МОСКОВСКИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

1981—1992

А. В. Бегунц, С. Б. Гашков, Д. В. Горяшин,
О. Н. Косухин, А. А. Флёров

Московские математические олимпиады 1981—1992 г.

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М82

А. В. Бегунц, С. Б. Гашков, Д. В. Горяшин,
О. Н. Косухин, А. А. Флёров
Московские математические олимпиады 1981—1992 г.
М.: МЦНМО, 2017.
405 с.
ISBN 978-5-4439-3140-1

В книге собраны задачи Московских математических олимпиад 1981—1992 г. с ответами, указаниями и решениями. Решения изложены с такой степенью подробности и обоснованности, чтобы их чтение и понимание без использования дополнительной литературы было доступно как можно более широкому кругу любителей красивых математических задач. Помещённый в приложении путеводитель призван облегчить поиск задач по заданной теме или методу решения.

Все задачи в том или ином смысле нестандартные, их самостоятельное решение помимо владения общеобразовательным материалом требует также смекалки, сообразительности, а иногда и многочасовых размышлений.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков, школьников старших классов, студентов математических и педагогических специальностей и направлений подготовки.

Подготовлено на основе книги: Московские математические олимпиады 1981—1992 г. / А. В. Бегунц и др. — М.: МЦНМО, 2017. — ISBN 978-5-4439-1140-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (495) 241-08-04
www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3140-1

Предисловие

В настоящей книге собраны условия задач двенадцати Московских математических олимпиад, начиная с 1981 года и заканчивая 1992 годом. Ко всем задачам приводятся указания, решения (нередко несколько решений) и ответы. Указания обычно подсказывают первый шаг или основную идею решения, и в ходе самостоятельной работы с книгой полезнее не сразу читать решение неподдающейся задачи, а сначала попробовать решить её, прочтя указание. Решение, приведённое первым, зачастую является авторским, а дополнительные решения призваны показать широту и разнообразие подходов, эффективных для данной задачи, и могут выходить за рамки математических понятий и методов, доступных учащимся соответствующего класса. Комментарии к решениям проясняют связь задач с современной математикой и могут быть интересны любознательному читателю, стремящемуся к целостному восприятию огромного мира математических знаний. Путеводитель по задачам призван облегчить поиск задач по заданной теме или методу решения. В конце книги помещён список авторов с указанием предложенных ими задач.

В описываемые годы олимпиада по математике в Москве проводилась по схеме: школьный тур — районный тур — городской (заключительный) тур. По сложившейся традиции Московской математической олимпиадой называют именно городской тур, задачи которого и вошли в данную книгу.

Председателем оргкомитета всех двенадцати олимпиад был лауреат Ленинской премии в области науки, член-корреспондент АН СССР, декан механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор Олег Борисович Лупанов.

Координацию основной работы, связанной с проведением олимпиады, осуществляли заместители председателя оргкомитета, которыми в указанные годы были заместители декана механико-математического факультета МГУ по новому приёму и работе со школьниками: И. И. Мельников (1981–1983), И. Н. Сергеев (1984–1988) и В. А. Прошкин (1989–1992).

Подготовка и проведение Московской олимпиады осуществлялось силами сотен сотрудников вузов, аспирантов, студентов, а также школьных учителей и энтузиастов олимпиадного движения. Территориально с 1981 г. по 1984 г. олимпиада проводилась не только в МГУ (где всегда размещались учащиеся выпускных классов), но и в МГПИ им. В. И. Ленина (1981–1984), МИИТе (1981–1983) и МИЭМе (1981). С 1985 г. олимпиада для всех классов проводилась в Московском университете.

Заседания комиссии по составлению заданий олимпиады (методической комиссии) проходили преимущественно в корпусах МГУ. Помимо сотрудников и аспирантов механико-математического факультета МГУ, в работе над заданиями олимпиады принимали участие также сотрудники факультета вычислительной математики и кибернетики, а также ряда других московских вузов.

При подготовке книги проводилась работа с архивом Московской олимпиады, содержащим оригинальные условия всех задач и авторские решения некоторых из них, а также статистику решаемости задач ряда олимпиад и иные материалы оргкомитета. Важными источниками решений стали книга [14], журналы «Квант» различных лет [77], а также сайт [78]. Все решения, вошедшие в книгу, изложены с такой степенью подробности и обоснованности, чтобы их чтение и понимание без использования дополнительной литературы было доступно как можно более широкому кругу старшеклассников, учителей и просто любителей математики. При необходимости привлечения фактов, выходящих за рамки школьной программы, мы обосновывали их или в тексте решения, или в комментариях.

Хочется обратить внимание читателей на следующие моменты. Московская олимпиада всегда являлась интеллектуальным состязанием высокого уровня, но формат и стиль её заданий не оставался неизменным. Были годы, когда во всех классах предлагалось по 4—5 задач, причём подчас их уровень был таков, что даже первую задачу решали единицы (см., например, 82.10.1). Отметим также, что расположение нестандартных заданий в порядке возрастания сложности само по себе представляет непростую задачу, поэтому, хотя составители по умолчанию стремятся к её решению, у читателя иногда может складываться ощущение, что задания располагаются в несколько ином порядке. Лишь к концу рассматриваемого нами периода оформился привычный для сегодняшних школьников формат: в каждой параллели с 8 по 11 класс по 6 задач, первая из которых доступна широкому кругу школьников, а последняя дана с надеждой на то, что с ней справятся хотя бы несколько участников, и с верой в то, что всем без исключения будет полезно и интересно узнать её решение после олимпиады. Подчеркнём, что во все годы составители задач Московской олимпиады стремились создать такие варианты, которые им самим хотелось бы решать, будь они на месте участников.

Мы уверены, что самостоятельное выполнение заданий прошлых лет с последующим изучением изложенных в книге решений и комментариев к ним помогут сегодняшним школьникам глубже проникнуть в удивительный мир математики, почувствовать его красоту и, быть может, начать свою собственную научно-исследовательскую деятельность.

Авторы искренне благодарят всех коллег, высказавших замечания и предложения по рукописи книги, ока-

завших помощь по восстановлению авторства заданий и предоставивших авторские решения (в том числе ранее не публиковавшиеся), а особенно профессоров В. Б. Алексеева, С. А. Богатого, Б. Н. Кукушкина, В. Ю. Протасова и И. Н. Сергеева. Отдельное спасибо всем студентам механико-математического факультета МГУ и старшеклассникам школьного отделения «Школа № 54» образовательного комплекса «Школа № 171», участвовавшим в обсуждении решений и предложившим свои идеи, а также заметившим неточности и опечатки.

В заключение отметим, что несмотря на то что работа над книгой велась более трёх лет и за это время удалось установить авторство большинства задач, предложить несколько подходов к задачам, допускающим различные решения, собрать интересные факты об истоках создания самих задач, а также предоставить ссылки для дальнейшего изучения читателем заинтересовавшей его области математики, мы надеемся, что работа над книгой продолжится и после выхода её первого издания: читатели помогут нам не только исправить неизбежные неточности и опечатки в тексте, но и поделятся идеями других решений собранных задач, а, быть может, кто-то сможет документально подтвердить авторство задач, для которых мы не смогли указать авторов. Все замечания и предложения просим направлять на адрес mmo1981-1992@mccme.ru.

Условия задач

1981 год (XLIV олимпиада)

7 класс

1. Натуральное число A при делении на 1981 дало в остатке 35, при делении на 1982 оно дало в остатке также 35. Каков остаток от деления числа A на 14?

2. Дано число, имеющее 13 разрядов. Доказать, что одну из его цифр можно вычеркнуть так, что в полученном числе количество семёрок на чётных местах будет равно количеству семёрок на нечётных местах.

3. На двух равных круглых листах бумаги художник нарисовал одинаковых драконов. Оказалось, что на первом листе глаз дракона совпал с центром круга, а на втором — не совпал. Доказать, что второй лист бумаги можно разрезать на такие две части, чтобы из них удалось сложить круг того же радиуса с тем же драконом, но чтобы его глаз уже находился в центре круга.

4. Дано число x, большее 1. Обязательно ли имеет место равенство $[\sqrt{[\sqrt{x}]}]=[\sqrt{\sqrt{x}}]$?

5. Имеется 5 гирь. Их массы равны 1000 г, 1001 г, 1002 г, 1004 г и 1007 г, но надписей на гирях нет и внешне они неотличимы. Имеются весы со стрелкой, которые показывают массу в граммах. Как с помощью трёх взвешиваний определить гирю в 1000 г?

8 класс

1. В пятиугольнике проведены все диагонали. Какие 7 углов между двумя диагоналями или между диагоналями и сторонами достаточно отметить, чтобы из равенства этих углов друг другу следовало, что пятиугольник правильный?

2–4. См. задачи 2–4 для 7 класса.

5. Дано 10 натуральных чисел: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{10}$. Доказать, что их наименьшее общее кратное не меньше $10a_1$.

9 класс

1. Дано число, имеющее нечётное число разрядов. Доказать, что одну из его цифр можно вычеркнуть так, что в полученном числе количество семёрок на чётных местах будет равно количеству семёрок на нечётных местах.

2. Натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что каждое не превышает своего номера ($a_k \leqslant k$) и сумма всех чисел — чётное число. Доказать, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm \pm a_n$ равна нулю.

3. Пусть X и Y — два выпуклых многоугольника, причем многоугольник X содержится внутри Y, $S(X)$ и $S(Y)$ — площади этих многоугольников, а $P(X)$ и $P(Y)$ — их периметры. Доказать, что $\frac{S(X)}{P(X)} < 2 \cdot \frac{S(Y)}{P(Y)}$.

4. Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число бесконечных подмножеств, каждое из которых получается из любого другого подмножества прибавлением одного и того же целого числа к каждому элементу?

5. У правильного 1981-угольника отмечены 64 вершины. Доказать, что существует трапеция с вершинами в отмеченных точках.

10 класс

1. Рассматривается функция $y = f(x)$, определённая на всей вещественной оси и удовлетворяющая для некоторого числа $k \neq 0$ равенству $f(x+k)(1-f(x)) = 1 + f(x)$. Доказать, что f — периодическая функция.

2. Даны многочлен $P(x)$ степени d со старшим коэффициентом, равным единице, и натуральное число m. Известно, что если аргумент x — целое число, то $P(x)$ — целое число, делящееся на m. Доказать, что число $d!$ делится на m.

3. Доказать, что последовательность $x_n = \sin(n^2)$ не стремится к нулю при целом $n \to \infty$.

4. В квадрате со стороной, равной 1, расположена ломаная без самопересечений длины не меньше 200. Доказать, что найдётся прямая, параллельная одной из сторон квадрата, пересекающая ломаную не менее чем в 101 точке.

5. Радиус вписанной в треугольник окружности равен 4/3, а длины высот треугольника являются целыми числами и их сумма равна 13. Вычислить стороны треугольника.

6. За круглым столом сидят n человек. Разрешается любых двух людей, сидящих рядом, поменять местами. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате любые два соседа остались бы соседями, сидящими в обратном порядке?

1982 год (XLV олимпиада)

7 класс

1. Петя купил в магазине «Машины Тьюринга и другие вычислительные устройства» микрокалькулятор, который может выполнять следующие операции: по любым числам x и y он вычисляет $x+y$, $x-y$, $x+1$ и $1/x$ (если $x \neq 0$). Петя утверждает, что он может возвести любое положительное число в квадрат с помощью своего микрокалькулятора, сделав не более 6 операций. А вы можете это сделать? Если можете, то попробуйте перемножить любые два положительных числа, сделав не более 20 операций (промежуточные результаты можно записывать на бумаге и использовать в вычислениях неоднократно).

2. В квадрате находятся 5 точек. Доказать, что между какими-то двумя из них расстояние не превосходит половины длины диагонали квадрата.

3. Петя приобрёл в том же магазине автомат, который за 5 копеек умножает любое введённое в него число на 3, а за 2 копейки прибавляет к любому числу 4. Петя хочет, начиная с 1, которую можно ввести в автомат бесплатно, набрать на нём число 1981 и затратить наименьшее количество копеек. Во сколько обойдутся ему вычисления? А что будет, если он захочет набрать число 1982?

4. Какое наименьшее количество точек на плоскости надо взять, чтобы среди попарных расстояний между ними встретились числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64? (Не запрещается, чтобы среди попарных расстояний между точками, кроме указанных, встречались и другие числа.)

8 класс

1. Упростить выражение $\dfrac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}$.

2. Прямоугольник разрезан на 5 прямоугольников. Доказать, что один из пяти прямоугольников можно накрыть другим.

3. Квадраты чисел 1, 2, 3, ..., 1982 записываются подряд в некотором порядке. Может ли полученное многозначное число быть полным квадратом?

4. Все диагонали выпуклого пятиугольника параллельны противоположным сторонам. Докажите, что отношение каждой диагонали к противоположной стороне равно $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

5. Считая известной формулу $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, доказать, что для различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n справедливо неравенство

$$(a_1^7+\ldots+a_n^7)+(a_1^5+\ldots+a_n^5)\geqslant 2\cdot(a_1^3+\ldots+a_n^3)^2.$$

Возможно ли равенство для каких-нибудь различных натуральных чисел a_1, a_2, ..., a_n?

9 класс

1. Найти все натуральные числа n, для которых число $n\cdot 2^n+1$ кратно трём.

2. Найти на плоскости точку, сумма расстояний от которой до четырёх заданных точек минимальна.

3. На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами. Доказать, что найдётся окружность, внутри которой лежат ровно 1982 отмеченные точки.

4. Число $A = 0{,}1 + 0{,}02 + 0{,}003 + \ldots + n10^{-n} + \ldots$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Доказать, что в полученной записи не встретятся подряд идущие цифры 1982.

5. В выпуклом четырёхугольнике две стороны равны 1, а другие стороны и обе диагонали не больше 1. Какое максимальное значение может принимать периметр четырёхугольника?

10 класс

1. а) Доказать, что если из некоторой точки внутри правильного тетраэдра все его рёбра видны под одинаковыми углами, то эта точка — центр описанной около тетраэдра сферы.

б) Существуют ли вне тетраэдра точки, из которых все его рёбра видны под равными углами?

Примечание. Если точка лежит на ребре или его продолжении, то считается, что из неё это ребро видно под углом π или 0 соответственно.

2. а) Пусть a, b, c — длины сторон треугольника. Доказать неравенство

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) + a^2bc + b^2ac + c^2ab \geqslant 0.$$

б) Доказать, что это неравенство выполнено для любых неотрицательных a, b, c.

3. Петя приобрёл в магазине «Машины Тьюринга и другие вычислительные устройства» микрокалькулятор, который может по любым действительным числам x и y вычислить $xy + x + y + 1$ и не имеет других операций. Петя хочет написать «программу» для вычисления многочлена $1 + x + x^2 + \ldots + x^{1982}$. Под «программой» он понимает такую последовательность многочленов $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, что $f_1(x) = x$ и для любого $i = 2, \ldots, n$ выполнены равенства $f_i(x) = c_i$ или $f_i(x) = f_j(x) \cdot f_k(x) + f_k(x) + f_j(x) + 1$, где $j < i$, $k < i$, причём $f_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{1982}$.

а) Помогите Пете написать «программу».

б) Сумеете ли вы написать «программу», если калькулятор имеет только одну операцию $xy+x+y$?

4. Найти все такие натуральные n, для которых числа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n+1}$ выражаются конечными десятичными дробями.

5. Внутри правильного шестиугольника находится другой правильный шестиугольник с вдвое меньшей стороной. Доказать, что центр большого шестиугольника лежит внутри малого шестиугольника.

1983 год (XLVI олимпиада)

7 класс

1. Найти все пары целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2 = y^2 + 2y + 13$.

2. Белая плоскость произвольным образом забрызгана чёрной тушью. Доказать, что для любого $l > 0$ существует отрезок длины l, у которого оба конца одного цвета.

3. Найти наименьшее натуральное число, начинающееся с 4 и уменьшающееся от перестановки этой цифры в конец числа в 4 раза.

4. Двум друзьям необходимо попасть в соседний город. У них есть один велосипед, на котором может ехать лишь один человек. Каково минимальное время, за которое они могут добраться до города (считая по последнему), если скорости пешеходов u_1 и u_2, их скорости на велосипеде v_1 и v_2 ($v_i > u_j$, $i, j = 1, 2$), а расстояние равно A. (Они могут возвращаться и оставлять велосипед друг другу.)

5. Существует ли пятиугольник со сторонами 3, 4, 9, 11, 13, в который можно вписать окружность?

8 класс

1. Доказать, что при любых $x > \sqrt{2}$ и $y > \sqrt{2}$ выполняется неравенство $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 > x^2 + y^2$.

2. На сторонах треугольника ABC вне его построены правильные треугольники ABC_1, BCA_1 и CAB_1. Доказать, что $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$.

3. Может ли квадрат какого-либо натурального числа начинаться с 1983 девяток?

4. В вершинах правильного 1983-угольника расставлены числа 1, 2, ..., 1983. Любая его ось симметрии делит числа, не лежащие на ней, на два множества. Назовём расстановку «хорошей» относительно данной оси симметрии, если каждое число одного множества больше симметричного ему числа. Существует ли расстановка, являющаяся «хорошей» относительно *любой* оси симметрии?

5. На окружности выбрано пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, H. Обозначим через h_{ij} расстояние от точки H до прямой A_iA_j. Доказать, что $h_{12}\cdot h_{34}=h_{14}\cdot h_{23}$.

9 класс

1. Доказать, что при любой расстановке знаков «$+$» и «$-$» у нечётных степеней x выполнено неравенство

$$x^{2n}\pm x^{2n-1}+x^{2n-2}\pm x^{2n-3}+\ldots\pm x^3+x^2\pm x+1>\frac{1}{2}$$

(n — натуральное число, x — любое действительное).

2. Три окружности радиусов 3, 4, 5 внешне касаются друг друга. Через точку касания окружностей радиусов 3 и 4 проведена их общая касательная. Найти длину отрезка касательной, заключённого внутри окружности радиуса 5.

3. Доказать, что число $1^{1983}+2^{1983}+\ldots+1983^{1983}$ делится на $1+\ldots+1983$.

4. Двадцать городов соединены 172 авиалиниями (без промежуточных посадок). Доказать, что, используя эти авиалинии, можно из каждого города перебраться в любой другой.

10 класс

1. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки, в которых окружность, вписанная в $\triangle ABC$, касается сторон BC, AC, AB соответственно. Дано, что $AA_1=BB_1=CC_1$. Доказать, что $\triangle ABC$ правильный.

2. Доказать, что $4^m - 4^n$ делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $m-n$ делится на 3^k. Решить задачу: а) при $k=1$, 2, 3; б) при любом k (m, n, k — натуральные числа).

3. На доске после занятия кружка осталась запись: «Вычислить $t(0)-t\left(\frac{\pi}{5}\right)+t\left(\frac{2\pi}{5}\right)-t\left(\frac{3\pi}{5}\right)+\ldots+t\left(\frac{8\pi}{5}\right)-t\left(\frac{9\pi}{5}\right)$, где $t(x)=\cos 5x+\ldots\cos 4x+\ldots\cos 3x+\ldots\cos 2x+\ldots\cos x+ +\ldots$». Увидев её, студент мехмата сказал товарищу, что он может вычислить эту сумму, даже не зная значений стёртых с доски коэффициентов. Не ошибается ли он?

4. В пространстве выбрано 8 точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости, и проведено 17 отрезков, у каждого из которых оба конца лежат в упомянутых точках. Доказать, что а) отрезки образуют хотя бы один треугольник; б) треугольников на самом деле не меньше 4.

5. За круглым столом сидят 13 богатырей из s городов ($1<s<13$) и каждый держит золотой или серебряный кубок, причём золотых кубков тоже s штук. Князь повелел каждому богатырю передать свой кубок соседу справа и повторять это до тех пор, пока какие-нибудь два богатыря из одного города не получат оба золотые кубки. Доказать, что желание князя всегда будет исполнено (все богатыри неподвижно сидят лицом к столу и передают кубки так, что каждый получает кубок от левого соседа и передаёт свой кубок правому соседу одновременно).

1984 год (XLVII олимпиада)

7 класс

1. Назовём автобусный билет[1] *счастливым*, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

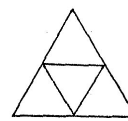
---

[1] Автобусные билеты 1980-х годов в Москве имели шестизначные номера. Обычно счастливым билетом назывался тот, у которого сумма первых трёх цифр равнялась сумме последних трёх.

XLVII МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

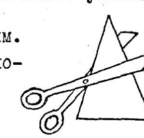
7 класс 18 марта 1984

1. Назовем автобусный билет счастливым, если сумма цифр его номера делится на 7. Могут ли два билета подряд быть счастливыми?

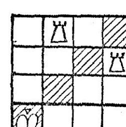


2. Дорожки в зоопарке имеют вид равностороннего треугольника, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Ее ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое могут бегать только по дорожкам, скорость обезьянки и скорости сторожей равны, и они видят друг друга?

3. Покупатель взял у продавца товара на 10 рублей и дал 25 рублей. У продавца не нашлось сдачи, и он разменял деньги у соседа. Когда они расплатились и покупатель ушел, сосед обнаружил, что 25 рублей фальшивые. Продавец вернул соседу 25 рублей и задумался. Сколько же всего он понес убытков?



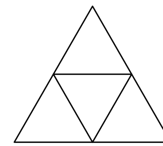
4. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Доказать, что площадь параллелограмма не превосходит половины площади треугольника.



5. На доске 20x20 стоят 10 ладей и один король. Король не стоит под шахом и идет из левого нижнего угла в правый верхний по диагонали. Ходят по очереди: сначала король, потом одна из ладей. Доказать, что при любом начальном расположении ладей и любом способе маневрирования ими, король встретит на своем пути хотя бы одну из неприятностей: попадет под шах или наткнется на ладью.

Не забывайте обосновывать ответы!

Условия задач для 7 класса
47-й Московской математической олимпиады



2. Дорожки в зоопарке имеют вид равностороннего треугольника, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьянка. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьянку, если все трое могут бегать только по дорожкам, скорость обезьянки и скорости сторожей равны и они видят друг друга?

3. Покупатель взял у продавца товара на 10 рублей и дал 25 рублей [1]. У продавца не нашлось сдачи, и он разменял деньги у соседа. Когда они расплатились и покупатель ушёл, сосед обнаружил, что 25 рублей фальшивые. Продавец вернул соседу 25 рублей и задумался. Сколько же всего он понёс убытков?

4. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Доказать, что площадь параллелограмма не превосходит половины площади треугольника.

5. На доске 20×20 стоят 10 ладей и один король. Король не стоит под боем и идёт из левого нижнего угла в правый верхний по диагонали [2]. Ходят по очереди: сначала король, потом одна из ладей. Доказать, что при любом начальном расположении ладей и любом способе маневрирования ими король встретит на своём пути хотя бы одну из неприятностей: попадёт под шах или наткнётся на ладью.

8 класс

1. Решите уравнение $\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0.$

2. Каждые две из шести ЭВМ [3] соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета.

---

[1] В 1980-е годы в СССР была денежная купюра достоинством 25 р.

[2] Предполагается, что король всё время движется в одном направлении и не может отступать.

[3] ЭВМ — электронно-вычислительная машина.

3. Докажите, что сумма расстояний от центра правильного семиугольника до всех его вершин меньше, чем сумма расстояний до них от любой другой точки.

4. Сумма пяти неотрицательных чисел равна единице. Докажите, что их можно расставить по кругу так, что сумма всех пяти попарных произведений соседних чисел будет не больше $1/5$.

5. Разрежьте квадрат на 8 остроугольных треугольников.

6. Является ли чётным число всех 64-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?

9 класс

1. Боковые рёбра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину, а боковые грани — одинаковую площадь. Докажите, что основание этой пирамиды — равнобедренный треугольник.

2. Каждые две из 13 ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли раскрасить каждый из этих проводов в один из 12 цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило 12 проводов разного цвета?

3. Некоторый треугольник можно вырезать из бумажной полоски единичной ширины, а из любой полоски меньшей ширины его вырезать нельзя. Какую площадь может иметь этот треугольник?

4. По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $1/4$.

5. Существуют ли три ненулевые цифры, с помощью которых можно составить бесконечное число десятичных записей квадратов различных целых чисел?

6. В прямоугольнике размером 3×4 расположены четыре точки. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми не превосходит $25/8$.

10 класс

1. Не используя калькуляторов, таблиц и т. п., докажите неравенство $\sin 1 < \log_3 \sqrt{7}$.

2. Жюри олимпиады решило по её результатам сопоставить каждому участнику натуральное число таким образом, чтобы по этому числу можно было однозначно восстановить баллы, полученные участником за каждую задачу, и чтобы из каждых двух школьников большее число сопоставлялось тому, кто набрал бо́льшую сумму баллов. Помогите жюри решить эту задачу!

3. Решите в целых числах уравнение $19x^3 - 84y^2 = 1984$.

4. В некотором царстве, в некотором государстве было выпущено неограниченное количество монет достоинством в $n_1, n_2, n_3, \ldots$ копеек, где $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — бесконечная последовательность, состоящая из натуральных чисел. Докажите, что эту последовательность можно оборвать, т. е. найдётся такое число N, что любую сумму, которую можно уплатить без сдачи выпущенными монетами, на самом деле можно уплатить только монетами достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_N$ копеек.

5. Квадрат разрезан на остроугольные треугольники. Доказать, что их не меньше восьми.

6. Треугольное сечение куба касается вписанного в куб шара. Докажите, что площадь этого сечения меньше половины площади грани куба.

1985 год (XLVIII олимпиада)

7 класс

1. Найти все значения x и y, удовлетворяющие равенству $xy + 1 = x + y$.

2. Даны пять различных положительных чисел, которые можно разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать?

3. Длины a, b, c, d четырёх отрезков удовлетворяют неравенствам $0 < a \leqslant b \leqslant c < d$, $d < a + b + c$. Можно ли из этих отрезков сложить трапецию?

4. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырёх углов по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью, в 1,4 раза большей, чем максимальная скорость зайца?

5. В магазин привезли цистерну молока. У продавца имеются чашечные весы без гирь (на чашки весов можно ставить фляги), а также три одинаковые фляги, две из которых пустые, а в третьей налит 1 л молока. Как отлить в одну флягу ровно 85 л молока, сделав не более восьми взвешиваний?

8 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству $(x - y + z)^2 = x^2 - y^2 + z^2$.

2. Числа a_1, a_2, ..., a_{1985} представляют собой переставленные в некотором порядке числа 1, 2, ..., 1985. Каждое число a_k умножается на его номер k, а затем среди всех полученных 1985 произведений выбирается наибольшее. Доказать, что оно не меньше 993^2.

3. На лист бумаги «в клетку» положен бумажный квадрат, площадь которого равна учетверённой площади клетки. Какое наименьшее число узлов может накрывать этот квадрат? (Узел — это точка пересечения линий бумаги; если узел лежит на границе квадрата, то он считается накрытым.)

4. За дядькой Черномором выстроились чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке возрастания).

5. Доказать, что если длина каждой из трёх биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $1/\sqrt{3}$.

9 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{x-y+z} = \sqrt{x} - \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

2. В некоторой стране 1985 аэродромов. С каждого из них вылетел самолёт и приземлился на самом удалённом от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 1985 самолётов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты — прямыми.)

3. На лист бумаги «в клетку» положен бумажный квадрат, площадь которого равна учетверённой площади клетки. Оказалось, что какие-то 7 узлов накрыты этим квадратом. Сколько всего узлов им накрыто? (Узел — это точка пересечения линий бумаги; если узел лежит на границе квадрата, то он считается накрытым.)

4. Доказать, что в любой группе из 12 человек можно выбрать двоих, а среди оставшихся 10 человек ещё пятерых так, чтобы каждый из этих пятерых удовлетворял следующему условию: либо он дружит с обоими выбранными вначале, либо не дружит ни с одним из них.

5. Доказать, что любое число 2^n, где $n = 3, 4, \ldots$, можно представить в виде $2^n = 7x^2 + y^2$, где x и y нечётные числа.

10 класс

1. Решить уравнение $\dfrac{x-49}{50} + \dfrac{x-50}{49} = \dfrac{49}{x-50} + \dfrac{50}{x-49}$.

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. Назовём «сложностью» данного числа наименьшую длину числовой последовательности (если такая найдётся), которая начинается с нуля и заканчивается этим числом, причём каждый следующий член последовательности либо равен половине предыдущего, либо в сумме с предыдущим составляет 1. Среди всех чисел вида $m/2^{50}$, где $m = 1, 3, 5, \ldots, 2^{50} - 1$, найти число с наибольшей «сложностью».

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причём объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. Доказать, что если расстояния между скрещивающимися рёбрами тетраэдра равны соответственно h_1, h_2, h_3, то объём тетраэдра не меньше, чем $h_1h_2h_3/3$.

1986 год (XLIX олимпиада)

7 класс

1. На листе прозрачной бумаги нарисован четырёхугольник. Указать способ, как сложить этот лист (возможно, в несколько раз), чтобы определить, является ли исходный четырёхугольник ромбом.

2. Доказать, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства:

$$|x| < |y-z|, \quad |y| < |z-x|, \quad |z| < |x-y|.$$

3. Три гнома живут в разных домах и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времён, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

4. Произведение некоторых 1986 натуральных чисел имеет ровно 1985 различных простых делителей. Доказать, что либо одно из этих чисел, либо произведение нескольких из них является квадратом натурального числа.

5. Известно, что в кодовом замке исправны только кнопки с номерами 1, 2, 3, а код этого замка трёхзначен и не содержит других цифр. Написать последовательность цифр наименьшей длины, наверняка открывающую этот замок (замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода).

8 класс

1. На листе прозрачной бумаги нарисован четырёхугольник. Указать способ, как сложить этот лист (возможно, в несколько раз), чтобы, не используя никакие инструменты, можно было определить, является ли исходный четырёхугольник квадратом.

2. Найти все натуральные числа, не представимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

3. Доказать, что если $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}}$ при $n = 2, 3, \ldots, 10$, то $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 10^{-370}$.

4. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки называются соседними, если они имеют общую сторону). Доказать, что полностью всё поле бурьяном никогда не зарастёт.

5. Доказать, что система неравенств

$$\begin{cases} |x| > |y - z + t|, \\ |y| > |x - z + t|, \\ |z| > |x - y + t|, \\ |t| > |x - y + z| \end{cases}$$

не имеет решений.

9 класс

1. На листе бумаги отмечены точки A, B, C, D. Распознающее устройство может абсолютно точно выполнять два типа операций: а) измерять в сантиметрах расстояние между двумя заданными точками; б) сравнивать два заданных числа. Какое наименьшее число операций нужно выполнить этому устройству, чтобы можно было наверняка определить, является ли четырёхугольник $ABCD$ прямоугольником?

2. Из точки M по плоскости с постоянной скоростью ползёт муравей. Его путь представляет собой спираль, которая наматывается на точку O и гомотетична некоторой своей части относительно этой точки. Сможет ли муравей пройти весь свой путь за конечное время?

3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} |x| < |y - z + t|, \\ |y| < |x - z + t|, \\ |z| < |x - y + t|, \\ |t| < |x - y + z|. \end{cases}$$

4. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 10 простых делителей. Доказать, что произведение некоторых четырёх из этих чисел является квадратом натурального числа.

5. На координатной плоскости нарисованы круги радиуса $1/14$ с центрами в каждой точке, у которой обе координаты — целые числа. Доказать, что любая окружность радиуса 100 пересечёт хотя бы один из нарисованных кругов.

10 класс

1. На листе бумаги отмечены точки A, B, C, D. Распознающее устройство может абсолютно точно выполнять два типа операций: а) измерять в сантиметрах расстояние между двумя заданными точками; б) сравнивать два заданных числа. Какое наименьшее число операций нужно выполнить этому устройству, чтобы наверняка определить, является ли четырёхугольник $ABCD$ квадратом?

2. Биссектриса угла A треугольника ABC продолжена до пересечения в точке D с описанной вокруг него окружностью. Доказать неравенство $AD > \frac{AB + AC}{2}$.

3. Решить уравнение $x^{x^4} = 4$ $(x > 0)$.

4. Докажите, что ни для каких векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не могут одновременно выполняться три неравенства

$$\sqrt{3}\,|\vec{a}| < |\vec{b}-\vec{c}|, \quad \sqrt{3}\,|\vec{b}| < |\vec{c}-\vec{a}|, \quad \sqrt{3}\,|\vec{c}| < |\vec{a}-\vec{b}|.$$

5. Какое наименьшее значение в зависимости от параметров α и β принимает максимум функции

$$y(x) = |\cos x + \alpha \cos 2x + \beta \cos 3x|, \quad x \in \mathbb{R}?$$

1987 год (*L олимпиада*)

7 класс

1. В марте 1987 года учитель решил провести 11 занятий математического кружка. Доказать, что если по субботам и воскресеньям кружок не проводить, то в марте найдутся три дня подряд, в течение которых не будет ни одного занятия кружка.

2. Доказать, что из любых 27 различных натуральных чисел, меньших 100, можно выбрать два числа, не являющиеся взаимно простыми.

3. По поляне, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной 100 м, бегает волк. Охотник убивает волка, если стреляет в него с расстояния не более 30 м. Доказать, что охотник может убить волка, как бы быстро тот ни бегал.

4. Пусть AB — основание трапеции $ABCD$. Доказать, что если $AC + BC = AD + BD$, то трапеция $ABCD$ — равнобокая.

5. Али-Баба и 40 разбойников решили разделить клад из 1987 золотых монет следующим образом: первый разбойник делит весь клад на две части, затем второй разбойник делит одну из частей на две части и т. д. После 40-го деления первый разбойник выбирает наибольшую из частей, затем второй разбойник выбирает наибольшую из оставшихся частей, и т. д. Последняя, 41-я часть достаётся Али-Бабе. Для каждого из 40 разбойников определить, какое наибольшее количество монет он может себе обеспечить при таком дележе независимо от действий других разбойников.

8 класс

1. Доказать, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то справедливо неравенство
$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}.$$

2. Школьник хочет из квадрата размером $2n \times 2n$ вырезать наибольшее количество прямоугольников размером $1 \times (n+1)$. Каково это количество, если: а) $n < 3$; б) $n > 3$; в) $n = 3$?

3. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

4. В пятиугольнике $ABCDE$ углы при вершинах B и D — прямые, $\angle BCA = \angle DCE$, а точка M — середина стороны AE. Доказать, что $MB = MD$.

5. Можно ли выбрать некоторые натуральные числа так, чтобы при любом натуральном значении n хотя бы одно из чисел n, $n+50$ было выбрано и хотя бы одно из чисел n, $n+1987$ не было выбрано?

9 класс

1. Даны 7 различных цифр. Доказать, что для любого натурального числа n найдётся пара данных цифр, сумма которых оканчивается той же цифрой, что и число n.

2. По k вершинам правильного пятиугольника с помощью двусторонней линейки восстановить остальные вершины в случае а) $k = 4$; б) $k = 3$. (Двусторонней линейкой можно делать то же, что и обычной линейкой без делений, а также проводить прямую, параллельную данной, на расстоянии, равном ширине линейки.)

3. Найти такие 50 натуральных чисел, что ни одно из них не делится на другое, а произведение любых двух из них делится на любое из оставшихся чисел.

4. Доказать, что для любых чисел $a_1, \ldots, a_{1987}$ и положительных чисел $b_1, \ldots, b_{1987}$ справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \ldots + a_{1987})^2}{b_1 + \ldots + b_{1987}} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

5. Таня уронила мячик в огромный прямоугольный бассейн. Она хочет его достать с помощью 30 узких досок длиной 1 м каждая, построив из них мостики так, чтобы каждая доска опиралась на края бассейна или на уже положенные доски и чтобы в итоге одна из досок прошла над мячиком. Доказать, что Тане не удастся это сделать, если расстояния от краёв бассейна до мячика превышают 2 м.

10 класс

1. а) Доказать, что из трёх положительных чисел всегда можно выбрать такие два числа x и y, что $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} \leqslant 1$.

б) Верно ли, что указанные два числа можно выбрать из любых четырёх чисел?

2. Углы, образованные сторонами правильного треугольника с некоторой плоскостью, равны α, β и γ. Доказать, что одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

3. На клетчатой бумаге закрашены 17 единичных клеток. Доказать, что их можно покрыть прямоугольниками, сумма периметров которых не превосходит 100, причём расстояние между любыми точками разных прямоугольников не меньше $\sqrt{2}$.

4. Можно ли разбить множество целых чисел на три подмножества так, чтобы для любого целого значения n чи́сла n, $n-50$, $n+1987$ принадлежали трём разным подмножествам?

5. В некотором царстве, территория которого имеет форму квадрата со стороной 2 км, царь решает созвать всех жителей к 7 ч вечера к себе во дворец на бал. Для этого он в полдень посылает с поручением гонца, который может передать любое указание любому другому жителю, который в свою очередь может передать любое указание любому другому жителю, и т. д. Каждый житель до поступления указания находится в известном месте (у себя дома) и может передвигаться со скоростью 3 км/ч в любом направлении (по прямой). Доказать, что царь может организовать оповещение так, чтобы все жители успели прийти к началу бала.

1988 год (LI олимпиада)

7 класс

1. Доказать, что при простых $p \geqslant 7$ число $p^4 - 1$ делится нацело на 240.

2. На серединах рёбер AB и $B'C'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и P. Изобразить на грани $BCC'B'$ все точки, кратчайшие расстояния от которых по поверхности куба до точек M и P равны.

3. С помощью кронциркуля и линейки провести через данную точку прямую, параллельную данной. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. Двадцать телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона выходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

8 класс

1. Над строкой из четырёх чисел 1, 9, 8, 8 проделаем следующую операцию: между каждыми двумя соседними числами впишем число, которое получится в результате вычитания левого числа из правого. Над новой строкой проделаем ту же операцию и т. д. Найти сумму чисел строки, которая получится после ста таких операций.

2. Имеется линейка без делений и специальный инструмент, позволяющий замерять расстояние между двумя произвольными точками и откладывать это расстояние на любой уже проведённой прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша разделить пополам данный отрезок?

3. Доказать, что ни одна четвёрка натуральных чисел x, y, z, t не удовлетворяет равенству $3x^4+5y^4+7z^4=11t^4$.

4. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Весы с одной чашкой показывают общий вес положенных на эту чашку монет. Найти наименьшее количество взвешиваний, которое нужно сделать, чтобы наверняка определить, какие монеты являются фальшивыми, а какие — настоящими.

9 класс

1. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Доказать, что произведение этих чисел не может оканчиваться на 1988.

2. Докажите, что при простых $p_1, p_2, \ldots, p_{24}$, $p_i \geqslant 5$, $i=1$, 2, …, 24, число $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{24}^2$ делится нацело на 24.

3. На плоскости даны две перпендикулярные прямые. С помощью кронциркуля указать на плоскости три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. Пусть x и y натуральные числа. Рассмотрим функцию $f(x, y) = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + y$. Докажите, что множеством значений $f(x, y)$ являются все натуральные числа, причём для любого натурального $n = f(x, y)$ числа x и y определяются однозначно.

5. Двадцать телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более трёх проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона выходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

10 класс

1. Калькулятор имеет пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Найти формулу, по которой на этом калькуляторе можно определить наибольшее из двух произвольных чисел a и b.

2. Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y = 2^x$?

3. Всякий ли параллелепипед можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился прямоугольник?

4. Имеется линейка без делений и эталон длины, позволяющий откладывать некоторое фиксированное расстояние на любой уже проведённой прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша провести какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой?

5. Возьмём пару натуральных чисел и разделим с остатком большее из них на меньшее (если числа равны, то также одно из них разделим на другое). Из полученных частного и остатка образуем новую пару чисел и проделаем с ней то же самое. Как только одно из чисел окажется равным нулю, прекратим вычисления. Доказать, что если начать с чисел, не превосходящих 1988, то более шести делений выполнить не удастся.

1989 год (*LII олимпиада*)

7 класс

1. Квадрат расчерчен на 16 равных клеток. Каждую из букв A, B, C, D расставить в этих клетках по четыре раза таким образом, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и двух больших диагоналях не было одинаковых букв.

2. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), построить прямую, проходящую через данную точку параллельно заданной прямой.

3. В тёмной комнате на полке в беспорядке лежат 4 пары носков двух разных размеров и двух разных цветов. Какое наименьшее число носков необходимо не выходя из комнаты переложить с полки в чемодан, чтобы в нём гарантированно оказалось две пары различного размера и цвета?

4. Турист выехал из турбазы на байдарке в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость реки 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист сможет отъехать от турбазы, если через каждые 30 минут гребли он тратит ровно 15 минут на отдых, не причаливая при этом к берегу, и может повернуть обратно только после отдыха?

5. Найти все натуральные числа a, удовлетворяющие условиям: произведение цифр числа a равно $44 \cdot a - 86868$, а сумма цифр является кубом натурального числа.

8 класс

1. Решить уравнение $(x^2+x)^2+\sqrt{x^2-1}=0$.

2. Часть клеток бесконечной клетчатой бумаги покрашена в красный цвет, остальные — в белый (не обязательно в шахматном порядке). По красным клеткам прыгает кузнечик, по белым — блоха, причём каждый прыжок делается на любое расстояние по вертикали или горизонтали. Доказать, что кузнечик и блоха могут оказаться в соседних клетках, сделав в общей сложности (в сумме) не более трёх прыжков.

3. Проведя наименьшее количество линий (окружностей и прямых с помощью циркуля и линейки), построить перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку а) вне этой прямой; б) на ней.

4. Подмножество X множества «двузначных» чисел 00, 01, ..., 98, 99 таково, что в любой бесконечной цифровой последовательности найдутся две цифры, стоящие рядом и образующие число из X. Какое наименьшее количество чисел может содержаться в X?

5. Доказать, что пионерский отряд всегда можно разбить на две команды так, чтобы общее число пар друзей, оказавшихся в одной и той же команде, было меньше числа пар друзей, оказавшихся в разных командах [1].

6. Все значения квадратного трёхчлена ax^2+bx+c на отрезке $[0; 1]$ по модулю не превосходят 1. Какое наибольшее значение при этом может иметь величина $|a|+|b|+|c|$?

9 класс

1. В пространстве имеется четыре различных прямых, окрашенных в два цвета: две красных и две синих, причём любая красная прямая перпендикулярна любой синей прямой. Доказать, что либо красные, либо синие прямые параллельны.

---

[1] В то время казалось очевидным, что в каждом пионерском отряде есть друзья.

2. В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и AC взяты соответственно точки M, K и L так, что прямая MK параллельна прямой AC и ML параллельна BC. При этом отрезок BL пересекает отрезок MK в точке P, а AK пересекает ML в точке Q. Доказать, что отрезки PQ и AB параллельны.

3. Известно, что числа $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ образуют геометрические прогрессии. Можно ли, зная лишь значения $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2$, $a_3 + b_3$ и $a_4 + b_4$, определить $a_5 + b_5$?

4. Улицы некоторого города на плане представляются в виде квадрата, расчерченного на 25 равных клеток со стороной 1. В отмеченной на рис. 1 точке находится снегоуборочная машина. Найти длину кратчайшего маршрута объезда всех улиц, чтобы в конце работы машина вернулась в исходную точку.

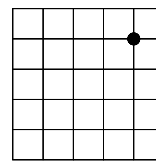


Рис. 1

5. Найти все положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, удовлетворяющие при всех $k = 1, 2, \ldots, 10$ условию

$$(x_1 + \ldots + x_k)(x_k + \ldots + x_{10}) = 1.$$

10 класс

1. Решить уравнение $\lg(x-2) = 2x - x^2 + 3$.

2. Существует ли функция, график которой на координатной плоскости имеет общую точку с любой прямой?

3. Можно ли расставить на листе клетчатой бумаги крестики и нолики так, чтобы ни на одной горизонтали, вертикали и диагонали нельзя было встретить три одинаковых знака подряд?

4. Даны а) 5; б) 1989 различных натуральных чисел. Доказать, что некоторая бесконечная арифметическая прогрессия, первый член которой не больше её разности, содержит ровно 3 или 4 данных числа.

5. Вычислить с точностью до 2 наименьшую суммарную длину разрезов, которые необходимо сделать, чтобы перекроить единичный квадрат в прямоугольник с диагональю, равной 100.

6. На рёбрах произвольного тетраэдра выбрано по точке. Через каждую тройку точек, лежащих на рёбрах с общей вершиной, проведена плоскость. Доказать, что если три из четырёх проведённых плоскостей касаются вписанного в тетраэдр шара, то и четвёртая плоскость также его касается.

1990 год (LIII олимпиада)

8 класс

1. Доказать, что если $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_8 < a_9$, то

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3.$$

2. Какое наименьшее количество различных простых делителей может иметь число $m(n+9)(m+2n^2+3)$, где m, n — натуральные числа?

3. На отборочный тур олимпиады были приглашены победители из 8, 9, 10 и 11 классов, которых оказалось всего 11 человек. Можно ли их рассадить за круглым столом так, чтобы среди любых 5 сидящих подряд школьников нашлись представители всех четырёх классов?

4. В четырёхугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины A, B и точку пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Доказать, что если $AB = AD$, то $CE = CD$.

5. Табло, состоящее из 64 лампочек, управляется 64 кнопками: каждая лампочка — своей кнопкой. За одно включение можно одновременно нажать любой набор кнопок и записать, какие лампочки при этом зажглись. За какое наименьшее количество включений можно узнать обо всех лампочках табло: какая лампочка какой кнопкой управляется?

9 класс

1. В компании из 7 мальчиков каждый имеет среди остальных не менее 3 братьев. Доказать, что все семеро — братья.

2. Доказать, что из 53 различных натуральных чисел, не превосходящих в сумме 1990, всегда можно выбрать 2 числа, составляющих в сумме 53.

3. В данном круге радиуса 1 отмечена точка. Через неё проводятся различные хорды, а через концы каждой хорды проводятся окружности радиуса 2. Доказать, что все проводимые окружности касаются некоторой фиксированной окружности.

4. Имеется 8 монет, из которых ровно 2 фальшивые: одна легче настоящей, а другая тяжелее. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах без гирь установить, что тяжелее: 2 фальшивые монеты или 2 настоящие, или же они весят одинаково?

5. Десятичная запись дроби $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ имеет период длины n. Какая наибольшая длина периода может при этом оказаться у десятичной записи дроби $\left(\frac{p}{q}\right)^2$?

10 класс

1. Можно ли разрезать квадрат на три попарно различных и попарно подобных прямоугольника?

2. Найти все простые числа p, q, r, удовлетворяющие равенству $p^q + q^p = r$.

3. Доказать, что для всех значений параметров a, b и c, таких, что $|a|+|b|+|c| \neq 0$, найдётся число x, удовлетворяющее неравенству $a \cos x + b \cos 3x + c \cos 9x > \frac{|a|+|b|+|c|}{2}$.

4. При каком взаимном расположении четырёх точек в круге произведение всех попарных расстояний между этими точками максимально?

5. Четыре точки A, B, C, D расположены в пространстве так, что отрезок BD виден из точек A и C под углом

α, а отрезок AC из точек B и D — под углом β. Известно, что $AB \neq CD$. Найти отношение $AC : BD$.

11 класс

1. Найти наибольшее значение выражения $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$.

2. Доказать, что если функция $f(x)$, определённая на отрезке $[0; 1]$, непрерывна и удовлетворяет тождеству

$$f(f(x)) \equiv x^2,$$

то при всех $x \in (0; 1)$ справедливы неравенства $x^2 < f(x) < x$. Привести пример такой функции.

3. В треугольнике ABC проведены медиана BM и биссектриса BL. Может ли случиться так, что при этом BM — биссектриса в треугольнике BCL, а BL — медиана в треугольнике ABM?

4. Доказать, что для любого нечётного числа найдётся кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из нечётных цифр.

5. При каком расположении четырёх точек в пространстве они могут служить проекциями какой-либо точки соответственно на четыре плоскости граней некоторого тетраэдра?

1991 год (LIV олимпиада)

8 класс

1. Докажите, что если $a > b > c$, то $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) > 0$.

2. По данным точкам A и B на плоскости требуется построить на луче AB точку C, удовлетворяющую условию $AC = 2AB$. Можно ли это сделать, пользуясь одним лишь циркулем неизменного раствора r, если а) $AB < 2r$, б) $AB \geqslant 2r$?

3. Для круглосуточной охраны объекта нужно установить дежурство на посту в две смены: дневную и ночную. Дежурный может отработать дневную или ночную смену, или же сутки подряд. В первом случае сразу после дежурства ему предоставляется отдых не менее одних суток, во втором — не менее полутора суток, в третьем — не менее 2,5 суток. Какое наименьшее количество дежурных необходимо при этих условиях?

4. Имеется шесть одинаковых с виду гирек массами 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г. На гирьках сделали надписи «1 г», «2 г», «3 г», «4 г», «5 г» и «6 г». Как двумя взвешиваниями на чашечных весах без других гирек выяснить, все ли надписи правильные?

5. Между двумя странами установлено авиационное сообщение так, что любые два города из разных стран соединены ровно одним авиарейсом и только в одну сторону, причём из каждого города можно вылететь в какой-то из городов другой страны. Докажите, что найдутся четыре города A, B, C, D, которые можно посетить, перелетая непосредственно из A в B, из B в C, из C в D, из D в A.

9 класс

1. Решите уравнение

$$(1+x+x^2)(1+x+\ldots+x^{10}) = (1+x+\ldots+x^6)^2.$$

2. Колоду из а) 36; б) 54 карт фокусник разложил на несколько кучек и на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем он специальным образом перемешал карты, опять разложил их на кучки и написал на каждой карте справа от первого числа — второе, равное количеству карт в новой кучке. Мог ли фокусник добиться того, чтобы среди пар чисел, записанных на картах, не было одинаковых пар, но для каждой пары (m, n) можно было найти пару (n, m)?

3. Докажите, что в правильном двенадцатиугольнике $A_1A_2\ldots A_{12}$ диагонали A_1A_5, A_2A_6, A_3A_8 и A_4A_{11} пересекаются в одной точке.

4. Дан график функции $y=1/x$ при $x>0$, а оси координат стёрты. Как с помощью циркуля и линейки восстановить стёртые оси, если даже их направления заранее не известны?

5. В клетках таблицы 15×15 расставлены ненулевые числа так, что каждое из них равно произведению всех чисел, стоящих в соседних клетках (соседними называем клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что все числа в таблице положительны.

10 класс

1. Функция $f(x)$ при каждом значении x удовлетворяет равенству

$$f(x) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot f(1 - x) = 1.$$

а) Найдите $f(0)$ и $f(1)$.

б) Найдите все такие функции $f(x)$.

2. Какое количество n из 16 одинаковых бильярдных шаров можно расположить в пространстве так, чтобы каждый шар касался ровно трёх других? Перечислите все возможные значения n.

3. В данный угол вписаны два непересекающихся круга. Треугольник ABC расположен между кругами так, что его вершины лежат на сторонах угла, а равные стороны AB и AC касаются соответствующих кругов. Докажите, что сумма радиусов кругов равна высоте треугольника, опущенной из вершины A.

4. Куб размером $10 \times 10 \times 10$ сложен из 500 чёрных и 500 белых кубиков в шахматном порядке (кубики, примыкающие друг к другу гранями, имеют различные цвета). Из этого куба вынули 100 кубиков так, чтобы в каждом из 300 рядов размером $1 \times 1 \times 10$, параллельных какому-нибудь ребру куба, не хватало ровно одного кубика. Докажите, что число вынутых чёрных кубиков делится на 4.

5. Колоду из 54 карт фокусник разложил на несколько кучек, а зритель на всех картах каждой кучки написал число, равное количеству карт в этой кучке. Затем фокусник специальным образом перемешал карты и ещё раз разложил их на кучки, а зритель написал на каждой карте ещё одно число, равное количеству карт в новой кучке, и т. д. При каком наименьшем количестве раскладок фокусник мог добиться того, чтобы на разных картах оказались разные множества чисел (как бы ни расположил их зритель на карте)?

11 класс

1. Между какими цифрами в записи $1\underbrace{99\ldots9}_{1991\text{ девятка}}1$ нужно поставить знак:

а) «$+$», чтобы полученная сумма была наименьшей;

б) «$\times$», чтобы полученное произведение было наибольшим?

2. На рис. 2 дана ортогональная проекция земного шара с экватором (A и B — общие точки проекции экватора с окружностью). Как с помощью циркуля и линейки найти проекцию северного полюса?

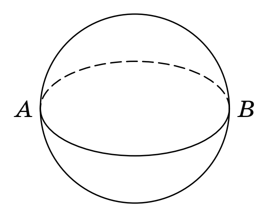


Рис. 2

3. Докажите, что в правильном 54-угольнике найдутся четыре диагонали, не проходящие через его центр и пересекающиеся в одной точке.

4. Совет из 2000 депутатов решил утвердить государственный бюджет, содержащий 200 статей расходов. Каждый депутат подготовил свой проект бюджета, в котором указал по каждой статье максимально допустимую, по его мнению, величину расходов, проследив за тем, чтобы общая сумма расходов не превысила заданную величину S. По каждой статье совет утверждает наибольшую величину расходов, которую согласны выделить не менее k депутатов. При каком наименьшем k можно гарантировать, что общая сумма утверждённых расходов не превысит S?

5. На прямоугольном экране размером $m \times n$, разбитом на единичные клетки, светятся более $(m-1)(n-1)$ клеток.

Каждую секунду на экране гаснут те и только те светящиеся клетки, для которых существует такой содержащий их квадрат 2×2, что в нём не светятся остальные три клетки. Докажите, что на экране всегда будет светиться хотя бы одна клетка.

1992 год (LV олимпиада)

8 класс

1. Докажите, что если $a+b+c+d>0$, $a>c$, $b>d$, то $|a+b|>|c+d|$.

2. Может ли во время шахматной партии на каждой из 30 диагоналей оказаться нечётное число фигур?

3. Каждый участник двухдневной олимпиады в первый день решил столько же задач, сколько все остальные в сумме во второй день. Докажите, что все участники решили поровну задач.

4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на три, и на четыре, и на пять кучек равной массы?

5. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла не превосходит по длине половины проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную биссектрисе.

6. Можно ли 4 раза рассадить 9 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза?

9 класс

1. Каждый участник шахматных соревнований выиграл белыми столько же партий, сколько все остальные вместе взятые — чёрными. Докажите, что все участники выиграли поровну партий.

2. Каких нечётных натуральных чисел $n<10\,000$ больше: тех, для которых число, образованное четырьмя последними цифрами числа n^9, больше n, или тех, для которых оно меньше n?

3. В центре квадратного пирога находится изюминка. От пирога можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом) и т. д. Можно ли отрезать изюминку?

4. В квадратной таблице 9×9 отмечены 9 клеток, лежащие на пересечении второй, пятой и восьмой строк со вторым, пятым и восьмым столбцами. Сколькими путями можно из левой нижней клетки попасть в правую верхнюю, двигаясь только по неотмеченным клеткам вверх или вправо?

5. Диагональ AC трапеции $ABCD$ равна боковой стороне CD. Прямая, симметричная BD относительно AD, пересекает прямую AC в точке E. Докажите, что прямая AB делит отрезок DE пополам.

6. Можно ли n раз рассадить $2n+1$ человека за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более одного раза, если: а) $n=5$, б) $n=10$?

10 класс

1. Докажите, что если сумма косинусов углов четырёхугольника равна нулю, то он — параллелограмм, трапеция или вписанный четырёхугольник.

2. От пирога, имеющего форму выпуклого пятиугольника, можно отрезать треугольный кусок по линии, пересекающей в точках, отличных от вершин, две соседние стороны; от оставшейся части пирога — следующий кусок (таким же образом), и т. д. В какие точки пирога можно воткнуть свечку, чтобы её нельзя было отрезать?

3. В левом нижнем углу прямоугольной доски из $m \times n$ клеток стоит белая фишка, а в правом верхнем — чёрная. Двое по очереди двигают фишки (каждый свою) по горизонтали или вертикали на 1 клетку, причём белая может двигаться только вправо или вверх. Выигрывает тот, кто ставит фишку на клетку, занятую фишкой противника. Начинают белые. Кто может обеспечить себе выигрыш?

4. Каково наименьшее число гирь в наборе, который можно разложить и на четыре, и на пять, и на шесть кучек равной массы?

5. Докажите, что в выпуклый центральносимметричный многоугольник можно поместить ромб вдвое меньшей площади.

6. Каждая грань выпуклого многогранника — многоугольник с чётным числом сторон. Обязательно ли его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани было поровну рёбер разных цветов?

11 класс

1. Требуется заполнить числами квадратную таблицу $n \times n$ из клеток так, чтобы сумма чисел на любой из $4n-2$ диагоналей равнялась 1. Можно ли это сделать при: а) $n = 55$; б) $n = 1992$?

2. Найдите углы выпуклого четырёхугольника $ABCD$, в котором $\angle BAC = 30°$, $\angle ACD = 40°$, $\angle ADB = 50°$, $\angle CBD = 60°$ и $\angle ABC + \angle ADC > 180°$.

3. Аладдин побывал во всех точках экватора, двигаясь то на восток, то на запад, а иногда мгновенно перемещаясь в диаметрально противоположную точку Земли. Докажите, что был отрезок времени, за которое разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад, не меньше половины длины экватора.

4. Внутри тетраэдра расположен треугольник, проекции которого на 4 грани тетраэдра имеют площади P_1, P_2, P_3, P_4. Докажите, что:

а) в правильном тетраэдре $P_1 \leqslant P_2 + P_3 + P_4$;

б) если S_1, S_2, S_3, S_4 — площади соответствующих граней тетраэдра, то $P_1S_1 \leqslant P_2S_2 + P_3S_3 + P_4S_4$.

5. Всегда ли рёбра выпуклого многогранника можно раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой грани количества рёбер разных цветов отличались не более чем на 1?

6. Прибор для сравнения чисел $\log_a b$ и $\log_c d$ ($a, b, c, d > 1$) работает по правилам:

– если $b > a$ и $d > c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_a \frac{b}{a}$ и $\log_c \frac{d}{c}$;

– если $b < a$ и $d < c$, то он переходит к сравнению чисел $\log_d c$ и $\log_b a$;

– если $(b-a)(d-c) \leqslant 0$, то он выдаёт ответ.

а) Покажите, как прибор сравнит числа

$$\log_{25} 75 \quad \text{и} \quad \log_{65} 260.$$

б) Докажите, что любые два неравных логарифма он сравнит за конечное число шагов.

Ответы

1981 год (XLIV олимпиада)

7 *класс.* **1.** 7. **4.** Обязательно.

9 *класс.* **4.** Можно.

10 *класс.* **5.** $\frac{32}{\sqrt{15}}$, $\frac{24}{\sqrt{15}}$, $\frac{16}{\sqrt{15}}$. **6.** $\frac{n(n-2)}{4}$, если n чётно; $\frac{(n-1)^2}{4}$, если n нечётно.

1982 год (XLV олимпиада)

7 *класс.* **3.** 42 копейки; число 1982 набрать невозможно. **4.** 8 точек.

8 *класс.* **1.** $1+\sqrt[4]{5}$. **3.** Не может.

9 *класс.* **1.** $n=6k+1$ или $6k+2$, где k — целое неотрицательное число. **5.** $2+4\sin 15^\circ = 2+\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

10 *класс.* **1.** б) Нет. **4.** 1 и 4.

1983 год (XLVI олимпиада)

7 *класс.* **1.** (4, 1), (4, −3), (−4, 1), (−4, −3). **3.** 410256. **4.** $\frac{A(v_1v_2-u_1u_2)}{v_1v_2(u_1+u_2)-u_1u_2(v_1+v_2)}$. **5.** Не существует.

8 *класс.* **3.** Может. **4.** Существует.

9 *класс.* **2.** $\frac{40}{7}\sqrt{3}$.

10 *класс.* **3.** Не ошибается.

1984 год (XLVII олимпиада)

7 *класс.* **1.** Да, могут. **2.** Да, смогут. **3.** 25 р.

8 *класс.* **1.** $x=\sqrt{2}$. **6.** Нет, не является.

9 *класс.* **2.** Нельзя. **3.** Площадь может быть равна любому числу не меньше $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **5.** Да, существуют.

10 *класс.* **3.** Уравнение не имеет решений в целых числах.

1985 год (XLVIII олимпиада)

7 *класс*. **1.** $x=1$, y — любое число или $y=1$, x — любое число. **2.** Одним способом. **3.** Можно. **4.** Может.

8 *класс*. **1.** Все тройки чисел x, y, z, где $x=y$ или $y=z$. **3.** 2.

9 *класс*. **1.** Все тройки неотрицательных чисел x, y, z, где $x=y$ или $y=z$. **2.** Может. **3.** 9.

10 *класс*. **1.** 0; 99; $\dfrac{50^2+49^2}{50+49}=\dfrac{4901}{99}$. **3.** $m=\dfrac{2^{51}+1}{3}$.
4. $1+44\cdot 1985=87341$.

1986 год (XLIX олимпиада)

7 *класс*. **3.** Дом первого гнома.

5. Например, 1133322211212232331231321311 (есть и другие варианты).

8 *класс*. **2.** 1, 4, $4k-2$, $k\in\mathbb{N}$.

9 *класс*. **1.** 9. **2.** Сможет. **3.** Решений нет.

10 *класс*. **1.** 10. **3.** $\sqrt{2}$. **5.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1987 год (L олимпиада)

7 *класс*. **5.** Первый — 50, второй — 26, остальные — 1.

8 *класс*. **2.** а) 2 при $n=1$; 5 при $n=2$; б) $4(n-1)$; в) 8. **5.** Нет.

9 *класс*. **3.** Например, $2^{50+i}3^{100-i}$, где $i=1, \ldots, 50$.

10 *класс*. **1.** б) Да. **4.** Нельзя.

1988 год (LI олимпиада)

7 *класс*. **2.** Ломаная KOC, где K — середина ребра BB', O — такая точка на диагонали BC', что $BO:OC'=1:3$ (см. рис. 3). **4.** 3.

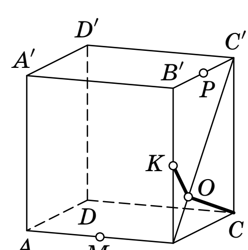


Рис. 3

8 *класс*. **1.** 726. **4.** 3.

9 *класс*. **5.** 4.

10 *класс*. **1.** $\frac{(a+b)+\sqrt{(a-b)\cdot(a-b)}}{2}$. **2.** Не существует. **3.** Да, всякий.

1989 год (LII олимпиада)

7 *класс*. **1.** Пример указанной расстановки изображён на рис. 4 (возможны и другие варианты). **3.** 7. **4.** 1,7 км. **5.** 1989.

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

Рис. 4

8 *класс*. **1.** -1. **4.** 55. **6.** 17.

9 *класс*. **3.** Да, можно. **4.** 68. **5.** $x_1=x_{10}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$, $x_2=x_9=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, $x_3=x_8=\frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}$, $x_4=x_7=\frac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{6}$, $x_5=x_6=\frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}$.

10 *класс*. **1.** 3. **2.** Да, существует. **3.** Да, можно. **5.** Например, $\sqrt{10002}$.

1990 год (LIII олимпиада)

8 *класс*. **2.** 2. **3.** Нельзя. **5.** 6.

9 *класс*. **4.** Да, можно. **5.** $n(10^n-1)$.

10 *класс*. **1.** Да, можно. **2.** $(2; 3; 17)$, $(3; 2; 17)$. **4.** Точки должны быть расположены в вершинах произвольного вписанного в данный круг квадрата. **5.** $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

11 *класс*. **1.** 1. **2.** $f(x)=x^{\sqrt{2}}$. **3.** Нет, не может. **5.** Никакие три точки не лежат на одной прямой, и все четыре точки не лежат на одной окружности.

1991 год (LIV олимпиада)

8 *класс*. **2.** а) Да; б) да. **3.** 4. **4.** Для правильности всех шести надписей достаточно проверить, что $x_1+x_2+x_3=x_6$ и $x_1+x_6<x_3+x_5$, где через x_k обозначена масса гирьки с надписью «k г».

9 *класс*. **1.** -1; 0. **2.** а) Да; б) да. **4.** Проведём прямую через середины двух параллельных хорд, тогда биссектрисы

углов между прямой и хордами параллельны осям координат; проведём ещё одну прямую через середины двух других параллельных хорд, тогда она пересечёт первую прямую в начале координат.

10 *класс.* **1.** а) $f(0)=2$, $f(1)=-2$; б) $f(x)=\dfrac{1}{1/2-x}$ при $x\neq\dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. **2.** 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16. **5.** 3.

11 *класс.* **1.** а) Между 997-й и 998-й; б) между 996-й и 997-й. **2.** Через середину O отрезка AB проведём к нему перпендикуляр, на котором отложим вверх искомую точку C (проекцию северного полюса) так, чтобы отрезок OC был равен половине хорды, параллельной AB и проходящей через точку D пересечения перпендикуляра с проекцией экватора (рис. 5). **4.** 1991.

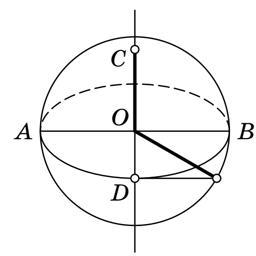


Рис. 5

1992 год (LV олимпиада)

8 *класс.* **2.** Нет. **4.** 9 гирь. **6.** Да.

9 *класс.* **2.** Поровну. **3.** Нет. **4.** 678 путями. **6.** а) Да; б) да.

10 *класс.* **2.** В точки, лежащие внутри или на границе пятиугольника, вершинами которого являются точки пересечения диагоналей исходного пятиугольника. **3.** Если сумма $n+m$ нечётна, то выигрывает начинающий, а если чётна, то его соперник. **4.** 11 гирь. **6.** Нет.

11 *класс.* **1.** а) Да; б) нет. **2.** $\angle A=\angle C=70^\circ$, $\angle B=120^\circ$, $\angle D=100^\circ$. **5.** Нет.

Указания

1981 год (XLIV олимпиада)

7 класс

1. Приравняйте две записи деления числа A с остатком.

2. См. указание к задаче 1 для 9 класса.

3. Наложите листы друг на друга так, чтобы нарисованные драконы полностью совпали, и рассмотрите общую часть этих листов.

4. Докажите, что если n — наибольшее натуральное число, четвёртая степень которого не превосходит x, то

$$\left[\sqrt{\sqrt{x}}\right] = \left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right] = n.$$

5. Сначала проверьте, что различные пары, составленные из данных гирь, имеют различные массы.

8 класс

1. Воспользуйтесь тем фактом, что если из точек A и B отрезок CD виден под одинаковым углом и точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD, то все четыре точки лежат на одной окружности.

5. Пусть наименьшее общее кратное данных чисел равно N. Рассмотрите такие натуральные числа $k_1, \ldots, k_{10}$, что $N = a_1k_1 = \ldots = a_{10}k_{10}$.

9 класс

1. Замените все цифры, отличные от семёрки, на единицы и рассмотрите два случая: а) различные цифры чередуются; б) хотя бы две одинаковые цифры стоят подряд.

2. Докажите неравенство

$$|\ldots|||a_n - a_{n-1}| - a_{n-2}| - a_{n-3}| - \ldots - a_1| \leqslant 1.$$

3. Докажите, что во всякий выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $R > S/P$, а для любого круга, содержащегося в данном многоугольнике, выполняется неравенство $R \leqslant 2S/P$.

4. Постройте такие два множества A и B, что каждое неотрицательное целое число n единственным способом представляется в виде $n = a + b$, $a \in A$, $b \in B$.

5. Найдите наибольшее число попарно непараллельных отрезков с концами в вершинах правильного 1981-угольника.

10 класс

1. Выразите $f(x + 2k)$ через $f(x)$.

2. Рассмотрите вспомогательные многочлены $P_1(x) = P(x) - P(x-1)$, $P_2(x) = P_1(x) - P_1(x-1)$ и т. д.

3. Рассуждайте от противного и примените формулы тригонометрии, используя равенство $2n + 1 = (n+1)^2 - n^2$.

4. Используйте тот факт, что если единичный отрезок покрыт отрезками суммарной длины более 100, то существует хотя бы одна точка единичного отрезка, которую покрывают не менее 101 отрезка.

5. Из формулы, связывающей радиус вписанной окружности r, площадь и стороны треугольника, получите выражение для $1/r$ через высоты треугольника.

6. Можно считать, что сидящие за столом располагаются в вершинах правильного n-угольника. Тогда итоговое расположение всех людей за столом является симметрией относительно некоторой оси этого n-угольника. Рассмотрите путь человека, исходно располагавшегося в любой из наиболее удалённых от оси вершин.

1982 год (XLV олимпиада)

7 класс

1. Для возведения x в квадрат воспользуйтесь равенством $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x^2 + x}$, а для умножения воспользуйтесь формулой $4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$.

2. Проведите через центр квадрата две прямые, параллельные его сторонам.

3. Сначала сравните две последовательности действий «$\times 3, +4, +4, +4$» и «$+4, \times 3$» над одним и тем же исходным числом a и выясните, какая из них не может встретиться при наборе числа 1981 за минимальную цену.

4. Для каждого числа из набора 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 выберем пару точек, расстояние между которыми равно этому числу, и соединим их отрезком. Покажите, что при этом не могло образоваться ни одного многоугольника.

8 класс

1. Обозначьте $\sqrt[4]{5}$ через a и, учитывая равенство $a^4 = 5$, преобразуйте подкоренную дробь, избавляясь от иррациональности в знаменателе.

2. Докажите сначала, что если прямоугольник разрезан на 2, 3 или 4 прямоугольника, то один из получившихся прямоугольников можно накрыть другим. Затем выясните, как может выглядеть разрезание прямоугольника на пять прямоугольных частей в случае, когда из меньшего числа этих частей нельзя сложить прямоугольник.

3. Воспользуйтесь тем, что остатком от деления на 3 квадрата целого числа может быть только 0 или 1.

4. Найдите такие пары подобных треугольников, чтобы для их коэффициентов подобия и отношения диагонали пятиугольника к противоположной стороне удалось записать связующие их уравнения.

5. Упорядочьте числа по возрастанию, а затем воспользуйтесь методом математической индукции и данным в условии равенством.

9 класс

1. Рассмотрите остаток от деления числа n на 6.

2. Рассмотрите сначала случаи расположения точек на одной прямой и в вершинах выпуклого четырёхугольника. При рассмотрении оставшегося случая, когда одна из точек лежит внутри или на стороне треугольника, образованного тремя остальными точками, воспользуйтесь тем, что если один треугольник лежит внутри другого, то периметр внутреннего треугольника не больше периметра внешнего.

3. Рассмотрите квадраты расстояний от двух точек с целочисленными координатами до некоторой точки с координатами (x, y) и составьте разность этих выражений. Подберите такие координаты (x, y), чтобы эта разность равнялась нулю только при совпадении двух исходных точек.

4. Найдите, чему равна разность $10A$ и A.

5. Докажите сначала, что именно смежные стороны равны единице, а угол между ними не превосходит 60°.

10 класс

1. а) Сначала докажите, что из любой точки, лежащей внутри правильного тетраэдра, хотя бы одно его ребро видно под неострым углом, а затем воспользуйтесь теоремой синусов. б) Предположите существование такой точки и придите к противоречию.

Для решения двух пунктов задачи можно воспользоваться векторным методом.

2. а) Пользуясь формулами планиметрии, выразите левую часть неравенства через площадь треугольника, радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности треугольника со сторонами a, b и c. Затем покажите, что неравенство из условия задачи равносильно неравенству $R \geqslant 2r$. б) Разложите на множители левую часть неравенства.

3. а) Сначала разложите $xy + x + y + 1$ на множители и напишите «программу», позволяющую вычислить многочлен $x - 1$. б) Пусть g_1, g_2, ..., g_n — произвольная программа. Индукцией по n докажите, что если многочлен g_n отличен от постоянной, то $g_n(-1) = -1$.

4. Поскольку числа n и $n+1$ взаимно простые, при $n > 1$ получить конечные десятичные дроби можно, только если одно из этих чисел равно степени двойки, а другое — степени пятёрки.

5. Предположите противное и покажите, что тогда найдётся сторона малого шестиугольника, лежащая вне окружности, вписанной в большой шестиугольник, за исключением, быть может, одной общей точки с окружностью.

1983 год (XLVI олимпиада)

7 класс

1. Выделите в правой части уравнения полный квадрат и воспользуйтесь формулой разности квадратов.

2. Рассмотрите на плоскости вершины произвольного правильного треугольника со стороной l.

3. Запишите искомое число: $\overline{4ab\ldots c} = 4 \cdot 10^n + A$, где $A = \overline{ab\ldots c}$ — n-значное число, и составьте уравнение для A.

4. Пусть суммарное расстояние, пройденное первым другом пешком, равно x. Для каждого из друзей покажите, что минимально возможное время, за которое он пройдёт весь путь, есть линейная функция от x. Затем рассмотрите график максимума этих линейных функций.

5. Предположите противное и воспользуйтесь тем, что отрезки соседних сторон от общей вершины до точек касания на этих сторонах равны между собой.

8 класс

1. Умножьте левую часть на $x + y$ и воспользуйтесь тем, что $x^5 + y^5 > 2(x^3 + y^3)$.

2. Воспользуйтесь тем, что $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

3. Рассмотрите квадраты чисел 95, 995, 9995 и т. д.

4. Сначала рассмотрите ось симметрии, проходящую через вершину с числом 1983, и ось симметрии, проходящую через середину стороны, смежной с этой вершиной, и выясните, существует ли расстановка, являющаяся «хорошей» относительно этих двух осей.

5. Запишите удвоенные площади треугольников A_1A_2H и A_3A_4H двумя способами и перемножьте полученные равенства.

