе выбираем положение вершины  $V_0$  (рис. 13.3) и место разреза поверхности по боковому ребру или по грани. Если поверхность будет разрезаться по грани, то предварительно это место нужно указать на чертеже рис. 13.2 и определить длину шва. Мотивы выбора места разреза могут быть разные, например минимизация длины шва. В примере поверхность разрезана по самому короткому боковому ребру  $[VL]$ .

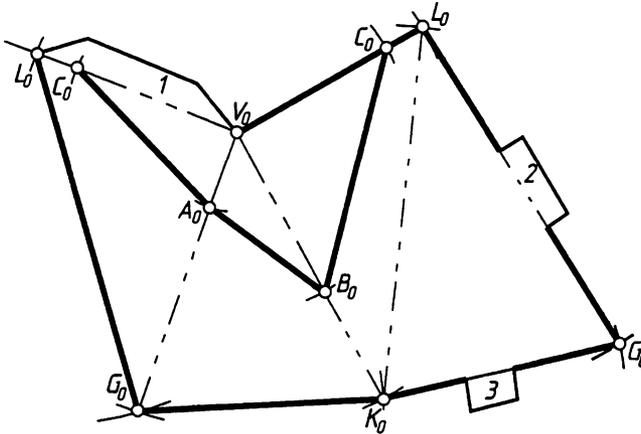


Рис. 13.3. Развертка пирамиды

Через вершину  $V_0$  проводим произвольную прямую и на ней откладываем отрезок  $[V_0L_0]$ . Из точки  $L_0$  проводим дугу радиуса  $R = [L_0G_0]$ , а из вершины  $V_0$  проводим дугу радиуса  $R = [V_0G_0]$  и в пересечении этих дуг отмечаем вершину  $G_0$ . Известно, что две окружности пересекаются в двух точках. Следовательно, будет две вершины  $G_0$ . Какую из них выбрать?

**Внимание.** Критерием выбора служит наше желание и направление обхода вершин грани по контуру. На горизонтальной проекции пирамиды (рис. 13.2) мы видим внешнюю или лицевую сторону грани  $V_0L_0G_0$ , и обходим в этом порядке вершины, двигаясь от  $V_0$  к  $L_0$  и к  $G_0$ , против направления движения часовой стрелки. А на фронтальной проекции грань  $V_0L_0G_0$  обращена к нам своей внутренней стороной и обход в той же последовательности  $V_0 - L_0 - G_0$  будет совпадать с направлением движения часовой стрелки. Эти же направления обхода надо сохранить и на развертке. Отсюда правило:

- если мы хотим на развертке видеть лицевую сторону поверхности (как на рис. 13.3), то должны сохранить на ней такое же направление обхода вершин, как на изображении лицевой стороны грани фигуры (рис. 13.2, вид сверху —  $V_0, L_0, G_0$ );
- если мы хотим на развертке видеть внутреннюю сторону поверхности, то должны сохранить на ней такое же направление обхода вершин с внутренней стороны грани ( $V_0, L_0, G_0$ ) или взять противоположное направление обходу вершин внешней стороны грани на изображении фигуры.

На рис. 13.3 развертка изображена лицевой стороной к наблюдателю. Поэтому обход  $V_0L_0G_0$  совпадает с  $V_1L_1G_1$ . Далее из  $V_0$  проводим дугу радиуса  $R = [V_0K_0]$ , а из  $G_0$  проводим дугу радиуса  $R = [G_0K_0]$  и в их пересечении отмечаем точку  $K_0$ . Обход  $V_0G_0K_0$  совпадает с обходом  $V_1G_1K_1$  и  $V_2G_2K_2$ , так как на обеих проекциях фигуры мы видим лицевую сторону грани  $V_1G_1K_1$ .

Аналогично пристраивается грань  $V_0K_0L_0$ . Начало и конец развертки должны совпадать.

Треугольник основания  $L_0K_0G_0$  можно построить на любом ребре основания, а обход его будет противоположен обходу вершин основания на изображениях, так как здесь мы видим его внешнюю сторону, а в проекциях — внутреннюю.

Откладывая на ребрах отрезки  $[V_0L_0]$ ,  $[V_0A_0]$ ,  $[V_0B_0]$ , получаем развертку линии сечения. На развертке штрих-пунктирной линией с двумя пунктирами показаны места сгиба развертки. Сгиб должен производиться во внутреннюю сторону, то есть помеченные буквы должны оставаться снаружи. Лепестки 1–2–3 для склейки оставляют на развертке, если из нее нужно склеить модель.

При построении развертки рекомендуется учитывать влияние ее формы и расположения на общий расход материала и искать оптимальный вариант.

Принцип построения разверток других многогранных поверхностей аналогичен. Если многоугольник грани более сложен, то он разбивается на треугольники.

Рассмотрим построение развертки трехгранной призмы (рис. 13.4).

Основание  $BKL$  призмы является плоскостью уровня и на горизонтальной проекции не искажается (рис. 13.4, а), то есть  $[K_0L_0] = [K_1L_1]$  и т. д. Боковые ребра параллельны и равны. Поэтому определяем длину только одного ребра, например  $[GG']$ . Через  $G_2'$  и  $G_2$  проводим горизонтальные линии и выбираем положение вертикального отрезка  $[G_0'G_0]$ , выражающего разность высот концов боковых ребер (рис. 13.4, б). По горизонтали от точки  $G_0'$  откладываем отрезок  $[G_0'G_1] = [G_1'G_1]$ , отмечаем точку  $G_0 = G_1$  и отрезок  $[G_0'G_0] = [G_1'G_1]$ . По горизонтальным линиям связи находим точки  $A_0, B_0, C_0$  фигуры сечения.

Боковые грани разделим на треугольники диагоналями  $[G'K]$ ,  $[K'L]$ ,  $[L'G]$  и найдем их размеры. От  $G_0'$  откладываем отрезок  $[G_0'K_1] = [G_1'K_1]$ , отмечаем  $K_0 = K_1$  и строим  $[G_0'K_0] = [G_1'K_1]$ . Отмечаем точки  $G_0' = K_0'$  и  $G_1' = K_1'$ . От точки  $K_1'$  откладываем вправо отрезок  $[K_1'K_1] = [K_1'L_1]$ , отмечаем  $L_0 = L_1$  и строим отрезок  $[K_0'L_0] = [K_1'L_1]$ . Построение диагонали  $[L'G]$  смещено вправо, где  $[L_0'G_0] = [L_1'G_1]$ .

Сделаем разрез призмы по ребру  $[K'K]$ . Проведем вертикальную линию на месте построения развертки (рис. 13.4, в), отметим на ней точку  $K_0'$  и отложим вниз длину  $[K_0'K_0]$  ребра  $[K'K]$ .

Из точки  $K_0'$  проведем дугу окружности радиуса  $R = [K_0'L_0]$ , а из  $K_0$  — дугу радиуса  $R = [K_0'L_0] = [K_1L_1]$  в нашем примере. В пересечении дуг отметим точку  $L_0$  так, чтобы обход  $K_0'L_0K_0$  совпал с обходом на лицевой проекции грани  $K_1'L_1K_1$ .