9 класс

1. Сведите задачу к рассмотрению случая $x>0$ и чередования знаков, а затем воспользуйтесь формулой для суммы геометрической прогрессии.

2. Воспользуйтесь тем, что проведённая касательная параллельна одной из высот треугольника с вершинами в центрах окружностей, и примените теорему Пифагора.

3. Запишите сумму двумя способами: первый раз — отделив 1983^{1983}, а остальные слагаемые группируя попарно (1^{1983} и 1982^{1983}, и т. д.), а второй раз — отделив среднее слагаемое 992^{1983}, а остальные слагаемые группируя попарно (1^{1983} и 1983^{1983}, и т. д.)

4. Рассуждайте от противного: пусть найдётся некоторый город, из которого можно добраться не во все остальные 19 городов. Рассмотрите множество городов, в которые можно добраться из A (включая сам город A), и множество всех оставшихся городов.

10 класс

1. Покажите, что при симметрии треугольника AA_1C относительно биссектрисы угла ACB вершина A перейдёт в вершину B.

2. Без ограничения общности можно считать, что $m>n$. Достаточно доказать, что $4^{m-n}-1 \,\vdots\, 3^{k+1}$ тогда и только тогда, когда $m-n \,\vdots\, 3^k$. Для этого покажите сначала, что $4^{3^k}-1$ при всех натуральных k делится на 3^{k+1}.

3. Воспользуйтесь периодичностью косинуса и формулой для суммы косинусов кратных дуг:

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\dfrac{n\alpha}{2}\cos\dfrac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\alpha/2}.$$

4. а) Рассмотрите любую точку A, из которой выходит наибольшее число отрезков, и множество, включающее точку A и все точки, не соединённые с A. б) Проведите перебор всех возможных случаев, пользуясь формулой включений и исключений, а также рассуждениями п. а).

5. Воспользуйтесь тем, что суммарное количество раз, которое все богатыри из некоторого города держали золотые кубки за то время, пока кубки обошли полный круг, не может равняться 13.

1984 год (XLVII олимпиада)

7 класс

1. Если два билета подряд счастливые, то разность сумм их цифр делится на 7. Рассмотрите всевозможные варианты записи двух последовательных шестизначных номеров, вычисляя разности сумм их цифр.

2. Опишите алгоритм действий сторожей, всегда приводящий к поимке обезьянки. Считайте, что сначала сторожа прибегают в концы любой из средних линий треугольника.

3. Убытки от получения фальшивой купюры компенсируются последующей уплатой настоящих 25 р.

4. Сведите задачу к случаю, когда параллелограмм имеет общий угол с треугольником.

5. Считая, что король сделает все 19 ходов, побывав за время пути на всех 20 вертикалях и 20 горизонталях, выясните, какое наименьшее число ходов должны сделать ладьи для выполнения условий задачи.

8 класс

1. Преобразуйте уравнение к виду $x^3 = \sqrt{(4 - x^2)^3}$.

2. Расположите все ЭВМ в вершинах правильного шестиугольника и попробуйте так раскрасить его стороны и диагонали в 5 цветов, чтобы из каждой вершины выходило по одному отрезку каждого цвета.

3. Рассматриваемая сумма расстояний не меньше суммы расстояний от данной точки до касательных к описанной вокруг семиугольника окружности, проведённых в его вершинах.

4. Предположив противное, докажите, что сумма всех десяти попарных произведений этих пяти чисел больше

2/5, и покажите, что для чисел из условия задачи это невозможно.

5. Сначала постройте две окружности с центрами в соседних вершинах квадрата, радиус одной из которых равен стороне квадрата, а другой — половине стороны квадрата. Попробуйте найти искомое разрезание на треугольники, одним из которых будет треугольник с вершинами в этих центрах и в точке пересечения построенных окружностей, лежащей внутри квадрата.

6. Сопоставьте каждому 64-значному числу, не содержащему в записи нулей, такое 64-значное число, чтобы в каждом разряде сумма цифр этих двух чисел равнялась 10.

9 класс

1. Докажите, что существуют не более двух различных равнобедренных треугольников с заданной площадью и заданными боковыми сторонами.

2. Докажите, что если такая раскраска существует, то количество всех ЭВМ чётно.

3. Докажите, что наименьшая высота треугольника, удовлетворяющего условию задачи, равна 1. Для того чтобы оценить его площадь, воспользуйтесь тем, что все стороны треугольника численно не превосходят его удвоенной площади, а наименьший из углов не превосходит 60°.

4. Сначала рассмотрите случай четырёх чисел и разложите сумму всех попарных произведений соседних чисел на множители. Общий случай сводится к рассмотренному последовательными заменами двух соседних чисел на их сумму.

5. При каждом натуральном n найдите такое число, являющееся точным квадратом, десятичная запись которого содержит $2n$ цифр, первые n из которых — единицы.

6. Докажите, что две из указанных в условии точек лежат внутри некоторого прямого угла с вершиной в центре прямоугольника, а затем покажите, что расстояние между ними не может быть больше 25/8.

10 класс

1. Найдите рациональное число, которое лежит между сравниваемыми числами.

2. Если десятичная запись каждого из сопоставляемых чисел будет иметь одинаковое количество цифр и начинаться с единицы, после которой достаточное количество разрядов будет отведено для суммы баллов участника, то участнику с большей суммой баллов будет сопоставлено большее число. Остаётся так задать младшие разряды сопоставляемого числа, чтобы можно было однозначно восстановить баллы, полученные за каждую задачу.

3. Сначала преобразуйте уравнение к виду $19(x^3-100)=$ $=84(1+y^2)$.

4. Вычеркните из последовательности n_1, n_2, n_3, ... все числа, которые можно получить, суммируя меньшие члены этой последовательности, и докажите, что после вычёркивания останется конечное число членов последовательности.

5. Рассмотрите вершины треугольников разбиения, лежащие строго внутри квадрата и не лежащие внутри сторон этих треугольников. Таких вершин не менее двух, причём в каждой из них сходится не менее пяти углов.

6. Разбейте треугольное сечение на три треугольника, одной из вершин каждого из которых является точка касания, и постройте на каждой грани куба равные им треугольники, используя равенство отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки.

1985 год (XLVIII олимпиада)

7 класс

1. Перенесите все члены равенства в одну сторону и разложите на множители.

2. Покажите, что любое разбиение приводит к группам или из одного и четырёх чисел, или из двух и трёх чисел, и рассмотрите эти варианты.

3. Сначала докажите, что существует треугольник, длины сторон которого равны b, c и $d-a$.

4. Постройте схему движения зайца, основанную на том, что если в некоторый момент времени заяц находится в вершине прямого угла равнобедренного прямоугольного треугольника, а волк — в одной из двух других вершин, то заяц может добежать по катету до третьей вершины быстрее, чем волк добежит до неё по гипотенузе.

5. Сначала получите за 5 взвешиваний во всех флягах по 5 л. Затем за 3 взвешивания добейтесь того, чтобы в двух флягах стало по 40 л, а в третьей осталось 5 л.

8 класс

1. Перенесите одно слагаемое в другую сторону равенства и разложите на множители.

2. Докажите, что хотя бы одно из 993 чисел $a_{993}, \ldots, a_{1985}$ не меньше чем 993.

3. Расположите квадрат так, чтобы его диагонали были параллельны линиям бумаги, а центр лежал посередине между соседними узлами.

4. Рассмотрите два случая: 1) для каждого богатыря найдётся богатырь меньшего роста; 2) найдётся богатырь (возможно, не один), рост которого не больше, чем рост любого другого богатыря.

5. Из обеих вершин стороны треугольника, лежащей напротив его наименьшего угла, проведите медианы и биссектрисы, а затем воспользуйтесь свойством биссектрисы, связанным с равенством отношений отрезков и сторон.

9 класс

1. Возведите обе части равенства в квадрат и воспользуйтесь задачей 1 для 8 класса.

2. Сначала считайте, что аэродромов всего 50, расположите их в вершинах правильного 50-угольника и выясните, куда приземлятся вылетевшие из этих аэродромов самолёты.

3. Считая единичной длиной расстояние между ближайшими узлами сетки, покажите, что квадрат обязательно накрывает два узла на расстоянии $2\sqrt{2}$. Для этого выясните, как в противном случае могли бы располагаться по отношению к четырём накрытым узлам в вершинах одной клетки ещё три накрытых узла.

4. Предположив противное, докажите совпадение суммы по всем парам количеств человек, которые дружат ровно с одним из данной пары, и суммы по всем людям количеств пар людей, из которых ровно один дружит с данным человеком, а затем оцените эти суммы.

5. Воспользуйтесь методом математической индукции. При проведении индуктивного перехода рассмотрите две пары чисел: $\frac{1}{2}(x-y)$, $\frac{1}{2}(7x+y)$ и $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2}(7x-y)$.

10 класс

1. Введите обозначения для обоих слагаемых левой части уравнения, выразите через них слагаемые правой части и перенесите все слагаемые на одну сторону.

3. Для числа a в каждом из случаев $0<a<1/2$ и $1/2<<a<1$ найдите предпоследнее число последовательности наименьшей длины, которая начинается с нуля и заканчивается числом a.

4. Докажите, что все 1985 множеств имеют ровно один общий элемент. Предположите, что пересечение всех множеств пусто, и придите к противоречию.

5. Постройте параллелепипед, диагоналями граней которого являются рёбра данного тетраэдра.

1986 год (XLIX олимпиада)

7 класс

1. Если перегнуть ромб по любой из его диагоналей, то две не лежащие на ней вершины должны совпасть.

2. Возведите почленно в квадрат каждое из неравенств, перенесите влево все правые части и разложите на множители полученные разности квадратов.

3. Обозначьте через A, B, C дома гномов, которые передвигаются со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Найдите сумму времён, которые понадобятся гномам, чтобы добраться от своих домов до некоторой точки O. Сравните эту сумму с суммой времён, которые понадобятся двум наиболее быстрым гномам, чтобы добраться от своих домов до точки A.

4. Сначала представьте каждое из всевозможных произведений, составленных из данных чисел, в виде произведения наибольшего возможного квадрата натурального числа и набора различных простых чисел (возможно, пустого). Затем докажите, что среди таких наборов найдутся хотя бы два одинаковых.

5. Изобразите следующую схему: все различные пары данных цифр запишите в круги и соедините эти круги стрелками так, чтобы от каждого круга было проведено по одной стрелке к каждому из трёх кругов, в которых первая цифра равна последней цифре в данном круге (одна из стрелок может вести и к этому же кругу). Каждой из стрелок сопоставьте трёхзначный код, первые две цифры которого написаны в начальном круге, а последние две — в конечном. Сведите задачу к тому, чтобы пройти на этой схеме по всем стрелкам ровно по одному разу.

8 класс

1. Сначала определите, является ли данный четырёхугольник ромбом (см. задачу 1 для 7 класса и указание к ней).

2. Докажите, что целое число является разностью квадратов целых чисел тогда и только тогда, когда оно раскладывается на множители, имеющие одинаковую чётность.

3. Докажите оценку

$$0 < a_n - \sqrt{2} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}} < \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}$$

и воспользуйтесь ею последовательно при $n = 10, 9, \ldots, 3$.

4. Проследите, что происходит со временем с суммой длин границ участков поля, поражённых и не поражённых бурьяном.

5. См. указание к задаче 2 для 7 класса.

9 класс

1. Чтобы определить, является ли $ABCD$ прямоугольником, необходимо проверить, будет ли он параллелограммом с равными друг другу диагоналями.

2. Выразите длину всей спирали через длину её участка от точки M до начала её части, гомотетичной всей спирали, и коэффициент этой гомотетии.

3. См. указание к задаче 2 для 7 класса.

4. См. указание к задаче 4 для 7 класса, но рассматривайте не всевозможные произведения, а только произведения любых двух из данных чисел.

5. Рассмотрите круги с центрами в точках, лежащих на прямой $x=n$ для наибольшего целого n, при котором эта прямая пересекает окружность радиуса 100.

10 класс

1. Чтобы определить, является ли $ABCD$ квадратом, необходимо проверить равенство всех его сторон, а также равенство диагоналей.

2. На продолжении прямой AC за точку C выберите такую точку E, что $CE=AB$, и докажите, что треугольники ADB и EDC равны.

3. Докажите, что при $x\in(0;1]$ функция $f(x)=x^{x^4}$ не превосходит единицы, а при $x\in(1;+\infty)$ строго возрастает.

4. Возведите все три неравенства в квадрат и сложите их, а затем воспользуйтесь свойствами скалярного произведения векторов.

5. Найдите $f(x)-f(x+\pi)$ и воспользуйтесь неравенствами

$$2\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|\geqslant\max_{x\in\mathbb{R}}(|f(x)|+|f(x+\pi)|)\geqslant\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-f(x+\pi)|.$$

1987 год (*L олимпиада*)

7 класс

1. В марте 1987 года было четыре полных недели (календари на 1987 и 2015 годы полностью совпадают).

2. Найдите количество простых чисел, меньших 100.

3. Сначала докажите, что окружность радиуса 30, центр которой совпадает с центром треугольника, пересекает каждую сторону треугольника в двух точках.

4. Предположите противное и отразите одну из вершин нижнего основания трапеции относительно прямой, содержащей верхнее основание.

5. Сначала покажите, что первый разбойник сможет обеспечить себе наибольшее количество монет, отделив ровно одну монету.

8 класс

1. Умножьте доказываемое неравенство на $2(a+b)$, перенесите все слагаемые на одну сторону и разложите на множители.

2. а), б) Используйте деление с остатком. в) Для доказательства невозможности разрезания на 9 прямоугольников используйте раскраску.

3. Докажите, что количество соревнований совпадает с числом выступлений каждого ученика.

4. Рассмотрите треугольники BPM и MQD, где P и Q — середины отрезков AC и CE соответственно.

5. Докажите сначала, что любой набор из $2\cdot 50\cdot 1987 = 198\,700$ последовательных натуральных чисел можно разбить как на пары вида $(k,\ k+50)$, так и на пары вида $(k,\ k+1987)$.

9 класс

1. Составьте и исследуйте таблицу последних цифр всевозможных сумм двух различных цифр.

2. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника, проведённые из некоторой вершины, делят угол пятиугольника на три равных угла. Найдите величину внешнего угла правильного пятиугольника. Затем докажите, что если дан произвольный угол, то с помощью одной лишь двусторонней линейки можно построить его биссектрису.

3. Рассмотрите числа, являющиеся произведением некоторой степени одного простого числа на некоторую степень другого простого числа.

4. Сначала докажите аналогичное неравенство с заменой 1987 на 2. Затем примените доказанное неравенство 1986 раз.

5. Каждая уложенная доска имеет расположенную между точками опоры «надёжную часть», которую можно использовать для дальнейшего построения. Докажите по индукции, что бо́льшая часть бассейна, ограниченная ломаной, состоящей из «надёжных частей» уложенных досок, имеет форму выпуклого многоугольника.

10 класс

1. а) Любое положительное число можно представить в виде $\operatorname{tg}\alpha$, где $0<\alpha<\pi/2$. б) Любое действительное число можно представить в виде $\operatorname{tg}\alpha$, где $-\pi/2<\alpha<\pi/2$.

2. Рассмотрите длины отрезков, концами которых служат проекции вершин треугольника на любую прямую, перпендикулярную данной плоскости.

3. Докажите, что если два прямоугольника, стороны которых проходят по линиям бумаги, удалены друг от друга на расстояние, меньшее $\sqrt{2}$, то их можно покрыть прямоугольником, стороны которого тоже проходят по линиям бумаги, а его периметр не более чем на 2 больше суммы периметров двух этих прямоугольников.

4. Докажите, что для любого целого значения n чи́сла n, $n+1937$ и $n-150$ всегда принадлежат одному подмножеству.

5. Разбейте царство на 4 квадрата со стороной 1 км; каждый из этих квадратов — на 4 квадрата со стороной 1/2 км, и т. д. Организуйте оповещение по одному жителю (при их наличии) каждого квадрата со стороной 1 км, а затем повторите эту процедуру в меньших квадратах.

1988 год (LI олимпиада)

7 класс

1. Найдите возможные остатки от деления числа p^2 на 3, на 5 и на 8, а также используйте разложение на множители выражения p^4-1.

2. Рассмотрите часть развёртки куба, по которой может проходить кратчайший путь по его поверхности между точками M и P.

3. С помощью кронциркуля отложите последовательно от некоторой точки на данной прямой два одинаковых отрезка (в одном направлении), а затем то же самое проделайте на прямой, соединяющей эту точку с данной точкой вне прямой.

4. Выберите произвольный телефон и рассмотрите цепь, состоящую из проводов, соединяющих телефоны последовательно один за другим, начиная с выбранного. Закрашивайте провода цепи в чередующиеся цвета.

8 класс

1. Проследите, как изменяется сумма чисел произвольной строки после одной операции, описанной в условии задачи.

2. Воспользуйтесь построением из задачи 3 для 7 класса.

3. Найдите все остатки, которые может давать четвёртая степень целого числа при делении на 16.

4. Сначала взвесьте вместе 1-ю, 2-ю, 4-ю монеты, потом 1-ю и 3-ю, затем 2-ю и 3-ю.

9 класс

1. Покажите, что произведение рассматриваемых чисел является квадратом целого числа.

2. Для простых чисел $p \geqslant 5$ найдите все остатки, которые может давать p^2 при делении на 3 и на 8.

3. От точки пересечения прямых отложите на одной из них точку на некотором расстоянии a, а на другой — точки на расстояниях a, $\sqrt{2}a$ и $\sqrt{3}a$.

4. Докажите, что любое натуральное число можно единственным образом представить в виде суммы

$$\frac{k(k-1)}{2} + m, \quad \text{где } k = 1, 2, 3, \ldots \text{ и } m = 1, 2, 3, \ldots, k.$$

5. Индукцией по количеству телефонов в сети докажите, что все провода любой телефонной сети, в которой от каждого телефона отходит не более трёх проводов, можно раскрасить четырьмя красками так, чтобы каждый провод был закрашен одной краской и от каждого телефона отходили провода разных цветов.

10 класс

1. Выразите наименьшее из чисел a и b через их сумму и модуль их разности.

2. Воспользуйтесь тем, что при симметрии относительно прямой касательные к графику будут переходить в касательные, а производная показательной функции принимает все положительные значения.

3. Проведите через одну из вершин в плоскости основания параллелепипеда прямую, перпендикулярную соответствующему боковому ребру.

4. Постройте на эталонном расстоянии от произвольной точки данной прямой четыре точки: две — на этой прямой, и ещё две — в одной полуплоскости относительно неё. Затем воспользуйтесь тем, что угол, опирающийся на диаметр, прямой.

5. Оцените снизу каждое из пары чисел, полученных после нескольких делений, через величины пары чисел, получаемых из них на следующем шаге.

1989 год (LII олимпиада)

7 класс

1. Произвольным образом заполните первую строку (например, A, B, C, D), а затем все остальные, согласуя с первой.

2. Отметьте на данной прямой две произвольные точки и постройте параллелограмм, вершинами которого будут эти две точки и данная в условии.

3. Докажите, что если не взять хотя бы два носка, то среди взятых носков требуемых пар может не оказаться.

4. Рассмотрите два случая в зависимости от того, в какую сторону турист отправляется из турбазы — по течению или против.

5. Докажите, что всякое натуральное число не меньше произведения своих цифр. Пользуясь этим и тем, что произведение цифр числа неотрицательно, получите оценки сверху и снизу на a.

8 класс

1. Сумма двух неотрицательных чисел равна нулю только в случае, если каждое из них равно нулю.

2. Докажите, что одного прыжка достаточно, чтобы кузнечик и блоха оказались на одной линии (горизонтали или вертикали).

3. а) Отметьте на данной прямой две произвольные точки и проведите окружности с центрами в этих точках и радиусами, равными расстояниям от них до данной в условии. б) Выбирая произвольную точку вне прямой, проведите окружность с центром в этой точке, проходящую через данную в условии.

4. Докажите, что для любых цифр m и n хотя бы одно из чисел $\overline{mn}$ или $\overline{nm}$ принадлежит X.

5. Предполагая противное, выберите разбиение на команды так, чтобы число пар друзей, оказавшихся в одной команде, было минимальным. Затем докажите, что можно поменять команду у одного пионера или у двух пионеров из разных команд так, что это число станет ещё меньше.

6. Подставьте в трёхчлен значения $x=0$, $x=1/2$ и $x=1$, а затем, пользуясь полученными условиями, оцените сверху модуль каждого из коэффициентов.

9 класс

1. Зафиксируйте некоторую точку в пространстве и проведите через неё прямые, параллельные данным.

2. Докажите, что $AQ:QK=MP:PK$.

3. Обозначая первые члены прогрессий буквами a и b, а знаменатели — буквами p и q, выразите $ap^{k+2}+bq^{k+2}$ через $ap^{k+1}+bq^{k+1}$, ap^k+bq^k, pq и $p+q$ при $k=0$, 1, 2.

4. Заметьте, что при объезде всех улиц по замкнутому маршруту каждый перекрёсток нужно пройти чётное число раз. Подсчитав, сколько в городе перекрёстков, в которых сходятся чётное и нечётное число улиц, выясните, сколько улиц нужно пройти хотя бы дважды.

5. Сначала докажите, что если решение существует, то оно единственно и симметрично (т. е. $x_1=x_{10}$, $x_2=x_9$, ..., $x_5=x_6$). Чтобы найти решение, рассмотрите равнобедренный треугольник с углом 15° при основании и длины отрезков, на которые разбивают основание 9 прямых, выходящих из вершины и разбивающих угол при этой вершине на 10 равных частей.

10 класс

1. Исследуйте монотонность функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, на области определения этого уравнения.

2. Рассмотрите степенную функцию.

3. Сначала расставьте крестики и нолики в каком-нибудь квадрате два на два: нолики в первой его строке, а крестики во второй. Дальше продолжите расставлять крестики и нолики в соседних с уже заполненными клетках так, чтобы условия задачи не нарушались.

4. Докажите, что ровно 3 или 4 из данных чисел дают одинаковые остатки при делении на некоторую степень двойки.

5. Чтобы получить оценку снизу искомой величины, выразите суммарный периметр фигур, полученных после разрезания единичного квадрата, через суммарную длину разрезов и сравните с аналогичной величиной для прямоугольника. Затем придумайте способ разрезания с суммарной длиной разрезов, отличающейся от полученной оценки снизу не более чем на 2.

6. Предполагая противное, проведите плоскость, касающуюся вписанного шара, через пару данных точек на рёбрах, принадлежащих четвёртой плоскости. Далее рассмотрите восьмигранник, образованный этой плоскостью, гранями тетраэдра и первыми тремя плоскостями. Соединив с вершинами точки касания каждой его грани вписанного шара, сравните сумму углов вокруг этих точек касания шара в плоскостях, лежащих на поверхности тетраэдра и вне неё.

1990 год (LIII олимпиада)

8 класс

1. Заметьте, что из условия задачи следуют неравенства: $a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3$, $a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6$, $a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9$.

2. Покажите, что число $m(n+9)(m+2n^2+3)$ не может иметь ровно одного простого делителя ни при каких натуральных числах m и n.

3. Убедитесь в том, что хотя бы один из классов представлен не более чем двумя участниками.

4. Применяя теорему об углах, вписанных в окружность, докажите равенство треугольников ACD и ACE.

5. Представив результаты n включений табло в виде таблицы из n строк, соответствующих каждому включению, и 64 столбцов, соответствующих каждой кнопке, так, что «+» означает, что данная кнопка в данном включении была нажата, а «–» — не нажата, докажите, что узнать, какая лампочка какой кнопкой управляется, можно только тогда, когда все столбцы таблицы различны.

9 класс

1. Предположив, что в компании найдутся 2 мальчика, не являющиеся братьями, придите к противоречию.

2. Рассмотрите произвольный набор из 53 различных натуральных чисел, из которого нельзя выбрать два числа, составляющих в сумме 53, и заметьте, что хотя бы одно число из каждой пары $(1, 52)$, $(2, 51)$, ..., $(26, 27)$ не принадлежит этому набору.

3. Используя теорему об отрезках пересекающихся хорд, докажите, что все расстояния от отмеченной точки до центра любой из проведённых окружностей радиуса 2 одинаковы.

4. Разбейте монеты на 4 группы по 2 монеты и произведите 3 взвешивания, раскладывая различными способами по 2 из полученных групп на каждую чашу весов.

5. Докажите, что квадрат дроби $\frac{1}{10^n-1}$ имеет период длины $n(10^n-1)$, а квадрат любой другой дроби с периодом длины n имеет период, длина которого не превосходит $n(10^n-1)$.

10 класс

1. Покажите, что найдётся такое число x из интервала $(0; 1)$, что прямоугольники со сторонами 1 и x, $1-x$ и $x(1-x)$, $1-x(1-x)$ и $1-x$, являясь подобными, вместе составляют квадрат со стороной 1.

2. Докажите, что одно из чисел p, q равно 2, а другое — 3.

3. Рассмотрите число $x=-\frac{\pi}{2}\pm\frac{\pi}{3}\pm\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{27}$, где знаки плюс или минус выбраны совпадающими со знаками коэффициентов a, b, c соответственно (знак числа 0 можно считать для определённости положительным), и покажите, что это число удовлетворяет неравенству, данному в условии.

4. Сначала покажите, что если отметить в круге четыре точки, не все из которых расположены на его окружности, то найдутся такие четыре точки на этой окружности, что произведение всех попарных расстояний между ними будет больше, чем такое произведение для отмеченных точек. Далее докажите, что среди всех вписанных в круг четырёхугольников наибольшим произведением всех попарных расстояний между его вершинами обладает только квадрат.

5. Рассмотрите в плоскости ACD такую точку B', что $AB'=AB$, $CB'=CB$ и точки B' и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, и докажите, что $B=B'$.

11 класс

1. Представьте числа x и y в виде $x=\cos\varphi$, $y=\cos\psi$, где φ и ψ — некоторые числа из отрезка $[0;\pi]$.

2. Сначала докажите, что $f(x)\neq x$ и $f(x)\neq x^2$ ни при каком $x\in(0;1)$.

3. Применяя свойства биссектрис треугольников ABC и LBC, найдите отношения $BA:BC$ и $BL:BC$. Затем, используя найденные отношения и формулы для площадей треугольников ABL, LBC и ABC, составьте тригонометрическое уравнение для $\angle ABL$.

4. Сначала докажите утверждение для всех чисел вида 5^n, где n — неотрицательное целое число. Затем решите задачу для произвольного нечётного числа, представив его в виде $k\cdot 5^n$, где k не кратно 5.

5. Заметьте, что четыре произвольные плоскости в пространстве являются плоскостями граней некоторого тетраэдра тогда и только тогда, когда никакие три плоскости не параллельны одной прямой и все плоскости не проходят через одну точку. Используя этот факт, докажите, что четыре точки в пространстве могут служить проекциями какой-либо точки соответственно на четыре плоскости граней некоторого тетраэдра тогда и только тогда, когда никакие три из этих точек не лежат на одной прямой, и все четыре точки не лежат на одной окружности.

1991 год (LIV олимпиада)

8 класс

1. Разложите данное выражение на множители.

2. а) В случае $AB = r$ постройте точку, симметричную точке A относительно B, а в общем случае найдите точку, находящуюся на расстоянии r от точек A и B и воспользуйтесь предыдущим построением. б) От точки A постройте сеть вершин правильных треугольников так, чтобы одна из них находилась от точки B на расстоянии, меньшем r.

3. Предполагая, что трёх дежурных хватит, придите к противоречию.

4. Сравните гирю с надписью «6 г» с суммарной массой гирек с надписями «1 г», «2 г» и «3 г».

5. Докажите и используйте следующий факт: если обозначить через $M(A)$ множество всех городов второй страны, в которые можно вылететь из города A первой страны, то найдутся два таких множества $M(A)$ и $M(C)$, что в одном из них есть город, не лежащий в другом, и наоборот.

9 класс

1. Воспользуйтесь формулой $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \ldots + 1)$.

2. а) Все 36 карт можно разложить на кучки по 1, 2, ..., 8 карт. б) Из 54 карт 45 можно разложить на кучки по 1, 2, ..., 9 карт, а оставшиеся 9 карт — на одну кучку из двух карт и 7 «кучек» по одной карте в каждой.

3. Среди вершин 12-угольника выберите три так, чтобы в соответствующем треугольнике три из данных диагоналей были биссектрисами.

4. Докажите и используйте тот факт, что прямая, проходящая через середины двух параллельных хорд данной гиперболы, проходит также и через начало координат.

5. Докажите сначала утверждение задачи последовательно для таблиц размера 1×15, 3×15 и 7×15. В последних двух случаях, предполагая противное, рассуждайте по-разному в зависимости от того, симметрична таблица относительно средней строки или нет.

10 класс

1. а) Подставьте в равенство значения $x=0$ и $x=1$. б) Рассмотрите ещё одно равенство, получающееся из исходного заменой x на $1-x$.

2. Найдите число всех точек касания шаров при расположении указанным способом.

3. Докажите подобие треугольников OAP и OAQ, где P и Q — точки пересечения прямой BC с биссектрисой AP внутреннего угла треугольника OAB и биссектрисой AQ внешнего угла треугольника OCA, и воспользуйтесь свойствами биссектрис этих треугольников. Или, пользуясь теоремой о касательных, проведённых к окружности из одной точки, выразите сумму радиусов окружностей через стороны и угол при основании треугольника ABC.

4. Разбейте данный куб на кубы размера $2\times 2\times 2$ и рассмотрите 8 множеств из всех одинаково расположенных в таких кубах единичных кубиков. Четыре из этих множеств состоят из чёрных кубиков. Покажите, что из каждого такого множества вынуто поровну кубиков.

5. Воспользуйтесь решением задачи 2 б) для 9 класса.

11 класс

1. Выразите через 10^k слагаемые (множители), получающиеся из данного числа, если поставить знак «$+$» («$\times$») между его k-й и $(k+1)$-й цифрами, и найдите минимальное (максимальное) значение соответствующей функции.

2. Искомая точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Чтобы найти расстояние, на котором она находится от середины этого отрезка, рассмотрите «вид сбоку», т. е. ортогональную проекцию земного шара в направлении луча AB.

3. В правильном 18-угольнике с вершинами, выбранными из вершин 54-угольника, найдите три вершины, для которых некоторые из диагоналей будут биссектрисами соответствующего треугольника.

4. Найдите утверждённую сумму расходов в случае, если первые 10 депутатов по первой статье предложат ничего не выделять, а по остальным выделить поровну, следующие 10 депутатов по второй статье предложат ничего не выделять, а по остальным — выделить поровну, и т. д.

5. Каждой погасшей клетке сопоставьте квадрат 2×2, в котором она погасла последней, и подсчитайте число всех квадратов 2×2 в прямоугольнике $m \times n$.

1992 год (LV олимпиада)

8 класс

1. Докажите, что из условия задачи следуют неравенства $-(c+d) < a+b$ и $c+d < a+b$.

2. Найдите количества чёрных диагоналей шахматной доски обоих направлений.

3. Докажите, что каждый участник за оба дня решил столько задач, сколько решили все участники во второй день.

4. При решении задачи можно считать, что суммарный вес всех гирь равен 60 г. Сначала покажите, что из возможности разложения на 5 кучек равной массы и на 4 кучки равной массы следует, что количество гирь не может быть меньше 8. Затем выясните, существует ли подходящей набор из 8 гирь.

5. Сначала рассмотрите случай равнобедренного прямоугольного треугольника. Затем сделайте аккуратный чертёж неравнобедренного прямоугольного треугольника, проведите биссектрису его прямого угла, перпендикулярную к ней прямую, проходящую через одну из двух вершин острых углов этого треугольника, и постройте проекцию гипотенузы на эту прямую. Для того чтобы сравнить длину этой проекции и удвоенную длину биссектрисы, проведённой к гипотенузе, можно либо выразить эти величины через длины катетов, либо провести дополнительные построения и воспользоваться теоремой о соотношениях между углами и сторонами треугольника, а также свойствами средней линии треугольника.

6. Достаточно найти такие четыре расстановки по кругу всех чисел от 1 до 9, чтобы в этих расстановках любые два из этих чисел стояли рядом ровно один раз. Для этого можно рассмотреть правильный восьмиугольник, вершины которого занумерованы от 1 до 8. Попробуйте найти такие четыре восьмизвенные ломаные, составленные из его сторон и диагоналей, что все эти ломаные не имеют общих концов и общих звеньев. Четыре искомые расстановки чисел получатся, если для каждой из этих ломаных записать номера вершин восьмиугольника в порядке их следования вдоль неё и добавить число 9 в конце.

9 класс

1. Докажите, что в ходе соревнований каждый участник выиграл столько партий, сколько выиграли все участники чёрными.

2. Разбейте все нечётные натуральные числа, меньшие 10 000, на пары a и b, для которых $a+b=10\,000$, и рассмотрите a^9+b^9.

3. Докажите, что в любой момент времени найдутся четыре стороны многоугольника, лежащие на сторонах исходного квадрата.

4. Запишите в каждую клетку таблицы число путей, которые ведут в неё из левой нижней клетки таблицы. Сначала заполните левый столбец и нижнюю строку.

5. Проведите через точку B прямую l, параллельную прямой DE. Пусть F и G — точки пересечения прямой l с прямыми AD и AC. Докажите равенство $FB=BG$.

6. а) Рассадим 11 человек за круглым столом и занумеруем их подряд натуральными числами от 1 до 11. Тогда вторая рассадка может иметь вид 1, 3, 5, 7, 9, 11, 2, 4, 6, 8, 10. б) Воспользуйтесь рассадками из решения п. а). Получите из каждой из этих рассадок 11 человек такие две рассадки 21 человека, что если в исходной рассадке пара людей с различными номерами i и j сидит рядом, то пары людей с номерами i и j, i и $23-j$, $23-i$ и j, а также $23-i$ и $23-j$ тоже сидят рядом в какой-нибудь из полученных рассадок.

10 класс

1. Разложите сумму косинусов на множители, пользуясь формулами тригонометрии и тем, что сумма углов четырёхугольника равна 360°.

2. Рассуждая аналогично решению задачи 3 для 9 класса, покажите, что в любой момент времени пирог имеет форму выпуклого многоугольника, пять сторон которого лежат на сторонах исходного пятиугольника.

3. Раскрасьте доску в два цвета в шахматном порядке и выясните, при каких значениях m и n в начале игры фишки стоят на клетках разных цветов, а при каких — на клетках одного цвета.

4. При решении задачи можно считать, что суммарный вес всех гирь равен 60 г. Сначала покажите, что из возможности разложения на 6 кучек равной массы и на 5 кучек равной массы следует, что количество гирь не может быть меньше 10. Затем выясните, существует ли подходящий набор из 10 гирь.

5. Рассмотрите вписанный в многоугольник ромб, две противоположные вершины которого симметричны и наиболее удалены от центра симметрии этого многоугольника.

6. Приведите пример какого-либо выпуклого многогранника, который имеет нечётное число рёбер, а каждая его грань — чётноугольник. Проверьте, существует ли искомая раскраска рёбер этого многогранника.

11 класс

1. а) Попробуйте так заполнить таблицу числами 0, 1 и -1, чтобы условия задачи были выполнены. б) Раскрасьте таблицу в чёрный и белый цвета в шахматном порядке и найдите число чёрных диагоналей обоих направлений.

2. Проведите окружность через точки A, B и C, продлите отрезок BD до пересечения с окружностью в точке K и докажите, что BK — диаметр окружности.

3. Рассмотрите новый путь перемещения Аладдина по экватору, который получается из данного пути, если сохранить все его движения на восток и на запад, но убрать все его мгновенные перемещения в диаметрально противоположные точки.

4. Для каждой грани тетраэдра рассмотрите вектор, который перпендикулярен этой грани, направлен наружу тетраэдра и равен по модулю площади этой грани. Докажите, что сумма всех четырёх таких векторов равна $\vec{0}$.

5. Воспользуйтесь указанием к задаче 6 для 10 класса.

6. а) Запишите цепочку, начинающуюся с шага

$$\log_{25} 75 \text{ и } \log_{65} 260 \xrightarrow{\text{правило 1}} \log_{25} 3 \text{ и } \log_{65} 4.$$

б) Докажите, что на каждом шаге выполняются условия ровно одного из трёх правил, знак неравенства между сравниваемыми логарифмами сохраняется, переходы по правилу 1 не могут следовать друг за другом бесконечное число раз и переход по правилу 2 никогда не производится два раза подряд, а затем выясните, как меняется разность между сравниваемыми логарифмами при применении этих правил.

Решения

1981 год (XLIV олимпиада)

7 класс

1. По условию найдутся такие целые числа k и l, что $A=1981k+35=1982l+35$. Значит, $1981k=1982l$, поэтому k чётно, т. е. $k=2n$, где n — целое число. Тогда поскольку $1981=7\cdot 283$, получаем $A=14\cdot 283\cdot n+35=14(283n+2)+$ $+7$. Это означает, что остаток от деления числа A на 14 равен 7.

Комментарий. Заметим, что согласно китайской теореме об остатках (см., например [10, с. 262]) в силу взаимной простоты чисел 1981 и 1982 существует бесконечно много таких чисел A, причём все они являются членами арифметической прогрессии с разностью $1981\cdot 1982=7\cdot 283\cdot 2\cdot 991=14\cdot 283\cdot 991$ и поэтому дают одинаковые остатки при делении на 14.

2. См. решение задачи 1 для 9 класса.

3. Наложим второй круглый лист на первый так, чтобы нарисованные драконы полностью совпали. Закрасим общую часть двух кругов (см. рис. 6). Тогда на обоих листах рисунок не выходит за пределы закрашенной области. Заметим также, что незакрашенные области обоих кругов при наложении совпадают. Следовательно, если от второго круглого листа отрезать незакрашенную область и наложить на соответствующую часть первого листа, то получим разрезанный на две части круглый лист, рисунок на котором совпадает с рисунком на первом листе. В частности, глаз дракона окажется в центре.

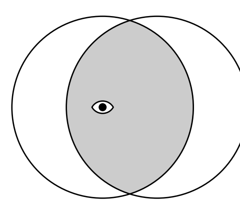


Рис. 6

4. Пусть n — наибольшее натуральное число, четвёртая степень которого не превосходит x (поскольку $x>1$, такое число существует). Тогда $n^4 \leqslant x < (n+1)^4$. Следовательно, $n^2 \leqslant \sqrt{x} < (n+1)^2$. Поскольку $[\sqrt{x}]$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt{x}$, справедливо также и неравенство $n^2 \leqslant [\sqrt{x}] < (n+1)^2$. Извлекая квадратный корень из обоих двойных неравенств, получаем $n \leqslant \sqrt{\sqrt{x}} < n+1$ и $n \leqslant \sqrt{[\sqrt{x}]} < n+1$, а значит, $[\sqrt{\sqrt{x}}] = [\sqrt{[\sqrt{x}]}] = n$.

К о м м е н т а р и й. Справедливо следующее более общее утверждение (лемма Р. Дж. Мак-Элиса, см. [33, задача 34 из разд. 1.2.4] и [25, задача 1.14]). Пусть $f(x)$ — непрерывная строго возрастающая на отрезке I функция и оба числа x и $[x]$ лежат в этом отрезке. Тогда равенство $[f([x])] = [f(x)]$ выполняется тогда и только тогда, когда функция обладает следующим свойством: если $f(x)$ — целое число, то и x тоже целое число.

5. Составим таблицу сумм весов всевозможных пар, составленных из данных гирь. Мы видим, что различные

	1000	1001	1002	1004	1007
1000	—	2001	2002	2004	2007
1001	2001	—	2003	2005	2008
1001	2002	2003	—	2006	2009
1004	2004	2005	2006	—	2011
1007	2007	2008	2009	2011	—

пары дают различные суммы. Это означает, что, зная сумму масс любых двух гирь, можно определить, какую пару мы взвешивали. Выберем произвольные две пары гирь и взвесим каждую пару. Если хотя бы в одной из пар есть гиря массой 1000 г, то выявляем её третьим взвешиванием любой из гирь соответствующей пары. Если же ни в одной из выбранных пар нет гири массой 1000 г, то пятая гиря и есть искомая.

К о м м е н т а р и й. Аналогично доказывается более общий факт: если n гирь таковы, что попарные суммы их весов различны, то найти гирю заданного веса можно с помощью не более чем $[(n+1)/2]$ взвешиваний. Если же суммы весов любых групп гирь попарно различны (так будет, например, если гири имеют веса 1, 2, 4, ..., 2^{n-1}) и их веса известны, то нужную гирю можно найти быстрее, а именно за $\lceil \log_2 n \rceil$ взвешиваний, где $\lceil x \rceil$ означает наименьшее целое число, большее или равное x. Для этого достаточно каждый раз разбивать гири на две группы, в которых число гирь или совпадает, или отличается на единицу (это так называемый алгоритм деления пополам, или *бинарного поиска*). Заметим, что при $n = 5$ оба результата совпадают.

8 класс

1. Пусть $ABCDE$ — некоторый пятиугольник. Отметим углы ABE, DBE, CAB, CAD, ACB, ADB и BEA (рис. 7). Тогда если все отмеченные 7 углов равны, то каждый из них равен 36°, так как сумма углов треугольника ABD равняется сумме пяти из них. Далее можно рассуждать двумя способами.

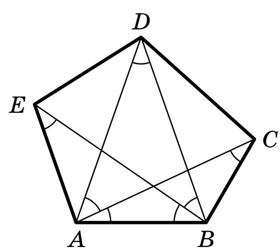


Рис. 7

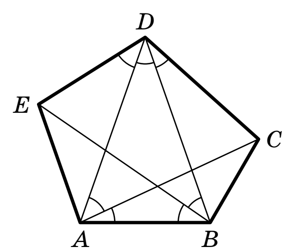


Рис. 8

Первый способ. Поскольку AC и BE — биссектрисы углов BAD и ABD соответственно, точки C, D и E лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB, а около пятиугольника $ABCDE$ можно описать окружность, поскольку отрезок AB виден из точки C, D и E под одним и тем же углом. На каждую из сторон пятиугольника опирается как минимум один из отмеченных вписанных углов. Значит, все стороны этого пятиугольника равны. Поэтому равны и все дуги описанной около него окружности, на которые опираются его углы. Отсюда получаем, что пятиугольник $ABCDE$ правильный.

Второй способ. Построим правильный пятиугольник $ABC'D'E'$ так, чтобы точки D' и D лежали по одну сторону от прямой AB. Тогда $\triangle ABD = \triangle ABD'$ по стороне AB и прилежащим к ней углам. Следовательно, точки D' и D совпадают. Далее, треугольники ABC и ABC' равнобедренные с углом 36° при основании AC и общей стороной AB. Тогда у них совпадают и углы при вершине B, значит, $\triangle ABC = \triangle ABC'$, поэтому точки C' и C тоже совпадают. Совпадение точек E' и E доказывается аналогично.

Комментарий. Предполагалось, что при решении данной задачи участники олимпиады приведут некоторый правильный пример; указывать все варианты ответа от них не требовалось. Отметим, что приведённый в решении пример не единственный. Ещё один способ отметить 7 углов указан на рис. 8.

5. Обозначим наименьшее общее кратное данных чисел через N. Тогда существуют такие натуральные числа $k_1, \ldots, k_{10}$, что $N = a_1k_1 = \ldots = a_{10}k_{10}$. Учитывая условие задачи, получаем $k_1 > k_2 > \ldots > k_{10}$, поэтому $k_1 \geqslant 10$. Следовательно, $N = a_1k_1 \geqslant 10a_1$.

Комментарий. Если бы было дано n чисел, то аналогичное рассуждение привело бы к оценке na_1, которая достигается, если $a_1 = n!/n = (n-1)!$, $a_2 = n!/(n-1) = (n-2)!n$, ..., $a_{n-1} = n!/2$, $a_n = n!$.

9 класс

1. Для удобства заменим все цифры, отличные от семёрки, на единицы. Ясно, что если той цифрой, которую следует вычеркнуть для выполнения условия задачи, окажется единица, то в исходном числе следует вычеркнуть цифру, которую мы заменили именно на эту единицу. Поскольку для числа, имеющего только один разряд, утверждение задачи очевидно, будем далее считать, что данное число содержит по крайней мере три разряда (число разрядов нечётно). Заметим, что если в этом числе нет двух стоящих рядом одинаковых цифр, то цифры должны чередоваться, т. е. число имеет вид или $17\ldots71$, или $71\ldots17$. В таких числах семёрки стоят только или на всех чётных местах, или на всех нечётных местах, поэтому если в любом из них вычеркнуть среднюю цифру, то в полученном числе количество семёрок на чётных местах совпадёт с количеством семёрок на нечётных местах.

Рассмотрим теперь случай, когда цифры данного числа не чередуются. Назовём данное число первым. Выберем любые две стоящие рядом одинаковые цифры и исключим их из дальнейшего рассмотрения. Получим снова число, имеющее нечётное число разрядов. Назовём это число вторым. Продолжая процесс далее, на некотором шаге мы получим или число, цифры которого чередуются, или число, состоящее из трёх одинаковых цифр. В любом случае, отметим его среднюю цифру и, возвращаясь к исходному числу, убедимся в том, что на каждом шаге после вычёркивания найденной цифры количество семёрок на чётных местах будет равно количеству семёрок на нечётных местах. В самом деле, для последнего числа это выполнено, а при переходе от каждого числа к предыдущему мы или не изменим эти количества (если исключались единицы), либо увеличим оба количества на 1 (если исключались семёрки). Следовательно, вычёркивание указанной цифры из первого числа удовлетворяет условию задачи.

Комментарий. Отметим, что в решении предъявлен алгоритм поиска искомой цифры. Конечно, можно его усовершенствовать, добавив на каждом шаге следующие проверки: если в полученном числе нет семёрок, то, чтобы удовлетворить условию задачи, можно вычеркнуть любую цифру; если же есть ровно одна семёрка, то именно её и следует вычеркнуть.

Как мы видели, фактически в задаче речь идёт о числах в двоичной системе счисления. Приведём несколько иную схему решения, также основанную на том, что число с нечётным числом разрядов, записанное нулями и единицами, всегда или содержит хотя бы одну пару равных цифр в соседних разрядах, или его концевые цифры равны. Исключая из числа найденную пару равных цифр, получаем число, имеющее нечётное число разрядов, что позволяет применить к нему ту же процедуру. Процесс заканчивается, когда останется только один разряд, при этом все остальные цифры будут разбиты на пары равных так, что пары, стоящие не в соседних разрядах, всегда будут разделяться, среди прочего, и последней оставшейся цифрой, значит после её удаления число разрядов, разделяющих эту пару станет чётным (так как до удаления этой цифры в любой такой паре число разделяющих её разрядов всегда было нечётным), т. е. один из разрядов пары будет иметь чётный номер, а другой — нечётный, и то же верно, очевидно, и для пар цифр в соседних разрядах. Значит, в полученном числе все разряды, содержащие единицу, разбиваются на пары, в которых один разряд имеет чётный номер, а другой — нечётный, откуда и следует утверждение задачи.

2. *Первый способ.* Из условия следует, что $a_1=1$ и $n\geqslant 2$. Заметим, что для любого $n\geqslant 2$ выполнено неравенство

$$|a_n-a_{n-1}|\leqslant n-1,$$

так как оба натуральных числа a_n и a_{n-1} не превосходят n.

Докажем следующее утверждение. Если a и b — такие целые числа, что a лежит на отрезке $[0;k]$, а b лежит на отрезке $[1;k-1]$, то справедливо неравенство $|a-b|\leqslant k-1$. В самом деле, если $a=0$, то неравенство очевидно, а если $a>0$, то оба числа лежат на отрезке $[1;k]$, длина которого равна $k-1$.

Рассмотрим теперь числа $|a_n-a_{n-1}|$ и a_{n-2}. Первое число лежит на отрезке $[0;n-1]$, а второе — на $[1;n-2]$. Поэтому справедливо неравенство

$$||a_n-a_{n-1}|-a_{n-2}|\leqslant n-2.$$

Продолжая далее, получим

$$|||a_n-a_{n-1}|-a_{n-2}|-a_{n-3}|\leqslant n-3$$

и т. д. вплоть до неравенства

$$|\ldots|||a_n-a_{n-1}|-a_{n-2}|-a_{n-3}|-\ldots-a_1|\leqslant 1.$$

Значит, существует расстановка знаков «$+$» и «$-$», для которой сумма $a_1\pm a_2\pm a_3\pm\ldots\pm a_n$ попадёт на отрезок $[-1;1]$. Но эта сумма чётна, поскольку при замене всех знаков плюсами мы увеличим её на чётное число и получим чётную сумму $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$. Значит, полученная сумма равна нулю.

Второй способ. Докажем это утверждение индукцией по n ($n \geqslant 2$ по условию).

Для $n = 2$ оно очевидно, так как единственный возможный набор — это $a_1 = a_2 = 1$.

Пусть для любого набора, состоящего меньше чем из $n+1$ чисел, утверждение доказано. Докажем его для $n+1$ чисел. Возьмём произвольный набор $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ из $n+1$ чисел, удовлетворяющий условию. Если $a_n = a_{n+1}$, то сумма $a_1 + \ldots + a_{n-1}$ чётна; учитывая предположение индукции, заключаем, что одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_{n-1} + a_n - a_{n+1}$ равна нулю. Если же $a_n \neq a_{n+1}$, то заменим данный набор набором $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, |a_n - a_{n+1}|$ из n натуральных чисел. Для нового набора выполнены все условия: число $|a_n - a_{n+1}|$ не превосходит n и имеет ту же чётность, что и $a_n + a_{n+1}$, поэтому сумма новых n чисел по-прежнему чётна. По предположению индукции одна из сумм $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm |a_n - a_{n+1}|$ равна нулю. Раскрывая модуль $|a_n - a_{n+1}|$, получаем, что равно нулю одно из выражений $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n \pm a_{n+1}$.

Третий способ. Докажем индукцией по k, $1 \leqslant k \leqslant n$, что любое натуральное число $m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ либо совпадает с некоторым числом a_j при $j = 1, 2, \ldots, k$, либо является суммой нескольких таких чисел с различными индексами j. При $k = 1$ это утверждение очевидно, так как $a_1 = 1$ и, следовательно, $m = a_1 = 1$. Пусть утверждение верно при некотором натуральном $k < n$ и $m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}$. Поскольку по условию $a_{k+1} \leqslant k + 1 \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 1$, получаем либо $m \leqslant a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, либо $m = a_{k+1}$, либо $m > a_{k+1}$. В первом случае доказываемое утверждение верно по предположению индукции. Во втором случае доказываемое утверждение также верно. В третьем случае натуральное число $m - a_{k+1}$ не превосходит $a_1 + a_2 + \ldots + a_k$ и по предположению индукции либо совпадает с некоторым числом a_j при $j = 1, 2, \ldots, k$, либо является суммой нескольких таких чисел с различными индексами j. Значит, и в этом случае доказываемое утверждение верно.

Из доказанного вытекает, что число $m = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{2}$ либо совпадает с некоторым числом a_j при $j = 1, 2, \ldots, n$, либо является суммой нескольких таких чисел с различными индексами j. Значит, сумма всех таких a_j совпадает с суммой остальных слагаемых суммы $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Следовательно, для некоторой расстановки знаков сумма $a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \ldots \pm a_n$ равна 0.

Комментарий. Отметим, что несмотря на то, что все три решения проведены методом математической индукции (в первом решении — методом «обратной индукции»), эти решения существенно различны, причём первые два основаны на свойствах модуля и сохранении чётности суммы при перемене знака любого слагаемого, а в третье доказательство использует более слабое условие на числа a_j.

3. Покажем, что во всякий выпуклый многоугольник площади S и периметра P можно поместить круг радиуса $R > S/P$. Построим на каждой стороне многоугольника по направлению внутрь него прямоугольник с высотой $h = S/P$ (см. рис. 9). Поскольку многоугольник вы-

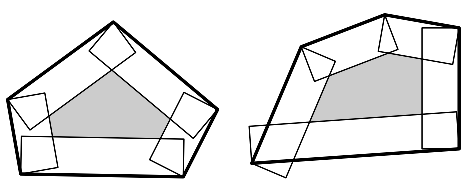


Рис. 9

пуклый, эти прямоугольники перекрываются, т. е. имеют общие внутренние точки (прямоугольники могут также выходить за границы многоугольника, см. рис. 9 справа). Суммарная площадь прямоугольников равна S, поэтому площадь покрытой ими части многоугольника меньше S. Следовательно, найдётся непокрытая точка внутри многоугольника, удалённая от каждой из его сторон на расстояние, большее h. Следовательно, для некоторого $R > h$ в рассматриваемый многоугольник можно поместить круг радиуса R с центром в этой точке.

Докажем теперь, что для любого круга, содержащегося в данном многоугольнике, выполняется неравенство $R \leqslant \frac{2S}{P}$. Пусть O — центр круга радиуса R, содержащегося в многоугольнике (см. рис. 10). Поскольку длины высот треугольников с вершиной O, основаниями которых служат стороны многоугольника, не меньше R, получаем $S \geqslant \frac{1}{2}PR$. Поэтому $R \leqslant \frac{2S}{P}$.

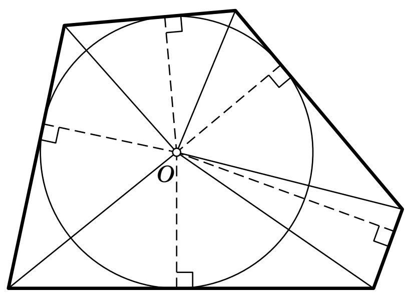


Рис. 10

Перейдём к доказательству утверждения задачи. Поместим во внутренний многоугольник круг радиуса $R > \frac{S(X)}{P(X)}$. Поскольку $R \leqslant \frac{2S(Y)}{P(Y)}$, получаем требуемое неравенство.

К о м м е н т а р и й. В журнале [50] приведено решение этой задачи, а кроме того, доказан и ещё один пункт: «б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников». Оказывается, в пространственном случае для объёмов и площадей поверхности двух выпуклых многогранников $X \subset Y$ справедливо неравенство $\frac{V(X)}{S(X)} < 3 \cdot \frac{V(Y)}{S(Y)}$. Кроме того, там же указан способ доказательства того факта, что постоянные 2 (для плоского случая) и 3 (для пространственного) нельзя заменить меньшими.

Отметим, что рассмотренная задача содержит развитие идеи задачи Всероссийской олимпиады 1966 г. [10, задача 16].

4. Рассмотрим множество A, которое содержит все целые числа от 0 до 9, а также те и только те натуральные числа, у которых на всех чётных местах десятичной записи стоят нули (например, числа 100, 101, 50002 принадлежат множеству A). Пусть, далее, множество B содержит 0, а также те и только те натуральные числа, у которых на всех нечётных местах десятичной записи стоят нули (в частности, числа 10, 20, 3000 принадлежат множеству B).

Покажем, что каждое неотрицательное целое число n единственным способом представляется в виде $n=a+b$, $a\in A$, $b\in B$ (например, $53002=50002+3000$). В самом деле, 0 (общий элемент этих множеств) допускает единственное представление $0=0+0$, а по десятичной записи любого натурального числа n можно построить такие числа $a\in A$, $b\in B$, что $n=a+b$, причём a и b определяются однозначно, поскольку при прибавлении к любому элементу множества A любого элемента множества B переноса через десяток не происходит.

Упорядочим теперь элементы множества B по возрастанию ($b_1=0$, $b_2=10$ и т. д.) и определим множества A_1, A_2, A_3, ... следующим образом: каждое A_k ($k=1, 2, \ldots$) получается из множества A прибавлением ко всем его элементам числа $b_k\in B$, т. е. $A_1=A$, а A_2, A_3, ... — сдвиги множества A на соответствующие элементы множества B. В силу доказанного утверждения, множества A_k попарно не пересекаются, а их объединение совпадает со множеством всех целых неотрицательных чисел. Для получения искомого разбиения натурального ряда на бесконечное число бесконечных подмножеств, каждое из которых получается из любого другого подмножества прибавлением одного и того же целого числа к каждому элементу, остаётся прибавить 1 ко всем элементам каждого из множеств A_k ($k=1, 2, \ldots$).

Комментарий. Геометрическое решение этой задачи содержится в [49].

Отметим также, что искомое разбиение можно задать функцией $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, сопоставляющей каждому натуральному числу номер множества, которому оно принадлежит. Например, подходит функция f, которая определяется индуктивно по следующим правилам.

1) $f(1)=1$.

2) Пусть функция $f(x)$ уже определена на отрезке $[1;\ 2^{n-1}]$ и $x \in [2^{n-1}+1;\ 2^n]$. Тогда положим $f(x)=f(x-2^{n-1})$ при чётном n и $f(x)=f(x-2^{n-1})+2^k$ при нечётном $n=2k+1$.

5. Докажем, что наибольшее число попарно непараллельных отрезков с концами в вершинах правильного 1981-угольника равно 1981. Пусть $A_1\ldots A_{1981}$ — данный правильный многоугольник. Рассмотрим отрезки A_2A_{1981}, A_3A_{1980}, ..., $A_{990}A_{993}$, $A_{991}A_{992}$ (см. рис. 11). Среди них нет равных, так как все они стягивают разные дуги описанной окружности. Поскольку концы отрезков симметричны относительно прямой, проходящей через точку A_1 и центр окружности, все эти отрезки попарно параллельны. Поворачивая проведённые отрезки на углы $\frac{2\pi k}{1981}$, где $k=1$, ..., 1980, вокруг центра многоугольника, получим все возможные отрезки с концами в вершинах этого многоугольника, а поскольку никакие две прямые, содержащие стороны правильного 1981-угольника не параллельны, наибольшее число попарно непараллельных отрезков в точности равно 1981.

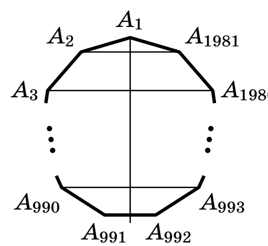


Рис. 11

Рассмотрим теперь все отрезки с концами в отмеченных точках. Количество таких отрезков равно $\frac{64(64-1)}{2}=2016>1981$. Следовательно, согласно доказанному утверждению, среди этих отрезков найдётся хотя бы одна пара параллельных и не равных друг другу отрезков. Значит, четырёхугольник с вершинами в концах этих отрезков является трапецией.

Комментарий. Отметим, что если в правильном 2015-угольнике отмечены 64 вершины, то утверждение задачи остаётся в силе, а в правильном 2017-угольнике уже потребуется отмечать больше вершин.

Заметим, что рассматриваемая задача равносильна следующей комбинаторной задаче. Если среди чисел от 0 до 1980 выбраны 64 числа, то суммы по модулю 1981 каких-то двух пар выбранных чисел непременно равны. Это условие равносильно следующему: разность по модулю 1981 каких-то двух выбранных чисел равна разности по модулю 1981 каких-то двух других выбранных чисел.

Возникает интересная и трудная задача: можно ли число 64 заменить меньшим, точнее: какое наибольшее подмножество можно выбрать в множестве $\{0, \ldots, 1980\}$ так, чтобы в нём все попарные разности (для его различных чисел) были разными? Такие множества иногда называют *разностными множествами* и изучают в комбинаторике.

Если разностное множество состоит из k чисел, то число $k(k-1)$ разностей по модулю n, образованных разными парами, должно быть не больше $n-1$, т. е. должно выполняться условие $k(k-1)+1 \leqslant n$. Вопрос, бывают ли разностные множества, у которых $k(k-1)+1=n$, представляет большой интерес. У этих множеств каждое число от 1 до $n-1$ представляется в виде разности по модулю n некоторых двух чисел из данного множества, причём единственным способом (на самом деле, в комбинаторике обычно именно такие множества и называют разностными).

Если для разностного множества M рассмотреть его циклические сдвиги $M+a$, где $a=1, \ldots, n-1$ (сложение выполняется также по модулю n, т. е. когда сумма $b+a$ больше или равна n, она заменяется на $a+b-n$), то любые два из этих сдвигов (включая само множество $M=M+0$) имеют ровно одно общее число, и каждая пара чисел (x, y) принадлежит (ровно одному) сдвигу. Построенная система множеств обладает следующими свойствами. Каждое из этих $n=q^2+q+1$ множеств (где $q=k-1$) состоит из $q+1=k$ чисел, а каждая пара различных чисел из множества $\{0, \ldots, n-1\}$ принадлежит ровно одному множеству. Указанное семейство множеств является так называемой *конечной проективной плоскостью* порядка q. Доказано, что если q есть степень простого числа, то такие плоскости действительно существуют (см. книги [31] или [65]), в частности, в множестве $\{0, \ldots, 43\cdot 44=1892\}$ существует циклическое разностное множество из 44 чисел, а множества большего размера не существует. Приводить пример упомянутого разностного множества здесь мы не будем, так как он достаточно громоздкий, а проверка его правильности затруднительна. Вместо него приведём пример циклического разностного множества при $n=13$: это множество $\{0, 1, 3, 9\}$.

Что будет, когда n не равно степени простого, до конца не ясно. Доказано, что если $q=4t+1$ или $4t+2$, причём q нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то такого множества не существует (теорема Брука и Райзера, см. книгу [65]). Например, при $q=6$ эти условия не выполняются, т. е. в множестве $\{0, \ldots, 42\}$ нет циклического разностного множества из 7 чисел. Это означает, что среди любых 7 вершин правильного 43-угольника найдётся либо трапеция, либо её вырожденный случай — равнобедренный треугольник. В то же время в правильном 31-угольнике можно найти 6 вершин, не содержащих ни трапеции, ни равнобедренного треугольника.

10 класс

1. Заметим, что $f(x)$ отлична от 1 при всех x. В самом деле, подставляя $f(x)=1$ в данное равенство, получим $0=2$. Следовательно, при всех x справедливо равенство $f(x+k)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Тогда

$$f(x+2k)=\frac{1+f(x+k)}{1-f(x+k)}=\frac{1+\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\frac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\frac{1}{f(x)}$$

(заметим, что $f(x)$ отлична от 0, поскольку иначе $f(x+k)= =1$). Таким образом, при всех x получаем

$$f(x+4k)=-\frac{1}{f(x+2k)}=f(x).$$

Это означает, что $f(x)$ — периодическая функция с периодом $4k$.

Комментарий. Идея решения основана на том, что функция $y=(1+x)/(1-x)$ после четырёхкратной композиции сама с собой превращается в тождественную функцию $y=x$.

2. Пусть $Q(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ — произвольный многочлен степени $n>1$ со старшим коэффициентом, равным единице. Тогда

$$Q(x)-Q(x-1) = (x^n-(x-1)^n)+a_{n-1}(x^{n-1}-(x-1)^{n-1})+ \\ +\ldots+a_1(x-(x-1)).$$

Заметим, что для любого натурального k старший член многочлена $x^k-(x-1)^k$ равен kx^{k-1}. Следовательно, старший член многочлена $Q(x)-Q(x-1)$ равен nx^{n-1}.

Рассмотрим теперь многочлены $P_1(x)=P(x)-P(x-1)$, $P_2(x)=P_1(x)-P_1(x-1)$, ..., $P_d(x)=P_{d-1}(x)-P_{d-1}(x-1)$. Каждый многочлен при любом целом x делится на m. Кроме того, степени многочленов последовательно уменьшаются на 1, а старший коэффициент (исходно равный единице) умножается на d, $d-1$, ..., 1. Значит, $P_d(x)=d!$, поэтому $d!$ делится на m.

К о м м е н т а р и й. Рассмотренная в решении операция называется *разностным оператором*. Повторение этой операции k раз даёт оператор k-й разности. Известно, что оператор n-й разности от многочлена n-й степени со старшим коэффициентом, равным единице, равен $n!$.

3. Предположим, что данная последовательность стремится к нулю. Тогда для $\varepsilon=\frac{1}{8}\sin 2$ найдётся такое число N, что при любом $n>N$ будет выполнено неравенство $|\sin(n^2)|<\varepsilon$. Поскольку

$$|\sin(\alpha-\beta)| = |\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta| \leqslant \\ \leqslant |\sin\alpha\cos\beta| + |\cos\alpha\sin\beta| \leqslant |\sin\alpha| + |\sin\beta|,$$

при $n>N$ получаем

$$|\sin(2n+1)| = |\sin((n+1)^2-n^2)| \leqslant \\ \leqslant |\sin(n+1)^2| + |\sin(n^2)| < 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\sin 2 = |\sin 2| = |\sin((2n+3)-(2n+1))| \leqslant \\ \leqslant |\sin(2n+3)| + |\sin(2n+1)| < 2\varepsilon+2\varepsilon = 4\varepsilon = \frac{1}{2}\sin 2,$$

противоречие.

К о м м е н т а р и й. В 1981 году понятие предела последовательности входило в курс школьной математики. По определению, последовательность чисел *стремится к нулю*, если для любого сколь угодно малого интервала, содержащего нуль, найдётся такой номер N, что все члены последовательности с бóльшими номерами лежат в этом интервале. В данном решении мы предположили, что такой номер N есть для интервала $\left(-\frac{1}{8}\sin 2;\ \frac{1}{8}\sin 2\right)$ и пришли к противоречию.

Отметим, что утверждение задачи верно и для любой последовательности вида $\sin(P(n))$, где $P(n)$ — произвольный многочлен с целыми коэффициентами. Более того, справедливо более сильное утверждение: для любого сколь угодно короткого отрезка, лежащего внутри отрезка $[-1; 1]$, указанная последовательность будет попадать в него бесконечно много раз. Подробнее об этом написано в книге [25, гл. 16].

4. Пусть n — количество звеньев ломаной, l_i — длина i-го звена ломаной, a_i и b_i — длины его проекций на стороны квадрата, $i=1, \ldots, n$. Тогда $l_i \leqslant a_i + b_i$, причём равенство достигается лишь в том случае, когда i-е звено ломаной параллельно одной из сторон квадрата, но в таком случае прямая, проходящая через это звено, параллельна стороне квадрата и имеет с ломаной бесконечно много общих точек. Остаётся рассмотреть случай, когда $l_i < a_i + b_i$ при всех i. Тогда проекцией каждого звена ломаной на сторону квадрата является отрезок, причём $200 \leqslant l_1 + \ldots + l_n < (a_1 + \ldots + a_n) + (b_1 + \ldots + b_n)$. Поэтому хотя бы одна из сумм $a_1 + \ldots + a_n$ и $b_1 + \ldots + b_n$ превосходит 100.

Без ограничения общности можно считать, что $a_1 + \ldots + a_n > 100$. Рассмотрим соответствующую сторону единичного квадрата и предположим, что каждую её точку покрывают не более чем 100 проекций. Спроектируем все вершины ломаной на эту сторону квадрата и обозначим различные проекции через x_1, x_2, …, x_m в порядке следования от одной вершины квадрата к другой (см. рис. 12). Тогда на каждом интервале $(x_k; x_{k+1})$ количество проекций, покрывающих любую его точку, будет постоянным. Обозначим это количество через p_k, $k=1, \ldots, m-1$. Тогда

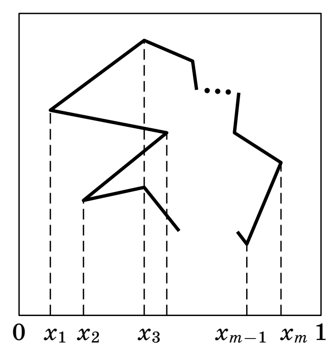


Рис. 12

$$
\begin{aligned}
a_1 + \ldots + a_n = \\
&p_1(x_2 - x_1) + p_2(x_3 - x_2) + \ldots + p_{m-1}(x_m - x_{m-1}) \leqslant \\
&\leqslant 100(x_2 - x_1) + 100(x_3 - x_2) + \ldots + 100(x_m - x_{m-1}) \leqslant \\
&\leqslant 100(x_m - x_1) \leqslant 100,
\end{aligned}
$$

что неверно. Следовательно, существует хотя бы одна точка этого отрезка, которую покрывают более 100 проекций. Прямая, проведённая через эту точку перпендикулярно стороне квадрата, является искомой.

Комментарий. Отметим, что оценку длины ломаной из условия задачи улучшить нельзя, так как в единичном квадрате можно расположить кривую без самопересечений длины 200, которая пересекается с любой прямой не более чем в 101 точке (кривая будет проходить в близкой окрестности границы квадрата; рекомендуем читателю самостоятельно расположить такую кривую).

Утверждение задачи можно обобщить следующим образом. Пусть для выпуклого многоугольника периметра p и диаметра d число l есть наименьшая длина лежащей в нём ломаной, для которой существует прямая, параллельная одной из сторон многоугольника, пересекающая эту ломаную не менее чем в $n+1$ различной точке и не содержащая ни одно из звеньев ломаной. Тогда $l=pn/2$ при чётном n и $l=p(n-1)/2+d$ при n нечётном. Это доказано в статье [75], авторское решение имеется в [24].

5. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, x, y, z — длины высот, опущенных на эти стороны, S — его площадь. Тогда

$$\frac{1}{r}=\frac{a+b+c}{2S}=\frac{a}{2S}+\frac{b}{2S}+\frac{c}{2S}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{3}{4}, \\ x+y+z=13. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы следует, что или $x=y=z=$ $=4$, или хотя бы одна из высот меньше 4. Поскольку первые равенства противоречат второму уравнению системы, получаем, что наименьшая из высот (пусть это z) может быть равна только 1, 2 или 3. Равенство $z=1$ противоречит первому уравнению системы. Для рассмотрения двух оставшихся случаев преобразуем систему.

Поскольку

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz}$$

и

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)=(x+y+z)^2=169,$$

система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2+\dfrac{3}{2}xyz=169, \\ x+y+z=13. \end{cases}$$

Если $z=2$, то получаем

$$\begin{cases} x^2+y^2+3xy=165, \\ x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2+xy=165, \\ x+y=11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=44, \\ x+y=11. \end{cases}$$

Поскольку квадратный трёхчлен $t^2-11t+44$ не имеет корней, система не имеет решений.

Если $z=3$, то хотя бы одно из чисел x и y чётно, поэтому будем считать, что оставшиеся высоты равны $2k$ и l. Тогда

$$\begin{cases} 4k^2+l^2+9kl=160, \\ 2k+l=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2k+l)^2+5kl=160, \\ 2k+l=10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2kl=24, \\ 2k+l=10. \end{cases}$$

Значит, $2k$ и l — корни квадратного трёхчлена $t^2-10t+24$, поэтому одно из них равно 4, а другое 6.

Итак, единственное (с точностью до перестановки) решение системы есть $x=4$, $y=6$, $z=3$. Следовательно, $4a=6b=3c$, поэтому $a=3u$, $b=2u$, $c=4u$. Остаётся найти u. С одной стороны, $S=\dfrac{1}{2}ax=6u$. С другой стороны, по формуле Герона $S=\dfrac{\sqrt{135}}{4}u^2$. Таким образом, $u=\dfrac{8}{\sqrt{15}}$.

Комментарий. Систему уравнений в целых числах

$$\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}, \\ x+y+z=13 \end{cases}$$

можно решить иначе. Поскольку

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+xz}{xyz},$$

она равносильна системе

$$\begin{cases} 4(xy+yz+xz)=3xyz, \\ x+y+z=13. \end{cases}$$

Отсюда следует, что произведение xyz делится на 4, а числа x, y и z являются корнями многочлена

$$P(t)=(t-x)(t-y)(t-z)=t^3-13t^2+3kt-4k,$$

где $k=\frac{xyz}{4}=\frac{xy+yz+xz}{3}$ — натуральное число. Значит, среди чисел x, y и z есть чётное число. Это число может равняться 2, 4, 6 или 8 и не может быть больше. Следовательно, имеет место хотя бы одно из равенств $P(2)=0$, $P(4)=0$, $P(6)=0$, $P(8)=0$. Тогда $k=22$, $k=18$, $k=18$ или $k=16$ соответственно. Остаётся убедиться в том, что для таких значений k все корни многочлена $P(t)$ — натуральные числа лишь при $k=18$, причём это числа 3, 4 и 6.

6. Пусть t_n — наименьшее число перестановок. Ясно, что задача имеет смысл при $n \geqslant 3$. Легко видеть, что $t_3=1$

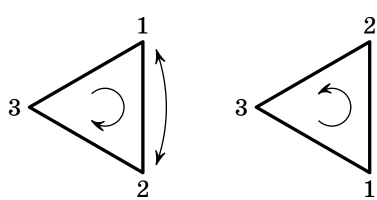


Рис. 13

(см. рис. 13). Докажем, что при $n \geqslant 4$ выполнено неравенство

$$t_n \geqslant t_{n-1}+\left[\frac{n-1}{2}\right]$$

($[a]$ — целая часть числа a). Можно считать, что сидящие за столом располагаются в вершинах правильного

n-угольника. Пусть в результате перестановок любые два соседа остались соседями, сидящими в обратном порядке. Тогда итоговое расположение всех людей за столом однозначно восстанавливается по новому месту, занимаемому любым из них, и является симметрией относительно некоторой оси. А именно, оси, содержащей серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему начальное и конечное положение любого из сидящих (если эти положения различны) или оси, проходящей через положение участника и центр правильного n-угольника (если эти положения совпали).

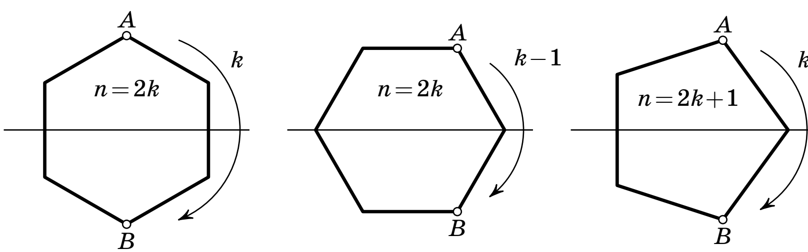


Рис. 14

Пусть A — одна из наиболее удалённых от оси вершин многоугольника, B — симметричная ей вершина (рис. 14). Кратчайший путь от A к B по границе многоугольника содержит не менее $k-1$ сторон, если $n=2k$, и не менее (на самом деле — ровно) k сторон, если $n=2k+1$, где k — натуральное число. Значит, он содержит не менее $[(n-1)/2]$ сторон, поэтому человек, исходно располагавшийся в точке A (назовём его «первым»), должен на пути к B сделать не менее $[(n-1)/2]$ перестановок. Рассмотрим $n-1$ оставшихся человек. Перестановки с первым не меняют порядок их взаимного расположения, поэтому, чтобы разместиться в противоположном порядке, им нужно сделать ещё по меньшей мере t_{n-1} перестановок между собой. Значит, если в результате любые два соседа стали соседями, сидящими в обратном порядке, то потребовалось не менее $t_{n-1}+[(n-1)/2]$ перестановок. Тем самым неравенство для t_n доказано.