В этом примере на горизонтальной  $K_1'K_1L_1$  и на фронтальной  $K_2'K_2L_2$  проекциях изображена внешняя (лицевая) сторона грани, обход контура идет против движения часовой стрелки. Из точки  $K_0'$  проводим дугу  $R = [K_0'L_0] = [K_0L_0]$  или прямую  $[K_0'L_0] \parallel [K_0L_0]$ , а из точки  $L_0$  проводим дугу  $R = [L_0L_0'] = [K_0K_0']$  или пря-

мую  $[L_0 L'_0] \parallel [K_0 K'_0]$  и в пересечении получаем точку  $L'_0$ . Откладываем отрезки  $[K'_0 B_0] = [G'_0 B_0]$ ,  $[L'_0 C_0] = [G'_0 C_0]$  и отмечаем точки  $B_0, C_0$  фигуры сечения. Аналогично строятся другие боковые грани. Для построения основания  $GKL$  из  $G_0$  проводим дугу радиуса  $[G_0 K_0]$ , а из  $L_0$  дугу радиуса  $[L_0 K_0]$  и в их пересечении получаем вершину  $K_0$ ; аналогично получаем  $K'_0$ .

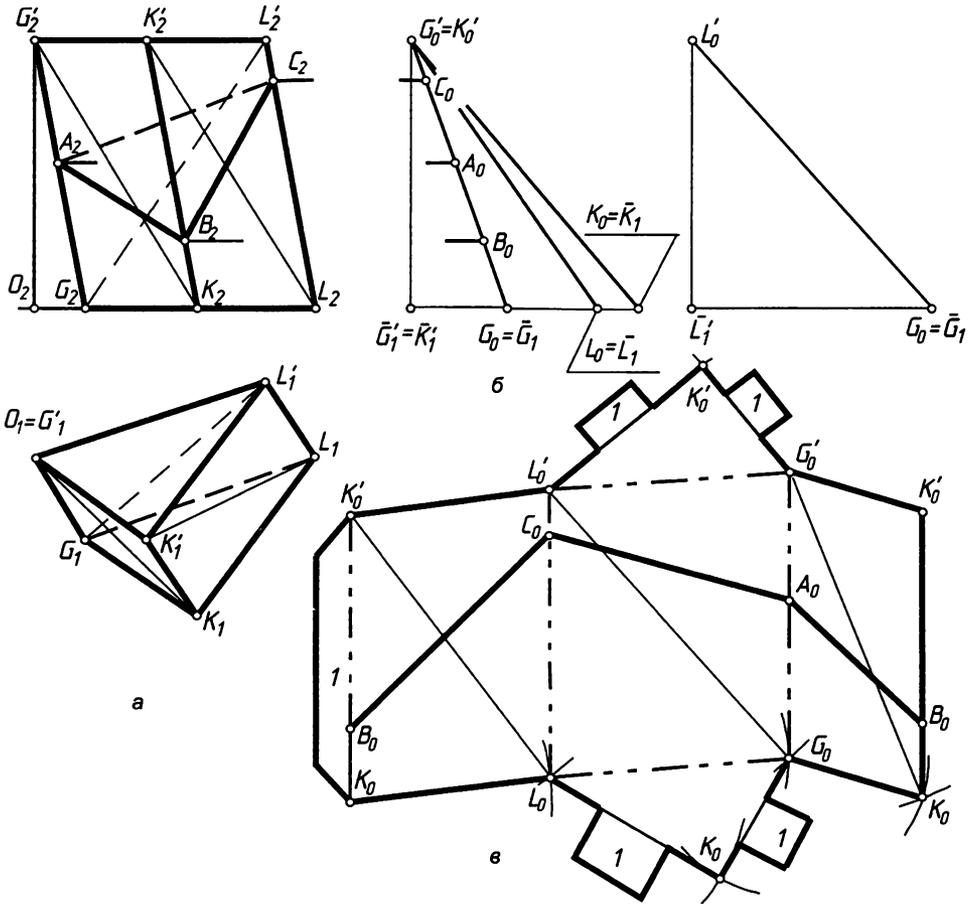


Рис. 13.4. Развертка призмы

Лепестки 1 оставлены для склеивания модели, линии сгиба развертки изображены штрихпунктирной линией с двумя пунктирами.

### 13.2.2. Способ нормального сечения

Способ нормального сечения используется для построения разверток призм, боковые ребра которых являются линиями уровня.

На рис. 13.5 показаны два изображения трехгранной призмы  $GKL G'K'L'$ , боковые ребра которой параллельны фронтальной плоскости проекций (являются фронталями), а основаниями служат плоскости общего положения.

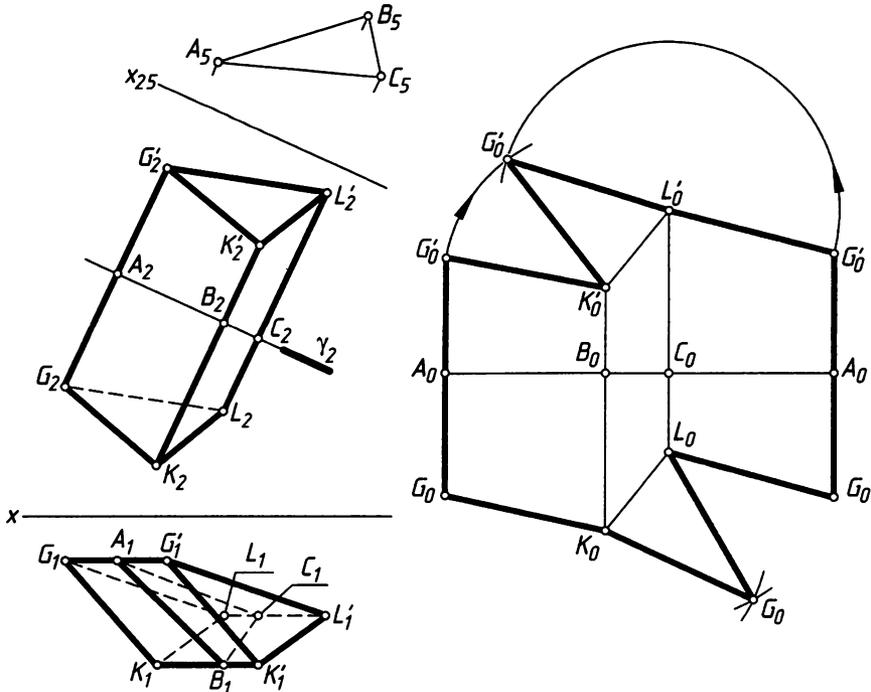


Рис. 13.5. Построение развертки призмы способом нормального сечения

Сечение  $(ABC)$  призмы плоскостью  $\gamma(\gamma_2)$ , перпендикулярной боковым ребрам, называют нормальным. Отсюда и название способа, суть которого в следующем.

Строится нормальное сечение  $ABC (A_2B_2C_2 \rightarrow A_1B_1C_1)$  и его натуральная величина  $(A_5B_5C_5)$ . Построение сторон нормального сечения можно вести разными способами. В нашем примере сделана замена горизонтальной плоскости  $\Pi$ , проекций на новую горизонтальную плоскость  $\Pi_5$  проекций, которая параллельна плоскости  $\gamma(\gamma_2)$  сечения. Для этого выбрана ось  $x$  старой системы и ось  $x_{25} \parallel \gamma_2$  новой системы и по правилам, изложенным в разделе 8.1, построена новая горизонтальная проекция  $A_5B_5C_5$  сечения. Затем построили горизонтальную линию  $(A_0 - A_0)$  и на ней отложили отрезки  $[A_0B_0] = [A_5B_5]$ ,  $[B_0C_0] = [B_5C_5]$ ,  $[C_0A_0] = [C_5A_5]$ . Из концов этих отрезков провели прямые линии перпендикулярно прямой  $(A_0 - A_0)$  и на них отложили отрезки:  $[A_0G_0] = [A_2G_2]$ ,  $[A_0G'_0] = [A_2G'_2]$ . И так для каждого ребра. Концы  $G_0, K_0, L_0, G_0$  и  $G'_0, K'_0, L'_0, G'_0$  соединяем прямыми линиями. Полученная фигура является разверткой боковой поверхности призмы. На одном из ребер верхнего и нижнего оснований призмы строим их развертки  $G_0K_0L_0$  и  $G'_0K'_0L'_0$ , стороны которых определились построением боковых ребер. Обход контура  $G_2G_2'K_2'K_2$  видимой боковой грани на главном изображении и на развертке  $(G_0G_0'K_0'K_0)$  совпадает по направлению, следовательно, мы имеем изображение лицевой стороны развертки.

### 13.2.3. Способ раскатки

Способ раскатки используется для построения разверток *призм*, боковые ребра которых являются линиями уровня, а основания — плоскостями уровня.

На рис. 13.6 изображена трехгранная призма  $GKL G'K'L'$ , боковые ребра которой являются фронталями, а основания — горизонтальные плоскости уровня.

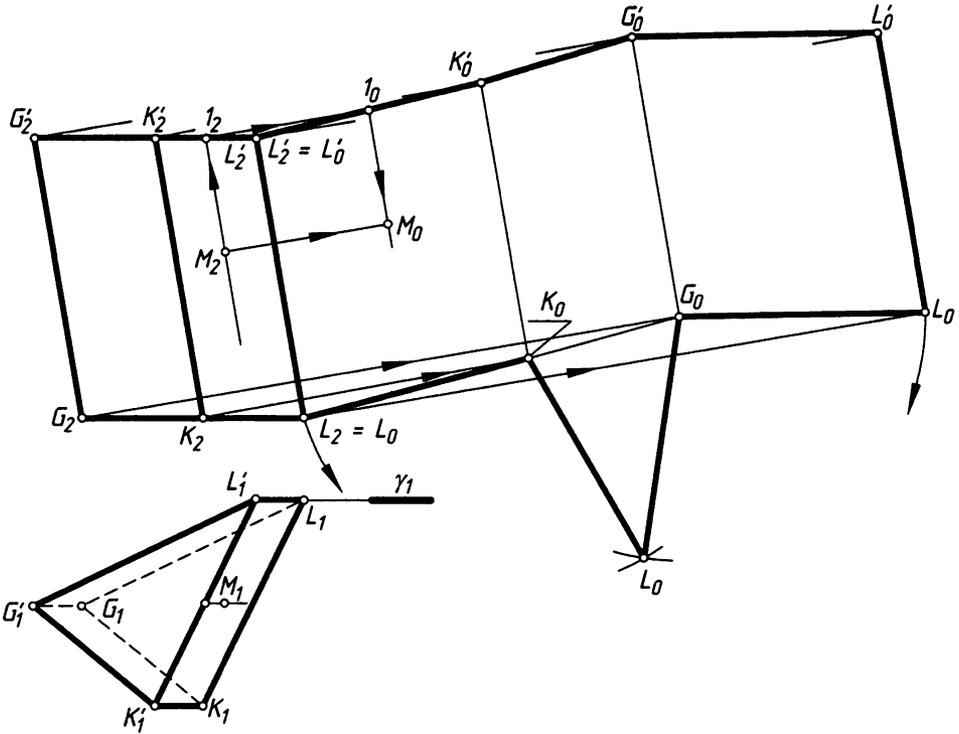


Рис. 13.6. Построение развертки призмы способом раскатки

Проведем через ребро  $LL'$  фронтальную плоскость  $\gamma(\gamma_1)$  уровня и совместим грани призмы с ней. Для этого повернем грань  $L'K'KL$  вокруг ребра  $LL'$ , как вокруг оси вращения, до совмещения с плоскостью  $\gamma(\gamma_1)$ . При этом ребро  $LL'$  останется на месте, а точки ребра  $KK'$  будут перемещаться в плоскостях, перпендикулярных ребру  $LL'$ . Это значит, что фронтальные проекции вершин  $K_2$  и  $K_2'$  переместятся по линиям  $(K_2K_0) \perp (L_2L_2')$  и  $(K_2'K_0') \perp (L_2L_2')$ . Измеряем длину ребра основания  $[LK] = [L_1K_1]$  циркулем и из точек  $L_2, L_2'$  засечками отмечаем положения вершин  $K_0, K_0'$  на проекциях траектории движения точек  $K_2, K_2'$ . Затем поворачиваем ребро  $GG'$ . Фронтальные проекции  $G_2, G_2'$  вершин будут перемещаться по прямым линиям  $(G_2G_0) \perp (L_2L_2')$ ,  $(G_2'G_0') \perp (L_2L_2')$ .

Положения вершин  $G_0, G_0'$  определятся засечкой из точек  $K_0, K_0'$  соответственно радиусом, равным длине ребра  $[GK] = [G_1K_1]$ . На рис. 13.6 направление движения вершин  $G, K, L$  показано тонкой линией со стрелками, а для вершин  $G', K', L'$  сделаны только начальные и конечные штрихи.

Ребро  $[LL']$  раздваивается: остается с гранью  $LL'K'K$  и перемещается с гранью  $GG'L'L$ . Поэтому из проекций  $L_2, L_2'$  вершин проводим траектории  $(L_2L_0) \perp (L_2L_2')$ ,  $(L_2'L_0') \perp (L_2L_2')$  и на них засечкой длиной  $[GL_1]$  из вершин  $G_0, G_0'$  отмечаем вершины  $L_0, L_0'$ . Полученные точки соединяем прямыми линиями. Фигура  $L_0K_0G_0L_0'G_0'K_0'L_0'$  является разверткой боковой поверхности призмы.

Грань  $G_0K_0L_0$  нижнего основания построена так же, как и в предыдущем примере (рис. 13.5): из точек  $K_0$  и  $G_0$  проведены дуги окружностей до пересечения в точке  $L_0$ .