Последовательно применяя доказанное неравенство, получаем

$$t_{2k} \geqslant t_3 + \left[\frac{3}{2}\right] + \left[\frac{4}{2}\right] + \ldots + \left[\frac{2k-1}{2}\right] =$$
$$= 2(1+2+\ldots+(k-1)) = k^2 - k,$$
$$t_{2k+1} \geqslant t_{2k} + \left[\frac{2k}{2}\right] = k^2.$$

Покажем, что найденного здесь числа перестановок достаточно, т. е. знак «$\geqslant$» в обоих полученных неравенствах можно заменить на знак «$=$». Занумеруем всех сидящих за столом по порядку от 1 до n и разобьём их на две группы — от 1-го до k-го и от $(k+1)$-го до n-го (см. рис. 15, а).

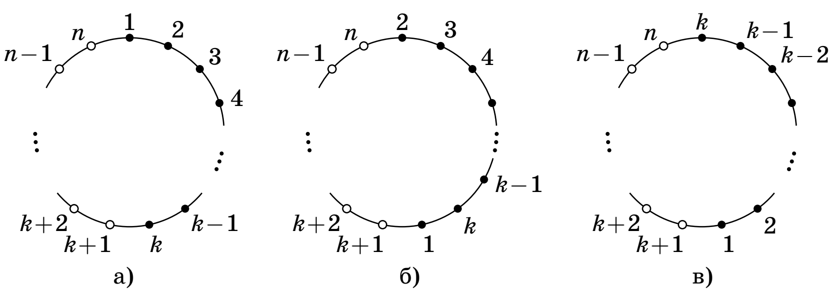


Рис. 15

Чтобы поменять порядок в первой группе, пересадим последовательно 1-го человека со 2-м, 3-м, ..., k-м (рис. 15, б), затем 2-го — с 3-м, 4-м, ..., k-м и т. д. (рис. 15, в). На это уйдёт $(k-1)+(k-2)+\ldots+1=\frac{k(k-1)}{2}$ перестановок. Аналогично за $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ перестановок мы получим обратный порядок во второй группе. Всего при $n=2k$ или $n=2k+1$ надо будет произвести $k^2-k=\frac{n(n-2)}{4}$ или $k^2=$ $=\frac{(n-1)^2}{4}$ перестановок соответственно.

Комментарий. Приведём другую идею вывода оценок. Заметим, что из любых трёх сидящих за столом хотя бы двое должны поменяться местами (иначе их порядок сохраняется). Соединим двух участников отрезком, если им ни разу не приходилось пересаживаться друг с другом. Мы получим набор отрезков с концами в n точках (*граф с n вершинами*). В силу сделанного замечания, эти отрезки (*рёбра графа*) не образуют ни одного треугольника. Нетрудно доказать по индукции, что граф с n вершинами без треугольников содержит не более $[n^2/4]$ рёбер (это так называемая теорема Мантеля, см. также комментарий к решению задачи 4 для 10 класса 1983 г.). Следовательно, количество пар, которые хотя бы раз пересаживались друг с другом, не меньше $n(n-1)/2-[n^2/4]$, что, как легко проверить, совпадает с правой частью полученных нами неравенств для t_{2k} и t_{2k+1} в зависимости от чётности n.

1982 год (XLV олимпиада)

7 класс

1. Покажем, как можно возвести любое положительное число x в квадрат за 6 операций. Промежуточные результаты будем обозначать через x_1, x_2, ..., x_6 (по условию их можно запоминать и неоднократно использовать в последующих вычислениях). Для возведения x в квадрат следует последовательно вычислить: $x_1=\dfrac{1}{x}$, $x_2=x+1$, $x_3=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{1}{x+1}$, $x_4=x_1-x_3=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x^2+x}$, $x_5=\dfrac{1}{x_4}=x^2+x$, $x_6=x_5-x=x^2$.

Пусть требуется перемножить положительные числа x и y. Без ограничения общности можно считать, что $x>y$. Вычисления проводим в следующем порядке: сначала найдём $x+y$ и $x-y$ (2 операции), затем возведём эти числа в квадрат, как показано выше (ещё 12 операций), затем вычисляем $z=(x+y)^2-(x-y)^2$ и $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{4xy}$ (2 операции), потом последовательным сложением получаем $\dfrac{2}{4xy}=\dfrac{1}{4xy}+\dfrac{1}{4xy}$, $\dfrac{1}{xy}=\dfrac{2}{4xy}+\dfrac{2}{4xy}$ (2 операции) и, наконец, $\dfrac{1}{1/xy}=xy$ (1 операция). Итого нам потребовалось $2+12+2+2+1=19$ операций.

К о м м е н т а р и й. Задача появилась из известной леммы, которая используется, чтобы доказать, что деление сложнее умножения в смысле числа используемых операций с цифрами не более чем в пять раз (см. [25, задача 17.53]). В ней фактически идёт речь о том, как выразить умножение через сложение, вычитание и деление (точнее, обращение). Умножение также можно выразить через операции $x-y$, $1/x$ и константу 1. Действительно, нуль можно получить как $x-x$, тогда сложение $x+y=x-((x-x)-y)$ выражается через вычитание, а $x+1$ выражается через сложение и константу 1. Тождество $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$ использовалось для замены умножения возведением в квадрат, которое делалось с помощью таблиц квадратов. Такой приём использовался даже после изобретения логарифмов, во всяком случае таблицы квадратов издавались в 1950-е годы. Впрочем, тогда издавались и специальные таблицы для умножения многозначных чисел.

2. Проведём через центр квадрата две прямые, параллельные его сторонам. Получим 4 одинаковых квадрата, длина диагонали каждого из которых равна половине длины диагонали исходного квадрата. Из 5 точек найдутся две, которые попадут в один из этих квадратов (внутрь или на стороны), поэтому расстояние между ними не превосходит длины диагонали этого квадрата.

К о м м е н т а р и й. Очевидно, что в квадрате найдутся 5 точек, попарные расстояния между которыми не больше половины диагонали, т. е. доказанная оценка точная. Задача является частным случаем задач о плотнейшей упаковке; к этому классу относится и задача о том, как поместить n точек в квадрат так, чтобы наименьшее расстояние между парами точек было максимальным. Точные ответы в подобных задачах известны только в простейших случаях.

3. Заметим сначала, что последовательности действий «$\times 3, +4, +4, +4$» и «$+4, \times 3$» над одним и тем же исходным числом a приводят к одинаковому результату $3a+12$, но во втором случае затраты меньше. Это означает, что после умножения на 3 невыгодно прибавлять 4 более двух раз подряд. Поэтому если при наиболее выгодной последовательности действий на каком-то шаге получилось число, которое не делится на 3, то оно было получено из предыдущего прибавлением четвёрки, а если делится, то либо оно было получено умножением предыдущего на 3, либо при его вычислении были использованы только прибавления четвёрки к исходной 1. Заметим, далее, что если использовать только прибавления четвёрки к исходной 1, то кратными 3 будут только числа 9, 21, 33 и т. д., т. е. числа вида $12n-3$, где n пробегает натуральный ряд, при этом стоимость вычислений составит $6n-2$ копеек.

Построим наиболее выгодную последовательность действий Пети, начиная с последнего:

- 1981 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 1977 делится на 3, причём $1977 = 12\times 165-3$, поэтому если оно получено только прибавлением четвёрок к исходной 1, то затрачено $6\times 165-2=988$ копеек, что менее выгодно, чем использовать равенство $1977=659\times 3$, следуя дальнейшему алгоритму;
- 659 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 655 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 651 делится на 3 и не представимо в виде $12n-3$, поэтому оно получено умножением на 3;
- 217 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 213 делится на 3, причём $213=12\times 18-3$, поэтому если оно получено только прибавлением четвёрок к исходной 1, то затрачено $6\times 18-2=106$ копеек, что менее выгодно, чем использовать равенство $213=71\times 3$, следуя дальнейшему алгоритму;
- 71 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 67 не делится на 3, поэтому оно получено прибавлением 4;
- 63 делится на 3 и не представимо в виде $12n-3$, поэтому оно получено умножением на 3;
- 21 делится на 3, причём $21=12\times 2-3$, поэтому оно может быть получено или только прибавлением четвёрок

к исходной 1 за $6 \times 2 - 2 = 10$ копеек, или умножением 7 на 3, но поскольку для получения 7 из 1 придётся задействовать ещё одно умножение на 3, второй вариант оказывается менее выгодным.

Итак, в случае действий по схеме «+4, +4, +4, +4, +4, ×3, +4, +4, ×3, +4, ×3, +4, +4, ×3, +4» Петя затратит наименьшую сумму, равную 42 копейкам, при этом последовательность полученных чисел будет выглядеть так:

$$1, 5, 9, 13, 17, 21, 63, 67, 71, 213, 217, 651, 655, 659, 1977, 1981.$$

Наконец, заметим, что на автомате нельзя набрать чётное число. В самом деле, исходное число 1 нечётно, а при умножении на нечётное число 3 и прибавлении чётного числа 4 будут получаться только нечётные числа. Следовательно, у Пети не получится набрать число 1982.

Комментарий. В задаче идёт речь о вычислениях натуральных чисел в базисе, состоящем из элементарных операций $3x$ и $x+4$, а также константы 1. Подобная же задача с базисом $x+y$, 1 известна как задача об аддитивных цепочках, а так называемый бинарный метод построения таких цепочек фактически использует базис из операций $2x$, $x+1$, 1. В рассмотренной задаче, в отличие от аддитивных цепочек, через заданные операции выражается не любое натуральное число, а только нечётные числа. Предлагается найти минимальную сложность вычисления данного числа в данном базисе, где под сложностью понимается сумма сложностей базисных операций. В рассмотренной задаче они разные, в отличие от задачи про аддитивные цепочки, где сложность каждой операции обычно принимается за единицу. Данное решение позволяет найти сложность любого нечётного числа. Читатель может попробовать решить и более общую задачу, когда сложности операций — произвольные данные числа, и даже ещё более общую — когда базис состоит из операций вида ax, $x+b$, где a, b — произвольные заданные числа. Заметим, что задача о нахождении кратчайшей аддитивной цепочки, т. е. нахождения минимальной сложности вычисления числа n в базисе операций $x+y$, 1, в общем случае не решена.

4. Очевидно, что 8 точек, расположенных последовательно на прямой на расстояниях 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 между соседними точками, удовлетворяют условию задачи. Покажем, что меньшего количества точек недостаточно. Для каждого числа из набора 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 выберем пару точек, расстояние между которыми равно этому числу, и соединим их отрезком. Рассмотрим полученные 7 отрезков. Заметим, что из них или из какой-либо их части нельзя сложить ни одного многоугольника. В самом деле, в таком многоугольнике бо́льшая сторона превосходила бы сумму остальных сторон, что противоречит неравенству треугольника. Разобьём теперь выбранные 7 отрезков на группы следующим образом. Выберем любой из этих отрезков. Если он не имеет общих концов с другими отрезками, то отнесём его в группу, состоящую только из него самого. Если же хотя бы один из концов данного отрезка является общим с каким-либо из оставшихся 6 отрезков, назовём эти отрезки связанными. Рассмотрим, далее, все отрезки, связанные с двумя данными отрезками и т. д. В итоге получим множество отрезков, двигаясь по которым можно вернуться на исходный отрезок. Все эти отрезки отнесём к одной группе. Очевидно, что таким образом каждый из 7 отрезков будет отнесён ровно к одной группе. Поскольку в каждой группе исходно был один отрезок, соединявший две точки, а добавление каждого нового отрезка увеличивало на 1 как число отрезков, так и число соединённых ими точек (сложиться в многоугольник отрезки не могут), количество соединённых точек должно по меньшей мере на 1 превосходить число отрезков в группе. Следовательно, общее число точек должно быть не меньшим $7+1=8$.

К о м м е н т а р и й. Задачу можно рассмотреть для расстояний 1, 2, 4, ..., 2^n, тогда ответом будет $n-1$, а доказательство фактически основано на том, что если рассмотреть граф, рёбра которого соединяют пары точек с указанными расстояниями, то в этом графе не будет циклов (иначе в силу обобщённого неравенства треугольника одно из указанных чисел будет не больше суммы нескольких меньших, что невозможно для указанной геометрической прогрессии), а граф без циклов — это дерево, если он связный, или лес (объединение непересекающихся деревьев), и в любом случае число рёбер в нём меньше числа вершин.

8 класс

1. *Первый способ.* Имеем

$$\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}=\sqrt{\frac{4}{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}.$$

Обозначим $\sqrt[4]{5}$ через a и преобразуем подкоренную дробь, учитывая равенства $a^4=5$, $a^5=5a$ и $a^6=5a^2$:

$$\frac{4}{4-3a+2a^2-a^3}=\frac{4(4+2a^2+3a+a^3)}{(4+2a^2)^2-(3a+a^3)^2}=\frac{4(4+2a^2+3a+a^3)}{6+2a^2}=$$
$$=\frac{2(4+2a^2+3a+a^3)}{3+a^2}=\frac{2(4+2a^2+3a+a^3)(3-a^2)}{9-a^4}=$$
$$=\frac{(4+2a^2+3a+a^3)(3-a^2)}{2}=1+2a+a^2=(1+a)^2.$$

Значит, искомое выражение равно $1+a$, т. е. $1+\sqrt[4]{5}$.

Второй способ. Умножим числитель и знаменатель дроби на 2:

$$\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}=\frac{4}{\sqrt{16-12\sqrt[4]{5}+8\sqrt{5}-4\sqrt[4]{125}}}$$

и рассмотрим подкоренное выражение. Имеем

$$16-12\sqrt[4]{5}+8\sqrt{5}-4\sqrt[4]{125}=$$
$$=6-12\sqrt[4]{5}+8(\sqrt[4]{5})^2-4(\sqrt[4]{5})^3+2(\sqrt[4]{5})^4.$$

Обозначим $\sqrt[4]{5}$ через a и разложим на множители, учитывая равенство $a^4=5$:

$$2a^4-4a^3+8a^2-12a+6=2a^2(a^2-2a+1)+6a^2-12a+6=$$
$$=2a^2(a-1)^2+6(a-1)^2=(a-1)^2(2a^2+6)=$$
$$=(a-1)^2(a^4+2a^2+1)=(a-1)^2(a^2+1)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\sqrt{4-3\sqrt[4]{5}+2\sqrt{5}-\sqrt[4]{125}}}=\frac{4}{(a-1)(a^2+1)}=\frac{4(a+1)}{a^4-1}=\sqrt[4]{5}+1.$$

Комментарий. Читатели, знакомые с понятием комплексного числа, могут доказать, что если $P(x)$ — многочлен третьей степени с рациональными коэффициентами, то для любого натурального числа n число $N(\sqrt[4]{n}) = P(\sqrt[4]{n})P(-\sqrt[4]{n})P(i\sqrt[4]{n})P(-i\sqrt[4]{n})$ будет рациональным. На этом основан метод избавления от иррациональности в знаменателе по формуле $\frac{1}{P(\sqrt[4]{n})} = (N(\sqrt[4]{n}))^{-1}P(-\sqrt[4]{n})P(i\sqrt[4]{n})P(-i\sqrt[4]{n})$.

2. Сначала докажем, что если прямоугольник разрезан на 2, 3 или 4 прямоугольника, то один из получившихся прямоугольников можно накрыть другим. Для двух и трёх прямоугольников это очевидно, поскольку все способы такого разрезания сводятся к указанным на рис. 16.

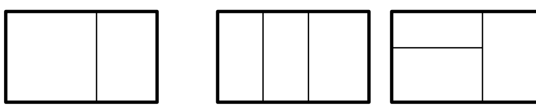


Рис. 16

Покажем, что если прямоугольник (будем называть его больши́м) разрезан на 4 прямоугольника, то одна из линий разреза проходит через весь большой прямоугольник, разрезая его на два прямоугольника («сквозной разрез»): тем самым мы сведём задачу к рассмотренным случаям разрезания на 2 или 3 прямоугольника.

В самом деле, если хотя бы один из четырёх прямоугольников примыкает к двум углам большого прямоугольника, то одна из его сторон и является линией сквозного разреза (см. рис. 17 слева). Если же к каждому углу большого прямоугольника примыкает ровно один прямоугольник, то рассмотрим любые два прямоугольника, примыкающие к соседним углам (см. рис. 17 справа). Они граничат по одной из сторон, причём если эти стороны равны, то мы сразу получаем искомый разрез.

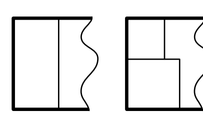


Рис. 17

Если же они различны, то имеется ровно один способ разрезать оставшуюся часть на два прямоугольника, примыкающих к углам большого прямоугольника, причём снова образуется сквозной разрез (см. рис. 18). Итак, для случая 4 прямоугольников утверждение доказано.

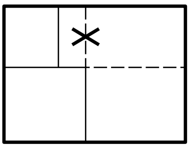
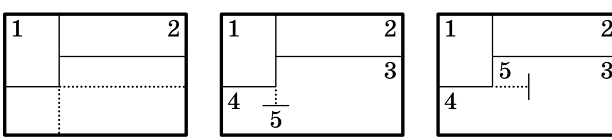


Рис. 18

Перейдём теперь к разрезанию на 5 прямоугольников. Если один из разрезов — сквозной, то мы сводим задачу к разрезанию одного из двух полученных меньших прямоугольников на 2, 3 или 4 прямоугольника.

Пусть теперь ни один из разрезов не является сквозным. Заметим, что тогда к каждой стороне примыкают не менее двух прямоугольников, причём хотя бы к одной стороне — ровно два. В самом деле, если к некоторой стороне примыкает лишь один прямоугольник, то одна из его сторон является линией сквозного разреза. Если же к каждой стороне примыкают не менее трёх прямоугольников, то общее число прямоугольников превосходит 5.



а) б) в)

Рис. 19

Рассмотрим теперь ту сторону большого прямоугольника, к которой примыкают ровно два из пяти прямоугольников. Стороны, по которым они граничат (см. рис. 19, а), имеют разную длину (иначе получится сквозной разрез). Назовём тот из этих прямоугольников, у которого длина граничащей стороны больше, первым, а оставшийся — вторым. Рассмотрим вершину первого прямоугольника, противоположную его вершине, являющейся общей с большим прямоугольником. Хотя бы один из разрезов, начатых по сторонам первого прямоугольника, должен продолжаться за эту вершину и упираться в сторону ещё одного прямоугольника. Если это разрез по стороне, являющейся общей для первого и второго прямоугольника, то общее число прямоугольников превысит 5 (рис. 19, б). Значит, это разрез, параллельный рассмотренной стороне большого прямоугольника. Проведём этот разрез (рис. 19, в). Поскольку при этом образуются как минимум три прямоугольника, обозначенные цифрами 3, 4 и 5, мы заключаем, что иных способов разрезать большой прямоугольник на 5 прямоугольников без сквозных разрезов не существует. Таким образом, все случаи сводятся к разрезанию, изображённому на рис. 20.

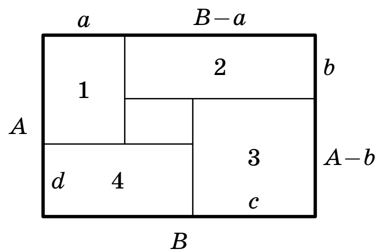


Рис. 20

Далее будем следовать обозначениям прямоугольников и длин их сторон на рис. 20. Без ограничения общности можно считать, что $a \leqslant c$. Если ни один из прямоугольников 1 и 3 нельзя накрыть другим, то $A-d > A-b$, откуда $b > d$. Далее, если ни один из прямоугольников 2 и 4 нельзя накрыть другим, то $B-a < B-c$, откуда $a > c$ — противоречие. Итак, в любом случае один из пяти прямоугольников можно накрыть другим.

3. Остатком от деления на 3 квадрата целого числа может быть только 0 или 1. В самом деле, если $n = 3q + r$, то $n^2 = 3(3q^2 + 2qr) + r^2$, а r^2 может равняться только 0, 1 или 4. Квадраты чисел 1, 2, 3, ..., 1982 при делении на 3 дают остатки 1, 1, 0, 1, 1, ..., 0, 1, 1. Сумма этих остатков равна $2\cdot\frac{1983}{3}=1322$; при делении на 3 это число даёт остаток 2. Записывание чисел в некотором порядке можно рассматривать как приписывание к этим числам достаточного количества нулей и последующее сложение (например, $16925=16000+900+25$). Приписывание к числу любого количества нулей не меняет остаток от деления этого числа на 3. Действительно,

$$n\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{k}=n\cdot\underbrace{9\ldots9}_{k}+n,$$

а первое слагаемое в правой части делится на 3. Следовательно, любое число, которое получается при возведении исходных чисел в квадрат и записывании их в произвольном порядке, при делении на 3 даёт остаток 2 и потому не является полным квадратом.

4. Пусть $ABCDE$ — заданный пятиугольник. Обозначим точки пересечения его диагоналей через A', B', C', D', E' (A' не лежит на диагоналях, выходящих из точки A, и т. д., см. рис. 21).

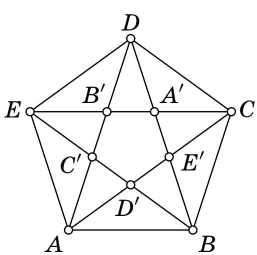


Рис. 21

Из условия следует, что $EDCD'$ и $DCBC'$ — параллелограммы. Поэтому

$$C'E=BE-BC'=BE-CD=$$
$$=BE-D'E=BD'.$$

Далее, в силу параллельности соответствующих прямых имеем $\triangle B'C'E\sim\triangle AC'B$ и $\triangle ED'C\sim\triangle BD'A$, поэтому

$$\frac{B'E}{AB}=\frac{C'E}{C'B}=\frac{BD'}{ED'}=\frac{AB}{CE}=\frac{AB}{CB'+B'E}=\frac{AB}{AB+B'E}=\frac{1}{1+\frac{B'E}{AB}}.$$

Обозначив $x=\frac{B'E}{AB}$, получаем уравнение $x=\frac{1}{1+x}$, откуда $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Отбрасывая отрицательный корень, получаем $\frac{CE}{AB}=1+\frac{B'E}{AB}=1+\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Очевидно, что отношения остальных диагоналей к противоположным сторонам равны тому же числу (достаточно переобозначить вершины пятиугольника и повторить проведённое доказательство).

Комментарий. Можно показать, что любой такой пятиугольник можно получить из правильного пятиугольника сжатием вдоль некоторого направления. Отметим, что число $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ называется *золотым сечением*. О нём и о его применении в архитектуре, живописи и математике имеется множество публикаций.

5. Доказательство проведём по индукции. Для $n=1$ неравенство принимает вид $a_1^7+a_1^5 \geqslant 2a_1^6$, что равносильно верному неравенству $a_1^5(a_1-1)^2 \geqslant 0$.

Предположив, что при $n=k$ неравенство справедливо, докажем его для $n=k+1$. Пусть $a_1<\ldots<a_k<a_{k+1}$ — произвольные натуральные числа. По предположению индукции выполнено неравенство $(a_1^7+\ldots+a_k^7)+(a_1^5+\ldots+a_k^5) \geqslant \geqslant 2(a_1^3+\ldots+a_k^3)^2$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned}(a_1^7+\ldots+a_k^7+a_{k+1}^7)+(a_1^5+\ldots+a_k^5+a_{k+1}^5)-2(a_1^3+\ldots+a_{k+1}^3)^2 =\\ = (a_1^7+\ldots+a_k^7)+(a_1^5+\ldots+a_k^5)+(a_{k+1}^7+a_{k+1}^5)-\\ -(2(a_1^3+\ldots+a_k^3)^2+2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(a_1^3+\ldots+a_k^3)) =\\ = \big((a_1^7+\ldots+a_k^7)+(a_1^5+\ldots+a_k^5)-2(a_1^3+\ldots+a_k^3)^2\big)+\\ +\big((a_{k+1}^7+a_{k+1}^5)-(2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(a_1^3+\ldots+a_k^3))\big).\end{aligned}$$

Выражение в первых больших скобках неотрицательно. Далее, поскольку рассматриваемые числа различны и известна формула для суммы кубов первых n натуральных чисел, получаем

$$\begin{aligned}2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(a_1^3+\ldots+a_k^3) \leqslant\\ \leqslant 2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3(1^3+2^3+\ldots+a_1^3+\ldots+a_k^3+\ldots+(a_{k+1}-1)^3) =\\ = 2a_{k+1}^6+4a_{k+1}^3\cdot\frac{1}{4}(a_{k+1}-1)^2a_{k+1}^2 = a_{k+1}^7+a_{k+1}^5.\end{aligned}$$

Следовательно, выражение во вторых больших скобках также неотрицательно. Неравенство доказано.

Равенство справедливо при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, ..., $a_n = n$. В этом можно убедиться, рассуждая по индукции и используя приведённые выкладки: нестрогие неравенства для $n = 1$ и $n = k + 1$ обратятся в равенства.

9 класс

1. Разделим число n на 6 с остатком: $n = 6q + r$, где q — целое неотрицательное число, $0 \leqslant r \leqslant 5$. Тогда

$$n \cdot 2^n = (6q + r)2^{6q+r} = 6q2^{6q+r} + (2^6)^q \cdot r \cdot 2^r.$$

Первое слагаемое в правой части делится на 3, а поскольку 2^6 даёт остаток 1 при делении на 3, число $n \cdot 2^n$ при делении на 3 даёт такой же остаток, как и $r \cdot 2^r$. Поэтому достаточно выяснить, при каких из шести значений r число $r \cdot 2^r + 1$ делится на 3. Этими значениями являются только 1 и 2, поэтому условию задачи удовлетворяют все натуральные числа n вида $6q + 1$ или $6q + 2$.

Комментарий. Задача содержится в книге [56, задача 26].

2. Обозначим заданные точки через A, B, C, D. Рассмотрим три случая.

Случай 1: четырёхугольник $ABCD$ выпуклый.

Тогда для любой точки M справедливы неравенства

$$MA + MC \geqslant AC \quad \text{и} \quad MB + MD \geqslant BD.$$

Складывая эти неравенства, получаем, что сумма расстояний от точки M до четырёх заданных точек не меньше $AC + BD$. Следовательно, точка пересечения диагоналей AC и BD является искомой: для неё сумма расстояний до четырёх вершин равна $AC + BD$, а для всех остальных точек эта сумма больше в силу неравенства треугольника.

Случай 2: четырёхугольник $ABCD$ невыпуклый. Тогда одна из точек, будем считать, что это точка D, лежит внутри или на стороне треугольника, образованного тремя остальными точками A, B и C. Пусть M — произвольная точка плоскости.

Рассмотрим лучи с вершинами в точке D, дополняющие лучи DA, DB и DC до соответствующих прямых (см. рис. 22). Эти лучи разбивают плоскость на три угла с вершинами в точке D. Точка M лежит внутри или на границе хотя бы одного из них. Без ограничения общности будем считать, что это угол, образованный лучами, дополняющими до прямых лучи DA и DB. Тогда точка D лежит внутри или на границе треугольника ABM. Следовательно, $AM+BM \geqslant AD+BD$, и равенство достигается только в случае совпадения точек M и D (подробно это доказано в решении задачи 4 для 7 класса в 1987 г.). С другой стороны, по неравенству треугольника имеем $CM+DM \geqslant CD$. Складывая эти два неравенства, получаем $AM+BM+CM+DM \geqslant AD+BD+CD$, где равенство достигается только в случае совпадения точек M и D. Значит, в этом случае искомой является точка D.

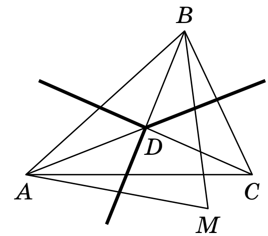


Рис. 22

Случай 3: заданные точки лежат на одной прямой. Будем считать без ограничения общности, что порядок их следования на прямой A, B, C, D. Заметим, что для любой точки плоскости, не лежащей на этой прямой, сумма расстояний от этой точки до точек A, B, C, D больше, чем сумма соответствующих расстояний от её проекции на рассматриваемую прямую. Следовательно, можно считать, что искомая точка лежит на этой прямой.

При любом расположении точки M на прямой сумма расстояний от неё до точек A и D не меньше длины отрезка AD, причём равенство достигается лишь при нахождении точки M на отрезке AD. Аналогичное утверждение справедливо и для суммы расстояний от точки M до точек B и C. Таким образом, искомой точкой будет любая точка M отрезка BC: для неё сумма $AM+BM+CM+DM$ равна $AD+BC$, а для любых точек, не лежащих на отрезке BC, эта сумма больше.

Комментарий. Эта задача предлагалась также на II туре Московской математической олимпиады в 1960 г. (см. книгу [40]). Отметим, что в случае, когда на плоскости даны n точек, всякая точка, сумма расстояний от которой до данных минимальна, лежит в их так называемой *выпуклой оболочке* (см. книгу [44]).

3. *Первый способ.* Предположим, что мы нашли такую точку A на координатной плоскости, что она удалена от всех точек с целочисленными координатами на различные расстояния. Это означает, что расстояния от A до этих точек можно расположить по возрастанию: $R_1 < R_2 < \ldots < R_{1982} < R_{1983} < \ldots$, где R_1 — расстояние до ближайшей точки, R_2 — до следующей и т. д. Тогда окружность с центром в точке A и произвольным радиусом R, где $R_{1982} < R < R_{1983}$, содержит внутри себя ровно 1982 точки с целочисленными координатами.

Остаётся указать хотя бы одну такую точку A. Пусть она имеет координаты (x, y). Рассмотрим квадраты расстояний от точек с целочисленными координатами (a, b) и (c, d) до точки A: $(a-x)^2+(b-y)^2$ и $(c-x)^2+(d-y)^2$. Разность этих выражений равна

$$a^2-c^2-2(a-c)x+b^2-d^2-2(b-d)y.$$

Для того чтобы эта разность равнялась нулю только при $a=c$ и $b=d$, достаточно в качестве x взять любое иррациональное число, например $\sqrt{2}$, а в качестве y — такое рациональное число, чтобы $2y$ не было целым, например $1/3$. В самом деле, при таком выборе если $a \neq c$, то рассматриваемая разность иррациональна, а значит, отлична от нуля, а если $a=c$, то эта разность равна $(b-d)(b+d-2y)$, т. е. обращается в нуль лишь при $b=d$. Итак, например, точка A $(\sqrt{2}; 1/3)$ удалена от всех точек с целочисленными координатами на различные расстояния.

Второй способ. Выберем произвольную точку плоскости в качестве центра окружности и будем непрерывно увеличивать её радиус. Назовём для краткости точки с целочисленными координатами *целыми точками*. Заметим, что при малых значениях радиуса внутрь окружности попадёт не более одной целой точки. Кроме того, можно так увеличить радиус, чтобы внутрь окружности попало более 1982 целых точек (например, взять радиус равным 1982). Если найдётся такое значение радиуса, при котором внутри окружности лежат ровно 1982 целые точки, то утверждение задачи доказано.

Пусть теперь это не так. Значит, для некоторого значения радиуса внутри окружности лежат $n < 1982$ целых точек, а на самой окружности лежат k целых точек, причём $n + k > 1982$. Выберем на окружности произвольные нецелые точки A и B таким образом, чтобы число целых точек на дуге $\omega = AB$ дополняло n до 1982. Тогда дуга ω есть геометрическое место точек полуплоскости относительно прямой AB, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом α (см. рис. 23), а дуга, смежная с ω, есть геометрическое место точек другой полуплоскости относительно прямой AB, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом $\pi - \alpha$. Зафиксируем произвольное положительное число $\varepsilon < \alpha$. Тогда геометрическое место точек полуплоскости относительно прямой AB, содержащей дугу ω, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом $\alpha - \varepsilon$, и геометрическое место точек другой полуплоскости относительно прямой AB, из которых отрезок AB виден под одним и тем же углом $\pi - \alpha + \varepsilon$, при добавлении точек A и B составляют новую окружность, содержащую внутри себя дугу ω и не содержащую дугу, смежную с ω. Тогда при малых значениях ε внутри новой окружности окажется ровно столько целых точек, чтобы удовлетворить условию задачи: а именно, добавятся только целые точки дуги ω, а все прежние внутренние целые точки сохранятся.

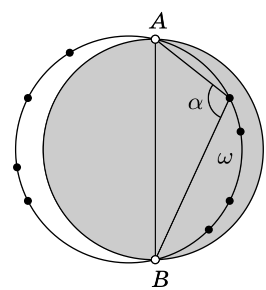


Рис. 23

К о м м е н т а р и й. Во втором способе используется следующий факт. Пусть AB — хорда окружности и ω — одна из дуг этой окружности с концами A и B. Обозначим угол, под которым видна хорда AB из любой внутренней точки дуги ω, через α. Тогда геометрическое место точек полуплоскости относительно прямой AB, содержащей дугу ω, из которых отрезок AB виден под углом, большим α, есть область, ограниченная хордой AB и дугой ω.

Справедливо общее утверждение: для любого натурального числа n на плоскости найдётся окружность, внутри которой лежат ровно n целых точек. Приведём подход к доказательству, отличный от двух, предложенных выше. Покажем сначала, что достаточно доказать наличие такой окружности, что на ней самой и внутри неё суммарно лежат n целых точек. В самом деле, пусть такая окружность нашлась и её радиус равен R. Увеличим радиус окружности, не меняя центр, так чтобы в кольцо между новой и старой окружностями попала хотя бы одна целая точка. Заметим, что количество таких точек не может быть бесконечным. Следовательно, существует минимальное расстояние от целых точек кольца до окружности радиуса R. Значит, увеличив радиус исходной окружности на это минимальное расстояние, мы получим, что внутри новой окружности окажутся ровно n целых точек.

Итак, остаётся доказать, что для любого натурального числа n на плоскости найдётся такая окружность, что на ней самой и внутри неё суммарно лежат n целых точек. Доказательство проведём по индукции. Для $n=1$ утверждение очевидно. Пусть оно доказано для n целых точек и ω — соответствующая окружность. Как было показано выше, существует наименьшее расстояние m до окружности ω от целых точек, лежащих вне неё. Выберем произвольную целую точку A, расположенную на расстоянии m от окружности ω, и проведём прямую через точку A и центр окружности ω. Обозначим наиболее удалённую от A точку пересечения этой прямой с окружностью ω через B (см. рис. 24). Покажем, что окружность, построенная на AB как на диаметре, такова, что на ней самой и внутри неё суммарно лежит ровно $n+1$ целая точка. В самом деле, все n точек, лежавших на окружности ω или внутри неё, лежат или на новой окружности (этой точкой может быть только B), или внутри неё. Из точек, лежавших вне окружности ω, только точка A попала на новую окружность, а остальные лежат вне новой окружности.

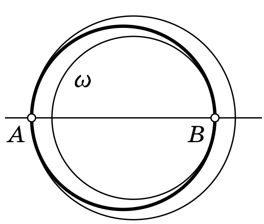


Рис. 24

Ещё одно доказательство утверждения задачи для любого количества точек содержится в книге [69, задача 24]. Более того, польский специалист по теории чисел А. Шинцель доказал также теорему о том, что существует окружность, проходящая *ровно через* n точек с целыми координатами (доказательство, доступное школьникам, изложено в статье [7]).

4. Заметим, что

$$9A = 10A - A = (1 + 0{,}2 + 0{,}03 + \ldots + (n+1)10^{-n} + \ldots) - \\ - (0{,}1 + 0{,}02 + \ldots + n10^{-n} + \ldots) = \\ = 1 + 0{,}1 + \ldots + 10^{-n} + \ldots = 1{,}(1) = \frac{10}{9}.$$

Следовательно, $A = \frac{10}{81}$. Выполняя деление в столбик, нетрудно видеть, что $A = 0{,}(123456790)$, поэтому в полученной записи не встретится ни одной цифры 8, и, тем более, подряд идущих цифр 1982.

Комментарий. Задача по существу совпадает с задачей 92 из книги [58] и состоит в суммировании бесконечной числовой последовательности, т. е. нахождении суммы числового ряда. Вопрос о нахождении сумм рядов различного вида представляет научный и практический интерес. В данном случае суммирование проведено элементарным методом. Методами математического анализа можно показать, что для любого $q > 1$ ряд $\frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \ldots + \frac{n}{q^n} + \ldots$ сходится к числу $\frac{q}{(q-1)^2}$.

5. Докажем сначала, что сумма длин диагоналей любого выпуклого четырёхугольника больше суммы длин любых его противолежащих сторон. В самом деле, обозначим длины противолежащих сторон через a и b, и пусть диагонали точкой пересечения делятся на отрезки длин d_1, d_2 и d_3, d_4 соответственно (см. рис. 25). Тогда справедливы неравенства $a < d_1 + d_3$, $b < d_2 + d_4$, складывая которые получаем требуемое утверждение.

Из доказанного факта вытекает, что противоположные стороны не могут быть равны 1, т. е. именно смежные стороны равны единице. Обозначим четырёхугольник через $ABCD$, причём $AB = BC = 1$. Тогда поскольку $AC \leqslant 1$, получаем, что $\angle ABC \leqslant 60^\circ$.

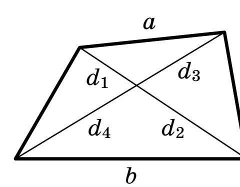


Рис. 25

Точка D лежит в секторе ABC круга единичного радиуса с центром в точке B. Если $BD < 1$, то мы можем заменить точку D на точку пересечения луча BD с окружностью: при этом периметр выпуклого четырёхугольника $ABCD$ увеличится (см. рис. 26). Следовательно, для того чтобы периметр был наибольшим, необходимо, чтобы точка D лежала на окружности. Итак, теперь $AB=BC=BD=1$. Пусть $\angle ABD=\alpha$, $\angle CBD=\beta$. Тогда, как показано выше, $\alpha+\beta\leqslant 60^\circ$. Проводя высоту к основанию AD равнобедренного $\triangle ABD$, получаем $AD=2\sin\frac{\alpha}{2}$. Аналогично $CD=2\sin\frac{\beta}{2}$, поэтому

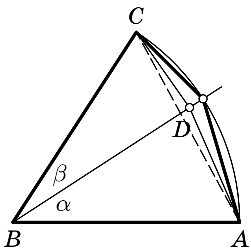


Рис. 26

$$AD+CD=2\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\beta}{2}=4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\leqslant 4\sin 15^\circ.$$

Равенство достигается при $\alpha=\beta=30^\circ$, в этом случае периметр четырёхугольника $ABCD$ равен $2+4\sin 15^\circ$. Ответ можно выразить через радикалы, записав $\sin 15^\circ$ как $\sin(45^\circ-30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Комментарий. Отметим, что в решении задачи 4 для 7 класса в 1987 г. доказано, что если два треугольника имеют общую сторону, а две другие стороны первого из них лежат внутри второго, то периметр первого треугольника меньше периметра второго. В данной задаче при сдвиге точки D мы имели дело с точно такой же ситуацией, поэтому соответствующие выкладки не приведены.

Известно и более сильное утверждение (см. [68, задача 86]). Назовём *диаметром четырёхугольника* наибольшую из длин его сторон и диагоналей. Тогда периметр любого выпуклого четырёхугольника с диаметром не больше 1 не превосходит $2+4\sin 15^\circ=3{,}035\ldots$, причём равенство достигается только для четырёхугольника, описанного в решении. Среди невыпуклых четырёхугольников с диаметром не больше 1 есть такие, у которых периметр равен $4-\varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, но нет таких, у которых периметр больше или равен 4. Таким образом, максимальное значение периметра для невыпуклых четырёхугольников не достигается.

10 класс

1. *Первый способ.* а) Докажем сначала, что из любой точки, лежащей внутри правильного тетраэдра, хотя бы одно его ребро видно под неострым углом.

В самом деле, пусть из точки M все рёбра тетраэдра $ABCD$ видны под острым углом. Проведём через точку M плоскость π, ортогональную прямой AM (см. рис. 27). Поскольку $\angle AMB$ острый, ребро AB целиком лежит в том же полупространстве относительно плоскости π, что и вершина A. Аналогично получаем, что этим свойством обладают рёбра AC и AD, поэтому тетраэдр $ABCD$ целиком лежит в одном полупространстве относительно плоскости π. Но точка M принадлежит плоскости π, а значит, не может лежать внутри тетраэдра $ABCD$, противоречие.

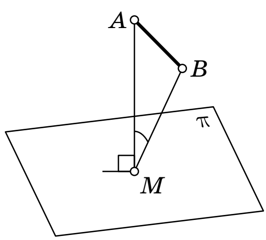


Рис. 27

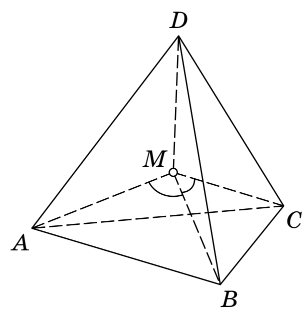


Рис. 28

Пусть теперь M — некоторая точка внутри правильного тетраэдра $ABCD$, из которой все его рёбра видны под углом α. В силу доказанного утверждения, α прямой или тупой. Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle CBM$ (см. рис. 28). У них сторона BM общая, $AB = BC$ и $\angle AMB = \angle BMC$. По теореме синусов получаем

$$\frac{BM}{\sin \angle MAB} = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{BM}{\sin \angle MCB}.$$

Значит, в обоих треугольниках синусы углов, лежащих напротив стороны BM, совпадают. Но эти углы острые, следовательно, они равны. Таким образом, равны и оставшиеся углы: $\angle ABM = \angle CBM$, поэтому $\triangle ABM = \triangle CBM$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников следует, что $AM = CM$. Аналогично устанавливается равенство расстояний от точки M до любой пары вершин тетраэдра. Значит, все четыре расстояния равны, поэтому точка M — центр описанной около тетраэдра сферы.

б) Пусть точка M лежит вне тетраэдра и из неё все его рёбра видны под равными углами. Обозначим вершины тетраэдра A, B, C, D так, чтобы среди отрезков AM, BM, CM, DM отрезок DM имел наименьшую длину. Докажем, что $AM = BM = CM$. Предположим, что, например, $BM > CM$ (см. рис. 29). Поскольку рёбра BD и CD видны из точки M под равными углами, можно повернуть плоскость MDC вокруг прямой MD так, чтобы точка C перешла в точку C' отрезка BM, для которой $C'M = CM$. Тогда $\triangle C'MD = \triangle CMD$ по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $\triangle C'DB$ равнобедренный ($C'D = CD = BD$), поэтому $\angle DC'M$ тупой, а значит, $C'M = CM < DM$; противоречие.

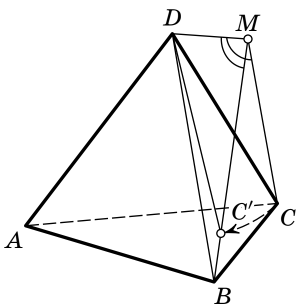


Рис. 29

Итак, $AM = BM = CM > DM$. Следовательно, ортогональная проекция точки M на плоскость ABC совпадает с центром O окружности, описанной около $\triangle ABC$. Это означает, что точка M лежит на прямой, проходящей через точку O перпендикулярно плоскости ABC. Без ограничения общности можно считать, что рёбра тетраэдра равны 1. Тогда радиус окружности, описанной около любого основания, равен $\frac{1}{\sqrt{3}}$, а высота тетраэдра равна $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$. В частности, для $\triangle AOD$ получаем $AO = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $OD = \sqrt{\frac{2}{3}}$, поэтому $\angle OAD > \angle ODA$. Покажем, что точка M не может лежать на луче с началом O, перпендикулярном плоскости ABC и не проходящем через тетраэдр (см. рис. 30). В самом деле, иначе $\angle MAD > \angle OAD > \angle ODA = \angle MDA$, откуда $AM < DM$, что неверно.

Следовательно, точка M может лежать только на луче с началом D, перпендикулярном плоскости ABC и не проходящем через тетраэдр. Приведём два варианта дальнейших рассуждений, приводящих к противоречию.

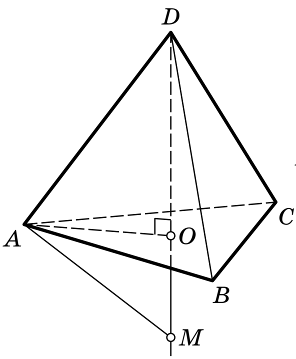


Рис. 30

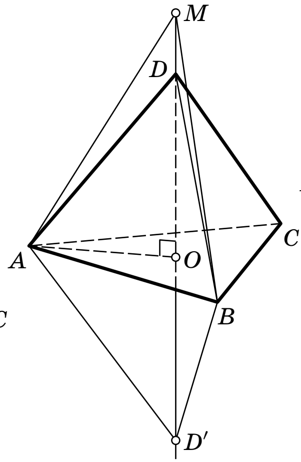


Рис. 31

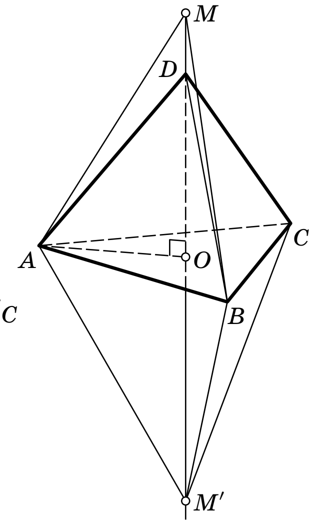


Рис. 32

Первый вариант. Поскольку рёбра AB и AD видны из точки M под равными углами, можно повернуть плоскость ABM вокруг прямой AM так, что прямая BM совместится с прямой DM. При этом точка B перейдёт в некоторую точку D', лежащую на прямой DM и отличную от D, так как $D'M = BM > DM$. Поскольку $AD' = AB = AD$, точка D' симметрична D относительно O (см. рис. 31). С одной стороны, $BM < BD + DM$, а, с другой стороны, $BM = D'M = D'D + DM$, поэтому $D'D < BD$. Но $D'D = 2\sqrt{\frac{2}{3}} > 1 = BD$.

Второй вариант. Если точка M лежит на луче с началом D, перпендикулярном плоскости ABC и не проходящем через тетраэдр, то симметричная ей относительно плоскости ABC точка M' (см. рис. 32) лежит на рассмотренном выше луче с началом O, перпендикулярном плоскости ABC и не проходящем через тетраэдр. При этом $\angle AM'B = \angle AM'C = \angle BM'C = \angle AMB$ в силу симметрии и $\angle AM'D = \angle AMD = \angle BM'D = \angle CM'D$, так как треугольники AMM', BMM' и CMM' равнобедренные. Это означает, что из точки M' все рёбра тетраэдра видны под одним и тем же углом, но, как доказано выше, на рассматриваемом луче с началом O такой точки M' быть не может.

Итак, вне тетраэдра искомой точки не существует.

Второй способ. Пусть из точки M все рёбра тетраэдра $ABCD$ видны под одним и тем же углом φ. Введём обозначения $\vec{e}_1 = \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$, $\vec{e}_2 = \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}$, $\vec{e}_3 = \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$, $\vec{e}_4 = \frac{\overrightarrow{MD}}{MD}$. Тогда все четыре вектора имеют единичную длину, причём $(\vec{e}_i - \vec{e}_j)^2 = 2 - 2(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = 2 - 2\cos\varphi$ при $i \neq j$. Отложим от точки M векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, $\vec{e}_4$. Если соединить отрезками концы этих векторов, то получим правильный тетраэдр со стороной $|\vec{e}_i - \vec{e}_j| = \sqrt{2 - 2\cos\varphi}$, причём точка M удалена от всех его вершин на одинаковое расстояние (равное 1). Значит, точка M — центр сферы, описанной около этого тетраэдра. Покажем, что $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4 = \vec{0}$. При повороте на 120° вокруг прямой MD векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ переходят последовательно друг в друга, а вектор $\vec{e}_4$ переходит в себя. Следовательно, вектор $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4$ также переходит в себя, а значит, параллелен прямой MD. Аналогично доказывается, что этот вектор параллелен прямой MA. Но прямые MA и MD не параллельны, поэтому рассматриваемый вектор равен нулю.

Таким образом,

$$0 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 + \vec{e}_4)^2 = 4 + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_3) + 2(\vec{e}_1, \vec{e}_4) + \\ + 2(\vec{e}_2, \vec{e}_3) + 2(\vec{e}_2, \vec{e}_4) + 2(\vec{e}_3, \vec{e}_4) = 4 + 12\cos\varphi.$$

Значит, $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$. Итак, если из некоторой точки все рёбра (произвольного!) тетраэдра видны под одинаковыми углами, то этот угол равен $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Воспользуемся теперь тем, что $ABCD$ — правильный тетраэдр. Имеем

$$(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC})^2 = AC^2 = BC^2 = (\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC})^2;$$

$$MA^2+MC^2-2(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}) = MB^2+MC^2-2(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC});$$

$$MA^2-MB^2+\frac{2}{3}MA\cdot MC-\frac{2}{3}MB\cdot MC=0;$$

$$(MA-MB)\left(MA+MB+\frac{2}{3}MC\right)=0,$$

поэтому $MA=MB$. Аналогично доказывается, что $MB=$ $=MC$ и $MC=MD$.

Итак, нами показано, что единственной точкой в пространстве, из которой все рёбра правильного тетраэдра видны под одинаковыми углами, является центр описанной около него сферы.

Комментарий. Первый способ содержит доказательство *признака равенства неостроугольных треугольников*: если две стороны и некоторый угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и некоторому углу другого треугольника, причём упомянутый угол неострый, то треугольники равны.

Второй способ предложен на олимпиаде её участником — Олегом Чалых, который в 1981/82 учебном году был учеником 10 класса ФМШ № 18 при МГУ (ныне СУНЦ МГУ). Отметим, что оба пункта задачи верно решили всего трое из 312 участников олимпиады в параллели 10 классов.

Может показаться очевидным, что геометрическое место точек в пространстве, из которых стороны данного правильного треугольника видны под равными углами есть перпендикуляр, восстановленный к плоскости треугольника в его центре. Тогда решение существенно упростилось бы. Однако этот факт неверен. Помимо точек на этом перпендикуляре, в указанное геометрическое место точек входят ещё точки, лежащие на трёх довольно сложных кривых в плоскостях симметрии данного треугольника. Читатель может попробовать сам получить уравнения этих кривых.

Можно доказать, что если точка лежит внутри тетраэдра, то хотя бы одно из его рёбер видно из неё под углом, косинус которого не меньше $-1/3$, и хотя бы одно ребро видно под углом, косинус которого не больше $-1/3$ (см., например, книгу [16], задачи 585 и 435). Последняя из этих задач предлагалась девятиклассникам на Всесоюзной олимпиаде 1982 г. (см. задачу 334 в книге [10]).

2. а) Пусть S — площадь треугольника, p — его полупериметр, а R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно. Тогда

$$\begin{aligned}
a^4+b^4+c^4-2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) = \\
&= a^4-a^2(2b^2+2c^2)+(b^2-c^2)^2 = \\
&= a^4-a^2((b+c)^2+(b-c)^2)+(b+c)^2(b-c)^2 = \\
&= (a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2) = \\
&= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c) = \\
&= 2p\cdot 2(a-p)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c) = \\
&= -16p(p-a)(p-b)(p-c) = -16S^2.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$a^2bc+b^2ac+c^2ab = abc(a+b+c) = 4RS\cdot 2p = 8pRS.$$

Таким образом, неравенство из условия задачи равносильно тому, что $-16S^2+8pRS \geqslant 0$, или $pR \geqslant 2S = 2pr$, т. е. $R \geqslant 2r$.

Докажем, что для произвольного треугольника выполнено неравенство $R \geqslant 2r$. Рассмотрим треугольник, образованный средними линиями. Он подобен исходному с коэффициентом $1/2$, поэтому радиус описанной вокруг него окружности равен $R/2$. Заметим, что эта окружность имеет хотя бы одну общую точку с каждой стороной исходного треугольника. Покажем, что её радиус не меньше r. В самом деле, пусть h_a, h_b и h_c — расстояния от центра этой окружности до соответствующей стороны треугольника. Тогда каждое из этих расстояний не больше $R/2$, а площадь S всего треугольника, с одной стороны, равна pr, а с другой стороны,

$$S = \frac{1}{2}(ah_a+bh_b+ch_c) \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{R}{2}\cdot(a+b+c) = p\frac{R}{2}.$$

Значит, $r \leqslant R/2$.

б) Обозначим левую часть неравенства через $f(a, b, c)$ и разложим её на множители, пользуясь результатами п. а). Получим

$$f(a, b, c) = (a+b+c)(abc-(b+c-a)(a+c-b)(b+a-c)).$$

Заметим, что среди чисел $b+c-a$, $a+c-b$, $b+a-c$ имеется не более одного отрицательного: например, если $a+b-c<0$ и $b+c-a<0$, то $2b<0$ — противоречие. Если отрицательно ровно одно из этих чисел, то их произведение неположительно и поэтому $f(a, b, c) \geqslant 0$. Если же все они неотрицательны, т. е. $b+c-a \geqslant 0$, $a+c-b \geqslant 0$, $b+a-c \geqslant 0$, то, попарно перемножая эти неравенства, получим $a^2-(b-c)^2 \geqslant 0$, $b^2-(a-c)^2 \geqslant 0$, $c^2-(a-b)^2 \geqslant 0$ (например, $(b+c-a)(a+c-b) = (c-(a-b))(c+(a-b)) = c^2-(a-b)^2$). Заменяя в произведении $a^2b^2c^2$ каждый квадрат на не превосходящую его разность, получаем

$$a^2b^2c^2 \geqslant (a^2-(b-c)^2)(b^2-(a-c)^2)(c^2-(a-b)^2) = \\ = (b+c-a)^2(a+c-b)^2(b+a-c)^2,$$

следовательно, $abc-(b+c-a)(a+c-b)(b+a-c) \geqslant 0$, откуда $f(a, b, c) \geqslant 0$ при любых неотрицательных a, b, c.

Комментарий. Неравенство $R \geqslant 2r$, как и формула $d^2 = R(R-2r)$ (d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей), из которой оно сразу же следует, носят имя Леонарда Эйлера, опубликовавшего их в 1767 г. Однако поскольку несколько раньше те же результаты появились в эссе Уильяма Чаппла, равенство $d^2 = R(R-2r)$ называют также формулой Эйлера—Чаппла.

3. а) Обозначим $\varphi(x, y) = xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$. Поскольку

$$f_n(x) = x^n + \ldots + x + 1 = x(x^{n-1} + \ldots + x + 1) + 1 = \\ = xf_{n-1}(x) + 1 = \varphi(f_{n-1} - 1, x-1) + 1,$$

достаточно научиться вычислять $x-1$, а затем последовательно применять это соотношение. Таким образом, программа такова:

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = 0; \quad f_3(x) = \varphi(x,\, 0) = x+1;$$
$$f_4(x) = -\frac{3}{2}; \quad f_5(x) = \varphi(f_1(x),\, f_4(x)) = -\frac{1}{2}(x+1);$$
$$f_6(x) = -3; \quad f_7(x) = \varphi(f_5(x),\, f_6(x)) = x-1;$$
$$f_8(x) = \varphi(f_1(x),\, f_7(x)) = x^2+x;$$
$$f_9(x) = \varphi(f_8(x),\, f_7(x)) = x^3+x^2+x;$$
$$f_k(x) = \varphi(f_k(x),\, f_7(x)) = x^{k-6}+\ldots+x^2+x \text{ при } k=9,\, \ldots,\, 1988;$$
$$f_{1989}(x) = \varphi(f_{1988}(x),\, f_2(x)) = x^{1982}+\ldots+x^2+x+1.$$

б) Пусть $g_1,\, g_2,\, \ldots,\, g_n$ — произвольная программа. Индукцией по n докажем, что если многочлен g_n отличен от постоянной, то $g_n(-1)=-1$.

Для $n=1$ это очевидно: $g_1(x)=x$. Далее, $g_n=g_ig_j+g_i+g_j$ $(i,\, j<n)$, и, например, многочлен g_i отличен от постоянной. Тогда $g_i(-1)=-1$ (предположение индукции) и $g_n(-1)=$ $=-g_j(-1)-1+g_j(-1)=-1$, что и требовалось доказать.

Если $g_n=f_n$, то должно выполняться равенство $f_n(-1)=$ $=-1$, но $f_n(-1)=1+(-1)+\ldots+(-1)^{1982}$, поэтому $f_n(-1)=$ $=0$. Полученное противоречие доказывает, что для $f_n(x)$ искомой программы (с указанной операцией калькулятора) не существует.

Комментарий. Заметим, что многочлен $x+a$ при любом $a\neq 1$ вычисляется по следующий программе:

$$f_1(x) = x; \quad f_2(x) = \frac{2-a}{a-1}; \quad f_3(x) = a-2;$$
$$f_4(x) = \varphi\Big(x,\, \frac{2-a}{a-1}\Big) = (x+1)\Big(\frac{2-a}{a-1}+1\Big) = \frac{x+1}{a-1};$$
$$f_5(x) = \varphi\Big(\varphi\Big(x,\, \frac{2-a}{a-1}\Big),\, a-2\Big) = \Big(\frac{x+1}{a-1}+1\Big)(a-1) = x+a.$$

Отметим также, что «программа» в решении п. а) фактически использует так называемую *схему Горнера*. Кроме того, можно доказать, что все многочлены, вычислимые на калькуляторе с операцией $\varphi(x,\, y)=xy+x+y$, имеют вид $F_n(x)=A(x+1)^n-1$, и любой многочлен этого вида вычисли́м с помощью такого калькулятора.

4. Заметим, что $n=1$ удовлетворяет условию задачи. При $n>1$ число $1/n$ можно представить в виде конечной десятичной дроби тогда и только тогда, когда в разложении n на простые множители нет простых чисел, отличных от 2 и 5. Поскольку числа n и $n+1$ взаимно простые, при $n>1$ получить конечные десятичные дроби можно, только если одно из этих чисел равно степени двойки, а другое — степени пятёрки. Это означает, что либо $n=2^k$ и выполнено равенство $2^k+1=5^t$, либо $n=5^k$ и выполнено равенство $5^k+1=2^t$ (k, t — некоторые натуральные числа).

Пусть $2^k+1=5^t$ и $t=2^m s$, где m — неотрицательное целое число и натуральное число s нечётно. Если $s\geqslant 3$, то

$$2^k = 5^t-1 = (5^{2^m})^s-1 = (5^{2^m}-1)(5^{2^m(s-1)}+5^{2^m(s-2)}+\ldots+1).$$

Сумма в последних скобках больше единицы и состоит из нечётного числа нечётных слагаемых, поэтому она нечётна. Поскольку единственный нечётный делитель двойки равен 1, получаем противоречие. Значит, $s=1$. Далее, если $m\geqslant 1$, разложим на множители

$$2^k = 5^{2^m}-1 = (5-1)(5+1)(5^2+1)\cdot\ldots\cdot(5^{2^{m-1}}+1).$$

Число $5+1=6$ не является степенью двойки, поэтому $m=0$. Это соответствует равенству $2^2+1=5$, т. е. мы получили ещё одно значение $n=4$.

Рассмотрим теперь уравнение $5^k+1=2^t$. Из него следует, что число 2^t оканчивается на 6, поэтому $t=4l$, где l — некоторое натуральное число. Значит,

$$5^k = 2^{4l}-1 = (2^{2l}-1)(2^{2l}+1).$$

Но числа $2^{2l}-1$ и $2^{2l}+1$ не могут одновременно делиться на 5, поскольку их разность равна 2. Это означает, что искомых значений n, помимо найденных, не существует.

Комментарий. Как мы видим, диофантовы уравнения $2^x\pm 1=5^y$ решаются достаточно просто. Отметим, что доказательство единственности решения $(x, y, z, t)=(3, 2, 2, 3)$ уравнения Каталана $x^y-z^t=1$ в натуральных числах, больших единицы, заняло полтора века (см., например, [55]).

5. Обозначим малый шестиугольник через $\mathbb{L}$, большой шестиугольник — $\mathbb{M}$, его центр — O. Предположим, что точка O лежит вне $\mathbb{L}$. Тогда существует такая сторона AB шестиугольника $\mathbb{L}$, что шестиугольник $\mathbb{L}$ и точка O лежат по разные стороны от прямой AB. Пусть CD — сторона шестиугольника $\mathbb{L}$, параллельная AB. Прямая CD удалена от точки O на расстояние, большее расстояния между сторонами AB и CD (см. рис. 33), которое равно диаметру окружности, вписанной в $\mathbb{L}$, т. е. радиусу окружности S, вписанной в $\mathbb{M}$. Следовательно, отрезок CD лежит вне окружности S. Если же точка O лежит на стороне шестиугольника $\mathbb{L}$, то аналогичное рассуждение позволяет установить, что отрезок CD лежит вне окружности S, за исключением, быть может, одной общей точки с окружностью.

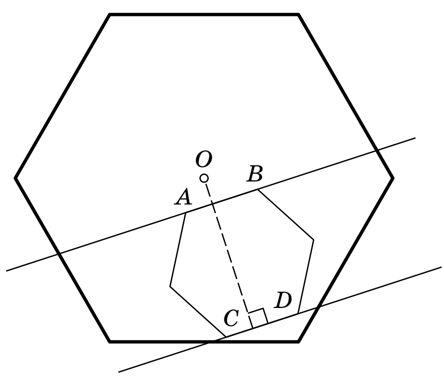


Рис. 33

Таким образом, отрезок CD расположен в области, ограниченной отрезками PE и PF смежных сторон шестиугольника $\mathbb{M}$ и меньшей дугой EF окружности S, возможно, с выходом на границу EF этой области (см. рис. 34). Покажем, что тогда его длина строго меньше PE.

Действительно, если отрезок CD не имеет общей точки с дугой EF, то при помощи гомотетии с центром P и коэффициентом больше 1 его можно перевести в отрезок, по-прежнему лежащий в рассматриваемой области, но имеющий общую точку N с дугой EF.

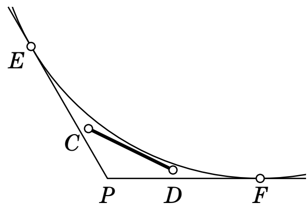


Рис. 34

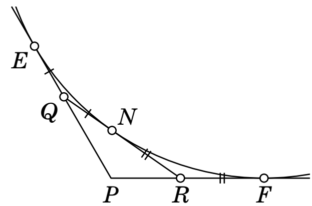


Рис. 35

Проведём через точку N касательную QR к окружности (точки Q и R лежат на отрезках PE и PF соответственно). Тогда отрезок CD лежит внутри треугольника PQR или на его наибольшей стороне стороне QR, поэтому его длина не превосходит QR. Отрезки PQ и PR меньше PE, а

$$QR < (QR+PQ+PR)/2 = (QN+RN+PQ+PR)/2 = PE,$$

поскольку $QN=QE$, $RN=RF$ и $PE=PF$ по свойству касательных, проведённых из одной точки (см. рис. 35). Таким образом, мы доказали, что $CD \leqslant QR < PE$.

Остаётся заметить, что отрезок PE равен половине стороны шестиугольника $\mathbb{M}$, т. е. стороне шестиугольника $\mathbb{L}$. Значит, $PE=CD$. Полученное противоречие означает, что точка O не может лежать ни вне, ни на границе шестиугольника $\mathbb{L}$.

К о м м е н т а р и й. Приведённое рассуждение нетрудно распространить на случай произвольного правильного $2n$-угольника. Для шестиугольника эту задачу называют также задачей о гайке, см. [52]. Заметим, что для $(2n+1)$-угольников утверждение задачи неверно. Добавим также, что если в правильном $2n$-угольнике с единичной стороной расположены два непересекающихся правильных $2n$-угольника со сторонами a и b, то $a+b<1$. В частном случае $a=1/2$ это немедленно следует из данной задачи, и может быть доказано аналогично в общем случае. При $n=4$ это утверждение превращается в известную теорему Эрдёша о двух непересекающихся квадратах в квадрате (см. задачу 166 в книге [30]).

Задача оказалась самой трудной на олимпиаде: правильно её не решил никто.

1983 год (XLVI олимпиада)

7 класс

1. Представим правую часть уравнения в виде $(y+1)^2+$ $+12$, перенесём $(y+1)^2$ в левую часть и разложим её на множители. Уравнение примет вид

$$(x-y-1)(x+y+1)=12.$$

Поскольку разность множителей $x-y-1$ и $x+y+1$ равна чётному числу $2y+2$, эти множители имеют одинаковую чётность, а так как произведение рано 12, оба они должны быть чётными. Следовательно, один из множителей равен ± 2, а другой равен ± 6. Сложив множители, получим $2x=\pm 8$, откуда $x=\pm 4$. Для обоих значений x находим $y=1$ или $y=-3$.

Комментарий. Решение основано на общеизвестной идее разложения на множители, применяемого для решения уравнений в целых числах (диофантовых уравнений). Отметим, что для диофантовых уравнений второй степени создана полная теория, посвящённая их решению (см, например, [26], [57]), чего нельзя сказать об уравнениях третьей и более высоких степеней. Геометрический смысл таких задач — найти все целые точки на данной кривой второго порядка. В рассмотренном случае это гипербола. Количество целых точек на ней может быть как конечным (например, нулевым в случае $x^2=y^2+2y+3$, так как уравнение $(x-y-1)(x+y+1)=2$ не имеет целочисленных решений), так и бесконечным (в частности, для уравнения Пелля — Ферма $x^2=2y^2+1$, см., например, [54]).

2. Рассмотрим на плоскости произвольный правильный треугольник со стороной l. У него есть две вершины одного цвета. Отрезок, соединяющий эти вершины, искомый.

Комментарий. Аналогичные задачи неоднократно предлагались на различных олимпиадах. Например, в задаче 320 из сборника [2] требуется доказать также и наличие на данном расстоянии точек разного цвета.

3. Обозначим искомое число через $X=\overline{4ab\ldots c}=4\cdot 10^n+$ $+A$, где $A=\overline{ab\ldots c}$ — n-значное число. После перестановки первой цифры в конец получаем число $Y=\overline{ab\ldots c4}=10A+4$. По условию

$$4\cdot 10^n + A = 4(10A+4),$$

откуда $39A=4\cdot\underbrace{9\ldots9}_{n-1}6$, т. е. $13A=4\cdot\underbrace{3\ldots3}_{n-1}2$. При $n\leqslant 4$ правая часть не делится на 13, поэтому равенство невозможно. При $n=5$ получаем наименьшее значение $A=4\cdot\dfrac{33332}{13}=$ $=10256$. Следовательно, наименьшее значение X равно 410256.

4. Можно считать, что велосипед попал в соседний город, а не был оставлен друзьями на дороге, так как иначе друг, который оставил его последним, добрался бы до соседнего города медленнее, чем на велосипеде. Также без ограничения общности будем считать, что никто из друзей не ехал на велосипеде в обратную сторону. Пусть суммарное расстояние, которое второй друг проехал на велосипеде, равно x ($x\leqslant A$), тогда он затратил на дорогу время, большее либо равное $x/v_2+(A-x)/u_2$. Второй друг проехал на велосипеде расстояние $A-x$ и, следовательно, затратил на дорогу время, большее либо равное $x/u_1+(A-x)/v_1$. Для каждого из друзей указанное минимально возможное время есть линейная функция от x, причём коэффициенты при x в них равны $1/u_1-1/v_1$ и $1/v_2-1/u_2$ соответственно.

Поскольку $v_1>u_1$ и $v_2>u_2$, первая из этих функций возрастает, а вторая убывает. Кроме того, по условию задачи каждый из друзей едет на велосипеде быстрее, чем другой из них идёт пешком. Тогда $A/u_2>A/v_1$ и $A/v_2<$ $<A/u_1$, поэтому графики пересекаются на интервале $(0;A)$ (см. рис. 36). График функции макси-

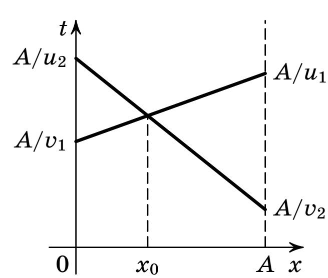


Рис. 36

мума состоит из двух отрезков, причём минимум этой функции достигается в точке с абсциссой x_0. Приравнивая значения линейных функций, получаем

$$x_0 = \frac{A/u_2 - A/v_1}{1/u_1 + 1/u_2 - 1/v_1 - 1/v_2}.$$

Подставляя это число в любую из двух функций и упрощая полученные рациональные выражения, находим минимальное возможное время

$$\frac{A(v_1v_2 - u_1u_2)}{v_1v_2(u_1+u_2) - u_1u_2(v_1+v_2)}.$$

Заметим, что указанный минимум достигается, например, для двух отрезков длин x_0 и $A - x_0$, т. е. если первый друг сначала идёт пешком, а второй едет и в конце отрезка оставляет велосипед, потом идёт пешком до конца пути, а второй, дойдя до конца первого отрезка, подбирает велосипед и до конца пути едет на нём, то при выбранном x_0 друзья доберутся до соседнего города одновременно.

5. Предположим, что такой пятиугольник $ABCDE$ существует. Без ограничения общности можно считать, что $AB = 3$. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 и E_1 — точки касания вписанной в этот пятиугольник окружности со сторонами AB, BC, CD, DE и EA соответственно (см. рис. 37).

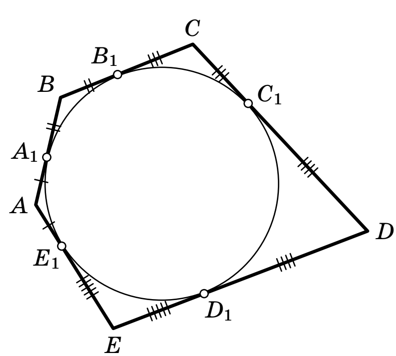


Рис. 37

Из равенства отрезков касательных следует, что $2AA_1 = AA_1 + AE_1 = AB - A_1B + EA - EE_1 = AB - BB_1 + EA - D_1E = AB - BC + CC_1 + EA - DE + C_1D = AB - BC + CD - DE + EA$. Следовательно, $2BA_1 = 2AB - 2AA_1 = AB + BC - CD + DE - EA$. Таким образом, $2AA_1 = AB - s$, $2BA_1 = AB + s$, где $s = BC - CD + DE - EA$. Отсюда заключаем, что $|s| < AB = 3$. С другой стороны, нетрудно видеть, что сумма любых двух чисел из набора 4, 9, 11, 13 отличается от суммы двух оставшихся чисел как минимум на 3, т. е. $|s|$ не может быть меньше трёх. Следовательно, такого пятиугольника не существует.

Комментарий. Можно привести и несколько иное решение, доказав сначала, что если в такой пятиугольник можно вписать окружность, то стороны длин 11 и 13 должны лежать рядом.

8 класс

1. Умножив левую часть на $x+y$, получим x^5+y^5. Поскольку $x>\sqrt{2}$ и $y>\sqrt{2}$, имеем

$$x^5+y^5 > 2(x^3+y^3) = 2(x+y)(x^2-xy+y^2) = \\ = (x+y)(x^2+y^2+(x-y)^2) \geqslant (x+y)(x^2+y^2).$$

2. Заметим, что

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA_1}, \quad \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB_1}, \quad \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC_1}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{CA_1} + \overrightarrow{BC_1}).$$

Сумма векторов в первых скобках равна $\vec{0}$. Кроме того, каждый вектор во вторых скобках получается из соответствующего вектора в первых скобках поворотом на 60° вокруг его начала во внешнюю часть треугольника, а значит, из этих векторов можно составить треугольник. Отсюда следует, что и сумма векторов во вторых скобках равна $\vec{0}$.

3. Рассмотрим число $10^{1984}-5$. Его квадрат

$$(10^{1984}-5)^2 = 10^{2\cdot 1984} - 10\cdot 10^{1984} + 25 = \underbrace{99\ldots 99}_{1983}\underbrace{00\ldots 0}_{1983}25$$

начинается с 1983 девяток.

Комментарий. Можно показать, что подходит любое число, у которого первые 1983 цифры — девятки, а 1984-я цифра не меньше 5. Отметим, что квадрат целого числа может начинаться с любой комбинации цифр, причём не только квадрат, но и куб, четвёртая степень и т. д. (см. [25, задача 16.26]). Добавим, что вопрос о численном значении квадратного корня из числа вида $0{,}99\ldots 9$ поднимался в первой задаче для 8 класса второго тура Московской математической олимпиады 1952 г. (см. [39, с. 43]).