В этом случае развертка показана внутренней стороной (изнанкой) призмы. Это видно из обхода по контуру любой грани, например: у грани  $G_2G_2'K_2'K_2$  обход контура происходит по часовой стрелке, а на развертке  $G_0G_0'K_0'K_0$  — обход против движения часовой стрелки.

Любую точку  $M(M_1, M_2)$  грани можно построить даже без помощи второй проекции: в грани строим прямую  $(M_2-1_2)$ , которая при раскатке займет положение, определяемое точкой  $1_0$  и параллельностью боковому ребру, и на линии  $(M_2M_0) \perp (L_2L_2')$  отмечаем  $M_0$ .

Если призма изображена в произвольном положении, то преобразованием чертежа ее можно привести к виду, удобному для способа нормального сечения или способа раскатки.

## 13.3. Построение разверток развертывающихся поверхностей

Напомним, что к развертывающимся поверхностям относятся цилиндры, конусы и поверхности с ребром возврата (торсы). При графическом построении их разверток эти поверхности заменяют (аппроксимируют) вписанными или описанными многогранными поверхностями (призмами, пирамидами). Такие развертки называют приближенными.

Однако, развертки отдельных из этих поверхностей можно построить точно, если использовать простые вычисления. Например, развертка конуса вращения (рис. 13.4, а) представляет собой сектор окружности (рис. 13.4, б) радиуса  $l = |SB|$  с центральным углом

$$\varphi = 180 \frac{D}{l} \text{ [град]},$$

где  $D$  — диаметр основания конуса,  $l$  — длина образующей.

Любая параллель точки  $A(A_1, A_2)$ , в том числе и верхнее основание усеченного конуса, будет изображаться дугой окружности радиуса  $|SA| = |S_0A_0| = [S_2A_2]$  с тем же центральным углом.

При графическом построении развертки коническая поверхность заменяется вписанной пирамидой (рис. 13.7, а — вид сверху). Разделим основание конуса на  $n$  частей, при этом удобно сделать их равными. В нашем примере основание разделено на 12 равных частей.

Дуга окружности заменяется хордой  $[0_1-1_1], [1_1-2_1]$  и т. д. Очевидно, что чем больше число  $n$ , тем ближе длина хорды приближается к длине дуги окружности. Такая хорда будет ребром  $[0_1-1_1]$  основания грани  $0_1S_11_1$ . За начало отсчета возьмем ребро  $[0_1S_1]$ , на

развертке  $[S_0 O_0]$  (рис. 13.7, в). Образующие конуса являются боковыми ребрами вписанной пирамиды. Построение развертки сводится к последовательному построению треугольников – граней. Проводим вертикальную линию, на ней отмечаем точку  $S_0$  и, приняв ее за центр окружности, строим дугу радиуса  $|S_0 B_0| = l$ . Отмечаем точку  $O_0$  и от нее последовательно откладываем хорды  $[O_0 - 1_0], [O_0 - 1'_0], [1_0 - 2_0], [1'_0 - 2'_0]$  и т. д. до точки  $B_0$  образующей  $[SB]$ , по которой разрезана поверхность конуса.

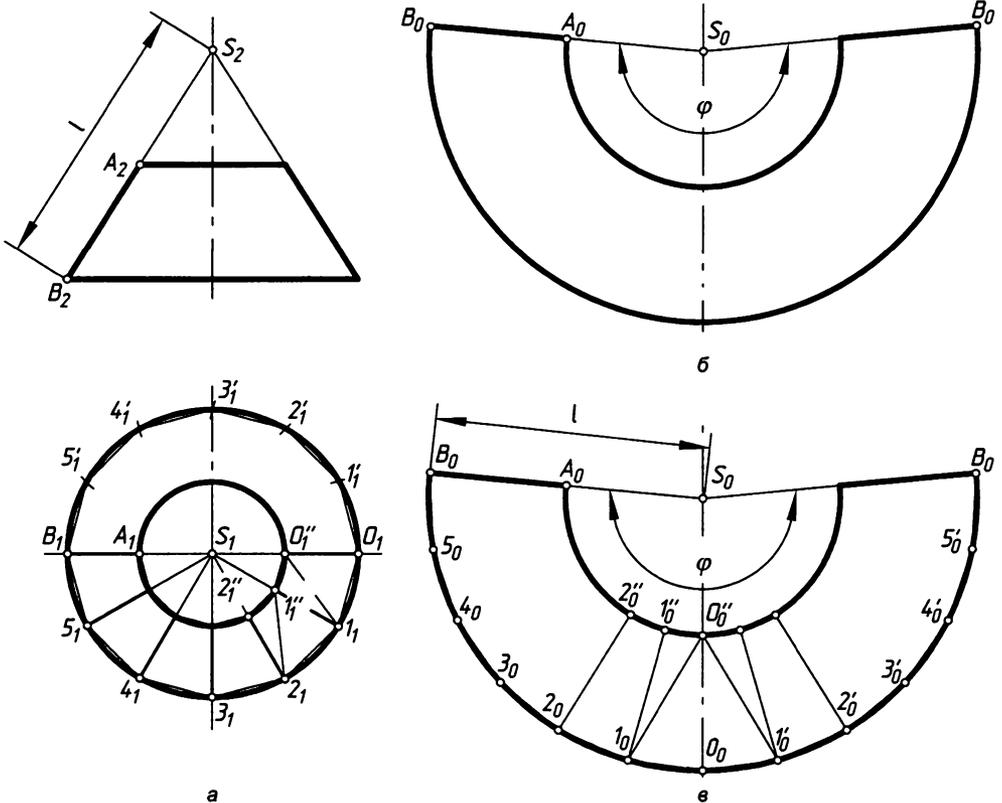


Рис. 13.7. Развертка конуса вращения

Для усеченного конуса строится развертка параллели точки  $A$  (дуга радиуса  $|S_0 A_0| = |S_2 A_2|$ ), которая так же заменяется вписанным многоугольником  $O_0'' - 1_0'' - 2_0'' - \dots$ . При недоступной вершине  $S (S_2)$  на вертикальной линии откладываем отрезок  $|O_0'' - O_0| = |A_2 B_2|$  и строим два треугольника, составляющих грань  $(O_0, -O_0'' - 1_0'' - 1_0)$ . Для этого из точки  $O_0$  проводим дугу радиуса  $|O_0 - 1_0| = |O_1 - 1_1|$ , а из точки  $O_0''$  проводим дугу радиуса  $|O_0'' - 1_0|$ , предварительно определив натуральную величину отрезка  $|O_0'' - 1_0| = |O_0'' - 1_0|$  любым из способов. Здесь удобен способ вращения вокруг горизонтально проецирующей прямой линии (на рисунке не показано). В пересечении дуг получаем точку  $1_0$  и симметричную точку  $1_0'$ . В пересечении дуг радиусов  $|O_0'' - 1_0''| = |O_1'' - 1_1''|$  и  $|1_0 - 1_0'| = |O_0 - O_0''|$  определится точка  $1_0''$ . Аналогично строятся все другие грани. Для изготовления поверхности развертка соответствующим образом изгибается и соединяется по линии разреза.