4. Проведём ось симметрии через вершину с номером 1983 и будем считать, что она вертикальна, причём вершина 1983 лежит на верхней полуокружности (см. рис. 38). Ось симметрии разбивает окружность на левую и правую половины. Назовём номером вершины находящееся в ней число. Номера вершин на левой половине обозначим (отсчитывая от вершины 1983 против часовой стрелки) через a_1, a_2, ..., a_{990}, a_{991}, а номера симметричных им вершин — буквами b_i с теми же индексами. Пусть $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, ..., $a_{990} > b_{990}$, $a_{991} > b_{991}$. Проведём теперь ось симметрии через вершину b_{991} (она пройдёт между вершинами 1983 и a_1). Поскольку расстановка «хорошая» относительно и этой оси, а $1983 > a_1$, то $b_1 > a_2$, $b_2 > a_3$, ..., $b_{989} > a_{990}$,

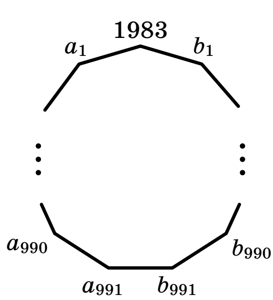


Рис. 38

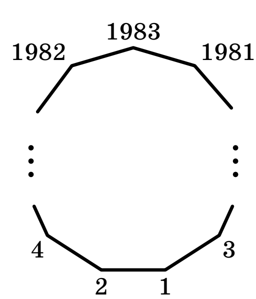


Рис. 39

$b_{990} > a_{991}$. Соединяя эти и предыдущие неравенства в одну цепочку, получаем: $1983 > a_1 > b_1 > a_2 > b_2 > \ldots > a_{990} > > b_{990} > a_{991} > b_{991}$. Отсюда полностью определяется вся расстановка: $a_1 = 1982$, $b_1 = 1981$, ..., $a_{990} = 4$, $b_{990} = 3$, $a_{991} = 2$, $b_{991} = 1$ (см. рис. 39).

Остаётся лишь проверить, что эта расстановка является «хорошей» относительно любой оси симметрии. Правильный 1983-угольник имеет ровно 1983 оси симметрии, каждая из которых проходит через одну из его вершин и центр 1983-угольника. Для осей симметрии, проходящих через вершины 1 и 1983 утверждение верно. Рассмотрим ось симметрии, проходящую через одну из вершин 2, 4, ..., 1982. Будем двигаться от этой вершины в обоих направлениях с одинаковой скоростью и сравнивать встречающиеся числа. Сначала при движении против часовой стрелки номера вершин будут уменьшаться, а при движении по часовой стрелке — увеличиваться. После того как мы встретим одно из чисел 1 или 1983, числа на обеих половинах станут одновременно увеличиваться на 2 (если первой встретилась 1) или уменьшаться на 2 (если первым встретилось 1983). Наконец, после того как нам встретится второе из чисел 1 или 1983, оба числа окажутся на правой половине многоугольника. Таким образом, номера всех вершин, лежащих на той половине многоугольника, которая содержит вершину с номером 1, меньше соответствующих номеров вершин, лежащих на половине многоугольника, которая содержит вершину с номером 1983. Случай оси симметрии, проходящей через одну из вершин 3, 5, ..., 1981 рассматривается совершенно аналогично.

Комментарий. Из решения вытекает, что найденная расстановка единственна с точностью до поворотов и симметрий многоугольника.

5. Пусть α_{ij} — угол, под которым отрезок A_iA_j виден из точки H. Записав удвоенные площади $\triangle A_1A_2H$ и $\triangle A_3A_4H$

двумя способами, получаем

$$h_{12}\cdot A_1A_2 = HA_1\cdot HA_2\cdot \sin\alpha_{12}$$

и

$$h_{34}\cdot A_3A_4 = HA_3\cdot HA_4\cdot \sin\alpha_{34}.$$

Из этих равенств и теоремы синусов получаем

$$h_{12}h_{34} = HA_1\cdot HA_2\cdot HA_3\cdot HA_4\cdot \frac{\sin\alpha_{12}}{A_1A_2}\cdot\frac{\sin\alpha_{34}}{A_3A_4} = \\ = HA_1\cdot HA_2\cdot HA_3\cdot HA_4\cdot\frac{1}{(2R)^2},$$

где R — радиус данной окружности. Аналогичным образом, рассмотрев $\triangle A_1A_4H$ и $\triangle A_2A_3H$, получим

$$h_{14}h_{23} = HA_1\cdot HA_2\cdot HA_3\cdot HA_4\cdot \frac{\sin\alpha_{14}}{A_1A_4}\cdot\frac{\sin\alpha_{23}}{A_2A_3} = \\ = HA_1\cdot HA_2\cdot HA_3\cdot HA_4\cdot\frac{1}{(2R)^2},$$

поэтому $h_{12}\cdot h_{34} = h_{14}\cdot h_{23}$.

Комментарий. Задачу можно решить и путём доказательства подобия треугольников $HH_{12}H_{14}$ и $HH_{23}H_{34}$, где H_{ij} — основание перпендикуляра, опущенного из точки H на прямую A_iA_j.

9 класс

1. Пусть

$$f(x) = x^{2n} - x^{2n-1} + x^{2n-2} - \ldots - x^3 + x^2 - x + 1.$$

Поскольку

$$f(|x|) \leqslant x^{2n} \pm x^{2n-1} + x^{2n-2} \pm x^{2n-3} + \ldots \pm x^3 + x^2 \pm x + 1$$

при любой расстановке знаков «$+$» и «$-$» у нечётных степеней x и любом действительном x, достаточно доказать, что $f(x) > 1/2$ для любого положительного x. Суммируя геометрическую прогрессию, получим $f(x) = \dfrac{1+x^{2n+1}}{1+x}$. Если $x \geqslant 1$, то, очевидно, $f(x) \geqslant 1$. Если же $0 < x < 1$, то числитель больше 1, а знаменатель меньше 2, поэтому дробь больше $1/2$.

2. Обозначим через A, B и C центры окружностей радиусов 3, 4 и 5 соответственно (см. рис. 40). Обозначим

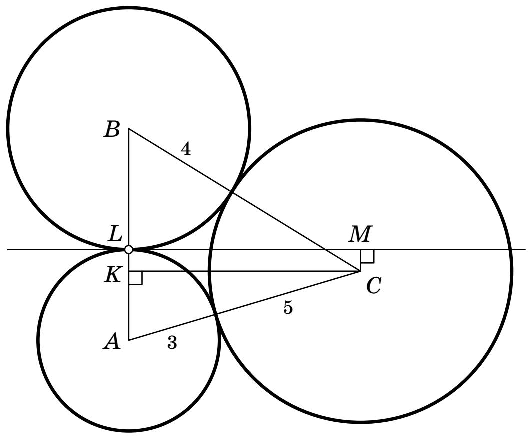


Рис. 40

точку касания окружностей радиусов 3 и 4 через L. Пусть CK — высота треугольника ABC, а CM — перпендикуляр на рассматриваемую касательную. Поскольку обе прямые LM и KC перпендикулярны AB, а CM параллельна AB, заключаем, что $KLMC$ — прямоугольник. Далее, запишем теорему Пифагора для катета CK двух прямоугольных треугольников ACK и BCK: $8^2-(3-KL)^2=CK^2=9^2-(4+KL)^2$, откуда $KL=\frac{5}{7}$. Длина отрезка касательной внутри окружности радиуса 5 равна $2\sqrt{5^2-CM^2}=2\sqrt{5^2-KL^2}=\frac{40}{7}\sqrt{3}$.

3. Докажем, общее утверждение: для произвольного нечётного натурального числа n сумма $S_n=1^n+2^n+\ldots+n^n$ делится на $1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. Это равносильно тому, что $2S_n$ делится на $n(n+1)$. Поскольку числа n и $n+1$ взаимно простые, достаточно удостовериться в том, что $2S_n$ делится на n и на $n+1$, т. е. S_n делится на n и на $\frac{n+1}{2}$. Заметим, что если a и b — целые числа, n — нечётное натуральное число, то a^n+b^n делится на $a+b$. В самом деле, для $n=1$ это очевидно, а при любом нечётном $n\geqslant 3$ справедлива формула

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1}),$$

которую легко проверить раскрытием скобок.

Запишем сумму S_n двумя способами. С одной стороны,

$$S_n=(1^n+(n-1)^n)+(2^n+(n-2)^n)+\ldots+\\+\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^n+\left(\frac{n+1}{2}\right)^n\right)+n^n.$$

Все суммы в скобках и последнее слагаемое делятся на n, поэтому и S_n делится на n. С другой стороны, в середине последовательности $1, 2, \ldots, n-1, n$ стоит целое число $\frac{n+1}{2}$. Поэтому, группируя симметричные относительно него слагаемые, получим

$$S_n=(1^n+n^n)+(2^n+(n-1)^n)+\ldots+\\+\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)^n+\left(\frac{n+3}{2}\right)^n\right)+\left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Теперь все суммы в скобках и последнее слагаемое делятся на $\frac{n+1}{2}$, а значит, и S_n делится на $\frac{n+1}{2}$.

4. Будем рассуждать от противного. Пусть найдётся некоторый город A, из которого можно добраться не во все остальные 19 городов. Множество из n городов, в которые можно добраться из A (включая сам город A), обозначим через X; множество оставшихся $20-n$ городов обозначим через Y. Тогда ни из одного города множества X нельзя попасть ни в один город множества Y, поскольку в противном случае из города A можно было бы попасть в какой-то город множества Y. Итак, среди $\frac{20\cdot 19}{2}=190$ возможных прямых авиалиний между данными 20 городами отсутствуют как минимум $n(20-n)$ авиалиний. Но $n(20-n)\geqslant 19$ при любом $1\leqslant n\leqslant 19$, и тогда города оказываются соединёнными не более чем 171 авиалинией, что противоречит условию. Это означает, что наше предположение неверно, и из каждого города можно перебраться в любой другой.

Комментарий. Задача иллюстрирует классическую теорему из теории графов: если граф имеет n вершин и не менее $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ рёбер, то он связный (см, например, [13, гл. VI, задача 1.22]). В данном случае $n=20$ и $\frac{(n-1)(n-2)}{2}=171$. Отметим, что если заменить 172 на меньшее число, то утверждение задачи перестанет быть верным.

10 класс

1. *Первый способ*. Докажем, что любые две стороны $\triangle ABC$ равны. Достаточно показать, что $AC=BC$. Отразим $\triangle AA_1C$ относительно биссектрисы $\angle ACB$ (см. рис. 41). Тогда A_1 перейдёт в B_1, C останется на месте, A перейдёт в A_2, лежащую на прямой BC. Если A_2 совпадает с B, то $BC=A_2C=AC$ и утверждение доказано.

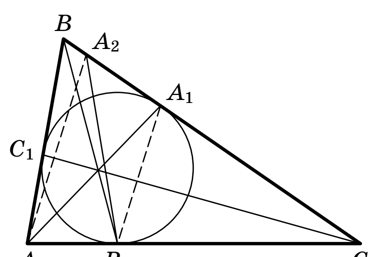


Рис. 41

Покажем, что случай $A_2 \neq B$ невозможен. Без ограничения общности можно считать, что A_2 лежит на стороне BC (иначе можно рассмотреть $\triangle BB_1C$). Тогда $BB_1 = AA_1 = A_2B_1$, поэтому $\triangle B_1BA_2$ равнобедренный, причём $\angle B_1BA_2 = \angle B_1A_2B$. Далее, получаем $\angle B_1BA_2 + \angle B_1A_2C = \pi$, но $\angle B_1BA_2 = \angle B_1BC$, а $\angle B_1A_2C = \angle A_1AC$, следовательно, $\angle B_1BC + \angle A_1AC = \pi$, что противоречит неравенству

$$\angle B_1BC + \angle A_1AC < \angle CAB + \angle ABC < \pi.$$

Второй способ. Рассмотрим $\triangle AA_1B_1$ и $\triangle BB_1A_1$. Они имеют общую сторону A_1B_1 и равные по условию стороны AA_1 и BB_1. Кроме того, $\angle AB_1A_1 = \angle BA_1B_1$, поскольку смежные с ними углы — это углы при основании равнобедренного треугольника A_1B_1C ($CA_1 = CB_1$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки); по той же причине $\angle AB_1A_1$ и $\angle BA_1B_1$ тупые, следовательно, остальные углы рассматриваемых треугольников острые. Согласно теореме синусов

$$\sin\angle A_1AB_1 = \frac{A_1B_1}{A_1A}\sin\angle AB_1A_1 = \frac{A_1B_1}{B_1B}\sin\angle BA_1B_1 = \\ = \sin\angle B_1BA_1,$$

поэтому $\angle A_1AB_1 = \angle B_1BA_1$ (эти углы острые), а значит, и $\angle AA_1B_1 = \angle BB_1A_1$. Таким образом, $\triangle AA_1B_1 = \triangle BB_1A_1$ по двум сторонам и углу между ними. В частности, $AB_1 = BA_1$ и $AC = AB_1 + B_1C = BA_1 + A_1C = BC$. Аналогично доказывается, что $AC = AB$.

2. Решим задачу в общем случае. Если $m = n$, то утверждение очевидно. Далее, без ограничения общности можно считать, что $m > n$. Поскольку $4^m - 4^n = 4^n(4^{m-n} - 1)$, достаточно доказать, что $4^{m-n} - 1 \mathrel{\vdots} 3^{k+1}$ тогда и только тогда, когда $m - n \mathrel{\vdots} 3^k$. Заметим, что $4^{3^k} - 1$ при всех натуральных k делится на 3^{k+1}. В самом деле, пусть $d_k = \dfrac{4^{3^k} - 1}{3^{k+1}}$. Тогда $d_1 = 7$ и

$$d_{k+1} = \frac{(4^{3^k})^3 - 1}{3^{k+2}} = \frac{(1 + 3^{k+1}d_k)^3 - 1}{3^{k+2}} = d_k + 3^{k+1}d_k^2 + 3^{2k+1}d_k^3,$$

поэтому все d_k — натуральные числа. Кроме того, поскольку d_1 не делится на 3, мы получаем, что ни одно из чисел d_k не делится на 3. Следовательно, $4^{3^k} - 1$ не делится на 3^{k+2} при любом натуральном k.

Зафиксируем любое натуральное число k. Пусть a — наименьшее натуральное число, для которого $4^a - 1$ делится на 3^{k+1}, а $b = m - n$. Тогда если $b = aq + r$, где $0 \leqslant r < a$, то

$$4^b - 1 = 4^r(4^{aq} - 1) + 4^r - 1 = 4^r(4^a - 1)(4^{a(q-1)} + \ldots + 1) + 4^r - 1.$$

Если $r = 0$, то, очевидно, $4^b - 1$ также делится на 3^{k+1}. Обратно, если $4^b - 1$ делится на 3^{k+1}, то и $4^r - 1 \vdots 3^{k+1}$, а согласно минимальности a получаем, что $r = 0$, т. е. $b \vdots a$. Значит, $4^b - 1$ делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $b \vdots a$.

Отсюда получаем, что, с одной стороны, $3^k \vdots a$, поэтому a равно 1 или натуральной степени числа 3, а с другой стороны, $3^{k-1} < a$, поскольку, как показано выше, при целых $k \geqslant 0$ разность $4^{3^{k-1}} - 1$ не делится на 3^{k+1}. Следовательно, $a = 3^k$, поэтому $4^b - 1$ делится на 3^{k+1} тогда и только тогда, когда $b \vdots 3^k$.

3. Пусть

$$t(x) = \cos 5x + a\cos 4x + b\cos 3x + c\cos 2x + d\cos x + e.$$

Пусть x принимает значения от 0 до $\frac{8\pi}{5}$ с шагом $\frac{2\pi}{5}$. Представим значения $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$ в виде $x_0 + 2\pi n$, где $x_0 \in [0; 2\pi)$ и n — целое число, и составим таблицу из значений x_0.

x	0	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$
$2x$	0	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$
$3x$	0	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$
$4x$	0	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$
$5x$	0	0	0	0	0

Тогда, пользуясь периодичностью косинуса, получим

$$t(0) + t\left(\frac{2\pi}{5}\right) + t\left(\frac{4\pi}{5}\right) + t\left(\frac{6\pi}{5}\right) + t\left(\frac{8\pi}{5}\right) = 5(1+e) +$$
$$+ (a+b+c+d)\cdot\left(\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{6\pi}{5} + \cos\frac{8\pi}{5}\right) =$$
$$= 5(1+e),$$

поскольку по формуле суммы косинусов кратных дуг справедливо равенство

$$\cos 0+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=$$
$$=\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{10\pi}{5}=$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{5}{2}\cdot\frac{2\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{6}{2}\cdot\frac{2\pi}{5}\right)}{\sin\frac{\pi}{5}}=0.$$

Далее, пусть x принимает значения от $\frac{\pi}{5}$ до $\frac{9\pi}{5}$ с шагом $\frac{2\pi}{5}$. Представим значения $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$ в виде $x_0+2\pi n$, где $x_0\in[0;\,2\pi)$ и n — целое число, и составим новую таблицу из значений x_0.

x	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$
$2x$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	0	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$
$3x$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$	π	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$
$4x$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	0	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$
$5x$	π	π	π	π	π

Следовательно,

$$t\left(\frac{\pi}{5}\right)+t\left(\frac{3\pi}{5}\right)+t\left(\frac{5\pi}{5}\right)+t\left(\frac{7\pi}{5}\right)+t\left(\frac{9\pi}{5}\right)=5(-1+e)+$$
$$+(a+c)\cdot\left(\cos 0+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}\right)+$$
$$+(b+d)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{5\pi}{5}+\cos\frac{7\pi}{5}+\cos\frac{9\pi}{5}\right)=$$
$$=5(-1+e),$$

поскольку аналогично рассмотренному выше равенству имеем

$$\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{5\pi}{5}+\cos\frac{7\pi}{5}+\cos\frac{9\pi}{5}=$$

$$=\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{3\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{5\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+$$

$$+\cos\frac{7\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{9\pi}{5}+\cos\frac{10\pi}{5}-$$

$$-\left(\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}+\cos\frac{10\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{10}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right)\cos\left(\frac{11}{2}\cdot\frac{\pi}{5}\right)}{\sin\frac{\pi}{10}}=0.$$

Таким образом, искомое значение равно 10 вне зависимости от значений стёртых коэффициентов.

К о м м е н т а р и й. Формула суммы косинусов кратных дуг

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

справедлива при $\alpha\neq 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. Для её доказательства достаточно умножить левую часть на знаменатель дроби, преобразовать каждое из получившихся n произведений двух тригонометрических функций в разность синусов, заметить, что взаимно уничтожаются все слагаемые, кроме двух, к которым можно применить формулу преобразования разности синусов в произведение двух тригонометрических функций.

Обосновать равенство нулю двух встретившихся в решении сумм значений косинуса можно и из геометрических соображений: сумма векторов, выходящих из центра правильного многоугольника во все его вершины, есть нулевой вектор. Каждая из рассмотренных сумм значений косинуса равна первой координате суммы этих векторов, поэтому равна нулю. Отметим, что автором задачи доказана лемма, обобщающая её результат, и опубликовано доступное старшеклассникам решение классической задачи П. Л. Чебышёва (см. [17]).

4. *Первый способ*. а) Пусть n — наибольшее число отрезков, выходящих из одной точки. Рассмотрим любую точку A, из которой выходят n отрезков. Обозначим множество вторых концов этих отрезков через X, а множество остальных точек (включающее точку A) — через Y. Тогда множество X состоит из n точек, а множество Y — из $8-n$

точек. Если отрезки не образуют ни одного треугольника, то они не могут соединять никакие точки из множества X. Следовательно, число всех отрезков не может превосходить количества точек множества Y, умноженного на наибольшее число отрезков, выходящих из одной точки: $(8-n)n = 16-(4-n)^2 \leqslant 16$. Полученное противоречие с условием означает, что отрезки образуют хотя бы один треугольник.

б) Пусть ABC — треугольник, существование которого доказано в п. а), n_A, n_B, n_C — число отрезков, выходящих из его вершин, не считая сторон $\triangle ABC$, n_{AB} — число точек, соединённых рёбрами с A и B (оно равно числу треугольников со стороной AB), n_{BC} и n_{AC} определяются аналогично. Тогда помимо $\triangle ABC$ имеется ещё не менее $n_{AB}+n_{BC}+n_{AC}$ треугольников. Если найдётся точка, соединённая отрезками с точками A, B и C, то получаются 4 треугольника. Поэтому можно считать, что нет ни одной такой точки. Число точек, отличных от A, B, C и соединённых отрезками хотя бы с одной из них, очевидно, не больше $8-3=5$. С другой стороны, по формуле включений и исключений оно равно $n_A+n_B+n_C-(n_{AB}+n_{BC}+n_{AC})$, так как в этой сумме каждая точка, соединённая отрезком только с одной из точек A, B, C, учитывается один раз и каждая точка, соединённая ровно с двумя из этих точек, также учитывается один раз, а точек, соединённых со всеми тремя, нет. Значит, $n_A+n_B+n_C-(n_{AB}+n_{BC}+n_{AC}) \leqslant 5$, поэтому $n_{AB}+n_{BC}+n_{AC} \geqslant n_A+n_B+n_C-5$, т. е. общее число треугольников, имеющих с $\triangle ABC$ общую сторону, не меньше чем $n_A+n_B+n_C-5$. Если $n_A+n_B+n_C \geqslant 8$, то всё доказано. Если $n_A+n_B+n_C \leqslant 7$, то без ограничения общности считаем, что $n_A \leqslant n_B \leqslant n_C$, поэтому $n_A+n_B \leqslant 4$ (иначе $n_A+n_B \geqslant 5$, поэтому $n_B \geqslant 3$, значит $n_C \geqslant 3$, но тогда $n_A+n_B+n_C \geqslant 8$). Исключим из рассмотрения точки A и B и все выходящие из них отрезки. Останется 6 точек и не менее $17-(3+4)=10$ отрезков. Покажем, что они образуют не менее 3 треугольников. Один треугольник есть, поскольку если бы его не было, так же как и в пункте а) получилось бы, что отрезков не более $(6-n)n=9-(3-n)^2<10$ — противоречие. Обозначим этот треугольник через $\triangle PQR$. Докажем что есть ещё как минимум два треугольника. Кроме P, Q, R имеются ещё 3 точки. Если одна из них соединяется с каждой из точек P, Q, R, то уже образуются три новых треугольника. Если есть две точки, каждая из которых соединяется с двумя из точек P, Q, R, то помимо $\triangle PQR$ получаются ещё 2 треугольника и опять всё доказано. Если только одна точка соединяется с двумя из P, Q, R (образуя второй треугольник), то общее число отрезков от этих трёх точек к P, Q, R не больше 4. Поскольку три остальные точки должны соединяться не менее чем $10-3-4=3$ отрезками, то они образуют третий треугольник — опять всё доказано. Если же нет ни одной точки, соединяющейся с двумя из точек P, Q, R, то каждая из трёх точек соединяется не более чем с одной из P, Q, R, поэтому всего отрезков будет не более $3+3+3=9$, так что этот случай невозможен.

Второй способ. Докажем методом математической индукции более общее утверждение: если $2k$ точек соединены k^2+1 отрезками, то образуется хотя бы k треугольников. База индукции при $k=2$ (для 4 точек и 5 отрезков) проверяется непосредственно. В самом деле, в этом случае найдётся точка, соединённая отрезком с каждой из оставшихся трёх точек (иначе из каждой точки выходило бы не более двух отрезков, поэтому общее число отрезков не превышало бы $(4\cdot 2)/2=4$). Значит, остальные два отрезка соединяют какие-то две пары из оставшихся трёх точек, поэтому образуется два треугольника. Пусть теперь для всех натуральных чисел, меньших некоторого $k\geqslant 3$, утверждение доказано, докажем его для k. Сначала покажем, что образуется хотя бы один треугольник. Пусть n — наибольшее число отрезков, выходящих из одной точки. Рассмотрим любую точку, из которой выходят n отрезков. Рассуждая аналогично п. а), получим, что если треугольников нет, то другие концы этих отрезков не могут быть соединены отрезками. Число точек, отличающихся от этих концов, равно $2k-n$, а значит, всего отрезков не более $n(2k-n)$ штук. Но $n(2k-n)=k^2-(k-n)^2\leqslant k^2<k^2+1$, что противоречит условию. Итак, пусть $\triangle ABC$ — треугольник, существование которого только что было доказано. Обозначим количества отрезков, выходящих из вершин $\triangle ABC$, не считая его сторон, через a, b, c соответственно, причём будем считать, что $a\geqslant b\geqslant c$. Рассмотрим концы этих отрезков, отличные от вершин $\triangle ABC$. Обозначим количество точек, в которых входят по три отрезка, через t, по два отрезка — через m, только один отрезок — через l. Подсчитывая двумя способами количество отрезков, получим $a+b+c=3t+2m+l$. Число треугольников, имеющих общую сторону с $\triangle ABC$, равно

$$3t+m\geqslant 2t+m=a+b+c-(t+m+l)\geqslant a+b+c-(2k-3)\geqslant \geqslant \frac{b+c}{2}+b+c+3-2k=\frac{3}{2}(b+c+2)-2k.$$

Поэтому если $b+c+2\geqslant 2k-1$, то $3t+m\geqslant\frac{3}{2}(2k-1)-2k=k-\frac{3}{2}$, но число $3t+m$ — целое, поэтому оно не меньше $k-1$, а значит, с учётом $\triangle ABC$ получаем не менее k треугольников и утверждение доказано. Если же $b+c+2\leqslant 2k-2$, то исключим из рассмотрения точки B и C вместе со всеми выходящими из них отрезками. Останется $2k-2$ точки и $k^2+1-(b+c+3)\geqslant k^2+1-(2k-1)=(k-1)^2+1$ отрезок. По предположению индукции они образуют не менее $k-1$ треугольника. С учётом $\triangle ABC$ получим доказываемое утверждение.

Комментарий. Пункт а) задачи есть частный случай теоремы французского математика В. Мантеля о треугольниках в графе (см. [4, разд. 3.1]). Эта теорема опубликована в 1907 г., впоследствии её заново доказал и обобщил венгерский математик П. Туран. Отметим, что пункт б) представляет собой усиление теоремы Мантеля. В виде задачи без решения это утверждение можно найти в книге [61]. В 1969 г. задача, связанная с теоремой Мантеля, предлагалась на Всесоюзной олимпиаде в Киеве [10, задача 126].

5. *Первый способ.* Рассмотрим всех богатырей $B_1, \ldots, B_k$ из некоторого города M. Пусть кубки обошли полный круг. Тогда каждый из богатырей $B_1, \ldots, B_k$ держал по одному разу каждый из золотых кубков, следовательно, суммарно они держали золотые кубки в руках ks раз. Поскольку $1 < s < 13$ и 13 — простое число, получаем $ks \neq 13$.

Рассмотрим два случая. Если $ks < 13$, то в некоторый момент у богатырей из M не было ни одного золотого кубка. Поскольку число золотых кубков равно числу городов, в этот момент как минимум два золотых кубка были у богатырей какого-то другого города.

Если же $ks > 13$, то в какой-то момент у богатырей из M было не менее двух золотых кубков одновременно, что и требовалось доказать.

Второй способ. Обозначим численности богатырей разных городов $n_1, \ldots, n_s$. Тогда $n_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, s$, $n_1 + \ldots + n_s = 13$. Перестановка кубков, полученная в результате k-кратного исполнения княжеского повеления, по существу эквивалентна повороту стола вокруг его центра на некоторый угол, и далее будет называться циклическим сдвигом на k мест. Рассуждаем от противного. Покажем для любого i, что $13 > s \cdot n_i$. Для этого занумеруем произвольным образом кресла, в которых сидят богатыри, цифрами 1, 2, ..., 13, занумеруем всех богатырей i-го города номерами от 1 до n_i, а все золотые кубки номерами от 1 до s. Для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant n_i$, рассмотрим циклический сдвиг, при котором кубок № 1 переходит к богатырю № j. Множество всех номеров кресел, напротив которых оказались золотые кубки, обозначим N_j. Проверим, что множества N_j попарно не пересекаются. Пусть это не так, и, к примеру, $N_1 \cap N_2$ содержит номер j_1. Так как N_2 получается некоторым циклическим сдвигом из N_1, то найдётся номер j_2 из множества N_1 такой, что при том же сдвиге кубок, стоящий напротив кресла j_2, перейдёт на место напротив кресла j_1. Сделаем теперь такой сдвиг, при котором кубок, стоящий против кресла j_2, перешёл к богатырю № 1. Тогда кубок, стоящий против кресла j_1, перейдёт к богатырю № 2, и у двоих богатырей одного города окажутся золотые кубки, что противоречит предположению. Итак, все N_j попарно не пересекаются, откуда $13 \geqslant n_i s$, а так как 13 — простое, то $13 > n_i s$. Сложив все неравенства, получим противоречие: $13 \cdot s > 13 \cdot s$.

Комментарий. Можно показать, что утверждение задачи справедливо не только для 13, но для любого простого числа. Сама задача представляет собой переформулировку леммы 4 на с. 105 статьи [73] и является обобщением следующего факта: если окружность разделена на дуги, по меньшей мере две из которых имеют различную длину, а в каждой дуге выбрано по одной точке, то существует такой поворот окружности, при котором некоторые две выбранные точки окажутся внутри одной дуги.

1984 год (XLVII олимпиада)

7 класс

1. Если два билета подряд счастливые, то разность сумм их цифр делится на 7. Перечислим всевозможные варианты записи двух последовательных шестизначных номеров, вычисляя разности сумм их цифр.

Последовательные номера билетов	Разность сумм их цифр
$\overline{abcdef}$ и $\overline{abcde(f+1)}$	1
$\overline{abcde9}$ и $\overline{abcd(e+1)0}$	8
$\overline{abcd99}$ и $\overline{abc(d+1)00}$	17
$\overline{abc999}$ и $\overline{ab(c+1)000}$	26
$\overline{ab9999}$ и $\overline{a(b+1)0000}$	35
$\overline{a99999}$ и $\overline{(a+1)00000}$	44

Значит, подряд идущие счастливые билеты могут иметь только вид $\overline{ab9999}$ и $\overline{a(b+1)0000}$. С другой стороны, если цифры a и $b \neq 9$ таковы, что сумма цифр второго номера делится на 7, т. е. $a+b$ равно 6 или 13, то оба билета такого вида — счастливые. Например, счастливыми являются билеты с номерами 339999 и 340000.

Комментарий. В приведённом решении фактически получены все пары идущих подряд счастливых билетов. Участникам олимпиады было достаточно дать обоснованный положительный ответ на вопрос задачи, например, приведя пример пары таких чисел.

2. Пусть дорожки в зоопарке образуют равносторонний треугольник ABC со средними линиями, соединяющими точки K, L и M — середины сторон AB, BC и AC соответственно (см. рис. 42). Опишем, как могут действовать сторожа, чтобы поймать обезьянку.

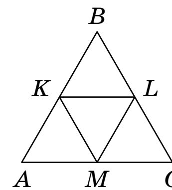


Рис. 42

Пусть сначала первый сторож прибежит в точку K, а второй — в точку L. Если обезьянка в этот момент оказалась на дорожке KL, то сторожа могут двигаться по этой дорожке навстречу обезьянке и поймать её. Если обезьянка оказалась на дорожках BK или BL, то сторожа также могут двигаться по этим дорожкам навстречу обезьянке и поймать её. Если обезьянка оказалась на одной из сторон треугольника AKM, то первый сторож остаётся в точке K, а второй бежит в точку M по дорожке LM. Поскольку скорости сторожей и обезьянки равны, в тот момент, когда он добежит до точки M, обезьянка будет находиться или на сторонах треугольника AKM, или на отрезке MC. Чтобы поймать обезьянку в первом случае, сторожа опять могут двигаться навстречу обезьянке по сторонам треугольника AKM. Во втором случае сторож из точки K бежит в точку L по дорожке KL, а сторож из точки M преследует обезьянку по дорожкам MC и CL. Если же обезьянка оказалась на одной из сторон треугольника MLC, то действия сторожей должны быть симметричны относительно прямой BM действиям, описанным для треугольника AKM.

Комментарий. Такая же задача предлагалась в 1970 г. в варианте 8 класса, только там скорость обезьянки была в три раза больше скорости сторожей (см. задачу 33.27 в книге [14]). Приведённое выше решение нетрудно усовершенствовать для случая, когда скорость обезьянки может вдвое превышать скорость сторожей. Для этого при нахождении обезьянки на сторонах треугольника AKM одному сторожу следует по-прежнему бежать из точки L в точку M, а другой сторож должен следить за обезьянкой из точки K и при её выбегании на дорожку MC находиться на расстоянии от L вдвое меньшем, чем обезьянка, для которой расстояние измеряется по ломаной MCL. Отметим, что если скорость обезьянки превышает скорость сторожей более чем вдвое, этот алгоритм её поимки не годится.

3. Убыток продавца состоит в утраченном товаре на 10 р. и сдаче 15 р. Размен фальшивой купюры у соседа и уплату ему настоящих 25 р. можно рассматривать как взятие денег в долг с последующим их возвращением, поэтому эти действия не приводят к дополнительным убыткам.

4. *Первый способ*. Пусть из треугольника ABC вырезали параллелограмм $MNPQ$. Продлим противоположные стороны MN и PQ параллелограмма до пересечения со сторонами треугольника ABC (см. рис. 43). По крайней ме-

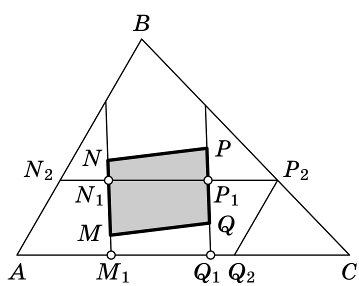


Рис. 43

ре две из четырёх точек пересечения лежат на одной стороне треугольника. Пусть это будут точки M_1 и Q_1 на стороне AC. Отложим на прямых MN и PQ от точек M_1 и Q_1 внутрь треугольника ABC отрезки $M_1N_1 = MN$ и $P_1Q_1 = PQ$. Параллелограммы $MNPQ$ и $M_1N_1P_1Q_1$ имеют равные основания MN и M_1N_1 и равные высоты, значит, их площади равны. Пусть прямая N_1P_1 пересекает стороны AB и BC

в точках N_2 и P_2 соответственно. Отметим на стороне AC точку Q_2 так, чтобы прямая P_2Q_2 была параллельна AB. Заметим, что площадь параллелограмма $M_1N_1P_1Q_1$ не превосходит площади параллелограмма $AN_2P_2Q_2$, так как их высоты равны, а для оснований выполнено неравенство $N_1P_1 \leqslant N_2P_2$. Остаётся доказать, что площадь параллелограмма $AN_2P_2Q_2$ не больше половины площади треугольника ABC.

Если $CP_2 = BP_2$, то N_2P_2 — средняя линия, поэтому P_2Q_2 и Q_2N_2 — также средние линии. Поскольку средние линии разбивают треугольник на 4 равных треугольника, в этом случае площадь параллелограмма $AN_2P_2Q_2$ равна половине площади треугольника ABC.

Пусть $CP_2 < BP_2$ (случай $BP_2 < CP_2$ рассматривается аналогично — достаточно лишь поменять ролями вершины B и C). Отложим на стороне BC отрезок $CC_1 = 2CP_2$ и отметим на стороне AB точку A_1 так, чтобы $A_1C_1 \parallel AC$ (см. рис. 44). Площадь параллелограмма $AN_2P_2Q_2$ равна половине площади трапеции AA_1C_1C (N_2P_2 — средняя линия этой трапеции), а значит, меньше половины площади треугольника ABC.

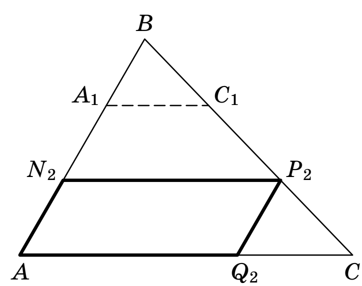


Рис. 44

Второй способ. Пусть из треугольника ABC площади S вырезали параллелограмм $KLMN$ площади S'. Докажем, что $S' \leqslant S/2$. Предположим сначала, что одна из сторон $KLMN$ параллельна одной из сторон треугольника ABC.

Без ограничения общности можно считать, что $KN \parallel BC$, причём расстояние от A до прямой KN меньше, чем до прямой LM (см. рис. 45). Продолжим сторону KN до пе-

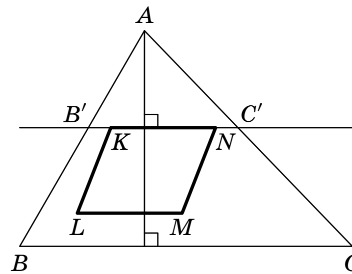


Рис. 45

ресечения с AB в точке B' и до пересечения с AC в точке C'. Обозначим через h высоту треугольника ABC, проведённую из вершины A. Поскольку $BC \parallel B'C'$, треугольники ABC и $AB'C'$ подобны. Следовательно, высоты этих треугольников, проведённые из вершины A, относятся так же, как стороны BC и $B'C'$. Пусть $B'C' = k \cdot BC$. Тогда высота треугольника $AB'C'$, проведённая к стороне $B'C'$, равна kh, а высота параллелограмма $KLMN$, проведённая к стороне KN, не превосходит $(1-k)h$. Значит,

$$S' \leqslant KN \cdot (1-k)h \leqslant B'C' \cdot (1-k)h = k(1-k)h \cdot BC = 2k(1-k)S.$$

При всех возможных k имеем

$$2k(1-k) = 2(k-k^2) = 2\left(\frac{1}{4} - \left(k - \frac{1}{2}\right)^2\right) \leqslant \frac{1}{2},$$

поэтому $S' \leqslant S/2$.

Пусть теперь ни одна сторона параллелограмма $KLMN$ не параллельна ни одной из сторон треугольника ABC. Рассмотрим три прямые, параллельные прямой KL и проходящие через вершины треугольника ABC. Одна из них проходит между двумя другими и пересекает треугольник ABC по отрезку. Без ограничения общности будем считать, что это отрезок $AA' \parallel KL$ (см. рис. 46). Если отрезок

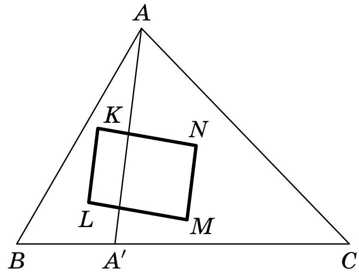


Рис. 46

AA' не пересекает параллелограмм $KLMN$ или проходит по его стороне, то этот параллелограмм можно вырезать либо из треугольника BAA', либо из треугольника CAA', и по доказанному выше его площадь не превосходит половины площади этого треугольника, а значит, и всего треугольника ABC. Если же отрезок AA' разбивает параллелограмм $KLMN$ на два параллелограмма, то по доказанному выше площадь одного из них не превосходит половины площади треугольника BAA', а площадь второго из них не превосходит половины площади треугольника CAA'. Следовательно, и в этом случае $S' \leqslant S/2$.

Комментарий. Эта классическая задача есть, например, в книге [11]. Там она сформулирована для квадрата, а не параллелограмма, но решение дано для параллелограмма и фактически совпадает с приведённым нами. Известна теорема немецкого математика Зюсса (см. книгу [28]) о том, что в любую выпуклую фигуру (в частности, выпуклый многоугольник, круг, эллипс) можно поместить параллелограмм, площадь которого равна половине площади фигуры. Эта и другие подобные задачи приведены в книге [28], однако в ней отсутствуют доказательства. Улучшить данную оценку нельзя, так как для этой задачи треугольник является экстремальной фигурой: в него нельзя поместить параллелограмм площади, большей половины площади треугольника (это, очевидно, следует из задачи 3 для 7 класса). Тот факт, что в треугольник можно вписать параллелограмм площади, равной половине площади треугольника (и таковым является параллелограмм, отсекаемый двумя средними линиями треугольника), и даже прямоугольник той же площади, был известен, вероятно, ещё Евклиду (см. [16, с. 10, задача 3] и [29]). Наибольшая же площадь квадрата, который можно вписать в данный треугольник, зависит от формы треугольника, и нахождение максимального квадрата — непростая задача: задача о наибольшем по площади параллелограмме — аффинная задача, в ней ответ не меняется при любом аффинном преобразовании треугольника, поэтому её было достаточно решить для любого конкретного треугольника, например правильного, а задача о максимальном квадрате этим свойством не обладает. Известны также в определённом смысле двойственные задачи к рассмотренным, а именно: любую выпуклую фигуру можно накрыть параллелограммом вдвое большей площади, а треугольник единичной площади накрыть параллелограммом, площадь которого меньше двух, нельзя. Эти теоремы были доказаны в 1927 г. немецким математиком Т. Эстерманом, их доказательства можно прочесть в книгах [68] и [74, задача 119, с. 61]. Швейцарский математик Г. Хадвигер доказал, что всякую выпуклую фигуру можно накрыть и прямоугольником удвоенной площади (набросок доказательства см. в книге [16, задача 462, с. 193]).

5. Заметим, что на диагональном пути из левого нижнего в правый верхний угол доски король или наткнётся на ладью и не сможет сделать очередной ход, или сделает все 19 ходов, побывав за время пути на всех 20 вертикалях и 20 горизонталях. Поэтому если предположить, что король ни разу не встал под шах, то каждая ладья должна была по ходу игры сменить как свою первоначальную вертикаль, так и свою первоначальную горизонталь, т. е. сделать не менее двух ходов. Значит, общее число ходов всех ладей не может быть меньше 20. Но поскольку игра ведётся по очереди, а король ходит первым, это число не должно превосходить число ходов короля, равное 19. Противоречие.

Комментарий. Эта задача представляет собой упрощённую версию задачи 3 из варианта 10 класса Всесоюзной олимпиады 1967 г. (см. [10, задача 91]). В той задаче число ладей было меньше половины размера доски (499, а размер доски 1000), и предлагалось доказать, что король всегда сможет встать под удар ладьи, как бы они ни ходили. В такой постановке задача труднее, поскольку надо было ещё догадаться до выигрышной (а может, лучше сказать — проигрышной) стратегии для короля. Она, по существу, такова, как сформулирована в задаче 5: король сначала отправляется в любой угол доски и (если ещё не попал под удар) начинает двигаться в другой угол по диагонали. Можно показать, что каждая ладья должна будет сделать как минимум два хода, поэтому общее число ходов ладей превысит число ходов короля при его движении по диагонали.

8 класс

1. *Первый способ.* Из данного уравнения следует, что

$$x^3 = (4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}.$$

Возводя обе части в квадрат и извлекая кубический корень, получаем $4 - x^2 = x^2$, откуда $x^2 = 2$, так что $x = \pm\sqrt{2}$. Проверка показывает, что отрицательный корень посторонний. Поэтому $x = \sqrt{2}$ — единственный корень данного уравнения.

Второй способ. Из условия следует, что $4 - x^2 > 0$, т. е. $|x| < 2$. Значит, $x = 2\sin\varphi$ для некоторого $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда $\sqrt{4 - x^2} = 2\sqrt{1 - \sin^2\varphi} = 2\cos\varphi$, поскольку $\cos\varphi > 0$ при $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому относительно переменной φ уравнение принимает вид

$$\frac{8\sin^3\varphi}{2\cos\varphi} - 4\cos^2\varphi = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sin^3\varphi - \cos^3\varphi}{\cos\varphi} = 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

На интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ единственным корнем этого уравнения является $\varphi = \frac{\pi}{4}$, следовательно, исходное уравнение также имеет единственный корень $x = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.

Комментарий. Ошибка многих участников олимпиады состояла в том, что они не отбросили приобретаемый при возведении в квадрат посторонний корень (некоторые из них проверили, что он входит в ОДЗ уравнения, и сочли это достаточным). Второе решение проведено методом тригонометрической подстановки, который доступен учащимся 10 и 11 классов.

2. Расположим 6 точек (ЭВМ) в вершинах правильного шестиугольника. Закрасим его стороны через одну цветами А и Б, а его диагонали — цветами В, Г и Д (см. рис. 47: одним цветом закрашиваются 2 параллельные малые диагонали и перпендикулярная к ним большая).

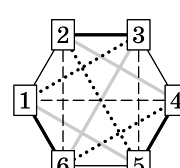


Рис. 47

Например, если занумеровать ЭВМ цифрами 1, ..., 6, а провод, соединяющий ЭВМ i и j, обозначить парой (i, j), то получим следующую раскраску:

$$\{(1, 2), (3, 4), (5, 6)\} \text{ — цвет А,}$$
$$\{(1, 6), (2, 3), (4, 5)\} \text{ — цвет Б,}$$
$$\{(1, 4), (2, 6), (3, 5)\} \text{ — цвет В,}$$
$$\{(1, 5), (2, 4), (3, 6)\} \text{ — цвет Г,}$$
$$\{(1, 3), (2, 5), (4, 6)\} \text{ — цвет Д,}$$

которая удовлетворяет условию задачи.

Комментарий. Эту задачу часто формулируют как задачу о составлении расписания кругового турнира, при этом проводам одного цвета отвечает разбиение участников турнира на пары для одного тура. Иными словами, задача состоит в составлении расписания турнира для $2n$ игроков, в каждом туре которого проводятся n игр между парами игроков так, чтобы в каждом туре все игроки были заняты, а общее число туров было $2n-1$ (естественно, при этом каждая пара встречается ровно в одном туре). В решении задачи 2 для 9 класса показано, что при нечётных n эта задача неразрешима. Для небольших чётных значений n эта задача легко решается, но придумать алгоритм составления такого расписания турнира, который был бы пригоден для любого чётного n, совсем не просто (см. его описание в книге [42, гл. 8, § 3], а также решение задачи 1.16 в сборнике [9, с. 19]).

Добавим также, что в теории графов множество рёбер графа, не имеющих общих вершин и такое, что каждая вершина графа принадлежит ровно одному из этих рёбер, называется *полным паросочетанием*. Поэтому на языке теории графов данная задача формулируется следующим образом: полный граф K_{2n} на $2n$ вершинах представить в виде суммы $2n-1$ полных паросочетаний P_i так, чтобы разные паросочетания не имели бы общих рёбер.

3. *Первый способ*. Следующее решение годится не только для правильного семиугольника, но и для правильного n-угольника при произвольном $n \geqslant 3$, поэтому будем сразу рассуждать в общем случае.

Обозначим через r радиус окружности, описанной вокруг данного правильного n-угольника, а через r_i — расстояния от некоторой точки M до его вершин, $i = 1, \ldots, n$. Проведём к описанной окружности касательные через вершины n-угольника. Они ограничат некоторый правильный n-угольник, описанный вокруг этой окружности, обозначим его сторону буквой a (см. рис. 48). Пусть расстояния от точки M до проведённых касательных равны соответственно h_i. Заметим, что $r_i \geqslant h_i$, так как длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной.

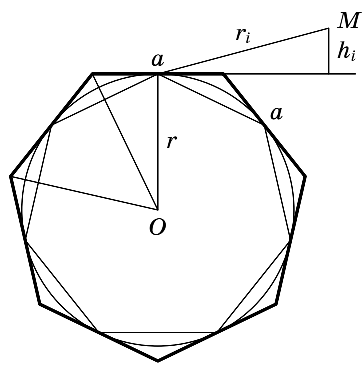


Рис. 48

Рассмотрим фигуру F, полученную объединением всех возможных треугольников, одной из вершин каждого из которых является точка M, а двумя другими — соседние вершины полученного описанного n-угольника. Её площадь S_F не превосходит суммы площадей указанных треугольников: $S_F \leqslant \frac{1}{2}ah_1 + \ldots + \frac{1}{2}ah_n$ (это неравенство обращается в равенство, если треугольники не имеют общих внутренних точек). Если точка M лежит внутри n-угольника, то F совпадает с этим n-угольником, если же точка M находится снаружи, то F полностью его содержит (см. рис. 49), так как продолжение отрезка, соединяющего точку M с произвольной точкой X внутри n-угольника, пересекает одну из его сторон, и значит, точка X лежит в треугольнике, соответствующем данной стороне. В обоих случаях площадь фигуры F не меньше площади n-угольника, которая равна $\frac{1}{2}nar$ (при этом в первом случае имеет

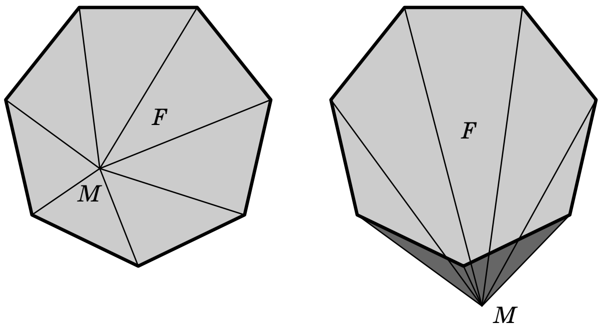


Рис. 49

место равенство). Таким образом,

$$r_1 + \ldots + r_n \geqslant h_1 + \ldots + h_n \geqslant \frac{2S_F}{a} \geqslant nr,$$

причём равенство достигается лишь в случае, если точка M лежит внутри n-угольника и $h_i = r_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, т. е. если M совпадает с центром n-угольника.

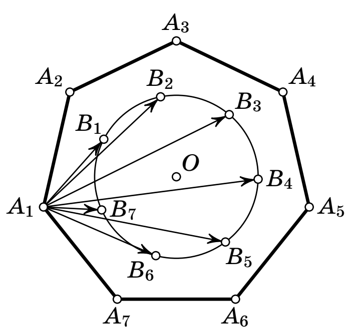


Рис. 50

Второй способ. Пусть точка O — центр правильного семиугольника $A_1A_2\ldots A_7$, а B_1 — любая другая точка плоскости. Рассмотрим правильный семиугольник $B_1B_2\ldots B_7$ с тем же центром O (см. рис. 50). Тогда

$$A_1B_2 = A_7B_1, \quad A_1B_3 = A_6B_1, \quad \ldots, \quad A_1B_7 = A_2B_1,$$

так как в каждом из этих равенств отрезок в правой части получается из другого поворотом вокруг точки O на углы $\frac{2\pi}{7}$, $2\cdot\frac{2\pi}{7}$, ..., $6\cdot\frac{2\pi}{7}$ соответственно. Таким образом, сумма длин векторов $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_1B_7}$ равна сумме длин векторов $\overrightarrow{B_1A_1}$, $\overrightarrow{B_1A_2}$, ..., $\overrightarrow{B_1A_7}$. Имеем

$$\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1B_7} = (\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OB_1})+\ldots+(\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{OB_7}) = \\ = 7\cdot\overrightarrow{A_1O}+(\overrightarrow{OB_1}+\ldots+\overrightarrow{OB_7}) = 7\cdot\overrightarrow{A_1O},$$

так как вектор $\overrightarrow{OB_1}+\ldots+\overrightarrow{OB_7}$ при повороте на угол $\frac{2\pi}{7}$ переходит в себя, а значит, равен $\vec{0}$.

Кроме того, заметим, что длина суммы векторов не превосходит суммы их длин. Действительно, если векторы расположить так, что начало каждого следующего вектора совпадает с концом предыдущего, то их сумма — это вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего; очевидно, его длина не больше, чем сумма длин этих векторов, равная длине ломаной, соединяющей эти точки. Следовательно, получаем неравенство

$$7\cdot A_1O = |\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1B_2}+\ldots+\overrightarrow{A_1B_7}| \leqslant \\ \leqslant A_1B_1+A_1B_2+\ldots+A_1B_7 = B_1A_1+B_1A_2+\ldots+B_1A_7,$$

причём равенство достигается только в случае, если все векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1B_2}$, ..., $\overrightarrow{A_1B_7}$ сонаправлены, что невозможно.

Отметим также, что это решение также естественным образом обобщается на случай произвольного правильного n-угольника ($n \geqslant 3$).

К о м м е н т а р и й. Можно рассмотреть и существенно более общую задачу. Пусть M, A_1, A_2, ..., A_n — произвольные точки, множество $\{A_i,\ i=1, \ldots, n\}$ имеет центр симметрии O (ось симметрии l), $r(M)=\sum\limits_{i=1}^{n} MA_i$, $M_1=O$ (M_1 — основание перпендикуляра, опущенного из M на l). Докажем, что $r(M_1)\leqslant r(M)$.

Пусть M_2 — точка, симметричная M относительно O (относительно l); тогда M_1 — середина отрезка MM_2, $r(M)=r(M_2)$, и из утверждения о том, что медиана меньше полусуммы окружающих сторон, следует неравенство $r(M_1) \leqslant \frac{1}{2}(r(M) + r(M_2)) = r(M)$. В случае когда множество $\{A_i\}$ имеет центр симметрии O, получаем, что $r(M) \geqslant r(O)$ и равенство достигается, лишь когда $M = O$.

Если множество $\{A_i\}$ имеет хотя бы две оси симметрии l_1 и l_2, то легко видеть, что они пересекаются в некоторой точке N. Докажем, что если в этом случае $M \neq N$, то $r(M) > r(N)$. Предположим противное: пусть $r(M) \leqslant r(N)$. Тогда последовательно применим полученное выше неравенство к последовательности точек $\{M_n\}$, где через M_1 обозначено основание перпендикуляра из точки M на прямую l_1, а через M_{n+1} при любом натуральном n — основание перпендикуляра, опущенного из точки M_n на ту из прямых l_1 или l_2, которой эта точка не принадлежит. Имеем $NM_{n+1} = c \cdot NM_n$, $0 < c < 1$, $r(M_{n+1}) < r(M_n) < r(M) \leqslant r(N)$. Выбрав такое k, что $NM_k < \frac{r(N) - r(M_1)}{n}$, и используя неравенство треугольника, приходим к противоречию:

$$r(M_k) = \sum_{i=1}^{n} M_kA_i \geqslant \sum_{i=1}^{n}(NA_i - M_kN) > r(N) - (r(N) - r(M_1)) = r(M_1).$$

У задачи также есть стереометрический вариант, в котором вместо правильного n-угольника можно взять любой правильный многогранник, которых, как известно, пять штук. Первое решение можно применить и в этом случае, нужно только через каждую вершину многогранника провести плоскость, касающуюся в ней описанной вокруг него сферы, и рассмотреть получившийся многогранник. Он тоже будет правильным, но число его граней будет равно числу вершин данного многогранника. В случае тетраэдра это опять будет тетраэдр, а в остальных случаях получится многогранник, двойственный данному (куб и октаэдр взаимно двойственны друг другу, так же как икосаэдр и додекаэдр). Для центра многогранника сумма расстояний от него до его вершин, очевидно, равна сумме расстояний от него же до граней построенного двойственного многогранника, а для любой другой точки сумма расстояний от неё до вершин данного многогранника будет (в силу свойства перпендикуляра и наклонной) больше суммы расстояний до граней двойственного, которая не меняется при движении этой точки внутри последнего (и возрастает, при выходе за его пределы), потому что если умножить эту сумму расстояний на площадь поверхности двойственного многогранника, то получится его утроенный объём, что вытекает из формулы для объёма пирамиды и разбиения многогранника на непересекающиеся пирамиды с общей вершиной в его центре и основаниями на его гранях.

Другие решения также можно перенести на стереометрический случай, но это более сложно. Вариант этой задачи для тетраэдра предлагался в 1966 г. на Международной олимпиаде (см. книгу [38]).

Для произвольных конечных точечных множеств можно доказать, что точка, для которой достигается минимум расстояний, существует (см. книгу [30, задача 19]), и предложить некий алгоритм её поиска, который до явного решения доводится, только если множество «достаточно симметрично». Приведённое выше второе решение позволяет найти эту точку в случае, если данное множество имеет «центр симметрии» (точку, при повороте вокруг которой на некоторый угол данная точечная конфигурация переходит в себя). В случае произвольного треугольника такого центра нет, но экстремальную точку найти можно — она называется точкой Торричелли и расположена так, чтобы из неё стороны треугольника смотрелись под равными углами (очевидно, по 120 градусов), а если такой точки нет (в случае когда треугольник имеет угол, не меньший 120 градусов), то эта точка расположена в вершине тупого угла (см., например, книгу [67] или [16, задача 62, с. 23—24]). Для четырёхугольника экстремальная точка, очевидно, совпадает с точкой пересечения диагоналей. Но уже для пятиугольников задача построения такой экстремальной точки неразрешима с помощью циркуля и линейки (см. [16, задача 265, раздел 2.2]).

4. *Первый способ.* Предположим противное: пусть при любой расстановке чисел a, b, c, d, e рассматриваемая сумма больше $1/5$, в частности (см. рис. 51):

$$ab+bc+cd+de+ea>\frac{1}{5},\quad ac+ce+eb+bd+da>\frac{1}{5}.$$

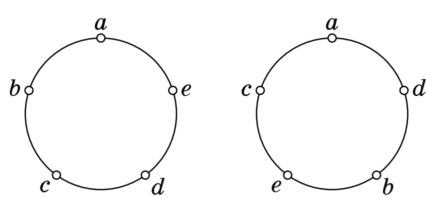


Рис. 51

Отсюда, используя неравенство $x^2+y^2\geqslant 2xy$, получаем

$$\begin{aligned}1&=(a+b+c+d+e)^2=\\&=\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+\frac{d^2+e^2}{2}+\frac{e^2+a^2}{2}+\\&\qquad+2((ab+bc+cd+de+ea)+(ac+ce+eb+bd+da))\geqslant\\&\geqslant 3(ab+bc+cd+de+ea)+2(ac+ce+eb+bd+da)>1.\end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство.

Второй способ. Обозначим данные числа через $x_1, \ldots, x_5$. Из очевидного неравенства

$$\left(x_1 - \frac{1}{5}\right)^2 + \ldots + \left(x_5 - \frac{1}{5}\right)^2 \geqslant 0$$

следует, что

$$x_1^2 + \ldots + x_5^2 \geqslant \frac{2}{5}(x_1 + \ldots + x_5) - 5 \cdot \frac{1}{25} = \frac{1}{5}.$$

Поскольку

$$1 = (x_1 + \ldots + x_5)^2 = x_1^2 + \ldots + x_5^2 + \\ + 2((x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) + \\ + (x_1x_3 + x_3x_5 + x_5x_2 + x_2x_4 + x_4x_1)),$$

обозначив две суммы попарных произведений в скобках через Σ_1 и Σ_2, получаем

$$2(\Sigma_1 + \Sigma_2) = 1 - (x_1^2 + \ldots + x_5^2) \leqslant 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

откуда $\Sigma_1 + \Sigma_2 \leqslant \frac{2}{5}$. Следовательно, меньшая из сумм Σ_1 и Σ_2 не превосходит $1/5$.

Комментарий. Как видно из решения, условие неотрицательности чисел несущественно. Утверждение задачи (с заменой $1/5$ на $1/n$) справедливо для любых n чисел, причём при $n=3$ и $n=4$ неравенство задачи выполняется при любой расстановке чисел по кругу. Оценка $1/n$ достигается тогда и только тогда, когда все n чисел равны.

В самом деле, докажем, что n действительных чисел с суммой 1 можно расставить по кругу так, чтобы сумма всех n попарных произведений соседних чисел была не больше $1/n$. Для этого рассмотрим суммы $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ попарных произведений соседних чисел по всевозможным расстановкам их по кругу. Если считать расстановки, которые не переходят друг в друга при повороте, различными, то существует ровно $(n-1)!$ различных способов расстановки n различных чисел по кругу. При этом каждое слагаемое вида x_ix_j $(i \neq j)$ будет в этих суммах встречаться $2 \cdot (n-2)!$ раз. Пусть $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 1/n$. Тогда

$$1 = (x_1 + \ldots + x_n)^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2 + 2\Sigma \quad \text{и} \quad \Sigma \leqslant \frac{n-1}{2n},$$

где Σ — сумма всех слагаемых вида x_ix_j $(i \neq j)$. С другой стороны, среднее арифметическое всех сумм $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$ равно $\frac{2\Sigma}{n-1}$ и, следовательно, не больше $1/n$. Значит, одна из этих сумм не превосходит $1/n$.

Добавим также, что существует ровно $(n-1)!$ различных способов расстановки n различных чисел по кругу, поэтому фактически доказано, что хотя бы для одной из $(n-1)!$ круговых расстановок соответствующая ей сумма попарных произведений соседних чисел не меньше $1/n$. Оказывается, если число n нечётно, то из этих сумм можно выбрать всего лишь $\frac{n-1}{2}$ сумм, хотя бы одна из которых непременно будет не меньше $1/n$. Например, при $n=7$ в качестве таких сумм можно взять

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_6+x_6x_7+x_7x_1,$$
$$x_1x_3+x_2x_4+x_3x_5+x_4x_6+x_5x_7+x_6x_1+x_7x_2,$$
$$x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6+x_4x_7+x_5x_1+x_6x_2+x_7x_3.$$

Для того чтобы доказать этот факт в общем случае, достаточно представить полный граф на $2n+1$ вершинах в виде объединения n попарно непересекающихся циклов. Как это сделать, можно узнать из книги [61, гл. 9] (см. также комментарий к задаче 6 для 8 класса 1992 г.).

5. Пусть $ABCD$ — данный квадрат, K и L — середины его противоположных сторон AD и BC соответственно. Найдём внутри квадрата такую точку M, что $AM=AK$ и $AB=BM$ (она лежит на пересечении окружности с центром в точке A и радиусом AK и окружности с центром в точке B и радиусом AB). Аналогично найдём точку N, для которой $DN=DK$ и $CD=CN$. Разрезая теперь квадрат по отрезкам, соединяющим точки M и N друг с другом, вершинами квадрата и точками K, L, получим восемь остроугольных треугольников. Действительно, в равнобедренных треугольниках ABM, AMK имеем $\angle BAM=\angle BMA<90^\circ$, $\angle AKM=\angle AMK<90^\circ$, и, кроме того, $\angle BML<\angle BLM<90^\circ$, так как $BL=\frac{BM}{2}<$ $<BM$, а против меньшей стороны лежит меньший угол.

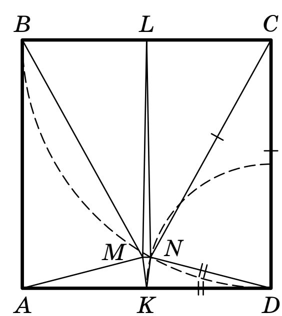


Рис. 52

Комментарий. Задача содержится в книге М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» [15, гл. 37]. Оказывается, на меньшее число остроугольных треугольников квадрат разрезать нельзя: см. задачу 5 для 10 класса.

6. Сопоставим каждому 64-значному числу, не содержащему в записи нулей, такое 64-значное число, чтобы в каждом разряде сумма цифр этих двух чисел равнялась 10; иными словами, числу $\overline{a_1a_2\ldots a_{64}}$ будет соответствовать число $\overline{(10-a_1)(10-a_2)\ldots(10-a_{64})}$. Заметим, что сопоставляемое число также не будет содержать в записи нулей, а все такие 64-значные числа разобьются на пары различных чисел, сопоставленных друг другу, и число $\underbrace{5\ldots5}_{64}$, которому сопоставлено оно само. Сумма чисел в любой паре будет равна $\underbrace{1\ldots1}_{64}0$. Поскольку $1111=101\cdot11$, числа $\underbrace{1\ldots1}_{64}0$ и $\underbrace{5\ldots5}_{64}$ делятся на 101. Значит, в каждой паре либо оба числа кратны 101, либо ни одного. Следовательно, число из условия задачи нечётно.

Комментарий. Заметим, что задача фактически решена для $4n$-значных чисел. Тем же методом решается и такая задача: пусть p — делитель числа $\underbrace{1\ldots1}_{k}$ и n — количество mk-значных чисел, не содержащих нулей и делящихся на p; тогда n нечётно.

9 класс

1. Пусть α — градусная мера одного из плоских углов при вершине пирамиды, а боковая сторона имеет длину a. Тогда площади всех трёх боковых граней равны $S=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha$ (см. рис. 53), поэтому равны и синусы всех трёх углов при вершине пирамиды. Это означает, что сами углы могут равняться только α или $180^\circ-\alpha$, поэтому

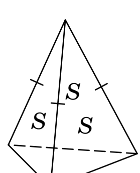


Рис. 53

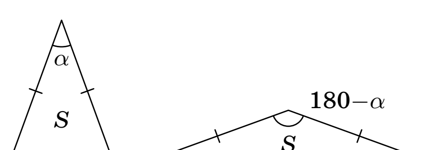


Рис. 54

существуют не более двух различных равнобедренных треугольников с заданной площадью и заданными боковыми сторонами (см. рис. 54). Таким образом, среди боковых граней имеются по меньшей мере две равных, а значит, основание рассматриваемой пирамиды — равнобедренный треугольник.

2. Поскольку из каждой ЭВМ выходит по одному проводу каждого цвета, количество проводов любого из 12 цветов одинаково. Обозначим это количество через m. Тогда количество всех ЭВМ равно $2m$, так как каждый провод соединяет 2 ЭВМ. С другой стороны, 13 — нечётное число. Противоречие.

К о м м е н т а р и й. Решение фактически совпадает с констатацией того очевидного факта, что граф с нечётным числом вершин не может иметь полного паросочетания (см. решение задачи 2 для 8 класса и комментарий к нему).

3. Найдём все такие значения S, что у любого треугольника площади S хотя бы одна из высот имеет длину, меньшую 1 (такие треугольники можно вырезать из полоски, ширина которой меньше 1, см. рис. 55).

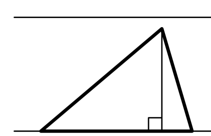


Рис. 55

Поскольку $S=ah/2$, это условие равносильно наличию у треугольника такой стороны a, что $a>2S$. Если все стороны треугольника не превосходят $2S$, то, обозначив через γ наименьший из его углов, получим $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma\leqslant\frac{ab\sqrt{3}}{4}\leqslant\sqrt{3}S^2$, откуда $S\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, если $S<\frac{1}{\sqrt{3}}$, то найдётся сторона $a>2S$, а значит, и высота длины, меньшей 1.

Покажем теперь, что для любого $S\geqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$ существует треугольник площади S, который можно вырезать из полоски единичной ширины, а из любой полоски меньшей ширины его вырезать нельзя. Рассмотрим равнобедренный треугольник, у которого высота, проведённая к основанию, имеет длину 1. Очевидно, что его можно вырезать из полоски единичной ширины. Пусть, далее, основание этого треугольника равно $2a$. Тогда боковая сторона равна $\sqrt{a^2+1}$, а поскольку $2a = 2S/h \geqslant 2/\sqrt{3}$, откуда $a \geqslant 1/\sqrt{3}$, мы получаем, что

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{2a} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4a^2}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

поэтому $\sqrt{a^2+1} \leqslant 2a$, т. е. длины боковых сторон меньше или равны длине основания.

Поскольку для любого треугольника произведение длины стороны на длину проведённой к ней высоты есть величина постоянная, у рассматриваемого треугольника нет высот длины, меньшей 1. Предположим теперь, что такой треугольник можно вырезать из полоски, ширина которой меньше 1. Проведём через его вершины прямые, перпендикулярные сторонам полоски. Все эти прямые различны. В самом деле, поскольку длина основания $2a \geqslant 2/\sqrt{3} > 1$, оно не может лежать на прямой, перпендикулярной сторонам полоски, оставаясь внутри неё. Если же боковая сторона треугольника лежит на прямой, перпендикулярной сторонам полоски, то её длина должна быть меньше 1, а значит, и длина высоты, проведённой к основанию треугольника, также меньше 1, что противоречит выбору треугольника.

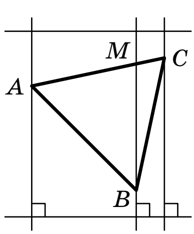


Рис. 56

Пусть теперь ABC — рассматриваемый треугольник, и B — такая его вершина, что проходящая через неё прямая заключена между двумя другими. Тогда эта прямая пересекает сторону AC в некоторой точке M (см. рис. 56). С одной стороны, BM не превосходит ширины полоски, т. е. $BM < 1$. С другой стороны, BM не может быть меньше высоты, проведённой к стороне AC, поэтому $BM \geqslant 1$. Полученное противоречие означает, что рассматриваемый треугольник нельзя вырезать из полоски, ширина которой меньше 1.

Комментарий. Приведённое решение содержит доказательство неравенства $S \geqslant \frac{h^2}{\sqrt{3}}$, где S — площадь, а h — минимальная высота треугольника. Минимальная высота треугольника совпадает с его *шириной* (т. е. минимальной шириной полосы между параллельными прямыми, которой можно накрыть треугольник). Понятие ширины можно ввести и для любой выпуклой фигуры и даже для выпуклых тел любых размерностей. Это понятие, в свою очередь, можно обобщать и далее, и в конце концов прийти к понятию *колмогоровского поперечника* — одному из важных понятий теории приближений, введённых А. Н. Колмогоровым.

Из книги [16, разд. 1.5] можно узнать, как для произвольного треугольника доказываются неравенства

$$\frac{h^2}{\sqrt{3}} \leqslant 3\sqrt{3}r^2 \leqslant \frac{\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}}{\sqrt{3}} \leqslant S \leqslant \frac{p^2}{3\sqrt{3}}, \quad \frac{h^2}{\sqrt{3}} \leqslant \frac{l^2}{\sqrt{3}} \leqslant S \leqslant \frac{L^2}{\sqrt{3}},$$

где h_a, h_b, h_c — его высоты ($\min\{h_a, h_b, h_c\} = h$), r — радиус вписанной окружности, l — самая короткая биссектриса, L — самая длинная биссектриса, а p — полупериметр.

Неравенство $\frac{h^2}{\sqrt{3}} \leqslant S$ справедливо и для любой выпуклой фигуры, если под h понимать её ширину (это теорема венгерского математика Ю. Пала, доказанная в 1920-х годах), причём равенство справедливо только для правильного треугольника. Из указанных выше неравенств следует аналогичное неравенство и для полупериметра треугольника: $\sqrt{3}h \leqslant p$. Однако для произвольного выпуклого n-угольника связь между шириной и полупериметром выглядит так: $nh \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \leqslant p$, причём это неравенство обращается при нечётном n в равенство для правильных n-угольников, при простом n — только для правильных n-угольников, но при составном n есть и неправильные экстремальные n-угольники для этой задачи (см. книгу [16, разд. 2.5 и 2.6]).

4. Рассмотрим сначала случай четырёх чисел: если a, b, c, d — эти числа, то

$$ab + bc + cd + da = (a+b)(c+d) = (a+b)(1-(a+b)) \leqslant \frac{1}{4},$$

поскольку $x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$.

Пусть теперь расставлено более четырёх чисел. Если мы заменим любые два соседних числа их суммой (тем самым уменьшив количество расставленных чисел на единицу), то сумма всех чисел останется равной единице. Выполним эту замену так, чтобы при этом сумма всех попарных произведений соседних чисел не уменьшилась. Пусть s, t, u, v — четыре подряд идущих числа на окружности. Если заменить их на s, $t+u$, v, то неравенство

$$st+tu+uv \leqslant s(t+u)+(t+u)v \;\Leftrightarrow\; tu \leqslant su+tv$$

будет выполнено, если, например, $t \leqslant s$, а этого всегда можно добиться при выборе чисел. Таким образом, последовательно выполняя описанные замены, мы сохраним сумму всех чисел равной 1, а сумму всех попарных произведений соседних чисел не уменьшим. Поэтому за конечное число шагов задача сведётся к рассмотренному выше случаю четырёх чисел.

Комментарий. Частный случай этой задачи при $n=5$ был предложен на Всесоюзной олимпиаде 1973 г. (1-я задача 2-го дня) в несколько иной формулировке (см. [10, задача 187]). Более слабое неравенство (в котором исключено последнее слагаемое) доказано в книге [9, задача 4.14].

5. Например, подходят цифры 1, 5, 6. Действительно, докажем, что

$$\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ троек}}4^2 = \underbrace{1\ldots11}_{n+1\text{ единица}}\overbrace{5\ldots5}^{n\text{ пятёрок}}6.$$

Для этого достаточно убедиться в правильности умножения:

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}\overbrace{3\ldots3}^{n}4\\ 3\ldots34\end{array}\\
\hline
\left.\begin{array}{r}13\ldots36\\ 10\ldots02\\ \ldots\ldots\ldots\\ 10\ldots02\end{array}\right\}n\\
\hline
1\ldots\ldots15\ldots56
\end{array}$$

Второй способ. Заметим, что

$$\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ троек}}5\cdot 3 = 1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}5.$$

Воспользовавшись тождеством $n^2 = 1 + (n-1)(n+1)$, получим

$$\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ троек}}4^2 = 1 + \underbrace{3\ldots33}_{n+1\text{ тройка}}\cdot\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ троек}}5 = 1 + \underbrace{1\ldots11}_{n+1\text{ единица}}\cdot 3\cdot\underbrace{3\ldots3}_{n\text{ троек}}5 =$$

$$= 1 + \underbrace{1\ldots11}_{\substack{n+1\\\text{единица}}}\cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}5 = \underbrace{1\ldots11}_{\substack{n+1\\\text{единица}}}\overbrace{5\ldots5}^{n\text{ пятёрок}}6.$$

К о м м е н т а р и й. Приведённый в решении пример не единственный. Вот другой аналогичный пример:

$$\underbrace{666\ldots66}_{n\text{ шестёрок}}7^2 = \left(\frac{6}{9}(10^{n+2}-1)+1\right)^2 = \left(\frac{2}{3}10^{n+2}+\frac{1}{3}\right)^2 =$$

$$= \frac{4}{9}10^{2n+4} + \frac{4}{9}10^{n+2} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}(10^{2n+4}-1) + \frac{4}{9}(10^{n+2}-1) + 1 = \underbrace{4\ldots44}_{\substack{n+2\\\text{четвёрки}}}\overbrace{8\ldots8}^{\substack{n+1\\\text{восьмёрка}}}9.$$

Ещё одно подобное равенство $666\ldots68^2 = 4\ldots462\ldots24$ получается в качестве решения задачи Всесоюзной олимпиады 1984 г. (первая задача второго дня для 9 класса, см. книгу [10, задача 387]). Второй пример оттуда же $9\ldots98^2 = 9\ldots960\ldots04$ содержит уже 4 цифры и условиям нашей задачи не удовлетворяет. Отметим, что Всесоюзная олимпиада проходила позже Московской, а авторы составляли эти задачи независимо друг от друга. Упомянутая задача Всесоюзной олимпиады была легче данной задачи, потому что в ней явно указывался вид «квадратных» чисел, которые требовалось найти: $x\ldots x6y\ldots y4$. Других решений у неё, кроме указанных выше, нет. Читатель может попробовать сам выяснить, есть ли ещё решения у рассмотренной задачи, кроме трёх указанных выше.

6. Пусть $KLMN$ — прямоугольник из условия задачи, $KL = 3$, $LM = 4$ (тогда по теореме Пифагора $KM = 5$), и пусть A, B, C, D — произвольные четыре точки внутри него. Обозначим через O центр прямоугольника (точку пересечения его диагоналей). Можно считать, что ни одна из точек A, B, C, D не совпадает с O, так как в противном случае расстояние от неё до любой другой точки прямоугольника не превосходит половины длины диагонали, т. е. $5/2$, что меньше $25/8$. Сумма $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA$ равна 360°, поэтому хотя бы один из углов не превосходит 90°, пусть это угол $\angle AOB$. Будем также считать, что этот угол ненулевой, так как в противном случае точки A и B лежат на одном отрезке, длина которого не превосходит половины длины диагонали.

Продолжим отрезок OA до пересечения с границей прямоугольника в точке A' и построим точку B' так, что $\angle A'OB'=90^\circ$ и B' лежит на границе прямоугольника в той же полуплоскости относительно OA', что и точка B (см. рис. 57). По построению точки A и B принадлежат фигуре, которую отделяют от прямоугольника отрезки $A'O$, OB'. Покажем, что расстояние между любыми двумя точками этой фигуры (а значит, и между A и B) не превосходит $25/8$.

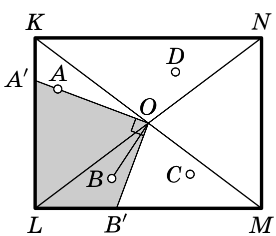


Рис. 57

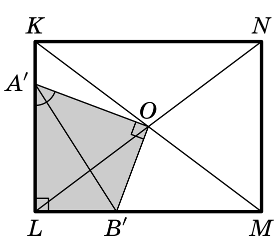


Рис. 58

Возможны три случая расположения точек A' и B' на границе прямоугольника: на смежных сторонах, на одной и той же стороне длины 4, или на противоположных сторонах длины 4 (одной стороне или двум противоположным сторонам длины 3 эти точки принадлежать не могут, так как $\angle KOL=\angle NOM<90^\circ$). Рассмотрим каждый из случаев отдельно.

1) Пусть A' лежит на стороне KL, а точка B' — на стороне LM (см. рис. 58). Тогда четырёхугольник $A'OB'L$ вписан в окружность, построенную на отрезке $A'B'$ как на диаметре, а его длина максимальна среди длин отрезков

между любыми двумя точками этого четырёхугольника. Если $\angle LA'O=\alpha$, то по теореме синусов $A'B'=\dfrac{OL}{\sin\angle LA'O}=$ $=\dfrac{5}{2\sin\alpha}$. Но $\angle A'KO\leqslant\alpha\leqslant 180^\circ-\angle A'LO$, причём $\sin\angle A'KO=$ $=\sin(180^\circ-\angle A'LO)=\sin\angle A'LO=\dfrac{KN}{LN}=\dfrac{4}{5}$, поэтому $\sin\alpha\geqslant\dfrac{4}{5}$, $A'B'=\dfrac{5}{2\sin\alpha}\leqslant\dfrac{5}{2\cdot 4/5}=\dfrac{25}{8}$.

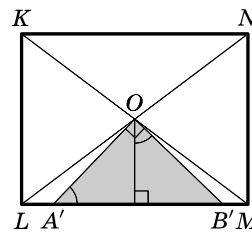


Рис. 59

2) Пусть теперь обе точки A' и B' лежат на большей стороне прямоугольника, например LM (см. рис. 59). Тогда $A'B'$ — гипотенуза в прямоугольном треугольнике $A'OB'$, её длина максимальна среди длин всех отрезков между любыми двумя точками этого треугольника. Если теперь обозначить $\angle OA'B'=\alpha$, то $\angle OB'A'=90^\circ-\alpha$, и

$$A'B'=\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\alpha+\frac{3}{2}\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)=\frac{3}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha).$$

Из неравенства $\angle OLM<\alpha<90^\circ-\angle OML$ имеем $\operatorname{tg}\angle OLM=$ $=\dfrac{3}{4}\leqslant\operatorname{tg}\alpha\leqslant\dfrac{4}{3}=\operatorname{ctg}\angle OML$. Таким образом, $A'B'=\dfrac{3}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$, где $x=\operatorname{tg}\alpha\in\left[\dfrac{3}{4};\,\dfrac{4}{3}\right]$. Заметим, что функция $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ возрастает при $x\geqslant 1$ и убывает при $0<x\leqslant 1$. Действительно[1],

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2+\frac{1}{x_2}-x_1-\frac{1}{x_1}=(x_2-x_1)\frac{x_1x_2-1}{x_1x_2},$$

т. е. $f(x_1)>f(x_2)$ при $0<x_1<x_2\leqslant 1$ и $f(x_1)<f(x_2)$ при $1\leqslant$ $\leqslant x_1<x_2$. Следовательно, $f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке $\left[\dfrac{3}{4};1\right]$ при $x=\dfrac{3}{4}$, а на отрезке $\left[1;\,\dfrac{4}{3}\right]$ — при $x=\dfrac{4}{3}$, поэтому $A'B'\leqslant\dfrac{3}{2}\,f\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{3}{2}\,f\left(\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{25}{8}$.

3) Наконец, пусть точка A' принадлежит стороне LM, а точка B' — стороне KN. Пусть также Q — середина отрез-

[1] Читатель, знакомый с понятием производной, легко докажет это утверждение о функции $f(x)$, рассмотрев $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}$.

ка LM. Можно считать, что точка A' лежит на отрезке LQ (в противном случае рассуждения аналогичны). Обозначим через B'' проекцию точки B' на отрезок LQ (см. рис. 60). Снова можно считать, что точка B'' лежит меж-

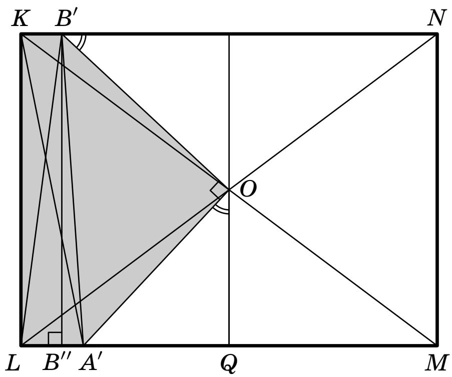


Рис. 60

ду точками L и A' (иначе поменяем местами A' и B'). Тогда длина отрезка $A'K$ не меньше длин $A'B'$ и $B'L$, так как его проекция на LQ среди них максимальна. Значит, длина $A'K$ максимальна среди длин всех отрезков, соединяющих любые две точки пятиугольника $KLA'OB'$. Имеем $\angle A'OQ = \angle NB'O \geqslant \angle NKO$, поэтому $\operatorname{tg} \angle A'OQ \geqslant \operatorname{tg} \angle NKO = \frac{MN}{KN} = \frac{3}{4}$. Следовательно, $A'Q = \frac{3}{2} \operatorname{tg} \angle A'OQ \geqslant \frac{9}{8}$, $A'L \leqslant 2 - \frac{9}{8} = \frac{7}{8}$, $A'K = \sqrt{KL^2 + A'L^2} \leqslant \sqrt{3^2 + \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{25}{8}$.

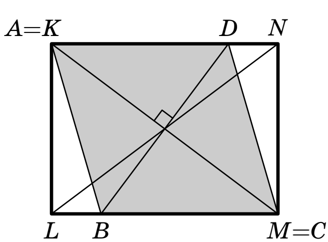


Рис. 61

Итак, во всех случаях требуемое неравенство доказано. Отметим, что минимальное из расстояний между точками A, B, C, D равно в точности $25/8$ в случае, если они расположены в вершинах максимального ромба, вписанного в данный прямоугольник (см. рис. 61), причём эта экстремальная конфигурация единственна (с точностью до симметрий).

Комментарий. Задача является частным случаем задачи размещения в данной фигуре (или данном пространственном теле) заданного числа n точек так, чтобы минимальное расстояние между ними было максимально. В некотором смысле обратная задача такова: для данного числа ε разместить в данном множестве наибольшее число точек, попарные расстояния между которыми не меньше ε. В геометрии и топологии (точнее, в теории метрических пространств) такое множество называется *максимальной ε-сетью*. В теории кодов, исправляющих ошибки, подобное множество называется максимальным кодом с данным расстоянием. Близкой к упомянутым является задача размещения в данной фигуре максимального числа непересекающихся шаров данного радиуса — задача плотнейшей упаковки шаров. Эта задача имеет существенное значение для направления в теории чисел, которое называется геометрией чисел. Подобная же задача активно исследуется и в теории кодирования. Точные решения подобных задач удаётся получить только в простейших частных случаях.

Аналогичная задача про прямоугольник 3×4 была на Всесоюзной олимпиаде 1981 г. (второй день, 2-я задача, 10 класс), но там было 6 точек, а не четыре, и оценка не была достижимой.

10 класс

1. Поскольку $0 < 1 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, справедливы неравенства $\sin 1 < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{7}{8}$. С другой стороны, логарифмируя по основанию 3 неравенство $3^7 < 7^4$, получаем $7 < 4 \log_3 7$, а значит, $\frac{7}{8} < \log_3 \sqrt{7}$.

2. Обозначим через n количество задач, предложенных участникам олимпиады, и пусть k — число разрядов, достаточное, чтобы записать в десятичной системе любую сумму баллов, набранную участниками. Тогда каждому участнику сопоставляется $(kn+1)$-разрядное натуральное число, десятичная запись которого начинается с единицы (чтобы не допустить нуль в старшем разряде), затем в k разрядах записана сумма баллов участника, при необходимости дополненная нулями в старших разрядах, а далее следуют аналогичным образом записанные баллы за каждую задачу:

$$1\overbrace{\underbrace{**\ldots**}_{k\text{ разрядов}}}^{\substack{\text{сумма}\\ \text{баллов}}}\overbrace{\underbrace{**\ldots**}_{k\text{ разрядов}}}^{\substack{\text{балл за}\\ \text{задачу 1}}}\ldots\overbrace{\underbrace{**\ldots**}_{k\text{ разрядов}}}^{\substack{\text{балл за}\\ \text{задачу } n}}$$

Очевидно, что рассматриваемое сопоставление удовлетворяет условию задачи.

Комментарий. Приведённое решение можно назвать наиболее естественным: оно обобщает различные подходы и свободно от какихлибо предположений о числе задач и системе начисления баллов.

3. Преобразуем данное уравнение к виду $19(x^3-100)=84(1+y^2)$. Правая часть полученного уравнения делится на 7, поэтому и левая часть тоже должна делиться на 7. Значит, x^3-100 делится на 7, т. е. x^3 даёт остаток 2 при делении на 7. Составим таблицу остатков при делении на 7 чисел x и x^3.

Остаток при делении x на 7	0	1	2	3	4	5	6
Остаток при делении x^3 на 7	0	1	1	6	1	6	6

Получаем, что x^3 не может давать остаток 2 при делении на 7, поэтому рассматриваемое уравнение не имеет решений в целых числах.

4. *Первый способ*. Вычеркнем из последовательности $n_1, n_2, n_3, \ldots$ все числа, которые можно получить, суммируя меньшие члены этой последовательности (каждое число можно суммировать несколько раз). Очевидно, что любую сумму, которую можно уплатить без сдачи выпущенными монетами, можно уплатить только монетами, достоинство которых осталось в последовательности после вычёркивания. Докажем, что после вычёркивания осталось конечное число членов последовательности. Заметим, что n_1 вычеркнуто не было. Разделим любые два различных оставшихся числа n_s и n_t $(n_s > n_t)$ на n_1 с остатком. Если предположить, что полученные остатки совпали, т. е. $n_s = q_s n_1 + r$ и $n_t = q_t n_1 + r$, то $n_s - n_t = (q_s - q_t)n_1$, а значит, большее из чисел n_s и n_t есть сумма меньшего из них и qn_1, где $q = q_s - q_t$ — натуральное число, а это противоречит тому, что число n_s не было вычеркнуто. Следовательно, все числа, оставшиеся после вычёркивания, дают различные остатки при делении на n_1. Таким образом, количество оставшихся чисел не больше чем n_1, а значит, конечно. Итак, если n_N — наибольшее из невычеркнутых чисел, то для уплаты любой требуемой суммы достаточно монет достоинством в $n_1, n_2, \ldots, n_N$ копеек.

Второй способ. Пусть P — множество всех сумм, которые можно составить из чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots$ (каждое число можно суммировать несколько раз). Обозначим наименьшую из положительных разностей элементов множества P через m и пусть $m = y - x$, где x, y — соответствующие суммы некоторых чисел из последовательности $n_1, n_2, n_3, \ldots$ Докажем, что любое число a из P делится на m. Действительно, если это не так, то разделим a на m с остатком: $a = qm + r$, где $0 < r < m$. Тогда $r = a - qm = (a + qx) - qy$, т. е. остаток r представим в виде разности двух чисел из множества P, что противоречим минимальности m. Разделим теперь все числа из P на m. Получим множество P', состоящее из натуральных чисел, причём среди них найдутся два последовательных: k и $k+1$. Выберем произвольное натуральное число n и разделим его на k с остатком:

$$n = qk + r = (q - r)k + r(k+1).$$

Если $n \geqslant k^2$, то $q \geqslant k > r$, поэтому $q - r > 0$. Следовательно, все элементы множества P, возможно, за исключением элементов $m, 2m, \ldots, (k^2 - 1)m$, представляются в виде

$$nm = (q - r)(km) + r((k+1)m),$$

где числа km и $(k+1)m$ принадлежат множеству P. Это означает, что для уплаты любой суммы из множества P достаточно конечного набора номиналов монет.

Комментарий. Задачу можно переформулировать так: любое множество, состоящее из натуральных чисел и замкнутое относительно сложения (на алгебраическом языке это подполугруппа полугруппы натуральных чисел относительно операции сложения), конечно порождено (порождается с помощью сложения своим конечным подмножеством). Примером множества, порождаемого n числами, служит n, $n+1$, ..., $2n-1$, $2n$, $2n+1$, ... Для сравнения: множество целых чисел, замкнутое относительно операций сложения и вычитания, порождается одним числом (наибольшим общим делителем всех чисел этого множества) — это множество состоит из всех чисел, кратных этому числу. Если дан набор чисел a_1, ..., a_n с наибольшим общим делителем 1, множество, порождённое этим набором с помощью сложения, начиная с некоторого N будет содержать все числа (это можно доказать, например, аналогично последнему решению).

Интересная задача о вычислении такого наименьшего N называется проблемой Фробениуса. Она не решена до сих пор, а её частные случаи (известные ещё в XIX в. Дж. Сильвестру) неоднократно предлагались на различных олимпиадах. Вопрос о возможности представить число N в виде суммы $a_1x_1+\ldots+a_nx_n$, где a_1, ..., a_n — произвольные заданные числа, а $x_i=0$ или 1, называется проблемой упаковки в рюкзак, а если x_i могут быть любыми неотрицательными числами — проблемой размена монет. Обе эти проблемы относятся к числу NP-полных проблем, быстро работающий алгоритм для решения которых (т. е. нахождения x_i по данным N и a_1, ..., a_n) на настоящий момент неизвестен.

5. Пример разрезания квадрата на 8 остроугольных треугольников приведён в решении задачи 5 для 8 класса. Покажем, что на меньшее количество остроугольных треугольников его разрезать нельзя.

Пусть квадрат разрезан на n остроугольных треугольников. Их вершины могут быть одного из трёх типов: 1) четыре вершины, являющиеся вершинами квадрата; 2) вершины, лежащие строго внутри сторон каких-то из этих n треугольников или на сторонах квадрата (пусть их количество равно k), и 3) все остальные вершины (пусть их количество равно m). Общее число углов всех n треугольников равно $3n \geqslant 8+3k+5m$, так как в каждой вершине первого типа сходятся не менее двух углов, в сумме дающих $\pi/2$, в каждой вершине второго типа сходится не менее трёх углов, в сумме дающих π, а в каждой вершине третьего типа сходится не менее 5 углов, в сумме дающих

2π. С другой стороны, сумма величин этих углов (в радианах) равна $\pi n = 4\cdot\pi/2+\pi k+2\pi m$, поэтому $3n=6+3k+6m\geqslant$ $\geqslant 8+3k+5m$, откуда $m\geqslant 2$. Таким образом, вершин третьего типа не менее двух. Выберем две такие вершины и для каждой из них рассмотрим все треугольники, которым они принадлежат; пусть их количества равны d_1 и d_2 соответственно. Среди всех этих треугольников может быть не более двух общих для выбранных точек. Значит, $n\geqslant d_1+d_2-2\geqslant 5+5-2=8$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Постановка этой задачи есть в книге М. Гарднера [15, гл. 37]. Он приводит пример разрезания квадрата на восемь остроугольных треугольников, но пишет, что получить доказательство неравенства $n\geqslant 8$ не смог.

6. *Первый способ*. Заметим, что вершины треугольного сечения куба всегда лежат на трёх смежных рёбрах. Пусть AB, AC, AD — смежные рёбра куба, а $B_1\in AB$, $C_1\in$ $\in AC$, $D_1\in AD$ — вершины сечения. Шар, вписанный в куб, касается граней усечённого тетраэдра $BCDB_1C_1D_1$ в точках O_1, O_2, O_3 — серединах рёбер BC, BD, CD соответственно и в точке O грани $B_1C_1D_1$. Из равенства отрезков касательных, проведённых к шару из одной точки, следует, что $\triangle B_1C_1O=\triangle B_1C_1O_1$, поэтому $S_{B_1C_1O}=S_{B_1C_1O_1}$ и, аналогично, $S_{B_1D_1O}=S_{B_1D_1O_2}$, $S_{C_1D_1O}=S_{C_1D_1O_3}$.

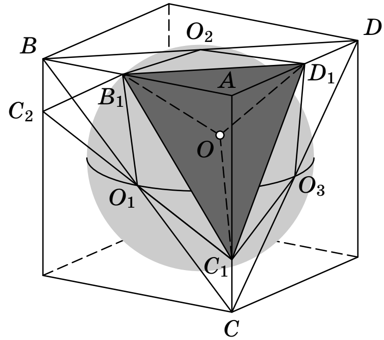


Рис. 62

Пусть точка C_2 симметрична точке C_1 относительно O_1. Тогда $\triangle O_1CC_1 = \triangle O_1BC_2$, поэтому $S_{O_1CC_1} = S_{O_1BC_2}$. Треугольники $B_1C_1O_1$ и $B_1C_2O_1$ имеют равные основания и высоту, проведённую из вершины B_1, а значит, $S_{B_1C_1O_1} = S_{B_1C_2O_1}$. Четырёхугольник $BB_1O_1C_2$ выпуклый, поэтому

$$S_{B_1C_1O_1} = S_{B_1C_2O_1} \leqslant S_{BB_1O_1C_2} = S_{BB_1O_1} + S_{O_1BC_2} = \\ = S_{BB_1O_1} + S_{O_1CC_1} = S_{BB_1C_1C} - S_{B_1C_1O_1},$$

откуда $2S_{B_1C_1O_1} \leqslant S_{BB_1C_1C}$. Аналогично доказываются неравенства $2S_{B_1D_1O_2} \leqslant S_{BB_1D_1D}$ и $2S_{C_1D_1O_3} \leqslant S_{CC_1D_1D}$. Складывая эти три неравенства и учитывая доказанные выше равенства площадей треугольников, получаем

$$2S_{B_1C_1D_1} \leqslant S_{BB_1C_1C} + S_{BB_1D_1D} + S_{CC_1D_1D}.$$

Поскольку у тетраэдра $AB_1C_1D_1$ площадь боковой поверхность больше площади его основания $B_1C_1D_1$, имеем

$$3S_{B_1C_1D_1} = 2S_{B_1C_1D_1} + S_{B_1C_1D_1} \leqslant \\ \leqslant (S_{BB_1C_1C} + S_{BB_1D_1D} + S_{CC_1D_1D}) + S_{B_1C_1D_1} < (S_{BB_1C_1C} + S_{AB_1C_1}) + \\ + (S_{BB_1D_1D} + S_{AB_1D_1}) + (S_{CC_1D_1D} + S_{AC_1D_1}) = 3S_{ABC},$$

откуда $S_{B_1C_1D_1} < S_{ABC}$, что и требовалось доказать. Заметим, что доказанная оценка неулучшаема, т. е. если точку B_1 устремить к точке B, C_1 — к C, D_1 — к A так, чтобы $\triangle B_1C_1D_1$ всё время касался шара, то $S_{B_1D_1C_1}$ будет стремиться к S_{ABC}.

Второй способ. Без ограничения общности можно считать, что ребро рассматриваемого куба равно 2. Обозначим куб[1] $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и его треугольное сечение KLM так, чтобы $K \in A_1B_1$, $L \in BB_1$, $M \in B_1C_1$ (см. рис. 63).

Пусть сечение куба касается вписанного в куб шара в точке H. Обозначим через P, Q, R точки касания шара с теми гранями куба, на которых лежат отрезки KM, LM

[1] В этом способе решения для удобства используются другие обозначения по сравнению с первым способом. Точке A на рис. 62 соответствует точка B_1, точке B — точка A_1, точке C — точка B и т. д.

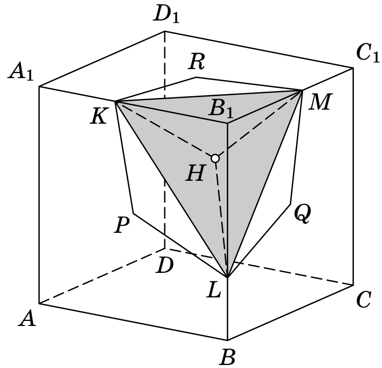


Рис. 63

и KM соответственно. По свойству отрезков касательных, проведённых к сфере из одной точки, получаем $KH = KP$ и $LH = LP$, поэтому $\triangle KLP = \triangle KLH$ по трём сторонам. Аналогично, $\triangle LMH = \triangle LMQ$, $\triangle KMR = \triangle KMH$. Следовательно, площадь $\triangle KLM$ равна сумме площадей $\triangle KLP$, $\triangle LMQ$ и $\triangle KMR$.

Введём на плоскости, содержащей грань ABB_1A_1, плоскую декартову систему координат с началом в точке P так, чтобы вершина B_1 имела координаты $(1; 1)$. Обозначим координаты точек K и L через $(x,\ 1)$ и $(1,\ y)$ соответственно. Выразим площадь $\triangle KLP$ через x и y. Рассмотрим три случая (см. рис. 64): а) $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$; б) $x \geqslant 0$ и $y < 0$; в) $x < 0$ и $y < 0$ (случай $x < 0$ и $y \geqslant 0$ аналогичен случаю б).

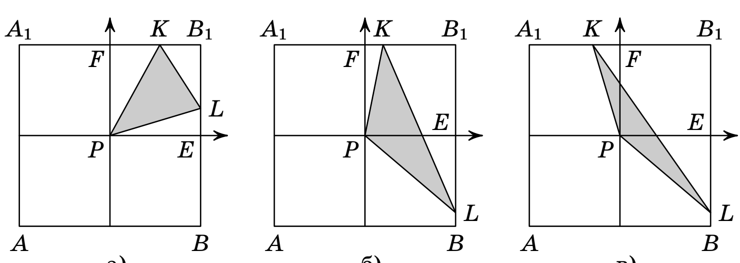


Рис. 64

Поскольку в случае а)

$$S_{KLP} = S_{PFB_1E} - S_{PEL} - S_{PKF} - S_{KLB_1},$$

в случае б)

$$S_{KLP} = S_{PFB_1E} + S_{PEL} - S_{PKF} - S_{KLB_1},$$

в случае в)

$$S_{KLP} = S_{PFB_1E} + S_{PEL} + S_{PKF} - S_{KLB_1},$$

во всех трёх случаях получаем

$$S_{KLP} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}(1-x)(1-y) = \frac{1}{2}(1-xy).$$

Введём теперь на плоскости, содержащей грань BCC_1B_1, плоскую декартову систему координат с началом в точке Q так, чтобы ней вершина B_1 также имела координату $(1; 1)$. Тогда в ней точка L имеет координаты $(y; 1)$. Пусть точка M имеет координаты $(1; z)$. Тогда $S_{LMQ} = \frac{1}{2}(1-yz)$. Рассматривая аналогичную систему координат на плоскости, содержащей грань $A_1B_1C_1D_1$, получим $S_{KMR} = \frac{1}{2}(1-xz)$.

Остаётся показать, что

$$\frac{1}{2}(1-xy) + \frac{1}{2}(1-yz) + \frac{1}{2}(1-xz) < 2,$$

т. е. $xy + yz + xz > -1$. По условию задачи выполнены неравенства $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, $|z| \leqslant 1$, причём никакие два из этих неравенств не могут обращаться в равенства одновременно, так как не существует треугольного сечения куба, проходящего через две его вершины и касающегося вписанного в этот куб шара.

Если хотя бы одно из чисел x, y, z равно нулю, то неравенство выполнено. Пусть теперь числа x, y, z отличны от нуля. Если все три их попарных произведения положительны, то неравенство верно. Если есть ровно одно отрицательное попарное произведение, скажем xy, то тогда числа x и y разных знаков, но xz и yz положительны, значит, они имеют то же знак, что и z, — противоречие. Кроме того, все три попарных произведения не могут быть отрицательны, так как это означало бы, что каждая пара из трёх чисел x, y, z имеет разные знаки, что невозможно. Остаётся рассмотреть случай двух отрицательных попарных произведений. Пусть это xy и yz. Тогда числа x и z одного знака, поэтому

$$1+xy+yz+xz=1+y(x+z)+xz \geqslant 1-1\cdot|x+z|+xz = \\ = 1-|x|-|z|+xz=(1-|x|)(1-|z|) \geqslant 0.$$

Если первое из двух неравенств в этой цепочке обращается в равенство, то $x=-z$ или $|y|=1$. Если же второе из неравенств обращается в равенство, то $|x|=1$ или $|z|=1$. Поэтому оба этих неравенства не могут обращаться в равенства одновременно, так как иначе либо $|x|=|y|=1$, либо $|y|=|z|=1$, либо $|z|=|x|=1$. Следовательно, $xy+yz+xz > -1$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Первое решение принадлежит автору задачи. В нём в качестве вспомогательной леммы, не прописанной явно, фактически содержится решение третьей задачи первого дня Всесоюзной олимпиады 1983 г. для учащихся 9 классов (в книге [10] приведено другое решение). Идея второго решения предложена Г. А. Гальпериным. Ещё одно решение опубликовано И. Ф. Шарыгиным в журнале «Квант» [51]. Отметим, что в этом журнале задача дана в обобщённой формулировке: докажите, что площадь сечения куба плоскостью, касающейся вписанной в него сферы, не превосходит половины площади грани куба; рассмотрите случаи, когда это сечение а) треугольник, б) четырёхугольник, и докажите, что в случае а) площадь полной поверхности отсекаемого от куба тетраэдра меньше площади грани. Решение для четырёхугольного сечения написано В. Н. Дубровским.

Автор придумал задачу при попытке доказать стереометрический вариант теоремы Эрдёша о том, что если два квадрата со сторонами a, b, не пересекаясь по внутренним точкам, лежат в квадрате 1×1, то $a+b\leqslant 1$ (неравенство, очевидно, достижимо, а саму задачу можно найти в книге [30, задача 19]). В стереометрическом варианте речь идёт о кубах, а неравенство остаётся таким же. Н. Н. Нецветаев сообщил нам, что, используя в качестве леммы задачу 6 для 10 класса (наряду с другими соображениями), Ф. Л. Назаров доказал стереометрический вариант теоремы Эрдёша (видимо, доказательство не было опубликовано).

1985 год (XLVIII олимпиада)

7 класс

1. Преобразуем уравнение:

$$xy+1=x+y;\quad xy-x-y+1=0;\quad (x-1)(y-1)=0.$$

Множество решений последнего уравнения состоит из всевозможных пар чисел x, y, в которых одно из чисел равно 1, а другое произвольно.

2. Поскольку даны пять чисел, при любом разбиении их на две группы в одной из групп будет менее трёх чисел, а так как числа положительны, пустых групп (сумма чисел в которых равна нулю) не будет. Следовательно, при любом разбиении получим или группы из одного и четырёх чисел, или из двух и трёх чисел. Если группа состоит из одного числа, то это число равно сумме остальных четырёх и, следовательно, других разбиений таких пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи, нет. Пусть теперь a, b, x, y, z — различные числа и выполнено равенство $a+b=x+y+z$. Тогда если существует ещё одно разбиение на группы, то в одной из них должны быть также два числа, а в другой — три. Кроме того, группа, состоящая из двух чисел, должна состоять из одного из чисел пары a, b и одного из чисел тройки x, y, z. Можно считать, что разбиение имеет вид a, x и b, y, z, причём $a+x=b+y+z$. Вычитая из первого равенства второе, получим $b-x=x-b$, откуда $x=b$, а это противоречит условию различности заданных чисел.

Комментарий. Отметим, что для шести (и большего количества) чисел нельзя утверждать, что существует не более одного способа разбить их на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми. Например, возьмём числа 1, 2, 3, 4, 5, 7. Тогда $7+4=1+2+3+5$ и $7+1+3=2+4+5$. Если же среди пяти чисел встречаются одинаковые, то также может существовать не менее двух способов, если считать числа занумерованными, причём равные числа с разными номерами отличать друг от друга. Читатель может попробовать найти наибольшее количество разбиений на две одинаковые суммы в этом случае самостоятельно. Однако если не различать формально равные числа, то ответ задачи остаётся верным и в случае, когда среди чисел могут быть равные.

3. Покажем, что существует треугольник, длины сторон которого равны b, c и $d-a$. Для этого достаточно проверить неравенство треугольника для каждой из сторон:

$$b<c+(d-a),\quad c<b+(d-a),\quad d-a<b+c.$$

По условию задачи справедливы все три неравенства. Значит, существует $\triangle ABE$, у которого $AB=c$, $BE=b$, $AE=$ $=d-a$. Отложим на луче AE отрезок AD длины d (см. рис. 65). Проведём через точку B прямую, параллельную прямой AD, и отложим на ней отрезок BC длины a в ту же полуплоскость относительно прямой AB, в которой находится точка D. Тогда у четырёхугольника $BCDE$ стороны BC и DE параллельны и равны, а значит, это параллелограмм. Следовательно, $CD=BE=b$. Наконец, поскольку стороны четырёхугольника $ABCD$ равны a, b, c, d, стороны BC и AD параллельны, а стороны AB и CD не параллельны, то $ABCD$ — трапеция, удовлетворяющая условию задачи.

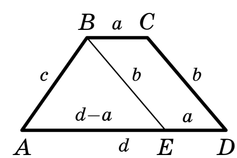


Рис. 65

Комментарий. Можно доказать (см. решение второй задачи второго тура для 7 класса Московской математической олимпиады 1960 г. [40]), что если из четырёх отрезков можно сложить некоторый четырёхугольник, то из этих отрезков можно сложить и такой четырёхугольник, у которого хотя бы две стороны параллельны.

4. Пусть $ABCD$ — данный квадрат и O — точка пересечения его диагоналей (см. рис. 66). За время, которое требуется зайцу для того, чтобы с максимальной скоростью пробежать путь $OA=\frac{a}{\sqrt{2}}$, волк пробежит расстояние, не превосходящее $\frac{a}{\sqrt{2}}1{,}4<a$. Следовательно, если на сторонах квадрата отметить точки B_1 и D_1 так, что $BB_1=DD_1=$ $=\frac{a}{\sqrt{2}}1{,}4$, то за указанное время волки, исходно находив-

шиеся в углах B и D, не успеют добежать ни до одной точки, которая ближе к вершине A, чем B_1 и D_1. Пусть F — любая точка интервала AB_1 (например, его середина) и FH — перпендикуляр, проведённый из этой точки к диагонали AC. Тогда $AH = FH$, поэтому путь OHF заяц может преодолеть за то же время, что и путь OHA. Если в тот момент, когда заяц окажется в точке H, один из волков будет находиться в вершине A, то этот волк не успеет добежать до точки F, поскольку $AF = \sqrt{2}HF > 1{,}4HF$.

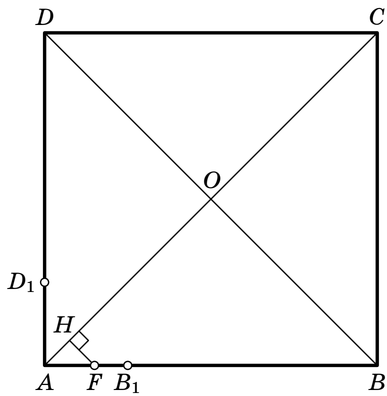


Рис. 66

Таким образом, заяц может действовать следующим образом. Сначала он бежит к точке H по диагонали с максимальной скоростью, а в точке H он, не меняя скорости, сворачивает на 90° и движется перпендикулярно диагонали к той стороне квадрата, на которой не находится волк, исходно сидевший в вершине A (если в момент поворота волк находится в A, то заяц сворачивает на 90° в любую сторону). Проведённые рассуждения показывают, что в момент, когда заяц пересечёт сторону квадрата, ни один из четырёх волков не сможет оказаться в той же точке.

Комментарий. Фактически доказано, что если максимальная скорость волков будет меньше чем в $\sqrt{2}$ раз превосходить максимальную скорость зайца, то заяц сможет выбежать из квадрата. Если же волки смогут двигаться хотя бы в $\sqrt{2}$ раз быстрее зайца, то они всегда смогут его поймать, например, всё время перемещаясь так, чтобы отрезки, соединяющие точки расположения несмежных волков, были параллельны диагоналям квадрата и пересекались в точке нахождения зайца. Утверждение о возможности поимки зайца волками предлагалось в качестве задачи на Всесоюзной олимпиаде 1969 г. ([10], задача 116).

5. *Первый способ*. За два взвешивания нальём в пустые фляги по 1 л. Выливая молоко из одной фляги в другую и делая третье взвешивание, получим в двух флягах по 2 л, а в третьей останется 1 л. Сольём всё молоко в одну флягу: тогда в ней окажется 5 л, а остальные опустеют. Делая два взвешивания, нальём в пустые фляги по 5 л. Выльем молоко из одной фляги в другую и, сделав шестое взвешивание, получим в двух флягах по 10 л, а в третьей останется 5 л. Проделав последние действия ещё два раза (седьмое и восьмое взвешивание), получим в двух флягах по 40 л, а в третьей 5 л. Сливая содержимое всех фляг в одну, получим в ней 85 л.

Второй способ. Нальём в пустые фляги по 1 л, сделав два взвешивания. Выльем молоко из одной фляги в другую и, делая третье взвешивание, получим в двух флягах по 2 л, а в третьей останется 1 л. Проделав последние действия ещё два раза (четвёртое и пятое взвешивание), получим в двух флягах по 8 л, а в третьей 1 л. Сольём всё молоко в одну флягу: тогда в ней окажется 17 л, а остальные опустеют. Наполним обе пустые фляги семнадцатью литрами молока, сделав два взвешивания. Выльем молоко из одной фляги в другую и, делая восьмое взвешивание, получим в двух флягах по 34 л, а в третьей останется 17 л. Остаётся слить вместе 34 л, 34 л и 17 л.

Комментарий. В условии задачи предполагается, что во флягу помещается более 85 л, а под взвешиванием понимается следующая операция: на одну чашку весов ставится фляга с молоком, на вторую — пустая, и в пустую флягу доливается столько молока, чтобы весы пришли в равновесие. Различие двух приведённых решений можно проиллюстрировать следующей таблицей.

№ взвешивания	Фляга 1	Фляга 2	Фляга 3	Фляга 1	Фляга 2	Фляга 3
1	1	1	0	1	1	0
2	1	1	1	1	1	1
3	2	2	1	2	2	1
4	5	5	0	4	4	1
5	5	5	5	8	8	1
6	10	10	5	17	17	0
7	20	20	5	17	17	17
8	40	40	5	34	34	17

Отметим, что задача о переливаниях в указанной формулировке очень близка к задаче о построении минимальной аддитивной цепочки. Аддитивной цепочкой называется любая последовательность натуральных чисел a_0, a_1, ..., a_m, в которой $a_0 = 1$, а каждое из следующих чисел является суммой каких-то двух предыдущих чисел (или удвоением какого-то предыдущего числа). Число m называется длиной цепочки. Обозначим через $l(N)$ наименьшую длину аддитивной цепочки, заканчивающейся числом N. Например, 1, 2, 3, 5 и 1, 2, 4, 5 — две минимальные (по длине) цепочки для 5, поэтому $l(5) = 3$.

Точная формула для длины $l(N)$ минимальной аддитивной цепочки, вычисляющей произвольное натуральное число N, неизвестна несмотря на кажущуюся простоту задачи, её важное прикладное значение (например, длина минимальной аддитивной цепочки для N равна минимальному числу умножений для возведения данного числа в N-ю степень) и её солидный возраст (в научных публикациях она массово появляется с тридцатых годов XX века, а единичные публикации появлялись ещё в XIX веке).

Приведённые выше два решения являются по существу применениями известного «алгоритма множителей» нахождения аддитивной цепочки для числа 85. В первом из них сначала вычисляется число 5, потом оно «умножается» на 17 с помощью аддитивной цепочки для числа 17 (в которой все числа умножаются на 5). При этом получается цепочка 1, 2, 4, 5, 10, 20, 40, 80, 85. Во втором решении наоборот: вначале вычисляется число 17, а затем оно «умножается» на 5. Так получается цепочка 1, 2, 4, 8, 16, 17, 34, 68, 85.

Добавим, что решая задачу таким способом, можно отлить $(2^{n_1}+1)\cdot$ $\cdot(2^{n_2}+1)\ldots(2^{n_k}+1)$ л молока за $m=(n_1+1)+\ldots+(n_k+1)$ взвешиваний. В рассмотренной задаче $85=(2^2+1)(2^4+1)$ и $m=8$.

Ещё в Древнем Египте был известен другой алгоритм вычисления аддитивных цепочек. Этот «бинарный алгоритм» иногда лучше «метода множителей», а иногда хуже. Проиллюстрируем действие этого алгоритма на примере числа 85. Поскольку $85=64+16+4+1$, двоичная запись этого числа есть $(1010101)_2$. На первом шаге алгоритма начинаем цепочку, как и положено, с 1. На k-м шаге алгоритма при $k \geqslant 2$ получаем число, двоичная запись которого даёт первые k цифр двоичной записи числа 85. Так, на втором шаге алгоритма получаем число с двоичной записью $(10)_2$, т. е. 2, складывая 1 и 1 (этот шаг алгоритма добавляет к цепочке одно число — 2). На втором шаге алгоритма получаем число с двоичной записью $(101)_2$, т. е. 5, складывая 2 и 2 и затем прибавляя 1 (этот шаг алгоритма добавляет к цепочке два числа — 4 и 5). Продолжая далее, в итоге находим цепочку 1, $2=1+1$, $4=2+2$, $5=4+1$, $10=5+5$, $20=10+10$, $21=20+1$, $42=21+21$, $84=42+42$, $85=84+1$, которая имеет большую длину, чем цепочки, найденные ранее с помощью «метода множителей». Значит, для числа 85 «бинарный алгоритм» хуже.

Предлагаем заинтересованному читателю самостоятельно убедиться в том, что $l(85)=8$, а также ближе познакомиться с аддитивными цепочками, прочитав книги [18] и [20].

8 класс

1. Преобразуем данное равенство:

$$(x-y+z)^2-z^2=x^2-y^2;$$
$$(x-y)(x-y+2z)=(x-y)(x+y);$$
$$(x-y)(2z-2y)=0.$$

Таким образом, исходное равенство равносильно уравнению $(x-y)(z-y)=0$, которому удовлетворяют всевозможные тройки чисел x, y, z, где $x=y$ или $y=z$, и только эти тройки.

Комментарий. Эта задача составлена по материалам математических олимпиад, проводившихся в Югославии.

2. *Первый способ*. Рассмотрим 993 числа: $a_{993}, \ldots, a_{1985}$. Хотя бы одно из этих чисел, скажем a_k, не меньше чем 993, иначе среди них нашлись бы два одинаковых. Поэтому $a_k \cdot k \geqslant a_k \cdot 993 \geqslant 993^2$.

Второй способ. Количество чисел a_k, не меньших чем 993, равно $1985-993+1=993$. Поэтому хотя бы одно из них имеет номер k, не меньший 993, и для него $a_k \cdot k \geqslant 993 \cdot k \geqslant 993^2$.

3. Докажем, что квадрат из условия задачи обязательно содержит хотя бы два узла. Для этого рассмотрим круг, вписанный в данный квадрат, и клетку, в которую попадает центр круга. Разобьём эту клетку диагоналями на 4 треугольника. Центр круга лежит в одном из этих треугольников. Поскольку сторона квадрата равна удвоенной стороне клетки, радиус круга равен стороне клетки, т. е. гипотенузе рассматриваемого треугольника. Следовательно, оба конца гипотенузы, являющиеся при этом узлами, лежат внутри круга, а значит, и внутри квадрата (см. рис. 67).

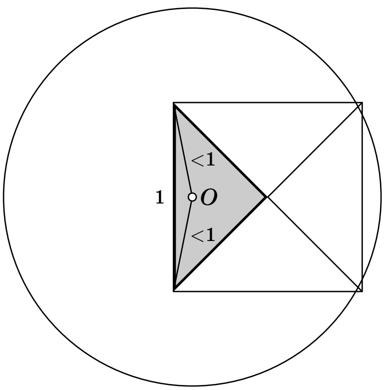


Рис. 67

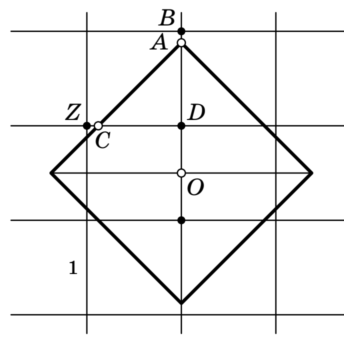


Рис. 68

Пример расположения квадрата, накрывающего ровно 2 узла, приведён на рис. 68: диагонали квадрата параллельны линиям бумаги, а центр лежит посередине между двумя соседними узлами. Узлы Z и B на рис. 68 не попадают внутрь квадрата потому, что половина диагонали квадрата $OA = \sqrt{2} < \frac{3}{2} = OB$ (так как $2 < \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$) и $DC = DA = \sqrt{2} - \frac{1}{2} < DZ = DB = 1$.

4. Возможны два случая: 1) для каждого богатыря найдётся богатырь меньшего роста; 2) найдётся богатырь (возможно, не один), рост которого не больше, чем рост любого другого богатыря (назовём такого богатыря «наименьшим»). В случае 1) можно оставить в строю бесконечную колонну богатырей, выстроенную в порядке убывания роста, следующим образом. Первый богатырь остаётся в строю, а стоящие за ним выходят из строя до тех пор, пока не встретится богатырь роста меньшего, чем первый (возможно, уже второй богатырь будет ниже первого и никому выходить из строя не придётся). Этот богатырь остаётся в строю, а стоящие за ним выходят из строя до тех пор, пока не встретится богатырь роста меньшего, чем он сам, и т. д. Поскольку для каждого богатыря найдётся богатырь меньшего роста, этот процесс не остановится ни на каком конечном шаге, поэтому в строю останется бесконечно много богатырей.

В случае 2) выберем любого наименьшего богатыря и рассмотрим колонну, стоящую за ним. Если в этой колонне нельзя выбрать наименьшего богатыря, то для неё можно провести рассуждения случая 1) и удовлетворить условию задачи. Если же в этой колонне можно выбрать наименьшего богатыря, то рассмотрим колонну, стоящую за последним из двух выбранных богатырей. Повторяя уже проведённое рассуждение, получаем для этой колонны или случай 1), или выбираем из неё третьего наименьшего богатыря и т. д. В любом случае или на некотором шаге наступит случай 1), или получится бесконечная колонна из наименьших богатырей, выстроенная в порядке неубывания роста. Во всех случаях утверждение доказано.

Комментарий. В сущности мы доказали, что из любой бесконечной последовательности действительных чисел можно выбрать бесконечную монотонную подпоследовательность. Этот факт доказывается в курсе математического анализа и легко следует из принципа существования предельной точки у ограниченной последовательности, но приведённое рассуждение имеет то преимущество, что оно не использует никаких свойств действительных чисел, кроме отношения порядка.

5. *Первый способ*. Пусть ABC — треугольник, удовлетворяющий условию задачи, причём $AB \leqslant AC$ и $AB \leqslant BC$

(см. рис. 69). Тогда $\angle C \leqslant 60^\circ$ как угол, лежащий против наименьшей стороны треугольника. Пусть, далее, AA_1 и BB_1 — биссектрисы, а AM и BN — медианы треугольника ABC. Поскольку по свойству биссектрисы $\frac{AB_1}{B_1C} = \frac{AB}{BC} \leqslant 1$, а $\frac{AN}{NC} = 1$, точка N лежит на отрезке B_1C. Аналогично получаем, что точка M лежит на отрезке A_1C. Следовательно, $S_{A_1B_1C} \geqslant S_{MNC} = \frac{1}{4}S_{ABC}$, поэтому $\frac{3}{4}S_{ABC} \geqslant S_{ABA_1B_1}$.

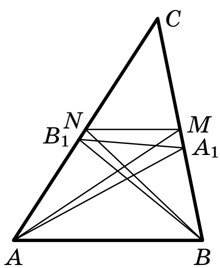


Рис. 69

Применяя теорему о сумме углов треугольника, находим, что угол между биссектрисами AA_1 и BB_1 равен $90^\circ + \frac{\angle C}{2}$. По теореме о площади четырёхугольника, используя монотонность синуса, получаем

$$\frac{3}{4}S_{ABC} \geqslant S_{ABA_1B_1} = \frac{1}{2} \cdot AA_1 \cdot BB_1 \cdot \sin\left(90^\circ + \frac{\angle C}{2}\right) > \\ > \frac{1}{2}\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

откуда $S_{ABC} > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Второй способ. Пусть 2γ — любой из углов треугольника, удовлетворяющий неравенству $2\gamma \geqslant 60^\circ$, a и b — стороны, прилежащие к этому углу, а l — его биссектриса. Записав площадь S треугольника как сумму площадей треугольников, на которые он разбивается биссектрисой l, получаем равенства

$$2S = ab\sin 2\gamma = al\sin\gamma + bl\sin\gamma = (a+b)l\sin\gamma,$$

откуда

$$l = \frac{ab}{a+b}\frac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} = \frac{2ab}{a+b}\cos\gamma.$$

Выразим площадь через квадрат биссектрисы, учитывая неравенство $l > 1$ и монотонность тангенса. Получаем

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 2\gamma = \frac{1}{8}l^2\frac{(a+b)^2}{ab}\frac{\sin 2\gamma}{\cos^2\gamma} = \frac{1}{8}l^2\left(\frac{(a-b)^2}{ab}+4\right)\frac{2\sin\gamma}{\cos\gamma} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{8}l^2\cdot 4\cdot 2\operatorname{tg}\gamma > \operatorname{tg}\gamma \geqslant \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Третий способ. Пусть $\angle A \geqslant 60^\circ$ — наибольший угол треугольника ABC, $AD > 1$ — биссектриса угла A. Проведём через точку D прямую, перпендикулярную прямой AD. Пусть она пересекает стороны угла A в точках M и N (см. рис. 70). Покажем, что если точки M и N не совпали с точками B и C, то $S_{ABC} > S_{AMN}$. Треугольник AMN равнобедренный с основанием MN. Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AM. Она пересечёт отрезок CD в некоторой точке L. Треугольники BMD и LND равны по стороне ($MD = DN$) и прилежащим к ней углам. Следовательно, $S_{BMD} = S_{LND} < S_{CND}$, поэтому $S_{ABC} > S_{AMN}$.

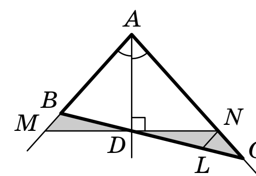


Рис. 70

Остаётся заметить, что

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}\cdot AD\cdot MN = AD\cdot DN = AD^2\operatorname{tg}\frac{A}{2} > \operatorname{tg}\frac{A}{2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

К о м м е н т а р и й. Во втором способе решения задачи мы фактически доказали неравенство

$$S \geqslant \max\left\{l_a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ l_b^2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2},\ l_c^2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right\}$$

и равенства

$$l_c = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2},\quad l_b = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{\beta}{2},\quad l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2},$$

где α, β, γ — углы треугольника. Отметим, что неравенство $S \geqslant l_a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ можно доказать также чисто геометрически, используя в качестве леммы тот факт (см. третий способ), что прямая, проходящая через данную точку и отсекающая от данного угла треугольник наименьшей площади, делится этой точкой и сторонами угла пополам. Другое доказательство можно получить, опираясь на тот факт, что площадь параллелограмма, лежащего в треугольнике так, что его две стороны лежат на сторонах треугольника, не превосходит половины его площади. Для этого надо рассмотреть параллелограмм, отсекаемый от треугольника прямыми, проходящими через конец биссектрисы параллельно сторонам треугольника, и заметить, что он является ромбом с площадью $\frac{1}{2}l_a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

9 класс

1. Заметим, что данное равенство может быть выполнено лишь при условии $\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\geqslant 0$. Возводя равенство в квадрат, получим равносильное при этом условии равенство $x-y+z=(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2$. Преобразуем его:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z})^2-z=x-y;$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y}+2\sqrt{z})=(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y});$$
$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})(2\sqrt{z}-2\sqrt{y})=0.$$

Полученному уравнению удовлетворяют всевозможные тройки неотрицательных чисел x, y, z, где $x=y$ или $y=z$, и только эти тройки. Все такие тройки удовлетворяют неравенству $\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}\geqslant 0$, поэтому они и составляют множество решений уравнения $\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}$.

Комментарий. Эта задача составлена по материалам математических олимпиад, проводившихся в Югославии.

2. Расположим сначала первые 50 аэродромов в вершинах правильного 50-угольника с центром O. Следующие 50 аэродромов расположим в вершинах правильного 50-угольника, полученного из первого гомотетией с центром в точке O и коэффициентом $1/2$. Продолжив этот процесс далее, получим $39\cdot 50=1950$ аэродромов, расположенных в вершинах сжимающихся 50-угольников с общим центром. Проведём ещё одну такую же гомотетию и разместим оставшиеся 35 аэродромов произвольным образом в вершинах нового 50-угольника, расположенного внутри предыдущих.

Покажем, что описанная схема расположения аэродромов удовлетворяет условию задачи, причём после приземления все самолёты соберутся в вершинах исходного (самого большого) 50-угольника. По свойству гомотетии все аэродромы расположены на прямых, соединяющих вершины исходного 50-угольника с его центром. Поскольку каждая такая прямая пересекает 50-угольник в двух его вершинах, получаем, что все аэродромы расположены на отрезках, соединяющих пары наиболее удалённых («диаметрально противоположных») вершин исходного 50-угольника. После приземления все самолёты, вылетевшие из аэродромов, расположенных на любом таком отрезке, соберутся в его концах, причём оба конца будут задействованы.

3. Будем считать, что расстояние между ближайшими параллельными линиями сетки равно 1. Тогда сторона квадрата из условия задачи равна 2, а его диагональ равна $2\sqrt{2}$.

Линии сетки разбиваются на два множества попарно параллельных прямых. Линии одного из этих множеств назовём вертикалями, а другого — параллелями. Будем говорить, что два узла отстоят друг от друга на расстояние d по вертикали, если расстояние между содержащими эти узлы параллелями равно d. Также будем говорить, что два узла отстоят друг от друга на расстояние d по горизонтали, если расстояние между содержащими эти узлы вертикалями равно d.

Заметим, что никакие два накрытых узла не могут отстоять друг от друга на расстояние $d \geqslant 3$ по вертикали или по горизонтали, так как иначе расстояние между этими узлами было не меньше $d > 2\sqrt{2}$. Значит, все накрытые узлы отстоят друг от друга на расстояние не больше 2 как по вертикали, так и по горизонтали. Следовательно, все эти узлы находятся в некотором квадрате 2 на 2, образованном линиями сетки.

Если стороны бумажного квадрата параллельны линиям сетки, то он совпадает с квадратом на рис. 71, так как накрывает по крайней мере по одному узлу на каждой из изображённых параллелей и вертикалей. Тогда он накрывает все 9 узлов на рис. 71.

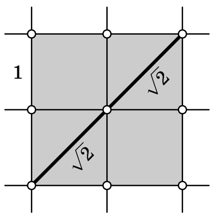


Рис. 71

Предположим, что стороны бумажного квадрата не параллельны линиям сетки. Тогда он не может накрывать никакие два узла на расстоянии $2\sqrt{2}$, ведь иначе эти два узла были бы его вершинами, а его стороны параллельны линиям сетки. Значит, он накрывает ровно 7 узлов, которые с точностью до поворота совпадают с отмеченными на рис. 72 узлами. Далее без ограничения общности считаем, что это отмеченные на этом рисунке узлы.

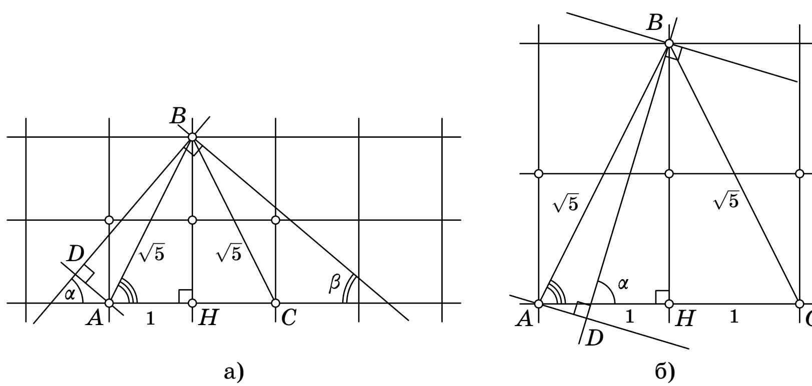


Рис. 72

Обозначим четыре из этих узлов через A, B, C и H как указано на рис. 72. Тогда $AH = HC = 1$ и $AB = BC = \sqrt{5}$. Пусть a и b — две перпендикулярные прямые, проходящие через точку B параллельно сторонам квадрата, α — острый угол между прямыми a и AC, β — острый угол между прямыми b и AC. Без ограничения общности считаем, что $\alpha \geqslant \beta$. Тогда $2\alpha \geqslant \alpha + \beta = 90^\circ$ и $\alpha \geqslant 45^\circ$. При $45^\circ \leqslant \alpha \leqslant \angle BAH$ по теореме о внешнем угле треугольника имеем

$\angle ABD = \angle BAH - \alpha \leqslant \angle BAH - 45^\circ$ (рис. 72, а). Тогда

$$\cos \angle ABD \geqslant \cos(\angle BAH - 45^\circ) = \\ = \cos \angle BAH \cos 45^\circ + \sin \angle BAH \sin 45^\circ = \frac{3}{\sqrt{10}} > \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

При $\angle BAH < \alpha < 90^\circ$ имеем $\angle ABD < \angle ABH$ (рис. 72, б). Тогда $\cos \angle ABD > \cos \angle ABH = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

В обоих случаях для проекции BD стороны AB на прямую a имеем $BD = AB \cos \angle ABD = \sqrt{5} \cos \angle ABD > 2$. Значит, проекция отрезка AB на какую-то из сторон квадрата больше 2. Поэтому квадрат со стороной 2 его не накрывает. Пришли к противоречию.

Комментарий. При решении задачи мы фактически доказали, что равнобедренный треугольник с основанием 2 и боковой стороной $\sqrt{5}$ можно вписать в квадрат 2×2 единственным способом (с точностью до поворотов на 90°, 180° и 270°).

Известно следующее утверждение (теорема Пика, см., например, [8]): если все вершины многоугольника (без самопересечений) имеют целые координаты, т. е. лежат в узлах клетчатой бумаги, то его площадь равна $a/2 + b - 1$, где a — число узлов, лежащих на его границе, а b — внутри. С её помощью доказывается следующая теорема Ньюмена: квадрат размера $n \times n$ накрывает не более $(n+1)^2$ узлов. Для доказательства можно рассмотреть наименьший выпуклый многоугольник, накрывающий все узлы, накрытые квадратом, и заметить, что вершины этого многоугольника лежат в узлах, причём его площадь не больше n^2 (площади квадрата), периметр не больше $4n$ (периметра квадрата, потому что из двух замкнутых выпуклых ломаных бóльшую длину имеет объемлющая, см., например, решение задачи 4 для 7 класса в 1987 г.) и не меньше числа узлов точек, лежащих на нём (так как расстояние между двумя узлами не меньше 1). Значит, число a узлов, лежащих на границе многоугольника, не больше $4n$. Если внутри него лежит b узлов, то по формуле Пика $a/2 + b - 1 \leqslant n^2$, значит для числа узлов, накрытых квадратом, получаем оценку $a + b \leqslant n^2 + 1 + a/2 \leqslant n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$. Из доказанной теоремы вытекает, что квадрат 2×2 накрывает не более 9 узлов. Задачи 3 для 8 и 9 классов показывают, что этот квадрат может накрывать ровно 9 узлов, но не может накрывать ровно 8 или ровно 7 узлов, и всегда накрывает как минимум два узла, причём случай, когда он накрывает ровно 2 узла, возможен. Легко привести пример, когда он накрывает ровно 6 узлов и ровно 4 узла. Предлагаем читателю самостоятельно исследовать вопрос, может ли квадрат 2×2 накрывать ровно 3 узла и ровно 5 узлов.

4. Допустим противное: при любом выборе двух человек из всей группы и пяти человек из оставшихся десяти кто-то из пятёрки будет дружить ровно с одним человеком из исходной пары. Это означает, что для каждой пары членов группы количество человек, которые дружат ровно с одним из этой пары, не менее 6. Поскольку различных пар всего $\frac{12\cdot 11}{2}=66$ (порядок людей в паре значения не имеет), просуммировав количества человек, которые дружат ровно с одним из данной пары, получаем не менее $6\cdot 66=396$.

С другой стороны, то же число должно получиться, если для каждого человека подсчитать количество пар, в которых он дружит ровно с одним, и суммировать их. Если n — число друзей некоторого человека, то количество таких пар равно $n(11-n)$, что не превосходит $5\cdot 6$. Просуммировав эти количества, получим число, не превосходящее $12\cdot 6\cdot 5=360$. Поскольку $360<396$, приходим к противоречию.

5. Доказательство проведём методом математической индукции. Для $n=3$ утверждение верно: $2^3=7\cdot 1^2+1^2$. Пусть для $n=k$ справедливо равенство $2^k=7x^2+y^2$, где числа x и y нечётны. Рассмотрим две пары чисел: $\frac{1}{2}(x-y)$, $\frac{1}{2}(7x+y)$ и $\frac{1}{2}(x+y)$, $\frac{1}{2}(7x-y)$. Получим

$$7\left(\frac{1}{2}(x-y)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(7x+y)\right)^2=$$
$$=\frac{1}{4}(7x^2-7\cdot 2xy+7y^2+7^2x^2+2\cdot 7xy+y^2)=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot 8\cdot(7x^2+y^2)=2\cdot 2^k=2^{k+1}$$

и, аналогично, $7\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(7x-y)\right)^2=2^{k+1}$. Заметим, что сумма чисел в каждой паре равна чётному числу $4x$, поэтому в обеих парах стоят числа одной чётности, а поскольку сумма $\frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{2}(x+y)=x$ нечётна, в разных парах чётность чисел различна. Следовательно, в одной из пар оба числа нечётны. Значит, равенство $2^{k+1}=7X^2+Y^2$ также выполнено для некоторых нечётных чисел X и Y.

Комментарий. Задача взята из записных книжек Леонарда Эйлера, частично опубликованных в статье [36, с. 23—24]. Эйлер занимался подобными задачами в связи с изучением так называемых удобных чисел. Эти введённые им числа вызывают интерес и в наши дни, поскольку некоторые связанные с ними задачи ещё не решены.

В [36] приведены последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, определённые соотношениями

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} - 2x_{n-2}, \;\; x_4 = x_3 = 1, \\ y_n = y_{n-1} - 2y_{n-2}, \;\; y_4 = 3, \;\; y_3 = -1, \end{cases}$$

которые состоят из решений заданного уравнения, т. е. $7x_n^2+y_n^2=2^n$, где $n=3, 4, 5, \ldots$

Интересно отметить, что для решений существуют явные формулы (см. [76])

$$x = \frac{2^{n/2}}{\sqrt{7}}|\sin(n \operatorname{arctg} \sqrt{7})|, \quad y = 2^{n/2}|\cos(n \operatorname{arctg} \sqrt{7})|,$$

связанные с нормой элементов кольца целых чисел поля $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$, допускающим единственность разложения на множители.

10 класс

1. Обозначим $a=\frac{x-49}{50}$, $b=\frac{x-50}{49}$ и преобразуем уравнение:

$$a+b=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}; \qquad \frac{a^2b+ab^2-a-b}{ab}=0; \qquad \frac{(a+b)(ab-1)}{ab}=0.$$

Получаем либо $a+b=0$, $ab\neq 0$, либо $ab=1$. Подставляя выражения для a и b, получаем в первом случае

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=0; \quad 99x-49^2-50^2=0; \quad x=\frac{4901}{99},$$

а во втором случае

$$\frac{x-49}{50}\cdot\frac{x-50}{49}=1; \quad (x-49)(x-50)=49\cdot 50; \quad x(x-99)=0,$$

откуда $x=0$ или $x=99$.

3. Обозначим «сложность» числа a через $L(a)$. Заметим, что $L(0)=1$, $L(1)=2$, $L\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Далее, пусть $0<a<\frac{1}{2}$. Тогда в числовой последовательности наименьшей длины, которая начинается с нуля и заканчивается числом a, предпоследнее число не может быть равным $1-a>\frac{1}{2}$, поскольку тогда число, предшествующее $1-a$, обязательно равно a, что противоречит предположению о том, что вычисление является кратчайшим. Значит, предпоследнее число равно $2a$, а значит, $L(a)=L(2a)+1$. Если же $\frac{1}{2}<a<1$, то $L(a)=L(1-a)+1$, поскольку в этом случае предпоследний член последовательности наименьшей длины не может быть равным $2a$, а следовательно, равен $1-a$.

Обозначим через a_n самое «сложное» из чисел $\frac{1}{2^n}$, $\frac{3}{2^n}$, ..., $\frac{2^n-1}{2^n}$. Докажем индукцией по n, что $a_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ и $L(a_n)=2n+1$. При $n=1$ утверждение верно: $a_1=\frac{1}{2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $L\left(\frac{1}{2}\right)=3$. Далее, при $n>1$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}<a_n<1$, поскольку иначе число $1-a_n$ (имеющееся среди рассматриваемых) имело бы бо́льшую «сложность». Следовательно,

$$L(a_n)=L(1-a_n)+1=L(2-2a_n)+2.$$

Поскольку $2-2a_n=2-2\cdot\frac{m}{2^n}=2-\frac{m}{2^{n-1}}=\frac{2^n-m}{2^{n-1}}$ и m — нечётное число, меньшее 2^n, получаем, что $2-2a_n$ совпадает с одним из чисел $\frac{1}{2^{n-1}}$, $\frac{3}{2^{n-1}}$, ..., $\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}$, а так как оно должно иметь наибольшую сложность, имеем $2-2a_n=a_{n-1}$. Следовательно, пользуясь предположением индукции для $n-1$, получаем $L(a_n)=L(a_{n-1})+2=(2n-1)+2=2n-1$ и

$$a_n=1-\frac{a_{n-1}}{2}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Тем самым утверждение доказано. Итак, из исходных чисел наибольшую сложность имеет число $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{50}=\frac{m}{2^{50}}$, где $m=\frac{2^{51}+1}{3}$.

Комментарий. Догадаться до формулы для a_n можно, например, следующим образом: найти $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=\frac{3}{4}$, $a_3=\frac{5}{8}$ и заметить, что если $a_n=\frac{m_1}{2^n}$ имеет максимальную «сложность» среди чисел со знаменателем 2^n, то среди чисел со знаменателем 2^{n+1} наибольшую «сложность» имеет число $a_{n+1}=\frac{m_2}{2^{n+1}}$, где $m_2=2^{n+1}-m_1$. Отметим что введённая в условии задачи «сложность» определена только для двоично-рациональных чисел, принадлежащих отрезку [0; 1].

4. *Первый способ.* Докажем, что все 1985 множеств имеют ровно один общий элемент. Действительно, из условия следует, что любые два из них имеют единственный общий элемент. Допустим, что пересечение всех множеств пусто, и рассмотрим любое из этих множеств. Согласно принципу Дирихле, среди элементов выбранного множества найдётся такой, который принадлежит ещё n множествам, где $1984>n\geqslant\frac{1984}{45}>44$. Следовательно, полученные $n+1$ множеств имеют ровно один общий элемент, а любое из оставшихся $1984-n$ множеств этого элемента не содержит. Рассмотрим любое из этих $1984-n$ множеств. Оно должно пересекаться с каждым из рассмотренных $n+1$ множеств ровно по одному элементу, причём все эти элементы различны. Значит, каждое из $1984-n$ множеств содержит не менее $n+1\geqslant 46$ элементов. Полученное противоречие означает, что все 1985 множеств имеют ровно один общий элемент. Поскольку все остальные их элементы различны, число элементов объединения множеств равно $1+44\cdot 1985$.

Второй способ. По условию любые два множества пересекаются по единственному элементу. Докажем, что все множества пересекаются ровно по одному элементу. Предположим противное. Возьмём произвольное множество A_1. В нём найдётся элемент a, который принадлежит ещё по меньшей мере 45 множествам — A_2, A_3, ..., A_{46}, так как иначе общее число множеств не превосходило бы $44 \cdot 45 + 1 = 1981$, что неверно. По нашему предположению, среди 1985 множеств существует множество B, не содержащее элемента a. Оно состоит из 45 элементов и пересекается с каждым из 46 множеств A_1, A_2, ..., A_{46} по одному элементу, поэтому в нём найдётся элемент b, общий как минимум для двух из этих 46 множеств. Поскольку $b \neq a$, получаем противоречие. Таким образом, искомое число элементов объединения равно $1 + 44 \cdot 1985$.

Комментарий. Рассмотрим более общую задачу. Известно, что объединение любых двух из n данных множеств, содержащих ровно по q элементов каждое, содержит ровно $2q - 1$ элемент. Из какого числа элементов может состоять объединение всех данных множеств?

Из условия следует, что любые два из данных множеств имеют ровно один общий элемент. Назовём эти множества «прямыми», их элементы — «точками», а объединение всех этих множеств — «плоскостью». Тогда полученная «конечная геометрия» удовлетворяет двум геометрическим аксиомам: 1) любые две разные прямые имеют ровно одну общую точку; 2) через каждую точку проходит хотя бы одна прямая.

Обозначим через m количество точек в плоскости. Из решения задачи видно, что если все n прямых имеют общую точку, то $m = 1 + n(q - 1)$. А что будет, если если не все прямые имеют общую точку (т. е. пересечение всех множеств пусто)? Тогда каждый пучок прямых (т. е. множество всех прямых, проходящих через одну точку) содержит не более чем q прямых. Действительно, есть хотя бы одна прямая l, не входящая в него. Все прямые пучка пересекают l, причём в разных точках (ведь их общая точка не лежит на l), значит число прямых в пучке не больше q. Подсчитывая двумя способами число пар (прямая, точка), в которых точка лежит на этой прямой, получим, что, с одной стороны, число таких пар равно nq (каждая из n прямых содержит q точек), а с другой стороны, число таких пар не больше mq (через каждую из m точек проходит не более q прямых), откуда имеем $n \leqslant m$. Можно доказать, что это неравенство справедливо всегда, когда любые две прямые имеют не более одной общей точки (см., например, комментарий к задаче 5.21 в книге [9]).

Далее нам потребуется неравенство $n \leqslant 1 + q(q - 1)$. Для его доказательства заметим, что кроме прямой l есть не более $q(q - 1)$ прямых, так как каждая прямая пересекает l в одной из q её точек, а через каждую эту точку проходит не более $q - 1$ прямой, не считая самой l. Поэтому равенство $n = 1 + q(q - 1)$ возможно только в случае, когда в каждом пучке ровно q прямых. Последнее же означает, что любая точка любой не принадлежащей пучку прямой также принадлежит и какой-нибудь прямой из пучка.

Докажем, что в этом случае через любую пару точек A и B проходит единственная прямая. Для этого проведём через A какую-нибудь прямую l. Если эта прямая проходит через B, то всё доказано. Иначе рассмотрим пучок прямых, проходящих через B. Одна из его прямых проходит через точку A прямой l, что и требовалось доказать.

Таким образом, если в нашей плоскости $n = 1 + q(q-1)$ прямых, то выполнена ещё одна геометрическая аксиома: через каждые две точки проходит единственная прямая. Докажем, что при этом условии $m = n$. Рассмотрим произвольную точку A и проходящий через неё пучок прямых. По доказанному он содержит все точки плоскости, значит, $m = 1 + q(q-1) = n$. Описанная выше плоскость состоит из $1 + q(q-1)$ точек и содержит столько же прямых. Каждая из них содержит q точек, в каждом пучке q прямых. Также для точек и прямых этой плоскости выполнены геометрические аксиомы: через любые две точки проходит единственная прямая, любые две прямые имеют общую точку. Это аксиомы так называемой проективной геометрии, а описанная плоскость называется конечной проективной плоскостью.

Аксиоматику конечной проективной плоскости можно выбрать такой: через любые две разные точки проходит единственная прямая, любые две прямые имеют одну общую точку и существуют четыре точки, из которых любые три не лежат на одной прямой. Тогда справедлива следующая теорема (см. [65, гл. 12]): для любой проективной плоскости любое из следующих свойств влечёт остальные: некоторая прямая содержит q точек; некоторый пучок состоит из q прямых; каждая прямая содержит q точек; каждый пучок состоит из q прямых; в плоскости ровно $1 + q(q-1)$ точек; на плоскости ровно $1 + q(q-1)$ прямых.

Однако неясно, при каких натуральных q существует такая плоскость на самом деле, т. е. возможна такая конфигурация конечных множеств. Можно доказать (см. [65, гл. 12]), что если $q - 1$ есть степень простого числа, то такая плоскость существует. Например, при $q = 44$ такая плоскость есть. Известна также теорема Брука—Райзера (см. [65, теорема 12.3.2]) о том, что если $q = 4k + 2$ или $q = 4k + 3$ и число $q - 1$ нельзя представить в виде $x^2 + y^2$, где x, y — целые числа, то такой плоскости не существует. В остальных случаях вопрос о существовании проективной плоскости с данным число q является очень трудным. По-видимому, неизвестно, существует ли такая плоскость для $q = 45$, 46, но её точно нет при $q = 47$ согласно теореме Брука—Райзера.

Всё сказанное выше имеет непосредственное отношение к нашей задаче. Как может измениться ответ в задаче, если q будет, как и ранее, равно 45, а значение n станет другим? Аналогично доказывается, что при $n > 1 + 44 \cdot 45 = 1981$ ответ в ней был бы единственный: $m = 1 + 44n$. Значит, эту задачу можно было бы предлагать и в 1982 г. А вот в 1981 г. (при $n = 1981$) для того чтобы выяснить возможность второго ответа $m = 1 + 44 \cdot 45 = 1981$, пришлось бы выяснять возможность существования проективной плоскости с 45 точками на каждой прямой. По-видимому, эта проблема до сих пор остаётся открытой. Возможно, в $1+47\cdot 46=2163$ году кто-нибудь из участников сумел бы доказать, что при $n=2163$ и $q=47$ у задачи есть единственный ответ $m=1+46\cdot 2163$, но сделать это оказалось бы гораздо труднее.

Задача, в которой речь шла фактически о конечных проективных плоскостях, предлагалась на московской олимпиаде ещё в 1946 г. во всех классах с седьмого по десятый. Задачи, связанные с конечными геометриями, можно найти и в книге [9] (задачи 5.20 и 5.21).

5. Проведём через три пары скрещивающихся рёбер тетраэдра T три пары параллельных плоскостей. Получим параллелепипед Π, диагоналями граней которого являются рёбра тетраэдра (см. рис. 73). Высоты Π равны расстояниям между его параллельными гранями, т. е. h_1, h_2, h_3. Пусть V — объём параллелепипеда Π. Плоскости граней T отсекают от Π четыре тетраэдра, объём каждого из которых равен $\frac{1}{6}V$, поэтому объём тетраэдра T равен $V-\frac{4}{6}V=$ $=\frac{1}{3}V$. Следовательно, достаточно доказать, что $V\geqslant h_1h_2h_3$.

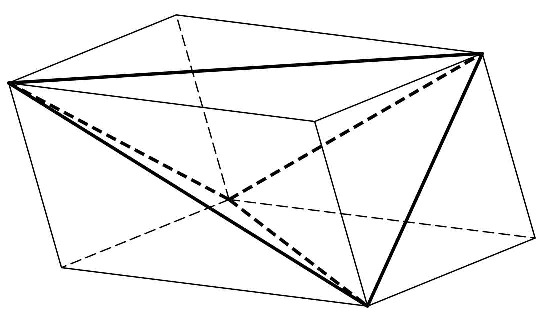


Рис. 73

Выберем в качестве основания параллелепипеда Π одну из граней, расстояние между которыми равно h_1. Проведём из одной из его вершин две остальные высоты Π и соответствующие им высоты в параллелограмме, который является основанием. По теореме о перпендикуляре и наклонной (к плоскости) высоты параллелограмма h_2' и h_3' не меньше высот параллелепипеда h_2 и h_3 соответственно

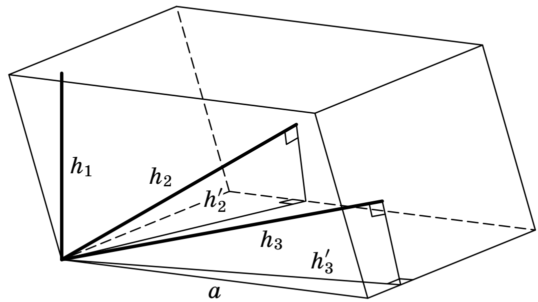


Рис. 74

(см. рис. 74). Далее, площадь этого параллелограмма равна $S = ah_2'$, где a — длина тех его оснований, расстояние между которыми равно h_2'. Но по теореме о перпендикуляре и наклонной (к прямой) $a \geqslant h_3'$, поэтому $S \geqslant h_2'h_3' \geqslant h_2h_3$, а для объёма параллелепипеда Π тогда получаем неравенство $V = Sh_1 \geqslant h_1h_2h_3$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Неравенство из условия задачи неулучшаемо, так как для тетраэдра, вписанного в прямоугольный параллелепипед (в частности, для правильного тетраэдра), оно обращается в равенство. Отметим также, что похожий приём с рассмотрением параллелепипеда, описанного вокруг тетраэдра и имеющего втрое больший объём, встречается также в решении задачи 3 первого тура Московской олимпиады 1937 г. (см. [39, с. 144]).