Развертку усеченного конуса с недоступной вершиной можно построить с помощью подобного конуса. Эта задача подробно рассмотрена в работах [17, 31] и др.

Развертка других конических поверхностей строится аналогично. Рассмотрим пример построения развертки эллиптического конуса (рис. 13.8).

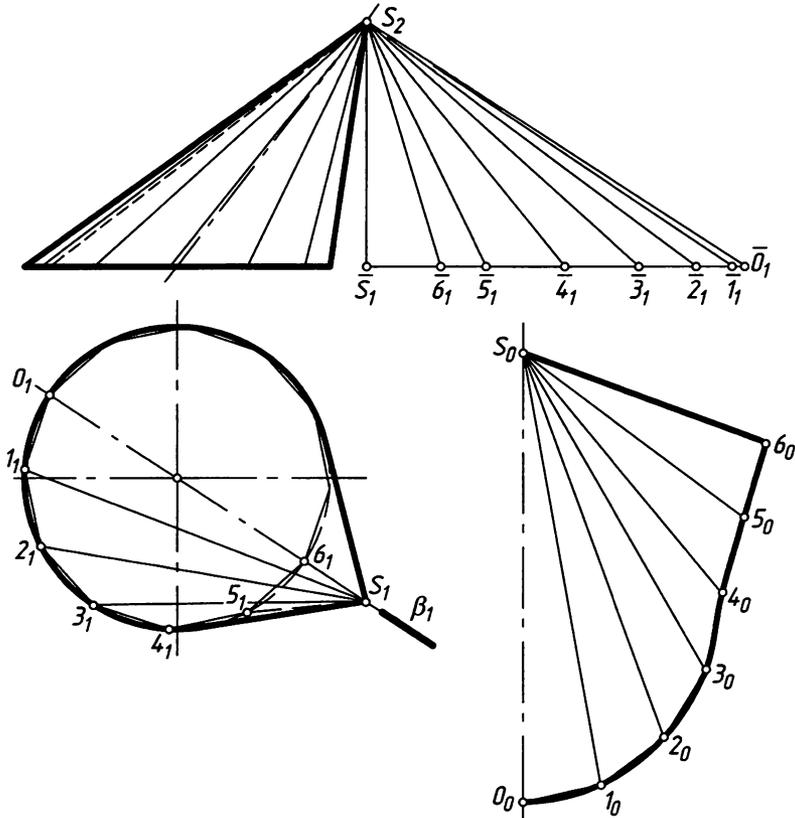


Рис. 13.8. Развертка конуса способом триангуляции

В этом случае удобно начать с плоскости  $\beta$  ( $\beta_1$ ) симметрии поверхности, разрезав конус по наиболее короткой образующей ( $S-6$ ). Построение развертки начнем с образующей  $[S-0] \rightarrow (S_1-0_1)$ , относительно которой она симметрична (на рисунке построена одна половина развертки). Делим основание конуса на 12 равных частей, начиная с точки  $0_1$ . Длины боковых ребер пирамиды определяем преобразованием чертежа способом плоскопараллельного перемещения. Из проекции  $S_2$  вершины проведем вертикальную прямую, на уровне плоскости основания отметим точку  $\bar{S}_1$  и через нее проведем горизонтальную прямую. От точки  $\bar{S}_1$  отложим отрезки  $|\bar{S}_1\bar{0}_1| = |S_10_1|$ ,  $|\bar{S}_1\bar{1}_1| = |S_11_1|$ ,  $|\bar{S}_1\bar{2}_1| = |S_12_1|$ , и т. д. Отрезок  $|\bar{S}_2\bar{0}_1| = |S_20_1|$ , то есть это натуральная величина ребра.

На вертикальной (или любой другой) прямой отмечаем точку  $S_0$  и откладываем отрезок  $|S_00_0| = |\bar{S}_2\bar{0}_1|$ . Из точки  $0_0$  проводим дугу радиуса  $|0_01_0| = |0_11_1|$ , а из точки

грани  $OS_1$ . Далее из точки  $1_0$  проводим дугу радиуса  $|1_0 2_0| = |1, 2_1|$ , а из  $S_0$  дугу радиуса  $|S_0 2_0| = |S_2 \bar{2}_1|$  и в их пересечении отмечаем точку  $2_0$ . Так последовательно строятся все грани пирамиды. Построенные точки  $O_0 1_0 \dots 6_0$  соединяются плавной кривой.

Из точки  $O_0$  проводим дугу радиуса  $|O_0 1_0| = |O, 1_1|$ , а из точки  $S_0$  проводим дугу радиуса  $|S_0 1_0| = |S_2 \bar{1}_1|$  и в их пересечении получаем вершину  $1_0$  грани  $OS_1$ . Далее из точки  $1_0$  проводим дугу радиуса  $|1_0 2_0| = |1, 2_1|$ , а из  $S_0$  дугу радиуса  $|S_0 2_0| = |S_2 \bar{2}_1|$  и в их пересечении отмечаем точку  $2_0$ . Так последовательно строятся все грани пирамиды. Построенные точки  $O_0 1_0 \dots 6_0$  соединяются плавной кривой.

Такой способ построения развертки называют способом треугольников или триангуляцией.

Развертка цилиндрической поверхности сводится к построению развертки призмы (рис. 13.9).