Неравенство задачи верно и в n-мерном пространстве. Его можно использовать для доказательства неравенства Сасса для определителей, являющегося уточнением неравенства Адамара (см. [22], [5, с. 97]).

1986 год (XLIX олимпиада)

7 класс

1. *Первый способ*. Перегнём лист бумаги по диагоналям данного четырёхугольника $ABCD$: один раз по прямой AC, а другой — по прямой BD. Если в обоих случаях накладываемые треугольники совпадут, то этот четырёхугольник — ромб. В самом деле, в первом случае проверяются равенства $AB = AD$ и $BC = DC$, а во втором — $AB = CB$, $AD = CD$, откуда и следует, что все стороны четырёхугольника равны. Если же какие-то из накладываемых треугольников не совпадут, то среди сторон есть отрезки различных длин, а значит, четырёхугольник не является ромбом.

Второй способ. Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Перегнём лист бумаги так, чтобы две его противоположные вершины A и C совместились, а затем перегнём ещё раз так, чтобы совместились также и две оставшиеся вершины B и D. Если при этом все четыре точки A, B, C, D окажутся на линиях сгиба, пересекающихся в точке O (см. рис. 75), то исход-

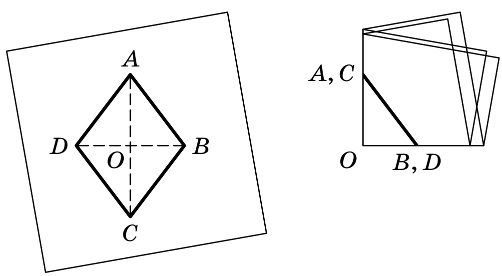


Рис. 75

ный четырёхугольник — ромб. Действительно, в треугольниках AOB, BOC, COD и DOA все углы при вершине O прямые, так как они равны четверти полного угла. Катеты OA и OC равны и катеты OB и OD также равны, поэтому равны и гипотенузы AB, BC, CD, DA. Обратно, если $ABCD$ — ромб, то его вершины должны оказаться на линиях сгиба, так как линии сгиба являются серединными перпендикулярами к диагоналям AC и BD.

2. *Первый способ*. Предположим, что для некоторых чисел x, y, z указанные неравенства выполнены. Возведём почленно в квадрат каждое из трёх неравенств, перенесём влево все правые части и разложим на множители полученные разности квадратов. Имеем

$$(x-y+z)(x+y-z)<0,$$
$$(y-z+x)(y+z-x)<0,$$
$$(z-x+y)(z+x-y)<0.$$

Перемножив почленно эти неравенства, получим

$$((x-y+z)(x+y-z)(y+z-x))^2<0,$$

что неверно. Следовательно, таких чисел x, y, z не существует.

Второй способ. Допустим, что тройка чисел x, y, z удовлетворяет всем трём неравенствам. Покажем, что достаточно рассмотреть случай $x \geqslant y \geqslant z$. В самом деле, остальные случаи соотношений между величинами x, y, z сводятся к данному с помощью перестановок этих величин местами друг с другом: в результате любой такой перестановки неравенства из условия задачи лишь меняются местами.

Поскольку при $x \geqslant y \geqslant z$ справедливы равенства

$$|y-z|=y-z, \quad |x-y|=x-y, \quad |x-z|=x-z,$$

складывая первое из трёх неравенств с последним, получаем противоречие:

$$|x|+|z|<|y-z|+|x-y|=y-z+x-y=x-z=|x-z|\leqslant|x|+|z|$$

(мы воспользовались тем фактом, что $|x-z|\leqslant|x|+|z|$ при любых x и z).

3. Обозначим через A, B, C дома гномов, которые передвигаются со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Тогда задача равносильна следующей: найти такую точку O, лежащую в той же плоскости, что и точки A, B, C, для которой величина $OA+\frac{OB}{2}+\frac{OC}{3}$ принимает наименьшее значение (мы считаем, что если точки X и Y совпали, то $XY=0$). Докажем, что такой точкой является вершина A (дом, в котором живёт самый «медленный» из гномов), для которой эта величина равна $\frac{AB}{2}+\frac{AC}{3}$. В самом деле, для любой точки O, отличной от A, справедливы неравенства $AB \leqslant OA+OB$ и $AC \leqslant OA+OC$. Поэтому имеет место цепочка соотношений

$$\frac{AB}{2}+\frac{AC}{3} \leqslant \frac{OA+OB}{2}+\frac{OA+OC}{3} \leqslant OA+\frac{OB}{2}+\frac{OC}{3}.$$

Значит, дом первого гнома — единственное место, удовлетворяющее условию задачи.

4. Рассмотрим всевозможные наборы, составленные из 1986 исходных чисел: по одному, по два, по три и т. д. вплоть до набора из всех чисел. Количество таких наборов равно $2^{1986}-1$, поскольку в любой набор каждое из 1986 чисел может либо входить, либо не входить, при этом из 2^{1986} возможностей следует исключить случай, когда в наборе не будет ни одного числа.

Перемножим числа в каждом таком наборе и в полученном произведении выделим наибольший точный квадрат, т. е. представим каждое из них в виде произведения квадрата натурального числа и набора различных простых чисел (возможно, пустого). Например, произведение $N=2^5\cdot 3^6\cdot 5^7$ представим в виде $N=(2^2\cdot 3^3\cdot 5^3)^2\cdot 2\cdot 5$, а $M=3^8\cdot 11^6$ представим в виде $M=(3^4\cdot 11^3)^2$. Сопоставим каждому набору исходных чисел тот набор простых чисел, который получается после выделения наибольшего точного квадрата из их произведения (в рассмотренном примере числу N сопоставим набор $\{2; 5\}$, а числу M — пустой набор). Количество различных наборов из 1985 простых чисел (по одному, по два, по три и т. д., включая и пустой набор) равно 2^{1985}, что меньше, чем $2^{1986}-1$ — количество наборов исходных чисел. Поэтому каким-то двум наборам A и B исходных чисел отвечает один и тот же набор простых делителей. Если этот набор пустой, то A и B — точные квадраты и утверждение доказано. Если же это набор $p_1, \ldots, p_k$, т. е. $A=a^2\cdot p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k$, $B=b^2\cdot p_1\cdot\ldots\cdot p_k$, то произведение $A \cdot B$ есть точный квадрат. С другой стороны, $A \cdot B$ равно произведению чисел набора A и чисел набора B. Исключив из наборов A и B их общую часть (произведение исключаемых чисел есть точный квадрат), получим, что произведение остальных чисел является точным квадратом, что и требовалось доказать.

К о м м е н т а р и й. Утверждение задачи справедливо для произведения любых $n+1$ натуральных чисел, которое имеет ровно n различных простых делителей. Доказательство этого факта повторяет изложенное и опирается на неравенство $2^{n+1}-1>2^n$, которое имеет место при всех натуральных n.

5. Количество всех различных трёхзначных кодов равно $3^3=27$. Последовательность, в которую входят все эти коды, содержит не менее 29 цифр (27 первых цифр всех кодов и ещё 2 последние цифры последнего кода).

Построим искомую последовательность, состоящую ровно из 29 цифр. Изобразим 9 кругов, в которых запишем по одной все различные 9 пар данных цифр — пары 11, 12, ..., 33 (см. рис. 76). От каждого круга проведём по одной стрелке к каждому из трёх кругов, первая цифра в кото-

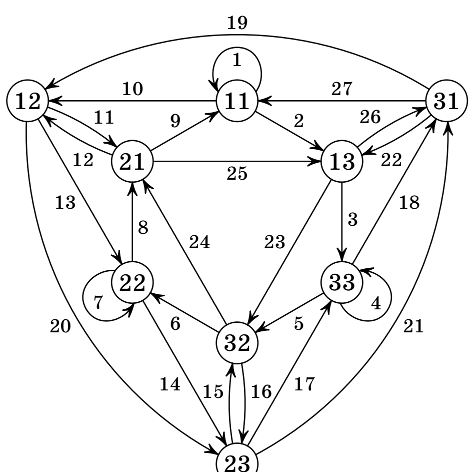


Рис. 76

ром равна последней цифре в данном круге (например, из круга с цифрами 11 одна из стрелок будет вести к самому этому кругу, а две другие — к кругам с цифрами 12 и 13). На этой схеме каждой из 27 стрелок соответствует свой код из трёх цифр 1, 2, 3: первые две его цифры написаны в начальном круге, а последние две — в конечном (например, стрелке 13 → 32 соответствует код 132). Тогда задача сводится к тому, чтобы последовательно пройти на этой схеме по всем стрелкам ровно по одному разу. Нумерация стрелок на рисунке числами от 1 до 27 показывает один из способов это сделать, ему соответствует последовательность 11333222112122323312313213 11. Разумеется, существует и множество других способов составить искомую последовательность.

Комментарий. Описанные в задаче последовательности называются в комбинаторике *полными циклами*, или *последовательностями де Брёйна*, с той лишь разницей, что полные циклы считаются замкнутыми (наглядно это можно представить, расставляя цифры по кругу), и тогда двух лишних цифр не требуется. Полные циклы длины 2^n, содержащие все возможные наборы из n нулей и единиц, рассматриваются в книге [65], в которой также даётся их графическая интерпретация, аналогичная рассмотренной в решении задачи (такие схемы называются *ориентированными графами*), и даже вычислено их количество для каждого n.

8 класс

1. *Первый способ.* Сначала проверим, что данный четырёхугольник $ABCD$ является ромбом (см. решение задачи 1 для 7 класса). Перегнём теперь ещё раз лист бумаги так, чтобы вершина B совпала с вершиной C. Если при этом вершина D совпадёт с A, то $ABCD$ — квадрат. Действительно, линия сгиба в этом случае является серединным перпендикуляром к равным отрезкам BC и AD, поэтому прямые AB и CD параллельны этой линии, а значит, все углы в четырёхугольнике $ABCD$ прямые, т. е. это квадрат. И наоборот, если $ABCD$ квадрат, то прямая, проходящая через середину стороны BC перпендикулярно ей, должна пройти также и через середину стороны AD.

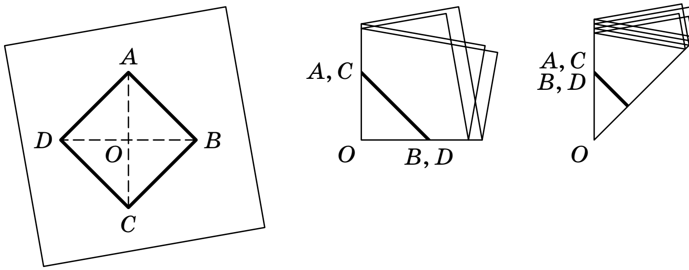


Рис. 77

Второй способ. Перегнём лист бумаги сначала так, чтобы совпали вершины A и C, а затем ещё раз так, чтобы совпали вершины B и D. Если все вершины четырёхугольника $ABCD$ окажутся на линиях сгиба, то это ромб (см. второе решение задачи 1 для 7 класса). Перегнём теперь лист бумаги ещё раз так, чтобы все четыре вершины A, B, C и D совместились. Точка O окажется на появившейся при этом линии сгиба в том и только в том случае, если $ABCD$ — квадрат, т. е. точка O равноудалена от всех его вершин.

2. Пусть натуральное число n представимо в виде разности квадратов натуральных чисел x и y, т. е. $n=x^2-y^2$. Поскольку $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$, а числа $x-y$ и $x+y$ имеют одинаковую чётность, то n либо делится на 4, либо нечётно. Следовательно, все чётные натуральные числа, не кратные 4, непредставимы в виде разности квадратов. Поскольку эти числа при делении на 4 дают остаток 2, все они имеют вид $4k-2$, $k\in\mathbb{N}$.

Покажем, что числа 1 и 4 также непредставимы в виде разности квадратов. Действительно, если $(x-y)(x+y)=1$, то оба числа $x-y$ и $x+y$ равны либо 1, либо -1. Поскольку если $x-y=x+y$, то $y=0$ — не натуральное число, получаем, что в обоих случаях натуральных решений нет.

Далее, если $(x-y)(x+y)=4$, то оба числа $x-y$ и $x+y$ равны либо 2, либо -2, поскольку вариант ±1 и ±4 невозможен (это числа разной чётности). Здесь также имеем $y=0$, поэтому уравнение не имеет решений в натуральных числах.

Докажем теперь, что если натуральное число кратно 4 (кроме 4) или нечётно (кроме 1), то оно представимо в виде разности квадратов натуральных чисел. В самом деле, при всех натуральных k справедливы равенства

$$n = 4k+4 = (k+2)^2 - k^2 \quad \text{и} \quad n = 2k+1 = (k+1)^2 - k^2.$$

Итак, мы доказали, что числа 1, 4 и $4k-2$, $k \in \mathbb{N}$, нельзя представить в виде разности квадратов натуральных чисел, а все остальные натуральные числа — можно.

3. Заметим, что при $n \geqslant 2$ справедливы равенства

$$a_n - \sqrt{2} = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{1}{a_{n-1}} - \sqrt{2} = \frac{a_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}a_{n-1} + 2}{2a_{n-1}} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}}.$$

Все члены последовательности a_n положительны, поэтому из этого равенства следует, что $a_n - \sqrt{2} > 0$ для всех $n \geqslant 2$. Значит, при $n \geqslant 3$ имеем

$$0 < a_n - \sqrt{2} = \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2a_{n-1}} < \frac{(a_{n-1} - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}.$$

Применим это неравенство последовательно при $n = 10, 9, \ldots, 3$:

$$a_{10} - \sqrt{2} < \frac{(a_9 - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}} < \frac{(a_8 - \sqrt{2})^{2^2}}{(2\sqrt{2})^{1+2}} < \ldots < \frac{(a_2 - \sqrt{2})^{2^8}}{(2\sqrt{2})^{1+2+\ldots+2^7}} = \\ = \frac{(a_2 - \sqrt{2})^{256}}{2^{\frac{3}{2}\cdot 255}}.$$

Поскольку $a_2 - \sqrt{2} = 1{,}5 - \sqrt{2} < 0{,}1$, отсюда получаем

$$a_{10} - \sqrt{2} < \frac{(a_2 - \sqrt{2})^{256}}{2^{\frac{3}{2}\cdot 255}} < \frac{(0{,}1)^{256}}{2^{382{,}5}} < \\ < 10^{-256} \cdot 2^{-380} < 10^{-256}(10^3)^{-38} = 10^{-370},$$

так как $2^{10} = 1024 > 10^3$.

Вариант решения. Обозначим $b_n = \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$. Тогда

$$\frac{a_{10} - \sqrt{2}}{a_{10} + \sqrt{2}} = b_{10}, \quad a_{10} - \sqrt{2} = b_{10}a_{10} + b_{10}\sqrt{2},$$

$$a_{10} = \sqrt{2} \cdot \frac{1 + b_{10}}{1 - b_{10}} = \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}b_{10}}{1 - b_{10}}.$$

Кроме того, для чисел b_n при всех $n \geqslant 1$ справедливо равенство

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{2}}{a_{n+1} + \sqrt{2}} = \frac{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - \sqrt{2}}{\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} + \sqrt{2}} = \frac{a_n^2 - 2a_n\sqrt{2} + 2}{a_n^2 + 2a_n\sqrt{2} + 2} = \left(\frac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}\right)^2 = b_n^2,$$

поэтому

$$b_{10} = b_9^2 = b_8^4 = b_7^8 = \ldots = b_1^{2^9}.$$

Поскольку

$$b_{10} < b_2 = \frac{3/2 - \sqrt{2}}{3/2 + \sqrt{2}} < \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{2},$$

получаем $1 - b_{10} > \dfrac{1}{2}$,

$$0 < a_{10} - \sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}b_{10}}{1 - b_{10}} < 4\sqrt{2}b_{10} = 4\sqrt{2}b_1^{512} <$$

$$< 10\left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}\right)^{512} = \frac{10}{(\sqrt{2} + 1)^{1024}}.$$

Заметим теперь, что

$$(\sqrt{2} + 1)^8 = (3 + 2\sqrt{2})^4 = (17 + 12\sqrt{2})^2 > (24\sqrt{2})^2 = 1152 > 10^3,$$

поэтому $(\sqrt{2} + 1)^{1024} > (10^3)^{128} = 10^{384}$, значит,

$$0 < a_{10} - \sqrt{2} < \frac{10}{(\sqrt{2} + 1)^{1024}} < 10^{-383},$$

и тем самым доказано даже более сильное неравенство, чем требовалось.

Комментарий. Как видно из решения задачи, ошибка при замене числа a_n на $\sqrt{2}$ меньше чем $\dfrac{1}{10^{2^{n-2}}}$, поэтому точность приближения растёт гиперэкспоненциально. Это даёт удобный инструмент для вычисления числа $\sqrt{2}$ с очень высокой точностью за весьма небольшое количество арифметических операций. Есть вариант задачи, где предлагается доказать более грубую оценку $0 < a_{10} - \sqrt{2} < 3^{-500}$. Для этого достаточно упрощённого варианта решения, использующего лишь неравенства

$$a_{10} - \sqrt{2} < (a_2 - \sqrt{2})^{256} \quad \text{и} \quad a_2 - \sqrt{2} = 1{,}5 - \sqrt{2} < 0{,}1 < \frac{1}{9} = 3^{-2}.$$

Более точные вычисления показывают, что разность $a_{10} - \sqrt{2}$ находится между числами 10^{-392} и 10^{-391}, т. е. оценка из условия задачи достаточно близка к точной.

Похожая задача предлагалась во втором туре Московской олимпиады 1953 года (задача 3 для 10 класса, см. [39]).

4. Окружим забором все области поля, поросшие бурьяном, по следующему правилу: забор ставится только между любыми двумя соседними участками, один из которых порос бурьяном, а другой нет. Будем считать, что забор состоит из перегородок, длина которых равна стороне любого из 100 квадратных участков. По истечении каждого года будем перестраивать забор так, чтобы он снова окружал все области поля, поросшие бурьяном. Заметим, что при этом нам придётся устанавливать или убирать перегородки на границах только тех участков, на которые за год распространился бурьян. Рассмотрим границу любого такого участка. Поскольку граница квадратная и не менее двух участков, соседних с данным, уже поражены бурьяном, придётся убрать не менее двух перегородок, а установить — не более двух. Следовательно, в результате перестройки общая длина забора не может увеличиться. Пусть поле имеет размеры $10a \times 10a$, тогда первоначальная длина забора не превосходит $9 \cdot 4a = 36a$. Если бы всё поле заросло бурьяном, то в итоге забор имел бы длину $4 \cdot 10a = 40a$, что означало бы её увеличение. Следовательно, на всё поле бурьян распространиться никогда не сможет.

5. Предположим, что для некоторых чисел x, y, z, t указанные неравенства имеют место. Возведём почленно в квадрат каждое из четырёх неравенств, перенесём влево все правые части и разложим на множители полученные разности квадратов. Получим равносильную систему

$$\begin{cases} (x-y+z-t)\,(x+y-z+t) > 0, \\ (y-x+z-t)\,(y+x-z+t) > 0, \\ (z-x+y-t)\,(z+x-y+t) > 0, \\ (t-x+y-z)\,(t+x-y+z) > 0. \end{cases}$$

Перемножив почленно неравенства новой системы, получим

$$-(x-y+z-t)^2(x+y-z+t)^2(x-y+z+t)^2(-x+y+z-t)^2 > 0,$$

что неверно. Следовательно, таких чисел x, y, z, t не существует.

9 класс

1. Чтобы выяснить, является ли $ABCD$ прямоугольником, достаточно проверить три равенства: $AB=CD$, $BC=AD$ и $AC=BD$ — итого 9 операций (6 измерений и 3 сравнения). Докажем, что меньшим числом обойтись нельзя, т. е. что каждое из равенств обязательно нужно проверить. Действительно, если не проверить равенство какой-то из пар противоположных сторон четырёхугольника, то он может оказаться равнобедренной трапецией, так как у неё равны диагонали и одна из пар противоположных сторон. Если же не проверить равенство диагоналей $AC=BD$, то $ABCD$ может быть параллелограммом (не прямоугольником).

2. Пусть точка M при преобразовании гомотетии с коэффициентом k (меньшим единицы) переходит в точку M_1, на спирали, точка M_1 — в точку M_2, точка M_2 — в точку M_3 и т. д. (см. рис. 78). Тогда если обозначить длину спирали от точки A до точки B через $l(A, B)$, то будут справедливы равенства $l(M_1, M_2)=kl(M, M_1)$, $l(M_2, M_3)=$

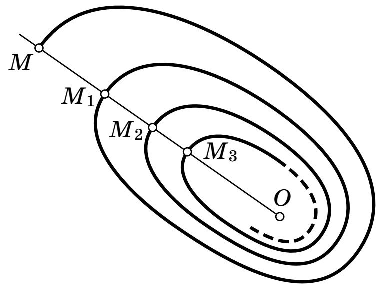


Рис. 78

$= kl(M_1, M_2)$ и т. д. Поэтому, суммируя бесконечную геометрическую прогрессию, получим

$$l(M, O) = l(M, M_1) + l(M_1, M_2) + l(M_2, M_3) + \ldots =$$
$$= l(M, M_1)(1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{l(M, M_1)}{1-k},$$

т. е. длина спирали от точки M до точки O конечна. Следовательно, муравей пройдёт весь путь за конечное время.

3. Аналогично решению задачи 5 для 8 класса, предположим, что для некоторых чисел x, y, z, t указанные неравенства имеют место, возведём каждое из неравенств в квадрат, перенесём вправо все левые части (в отличие от задачи 5 для 8 класса) и разложим на множители полученные разности квадратов. Получим систему, равносильную исходной, при перемножении неравенств которой приходим к противоречию.

4. Составим всевозможные[1] пары (a, b) из исходных 48 чисел. Количество таких пар равно $\frac{48 \cdot 47}{2} = 1128$. Перемножим числа во всех парах и выделим наибольший полный квадрат в каждом из полученных 1128 произведе-

[1] Перед тем как прочесть решение, полезно разобрать задачу 4 для 7 класса.

ний, т. е. представим каждое из них в виде произведения квадрата натурального числа и набора различных простых чисел (возможно, пустого). Например, если $a=2^3\cdot5^4\cdot11^2$, $b=3^8\cdot5$, то произведение $ab=2^3\cdot3^8\cdot5^5\cdot11^2$ представим в виде $K^2\cdot2\cdot5$, где $K=2\cdot3^4\cdot5^2\cdot11$. Сопоставим паре (a, b) получившийся набор простых чисел. Поскольку количество наборов из 10 простых чисел (по одному, по два, по три и т. д., включая пустой набор) равно $2^{10}=1024<1128$, найдутся две различные пары (a, b) и (c, d), которым соответствует один и тот же набор простых чисел (возможно, пустой). Следовательно, $abcd$ — точный квадрат.

Если ни одно из чисел a, b не совпадает ни с одним из чисел c, d, то числа a, b, c, d искомые. Если же есть совпадение, то, поскольку порядок чисел в паре значения не имеет, можно считать, что $a\neq c$ и $b=d$. Тогда ac — точный квадрат. Исключим на время из рассмотрения числа a и c. Получим набор из оставшихся 46 чисел, произведение которых, очевидно, имеет не более 10 различных простых делителей. Рассуждая так же, как и выше, и учитывая, что верно и неравенство $\frac{46\cdot45}{2}=1035>2^{10}$, приходим к выводу о существовании двух различных пар чисел (x, y) и (z, t), для которых $xyzt$ — точный квадрат. Если ни одно из чисел x, y не совпадает ни с одним из чисел z, t, то x, y, z, t — искомые 4 числа. Если же совпадение есть, то можно считать, что $x\neq z$ и $y=t$. Тогда xz — точный квадрат и искомой четвёркой чисел является (a, c, x, z).

5. *Первый способ*. Пусть O — центр некоторой окружности радиуса 100 и пусть n — наибольшее целое число, для которого прямая $x=n$ пересекает эту окружность, M — проекция точки O на прямую $x=n$. Поскольку прямая $x=n+1$ не пересекает окружность, высота $h=100-OM$ высекаемого прямой $x=n$ сегмента окружности удовлетворяет неравенству $0\leqslant h<1$. Если l — половина длины стягивающей этот сегмент хорды, то, продлевая прямую OM за точку O до второго пересечения с окружностью, по свойству отрезков пересекающихся хорд получаем $h(200-h)=l^2$, т. е. $l=\sqrt{h(200-h)}$.

Пусть $h\leqslant 1/14$. Аналогично длина половины хорды, высекаемой внутри окружности прямой $x=n-1/14$ равна

$$l_1=\sqrt{\left(h+\frac{1}{14}\right)\left(200-h-\frac{1}{14}\right)}\geqslant\sqrt{\frac{199}{14}}>1,$$

поэтому на ней найдётся точка с ординатой, равной целому числу m, а на прямой $x=n$ найдётся точка с целыми координатами на расстоянии от окружности, меньшем $\frac{1}{14}$ (см. рис. 79). Нарисованный с центром в этой точке круг пересекает окружность, так что в этом случае утверждение доказано.

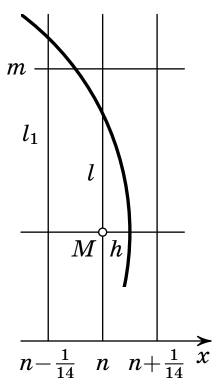


Рис. 79

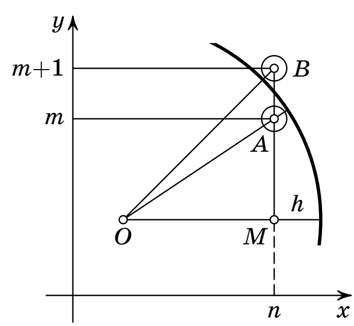


Рис. 80

Пусть теперь $\frac{1}{14}<h<1$. Тогда $l=\sqrt{h(200-h)}>\sqrt{\frac{199}{14}}>1$, поэтому хотя бы один из центров нарисованных кругов с абсциссами, равными n, лежит внутри окружности. Выберем из них центр с наибольшей ординатой m и назовём его буквой A. Центр круга с ординатой $m+1$ назовём буквой B; в силу максимальности m он лежит вне окружности. Докажем, что окружность пересекает хотя бы один из кругов с центрами в точках A и B. Предположим противное:

круг с центром A лежит полностью внутри окружности, а круг с центром B — полностью вне (см. рис. 80). По теореме Пифагора $OM^2 = OA^2 - AM^2 = OB^2 - BM^2$, откуда

$$OB^2 - OA^2 = BM^2 - AM^2 = (AM + 1)^2 - AM^2 = 2AM + 1.$$

Поскольку $99 < OA < 100 - \frac{1}{14}$ и $OB > 100 + \frac{1}{14}$, получаем

$$2AM + 1 = OB^2 - OA^2 = (OB - OA)(OB + OA) > \\ > 2 \cdot \frac{1}{14}(100 + 99) = \frac{199}{7},$$

поэтому $AM > \frac{1}{2}\left(\frac{199}{7} - 1\right) = \frac{96}{7}$. Но с другой стороны, в силу неравенства $OM = 100 - h > 99$

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 < \left(100 - \frac{1}{14}\right)^2 - 99^2 = \\ = \left(199 - \frac{13}{14}\right) \cdot \frac{13}{14} < 200 \cdot \frac{13}{14} = \frac{1300}{7} = \frac{9100}{49} < \frac{9216}{49} = \left(\frac{96}{7}\right)^2,$$

следовательно, $AM < \frac{96}{7}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Второй способ. Предположим противное: пусть некоторая окружность радиуса 100 с центром в точке (x_0, y_0) не пересекает ни один из нарисованных кругов. Уравнение этой окружности имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 100^2$, откуда

$$y = y(x) = y_0 \pm \sqrt{100^2 - (x - x_0)^2}.$$

Обозначим $n = [x_0 + 100]$, тогда $n \leqslant x_0 + 100 < n + 1$, или, что то же, $99 < n - x_0 \leqslant 100$. Рассмотрим нарисованные круги, центры которых лежат на прямой $x = n$. Возможны два случая: все они лежат вне окружности или хотя бы один из них лежит внутри окружности.

Если все рассматриваемые круги лежат вне окружности, выберем два соседних круга с центрами в точках $(n, m + 1)$ и (n, m) так, что первый из них — ближайший к верхней полуокружности $y(x) = y_0 + \sqrt{100^2 - (x - x_0)^2}$, а

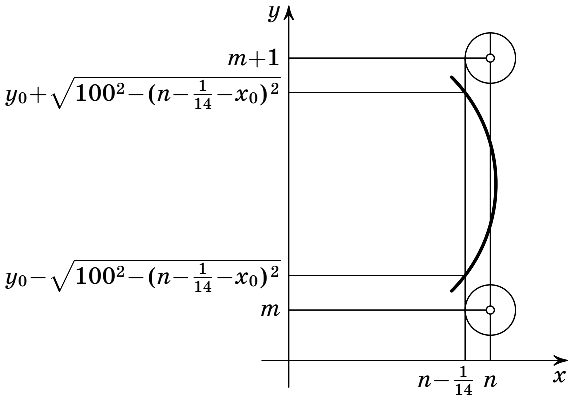


Рис. 81

второй — к нижней $y(x)=y_0-\sqrt{100^2-(x-x_0)^2}$ (рис. 81). Тогда ординаты точек пересечения окружности с прямой $x=n-1/14$ отличаются не более чем на единицу:

$$\left(y_0+\sqrt{100^2-\left(n-\frac{1}{14}-x_0\right)^2}\right)-\\-\left(y_0-\sqrt{100^2-\left(n-\frac{1}{14}-x_0\right)^2}\right)=\\=2\sqrt{100^2-\left(n-\frac{1}{14}-x_0\right)^2}\leqslant 1.$$

Но поскольку $99<n-x_0\leqslant 100$, получаем

$$2\sqrt{100^2-\left(n-\frac{1}{14}-x_0\right)^2}\geqslant 2\sqrt{100^2-\left(100-\frac{1}{14}\right)^2}=\\=2\sqrt{\frac{1}{14}\left(200-\frac{1}{14}\right)}>2\sqrt{\frac{199}{14}}>1,$$

что противоречит предыдущему неравенству.

Рассмотрим теперь случай, при котором некоторые нарисованные круги лежат внутри окружности. Выберем два соседних круга с центрами в точках $(n, m+1)$ и (n, m), лежащие соответственно вне и внутри окружности (см. рис. 82). Прямые $x=n\pm 1/14$ пересекают верхнюю полу-

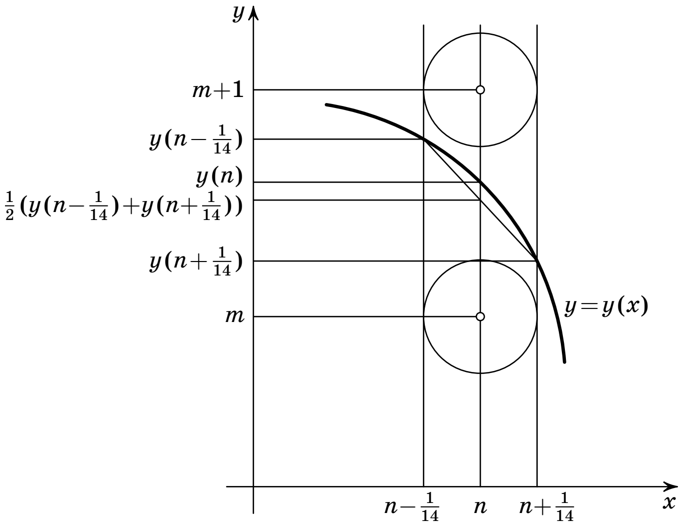


Рис. 82

окружность $y(x)=y_0+\sqrt{100^2-(x-x_0)^2}$ в точках, ординаты которых лежат между числами m и $m+1$, и поэтому отличаются не более чем на единицу: $y\left(n-\frac{1}{14}\right)-y\left(n+\frac{1}{14}\right)\leqslant$ $\leqslant 1$. Кроме того, середина хорды, соединяющей эти точки, имеет ординату $\frac{1}{2}\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)+y\left(n+\frac{1}{14}\right)\right)\leqslant y(n)$, так как она лежит ниже стягиваемой ей дуги. Следовательно,

$$
\begin{gathered}
2(y(n)-y_0)\geqslant \\
\geqslant\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)-y\left(n+\frac{1}{14}\right)\right)\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)+y\left(n+\frac{1}{14}\right)-2y_0\right)= \\
=\left(\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)-y_0\right)-\left(y\left(n+\frac{1}{14}\right)-y_0\right)\right)\times \\
\times\left(\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)-y_0\right)+\left(y\left(n+\frac{1}{14}\right)-y_0\right)\right)= \\
=\left(y\left(n-\frac{1}{14}\right)-y_0\right)^2-\left(y\left(n+\frac{1}{14}\right)-y_0\right)^2= \\
=\left(n+\frac{1}{14}-x_0\right)^2-\left(n-\frac{1}{14}-x_0\right)^2=\frac{2}{7}(n-x_0)>\frac{198}{7},
\end{gathered}
$$

так как $n-x_0>99$. С другой стороны, в силу последнего неравенства

$$2(y(n)-y_0)=2\sqrt{100^2-(n-x_0)^2}<2\sqrt{100^2-99^2}=2\sqrt{199}.$$

Отсюда $\frac{198}{7}<2\sqrt{199}$, или $198^2<14^2\cdot199<197\cdot199=198^2-$ -1. Снова получили противоречие.

10 класс

1. Чтобы наверняка определить, является ли $ABCD$ квадратом, достаточно проверить четыре равенства: равенство пар противоположных сторон $AB=CD$, $BC=AD$, равенство смежных сторон $AB=BC$ и равенство диагоналей $AC=BD$ — итого 10 операций (6 измерений и 4 сравнения). Докажем, что меньшего числа операций недостаточно. Действительно, если не проверить равенство какой-то из пар противоположных сторон, то $ABCD$ может оказаться равнобедренной трапецией с основанием, равным боковой стороне. Если не проверить равенство смежных сторон, то $ABCD$ может быть прямоугольником (не квадратом). Наконец, если не проверить равенство диагоналей, то $ABCD$ может быть ромбом (не квадратом).

Комментарий. См. также решение задачи 1 для 9 класса.

2. *Первый способ.* Выберем на продолжении прямой AC за точку C такую точку E, для которой $CE=AB$ (см. рис. 83).

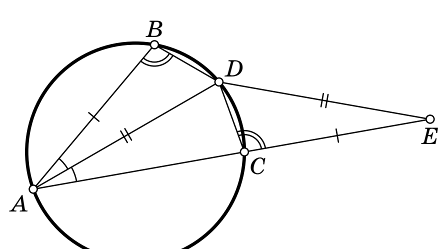


Рис. 83

Хорды BD и CD равны, поскольку стягивают равные дуги, а так как четырёхугольник $ABDC$ — вписанный, получаем $\angle B = \pi - \angle ACD = \angle DCE$. Следовательно, треугольники ADB и EDC равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $AD = ED$ и

$$AC + AB = AC + CE = AE < AD + ED = 2AD,$$

откуда вытекает требуемое неравенство.

Второй способ. В треугольнике ABC обозначим через β его угол B, через γ — его угол C, а через d — диаметр описанной вокруг него окружности. По теореме синусов получаем

$$AC + AB = d \sin\beta + d \sin\gamma = 2d \sin\frac{\beta+\gamma}{2} \cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Поскольку $\angle CAD = \dfrac{\pi-\beta-\gamma}{2}$, хорда AD опирается на дугу $2\beta + (\pi - \beta - \gamma) = \pi + \beta - \gamma$. По теореме синусов для треугольника ABD находим

$$AD = d \sin\frac{\pi+\beta-\gamma}{2} = d \cos\frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Поскольку $0 < \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} < 1$, справедливо неравенство

$$AD > \frac{AB + AC}{2}.$$

3. Обозначим $f(x) = x^{x^4}$. При $x \in (0; 1]$ равенство $f(x) = 4$ невозможно, поскольку $x^4 > 0$ и $x^{x^4} \leqslant x^0 = 1 < 4$. На луче $(1; +\infty)$ функция $f(x)$ строго возрастает, так как при $x > y > 1$ имеем $x^4 > y^4 > 1$, поэтому $f(x) = x^{x^4} > x^{y^4} > y^{y^4} = f(y)$. Следовательно, исходное уравнение не может иметь более одного корня, который можно предъявить: при $x = \sqrt{2}$ получаем $\sqrt{2}^{\sqrt{2}^4} = \sqrt{2}^4 = 4$.

4. Пусть для некоторых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выполняются все три неравенства. Возведём неравенства в квадрат и сложим их. Поскольку по свойствам скалярного произведения $\vec{a}\cdot\vec{b}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы соотношения

$$|\vec{a}|^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2,$$

и

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^{\,2},$$

сумма квадратов неравенств имеет вид

$$3(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}) < 2(\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}) - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c});$$
$$\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{c}) < 0;$$
$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2 < 0.$$

Полученное противоречие означает, что векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющих всем трём исходным неравенствам, не существует.

5. Обозначим

$$f(x) = \cos x + \alpha\cos 2x + \beta\cos 3x, \quad y(x) = |f(x)|,$$
$$m(\alpha, \beta) = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \max y(x)$$

(далее $\max\limits_{x\in\mathbb{R}}$ всюду будем обозначать просто max). Тогда в задаче требуется найти число $m = \min\limits_{\alpha,\beta} m(\alpha, \beta)$.

Из тождества

$$f(x) - f(x+\pi) = 2(\cos x + \beta\cos 3x)$$

и свойств модуля получаем

$$2m(\alpha, \beta) = \max y(x) + \max y(x+\pi) \geqslant$$
$$\geqslant \max\,(|f(x)| + |f(x+\pi)|) \geqslant \max|f(x) - f(x+\pi)| =$$
$$= 2\max|\cos x + \beta\cos 3x| = 2m(0, \beta),$$

откуда $m(\alpha, \beta) \geqslant m(0, \beta)$. Далее, из равенства $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$, справедливого при $\alpha = 0$ и любом β, следует неравенство $m(0, \beta) \geqslant \cos\frac{\pi}{6}$. Таким образом, $m \geqslant \cos\frac{\pi}{6}$.

Докажем теперь, что $m \leqslant \cos\frac{\pi}{6}$. Действительно, положим $\alpha = 0$, $\beta = -\frac{1}{6}$, тогда $f(x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos 3x$. Поскольку

$$f'(x) = \left(\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x\right)' = -\sin x + \frac{1}{2}\sin 3x = \\ = 2\sin x\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\left(\frac{1}{2} + \sin x\right),$$

эта функция возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ и убывает на отрезке $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$, при этом

$$f(0) = \frac{5}{6} > f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

поэтому на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ функция $f(x)$ неотрицательна и принимает наибольшее значение $\cos\frac{\pi}{6}$ при $x = \frac{\pi}{6}$. Поскольку $f(-x) = f(x)$ и $f(\pi - x) = -f(x)$, это значение является наибольшим и для функции $y(x)$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длины 2π, а так как 2π — период функции $y(x)$, получаем

$$m \leqslant m\left(0, -\frac{1}{6}\right) = \max y(x) = \max_{x\in[0;\pi/2]} |f(x)| = \cos\frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, $m = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

К о м м е н т а р и й. Доказать оценку $m \geqslant \cos\frac{\pi}{6}$ можно было и другими способами, например, подставить в функцию $y(x)$ точки $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{6}$ и при всех α и β получить неравенства

$$\max y(x) \geqslant \max\left(y\left(\frac{\pi}{6}\right); y\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \max\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|; \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|\right) \geqslant \\ \geqslant \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right| + \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right|\right) \geqslant \frac{1}{2}\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача является частным случаем теоремы из статьи [23].

1987 год (L олимпиада)

7 класс

1. Рассмотрим календарь на март 1987 года (рис. 84). Если предположить, что в течение каждых трёх подряд идущих дней кружок проводится хотя бы раз, то кружок

Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

Рис. 84

обязательно должен проходить по понедельникам 9, 16, 23 и 30 марта, по пятницам 6, 13, 20 и 27 марта, а также хотя бы в один из трёх дней с 3 по 5, с 10 по 12, с 17 по 19 и с 24 по 26 марта. Получается не менее 12 занятий — противоречие.

Комментарий. Заметим, что календари на 1987 и 2015 годы полностью совпадают. Также совпадают календари любых двух лет от 1901 до 2099 (по григорианскому календарю), разность между которыми делится на 28. Предлагаем заинтересованному читателю самостоятельно доказать это утверждение, а также проверить, что если два года не попадают в указанный диапазон, то их календари могут и не совпадать, даже если разность между ними делится на 28.

2. Выпишем все простые числа, меньшие 100:

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Получаем 25 простых чисел. Среди любых 27 различных натуральных чисел, меньших 100, как минимум 26 чисел больше единицы, а следовательно, каждое из 26 чисел имеет хотя бы один простой делитель. Значит, какие-то два числа имеют общий простой делитель и поэтому не являются взаимно простыми.

Комментарий. Пусть $\pi(n)$ обозначает количество простых чисел, не превосходящих n. Тогда нетрудно видеть, что утверждение задачи верно для любых $\pi(n)+2$ чисел от 1 до n. Если же чисел выбрано $\pi(n)+1$ или меньше, то утверждение может быть неверно. Известно также, что если чисел выбрано не меньше $(n+2)/2$, то одно из них даже будет делиться на другое, но если чисел меньше, то это, вообще говоря, неверно (задача 112 из книги [30]).

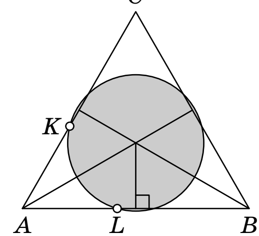


Рис. 85

3. Расстояние от центра данного треугольника до любой из его сторон равно трети медианы (совпадающей с высотой), т. е. $\frac{1}{3}\sqrt{100^2-50^2} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ м. Поскольку $50\sqrt{3}=\sqrt{7500} < \sqrt{8100}=90=3\cdot 30$, окружность радиуса 30, центр которой совпадает с центром треугольника, пересекает каждую сторону треугольника в двух точках (см. рис. 85).

Заметим, что при сдвиге центра окружности по прямой в направлении любой из вершин треугольника (скажем, A), окружность будет двигаться, пересекая каждую из сторон AB и AC в двух точках. Кроме того, ближайшие к A точки пересечения K и L будут сдвигаться так, что длины отрезков AK и AL будут уменьшаться, причём в момент, когда центр окружности окажется на расстоянии $\frac{50\sqrt{3}}{3}$ м от вершины A, точки K и L совпадут с A. Опишем один из возможных способов действий охотника. Сначала он становится в центр треугольника. Если волка убить нельзя, т. е. расстояние до него превосходит 30 м, то охотник перемещается по прямой в направлении той вершины треугольника, около которой находится волк. В силу проведённых рассуждений, «зона обстрела» движется вместе с охотником так, что волк не сможет выбежать из безопасной части поляны и непременно будет убит.

4. *Первый способ*. Предположим, что трапеция не является равнобокой. Пусть серединный перпендикуляр к основанию AB пересекает прямую CD в точке O. Возможны два случая: 1) точка O лежит между точками C и D; 2) точки C и D лежат по одну сторону от точки O (возможно, одна из них совпадает с O).

В первом случае, поскольку трапеция не является равнобокой, длины отрезков OD и OC различны. Без ограничения общности можно считать, что $OD > OC$. Пусть E — такая точка отрезка OD, что $OE = OC$. Тогда поскольку $AC + BC = AE + BE$, для трапеции $ABED$ выполнено равенство $AD + BD = AE + BE$. Тем самым мы свели задачу ко второму случаю, когда обе вершины основания CD трапеции лежат по одну сторону от точки O (вершина E может совпадать с O).

Обозначим через F точку, симметричную B относительно прямой CD. Покажем, что прямые AF и CD пересекаются в точке O. В самом деле, серединный перпендикуляр к AB параллелен BF, поэтому в силу теоремы Фалеса пересекает отрезок AF в его середине. С другой стороны, прямая CD является серединным перпендикуляром к отрезку BF, поэтому также пересекает отрезок AF в его середине. Значит, середина AF лежит как на прямой CD, так и на серединном перпендикуляре к AB, а значит, совпадает с точкой O.

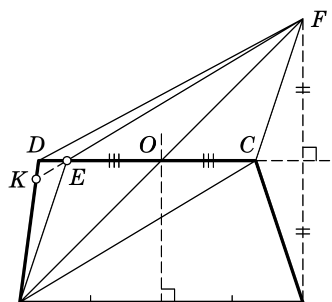


Рис. 86

Сначала рассмотрим случай, когда точка E совпадает с O. В этом случае для трапеции $ABOD$ по условию имеем равенство $AD+BD=AO+BO$. В силу симметрии получаем $BD=DF$ и $BO=OF$, поэтому $AD+DF=AO+OF=AF$, что противоречит неравенству треугольника. Это означает, что точки E и O различны, т. е. точка E лежит строго между точками D и O (см. рис. 86). В силу симметрии снова получаем $BD=DF$ и $BE=EF$. Следовательно, $AD+DF=$ $=AE+EF$. Покажем, что последнее равенство невозможно. Пусть прямая FE пересекает отрезок AD в точке K. Рассмотрим $\triangle AKF$ и $\triangle AEF$. Поскольку по неравенству треугольника

$$AK+KF=AK+KE+EF>AE+EF,$$

периметр $\triangle AKF$ больше периметра $\triangle AEF$. Аналогично получаем

$$AD+DF=AK+KD+DF>AK+KF,$$

поэтому периметр $\triangle ADF$ больше периметра $\triangle AKF$. Следовательно, периметр $\triangle ADF$ больше периметра $\triangle AEF$, что несовместимо с равенством $AD+DF=AE+EF$.

Полученное противоречие означает, что трапеция, удовлетворяющая условию задачи, является равнобокой.

Второй способ. Площади треугольников ABC и ABD равны, так как эти треугольники имеют общую сторону AB и равные высоты, проведённые к этой общей стороне. Также эти треугольники имеют равные периметры, поскольку из условия следует, что $AB+BC+CA=AB+BD+$ $+DA$. Обозначим через S и p соответственно площадь и полупериметр этих треугольников. Также положим $x_1=p-$ $-AD$, $x_2=p-BD$, $y_1=p-AC$, $y_2=p-BC$.

Имеем $x_1+x_2=2p-AD-BD=AB$. Аналогично $y_1+y_2=$ $=AB$. По формуле Герона для треугольника ABD получаем $S^2=p(p-AB)x_1x_2$ и $x_1x_2=\dfrac{S^2}{p(p-AB)}$. По формуле Герона для треугольника ABC аналогично получаем $y_1y_2=$ $=\dfrac{S^2}{p(p-AB)}$. Значит, обе пары чисел x_1 и x_2, y_1 и y_2 являются парами корней квадратного (относительно t) уравнения

$t^2 - AB\cdot t + \dfrac{S^2}{p(p-AB)} = 0$. Если $x_1 = y_1$ и $x_2 = y_2$, то $AD = AC$ и $BD = BC$. Это невозможно, так как в этом случае прямая AB являлась бы серединным перпендикуляром к отрезку CD. Следовательно, $x_1 = y_2$ и $x_2 = y_1$. Отсюда получаем, что $AD = BC$, т. е. трапеция $ABCD$ является равнобокой.

Комментарий. Поскольку геометрическим местом точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух фиксированных точек (фокусов) постоянна (и больше расстояния между фокусами), является эллипс, из утверждения задачи следует, что всякая прямая, параллельная прямой, проходящей через фокусы эллипса, пересекает его не более чем в двух точках, причём множество этих точек пересечения симметрично относительно серединного перпендикуляра к отрезку, соединяющему фокусы.

5. Первый может обеспечить себе 50 монет, если отделит 1 монету: тогда остальные 1986 монет будут разделены на 40 частей, хотя бы в одной из которых более $\dfrac{1986}{40} > 49$ монет. Больше 50 монет ему обеспечить себе не удастся, так как каждый следующий за ним разбойник может отделять по 50 монет до тех пор, пока это возможно; поскольку $39\cdot 50 = 1950$, разбойники смогут сделать так, что в каждой из 41 частей будет не более 50 монет.

Второй разбойник может обеспечить себе 26 монет, действуя следующим образом. Пусть после первого деления образовались кучи из a и b монет, где $a < b$, тогда он делит вторую кучу на части из 986 и $b - 986$ монет. Если $a \leqslant 986 < b \leqslant 2\cdot 986$, то в каждой из образовавшихся трёх частей не более 986 монет, значит, первый получит не более 986 монет, а второй — не менее $\dfrac{1001}{40} > 25$ монет. Если же $a > 986$ или $b > 2\cdot 986$, то тогда две из частей a, 986, $b - 986$ содержат не менее 986 монет. Поэтому в результате раздела каждой из этих двух куч в одной из полученных из неё частей будет не менее $\dfrac{986}{39} > 25$ монет. В любом случае, второму разбойнику достанется не менее 26 монет. Больше 26 монет он обеспечить себе не может, ведь если первый разделит клад на кучи из 993 и 994 монет, то вне зависимости от действий второго разбойника, следующие за ним смогут самую большую из трёх куч сохранить, а от остальных отделять по 26 монет до тех пор, пока это возможно. Поскольку $38 \cdot 26 = 988$, разбойники добьются того, чтобы ровно в одной из 41 частей было более 26 монет (её заберёт первый разбойник).

Каждый из оставшихся разбойников более 1 монеты обеспечить себе не может, так как если вне зависимости от его действий остальные 39 разбойников будут отделять по одной монете, то в результате содержать более одной монеты будут не более двух куч, а их заберут первые два разбойника.

8 класс

1. Умножив доказываемое неравенство на положительное число $2(a+b)$, проведём равносильные преобразования:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) > \frac{x+y}{a+b}; \quad x+y+b\cdot\frac{x}{a}+a\cdot\frac{y}{b} > 2(x+y);$$
$$b\cdot\frac{x}{a}+a\cdot\frac{y}{b} > a\cdot\frac{x}{a}+b\cdot\frac{y}{b};$$
$$(a-b)\left(\frac{y}{b}-\frac{x}{a}\right) > 0.$$

Последнее неравенство непосредственно следует из условия задачи.

Комментарий. Наш выдающийся соотечественник Пафнутий Львович Чебышёв доказал (см., например, [62, с. 59]), что для любого натурального $n \geqslant 2$ и любых двух монотонных последовательностей $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ выполнено неравенство

$$n(x_1y_1+\ldots+x_ny_n) \geqslant (x_1+\ldots+x_n)(y_1+\ldots+y_n),$$

если эти последовательности монотонны в одну и ту же сторону (например, обе невозрастающие), и обратное неравенство, если характеры монотонности этих последовательностей различны (например, одна из этих последовательностей возрастает, а другая — убывает). Если, кроме того, обе эти последовательности строго монотонны, то знак неравенства можно заменить на строгий.

Неравенство из условия задачи следует из неравенства Чебышёва для $n=2$, $x_1=a$, $x_2=b$, $y_1=x/a$, $y_2=y/b$.

2. а) При $n=1$ получаем квадрат 2×2, который легко можно разрезать ровно на 2 прямоугольника 1×2. При $n=2$ получаем квадрат 4×4, который нельзя разрезать более чем на 5 прямоугольников размером 1×3, поскольку $4^2=3\cdot 5+1$. Способ разрезания на 5 прямоугольников показан на рис. 87.

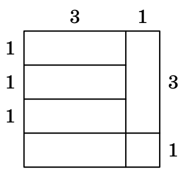


Рис. 87

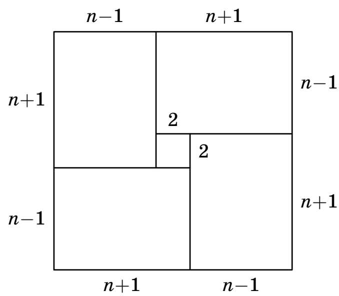


Рис. 88

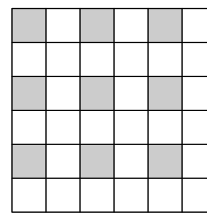


Рис. 89

б) Здесь $n+1>4$, а поскольку $(2n)^2=4(n-1)(n+1)+4$, больше чем $4(n-1)$ прямоугольников $1\times(n+1)$ вырезать нельзя. Укажем способ вырезания $4(n-1)$ прямоугольников (см. рис. 88). Сначала вырежем из квадрата $2n\times 2n$ четыре прямоугольника $(n-1)\times(n+1)$ (останется квадрат 2×2), а каждый из четырёх прямоугольников разрежем на $(n-1)$ прямоугольников $1\times(n+1)$.

в) При $n=3$ получаем квадрат 6×6. Поскольку $6^2=4\cdot 9$, более 9 прямоугольников вырезать нельзя. Покажем, что и 9 вырезать нельзя. Допустим противное. Проведём прямые, параллельные сторонам квадрата и разбивающие его на 36 одинаковых клеток. Площадь 9 прямоугольников 1×4 равна площади квадрата 6×6, поэтому вырезать их можно только по линиям клеток. Покрасим 9 клеток в чёрный цвет так, как это сделано на рис. 89. Тогда каждый из вырезанных прямоугольников содержит чётное число (0 или 2) чёрных клеток. Значит, нечётное число чёрных клеток не будет вырезано. Противоречие. Способ вырезать 8 прямоугольников показан на рис. 88.

Комментарий. Доказать, что квадрат 6×6 нельзя разрезать более чем на 8 прямоугольников 1×4, можно и с помощью ещё одной («диагональной») раскраски в 4 цвета (см. рис. 90). Любой прямоугольник 1×4 должен иметь клетки всех четырёх цветов, но в цвет «3» покрашено только 8 клеток. Кроме того, можно заметить, что, например, в цвета «1» и «2» покрашено разное число клеток, а это также означает невозможность такого разрезания.

1	4	3	2	1	4
2	1	4	3	2	1
3	2	1	4	3	2
4	3	2	1	4	3
1	4	3	2	1	4
2	1	4	3	2	1

Рис. 90

3. *Первый способ*. Назовём две команды *дополнительными*, если одна из них состоит из всех учеников, не вошедших в другую. Каждый ученик класса входит только в одну из любых двух дополнительных команд, следовательно, он входит ровно в половину всех команд. С другой стороны, поскольку в турнире должны участвовать всевозможные команды, причём каждая — ровно по одному разу, половина числа всех команд равна общему количеству предстоящих соревнований. Таким образом, количество соревнований совпадает с числом выступлений каждого ученика, а значит, в каждом соревновании будут выступать все ученики, т. е. две дополнительные команды.

Второй способ. Допустим, что в одном из соревнований должны участвовать недополнительные команды A_0 и B_0. Пусть A_1 — команда, дополнительная к B_0, а B_1 — команда, встречающаяся с A_1, тогда $A_1 \supset A_0$, $A_1 \neq A_0$, а $B_1 \subset B_0$, $B_1 \neq B_0$ (так как команда B_0 уже выступает с A_0, см. рис. 91). Рассмотрим далее команду A_2, дополнительную к B_1 и её соперника B_2. Аналогично имеем $A_2 \supset A_1$, $A_2 \neq A_1$ и $B_2 \subset B_1$, $B_2 \neq B_1$. Продолжая это построение, получим бесконечную последовательность команд $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots$, число участников которых строго возрастает, что невозможно.

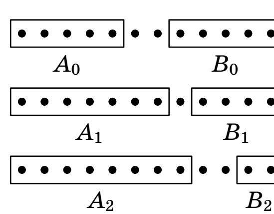


Рис. 91

Комментарий. Задачу и оба её решения можно сформулировать на языке теории графов. Зададим граф следующим образом. Его вершинами назовём все 2^n различных наборов длины n из нулей и единиц. Будем считать, что два таких набора соединены ребром тогда и только тогда, когда они не имеют единиц на одинаковых местах. Будем говорить, что 2^{n-1} рёбер этого графа образуют паросочетание, если каждая его вершина принадлежит ровно одному из этих рёбер. Условие задачи равносильно утверждению о том, что в таком графе существует ровно одно паросочетание, причём каждое его ребро соединяет наборы, в которых общее число единиц равно n.

Первое решение фактически использует идею двойного подсчёта. Для каждого ребра возьмём общее число единиц в обоих его наборах и сложим все эти числа. Сумма будет не больше $2^{n-1}n$, так как каждое из 2^{n-1} слагаемых не больше n по условию. Вычислим ту же сумму другим способом, посчитав, сколько раз в неё входит каждая единица. Каждая единица содержится ровно в 2^{n-1} наборах, и значит, участвует в 2^{n-1}-й сумме единиц, вычисленных по рёбрам. Поэтому полная сумма равна $2^{n-1}n$. Но это возможно только тогда, когда для каждого ребра сумма будет равна n.

Предлагаем заинтересованному читателю самостоятельно изложить второе решение на языке теории графов.

4. Пусть P и Q — середины отрезков AC и CE соответственно (см. рис. 92). Поскольку $\angle BCA = \angle DCE$, прямоугольные треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle CDE$ подобны, поэтому $\angle BPA = \angle DQE$. Медианы BP и QD равны половинам гипотенуз AC и CE соответственно, поэтому по теореме о средней линии получаем $BP = CP = MQ$, $PM = CQ = QD$, а также $\angle APM = \angle ACE = \angle MQE$. Следовательно, $\angle BPA + \angle APM = \angle DQE + \angle MQE$, поэтому $\angle BPM = \angle MQD$. Таким образом, $\triangle BPM = \triangle MQD$ по двум сторонам и углу, а значит, $BM = MD$.

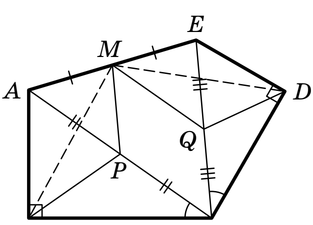


Рис. 92

5. Предположим, что можно.

Заметим сначала, что 100 чисел от n до $n+99$ можно разбить на 50 пар вида $(k, k+50)$, где $k = n$, $n+1$, ...,

$n+49$. В самом деле, пары $(n,\ n+50)$, $(n+1,\ n+51)$, ..., $(n+49,\ n+99)$ содержат все числа от n до $n+99$ по одному разу. Следовательно, и любой набор из $100m$ подряд идущих натуральных чисел можно разбить на пары такого вида (так как его можно разбить на наборы из ста подряд идущих чисел, а каждый такой набор можно разбить на пары указанного вида). Аналогично доказывается, что любой набор из $2\cdot 1987m$ подряд идущих натуральных чисел можно разбить на пары вида $(k,\ k+1987)$. Следовательно, любой набор из $2\cdot 50\cdot 1987 = 198700$ чисел можно разбить как на пары вида $(k,\ k+50)$, так и на пары вида $(k,\ k+1987)$.

Рассмотрим набор чисел от n до $n+198700-1$ включительно. Поскольку в этом наборе ровно $198\,700$ чисел, его можно разбить как на пары вида $(k,\ k+50)$, так и на пары вида $(k,\ k+1987)$. По условию задачи в каждой паре вида $(k,\ k+50)$ хотя бы одно число выбрано, поэтому общее количество выбранных чисел — не менее половины от $198\,700$. С другой стороны, в каждой паре вида $(k,\ k+1987)$ хотя бы одно число не выбрано, а значит, всего выбранных чисел не более половины от $198\,700$. Таким образом, их ровно половина, а следовательно, в каждой паре, на которые разбивался наш набор, выбрано ровно одно число. В частности, в каждой из пар $(n,\ n+50)$ и $(n,\ n+1987)$ выбрано ровно одно число.

Таким образом, при любом натуральном n выбрано ровно одно из чисел пары $(n,\ n+50)$ и ровно одно из чисел пары $(n,\ n+1987)$. Пусть n — какое-нибудь выбранное число. Тогда число $n+50$ не выбрано, значит $n+100$ выбрано, $n+150$ не выбрано, ..., $n+1987\cdot 50$ не выбрано. С другой стороны, число $n+1987$ не выбрано, $n+2\cdot 1987$ выбрано, $n+3\cdot 1987$ не выбрано, ..., $n+50\cdot 1987$ выбрано. Поскольку число $n+1987\cdot 50$ не может быть выбрано и не выбрано одновременно, получили противоречие.

Итак, выбрать числа указанным в условии задачи способом нельзя.

9 класс

1. *Первый способ*. Запишем в таблицу последние цифры всевозможных сумм двух различных цифр.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1		3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3		5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5		7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7		9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9		1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1		3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3		5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5		7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	

Нетрудно видеть, что каждая цифра в таблице встретится не менее восьми раз (строго говоря, чётная цифра — 8 раз, нечётная цифра — 10 раз). Кроме того, ни в одном столбце и ни в одной строке нет повторяющихся цифр. Следовательно, если исключить три цифры, т. е. вычеркнуть из таблицы соответствующие три строки и три столбца, то исчезнет не более 6 появлений любой цифры. Следовательно, в таблице по-прежнему будут представлены все цифры и, в частности, последняя цифра числа n.

Второй способ. Пусть a — последняя цифра числа n. Рассмотрим 10 пар цифр, суммы которых оканчиваются на a:

$$(0; a),\ (1; a-1),\ \ldots,\ (a-1; 1),\quad (a; 0),$$
$$(a+1; 9),\ (a+2; 8),\ \ldots,\ (8; a+2),\ (9; a+1).$$

Пары построены по следующему принципу: первая цифра увеличивается от 0 до 9, а вторая подбирается так, чтобы сумма двух цифр равнялась a или $a+10$. Например, при

$a=4$ это будут пары

$$(0;4),\ (1;3),\ (2;2),\ (3;1),\ (4;0),$$
$$(5;9),\ (6;8),\ (7;7),\ (8;6),\ (9;5).$$

Если цифра a чётна, то все пары, кроме двух, будут состоять из различных цифр. Если же цифра a нечётна, то все пары будут состоять из различных цифр. Поскольку вместе с каждой парой $(a;b)$ будет выписана и пара $(b;a)$, получаем что вне зависимости от чётности цифры a найдутся 8 цифр, которые можно разбить на четыре пары так, чтобы сумма цифр в каждой паре оканчивалась на a. Любые 7 цифр содержат хотя бы одну из этих пар. В самом деле, исключение трёх цифр разрушит не более трёх пар, значит, хотя бы одна пара цифр, сумма которых оканчивается на a, останется.

Комментарий. Задачу можно сформулировать следующим образом. Рассмотрим множество чисел от 0 до 9 с операцией сложения по модулю 10. Если взять в нём любое подмножество из 7 элементов, то всевозможные попарные суммы его разных чисел по модулю 10 дают все числа от 0 до 9.

Это утверждение обобщается на случай произвольного натурального $n\geqslant 3$. Рассмотрим множество всех чисел от 0 до $n-1$ с операцией сложения по модулю n. Для любого его подмножества, содержащего не менее $[n/2]+2$ элементов, всевозможные попарные суммы по модулю n чисел из этого подмножества дают все числа от 0 до $n-1$. Сначала докажем этот факт для $n=2m+1$, $m\geqslant 1$. Для этого рассмотрим все m пар различных чисел от 0 до $n-1$, суммы которых по модулю n равны данному числу a $(0\leqslant a\leqslant n-1)$. Для любых $m-1$ чисел найдётся пара, не содержащая ни одно из них. Значит, среди остальных $m+2$ чисел найдётся пара, дающая в сумме по модулю n данное число a. Пусть теперь $n=2m$, $m\geqslant 2$. Тогда рассмотрим все пары различных чисел от 0 до $n-1$, суммы которых по модулю n равны данному числу a. Их ровно $m-1$, если a чётно, и ровно m, если a нечётно. Для любых $m-2$ чисел найдётся пара, не содержащая ни одно из них. Значит, среди остальных $m+2$ чисел найдётся пара, дающая в сумме по модулю n данное число a. Утверждение доказано.

Число $[n/2]+2$ в доказанном утверждении нельзя уменьшить, так как при любом $n\geqslant 2$ можно привести пример множества из $[n/2]+1$ чисел от 0 до $n-1$, для которого найдётся такое целое a, что a не равно по модулю n никакой из сумм двух различных чисел этого множества. Если $n=2m+1$, то это множество всех натуральных чисел от m

до $2m$: из него нельзя выбрать два разных числа, сумма которых равна по модулю n числу $2m$. Если $n = 2m$, то это множество всех натуральных чисел от $m-1$ до $2m-1$: из него нельзя выбрать два разных числа, сумма которых по модулю n равна $2m-2$.

2. Рассмотрим произвольный правильный пятиугольник $ABCDE$ и докажем ряд его свойств. Проведём из любой его вершины (например, C) диагонали CA и CE (см. рис. 93). Поскольку сумма углов пятиугольника равна 3π, каждый его внутренний угол равен $3\pi/5$. Из равнобедренного $\triangle ABC$ получаем $\angle BAC = \angle BCA = \pi/5$. Аналогично $\angle DCE = \pi/5$, а значит, $\angle ACE = \pi/5$. Следовательно, CA — биссектриса угла BCE. Рассмотрим теперь угол, смежный с любым из углов пятиугольника, например, $\angle EAM$. Он равен $2\pi/5$, поэтому AE — биссектриса угла CAM.

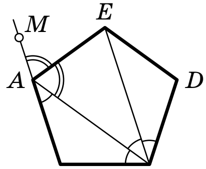


Рис. 93

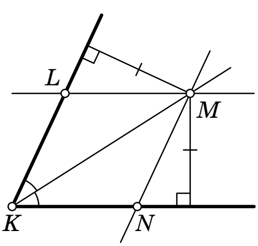


Рис. 94

Пусть дан произвольный угол. Покажем, как с помощью двусторонней линейки можно построить его биссектрису. Обозначим вершину угла через K. Проведём две прямые, каждая из которых параллельна одной из сторон угла и пересекает другую его сторону в точках L и N соответственно (см. рис. 94). Обозначим через M точку пересечения этих прямых. Поскольку обе высоты четырёхугольника $KLMN$, проведённые из вершины M к сторонам KL и KN, равны ширине линейки, получаем равные прямоугольные треугольники с общей гипотенузой KM, а значит, луч KM является биссектрисой данного угла с вершиной K.

Опишем теперь, как можно восстановить одну или две вершины правильного пятиугольника.

а) Пусть даны вершины A, B, C, D. Построим биссектрисы угла ACD и угла, смежного с углом BAC (см. рис. 93).

По доказанному искомая вершина E является точкой их пересечения.

б) В силу п. а) достаточно восстановить одну из недостающих вершин. Очевидно, все случаи сводятся к следующим двум: 1) заданы вершины A, B, C, 2) заданы вершины A, B, D. В случае 1 (см. рис. 95) строим AE — биссектрису угла, смежного с BAC, и AD — биссектрису угла EAC. Вершина D находится на пересечении AD и биссектрисы угла, смежного с ACB. В случае 2 (см. рис. 96) пусть DF — биссектриса угла, смежного с ADB. Тогда вершина C лежит на пересечении AC и DC — биссектрис углов BAD и BDF соответственно.

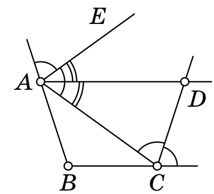


Рис. 95

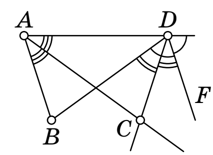


Рис. 96

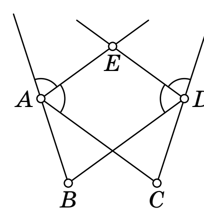


Рис. 97

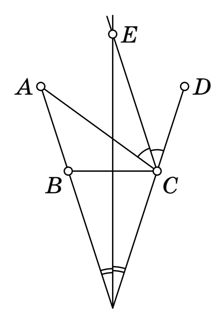


Рис. 98

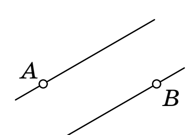


Рис. 99

Комментарий. Отметим, что если даны вершины A, B, C, D, то точку E можно также построить, воспользовавшись тем, что она лежит на пересечении или биссектрис углов, смежных с углами BAC и CDB (см. рис. 97), или биссектрис угла ACD и угла, образованного продолжениями сторон AB и DC (см. рис. 98).

Некоторые участники олимпиады не обратили внимания на последнюю фразу условия и посчитали, что двусторонняя линейка позволяет проводить две параллельные прямые на расстоянии, равном её ширине, через две заданные точки A и B (как на рис. 99). Оказывается, при таком понимании становятся разрешимыми все задачи на построение, которые можно решить традиционным набором инструментов — циркулем и линейкой, но окружность следует считать построенной, если указан её центр и отрезок, равный радиусу.

3. *Первый способ.* Рассмотрим 50 чисел

$$2^{51}3^{99},\ 2^{52}3^{98},\ \ldots,\ 2^{99}3^{51},\ 2^{100}3^{50},$$

т. е. числа $2^{50+i}3^{100-i}$, где $i=1, \ldots, 50$. Очевидно, ни одно из них не делится на другое. С другой стороны, произведение любых двух из этих чисел имеет вид $2^k 3^l$, где оба показателя k и l больше 100, поэтому это произведение делится на любое из указанных чисел.

Второй способ. Пусть $p_1, \ldots, p_{50}$ — различные простые числа. Тогда числа

$$n_1 = p_1^2 p_2 \ldots p_{50}, \;\; n_2 = p_1 p_2^2 p_3 \ldots p_{50}, \;\; \ldots, \;\; n_{50} = p_1 \ldots p_{49} p_{50}^2$$

обладают требуемыми свойствами. Действительно, если $i \neq j$, то число $n_i/n_j = p_i/p_j$ не целое. С другой стороны, произведение $n_i n_j = (p_1 \ldots p_{50})^2 p_i p_j$ делится на любое из чисел $n_1, \ldots, n_{50}$.

4. *Первый способ*. Покажем, для любых чисел a_1, a_2 и положительных чисел b_1, b_2 справедливо неравенство

$$\frac{(a_1+a_2)^2}{b_1+b_2} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2}.$$

В самом деле, умножив обе его части на положительное число $b_1 b_2 (b_1+b_2)$, получим

$$b_1 b_2 (a_1+a_2)^2 \leqslant (b_1+b_2)(a_1^2 b_2 + a_2^2 b_1).$$

Преобразуем разность правой и левой частей неравенства:

$$\begin{gathered}(b_1+b_2)(a_1^2 b_2 + a_2^2 b_1) - b_1 b_2 (a_1+a_2)^2 = \\ = a_1^2 b_1 b_2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_1 b_2 - b_1 b_2 (a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2) = \\ = (a_2 b_1 - b_2 a_1)^2 \geqslant 0.\end{gathered}$$

Итак, неравенство для двух чисел доказано.

Пусть $n > 2$ — произвольное натуральное число (например, 1987). Последовательно применяя доказанное неравенство $n-1$ раз, получаем:

$$\frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n} \leqslant \frac{(a_1+\ldots+a_{n-1})^2}{b_1+\ldots+b_{n-1}} + \frac{a_n^2}{b_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(a_1+\ldots+a_{n-2})^2}{b_1+\ldots+b_{n-2}} + \frac{a_{n-1}^2}{b_{n-1}} + \frac{a_n^2}{b_n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \ldots + \frac{a_n^2}{b_n}.$$

Второй способ. Сначала сформулируем и докажем неравенство Коши—Буняковского

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big),$$

которое справедливо для любых действительных чисел $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$. Для его доказательства заметим, что при любом действительном t неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - ty_i)^2 \geqslant 0$ выполнено, поскольку сумма квадратов действительных чисел всегда неотрицательна. Раскрыв скобки и вынося степени t за скобки, получим неравенство

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big)t^2 - 2\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)t + \Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) \geqslant 0.$$

Если коэффициент при t^2 равен нулю, то все $y_i = 0$ и исходное неравенство очевидно. Если же хотя бы одно из чисел y_i отлично от нуля, то мы получили квадратное неравенство относительно t. Поскольку оно выполнено при всех t, дискриминант D квадратного трёхчлена, стоящего в левой части этого неравенства, неположителен. Следовательно,

$$D = 4\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\Big)^2 - 4\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\Big) \cdot \Big(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\Big) \leqslant 0,$$

откуда следует доказываемое неравенство.

Остаётся заметить, что если в неравенстве Коши—Буняковского для $n = 1987$ положить $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ и $y_i = \sqrt{b_i}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, то получим неравенство, равносильное неравенству из условия задачи.

К о м м е н т а р и й. Легко показать, что из неравенства этой задачи, в свою очередь, следует неравенство Коши (это означает, что упомянутые неравенства равносильны). Неравенство из условия задачи также является частным случаем неравенства, встречающегося в литературе как *неравенство Бергстрёма* (см., например, [37, с. 315]).

5. Предположим, что Тане удалось уложить доски в соответствии с условием задачи. Будем рассматривать только те уложенные доски, удаление каждой из которых делает конструкцию негодной. Такие доски могут опираться только на какие-нибудь две смежные стороны бассейна (назовём их «опорными»). Действительно, в противном случае какие-нибудь две противоположные стороны бассейна соединялись бы мостиком из досок, а по условию досок на такое построение не хватит.