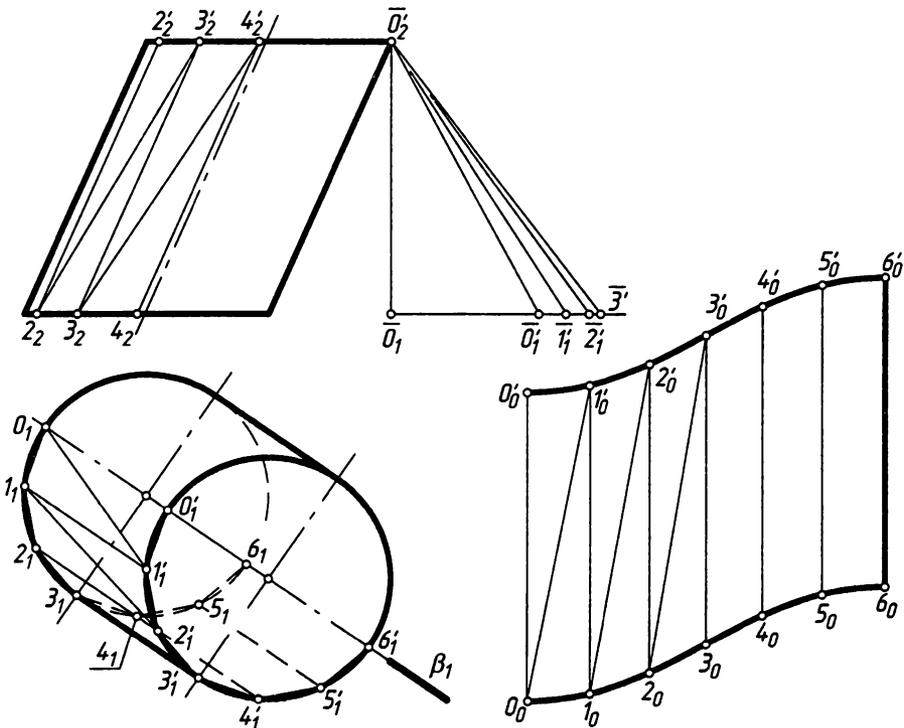


Рис. 13.9. Развертка цилиндрической поверхности

Развертку можно начать с любой образующей цилиндра, но удобнее это сделать по плоскости симметрии  $\beta$  ( $\beta_1$ ). Разделим основания цилиндра на  $n$  равных частей (в примере  $n = 12$ ) и заменим дуги окружностей хордами  $O_1 1_1, 1_1 2_1, \dots$ . Через вершины вписанных в основания многоугольников проведем образующие, которые будут боковыми ребрами  $O_0 1_0, 1_0 1_0', 1_0' 2_0', \dots$  граней вписанной призмы. Четырехугольники граней делим диагональю на треугольники и определяем размеры их сторон.

На фронтальной проекции построим вертикальный отрезок  $[\bar{0}_2' \bar{0}_1']$ , равный высоте цилиндра, и через точку  $\bar{0}_1'$  проведем горизонтальную прямую. С помощью циркуля отрезок  $|\bar{0}_1' \bar{0}_1'|$  строим по горизонтальной линии от  $\bar{0}_1'$ :  $|\bar{0}_1' \bar{0}_1'| = |\bar{0}_1' \bar{0}_1'|$ . Гипотенуза  $|\bar{0}_2' \bar{0}_1'| = |\bar{0} \bar{0}'|$  — натуральная величина образующей цилиндра (ребра призмы).

На произвольной прямой линии выбираем точку  $0_0'$  и от нее откладываем отрезок длиной  $|\bar{0}_1' \bar{0}_1'| = |\bar{0}_2' \bar{0}_1'|$  — это образующая цилиндра или боковое ребро призмы. От точки  $\bar{0}_1'$  откладываем длину горизонтальной проекции диагонали  $|\bar{0}_1' \bar{1}_1'| = |\bar{0}_1' \bar{1}_1'|$  и измеряем ее натуральную величину  $|\bar{0}_2' \bar{1}_1'| = |\bar{0}_1' \bar{1}_1'|$ . Радиусом, равным длине этой диагонали, из точки  $0_0'$  проводим дугу в окрестности точки  $0_0'$ . Длинной хорды  $|\bar{0}_1' \bar{1}_1'|$  проводим дугу из точки  $0_0'$  и в пересечении дуг получаем точку  $1_0'$ . Из точки  $1_0'$  параллельно линии  $(0_0' 0_0')$  строим отрезок  $|\bar{1}_0' \bar{1}_0'| = |\bar{0}_1' \bar{0}_1'|$ . Для построения следующей грани нужно определить длину диагонали  $|\bar{1}_2' \bar{1}_1'|$ . Для этого откладываем отрезок  $|\bar{0}_1' \bar{2}_1'| = |\bar{1}_2' \bar{1}_1'|$  и замеряем длину  $|\bar{0}_2' \bar{2}_1'| = |\bar{1}_2' \bar{2}_0'|$ . Этим отрезком, как радиусом, из точки  $1_0'$  проводим дугу в окрестности точки  $1_0'$ , а из точки  $1_0'$  дугой радиуса  $|\bar{1}_0' \bar{2}_0'| = |\bar{1}_2' \bar{2}_0'|$  устанавливаем точку  $2_0'$ . Достаиваем грань прямыми линиями  $(2_0' 2_0') \parallel (1_0' 1_0')$  и  $(1_0' 2_0') \parallel (1_0' 2_0')$ .

Так последовательно строится каждая грань призмы. Полученные точки  $0_0' - 1_0' - \dots - 6_0'$  и  $0_0' - 1_0' - \dots - 6_0'$  соединяются плавными кривыми, которые являются развертками оснований поверхности. В примере построена только одна половина развертки, а вторая половина ей симметрична относительно образующей  $(0_0' - 0_0')$ , если поверхность разрезать по образующей  $(6_0' - 6_0')$ , или относительно  $(6_0' - 6_0')$ , при разрезе по образующей  $(0_0' - 0_0')$ . В примере диагональ  $(0_1' - 1_1')$ ,  $(0_0' - 1_0')$  показана только на одной грани, а диагонали других граней использовались, но не прочерчены, так как в этом нет необходимости.

Мы построили развертку призмы способом триангуляции. При выполнении соответствующих условий (см. раздел 13.2) можно использовать способ нормального сечения или способ раскатки. Важно рационально использовать преобразования чертежа.

## 13.4. Условные развертки поверхностей

Неразвертываемые поверхности широко используются на практике. Например, сферические и каплевидные резервуары, аппараты нефтехимического производства и масса других изделий изготавливаются из листового материала, который необходимо раскраивать, а затем изгибать.

Для построения разверток таких поверхностей пользуются способом триангуляции, способом цилиндров и способом конусов.

**Способ триангуляции** используется в тех случаях, когда поверхность можно аппроксимировать отсеками плоскостей — граней. Он рассмотрен в разделах 13.2, 13.3.

**Способ цилиндров** рассмотрим на примере развертки сферы. Используя свойства симметрии, изобразим полусферу (рис. 13.10).