Рассмотрим процесс укладывания досок Таней. Заметим, что каждая новая укладываемая доска имеет по крайней мере две точки опоры, каждая из которых лежит либо на «опорной» стороне бассейна, либо на какой-нибудь из ранее уложенных досок. Во втором случае такая точка опоры должна лежать между точками опоры этой уложенной доски. Для каждой доски назовём её «надёжной частью» такой её участок, который находится между двумя её крайними точками опоры.

Рассмотрим также бóльшую часть бассейна, ограниченную ломаной, состоящей из «надёжных частей» уложенных досок. Докажем индукцией по числу n уложенных досок, что на каждом шаге рассматриваемого процесса эта часть бассейна имеет форму выпуклого многоугольника, причём прямые, являющиеся продолжениями ограничивающих этот многоугольник досок, пересекают обе «опорные» стороны бассейна, и, кроме того, площадь части бассейна, лежащей вне этого многоугольника, не больше $n/4$.

База индукции при $n=1$ следует из того, что площадь прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой не превосходит $1/4$, так как его высота не больше медианы, равной $1/2$.

Пусть для n досок утверждение доказано, докажем его для $n+1$ доски. Рассмотрим доску, уложенную последней. Если её «надёжная часть» не имеет общего отрезка с многоугольником, полученным на предыдущем шаге, то ни его граница, ни площадь дополнительной к нему части бассейна не изменились и утверждение верно. Если же такой отрезок имеется, то на новом шаге рассматриваемая часть бассейна также будет иметь форму выпуклого многоугольника, но одной из его сторон будет участок «надёжной части» новой доски. При этом возможны три случая, когда новая доска опирается: на две стороны бассейна; на одну сторону бассейна и одну «надёжную часть» уложенной ранее доски, ограничивавшую многоугольник на предыдущем шаге; на какие-нибудь две «надёжные части» ранее уложенных досок, ограничивавших многоугольник на предыдущем шаге.

Первый случай аналогичен случаю, рассмотренному для базы индукции. Во втором случае рассмотрим треугольник, ограниченный «надёжной частью» новой доски, прямой, содержащей сторону бассейна, на которую опирается новая доска, и прямой, содержащей «надёжную часть» ранее уложенной доски, на которую опирается новая доска (см. рис. 100). Этот треугольник будет тупоугольным, наибольшей стороной которого является часть новой доски. Эта сторона не больше единицы, а его высота, проведённая к этой стороне не превосходит медианы и

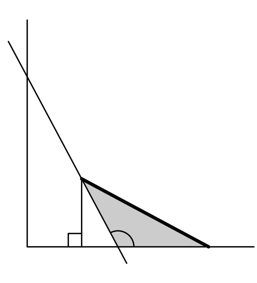


Рис. 100

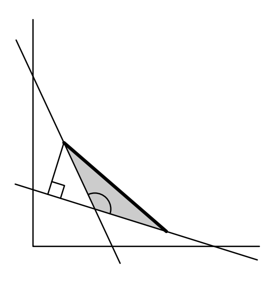


Рис. 101

меньше 1/2. Поэтому его площадь меньше 1/4. В третьем случае аналогично рассмотрим треугольник, ограниченный «надёжной частью» новой доски и двумя прямыми, содержащими «надёжные части» ранее уложенных досок, на которые опирается новая доска (см. рис. 101), и получим что его площадь меньше 1/4. Отсюда с помощью предположения индукции о площади дополнительной к многоугольнику части на предыдущем шаге получаем утверждение о площади дополнительной к многоугольнику части на новом шаге. Индуктивное предположение доказано.

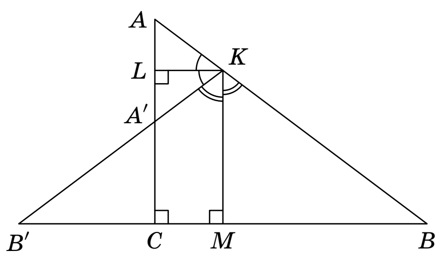


Рис. 102

Пусть мячик расположен в точке K, а n-я доска является первой доской, положенной над ним. Обозначим через A и B точки пересечения прямой, проходящей через эту доску, с «опорными» сторонами бассейна, а через C — общую вершину этих сторон (см. рис. 102). По условию длины перпендикуляров KL и KM, проведённых из точки K к его сторонам AC и BC соответственно, больше 2. Значит, площадь прямоугольника $CLKM$ больше 4. Треугольники $A'KL$ и $B'KM$, симметричные треугольнику AKL относительно KL и треугольнику BKM относительно KM соответственно, вместе покрывают прямоугольник $CLKM$, поэтому суммарная площадь треугольников AKL и BKM также больше 4. Следовательно, треугольник ABC имеет площадь больше 8. С другой стороны, по доказанному выше его площадь не больше чем $n/4$. Значит, $n/4 > 8$ и $n > 32$. Получаем противоречие.

10 класс

1. *Первый способ.* а) Любые три положительных числа можно представить в виде $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$, где $0<\alpha, \beta, \gamma<\pi/2$. Среди таких чисел α, β и γ можно выбрать два числа, разность которых неотрицательна и меньше $\pi/4$. Пусть для определённости $0\leqslant\alpha-\beta<\pi/4$. Тогда

$$0\leqslant\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\operatorname{tg}(\alpha-\beta)<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

б) Любые четыре действительных числа можно представить в виде $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ и $\operatorname{tg}\delta$, где $-\pi/2<\alpha, \beta, \gamma, \delta<\pi/2$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha\geqslant\beta\geqslant\gamma\geqslant\delta$. Если хотя бы одна из разностей $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\delta$ не превосходит $\pi/4$, то утверждение доказано. Если же $\alpha-\beta>\pi/4$, $\beta-\gamma>\pi/4$, $\gamma-\delta>\pi/4$, то $\pi>\alpha-\delta>3\pi/4$, поэтому $0>\operatorname{tg}(\alpha-\delta)>-1$, а значит,

$$0<\operatorname{tg}(\delta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}\alpha}<1,$$

что и требовалось доказать.

Второй способ. б) Если среди заданных чисел есть равные, то их и следует выбрать. Если все числа различны, то обозначим через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ их арктангенсы, расположенные в порядке возрастания:

$$-\pi/2<\alpha<\beta<\gamma<\delta<\pi/2<\alpha+\pi.$$

Точки β, γ, δ разбивают отрезок $[\alpha;\ \alpha+\pi]$ на четыре отрезка, длина хотя бы одного из которых не превосходит $\pi/4$. В качестве x и y можно взять тангенсы правого и левого концов этого отрезка. Действительно, если, например, $\beta-\alpha\leqslant\pi/4$, то, учитывая, что $\beta-\alpha\geqslant0$, имеем $0\leqslant\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\leqslant1$ и при этом

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha}=\frac{x-y}{1+xy}.$$

В случае $(\alpha+\pi)-\delta<\pi/4$ также можно выбрать $x=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\pi)$ и $y=\operatorname{tg}\delta$.

2. Рассмотрим любую прямую l, перпендикулярную данной плоскости. Обозначим через A, B и C вершины данного треугольника так, чтобы углы, образованные его сторонами BC, CA и AB с данной плоскостью равнялись α, β и γ соответственно, а через A', B' и C' — соответствующие проекции этих вершин на прямую l. Если A', B' и C' — это три различные точки, то без ограничения общности можно считать, что точка B' лежит между точками A' и C'. Прямые BC, CA и AB образуют с прямой l углы $\pi/2-\alpha$, $\pi/2-\beta$ и $\pi/2-\gamma$ соответственно. Поскольку $\cos(\pi/2-\varphi)=\sin\varphi$ для любого φ, длины отрезков $B'C'$, $C'A'$ и $A'B'$ равны $a\sin\alpha$, $a\sin\beta$ и $a\sin\gamma$ соответственно, где a — длина стороны данного треугольника. Значит, в этом случае $a\sin\alpha+a\sin\gamma=a\sin\beta$, откуда вытекает требуемое утверждение.

Пусть теперь проекции каких-либо двух вершин треугольника на прямую l совпали (будем считать, что это точки A' и C'), а третья от них отлична (точка B'). Тогда угол β равен нулю, а из равенств $a\sin\gamma=A'B'=B'C'=a\sin\alpha$ вытекает утверждение задачи. Если же совпали все три проекции, то $\alpha=\beta=\gamma=0$. Итак, во всех случаях одно из чисел $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ равно сумме двух других.

3. Рассмотрим покрытие, состоящее из самих 17 закрашенных квадратов. Если расстояние между любыми двумя из них не меньше $\sqrt{2}$, то квадраты и образуют искомое покрытие, поскольку их суммарный периметр $17\cdot 4<100$. Если же найдутся хотя бы два квадрата, расстояние между некоторыми точками которых меньше $\sqrt{2}$, то будем последовательно преобразовывать покрывающую систему до тех пор, пока расстояние между любыми точками любых двух прямоугольников этой системы не станет не меньше $\sqrt{2}$.

Пусть на некотором шаге преобразования в покрывающей системе нашлись два прямоугольника, стороны которых проходят по линиям бумаги, а расстояние между их точками меньше $\sqrt{2}$. Тогда их можно покрыть прямоугольником, стороны которого тоже проходят по линиям бумаги, а его периметр не более чем на 2 больше суммы периметров двух этих прямоугольников. В самом деле, два таких прямоугольника не могут быть разделены одновременно горизонтальной и вертикальной полосками из клеточек, поскольку иначе расстояние между ними будет больше диагонали клетки, равной $\sqrt{2}$ (см. рис. 103). Кроме того, ширина такой разделяющей полоски, если она существует (прямоугольники могут пересекаться), может быть равна только 1. Без ограничения общности будем считать, что если такая полоска есть, то она вертикальна (см. рис. 104).

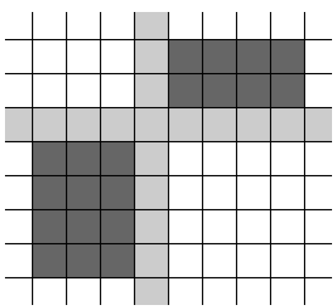


Рис. 103

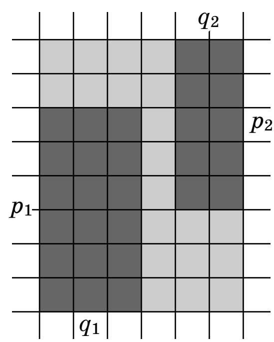


Рис. 104

Спроектируем два рассматриваемых прямоугольника на какую-нибудь вертикальную прямую. Мы получим отрезок, длина p которого не превосходит суммы длин p_1 и p_2 вертикальных сторон прямоугольников. Далее, спроектируем два рассматриваемых прямоугольника на какую-нибудь горизонтальную прямую. Мы получим или один отрезок, длина q которого не превосходит суммы длин q_1 и q_2 горизонтальных сторон прямоугольников, или два отрезка с длинами q_1 и q_2, разделённые между собой интервалом длины 1. В любом случае такая проекция покрывается отрезком длины $q \leqslant q_1 + q_2 + 1$. Следовательно, эти два прямоугольника можно покрыть прямоугольником с требуемыми свойствами (см. рис. 103). Заменим два рассмотренных прямоугольника на этот прямоугольник. Такие замены потребуется выполнить не более 16 раз. В итоге получим покрытие, удовлетворяющее условиям задачи и имеющее периметр не больше $17\cdot 4+16\cdot 2=100$.

4. Пусть n — любое целое число. Тогда n, $n-50$, $n+1987$ принадлежат разным подмножествам. Число $n+1937$ не может лежать в одном подмножестве с числом $n+1987=(n+1937)+50$, и с числом $n-50=(n+1937)-1987$, значит оно всегда лежит в одном подмножестве с числом n. Следовательно, числа n и $n-100$ не могут лежать в одном подмножестве, так как по условию задачи числа $n-50$, $n-100$, $n+1937$ принадлежат разным подмножествам.

Мы доказали, что для любого целого значения n чи́сла n, $n-50$ и $n-100$ лежат в разных подмножествах. Следовательно, числа $n-50$, $n-100$ и $n-150$ также лежат в разных подмножествах. Отсюда следует, что числа n и $n-150$ всегда принадлежат одному подмножеству.

Рассмотрим теперь подмножество, которое содержит 0. Тогда в это подмножество входят числа

$$0,\ 1937,\ 2\cdot 1937,\ \ldots,\ 50\cdot 1937.$$

Поскольку $50\cdot 1937=646\cdot 150-50$, в это же подмножество входят и числа

$$645\cdot 150-50,\ \ldots,\ 150-50,\ -50,$$

т. е. 0 и -50 лежат в одном подмножестве. Таким образом, описанное в задаче разбиение невозможно.

Комментарий. Отметим, что в решении фактически используется лишь взаимная простота чисел 50 и 1987, поэтому задача допускает соответствующее обобщение. Эти числа выбраны потому, что в 1987 г. проходила пятидесятая Московская математическая олимпиада.

5. Разобьём царство на 4 квадрата со стороной 1 км — квадраты 1-го порядка; каждый из этих квадратов разобьём на 4 квадрата со стороной $1/2$ км — квадраты 2-го порядка, эти квадраты в свою очередь — на квадраты 3-го порядка (со стороной $1/4$ км) и т. д., пока не дойдём до столь большого числа n, что в каждом квадрате этого порядка будет не более одного жителя царства (жителей, попавших на общую границу каких-либо квадратов, можно закрепить за любым из этих квадратов). Царь может организовать оповещение поэтапно следующим образом. Цель 1-го этапа — оповестить по одному жителю в каждом из населённых квадратов 1-го порядка, после чего гонец и все задействованные в оповещении жители должны вернуться в исходные пункты. На 2-м этапе каждый из уже оповещённых жителей, действуя как гонец на 1-м этапе, устраивает оповещение каждого из квадратов 2-го порядка в своём квадрате 1-го порядка, на 3-м этапе оповещаются по одному жителю в каждом квадрате 3-го порядка и т. д. После n-го этапа будут оповещены все жители.

Оценим время, необходимое для 1-го этапа оповещения. Поскольку расстояние между любыми двумя точками квадрата со стороной 2 км не превосходит $2\sqrt{2}$ км, при скорости 3 км/ч его можно пройти менее чем за 1 ч. Пусть A, B, C, D — квадраты 1-го порядка, причём в полдень гонец находится в квадрате A (см. рис. 105). Тогда если населены не более двух из квадратов B, C, D, то оповестить по одному их жителю и вернуться в исходный пункт гонец может меньше чем за 3 ч. Если же населены все квадраты, то гонец оповещает жителя квадрата B (менее чем за 1 ч)

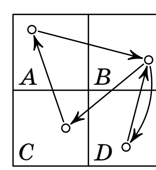


Рис. 105

и направляет его немедленно оповестить жителя квадрата D, сам направляется в квадрат C, а затем возвращается в квадрат A. Путь к жителю квадрата D и возвращение обратно займёт менее 2 ч. Таким образом, 1-й этап можно осуществить менее чем за 3 ч. Второй этап повторяет первый одновременно в четырёх квадратах с вдвое меньшей стороной — он займёт менее $3/2$ ч. Каждый следующий этап потребует менее половины времени от предыдущего, а последний n-й этап займёт менее $3/2^{n-1}$ ч. Мы получаем, что для оповещения всех жителей понадобится менее $3+3/2+\ldots+3/2^{n-1}<6$ ч.

Таким образом, к 6 часам вечера все жители получат приглашение на бал, а за оставшийся час они успеют прибыть во дворец.

1988 год (*LI олимпиада*)

7 класс

1. *Первый способ.* Если простое число $p \geqslant 7$ даёт остаток a при делении на 3, то остаток при делении числа p^2 на 3 равен остатку при делении на 3 числа a^2, так как $(3k+a)^2=3(3k^2+2ak)+a^2$. Аналогичное утверждение верно и для остатков при делении на 5 и на 8. Учитывая это, составим таблицы остатков при делении на 3, на 5 и на 8 чисел p и p^2.

Остаток при делении p на 3	1	2
Остаток при делении p^2 на 3	1	1

Остаток при делении p на 5	1	2	3	4
Остаток при делении p^2 на 5	1	4	4	1

Остаток при делении p на 8	1	3	5	7
Остаток при делении p^2 на 8	1	1	1	1

Получаем, что p^2 всегда даёт остаток 1 при делении на 3 и на 8. При делении на 5 число p^2 даёт остаток 1 или 4, поэтому p^4 при делении на 5 даёт остаток 1, а значит, p^4-1 делится на 5. Разложим p^4-1 на множители: $p^4-1=(p^2-1)(p^2+1)$. Первый множитель делится на 3 и на 8, а второй чётен, поэтому p^4-1 делится на $3\cdot16$. Таким образом, p^4-1 делится на $3\cdot5\cdot16=240$.

Второй способ. Разложим p^4-1 на множители: $p^4-1 = (p^2-1)(p^2+1) = (p-1)(p+1)(p^2+1)$.

Поскольку число p не делится на 2, каждое из чисел $p-1$, $p+1$ и p^2+1 делится на 2. Кроме того, чётные числа $p-1$ и $p+1$ отличаются на 2, следовательно, одно из них делится на 4. Значит, число p^4-1 делится на 16.

Число p не делится на 3, поэтому одно из чисел $p-1$ или $p+1$ делится на 3, следовательно, число p^4-1 делится на 3.

Поскольку число p не делится на 5, одно из чисел $p-2$, $p-1$, $p+1$ или $p+2$ делится на 5. Значит, на 5 делится одно из чисел $p-1$, $p+1$ или $p^2-4=(p-2)(p+2)$. Числа p^2+1 и p^2-4 дают одинаковый остаток при делении на 5. Следовательно, на 5 делится одно из чисел $p-1$, $p+1$ или p^2+1, а значит, и число p^4-1.

Итак, число p^4-1 делится на 16, 3 и 5, поэтому оно делится и на $240=16\cdot 3\cdot 5$.

2. Кратчайший путь от точки на грани $BCC'B'$ до точки P — это отрезок между этими точками, а кратчайший путь от такой точки до точки M проходит, кроме грани $BCC'B'$, либо по грани $ABCD$, либо по грани $ABB'A'$. Рассмотрим часть развёртки куба, содержащую эти три грани (рис. 106). Пусть ребру AB на развёртке отвечают два

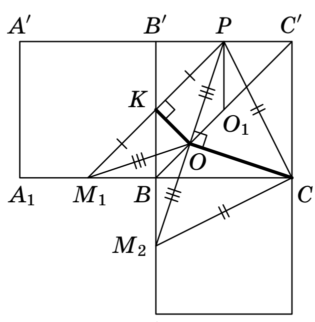


Рис. 106

отрезка — A_1B, A_2B, а его середине M — точки M_1 и M_2 соответственно.

Кратчайший путь по поверхности куба от произвольной точки X, лежащей в грани $BCC'B'$, до точки M будет изображаться на этой развёртке кратчайшим из двух отрезков: XM_1 или XM_2. Серединный перпендикуляр к отрезку M_1M_2 содержит диагональ BC' грани $BCC'B'$ и делит эту грань на два треугольника: $BB'C'$ и $BC'C$. Для точек X, лежащих в треугольнике $BB'C'$, кратчайший путь изображается отрезком XM_1, а для точек X лежащих в треугольнике $BC'C$ — отрезком XM_2 (для точек X, лежащих на диагонали BC', отрезки XM_1 и XM_2 равны и изображают на развёртке два кратчайших пути). Значит, геометрическое место точек, расстояния от которых по поверхности куба до точек M и P равны, представляет собой отрезок серединного перпендикуляра к отрезку PM_1 в треугольнике $BB'C'$ и отрезок серединного перпендикуляра к отрезку PM_2 в треугольнике $BC'C$. Первый из этих перпендикуляров содержит точку K — середину ребра BB', так как $KM_1 = KP$. Второй из этих перпендикуляров содержит точку C, так как $CM_2 = CP$. Кроме того, оба серединных перпендикуляра содержат точку O, делящую отрезок BC' в отношении $1:3$, считая от вершины B, так как $OM_1 = OM_2$ по доказанному выше и $OM_1 = OP$, что следует, например, из равенства треугольников OBM_1 и OO_1P, где O_1 — центр грани $BCC'B'$. Значит, искомое геометрическое место точек является ломаной KOC.

3. *Первый способ.* Пусть l — данная прямая и B — данная точка. Сначала отметим на прямой l две произвольные точки A и M. Затем при помощи кронциркуля отметим на луче AM такую точку D, что $AM = MD$. Далее проведём луч AB и отметим на нём за точкой B такую точку E, что $AB = BE$. Построим отрезки DB и EM и обозначим точку их пересечения через O. Затем проведём отрезок ED. Заметим, что DB и EM — медианы треугольника ADE, а поскольку все медианы треугольника пересекаются в одной точке, прямая AO содержит третью медиану AC этого треугольника. Отметим точку C на пересечении AO и ED. Поскольку BC — средняя линия треугольника ADE, получаем, что прямая BC — искомая.

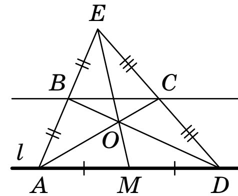


Рис. 107

Второй способ. Пусть l — данная прямая и B — данная точка. Как и в первом решении, отметим на прямой l две произвольные точки A и M, а затем отметим на луче AM такую точку D, что $AM = MD$. Далее проведём луч AB и отметим на нём за точкой B произвольную точку E. После этого проведём прямые BD и EM и обозначим через O точку их пересечения. Наконец, проведём прямые AO и ED и обозначим точку их пересечения через C. Докажем, что прямая BC — искомая. Пусть C' — такая точка на прямой ED, что $BC' \parallel AD$. В трапеции $ABC'D$ точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой. Следовательно, точка пересечения диагоналей трапеции $ABC'D$ лежит на прямой EM, а значит, совпадает с точкой O. Таким образом, прямые AC и AC' совпадают, откуда следует и совпадение точек C и C'.

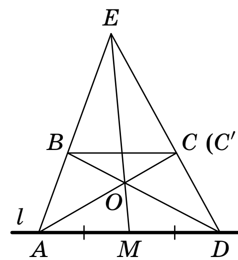


Рис. 108

4. Если среди этих 20 телефонов найдутся три попарно соединённых проводами, то все соединяющие их провода должны быть закрашены разными красками. Значит, для требуемой закраски двух красок может не хватить.

Укажем способ, позволяющий закрасить все провода требуемым способом, используя не более трёх красок.

Если есть телефон, от которого отходит ровно один провод, то закрасим этот провод в первый цвет и рассмотрим телефон, к которому он ведёт. Если от этого телефона отходит ещё один провод, то закрасим его во второй цвет и рассмотрим телефон, к которому ведёт он. Продолжим движение по цепи проводов, закрашивая их поочерёдно в первый и второй цвета, пока на каком-то шаге мы не придём к рассмотрению телефона, от которого не отходит других проводов (такой шаг обязательно наступит, поскольку телефонов конечное число, а рассмотренные ранее телефоны не могут встретиться снова). Отметим, что все провода, выходящие из телефонов, задействованных в этой цепи, окажутся закрашенными. Далее, если найдётся ещё какой-нибудь не рассмотренный ранее телефон, от которого отходит ровно один провод, проделаем такие же шаги, начиная с этого телефона. Будем повторять эти действия до тех пор, пока не останется ни одного не рассмотренного телефона, от которого отходит ровно один провод.

Если после проведённых действий остался хотя бы один телефон, от которого отходят ровно два провода, и эти провода не закрашены, то закрасим один из этих проводов в первый цвет и рассмотрим телефон, к которому он ведёт. От этого телефона обязательно отходит ещё один провод, так как все телефоны, от которых отходит ровно один провод, уже рассмотрены. Закрасим его во второй цвет и перейдём к рассмотрению телефона, к которому ведёт он. Продолжим движение по цепи проводов, закрашивая их поочерёдно в первый и второй цвета, пока на каком-то шаге мы не придём к исходному телефону, один из проводов которого уже закрашен в первый цвет. На этом последнем для этой цепи шаге закрасим провод в третий цвет. Далее, если найдётся ещё какой-нибудь не рассмотренный ранее телефон, от которого отходят ровно два провода, проделаем такие же шаги, начиная с этого телефона. Будем повторять эти шаги, пока не останется ни одного не рассмотренного телефона, от которого отходит ровно два провода.

В итоге могли остаться лишь телефоны, не соединённые проводами с другими. Значит, все провода закрашены, причём любые два провода, отходящие от одного телефона, имеют разные цвета. Итак, мы показали, что трёх цветов достаточно, а двух может не хватить.

Комментарий. Заметим, что приведённое решение годится для любого числа телефонов, не меньшего трёх.

8 класс

1. Посмотрим, как изменяется сумма чисел строки после одной операции. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — строка, к которой применяется операция. Тогда новая строка имеет вид

$$a_1,\ a_2 - a_1,\ a_2,\ a_3 - a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n - a_{n-1},\ a_n.$$

Сумма чисел новой строки равна

$$a_1 + \ldots + a_n + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) = \\ = (a_1 + \ldots + a_n) + (a_n - a_1).$$

Заметим теперь, что после выполнения любого числа операций, описанных в условии задачи, первое и последнее числа строки не изменятся, поэтому для каждой строки, полученной из строки 1, 9, 8, 8, будут выполнены равенства $a_n = 8$, $a_1 = 1$. Следовательно, после каждой такой операции сумма чисел будет увеличиваться на семь. Поскольку сумма чисел исходной строки равна 26, после ста операций получим строку, сумма чисел которой равна $26 + 7 \cdot 100 = 726$.

2. Пусть AB — данный отрезок. Выберем произвольную точку C вне прямой AB, проведём луч AC и отметим на нем такую точку D, что $AC = CD$. Затем проведём через точку C прямую l, параллельную прямой BD (см. задачу 3 для 7 класса). По теореме Фалеса прямая l пересечёт отрезок AB в его середине.

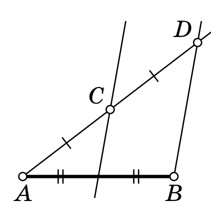


Рис. 109

3. Найдём все возможные остатки при делении четвёртой степени целого числа n на 16. Если число n чётно, т. е. $n=2k$, то $n^4=16k^4$, поэтому остаток при делении на 16 равен нулю. Если же число n нечётно, то $n^4-1=$ $=(n-1)(n+1)(n^2+1)$ делится на 16, поскольку все три выражения в скобках чётны, причём первое или второе из них кратно 4. Следовательно, четвёртая степень любого целого числа при делении на 16 даёт остаток 0 или 1.

Рассмотрим левую и правую части равенства. Если числа x, y, z чётны, число t также должно быть чётным. Пусть теперь хотя бы одно из чисел x, y, z нечётно. Тогда левая часть при делении на 16 может давать только остатки 3, 5, 7, $3+5=8$, $3+7=10$, $5+7=12$, $3+5+7=15$, а правая — только остатки 0 и 11, поэтому равенство невозможно. Мы воспользовались тем, что при сложении указанные остатки складываются, причём в нашем случае превышения наибольшего возможного значения остатка — 15 — не происходит. Итак, мы показали, что если равенство $3x^4+$ $+5y^4+7z^4=11t^4$ выполнено, то все числа x, y, z, t должны быть чётными.

Предположим, что существует хотя бы одна четвёрка натуральных чисел, удовлетворяющая этому равенству, и рассмотрим все такие четвёрки. В каждой из них можно выбрать наибольшее из четырёх входящих в неё чисел. Выпишем эти наибольшие числа в ряд и выберем из них наименьшее. Пусть x, y, z, t — любая четвёрка, в которой наибольшее из чисел равно выбранному числу. Как показано выше, все числа x, y, z, t чётные, поэтому $x=2x_1$, $y=2y_1$, $z=2z_1$, $t=2t_1$, где числа x_1, y_1, z_1, t_1 — тоже натуральные. Подставив выражения старых чисел через новые в равенство $3x^4+5y^4+7z^4=11t^4$ и сокращая на 16, получаем равенство $3x_1^4+5y_1^4+7z_1^4=11t_1^4$. Значит, четвёрка x_1, y_1, z_1, t_1 также удовлетворяет данному равенству, но её наибольшее число в два раза меньше наибольшего числа четвёрки x, y, z, t, что противоречит выбору этой четвёрки.

Комментарий. Решение основано на двух известных идеях. Первая из них — использование арифметики остатков по подходящему модулю (в рассматриваемом случае это 16). Во многих несложных задачах подобного сорта (такие задачи называются уравнениями в целых числах или диофантовыми уравнениями в честь древнегреческого математика Диофанта), использование так называемых сравнений по модулю (при удачном выборе модуля) сразу позволяет решить задачу в отрицательном смысле (т. е. доказать, что решений нет). Но в рассматриваемой задаче приходится применять ещё один приём — *метод бесконечного спуска*, придуманный знаменитым французским математиком Пьером Ферма в XVI в. Этим методом он доказал, что уравнение $x^4+y^4=z^4$ не имеет нетривиальных целочисленных решений (т. е. решений, отличных от тройки нулей).

Отсутствие нетривиальных целочисленных решений у общего уравнения Ферма $x^n+y^n=z^n$ (знаменитая большая теорема Ферма) было доказано только в конце XX в. английскими математиками Э. Уайлсом и Р. Тейлором с использованием очень сложных методов.

При решении задачи модуль 16 был выбран не случайно. Во-первых, он удобен при переборе вариантов, так как четвёртые степени по модулю 16 имеют только два остатка. А во-вторых, подсчёт числа вариантов показывает, что левая часть уравнения по модулю 16 имеет не более 8 значений, что даёт шанс доказать отсутствие ненулевых решений. Вычисление всех возможных остатков, проведённое в решении, показывает, что таких решений действительно нет, причём в правой части вместо множителя 11 могло бы стоять любое из чисел 1, 2, 4, 6, 9, 13, 14. Коэффициенты в левой части уравнения также можно было бы заменить на другие числа (но не на любые). Самый простой выбор коэффициентов, при котором подобная задача не имеет решений, приводит к уравнению

$$x^4+y^4+z^4=4t^4.$$

Конечно, уравнение Ферма $x^4+y^4=z^4$ ещё проще, но оно, очевидно, имеет решение по модулю 16, а именно $0^4+1^4=1^4$ (поэтому доказательство Ферма было более сложным, чем решение рассматриваемой задачи). Общую теорему Ферма доказать подобным же образом, рассматривая сравнения по модулю, невозможно. Американский математик Диксон доказал, что уравнение Ферма, рассматриваемое по заданному модулю, имеет полностью ненулевые решения (и даже нашёл хорошую оценку для их количества).

Если коэффициенты выбраны так, что ненулевое решение по некоторому модулю существует, это ещё не означает, конечно, что есть и настоящие ненулевые решения. Они могут быть, но найти их бывает непросто. Например, великий швейцарский (и российский) математик Леонард Эйлер в XVIII в. предположил, что уравнение $x^4+y^4+z^4=t^4$ не имеет нетривиальных решений. Он предполагал даже больше, а именно, что для любого $n>2$ никакая n-я степень целого положительного числа не равна сумме n-х степеней натуральных чисел, взятых в количестве $n-1$. При $n=3$ Эйлер это доказал, причём это утверждение совпадает с тем же частным случаем великой теоремы Ферма. Но в конце XX в. для бо́льших значений n с помощью компьютерных вычислений были найдены такие решения, причём самое меньшее из них оказалось таким:

$$95800^4+217519^4+414560^4=422481^4.$$

При $n=5$ гипотезу Эйлера опровергли ещё в 1966 г., найдя следующий контрпример:

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5.$$

В связи с уравнением Эйлера интересен вопрос о том, какого наименьшего числа четвёртых степеней целых чисел достаточно для того, чтобы любое натуральное число можно было представить в виде их суммы, т. е. при каком наименьшем n уравнение

$$y=x_1^4+\ldots+x_n^4$$

будет разрешимо в целых числах при любом натуральном y. Предлагаем читателю доказать изложенным выше методом, что это число не меньше 16, так как $y=16^n(16k-1)$ нельзя представить в виде суммы 15 четвёртых степеней целых чисел. Английский математик Г. Дэвенпорт доказал, что 16 степеней всегда достаточно.

Возможно, заинтересованному читателю будет любопытно узнать, можно ли решить подобным образом рассмотренную задачу, выбрав не 16, а какой-нибудь другой модуль, и попробовать найти такой модуль. Однако даже при выборе меньшего модуля объём вычислений может возрасти, так как, например, по модулям 7 и 13 различных остатков у четвёртых степеней будет 4, а по модулю 11 их 5, и во всех этих случаях есть нетривиальные решения. По модулям 3 и 5 остатков только два (тоже 0 и 1), но несложный перебор вариантов показывает, что по этим модулям уравнение имеет ненулевые решения. Следует отметить, что коэффициенты уравнения выбраны так, что провоцируют выбрать в качестве модуля 3, 5, 7, 11.

4. Докажем, что достаточно трёх взвешиваний. Например, можно сначала взвесить вместе 1-ю, 2-ю, 4-ю монеты, потом 1-ю и 3-ю, и, наконец, 2-ю и 3-ю. Пусть результаты взвешиваний равны соответственно v_1, v_2, v_3. Заметим, что 4-я монета — единственная, которую взвешивали один раз, а остальные взвешивали по два раза. Поэтому, если она фальшивая, то сумма $v_1+v_2+v_3$ будет нечётна, а если настоящая, то чётна (в указанной сумме веса остальных монет учитываются по два раза, и их подлинность или фальшивость не влияет на чётность этой суммы). Значит, первым можно установить вес 4-й монеты. Веса остальных монет можно найти, решая систему из трёх уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = v_1 - x_4, \\ x_1 + x_3 = v_2, \\ x_2 + x_3 = v_3. \end{cases}$$

Для этого можно, например, сложить все уравнения и найти сумму $x_1 + x_2 + x_3$. Зная эту сумму и учитывая первое уравнение, найдём x_3, а затем из второго и третьего уравнений получим x_1 и x_2. По найденным весам устанавливается подлинность или фальшивость каждой монеты.

Покажем, что двух взвешиваний недостаточно. Поскольку для каждой монеты имеются два варианта — фальшивая она или нет, а всего монет четыре, нам необходимо уметь различать 16 вариантов. Каждое взвешивание позволяет однозначно выяснить, сколько фальшивых монет в нём участвовало. Если взвешивалось n монет, то может получиться один из $n+1$ результатов: от $9n$ (все фальшивые) до $10n$ (все настоящие). Поэтому если в одном взвешивании участвовали все монеты, то возможных результатов у него ровно 5. Если во втором взвешивании участвовало не более двух монет, то результатов у него не более трёх, значит общее число результатов обоих взвешиваний не более 15, и эти результаты не позволяют различить необходимые 16 вариантов. Аналогично, если в каждом взвешивании участвовало не более трёх монет, причём в одном из них — не более двух, то общее число результатов обоих взвешиваний не более 12, поэтому определить число фальшивых монет невозможно. Осталось рассмотреть два варианта: 1) в одном взвешивании участвуют все монеты, а в другом — три из них; 2) в обоих взвешиваниях задействовано по три монеты. В первом варианте очевидным способом находится вес монеты, участвовавшей только в одном взвешивании, но про три остальных известен только их суммарный вес, по которому определить вес каждой их них возможно, только если все они — подлинные. Во втором варианте невозможно, например, узнать какая из монет фальшивая, если только она одна и находится среди тех двух монет, которые участвовали в обоих взвешиваниях. Итак, мы рассмотрели все возможные случаи и установили, что двух взвешиваний недостаточно.

Комментарий. Если известно, что фальшивая монета одна, то достаточно двух взвешиваний. В общем случае, когда монет n, минимальное число взвешиваний для поиска единственной фальшивой монеты равно минимальному k, такому, что $2^k \geqslant n$. Задача, равносильная этой, предлагалась на Московской математической олимпиаде в случае $n=64$ (см. задачу 5 для 8 класса в 1990 г.). Алгоритм решения этой задачи очень похож на алгоритм поиска ошибки в двоичном коде Хэмминга, исправляющего одну ошибку (см., например, [45]).

В случае же произвольного и заранее неизвестного числа фальшивых монет задача крайне трудна. Этой задачей занимались П. Эрдёш, Л. Мозер, Д. Кантор, У. Миллс, Б. Линдстрём и другие специалисты. Для наименьшего числа взвешиваний известны оценки снизу и сверху. Нижнюю оценку можно найти в книге [72]. Разнообразные задачи о поиске фальшивой монеты собраны, например, в книге [32].

Если даны n монет и нужно найти все фальшивые среди них с помощью взвешиваний, то эта задача известна под разными названиями, например, одно из них — игра *Mastermind*. В этой игре нужно вычислить набор из n нулей и единиц, если по вашей просьбе вам сообщают сумму любых выбранных вами заранее чисел. Вы должны найти все эти числа, затратив наименьшее число вопросов. Важно, что список вопросов (т. е. набор сумм, которые вам сообщают) вы должны составить заранее. Если же вы можете придумывать ваши вопросы в процессе игры, учитывая полученные ответы на предыдущие вопросы, то такой алгоритм называется адаптивным, и поиск оптимального адаптивного алгоритма — совсем другая задача. Впервые задача о поиске фальшивых монет в случае пяти монет появилась в одном из американских математических журналов в 1960 г. Уже через три года известные венгерские математики П. Эрдёш и А. Реньи доказали, что минимальное число взвешиваний (в неадаптивном алгоритме) не меньше, чем приблизительно $\frac{2n}{\log_2 n}$. А ещё через несколько лет шведский математик Б. Линдстрём придумал алгоритм поиска фальшивых монет с помощью приблизительно $\frac{2n}{\log_2 n}$ взвешиваний. Всё же в его алгоритме число взвешиваний оказалось чуть больше, чем в нижней оценке Эрдёша—Реньи, и задача нахождения минимального числа взвешиваний для любого n, по-видимому, не решена до сих пор, хотя этой задаче и различным её вариантам и обобщениям посвящены десятки научных статей. Например, интересен вопрос о том, как минимизировать не только число взвешиваний, но и число операций в алгоритме, который по результатам взвешиваний вычисляет список фальшивых монет.

9 класс

1. Пусть диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$пересекаются в точке P. Тогда треугольники ADP и ABP имеют общую высоту, проведённую из вершины A, поэтому $S_{ADP} : S_{ABP} = DP : BP$. Аналогично $S_{CDP} : S_{BCP} = DP : BP$. Получаем $S_{ADP} \cdot S_{BCP} = S_{ABP} \cdot S_{CDP}$, следовательно,

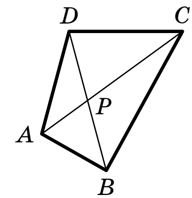


Рис. 110

$$S_{ABP} \cdot S_{BCP} \cdot S_{CDP} \cdot S_{ADP} = (S_{ADP} \cdot S_{BCP})^2.$$

Квадрат целого числа не может оканчиваться на 8, поэтому произведение четырёх исходных чисел не может оканчиваться на 1988.

2. Простое число $p_i \geqslant 5$ не делится ни на 3, ни на 2. Поэтому p^2 при делении на 3 и на 8 даёт остаток 1 (см. решение задачи 1 для 7 класса). Следовательно, сумма любых трёх таких квадратов делится на 3, а сумма любых восьми — на 8. Поэтому число $p_1^2 + \ldots + p_{24}^2$ делится и на 3, и на 8, а значит, и на $3 \cdot 8 = 24$.

3. Пусть O — точка пересечения данных прямых. Выберем произвольное положительное число a и отложим на обеих прямых равные отрезки $OA = OB = a$ (см. рис. 111). По теореме Пифагора $AB = \sqrt{2}a$. Отложим теперь на луче OA отрезок $OC = AB$. Тогда $BC = \sqrt{3}a$. Затем отложим на луче OA отрезок $OD = BC$. Тогда $BD = \sqrt{OB^2 + OD^2} = 2a$. Отметим на луче BO такую точку E, что $OE = OB$. Тогда $BE = BO + OE = 2a$, $DE = BD = 2a$. Таким образом, $\triangle BDE$ равносторонний.

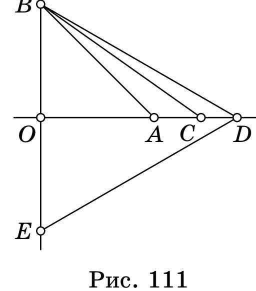


Рис. 111

4. Рассмотрим числа вида $s_k = \dfrac{k(k-1)}{2}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$:

$$s_1 = 0,\ \ s_2 = 1,\ \ s_3 = 3,\ \ s_4 = 6,\ \ s_5 = 10,\ \ s_6 = 15,\ \ \ldots$$

Пусть n — некоторое натуральное число. Тогда оно находится между некоторыми двумя числами из этой последовательности, т. е. однозначно определено натуральное число k, для которого выполнены неравенства $s_k < n \leqslant s_{k+1} = s_k + k$. Полагая $l = n - s_k$, $0 < l \leqslant k$, получаем, что любое натуральное число n единственным образом представимо в виде $n = s_k + l$, где $k \geqslant 1$, $1 \leqslant l \leqslant k$. Определим теперь два натуральных числа равенствами $x = k - l + 1$, $y = l$. Тогда $k = x + y - 1$ и

$$n = \frac{k(k-1)}{2} + l = \frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2} + y = f(x, y).$$

Пара таких натуральных чисел (x, y), как и пара (k, l), определена однозначно.

К о м м е н т а р и й. Функция из условия задачи называется *нумерующей функцией Кантора*. Она реализует взаимно однозначное соответствие между множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и множеством пар натуральных чисел $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, доказывающее *счётность* множества $\mathbb{N}^2$. Это соответствие наглядно изображается следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4) & & \ldots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & \ldots & & \\
 & \swarrow & & \swarrow & & & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & \ldots & & & & \\
 & \swarrow & & & & & & & \\
(4,1) & & \ldots & & & & & & \\
\ldots & & & & & & & &
\end{array}$$

Иными словами, выписав все пары натуральных чисел в бесконечную таблицу, мы можем последовательно занумеровать их натуральными числами, следуя по «диагоналям», как показано стрелками.

Отметим, что на очередную «диагональ» попадают все пары (x, y), для которых сумма $x + y$ постоянна. Таким образом, для нумерации всех пар на k-й диагонали, на которой $x + y = k$, нужно k натуральных чисел. Этим обусловлено появление в решении чисел $s_k = 1 + 2 + \ldots + (k-1) = \dfrac{k(k-1)}{2}$, называемых *треугольными* числами.

Разумеется, существует много других способов занумеровать натуральными числами все пары из $\mathbb{N}^2$, т. е. функций, обладающих тем же свойством, что и $f(x, y)$. В качестве упражнения читатель может проверить, что таким свойством обладает также, например, функция $g(x, y) = 2^{x-1}(2y-1)$.

Такая же задача давалась на Московской олимпиаде 1964 года (задачи 64.7.5, 64.9.4, см. [40]), но вместо натуральных чисел рассматривались целые неотрицательные, а соответствующая функция имела вид $f(x, y) = \frac{1}{2}((x+y)^2 + 3x + y)$.

5. Для краткости систему из нескольких телефонов с проводами, в которой каждый провод соединяет два телефона и каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом, будем называть телефонной сетью. Раскраску проводов, при которой каждый провод закрашен одной краской и от каждого телефона отходят провода разных цветов, назовём *правильной*. Докажем, что все провода любой телефонной сети, в которой от каждого телефона отходит не более 3 проводов, можно правильно раскрасить четырьмя красками. Доказательство проведём индукцией по числу n телефонов в сети. Утверждение очевидно при $n \leqslant 3$. Пусть оно верно при $n = k$. Докажем, что тогда оно верно и при $n = k+1$. Пусть дана любая сеть с $k+1$ телефонами, в которой от каждого телефона отходит не более трёх проводов.

Если существует телефон A, от которого отходит не более двух проводов, то удалим его из сети вместе со всеми выходящими из него проводами. По предположению индукции провода полученной сети с k телефонами можно правильно раскрасить четырьмя красками. Если от A исходно не отходило ни одного провода, то немедленно получаем раскраску сети с $k+1$ телефонами. Будем далее обозначать через AB провод, соединяющий телефоны A и B. Если из A выходил один провод, скажем AB, то после его удаления получаем, что от телефона B отходят не более двух проводов, раскрашенные в какие-то два цвета. Значит, провод AB можно покрасить в любой из оставшихся цветов. Если же от A отходили два провода, скажем AB и AC, то, аналогичным образом, для каждого из них запрещена окраска не более чем в два цвета. Значит, в какой бы из разрешённых цветов мы ни покрасили провод AB, для провода AC найдётся хотя бы один разрешённый цвет. Итак, случай, когда от некоторого телефона отходит не более двух проводов, рассмотрен.

Пусть теперь от каждого телефона отходят ровно три провода и A — любой телефон в этой сети. Обозначим через B_1, B_2, B_3 телефоны, с которыми он соединён. Удалим из сети телефон A вместе со всеми тремя отходящими от него проводами. Получим сеть с k телефонами, в которой от каждого телефона отходит не более 3 проводов, причём от телефонов B_1, B_2, B_3 отходит ровно по 2 провода. По предположению индукции провода этой сети с k телефонами можно правильно раскрасить четырьмя красками, которые мы занумеруем числами 1, 2, 3, 4. Зафиксируем некоторую такую правильную раскраску и постараемся докрасить провода AB_1, AB_2, AB_3 красками 1, 2, 3, 4 так, чтобы получилась правильная раскраска всей исходной сети с $k+1$ телефонами. Поскольку провода, отходящие от B_1, покрашены ровно двумя красками, для раскраски провода AB_1 можно использовать две оставшиеся краски так, чтобы не нарушить правильность раскраски проводов, выходящих из B_1. То же верно и для проводов AB_2 и AB_3.

Рассмотрим сначала случай, когда хотя бы один цвет является разрешённым для одного из проводов AB_1, AB_2, AB_3 и запрещённым для другого из них. Без ограничения общности, пусть цвет l разрешён для провода AB_1 и не разрешён для провода AB_2. Тогда покрасим провод AB_1 в цвет l (см. рис. 112), а провод AB_3 — в любой из разрешённых на этом проводе цветов m, отличный от l (это возможно, поскольку на AB_3 разрешено не менее двух цветов). Провод AB_2 покрасим в любой из разрешённых на этом проводе цветов n, отличный от m (это возможно по той же причине). При этом n не сов-

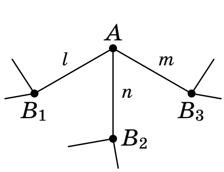


Рис. 112

падает с l, поскольку цвет l не разрешён на AB_2. Тогда все три цвета l, m, n различны, и мы получаем правильную раскраску исходной сети с $k+1$ телефонами. Таким образом, если множества разрешённых цветов хотя бы двух из проводов AB_1, AB_2, AB_3 не совпадают, то их можно докрасить так, что получится правильная раскраска исходной сети с $k+1$ телефонами.

Остаётся рассмотреть единственный случай, когда на каждом из проводов AB_1, AB_2, AB_3 разрешены одни и те же два цвета. Пусть это цвета 3 и 4. Это означает, что в раскрашенной нами сети из k телефонов от каждого из телефонов B_1, B_2, B_3 отходят по два провода цветов 1 и 2. В этом случае нельзя сразу докрасить провода AB_1, AB_2, AB_3 так, чтобы получилась правильная раскраска исходной сети с $k+1$ телефонами. Поэтому мы сначала несколько изменим раскраску сети из k телефонов.

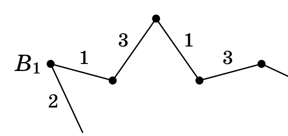


Рис. 113

Будем двигаться от телефона B_1 по проводам цветов 1 и 3, не проходя дважды по одному и тому же проводу (см. рис. 113). Если мы пришли к некоторому телефону по проводу, например, цвета 3, то пойти дальше можем только по единственному проводу цвета 1 (если такой есть). Поэтому наш путь определяется однозначно. При этом мы не можем вернуться в B_1, поскольку из B_1 не выходит провод цвета 3, а провод цвета 1 мы проходим в самом начале. Также мы не можем вернуться к другому уже пройденному телефону, так как иначе это означало бы, что от этого телефона отходят три провода цветов 1 и 3, и, значит, среди них есть два провода одного цвета, что противоречит правильности раскраски. Будем двигаться далее до тех пор, пока это возможно. Поскольку телефонов конечное число и они в пути не могут повторяться, мы не можем двигаться бесконечно, т. е. окажемся в тупике в некотором телефоне D. Это означает, что от D отходит только один провод цветов 1 и 3.

Пусть ω — построенная нами цепь из телефонов и проводов цветов 1 и 3. Телефоны B_2 и B_3 отличны от B_1 и не могут быть промежуточными в цепи ω, так как от каждого из них отходит один провод цвета 1 и не выходит провод цвета 3. Поэтому не более чем один из B_2 и B_3 может входить в цепь ω (совпадать с D) и, следовательно, хотя бы один из них не входит в ω. Без ограничения общности можно считать, что B_2 не входит в ω. Поменяем на цепи ω цвет всех проводов с 1 на 3 и с 3 на 1. Получим снова правильную раскраску, поскольку в B_1 и D правильность не нарушится, а для всех остальных телефонах набор цветов отходящих проводов не поменяется. В полученной правильной раскраске сети из k телефонов из B_1 выходят провода цветов 3 и 2, из B_2 — провода цветов 1 и 2, из B_3 — провода цветов 1 и 2 или цветов 3 и 2. В любом случае, покрасив AB_1 краской 1, AB_2 краской 3, AB_3 краской 4, получим правильную раскраску исходной сети с $k+1$ телефонами четырьмя красками. Индуктивный переход доказан, и доказываемое утверждение верно для всех натуральных n.

Приведём теперь пример сети, в которой 10 телефонов соединены так, что каждый соединён ровно с тремя другими, но в которой провода нельзя правильно раскрасить в 3 цвета. Рассмотрим 2 концентрических круга. На внешнем равномерно расположим 5 телефонов A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, а на внутреннем (напротив них) — 5 телефонов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Соединим первые 5 телефонов в виде правильного пятиугольника: A_1 с A_2, ..., A_5 с A_1. Остальные 5 телефонов соединим в виде пятиконечной звезды: B_1 с B_3, B_3 с B_5, B_5 с B_2, B_2 с B_4, B_4 с B_1. Кроме этого, соединим A_1 с B_1, A_2 с B_2, A_3 с B_3, A_4 с B_4, A_5 с B_5. Докажем от противного, что провода этой сети (её называют графом Петерсена) нельзя правильно раскрасить в три цвета 1, 2, 3. Допустим, что такая правильная раскраска существует. Поскольку на внешнем пятиугольнике только пять проводов, то хотя бы один цвет (пусть цвет 3) встречается на нём не более одного раза. Тогда есть четыре провода на внешнем пятиугольнике, которые раскрашены только цветами 1 и 2. Из симметрии мы можем, не ограничивая общности, считать, что это провода A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 (см. рис. 114). Тогда от каждого из телефонов A_2, A_3, A_4 уже отходят провода и цвета 1, и цвета 2. Следовательно, все провода A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4 должны быть покрашены в цвет 3. Поскольку во внутренней пятиконечной звезде нет соединения B_1B_5, то каждый провод в этой звезде имеет хотя бы один конец в одном из телефонов B_2, B_3, B_4 и, следовательно, не может иметь цвет 3.

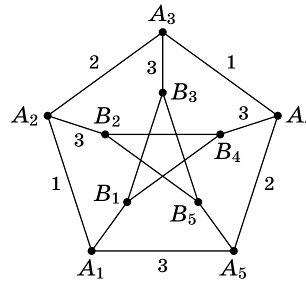


Рис. 114

Значит, все пять проводов внутренней пятиконечной звезды должны быть покрашены в цвет 1 или 2. Но тогда провода A_1B_1 и A_5B_5 должны иметь цвет 3 — противоречие с тем, что от каждого телефона выходят провода разных цветов. Следовательно, для закраски проводов, соединяющих 20 телефонов в соответствии с условием задачи, трёх цветов может не хватить.

К о м м е н т а р и й. Задача является частным случаем теоремы советского специалиста по теории графов В. Г. Визинга, согласно которой если в графе из каждой вершины выходит не более d рёбер (в этом случае говорят, что степень вершин не более d), то его рёбра можно закрасить не более чем $d+1$ краской (см. [66, с. 91]). Визинг рассмотрел и более общую задачу: если в графе каждая пара вершин соединена не более чем q рёбрами, как говорят, параллельными рёбрами (т. е. кратность каждого ребра не более q), а степень каждой вершины не более d, то достаточно не более $d+q$ красок. Если же кратность рёбер в графе ничем не ограничена, то для раскраски рёбер любого графа максимальной степени d достаточно $1+[3d/2]$ красок — это доказал знаменитый американский математик Клод Шеннон. Теорему К. Шеннона можно легко вывести из теоремы Визинга.

В теории графов рассматриваются также задачи о раскраске не рёбер, а вершин графа. Самая известная из них — это *проблема четырёх красок*, возникшая в XIX веке в Англии, и решённая в 1970-е годы с помощью компьютерных вычислений.

10 класс

1. *Первый способ.* Обозначим меньшее из чисел a и b через x, а большее через y (если $a=b$, то положим $x=y=a$). Тогда получим $y-x=|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}$, $y+x=a+b$, а значит,

$$y=\frac{(y+x)+(y-x)}{2}=\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}.$$

Второй способ. Расположим различные точки a и b на числовой прямой. Поскольку полусумма $\frac{a+b}{2}$ лежит посередине между a и b, наибольшее из этих чисел равно их полусумме плюс половина расстояния между ними, т. е.

$$\frac{a+b}{2}+\frac{|a-b|}{2}=\frac{a+b+\sqrt{(a-b)^2}}{2}.$$

Нетрудно видеть, что при $a=b$ формула также даёт искомый результат.

2. *Первый способ.* Предположим, что такая прямая существует. Заметим, что при симметрии относительно прямой касательные к графику будут переходить в касательные. Поскольку $y'=2^x\ln 2$ принимает все значения из промежутка $(0; +\infty)$, всевозможные касательные образуют с положительным направлением оси абсцисс углы от 0° до 90°. Кроме того, если ось симметрии образует с отрицательным направлением оси абсцисс угол α, то после симметрии угол φ между касательной и положительным направлением оси абсцисс изменится на $\psi=180^\circ-2\alpha-\varphi$ (см. рис. 115) — это следует из теоремы о внешнем угле треугольника и равенства отмеченных на рисунке углов. Если φ возрастает от 0° до 90°, то ψ убывает от $180^\circ-2\alpha$ до $90^\circ-2\alpha$. Это означает, что α может быть равен только 45°, т. е. ось симметрии задаётся уравнением $y=-x+c$, где c — некоторая постоянная.

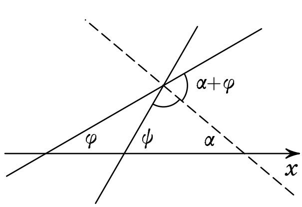


Рис. 115

При симметрии относительно прямой $y=-x+c$ прямая $y=0$ перейдёт в прямую $x=c$. Но на оси абсцисс нет точек графика функции $y=2^x$, а на прямой $x=c$ такая точка есть (см. рис. 116). Следовательно, график не симметричен относительно прямой $y=-x+c$. Итак, искомой прямой не существует.

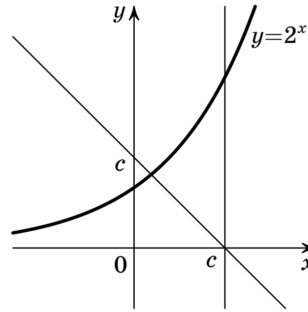


Рис. 116

Второй способ. График функции $y=2^x$ неограниченно приближается к прямой $y=0$ при $x\to-\infty$, т. е. эта прямая является его асимптотой. Если ось симметрии есть, то при симметрии относительно неё асимптота должна перейти в некоторую асимптоту этого графика. Покажем, что у графика функции $y=2^x$ нет других асимптот. Поскольку функция определена и возрастает на всей числовой прямой, её график пересекает каждую вертикальную прямую $x=c$ ровно в одной точке $(c;\,2^c)$, причём при стремлении аргумента к точке c график приближается к точке $(c;\,2^c)$. Следовательно, вертикальные асимптоты отсутствуют. Наклонная асимптота может быть только при $x\to+\infty$. Покажем, что на луче $x\geqslant 6$ график функции $y=2^x$ лежит выше параболы $y=x^2$. В самом деле, при $n\geqslant 6$ справедливо неравенство $2^n>(n+1)^2$, так как при $n=6$ оно выполнено, а если оно верно для некоторого $n\geqslant 6$, то $2^{n+1}=2\cdot 2^n>{}$ $>2(n+1)^2>(n+2)^2$, поскольку $2(n+1)^2-(n+2)^2=n^2-2$. Пусть $[x]$ — целая часть x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда при $x\geqslant 6$ получаем $2^x\geqslant 2^{[x]}>{}$ $>([x]+1)^2>x^2$, а это и означает, что график $y=2^x$ лежит выше параболы $y=x^2$.

Рассмотрим теперь любую прямую вида $y=ax+b$. Если она пересекает параболу, то не более чем в двух точках, причём в любом случае не может находиться выше неё при всех $x\geqslant 6$. Более того, разность $x^2-(ax+b)$ при неограниченном увеличении x принимает сколь угодно большие значения. Это означает, что график $y=2^x$ при $x\to+\infty$ не может неограниченно приближаться к какой-либо прямой.

Таким образом, осью симметрии графика функции $y=2^x$ может быть только прямая, при симметрии относительно которой прямая $y=0$ перейдёт в себя. Это или сама прямая $y=0$, или любая вертикальная прямая. Обе они не являются осями симметрии.

3. Проведём через одну из вершин в плоскости основания параллелепипеда прямую l, перпендикулярную боковому ребру, проходящему через эту вершину (см. рис. 117). Тогда сечение параллелепипеда любой плоскостью, параллельной прямой l и соответствующему боковому ребру, представляет собой прямоугольник. В самом деле, такое сечение является параллелограммом, в котором одна пара сторон параллельна этому боковому ребру, другая — прямой l, а они по построению перпендикулярны.

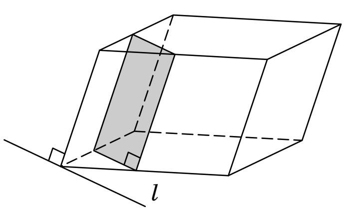


Рис. 117

4. На данной прямой l выберем любую точку P. С помощью эталона длины отметим на l две точки A и B так, что $AP=PB$. Проведём из точки P в одну и ту же полуплоскость относительно l два луча и отложим на них отрезки той же длины $PC=PD$. Тогда треугольник ACB будет прямоугольным с прямым углом C, так как точка C лежит на окружности с диаметром AB и из неё диаметр виден под прямым углом. Аналогично у треугольника ADB угол D пря-

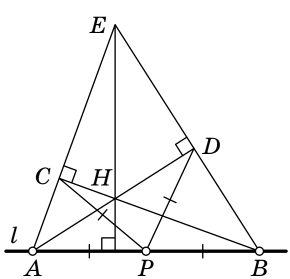


Рис. 118

мой. Поскольку углы BAC и ABD острые, лучи AC и BD пересекаются в некоторой точке E. Отрезки BC и AD — высоты треугольника ABE. Пусть H — точка пересечения этих высот. Поскольку все высоты треугольника пересекаются в одной точке, прямая EH тоже будет высотой, т. е. EH — перпендикуляр к прямой l.

Комментарий. Решение этой и подобных задач имеется в книге Д. Гильберта [27, с. 93—96]. С помощью линейки и эталона длины можно также решить, например, следующие задачи: провести через данную точку прямую, параллельную данной, отложить на данной прямой от данной точки отрезок данной длины, приложить к данной прямой в данной точке данный угол и т. д. Там же доказано, что не все задачи, которые можно решить циркулем и линейкой, разрешимы с помощью линейки и эталона длины. Например, прямоугольный треугольник с единичной гипотенузой и катетом $\sqrt{2}-1$ построить нельзя. Известно однако, что с помощью линейки и заданной окружности с центром можно выполнить любое построение, для которого используются циркуль и линейка (т. е. циркуль достаточно применить один раз). Построить же центр данного круга только с помощью одной линейки невозможно. Всё это доказал знаменитый швейцарский геометр Якоб Штейнер (см. его книгу [70]).

5. Предположим противное: начиная с чисел a_0 и b_0, $b_0 \leqslant a_0 \leqslant 1988$, описанным в задаче способом удалось сделать по крайней мере 7 делений, получая последовательно на каждом шаге по паре чисел (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_7, b_7). Будем считать, что в каждой из этих пар $a_k \geqslant b_k$ (в противном случае поменяем a_k и b_k местами), так что на следующем шаге производится деление числа a_k на b_k. Для последней пары имеем $a_7 \geqslant 1$, $b_7 \geqslant 0$.

Для данной пары чисел (a_k, b_k) оценим числа a_{k-1}, b_{k-1}, из которых они получены на предыдущем шаге. Возможны два случая: либо a_k — частное, а b_k — остаток при делении a_{k-1} на b_{k-1}, либо наоборот.

В первом случае $b_k \leqslant b_{k-1} - 1$, так как остаток от деления на b_{k-1} меньше, чем b_{k-1}, откуда $b_{k-1} \geqslant b_k + 1$. Тогда делимое a_{k-1} должно быть не меньше

$$a_k(b_k + 1) + b_k = (a_k + 1)(b_k + 1) - 1.$$

Если же a_k — остаток, а b_k — частное при делении a_{k-1} на b_{k-1}, то аналогичным образом получаем оценки $b_{k-1} \geqslant \geqslant a_k + 1 \geqslant b_k + 1$ и

$$a_{k-1} \geqslant b_k(a_k + 1) + a_k = (a_k + 1)(b_k + 1) - 1.$$

Итак, в обоих случаях справедливы неравенства

$$b_{k-1} \geqslant b_k + 1, \quad a_{k-1} + 1 \geqslant (a_k + 1)(b_k + 1).$$

Поскольку $b_7 \geqslant 0$, из первого неравенства получаем $b_6 \geqslant 1$, ..., $b_1 \geqslant 6$. Тогда последовательное применение второго неравенства даёт

$$a_0 + 1 \geqslant (a_1 + 1)(b_1 + 1) \geqslant (a_2 + 1)(b_2 + 1)(b_1 + 1) \geqslant \ldots \geqslant \\ \geqslant (a_7 + 1)(b_7 + 1)\ldots(b_1 + 1) \geqslant 2 \cdot 7! = 10\,080,$$

так как $a_7 \geqslant 1$. Следовательно, $a_0 \geqslant 10\,079 > 1988$. Противоречие.

Комментарий. Приведённое решение можно обобщить следующим образом. Пусть $l(a, b)$ равно максимальному количеству делений, которое можно выполнить, начиная с чисел a и b. Тогда если $\max(a, b) \leqslant 2 \cdot n! - 1$, то $l(a, b) \leqslant n$, причём последнее неравенство обращается в равенство только при $\max(a, b) = 2 \cdot n! - 1$ и $\min(a, b) = n$.

Поскольку $n! > (n/3)^n$, величина $l(n) = \max\limits_{a,b \leqslant n} l(a, b)$ растёт очень медленно — медленнее чем $\log n$. Если в данном алгоритме вместо шага $(a, b) \to (q, r)$, где $a = bq + r$ (a и b — натуральные числа, q и r — целые неотрицательные числа), использовать шаг $(a, b) \to (b, r)$, то получится алгоритм Евклида для вычисления наибольшего общего делителя чисел (a, b). Можно доказать, что аналогичная функция $l(n)$, определённая для алгоритма Евклида, растёт с логарифмической скоростью (см., например, книги [18], [21]). В отличие от алгоритма Евклида рассмотренный алгоритм не обладает особенно интересными свойствами.

1989 год (LII олимпиада)

7 класс

1. Договоримся нумеровать столбцы слева направо, а вертикальные строки — сверху вниз. Заполним первый столбец четырьмя разными буквами произвольным образом — например, последовательно буквами A, B, C, D (см.

A	B	C	D

а)

A	B	C	D
	D		
		B	
			C

б)

A	B	C	D
C	D	A	B
		B	
			C

в)

A	B	C	D
C	D	A	B
	C	B	
B			C

г)

A	B	C	D
C	D	A	B
D	C	B	A
B	A	D	C

д)

Рис. 119

рис. 119, а). Далее, заполним ту большую диагональ, на которой находится буква A. Поскольку на пересечении второго столбца и первой строки стоит буква B, на пересечении второго столбца и второй строки можно разместить либо букву C, либо букву D. Выберем букву D. Тогда остальные буквы на этой диагонали однозначно определяются, исходя из требований задачи (рис. 119, б). Теперь на пересечении третьего столбца и второй строки можно поставить лишь букву A, так как буква D уже есть во второй строке, а буквы B и C есть в третьем столбце. Но тогда с выполнением условий задачи можно полностью заполнить вторую строку (рис. 119, в), а затем и вторую большую диагональ (рис. 119, г). Наконец, записывая по оставшейся недостающей букве в каждый из четырёх столбцов, получаем окончательный вид таблицы (рис. 119, д).

Комментарий. Обратим внимание на то, что в приведённом выше решении после заполнения первой строки только один раз во время заполнения таблицы мы стояли перед выбором: поставить ли на пересечении второго столбца и второй строки букву D или букву C. Если изменить наш выбор и поставить букву C, то таблица аналогичным образом заполняется до конца однозначно (рис. 120).

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Рис. 120

Можно заметить, что этот итоговый вариант заполнения отличается от предложенного выше лишь перестановкой строк.

Таким образом, для данного произвольного варианта заполнения первой строки четырьмя различными буквами найдётся ровно два различных заполнения всей таблицы, согласованных с требованиями задачи и отличающихся между собой лишь перестановкой строк. Нетрудно подсчитать, что всего таких вариантов будет $2 \cdot 4! = 48$.

Квадратные таблицы, заполненные различными символами так, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются в точности по одному разу все символы, имеющиеся в таблице, впервые появились одной из статей Л. Эйлера около двухсот пятидесяти лет назад и с тех пор называются *латинскими квадратами* (см. о них в книге [65]). Точной формулы для числа латинских квадратов размера $n \times n$ до сих пор не найдено.

2. Покажем, как построить искомую прямую, проведя ровно три линии. Пусть дана прямая l и точка O вне данной прямой. Отметим на прямой две произвольные различные точки A и B (см. рис. 121). Проведём окружность с центром в точке B радиуса AO и окружность с центром в точке O радиуса AB. Поскольку по неравенству треугольника $OB < OA + AB$, эти окружности пересекутся в двух точках, одна из которых лежит в той же полуплоскости относительно прямой BO, что и точка A, а другая — в противоположной, обозначим её буквой C. Четырёхугольник $AOCB$ — параллелограмм, так как его противолежащие стороны равны. Значит, прямая OC искомая.

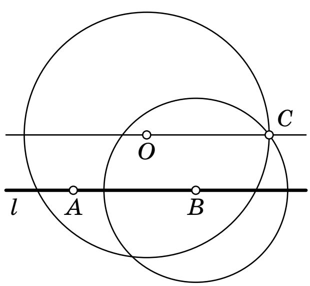


Рис. 121

Остаётся заметить, что менее чем тремя линиями, обойтись нельзя. Действительно, одной из них должна стать искомая прямая, параллельная l. Чтобы её провести, нужно получить отличную от O точку на этой прямой. Такая точка не лежит на прямой l, поэтому её можно получить только в пересечении каких-то двух ранее построенных линий — итого не менее трёх линий.

К о м м е н т а р и й. Решая задачу и читая приведённое выше решение, внимательный к деталям читатель мог задуматься о допустимости различных действий при построении с помощью циркуля и линейки. Такие вопросы являются предметом исследований теории построений. Подробнее об этом можно почитать в главе «Общие принципы геометрических построений» энциклопедии [71]. Подготовленный читатель может также ознакомиться с более современной статьёй [64], в которой обсуждается разрешимость тех или иных задач на построение в зависимости от того, какие операции считаются допустимыми.

Примечательно, что спустя 13 лет эта же самая задача была предложена в 2002 г. в Москве на XXV Турнире им. М. В. Ломоносова. Интересующийся читатель может найти ещё один способ решения этой задачи (отличный от предложенного выше) в сборнике [1], посвящённом турниру.

3. Докажем, что семи носков хватит. В этом случае не взят только один носок, т. е. взяты все пары носков, кроме одной. Следовательно, в чемодане оказались две пары различного цвета и размера: пара, отличающаяся от не взятой только цветом, и пара, отличающаяся от не взятой только размером.

Если же взять только шесть носков, то их может уже не хватить. Например, если оставить на полке по одному носку из двух пар одного цвета, то в чемодане не окажется двух пар разного цвета.

Комментарий. Справедливо более общее утверждение: если имеется n^2 пар носков n разных размеров и n разных цветов, то среди любых n^2+nm+1 носков найдётся $m+1$ пара носков разных размеров и разных цветов; если же выбрано n^2+nm носков, то таких $m+1$ пар среди выбранных может и не найтись. Доказательство этого утверждения основано на использовании теоремы Кёнига—Эгервари из теории графов (см., например, [34]).

4. Предположим, что турист выходит из турбазы по течению реки. Тогда за 30 минут гребли и 15 минут последующего отдыха он проплывёт $0{,}5\cdot 4{,}4+0{,}25\cdot 1{,}4=2{,}55$ км. Всего у туриста есть 2 часа 45 минут на дорогу, поэтому на обратный путь ему остаётся 2 часа — 3 раза по 30 минут гребли и 2 раза по 15 минут отдыха. Поскольку обратно он движется против течения реки, за это время он преодолеет $3\cdot 0{,}5\cdot 1{,}6-2\cdot 0{,}25\cdot 1{,}4=1{,}7$ км, т. е. не успеет к положенному времени вернуться на турбазу.

Пусть турист выходит из турбазы против течения реки. Если первые три захода по 30 минут гребли он будет плыть против течения, то за 2 часа (3 раза по 30 минут гребли и 2 раза по 15 минут отдыха), как было подсчитано выше, он удалится от турбазы на расстояние 1,7 км. За оставшиеся 45 минут (15 минут отдыха и 30 минут гребли по течению) он может пройти 2,55 км, поэтому успеет вовремя (и даже заранее) вернуться на турбазу. Если же он в течение этих 45 минут продолжит грести против течения, то не успеет вернуться на турбазу. Предположим теперь, что в течение одного из первых заходов на 30 минут он будет грести против течения. Тогда он удалится от турбазы в направлении против течения на расстояние, меньшее 1,7 км, и вновь проплывёт мимо неё. Рассуждения, аналогичные приведённым выше, показывают, что в этом случае за оставшееся время он сможет удалиться от базы менее чем на 1,7 км. Таким образом, максимальное расстояние, на которое турист сможет отъехать от турбазы, составляет 1,7 км.

5. Для начала заметим, что всякое натуральное число a не меньше произведения своих цифр. Действительно, пусть $\overline{a_n \ldots a_0}$ — десятичная запись числа a. Тогда

$$a \geqslant a_n \cdot 10^n \geqslant a_n \cdot 9^n \geqslant a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_0.$$

Из этого следует, что $a \geqslant 44 \cdot a - 86868$, откуда $a \leqslant 2020$. С другой стороны, произведение цифр любого числа неотрицательно, а значит, $44 \cdot a \geqslant 86868$, откуда $a \geqslant 1975$. Заметим теперь, что для чисел от 2000 до 2020 произведение цифр равно нулю, что не может быть равно $44 \cdot a - 86868$, так как 86868 не делится на 44. Следовательно, $1975 \leqslant a \leqslant 1999$, а значит, сумма цифр числа a не меньше $1 + 9 = 10$ и не больше $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. В этом промежутке есть только один куб натурального числа, а именно $3^3 = 27$, поэтому сумма цифр числа a равна 27, значит либо $a = 1989$, либо $a = 1998$. В обоих случаях произведение цифр равно $1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$. Следовательно, $44 \cdot a = 86868 + 648 = 87516$, откуда $a = 1989$.

8 класс

1. Поскольку $(x^2+x)^2 \geqslant 0$ и $\sqrt{x^2-1} \geqslant 0$, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^2+x)^2 = 0, \\ \sqrt{x^2-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x = 0, \\ x^2-1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0, \\ (x-1)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1.$$

2. Проведём вертикаль, на которой сидит кузнечик, и горизонталь, на которой сидит блоха. Клетка их пересечения покрашена либо в красный, либо в белый цвет, а значит либо кузнечик, либо блоха могут прыгнуть в эту клетку. После этого прыжка кузнечик и блоха окажутся на одной вертикали или горизонтали. Поскольку теперь кузнечик и блоха сидят на одной линии, на этой линии есть клетки обоих цветов, а значит, есть соседние клетки, одна из которых покрашена в красный цвет, а другая — в белый. Следовательно, кузнечик может прыгнуть в одну из них, а блоха — в другую. Это значит, что кузнечик и блоха могут оказаться рядом, сделав в сумме не более трёх прыжков, что и требовалось доказать.