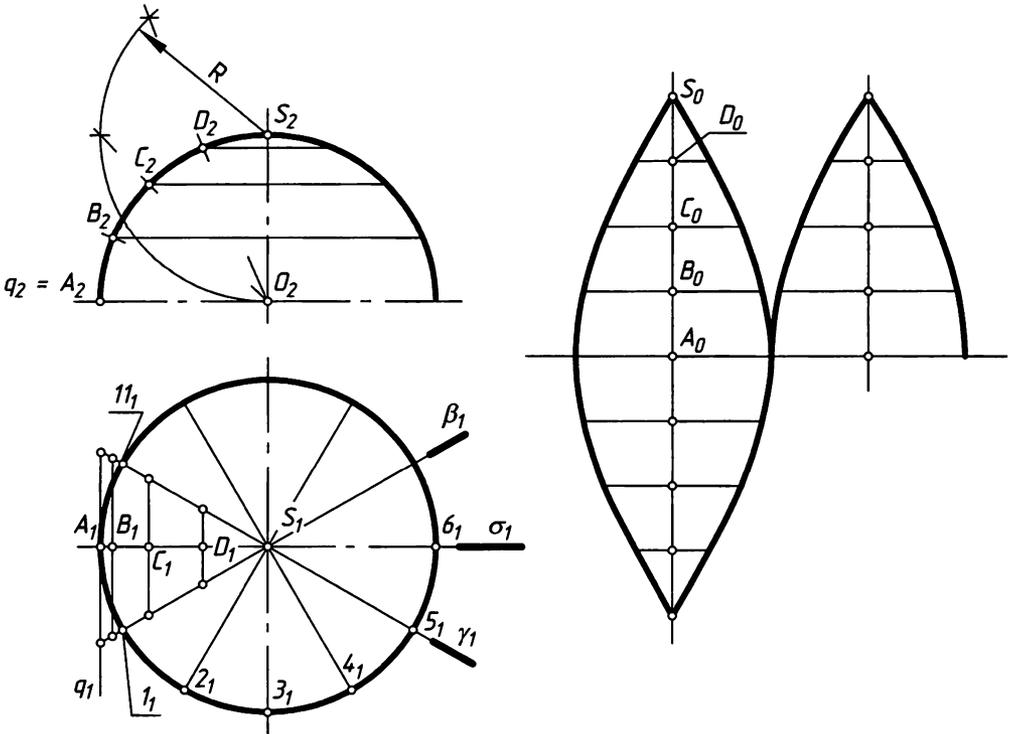


Рис. 13.10. Развертка поверхности способом цилиндров

Разделим экватор сферы на 12 равных частей (деления показаны только на виде сверху). Меридиональными плоскостями  $\beta(\beta_1)$  и  $\gamma(\gamma_1)$  выделим долю сферы со средним меридианом плоскости  $\sigma(\sigma_1)$ , который является главным меридианом. Разделим главный меридиан на  $n$  равных (или неравных) частей. В примере он разделен на 4 равные части, отмеченные точками  $ABCD$ . При таком делении удобно использовать радиус той же сферы. Из точки  $A_2$  и  $S_2$  дугой радиуса  $R$  делаем засечку, соединяем ее с центром  $O_2$  изображения сферы и получаем точку  $C_2$ . Затем из точки  $C_2$  и  $A_2$  этим же радиусом делаем засечки и получаем точки  $D_2$  и  $B_2$ . Через точку  $A$  ( $A_1, A_2$ ) проведем фронтально проецирующую прямую  $q$  ( $q_1, q_2$ )  $\perp$   $\sigma(\sigma_1)$  и примем ее за образующую цилиндрической поверхности с направляющей линией  $ABCDS$ . Длина образующей ограничивается плоскостями  $\beta(\beta_1)$  и  $\gamma(\gamma_1)$ . В указанных точках образующая касается своих параллелей (на виде сверху изображен только экватор).

Зафиксируем ее в указанных точках. Образующую, проходящую через точку  $A$  и ограниченную плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$ , можно рассматривать как спрямленную дугу  $(1_1-A_1-11_1)$  экватора.

Далее разворачивается соответствующая цилиндрическая поверхность, которая заменяется призмой. Строим горизонтальную линию, на ней отмечаем точку  $A_0$ , через которую проводим вертикальную линию ( $A_0S_0$ ). По этой линии спрямляем направляющую цилиндрической поверхности, откладывая хорды  $|A_0B_0| = |A_2B_2|$ ,  $|B_0C_0| = |B_2C_2|$ ,  $|C_0D_0| = |C_2D_2|$ ,  $|D_0S_0| = |D_2S_2|$ . Если сфера полная, то такие же отрезки откладываем вниз от точки  $A_0$ ,

Через построенные точки  $A_0, B_0, C_0, D_0$  проводим горизонтальные линии, на которых откладываем длины соответствующих образующих (ребер призмы), замеренные на горизонтальной проекции поверхности в пределах доли. Концы построенных отрезков соединяем плавной кривой. Это и будет развертка выделенной доли сферы.

На рис. 13.10 построена развертка одной доли полной сферы и одной доли полусферы. Остальные доли будут конгруэнтны построенным долям. Очевидно, чем меньше угол между плоскостями  $\beta$  и  $\gamma$ , то есть чем меньше доли, тем точнее будет развертка.

**Способ конусов** показан на примере развертки части закрытого тора (рис. 13.11). Примем хорды  $[AB], [BC], [CS]$  за образующие соосных конических поверхностей, вписанных в заданную поверхность. Дальнейшая задача заключается только в построении развертки этих конических поверхностей (раздел 13.3).

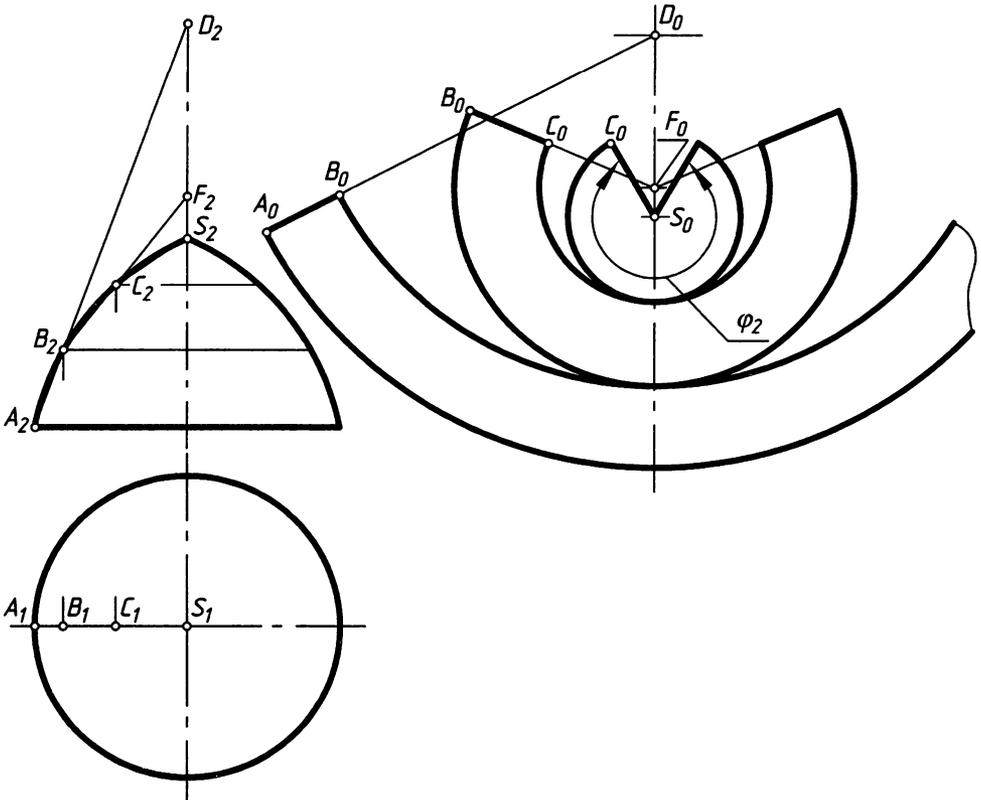


Рис. 13.11. Развертка поверхности способом конусов

В примере отмечены вершины  $D (D_2), F (F_2), S (S_2)$  этих конусов и построена их развертка по центральному углу. Построена развертка параллели точки  $A$ , как дуга радиуса  $|D_0A_0| = |D_2A_2|$  с центральным углом

$$\varphi = 180^\circ \frac{D_A}{|DA|},$$

где  $D_A$  — диаметр параллели точки  $A$ .

Потом построена дуга точки  $B_0$  радиусом  $|D_0 B_0| = |D_2 B_2|$ . На рис. 13.11 обозначен центральный угол  $\varphi_2$  только верхнего конуса, а другие углы не обозначены.

Положение вершины  $F_0$  можно определить из условия соприкосновения разверток одной и той же параллели (в данном случае параллели точки  $B$ ):

$$|D_0 F_0| = |D_0 B_0| - |F_0 B_0|.$$

Разверткой конуса с вершиной  $F$  ( $F_2$ ) будет сектор радиуса  $|F_0 B_0| = |F_2 B_2|$  с центральным углом

$$\varphi_1 = 180^\circ \frac{D_B}{|FB|},$$

где  $D_B$  — диаметр параллели точки  $B$ .

Параллель точки  $C$  развернется дугой радиуса  $|F_0 C_0| = |F_2 C_2|$ . Так же из условия соприкосновения определяем

$$|F_0 S_0| = |F_0 C_0| - |S_0 C_0|$$

и из точки  $S_0$  строим сектор радиусом  $|S_0 C_0| = |S_2 C_2|$  с центральным углом

$$\varphi_2 = 180^\circ \frac{D_C}{|SC|},$$

где  $D_C$  — диаметр параллели точки  $C$ .

Такой подход менее трудоемок и более точен, чем построение конусов способом триангуляции.

## Вопросы и задания

1. Что называют разверткой?
2. Как определяется лицевая сторона развертки?
3. Назовите основные свойства развертки.
4. Какие поверхности называют развертывающимися? Какие классы поверхностей к ним относятся?
5. Назовите виды разверток и способы их построения.
6. В чем заключается способ триангуляции?
7. Когда используется способ нормального сечения?
8. Когда используется способ раскатки?
9. Какие развертки называют приближенными?
10. Раскройте принцип построения развертки способом цилиндров.
11. Раскройте принцип построения развертки способом конусов.

# Литература

## Список рекомендуемой литературы

1. *Иванов Г. С.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. М.: Машиностроение, 1995. 224 с.
2. *Королёв Ю. И.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. СПб.: Питер, 2006. 252 с.
3. *Королёв Ю. И.* Инженерная графика. Часть 1. Начертательная геометрия: Учебное пособие. Уфа: Изд-во УГНТУ, 2002. 240 с.
4. *Королёв Ю. И., Матвеев Ю. Г.* Инженерная графика. Часть I. Начертательная геометрия: Учебное пособие. Уфа: Изд-во УГНТУ, 1998. 211 с.
5. *Локтев О. В., Числов П. А.* Задачник по начертательной геометрии: Учеб. пос. для вузов. 3-е изд., испр. М.: Высшая школа, 1999. 104 с.
6. *Нартова Л. Г., Якунин В. И.* Начертательная геометрия: Учеб. для вузов. М.: Дрофа, 2003. 208 с.: ил.
7. Начертательная геометрия: Учеб. для вузов/ Н. Н. Крылов, Г. С. Иконникова, В. Л. Николаев, В. Е. Васильев: Под ред. Н.Н. Крылова. 7-е изд. перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 224 с.
8. *Фролов С. А.* Сборник задач по начертательной геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1980. — 142 с.
9. *Фролов С. А.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1983. — 240 с.
10. *Чекмарев А. А.* Инженерная графика: Учеб. для немаш. спец. вузов. 3-е изд. стер. М.: Высшая школа, 2000. — 365 с.

## Список использованной литературы

11. *Арустамов Х. А.* Сборник задач по начертательной геометрии: Учеб. пособие для студентов вузов. 9-е изд., стереотип. М.: Машиностроение, 1978. 445 с.
12. *Боголюбов С. К.* Черчение: Учебник для средних специальных учебных заведений. 2-е изд., испр. М.: Машиностроение, 1989. 336 с.
13. *Бубенников А. В.* Начертательная геометрия. Учебник для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1985. — 288 с.

14. *Виницкий И. Г.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. М.: Высшая школа, 1975. 280 с.
15. *Гильберт Д., Кон-Фоссен С.* Наглядная геометрия: Пер. с нем. 3-е изд. М.: Наука, 1981. 344 с.
16. *Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф.* Аксонометрия. М.: Гостехиздат, 1953.
17. *Гордон В. О., Семенцов-Огиевский М. А.* Курс начертательной геометрии: Учеб. пособие / Под ред. Ю. Б. Иванова. 23-е изд., перераб. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 272 с.
18. *Засов В. Д., Зенгин А. Р., Иконникова Г. С., Крылов Н. Н.* Задачник по начертательной геометрии. Учеб. пособие для строит. специальностей вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1975. 238 с.
19. *Иванов Г. С.* Теоретические основы начертательной геометрии: Учебное пособие. М.: Машиностроение, 1998. 157 с.
20. *Климухин А. Г.* Начертательная геометрия. М.: Стройиздат, 1973. 368 с.
21. *Климухин А. Г.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Стройиздат, 1978. 334 с.
22. *Котов И. И.* Начертательная геометрия (На принципах программированного обучения): Учебник для машиностроительных, приборостроительных и механико-технологических специальностей вузов. М.: Высшая школа, 1970. — 384 с.
23. *Котов И. И., Полозов В. С., Широкова Л. В.* Алгоритмы машинной графики. М.: Машиностроение, 1977. 231 с.
24. *Крылов Н. Н., Лобандиевский П. И., Мэн С. А.* и др. Начертательная геометрия: Учебник для вузов. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1977. — 231 с.
25. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ): Учебник для инженерно-технических вузов / А. М. Тевлин, Г. С. Иванов, Л. Г. Нартова и др.; Под ред. А. М. Тевлина. М.: Высшая школа, 1983. 175 с.
26. *Полозов В. С., Будеков О. А., Ротков С. И.* и др. Автоматизированное проектирование. М.: Машиностроение, 1983. 280 с.
27. *Попова Г. Н., Алексеев С. Ю.* Машиностроительное черчение: Справочник. СПб.: Политехника, 1994. 448 с.
28. *Посвянский А. Д.* Краткий курс начертательной геометрии. 3-е изд.: Учебник для специальностей втузов, кроме строительных и архитектурных. М.: Высшая школа, 1970. 240 с.
29. *Посвянский А. Д., Рыжов Н. Н.* Сборник задач по начертательной геометрии: Учеб. пособие / Под ред. проф. Н. Ф. Четверухина. 3-е изд. М.: Высшая школа, 1966. 280 с.
30. *Фролов С. А.* Начертательная геометрия. Способы преобразования ортогональных проекций: Учеб. пособие для вузов / С. А. Фролов. 3-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 2002. 160 с.
31. *Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М.* Начертательная геометрия: Учебник для вузов / Под ред. Н. Ф. Четверухина. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 1963. 420 с.
32. *Четверухин Н. Ф.* Проективная геометрия. М.: Просвещение, 1969. — 368 с.