3. а) Пусть дана прямая l и точка O вне данной прямой. Отметим на прямой произвольную точку A и проведём окружность с центром в точке A радиусом AO (см. рис. 122). Проведённая окружность пересечёт прямую l в двух точках, выберем произвольно одну из них и обозначим её через B. Проведём окружность с центром в точке B радиусом BO. Эта окружность пересечёт первую, кроме точки O, в некоторой точке O'. Прямая OO' и есть искомый перпендикуляр. В самом деле, треугольник OAB равен треугольнику $O'AB$ по трём сторонам: $OA = O'A$ как радиусы первой окружности, $OB = O'B$ как радиусы второй окружности, AB — общая сторона. Из равенства треуголь-

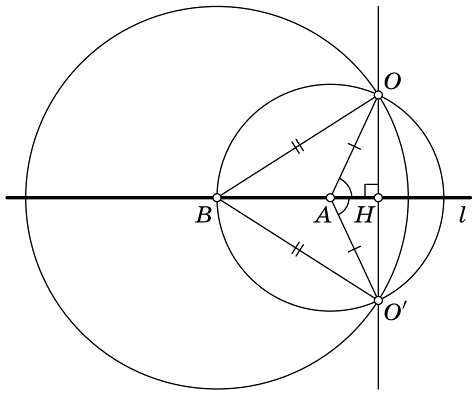


Рис. 122

ников следует равенство углов $\angle BAO = \angle BAO'$. Пусть H — точка пересечения прямой l и прямой OO'. Тогда $\angle OAH = 180^\circ - \angle BAO = 180^\circ - \angle BAO' = \angle O'AH$. Тем самым отрезок AH является биссектрисой в равнобедренном треугольнике OAO', откуда $AH \perp OO'$. Таким образом, проведя три линии (две окружности и прямую), мы построим искомый перпендикуляр.

Докажем теперь, что двумя линиями в общем случае обойтись нельзя. Второй линией должен стать искомый перпендикуляр. Чтобы его провести, нужно получить отличную от O точку на нём. Такую точку можно получить только в пересечении первой из построенных линий с прямой l, а значит это точка H — основание опущенного из O перпендикуляра на прямую l. Но первая из построенных линий — прямая или окружность, проходящая через произвольно выбранную точку, поэтому гарантировать, что она пересечёт прямую l в точке H, нельзя.

б) Пусть дана прямая l и точка O на данной прямой. Выберем произвольную точку A вне прямой l и проведём окружность с центром в точке A радиусом AO. Если проведённая окружность пересечёт прямую l в одной точке (см. рис. 123, а), то прямая AO есть искомый перпендикуляр (по свойству касательной к окружности). Если же проведённая окружность пересечёт прямую l в двух точках O и B (см. рис. 123, б), то проведём прямую AB, которая пересечёт построенную окружность в точках B и C. Тогда прямая CO и есть искомый перпендикуляр. В самом деле, угол BOC опирается на диаметр BC проведённой окружности, а значит, равен 90°, откуда $CO \perp l$. Таким образом, проведя не более трёх линий (окружность и две прямые), мы построим искомый перпендикуляр.

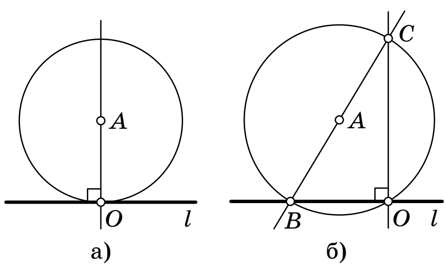


Рис. 123

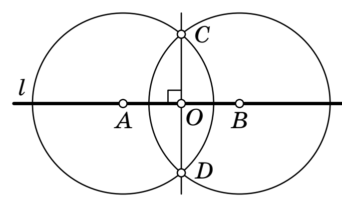


Рис. 124

Двух линий для указанного построения в общем случае недостаточно. Действительно, одной из них должен стать искомый перпендикуляр. Чтобы его провести, нужно получить отличную от O точку, через которую он пройдёт. Но такая точка должна лежать вне прямой l, поэтому её можно получить только в пересечении некоторых двух ранее построенных линий.

Комментарий. Рассмотрим следующее «решение» пункта б) в три линии: возьмём на прямой l некоторую точку A, отличную от O, и проведём окружность с центром в точке A и радиусом $R > AO$ (см. рис. 124). Далее, замерив расстояние между точками A и O, подставим ножку циркуля в такую не совпадающую с A точку B на прямой l, что расстояние между точкой B и точкой O будет равно замеренному расстоянию AO, и проведём окружность с центром в точке B и радиусом R. Построенные две окружности пересекутся в двух точках C и D, а прямая CD и есть искомый перпендикуляр.

В данном случае такое решение не является верным потому, что в построении точки B неявно «запрятана» ещё одна линия — окружность с центром в O и радиусом AO, дающая в пересечении с прямой l

точку B. Кроме того, нужно договориться о том, является ли операция проведения окружности радиуса R, большего заданной длины, допустимой. См. также комментарий к решению задачи 2 для 7 класса.

4. Рассмотрим последовательность цифр n, m, n, m, ..., n, m, ... По условию найдутся две цифры из этой последовательности, стоящие рядом и образующие число из X. Значит, для любых двух цифр n и m либо число $\overline{mn}$ содержится в X, либо число $\overline{nm}$ содержится в X. В частности, при $n = m$ получаем, что все числа вида $\overline{nn}$ (всего таких чисел 10) содержатся в X. Следовательно, в X не менее чем $10 + (100 - 10)/2 = 55$ чисел.

Покажем теперь, что существует множество из 55 элементов, удовлетворяющее условию задачи. Подходит, например, множество $X = \{\overline{mn} \mid m \leqslant n\}$. Действительно, если в бесконечной последовательности цифр не найдутся две подряд идущие цифры, из которых первая не больше второй, то цифры в этой последовательности строго убывают, что невозможно.

Комментарий. Любопытно, что изначальная формулировка этой задачи выглядела следующим образом: какое максимальное количество двузначных чисел можно выбрать так, что для любой бесконечной последовательности цифр нашлись бы две рядом стоящие цифры, которые образуют число, не входящее в выбранное множество. Предлагаем интересующемуся читателю подумать о том, насколько изменяется задача и её решение при такой формулировке.

5. Предположим противное: пионерский отряд нельзя разбить так, как указано в условии задачи, т. е. как бы мы ни разбили отряд на две команды, число a пар друзей, оказавшихся в одной команде, будет не меньше числа b пар друзей, оказавшихся в разных командах.

Выберем разбиение так, чтобы число a было минимальным возможным (такое разбиение найдётся, так как всего разбиений конечное число). По нашему предположению $a \geqslant b$. Обозначим через n число пионеров и присвоим произвольным образом каждому пионеру свой порядковый номер от 1 до n. Для пионера с номером k обозначим через a_k число его друзей, оказавшихся с ним в одной команде, и через b_k — число его друзей, оказавшихся в другой команде. Заметим, что

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2a,$$

так как каждую пару друзей из одной команды мы посчитали два раза. Аналогично

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 2b.$$

Следовательно,

$$(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) = 2(a - b) \geqslant 0,$$

так как $a \geqslant b$. Тогда либо найдётся пионер с номером i, для которого $a_i - b_i > 0$, либо $a_i - b_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, иначе число $2(a - b)$ было бы отрицательным.

Пусть найдётся пионер с номером i, для которого $a_i - b_i > 0$. Переведём его в другую команду и проследим за тем, как изменится число a (т. е. число пар друзей, оказавшихся в одной команде) после такого перевода. После перевода пионера с номером i в другую команду ровно у a_i пионеров, с которыми он дружил и находился в одной команде, число их друзей, находящихся с ними в одной команде, уменьшится на одного. Аналогично ровно у b_i пионеров, с которыми дружил и находился в разных командах наш пионер, количество их друзей, находящихся с ними в одной команде, увеличится на одного. Значит, обозначив новое значение для числа пар друзей, оказавшихся в одной команде, через a', а новые значения чисел друзей каждого пионера, находящихся с ним в одной команде, через $a'_1, \ldots, a'_n$, получим $a' = a + b_i - a_i$, откуда

$$a' - a = b_i - a_i < 0,$$

т. е. $a' < a$, что противоречит минимальности выбранного вначале числа a.

В случае если $a_i - b_i = 0$ для всех $i = 1, \ldots, n$, имеем $a = b$. Выберем пару дружащих пионеров из разных команд (такая пара найдётся, так как иначе $a = b = 0$) и поменяем у этих пионеров командную принадлежность. Тогда в новой команде у каждого из них будет $b_i - 1 = a_i - 1$ друзей (выбранный вместе с ним друг не учитывается, потому что он перешёл в его старую команду вместо него). В итоге число друзей у каждого из них в своей команде уменьшится на одного. Тогда общее число пар друзей, оказавшихся в одной команде, уменьшится на два и станет меньше чем a, что опять противоречит минимальности выбранного нами в начале рассуждения числа a.

Комментарий. Подобным же образом решается задача 13-й Всесоюзной олимпиады 1979 г. (см. [10, задача 271]): доказать, что если в парламенте у каждого его члена не более трёх врагов, то парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

Задача о парламенте является частным случаем теоремы венгерского математика Ласло Геренсера из теории графов (см. [61, гл. 10, задача 10.22]): если G — регулярный граф степени n, то существует разбиение множества его вершин, содержащее не более $1 + [n/2]$ таких подмножеств, что каждая вершина смежна самое большее с одной отличной от неё вершиной того же подмножества.

Задача про пионерский отряд также близка к известной экстремальной проблеме: разбить вершины данного графа на два подмножества равной или близкой друг к другу мощности так, чтобы число рёбер, соединяющих эти множества, было минимальным. Для решения этой проблемы применяют эвристический алгоритм, в котором множества обмениваются вершинами так, чтобы число рёбер, их соединяющих, уменьшалось (см. [43, раздел 19.5]). Идея этого алгоритма близка к приведённому выше решению задачи про пионерский отряд.

6. По условию значения трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ на отрезке $[0; 1]$ по модулю не превосходят единицы. В частности, $|f(0)| \leqslant 1$, $|f(1/2)| \leqslant 1$ и $|f(1)| \leqslant 1$, что равносильно системе

$$\begin{cases} |c| \leqslant 1, \\ |a + 2b + 4c| \leqslant 4, \\ |a + b + c| \leqslant 1. \end{cases}$$

Поскольку модуль суммы чисел не превосходит суммы их модулей, получаем неравенства

$$|a| = |2(a+b+c) - (a+2b+4c) + 2c| \leqslant$$
$$\leqslant 2|a+b+c| + |a+2b+4c| + 2|c| \leqslant 8,$$
$$|b| = |(a+2b+4c) - 3c - (a+b+c)| \leqslant$$
$$\leqslant |a+2b+4c| + 3|c| + |a+b+c| \leqslant 8,$$

откуда $|a|+|b|+|c| \leqslant 8+8+1 = 17$.

Заметим теперь, что квадратный трёхчлен

$$g(x) = 8x^2 - 8x + 1 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

удовлетворяет условию задачи, так как при $x \in [0; 1]$

$$-1 = g\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant g(x) = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \leqslant g(0) = g(1) = 1.$$

Кроме того, для $g(x)$ величина $|a|+|b|+|c|$ в точности равна 17. Таким образом, наибольшее значение величины $|a|+|b|+|c|$ при данных условиях равно 17.

Комментарий. Фактически аналогичная задача предлагалась в 1980 г. на Ленинградской математической олимпиаде (см. [59, 1980 г., 9 класс, задача 30]): доказать, что если для любого значения x из отрезка $[0; 1]$ выполняется неравенство $|ax^2+bx+c| \leqslant 1$, то $|a|+|b|+|c| \leqslant 17$.

Решение этой задачи можно вывести из частного случая ($n=2$) следующей теоремы В. А. Маркова [1]: если многочлен с комплексными коэффициентами $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ удовлетворяет неравенствам

$$\left|P_n\left(\frac{1+\cos(\pi m/n)}{2}\right)\right| \leqslant 1, \quad m = 0, \ldots, n,$$

то $|a_k|$ не превосходит модуля соответствующего коэффициента смещённого многочлена Чебышёва $T_n^*(x) = T_n(2x-1)$ для всякого $k = 0, \ldots, n$, причём равенство при $k > 0$ возможно лишь для $P_n = \pm T_n^*$. Здесь $T_n(x)$ — многочлены Чебышёва, определяемые рекуррентно соотношениями $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ и $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ при $n \geqslant 2$.

[1] Владимир Андреевич Марков (1871—1897) — младший брат выдающегося математика Андрея Андреевича Маркова (старшего).

9 класс

1. Зафиксируем в пространстве некоторую точку O и проведём прямую OA, параллельную одной красной прямой, и прямую OB, параллельную другой красной прямой. Аналогично проведём прямые OC и OD, параллельные одной и другой синим прямым соответственно. Если красные прямые не параллельны, то прямые OA и OB не совпадают. Тогда, поскольку прямая OC перпендикулярна двум различным прямым OA и OB, она перпендикулярна плоскости, проходящей через точки O, A, B. Аналогично прямая OD также перпендикулярна этой плоскости. Следовательно, в силу единственности перпендикуляра к плоскости, проходящего через данную точку, прямые OC и OD совпадают, а значит, синие прямые параллельны.

2. *Первый способ.* Поскольку отрезки MK и AL параллельны, $\triangle ABL \sim \triangle MBP$ и $\triangle LBC \sim \triangle PBK$ (рис. 125). Следовательно, $AL:MP = BL:PB = LC:PK$, а значит, $MP:PK = AL:LC$. В то же время, ввиду параллельности отрезков ML и BC получаем $AQ:QK = AL:LC$ по теореме о пропорциональных отрезках. Отсюда вытекает, что $AQ:QK = MP:PK$. Тогда $AK:QK = MK:PK$, и треугольники AKM и QKP подобны по общему углу и двум парам пропорциональных сторон. Значит, углы AMK и QPK равны, а отрезки AB и PQ параллельны, что и требовалось доказать.

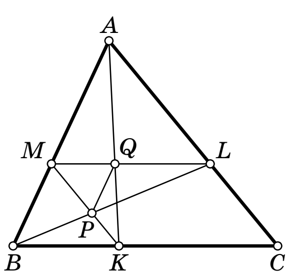


Рис. 125

Второй способ. По условию отрезки MK и AL параллельны, поэтому треугольники MBP и ABL подобны с некоторым коэффициентом $k = \frac{MP}{AL} = \frac{BM}{AB}$. Тогда треугольники AMQ и ABK подобны с коэффициентом $\frac{MQ}{BK} = \frac{AM}{AB} = \frac{AB - BM}{AB} = 1 - k$, а треугольники PLM и PBK подобны с коэффициентом $\frac{ML}{BK} = \frac{PL}{BP}$. По теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{PL}{BP}=\frac{AM}{MB}=\frac{AM}{AB}:\frac{BM}{AB}=\frac{1-k}{k}$. Значит,

$$\frac{MQ}{ML}=\frac{MQ}{BK}:\frac{ML}{BK}=(1-k):\frac{1-k}{k}=k.$$

Итак, мы получили, что $\frac{MP}{AL}=\frac{MQ}{ML}=k$. Кроме того, углы PMQ и ALM равны как накрест лежащие при параллельных прямых AC и MK и секущей ML. Следовательно, треугольники PQM и AML также подобны. Но тогда $\angle AMQ=$ $=\angle MQP$, а значит, прямые AM и PQ параллельны, откуда и следует требуемеое.

3. *Первый способ.* Обозначим знаменатели прогрессий $a_1, a_2, \ldots$ и $b_1, b_2, \ldots$ через p и q соответственно и запишем данные задачи в виде следующей системы:

$$\begin{cases} a+b=c_0, \\ ap+bq=c_1, \\ ap^2+bq^2=c_2, \\ ap^3+bq^3=c_3, \end{cases}$$

где $ap^k=a_{k+1}$, $bq^k=b_{k+1}$, $c_k=a_{k+1}+b_{k+1}$, $k=0, 1, 2, 3$ (отметим, что по определению геометрической прогрессии все числа a, b, p, q ненулевые). Таким образом, задачу можно переформулировать так: можно ли, зная лишь числа c_0, c_1, c_2, c_3 и их связь с числами a, b, p, q, выраженную системой выше, однозначно определить число $c_4=ap^4+bq^4$? Заметим, что при $k=0, 1, 2$ имеем

$$\begin{aligned}(p+q)c_{k+1}-pqc_k &= (p+q)(ap^{k+1}+bq^{k+1})-pq(ap^k+bq^k)= \\ &= ap^{k+2}+ap^{k+1}q+bq^{k+1}p+bq^{k+2}-ap^{k+1}q-bq^{k+1}p= \\ &= ap^{k+2}+bq^{k+2}=c_{k+2},\end{aligned}$$

т. е.

$$c_2=(p+q)c_1-pqc_0, \quad c_3=(p+q)c_2-pqc_1,$$
$$c_4=(p+q)c_3-pqc_2.$$

Зная числа $p+q$ и pq, из третьего равенства можно найти число c_4, что нам и требуется. При этом первые два равенства образуют для чисел $p+q$ и pq систему из двух уравнений с двумя неизвестными (помним, что числа c_0, c_1, c_2, c_3 нам даны по условию):

$$\begin{cases} (p+q)c_1 - pqc_0 = c_2, \\ (p+q)c_2 - pqc_1 = c_3. \end{cases}$$

Домножим первое уравнение на c_2 и сложим со вторым уравнением, домноженным на $-c_1$, а затем домножим первое уравнение на c_1 и сложим со вторым уравнением, домноженным на $-c_0$. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} pq(c_1^2 - c_0c_2) = c_2^2 - c_1c_3, \\ (p+q)(c_1^2 - c_0c_2) = c_2c_1 - c_3c_0. \end{cases}$$

Если $c_1^2 - c_0c_2 \neq 0$, то pq и $p+q$ определяются однозначно, а значит однозначно определяется число $c_4 = a_5 + b_5 = (p+q)c_3 - pqc_2$.

Остаётся рассмотреть случай $c_1^2 - c_0c_2 = 0$. Подставляя в это равенство выражения для c_0, c_1 и c_2 через a, b, p, q, получаем

$$0 = (ap+bq)^2 - (a+b)(ap^2+bq^2) =$$
$$= a^2p^2 + 2abpq + b^2q^2 - a^2p^2 - ab(p^2+q^2) - b^2q^2 = -ab(p-q)^2,$$

откуда $p=q$. Значит, в этом случае число c_4 можно найти следующим образом:

$$c_4 = ap^4 + bq^4 = (a+b)p^4 = \frac{(ap^2+bp^2)^2}{a+b} = \frac{c_2^2}{c_0},$$

если $c_0 = a+b \neq 0$, и $c_4 = (a+b)p^4 = 0$, если $c_0 = a+b = 0$.

Мы получили, что в обоих случаях значение c_4 можно найти, зная лишь числа c_0, c_1, c_2 и c_3, так что задача полностью решена.

Второй способ. Пусть $a = a_1$, $b = b_1$ — первые члены, а p и q — знаменатели прогрессий a_1, a_2, ... и b_1, b_2, ... соответственно. Обозначим $c_{k-1} = a_k + b_k$ при всех натуральных k. Тогда

$$c_{k+1}c_{k-1} - c_k^2 = (ap^{k+1} + bq^{k+1})(ap^{k-1} + bq^{k-1}) - (ap^k + bq^k)^2 = \\ = ab(p-q)^2(pq)^{k-1}.$$

Покажем, как с помощью этих формул выразить c_4 через c_0, c_1, c_2 и c_3. Рассмотрим отдельно два случая.

1) Пусть $c_2c_0 - c_1^2 = 0$. Тогда $ab(p-q)^2 = 0$, т. е. в этом случае $p = q$. Как и в первом решении, находим

$$c_4 = ap^4 + bp^4 = (a+b)p^4 = \frac{(a+b)^2p^4}{(a+b)} = \frac{c_2^2}{c_0}$$

при $c_0 \neq 0$, и $c_4 = (a+b)p^4 = c_0p^4 = 0$ при $c_0 = 0$.

2) Если $c_2c_0 - c_1^2 \neq 0$, то $ab(p-q)^2 \neq 0$ и $p \neq q$. Тогда

$$c_4c_2 - c_3^2 = ab(p-q)^2(pq)^2 = \frac{(ab(p-q)^2pq)^2}{ab(p-q)^2} = \frac{(c_3c_1 - c_2^2)^2}{c_2c_0 - c_1^2}.$$

При $c_2 \neq 0$ из этого равенства уже можно выразить c_4:

$$c_4 = \frac{c_3^2}{c_2} + \frac{(c_3c_1 - c_2^2)^2}{c_2^2c_0 - c_1^2c_2}.$$

Осталось рассмотреть случай $c_2 = 0$. Заметим, что тогда $c_1 \neq 0$, так как $c_2c_0 - c_1^2 = -c_1^2 \neq 0$. Поскольку $c_2 = ap^2 + bq^2 = 0$, получаем $q^2 = -\frac{a}{b}p^2$. Следовательно,

$$c_4 = ap^4 + bq^4 = ap^4 + b\frac{a^2}{b^2}p^4 = \frac{a}{b}(a+b)p^4 = -p^2q^2(a+b) = \\ = -(pq)^2c_0.$$

Произведение pq можно найти из равенства

$$pq = \frac{ab(p-q)^2pq}{ab(p-q)^2} = \frac{c_1c_3 - c_2^2}{c_0c_2 - c_1^2} = \frac{c_1c_3}{-c_1^2} = -\frac{c_3}{c_1}.$$

Отсюда получаем

$$c_4 = -(pq)^2c_0 = -\frac{c_3^2c_0}{c_1^2}.$$

Итак, во всех случаях мы вывели явные формулы, по которым величину $c_4 = a_5 + b_5$ можно однозначно определить, зная лишь значения $c_0 = a_1 + b_1$, $c_1 = a_2 + b_2$, $c_2 = a_3 + b_3$ и $c_3 = a_4 + b_4$, и тем самым дали положительный ответ на вопрос задачи.

Комментарий. Поставленная задача является обратной к задаче о нахождении решений *линейных однородных рекуррентных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами*, имеющих вид $c_{n+1} = \alpha c_n + \beta c_{n-1}$, где α и β — некоторые действительные коэффициенты. Решить такое уравнение означает найти последовательность $\{c_n\}$, удовлетворяющую ему при всех натуральных n. Известно, что если исходное рекуррентное уравнение имеет решение, то оно имеет вид $c_n = ap^n + bq^n$, где числа p и q — корни соответствующего *характеристического уравнения* $x^2 = \alpha x + \beta$, а a и b — некоторые действительные числа. Как можно видеть, числа c_n в нашей задаче имеют в точности такой вид.

Изначально предложенная автором задачи формулировка была такова. Почленная сумма двух геометрических прогрессий не является геометрической прогрессией. Можно ли однозначно восстановить прогрессии по их сумме? Предлагаем интересующемуся читателю подумать о том, насколько изменяется задача и её решение при такой формулировке.

4. Условимся называть улицей всякий отрезок на плане, соединяющий любые два соседних перекрёстка. В этом случае длина каждой улицы будет равна 1.

Всего в городе 16 Т-образных перекрёстков, в которых сходятся по три улицы (по четыре перекрёстка на каждой из четырёх прямолинейных границ города) и 20 перекрёстков, в которых сходится чётное число улиц — либо по две (вершины квадрата), либо по четыре (все оставшиеся перекрёстки). Заметим, что при обходе улиц по замкнутому маршруту каждый перекрёсток проходится чётное число раз: сколько раз зашли на перекрёсток, столько же раз должны и выйти. Следовательно, среди улиц, примыкающих к Т-образному перекрёстку, хотя бы одна должна быть пройдена дважды. Если эти улицы выбрать так, что они примыкают с обеих сторон к двум таким перекрёсткам, то их суммарная длина будет равна 8. Остальные улицы нужно пройти не менее одного раза.

Таким образом, полная длина маршрута должна быть не меньше 68: общая суммарная длина всех улиц города равна 60 (на каждую из 6 вертикалей и 6 горизонталей приходится по 5 улиц, т. е. всего $12 \cdot 5 = 60$), а суммарная длина неоднократно пройденных улиц не меньше 8.

Покажем теперь, что найдётся маршрут длины 68, при котором машина проедет по всем улицам и в конце работы вернётся в исходную точку. Сначала выберем улицы, которые нужно проехать дважды: из пяти идущих подряд улиц на всех сторонах квадрата выберем вторую и четвёртую (каждая из них примыкает с обеих сторон к Т-образному перекрёстку) — всего 8 улиц. Проведём дополнительно на схеме города рядом с выбранными 8 улицами их условные дублёры (см. рис. 126) и далее будем считать их отдельными улицами. С учётом этих дублёров на схеме будет уже 68 улиц, и в каждом перекрёстке будет сходиться чётное число улиц. Остаётся показать, что на такой схеме найдётся замкнутый маршрут длины 68, проходящий по каждой из улиц ровно по одному разу.

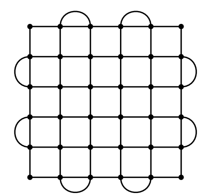


Рис. 126

Опишем алгоритм, при помощи которого можно построить такой маршрут. Пусть машина выезжает из перекрёстка A, в котором она находилась изначально, и произвольным образом двигается по городу, не заезжая второй раз на уже пройденные ранее улицы. Такой путь может окончиться только в точке A. Действительно, из любого другого перекрёстка можно выехать на ещё не пройденную улицу, так как иначе в нём сходилось бы нечётное число улиц. А поскольку число улиц конечно, рано или поздно машина вернётся на перекрёсток A. Если при этом все улицы города оказались пройдены, то искомый маршрут построен.

Пусть маршрут прошёл ещё не по всем улицам города. Мысленно зачеркнём пройденные улицы на схеме. Из оставшихся улиц в каждом перекрёстке снова будет сходиться чётное их число, так как число вычеркнутых улиц, сходящихся в этом перекрёстке, чётно (сколько раз подъезжали к перекрёстку, столько же раз из него и выезжали). Выберем на уже проведённом маршруте любой перекрёсток (назовём его B), из которого выходят не зачёркнутые улицы, и точно таким же образом построим замкнутый маршрут по ещё не зачёркнутым улицам, начинающийся и оканчивающийся в B. Теперь из этих двух замкнутых маршрутов сконструируем один замкнутый маршрут следующим образом: начиная с перекрёстка A, будем двигаться по первому маршруту до тех пор, пока не попадём в перекрёсток B, далее обойдём полностью второй маршрут и вернёмся в B, а затем пройдём по оставшемуся участку первого маршрута вплоть до A.

Если этот объединённый маршрут снова прошёл ещё не по всем улицам, то повторим такую же процедуру, т. е. выберем на объединённом маршруте некоторый перекрёсток, к которому примыкают ещё не пройденные улицы, и получим ещё один проходящий по ним замкнутый маршрут, а затем построим новый объединённый маршрут, и т. д. Поскольку количество улиц конечно, в итоге получим замкнутый маршрут, проходящий по всем улицам ровно по одному разу (если считать дублёры отдельными улицами), что и требовалось.

Отметим, что приведённое решение не зависит от начального положения снегоуборочной машины.

К о м м е н т а р и й. Описанный в решении этой задачи алгоритм построения замкнутого маршрута, проходящего однократно по всем улицам города, у которого в каждом перекрёстке сходятся чётное число улиц, на языке теории графов называется *алгоритмом построения эйлерова цикла*. Подобный этому алгоритм предложил Эйлер для решения задачи о кёнигсбергских мостах, с которой и началось развитие теории графов.

Существуют алгоритмы, которые строят эйлеров цикл сразу, без повторения склеек коротких циклов в длинный (например, *алгоритм Флёри*).

Необходимое и достаточное условие существования у графа эйлерова цикла тоже было найдено Эйлером и заключается в том, что для всякой вершины графа число выходящих из неё рёбер (называемое *степенью вершины*) должно быть чётным, а сам граф — *связным*, т. е. таким, что для любых двух вершин графа найдётся последовательность ребёр, соединяющая эти вершины. Графы, удовлетворяющие этим условиям, называют теперь *эйлеровыми*.

Задачу построения кратчайшего замкнутого маршрута, проходящего хотя бы по одному разу через все рёбра произвольного (не обязательного эйлерова) графа, первым рассмотрел китайский математик Мэй-Ку Куан. Впоследствии её стали называть «задачей о китайском почтальоне», а рассмотренная задача является её простым частным случаем. Близкая к ней задача имеется в книге [69].

5. Требование задачи фактически состоит в том, чтобы решить в положительных числах систему уравнений

$$\begin{cases} x_1(x_1+\ldots+x_{10})=1,\\ (x_1+x_2)(x_2+\ldots+x_{10})=1,\\ (x_1+x_2+x_3)(x_3+\ldots+x_{10})=1,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (x_1+\ldots+x_9)(x_9+x_{10})=1,\\ (x_1+\ldots+x_{10})x_{10}=1. \end{cases}$$

Положим $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=s$, $x_1+x_2+\ldots+x_k=s_k$ для всех $k=1, 2, \ldots, 10$. Используя эти обозначения, систему можно записать в виде

$$\begin{cases} s_1=x_1=\dfrac{1}{s},\\ s_2=x_1+x_2=\dfrac{1}{s-s_1},\\ s_3=x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{s-s_2},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ s_9=x_1+x_2+\ldots+x_9=\dfrac{1}{s-s_8},\\ s_{10}=x_1+x_2+\ldots+x_{10}=\dfrac{1}{s-s_9}=s. \end{cases}$$

Заметим, что все эти равенства могут выполняться одновременно не более чем при одном значении s. В самом деле, пусть при некотором s они верны. Если s увеличить, то $s_1, s_2, \ldots, s_9$ уменьшатся, и наоборот — при уменьшении s каждое из чисел $s_1, s_2, \ldots, s_9$ увеличится. В любом случае последнее равенство не будет выполнено.

Кроме того, из данных уравнений сразу следует, что $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_9$, $x_3 = x_8$, ..., так как из первого и последнего видно, что $x_1 = x_{10} = 1/s$, из второго и предпоследнего — что $x_1 + x_2 = 1/(s - s_1) = 1/(s - x_1) = 1/(s - x_{10}) = x_9 + x_{10}$, откуда $x_2 = x_9$, и т. д.

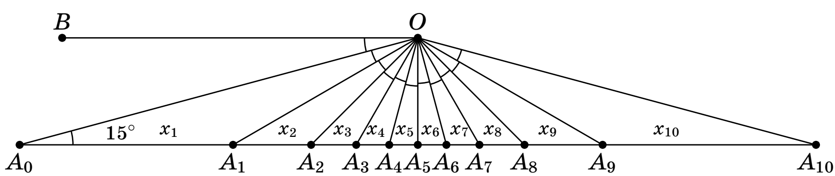


Рис. 127

Таким образом, если решение исходной системы существует, то оно единственно и симметрично. Докажем теперь, что решение существует, и найдём его. Для этого построим равнобедренный треугольник A_0OA_{10} с боковыми сторонами $A_0O = OA_{10} = 1$ и углами 15° при основании. На основании A_0A_{10} отметим точки $A_1, A_2, \ldots, A_9$ так, что отрезки $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_9A_{10}$ видны из вершины O под равными углами 15° (см. рис. 127). Докажем, что длины этих отрезков $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ удовлетворяют нашей системе. Проведём через точку O луч OB, параллельный A_0A_{10}, так, что $\angle BOA_0 = 15^\circ$. Треугольники A_0OA_k и $A_{10}A_{k-1}O$ подобны, так как $\angle A_0 = \angle A_{10} = 15^\circ$, $\angle A_0OA_k = k \cdot 15^\circ = \angle BOA_{k-1} = \angle OA_{k-1}A_{10}$. Следовательно,

$$\frac{1}{x_k + \ldots + x_{10}} = \frac{A_0O}{A_{k-1}A_{10}} = \frac{A_0A_k}{OA_{10}} = \frac{x_1 + \ldots + x_k}{1},$$

откуда

$$(x_1 + \ldots + x_k)\ (x_k + \ldots + x_{10}) = 1,$$

что и требуется.

Теперь вычислим значения $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ явно. Воспользуемся теоремой синусов: поскольку $OA_0 = 1$, $\angle A_0OA_k = k \cdot 15^\circ$, $\angle A_0A_kO = 180^\circ - \angle BOA_k = 180^\circ - (k+1)\cdot 15^\circ$, из треугольников $OA_{k-1}A_k$ и OA_0A_k получаем

$$\frac{x_k}{\sin 15^\circ} = \frac{OA_k}{\sin(k\cdot 15^\circ)}, \quad \frac{OA_k}{\sin 15^\circ} = \frac{1}{\sin((k+1)\cdot 15^\circ)},$$

откуда

$$x_k = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin(k\cdot 15^\circ)\sin((k+1)\cdot 15^\circ)}, \quad k = 1, 2, \ldots, 10.$$

Значения $\sin(k\cdot 15^\circ)$ при $k = 2, 3, 4, 6$ являются табличными и равны соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и 1, а при $k=1$ и $k=5$ их можно найти по формулам для синуса суммы и разности:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$
$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Для удобства найдём также

$$\sin^2 15^\circ = \frac{8-4\sqrt{3}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}, \quad \frac{1}{\sin 75^\circ} = \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

Подставляя эти значения в формулу для x_k, получаем искомый набор чисел:

$$x_1 = x_{10} = \frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2},$$
$$x_2 = x_9 = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2},$$
$$x_3 = x_8 = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin 45^\circ \sin 60^\circ} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6},$$
$$x_4 = x_7 = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin 60^\circ \sin 75^\circ} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{2}-5\sqrt{6}}{6},$$
$$x_5 = x_6 = \frac{\sin^2 15^\circ}{\sin 75^\circ \sin 90^\circ} = \frac{(2-\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} = \frac{3\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{4}.$$

Комментарий. Приведённое решение легко обобщается на случай следующей задачи: найти все положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие условию $(x_1+\ldots+x_k)(x_k+\ldots+x_n)=1$ при всех $k=1, 2, \ldots, n$. Соответствующее обобщение можно найти в статье Н. Б. Васильева в журнале [53, задача М1185], где, в частности, даётся красивое геометрическое обоснование симметричности чисел $x_1, \ldots, x_n$ и их связи с равнобедренным треугольником с углами $\frac{180^\circ}{n+2}$ при основании. Вероятно, наиболее естественный способ обнаружить эту изначально не очевидную связь — рассмотреть сначала данную систему уравнений при небольших значениях n и заметить соответствующую закономерность.

10 класс

1. Заметим, что при $x>2$ (т. е. при всех допустимых значениях x) функция $f(x)=\lg(x-2)$ является возрастающей, а функция $g(x)=2x-x^2+3=4-(x-1)^2$ — убывающей. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня, который можно предъявить: при $x=3$ получаем $\lg(3-2)=0=6-9+3$. Таким образом, единственным корнем уравнения является число $x=3$.

2. Покажем, что функция $y=x^3$ имеет общую точку с любой прямой на координатной плоскости. Всякая вертикальная прямая имеет вид $x=a$ и пересекается с графиком функции $y=x^3$ в общей точке $(a; a^3)$. Если же прямая не является вертикальной, то она задаётся уравнением $y=kx+b$, где k и b — действительные коэффициенты. Наличие общих точек у графика нашей функции и у прямой равносильно наличию решений у системы

$$\begin{cases} y = x^3, \\ y = kx+b, \end{cases}$$

решение которой, в свою очередь, существует одновременно с решением уравнения $x^3-kx-b=0$. Покажем, что это уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень. Для этого заметим, что при достаточно больших по абсолютной величине значениях x выполнено неравенство $x^2>2k$ (если $k\geqslant 0$, то оно выполнено при $|x|\geqslant\sqrt{2k}$, а если

$k<0$, то вообще при всех действительных x). Поэтому при таких положительных x имеем $-kx>-\frac{x^3}{2}$, откуда

$$x^3-kx-b>\frac{x^3}{2}-b>0,$$

если дополнительно $x>\sqrt[3]{2b}$. Значит, найдётся такое положительное число x_1, что $x_1^3-kx_1-b>0$. Аналогично если x отрицательно и $x^2>2k$, то выполнено неравенство $-kx<-\frac{x^3}{2}$, откуда

$$x^3-kx-b<\frac{x^3}{2}-b<0$$

при $x<\sqrt[3]{2b}$. Следовательно, найдётся такое отрицательное число x_2, что $x_2^3-kx_2-b<0$. Поскольку функция $f(x)=$ $=x^3-kx-b$ непрерывна и принимает в точках x_1 и x_2 значения разных знаков, на отрезке $[x_2; x_1]$ найдётся такая точка x_0, что $f(x_0)=x_0^3-kx_0-b=0$. Тогда x_0 — корень уравнения $x^3-kx-b=0$, а точка $(x_0; x_0^3)$ является искомой точкой пересечения графика функции $y=x^3$ и прямой $y=kx+b$.

Комментарий. Разумеется, функция $y=x^3$ не единственная подходящая функция. Таких функций бесконечно много — можно доказать, что подойдёт, например, любой многочлен нечётной степени, большей единицы. В случае с таким многочленом рассуждение опирается на тот факт, что всякий многочлен нечётной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень. Идея доказательства этого факта такая же, как и для рассмотренного выше многочлена x^3-kx-b: если коэффициент при старшей степени многочлена положителен, то при достаточно больших положительных x он принимает положительные значения, а при достаточно больших отрицательных x — отрицательные (или наоборот, если старший коэффициент отрицателен), а значит, в силу непрерывности он должен в некоторой точке обратиться в нуль. Отметим, что эти интуитивно очевидные утверждения строго доказываются в вузовских курсах алгебры и математического анализа.

3. Заполним четыре клетки, образующие квадрат 2×2, как показано на рис. 128, а). Далее, соблюдая предложенные задачей правила, можно однозначно продолжить заполнение по горизонтали (рис. 128, б). Теперь в соседних клетках, стоящих на продолжении диагоналей полученных двух квадратов 2×2, крестики и нолики также единственным образом восстанавливаются (рис. 128, в).

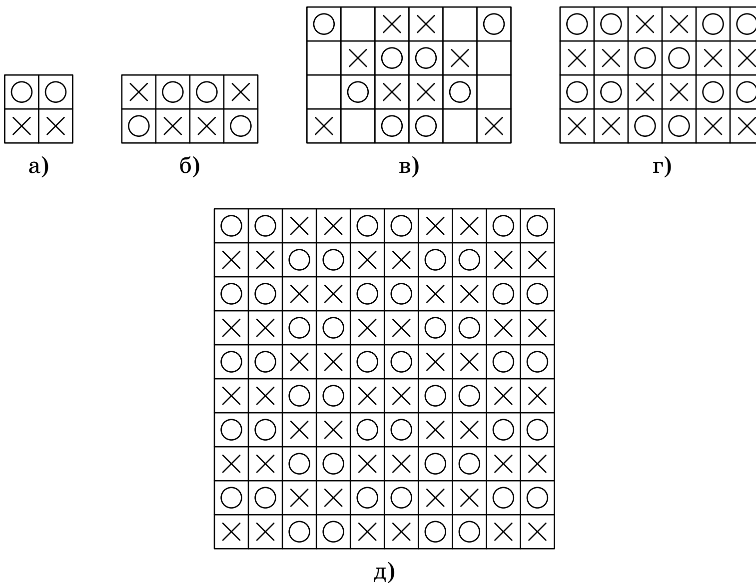


Рис. 128

Оставшиеся на рис. 128, в), восемь пустых клеток тоже однозначно заполняются в соответствии с правилами из условия задачи (рис. 128, г). Таким образом, начиная с предложенного заполнения квадратика 2×2, мы получаем однозначное заполнение прямоугольника 4×6. Можно заметить, что полученный прямоугольник состоит из нескольких квадратиков 2×2, заполненных так же, как квадратик, с которого мы начинали. Продолжая заполнение аналогичным образом, получим однозначное заполнение всего листа клетчатой бумаги, согласованное с предложенными правилами (рис. 128, д).

Комментарий. Отметим, что приведённое заполнение плоскости является единственным, удовлетворяющим условию задачи, с точностью до поворота плоскости на 90°. Интересующемуся читателю предлагаем доказать это самостоятельно.

4. *Первый способ.* а) Если не все данные 5 чисел одинаковой чётности, то три или четыре из них одной чётности, а оставшиеся два или одно соответственно — другой. Тогда только первые 3 или 4 числа принадлежат прогрессии с разностью 2 и первым членом 0 (если они чётные) или 1 (если они нечётные), так что в этом случае утверждение задачи доказано.

Пусть теперь все 5 чисел одинаковой чётности. Рассмотрим их остатки при делении на 4. Если среди них есть оба возможных различных остатка (0 и 2 для чётных пяти чисел, 1 и 3 — для нечётных), то 3 или 4 из них принадлежат соответствующей прогрессии с разностью 4, а два или одно из оставшихся — не принадлежат, и утверждение задачи снова выполнено. Если все остатки при делении на 4 одинаковы, то рассмотрим их остатки при делении на 8 и повторим то же самое рассуждение, и т. д. На некотором шаге этот процесс остановится, так как все 5 чисел при делении на достаточно большую степень двойки (например, превосходящую максимальное из них) дают различные остатки. Тогда первая степень двойки, при делении на которую среди остатков будут различные, можно взять в качестве разности искомой прогрессии, а остаток, который при делении на неё дают ровно 3 или 4 из данных чисел, — в качестве первого члена этой прогрессии.

б) Докажем, что утверждение задачи верно для любых $n \geqslant 5$ натуральных чисел (в частности, при $n = 1989$). Для этого покажем, что при некотором k ровно 3 или 4 из этих n натуральных чисел дают один и тот же остаток при делении на 2^k (тогда этот остаток можно взять в качестве первого члена, а $d = 2^k$ — в качестве разности прогрессии). Пусть 2^m — наименьшая степень двойки, превосходящая максимальное из данных чисел. При делении на

2^m все числа дают различные остатки, равные им самим. Рассмотрим их остатки при делении на 2^{m-1}. Теперь количество различных возможных остатков в два раза меньше, а количество чисел, дающих каждый из них при делении на 2^{m-1}, не более чем в два раза больше, т. е. не больше двух. Если среди чисел не найдётся двух, дающих один и тот же остаток при делении на 2^{m-1} (т. е. все остатки снова различны), то рассмотрим остатки при делении на 2^{m-2}. Снова количество чисел, дающих один и тот же остаток, не больше двух. Если среди них нет двух, дающих один и тот же остаток при делении на 2^{m-2}, то рассмотрим остатки при делении на 2^{m-3}, и т. д. На некотором шаге этот процесс прервётся, так как при $n \geqslant 5$ данные n чисел не могут давать различные остатки при делении на $4 = 2^2$.

Таким образом, при некотором l найдётся ровно 2 числа, дающих один и тот же остаток при делении на 2^l. Теперь каждый остаток при делении на 2^{l-1} может соответствовать не более чем четырём числам. Если 3 или 4 числа дают некоторый один и тот же остаток при делении на 2^{l-1}, то утверждение доказано. В противном случае снова каждому остатку соответствует не более двух чисел, и можно рассмотреть остатки при делении на 2^{l-2}, и т. д. Этот процесс также прервётся на некотором шаге, так как при делении n натуральных чисел на $2 = 2^1$ различных остатков не менее трёх, если $n \geqslant 5$. Степень двойки 2^k, на которой этот процесс остановится, будет искомой.

Второй способ. Докажем, что при $n \geqslant 5$ любой набор из n натуральных чисел обладает следующим свойством: ровно 3 или 4 числа из этого набора дают одинаковые остатки при делении на некоторую степень двойки 2^k, откуда и следует утверждение задачи. Предположим противное: для некоторых $n \geqslant 5$ это неверно, т. е. существуют наборы, не обладающие таким свойством. Пусть n_0 — наименьшее среди таких значений n. Среди всех наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$, упорядоченных по возрастанию и не обладающих свойством, выберем те, у которых число a_1 наименьшее возможное, затем среди выбранных — те, у которых число a_2 наименьшее возможное, и т. д. В итоге получим набор $(a_1, a_2, \ldots, a_{n_0})$, который назовём минимальным.

Если в нём все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ чётные, то набор

$$\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}, \ldots, \frac{a_{n_0}}{2}\right)$$

также не обладает указанным свойством: среди этих чисел нельзя выбрать ровно 3 или 4 числа, дающих одинаковые остатки при делении на 2^k ни при каком k (иначе из исходного набора можно было бы выбрать ровно 3 или 4 числа, дающих одинаковые остатки при делении на 2^{k+1}). Но при этом $\frac{a_1}{2} < a_1$, что противоречит выбору минимального набора.

Аналогично если все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ нечётные, то рассмотрим набор

$$\left(\frac{a_1+1}{2}, \frac{a_2+1}{2}, \ldots, \frac{a_{n_0}+1}{2}\right)$$

— он также не обладает указанным свойством (иначе им обладал бы набор $(a_1+1, a_2+1, \ldots, a_{n_0}+1)$, а значит, и исходный минимальный набор), но $\frac{a_1+1}{2} \leqslant a_1$ и $\frac{a_2+1}{2} < a_2$, так как $a_2 \geqslant 2$, поэтому снова получаем противоречие с выбором минимального набора.

Наконец, пусть среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ есть как чётные, так и нечётные. Чётных из них не может быть ровно 3 или 4, так как иначе только они давали бы одинаковые остатки при делении на 2, и свойство было бы выполнено. Аналогично нечётных также не может быть ровно 3 или 4. Значит, или чётных, или нечётных среди них не менее пяти, они образуют некоторый набор, который, с одной стороны, также не обладает указанным свойством (так как чётные и нечётные числа не могут давать одинаковые остатки при делении на 2^k), а с другой стороны, состоит из n_1 чисел, где $5 \leqslant n_1 < n_0$, что противоречит минимальности выбора n_0.

5. Обозначим через $L(a)$ наименьшую суммарную длину разрезов, необходимую для перекройки единичного квадрата в прямоугольник размера $a\times 1/a$, $a>1$. Докажем, что

$$a+\frac{1}{a}-2\leqslant L(a)\leqslant a+\frac{1}{a},$$

откуда следует, что $L(a)$ равно $a+1/a$ с точностью до 2.

Установим нижнюю оценку. Пусть квадрат разрезан на n фигур M_i с периметрами p_i, $i=1, \ldots, n$. Сумма периметров этих фигур составляется из периметра квадрата, равного 4, и удвоенной суммарной длины разрезов, так как участки линий разреза являются общими сторонами для двух соседних фигур:

$$p_1+\ldots+p_n=4+2L(a).$$

По условию, перемещая фигуры M_i (без наложений), можно составить из них прямоугольник размера $a\times 1/a$ с периметром $2a+2/a$. При перемещениях периметры фигур не меняются, поэтому аналогично уже проведённому рассуждению получаем

$$p_1+\ldots+p_n=2a+2/a+2L'(a),$$

где $L'(a)$ — суммарная длина разрезов, которые нужно выполнить в данном прямоугольнике, чтобы получить его разбиение на фигуры M_i. Следовательно, $4+2L(a)=2a+2/a+2L'(a)$, откуда $L(a)=a+1/a+L'(a)-2\geqslant a+1/a-2$.

Для доказательства верхней оценки укажем конкретное разрезание с суммарной длиной разрезов $a+1/a$. Расположим несколько единичных квадратов в ряд так, что они примыкают друг к другу вертикальными сторонами, и рассмотрим параллелограмм единичной площади, одна сторона которого совпадает с нижней стороной самого левого квадрата (и, таким образом, равна 1), а противоположная лежит на продолжении верхней стороны (см. рис. 129). Пусть a — длина другой стороны этого параллелограмма. Квадраты разбивают его на несколько равных па-

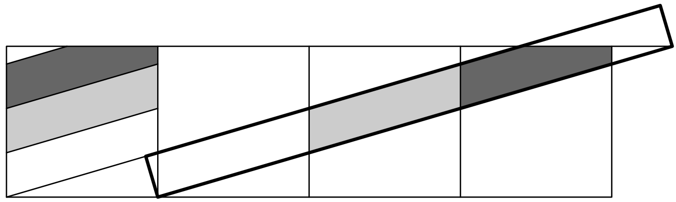


Рис. 129

раллелограммов, один пятиугольник и два треугольника[1]. Параллельно перенося эти части параллелограмма влево, можно составить из них левый единичный квадрат, и наоборот. При параллельном переносе длины отрезков не меняются, поэтому суммарная длина разрезов внутри левого единичного квадрата равна стороне a параллелограмма. Наконец, чтобы получить из рассмотренного параллелограмма прямоугольник размера $a \times 1/a$, достаточно провести ещё один разрез длины $1/a$ вдоль высоты параллелограмма, опущенной на сторону длины a из его вершины (например, совпадающей с правой нижней стороной левого квадрата), и переместить получающийся треугольник к противоположной горизонтальной стороне. Тем самым суммарная длина разрезов станет равной $a + 1/a$.

Остаётся найти величину $a + 1/a$ для данного в условии прямоугольника с диагональю 100: по теореме Пифагора $100^2 = a^2 + 1/a^2 = (a + 1/a)^2 - 2$, откуда $a + 1/a = \sqrt{100^2 + 2}$.

Комментарий. Нетрудно подсчитать число частей при указанном в решении разрезании: оно равно $[\sqrt{a^2 - 1}] + 3$ (или на единицу меньше, если $\sqrt{a^2 - 1}$ — целое число).

Разумеется, приведённый способ разрезания не является единственно возможным. Например, ещё один способ показан на рис. 130: если a нецелое, то параллельными разрезами единичный квадрат разрезается на $[a] - 1$ прямоугольников размера $1 \times 1/a$ и один прямоугольник размера $1 \times b$, где $b = 1 - ([a] - 1)/a > 1/a$, а затем последний пря-

---

[1] Если $a < \sqrt{2}$, то достаточно одного квадрата, и среди частей не будет параллелограммов, а если верхняя сторона в точности совпадёт с верхней стороной одной из квадратов (в этом случае $\sqrt{a^2 - 1}$ — целое число), то не будет пятиугольника.

моугольник — на пятиугольник и два подобных прямоугольных треугольника: один с катетами 1 и $1/a$, а второй с катетами $b-1/a$ и $a(b-1/a)=a-[a]<1$. Сдвигая параллельно эти части, из них также можно сложить прямоугольник $a\times 1/a$, а суммарная длина разрезов будет равна

$$[a]-1+\sqrt{1+1/a^2}+(a-[a])=a-1+\sqrt{1+1/a^2}.$$

Поскольку $\sqrt{1+1/a^2}<1+1/a$ (гипотенуза меньше суммы катетов), это несколько меньше, чем в приведённом решении, но менее удобно при сравнении с нижней оценкой для $L(a)$. Если же a целое, то $b=1/a$, и последний прямоугольник разрезать не нужно; в этом случае получаем a равных прямоугольников, а суммарная длина разрезов равна $a-1$, т. е. ещё меньше.

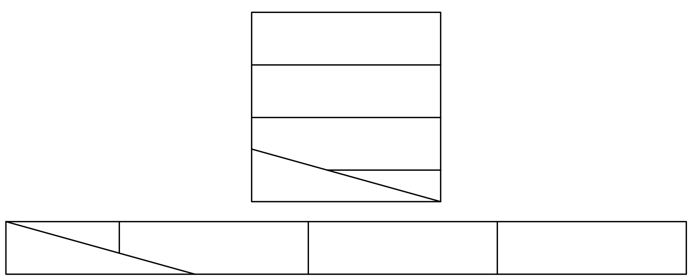


Рис. 130

На самом деле для величины $L(a)$ справедлива нижняя оценка $L(a)\geqslant a-1$ при любом $a>1$, но доказать её непросто. Для числа же частей, необходимых для перекройки, можно получить нижнюю оценку, равную a. Как мы видели, на целых значениях a обе оценки достигаются.

Известна теорема Бойяи [1]—Гервина о том, что любые два равновеликих (имеющих одинаковую площадь) многоугольника равносоставленны, т. е. один из них можно разрезать на конечное число многоугольных частей, из которых потом можно составить второй. Можно даже указать такое разрезание, что второй многоугольник составляется только при помощи параллельных переносов и центральных симметрий полученных частей, т. е. соответствующие части, составляющие два многоугольника не только равны, но и имеют параллельные соответствующие стороны (теорема Хадвигера—Глюра). Аналогичная теорема верна и в пространстве для равновеликих параллелепипедов (этот факт может быть использован при строгом построении теории измерения пло-

[1] Вольфганг Бойяи — отец знаменитого венгерского математика Яноша Бойяи, одного из первооткрывателей неевклидовой геометрии.

щадей и объёмов, см. [60]). Однако для произвольных многогранников это неверно, причём даже для произвольных тетраэдров. Вопрос о том, являются ли равносоставленными многогранники равного объёма, составлял содержание третьей проблемы Гильберта. Этот вопрос был решён отрицательно его учеником М. Деном. В частности, им было доказано, что правильный тетраэдр и куб одинакового объёма не являются равносоставленными. Все упомянутые факты доступно изложены в книге [6], которую рекомендуем заинтересованному читателю.

6. Будем рассуждать от противного. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ и возьмём на его рёбрах точки K, L, M, P, Q, T, как показано на рис. 131, и пусть плоскости KMP, MLT и LKQ касаются вписанного в тетраэдр шара, а плоскость PTQ этого шара не касается.

Возможны два случая: первый, когда вписанный шар пересекает плоскость PTQ, и второй, когда не пересекает. Проведём через PQ плоскость, касающуюся вписанного в тетраэдр шара.

В первом случае проведённая плоскость пересекает отрезок DT в некоторой точке $T_1 \neq T$. Рассмотрим выпуклый восьмигранник $KLMPQTT_1$. Для удобства окрасим грани KMP, MLT, LKQ и PQT_1 в чёрный цвет, а остальные — в белый (см. рис. 131). Тем самым грани, принадлежащие поверхности тетраэдра, будут окрашены в белый цвет, а остальные окрашены в чёрный. Как нетрудно видеть, ни одна пара чёрных граней не имеет общего ребра. Что же касается белых граней, то есть одно исключение: ребро TT_1 является общим для двух белых граней.

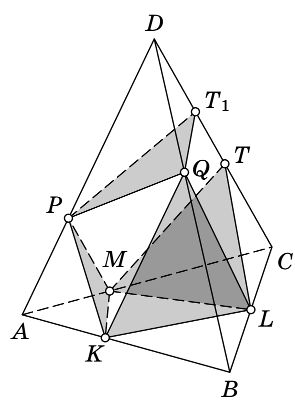


Рис. 131

Согласно условию и построению, все грани нашего восьмигранника касаются вписанного в тетраэдр шара. Соединим точку касания каждой грани с вершинами этой грани, получим разбиение грани на треугольники, при котором каждому чёрному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник в смежной грани, имеющий с ним общую сторону (другие соответствующие стороны равны как отрезки касательных, проведённых к сфере из одной точки). У белых же треугольников одно исключение — пара равных белых треугольников при ребре TT_1.

В получившихся чёрных треугольниках рассмотрим сумму всех углов, что образуются вокруг точек касания, равную $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Поскольку каждому чёрному треугольнику соответствует равный ему белый треугольник, аналогичная сумма для белых треугольников равна $8\pi + 2\alpha$: сумма углов для чёрных треугольников равна 8π, а 2α есть сумма тех двух равных углов в белых треугольниках, под которыми из точек касания шара с гранями T_1QLT и T_1PMT видно ребро TT_1. С другой стороны, сумма всех углов белых треугольников, что образуются вокруг точек касания, также равна $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Следовательно, $\alpha = 0$, что означает совпадение точек T и T_1. Противоречие.

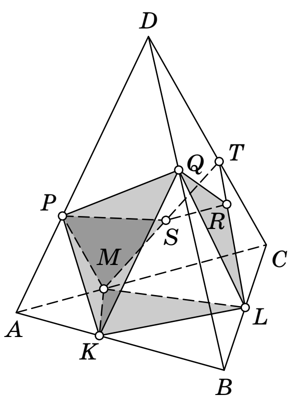


Рис. 132

Во втором случае проведённая через PQ плоскость, касающаяся вписанного в тетраэдр шара, пересекает отрезки TL и TM в разных точках, которые мы обозначим через R и S соответственно. Рассмотрим выпуклый восьмигранник $KLMPQRS$. Для удобства окрасим грани KML, PMS, QRL и PQK (см. рис. 132). Тем самым грани этого восьмигранника, принадлежащие поверхности тетраэдра, будут окрашены в чёрный цвет, а остальные грани — в белый.

Дальнейшее рассуждение дословно повторяет рассуждение для первого случая с той лишь разницей, что ребро TT_1 заменяется на ребро SR, а указанная сумма углов в получившихся белых треугольниках будет равна $8\pi + 2\beta$, где β — угол, под которым из точек касания шара с гранями $MSRL$ и $PSRQ$ видно ребро SR. Аналогично первому случаю получаем равенство $\beta = 0$, означающее совпадение точек S и R. Это возможно лишь в случае, если проведённая через PQ плоскость проходит через точку T, что вновь влечёт противоречие.

Комментарий. Эта задача имеет интересную связь с задачей, предложенной в 1978 году учащимся 10 классов на Саратовской математической олимпиаде [2, задача 640]: доказать, что если у треугольной пирамиды отрезать углы так, что получающийся многогранник имеет 4 треугольные и 4 шестиугольные грани, то в этот многогранник нельзя вписать шар. Рассмотренная задача является её «предельным случаем», когда на каждой из сторон тетраэдра отрезанные части граничат по точке, т. е. указанные шестиугольные грани превращаются в треугольные. Любопытно, что в случае когда есть хотя бы одна шестиугольная грань, в получающийся многогранник вписать шар нельзя, а в случае когда все грани оказываются треугольными, — можно.

Отметим также, что другое решение задачи можно получить, опираясь на следующее утверждение: если дан выпуклый четырёхгранный угол с плоскими углами α, β, γ, δ и шар, касающийся плоскостей углов β, γ и δ, то при $\alpha+\gamma=\beta+\delta$ шар касается плоскости угла α, при $\alpha+\gamma<\beta+\delta$ пересекает её, а при $\alpha+\gamma>\beta+\delta$ не пересекает. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству признака описанного четырёхугольника на плоскости. Заинтересованному читателю предлагаем провести его самостоятельно, а также подумать, как применить это утверждение к решению данной задачи.

1990 год (LIII олимпиада)

8 класс

1. Поскольку $a_1 < a_2 < a_3$, справедливо неравенство $a_1 + a_2 + a_3 < 3a_3$. Аналогичным образом, $a_4 + a_5 + a_6 < 3a_6$, $a_7 + a_8 + a_9 < 3a_9$. Сложим три полученные неравенства:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9 < 3(a_3 + a_6 + a_9).$$

В силу того, что $a_3 + a_6 + a_9 > 0$, получаем

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_8 + a_9}{a_3 + a_6 + a_9} < 3,$$

что и требовалось доказать.

2. Если m, n — натуральные числа, то

$$m(n+9)(m+2n^2+3) > 1,$$

поэтому это число имеет не менее одного простого делителя. Покажем, что число $m(n+9)(m+2n^2+3)$ не может иметь ровно одного простого делителя ни при каких натуральных числах m и n.

В самом деле, поскольку число $2n^2+3$ нечётно, множители m и $m+2n^2+3$ имеют разную чётность, поэтому при $m>1$ их произведение имеет не менее двух различных простых делителей, один из которых равен 2. Если же $m=1$, то

$$m(n+9)(m+2n^2+3) = (n+9)(2n^2+4) = 2(n+9)(n^2+2).$$

Оба числа $n+9$ и n^2+2 больше 1 и одно из них нечётно, поэтому произведение $2(n+9)(n^2+2)$ имеет не менее двух различных простых делителей.

Теперь покажем, что найдётся число указанного вида, имеющее ровно два различных простых делителя: например, при $m=5$ и $n=1$ простыми делителями числа $m(n+9)(m+2n^2+3)=5\cdot 10\cdot 10=5^3\cdot 2^2$ являются только числа 2 и 5.

Комментарий. Приведённая пара чисел m и n, для которой получается число, имеющее ровно два различных простых делителя, не единственна: при $m=20$ и $n=1$ получаем число $m(n+9)(m+2n^2+3)=$ $=20\cdot 10\cdot 25=5^4\cdot 2^3$, простыми делителями которого тоже являются только числа 2 и 5. Интересующемуся читателю предлагаем подумать над вопросом о существовании других таких пар чисел.

3. Заметим, что хотя бы один из классов представлен не более чем двумя участниками, так как в противном случае общее количество участников было бы не менее, чем $3\cdot 4=12$ человек, что противоречило бы условию. Следовательно, найдутся такие пятеро сидящих подряд школьников, среди которых не будет учащихся именно этого класса. В самом деле, если на отборочном туре присутствует всего один участник из этого класса, то можно выбрать любых пятерых школьников, среди которых нет этого участника. Если же класс представлен ровно двумя участниками, то они разбивают оставшихся 9 сидящих по кругу человек на две группы, количество человек в одной из которых должно быть не менее 5. Тем самым, рассадить за круглым столом всех участников так, чтобы среди любых 5 сидящих подряд школьников нашлись представители всех четырёх классов, нельзя.

4. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD через O (см. рис. 133). Поскольку $\angle OAE = \angle OBE$ как углы, опирающиеся на хорду OE, получаем $\angle CAE = \angle DBC$. В то

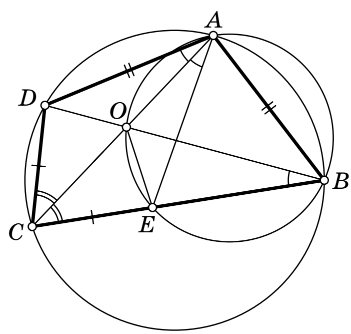


Рис. 133

же время $\angle DBC = \angle DAC$ как углы, опирающиеся на хорду DC, а значит, $\angle DAC = \angle CAE$. Из равенства хорд AB и AD следует равенство вписанных углов ACB и ACD, опирающихся на эти хорды. Таким образом, $\triangle ACD = \triangle ACE$ по общей стороне AC и прилежащим к ней углам, откуда следует равенство сторон CD и CE, что и требовалось доказать.

5. *Первый способ*. Представим результаты n включений табло в виде таблицы из n строк, соответствующих каждому включению, и 64 столбцов, соответствующих каждой кнопке, следующим образом: «$+$» означает, что данная кнопка в данном включении была нажата, а «$-$» — не нажата. Для того чтобы по зажиганиям каждой лампочки можно было распознать кнопку, которая ей управляет, необходимо и достаточно, чтобы все столбцы были различны. В самом деле, пусть, к примеру, в первом столбце ячейки с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$ заполнены знаком «$+$», а оставшиеся — знаком «$-$» (номера ячеек отсчитываем сверху вниз). Это означает, что лампочка, которая управляется первой кнопкой, горела только при включениях с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Поскольку все столбцы различны, лампочки, управляемые другими кнопками, будут или гаснуть хотя бы при одном из включений с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$, или, наоборот, зажигаться при каких-то включениях с оставшимися номерами. Следовательно, проследив во время включений за единственной лампочкой, которая горела только при включениях с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$, мы установим, что эта лампочка управляется кнопкой, соответствующей первому столбцу.

С другой стороны, если бы первый столбец совпадал с некоторым другим, скажем, вторым, то мы не смогли бы распознать лампочки, управляемые кнопками, соответствующими первому и второму столбцам, так как нашлись бы две лампочки, которые при всех n включениях ведут себя одинаково.

Поскольку каждый столбец состоит из n ячеек, заполненных либо знаком «$+$», либо знаком «$-$», т. е. имеется ровно два варианта заполнения каждой ячейки, всего существует ровно 2^n различных вариантов заполнения столбца. Следовательно, обеспечить различие всех столбцов в нашей таблице возможно в точности тогда, когда $2^n \geqslant 64$. Наименьшее значение n, удовлетворяющее этому условию, равно 6.

Для того чтобы получить искомые 6 включений, достаточно составить какую-либо заполненную знаками «$+$» и «$-$» таблицу из 6 строк и 64 столбцов, все столбцы которой различны, а затем при k-м включении ($k = 1, 2, \ldots, 6$) нажимать кнопку с номером m ($m = 1, 2, \ldots, 64$) тогда и только тогда, когда в этой таблице в ячейке на пересечении k-й строки и m-го столбца стоит знак «$+$».

Второй способ. Проведём серию из n включений табло, каждый раз приписывая загоревшимся лампочкам значение 1, а незагоревшимся — 0. Таким образом, за n включений табло каждой лампочке будет приписан n-значный номер, состоящий из цифр «0» и «1».

Заметим, что выяснить, какая лампочка какой кнопкой управляется, можно только тогда, когда все получившиеся номера окажутся различными. В самом деле, если в результате включений полученные номера каких-то двух лампочек совпали, то всякий раз обе лампочки загорались или не загорались одновременно, поэтому точно установить соответствующие этим лампочкам кнопки невозможно. Поскольку количество различных n-значных номеров, состоящих из цифр «0» и «1», равно 2^n, для обеспечения различия 64 номеров, соответствующих лампочкам, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $2^n \geqslant 64$, откуда $n \geqslant 6$.

Теперь предъявим алгоритм, посредством которого точное соответствие между лампочками и кнопками устанавливается ровно за 6 включений. Пронумеруем все кнопки числами от 0 до 63, представим номера в двоичной системе счисления и дополним их при необходимости нулями в старших разрядах до набора длины 6. Получим наборы от «000000», соответствующего 0-й кнопке, до «111111», соответствующего 63-й кнопке.

Далее, будем сопоставлять каждой лампочке набор из цифр «0» и «1» по следующему алгоритму: при первом включении нажимаем только те кнопки, в наборах которых первая цифра слева равна 1, а затем присваиваем на первой позиции слева загоревшимся лампочкам «1», а незагоревшимся — «0». На втором шаге нажимаем только те кнопки, в наборах которых вторая цифра слева равна 1, а затем присваиваем на второй позиции слева загоревшимся лампочкам «1», а незагоревшимся — «0» и т. д. После проведения 6 шагов предложенного алгоритма, каждой лампочке будет присвоен 6-значный номер, состоящий из цифр «0» и «1». Поскольку номера, присвоенные кнопкам, различны, все 64 присвоенных лампочкам 6-значных номера будут также различаться, т. е. разным лампочкам будут присвоены разные наборы. Действительно, совпадение наборов каких-либо двух лампочек означает, что при каждом включении лампочки загорались или не загорались одновременно, т. е. соответствующие этим лампочкам кнопки при каждом из 6 включений одновременно нажимались или не нажимались, чего произойти не могло, так как все номера кнопок различны, а значит, обязательно в какое-то из включений одна из кнопок была нажата, а другая — нет.

Остаётся заметить, что каждая лампочка управляется именно той кнопкой, номер которой совпадает с номером этой лампочки: совпадение наборов означает, что лампочка включалась тогда и только тогда, когда была нажата соответствующая кнопка.

Итак, выяснить, какая лампочка какой кнопкой управляется, можно за 6 включений.

Комментарий. Конечно же, оба предложенных решения нетрудно перенести на случай произвольного исходного количества кнопок и лампочек. Более того, заложенные в этих решениях математические идеи простираются гораздо дальше самой задачи: от несложных вопросов, связанных с двоичной системой счисления, до трудных прикладных проблем теории кодирования. Некоторые из таких идей предвосхитил живший в XIX веке французский математик Эдуард Люка.

В своём четырёхтомнике [35, том 1, с. 154–156] он предложил задачу, представляющую собой, на самом деле, арифметический фокус, который сам Люка называл «*волшебным веером*». Для выполнения фокуса исполнитель заранее заготавливает пять полосок бумаги, на которых написаны числа от 1 до 31 (на каждой полоске по 16 чисел, на разных полосках написаны разные наборы чисел). Зрителю предлагается задумать число от 1 до 31. Фокусник предлагает ему сказать, в каких полосках он видит задуманное число, а в каких — нет. После этого фокусник мгновенно называет это число.

Суть фокуса — в наборах чисел, написанных на полосках (они и составляют «волшебный веер»): на первой полоске написаны числа 1, 3, ..., 31 (все нечётные числа). На второй полоске — числа 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31 (можно заметить, что каждая следующая четвёрка чисел получается из предыдущей прибавлением 8 к каждому числу четвёрки). На третьей полоске — числа 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31, на четвёртой полоске — числа 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, и на последней — все числа от 16 до 31.

Услышав ответы, фокусник мысленно составляет набор из пяти чисел $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$ следующим образом: $a_i = 1$, если задуманное число записано на i-й полоске, и $a_i = 0$ в противном случае. После этого он находит десятичное число с двоичной записью $\overline{a_5a_4a_3a_2a_1}$.

Разгадка этого поразительного на первый взгляд фокуса очень проста: на i-й полоске записаны все числа, в двоичных записях которых на i-й позиции (считая справа налево) стоит единица. Поэтому какое бы число ни загадывал зритель, двоичный набор $(a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$, возникающий в уме у фокусника, является в точности двоичной записью задуманного числа. Внимательный читатель, разумеется, заметит, насколько похоже второе решение задачи про кнопки и лампочки на рассуждение из задачи Люка.

9 класс

1. Предположим, что в компании найдутся 2 мальчика, не являющиеся братьями. Тогда по условию у каждого из них имеется не менее 3 братьев среди остальных. Разумеется, никакие братья этих 2 мальчиков не могут совпадать, иначе бы и сами мальчики были братьями, а значит, в компании помимо 2 мальчиков имеется не менее 6 человек, т. е. всего не менее 8 человек, что противоречит условию. Тем самым наше предположение не является верным, поэтому любые 2 мальчика в компании — братья, что и требовалось доказать.

Комментарий. Задача легко обобщается на случай компании из произвольного количества n мальчиков, каждый из которых имеет среди остальных не менее $[n/2]$ братьев.

2. Рассмотрим произвольные 53 различных натуральных числа, из которых нельзя выбрать два числа, составляющих в сумме 53. Заметим, что существует ровно 26 пар натуральных чисел, дающих в сумме 53: (1, 52), (2, 51),

…, (26, 27). Каждая из этих пар должна содержать не более одного из 53 рассматриваемых чисел, а значит, упорядочив наши числа по возрастанию, можно заметить, что сумма первых 26 чисел не меньше чем $1+\ldots+26$, а 27-е по величине число не меньше чем 53. Тогда сумма последних 27 чисел не меньше чем $53+\ldots+79$. Таким образом, сумма всех 53 рассматриваемых чисел не меньше чем

$$(1+\ldots+26)+(53+\ldots+79)=\frac{1+26}{2}\cdot 26+\frac{53+79}{2}\cdot 27=2133.$$

Это означает, что сумма любых 53 чисел, из которых нельзя выбрать два, в сумме дающих 53, будет больше или равна 2133. Отсюда немедленно следует утверждение задачи.

Комментарий. Выбор чисел обусловлен тем, что в 1990 г. состоялась 53-я Московская математическая олимпиада.

3. Пусть некоторая точка A находится внутри круга радиуса $r>0$ на расстоянии $d\geqslant 0$ от её центра O. Тогда любая хорда BC этой окружности, проходящая через точку A, делится ей на такие отрезки BA и AC, что $BA\cdot AC=r^2-d^2$. Действительно, если провести диаметр этой окружности через точку A, то он разделится этой точкой на отрезки с длинами $r+d$ и $r-d$, произведение которых равно r^2-d^2. С другой стороны, произведение этих отрезков равно произведению отрезков BA и AC по теореме об отрезках пересекающихся хорд.

Если A — отмеченная точка из условия задачи, O — центр данного круга радиуса 1, а BC — произвольная хорда этого круга, проходящая через точку A, то, согласно доказанному соотношению, имеем $BA\cdot AC=1-OA^2$. С другой стороны, отрезок BC является хордой двух проводимых окружностей радиуса 2. Пусть O' — центр одной из них (см. рис. 134). Тогда, снова применяя доказанное соотношение, получаем $BA\cdot AC=4-O'A^2$, а значит, $1-OA^2=4-O'A^2$, поэтому $O'A=\sqrt{3+OA^2}$. Следовательно, центры всех проводимых окружностей радиуса 2 лежат на

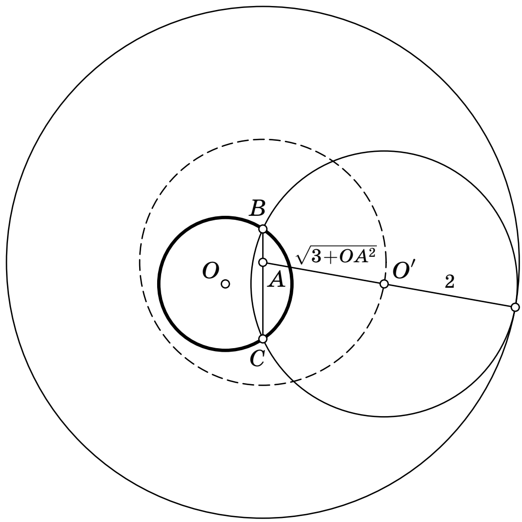


Рис. 134

окружности с центром в точке A и радиусом $\sqrt{3+OA^2}$. Таким образом, все проводимые окружности касаются внутренним образом окружности с центром в точке A и радиусом $2+\sqrt{3+OA^2}$.

Комментарий. Для произвольной точки A, находящейся на расстоянии $d \geqslant 0$ от центра окружности с радиусом $r > 0$ величина $d^2 - r^2$ называется *степенью точки* A относительно этой окружности. Использование понятия степени точки позволяет упростить решение этой задачи. Примеры других задач, при решении которых удобно использовать это понятие, можно найти в книге [46, гл. 3, § 10].

4. Произвольным образом разобьём монеты на четыре группы A, B, C, D по две монеты в каждой и произведём три взвешивания

$$A+B \vee C+D,$$
$$A+C \vee B+D,$$
$$A+D \vee B+C,$$

результаты которых запишем знаками «$<$», «$>$» или «$=$» вместо знаков «$\vee$».

Заметим, что равенство возможно лишь в случае совпадения весов двух фальшивых и двух настоящих монет, поэтому если в результате взвешиваний мы получим хотя бы одно равенство, то задача будет решена.

Если в результате взвешиваний не окажется ни одного равенства, то отбросим два одинаковых из трёх полученных знаков. Оставшийся знак укажет, что произойдёт, если положить фальшивые монеты слева, а настоящие — справа.

Действительно, если фальшивые монеты находятся в одной группе, то они нечётное число раз окажутся слева (три раза, если это группа A, и по одному разу во всех остальных группах) и чётное число раз справа (ни одного раза, если это группа A, и по два раза во всех остальных группах). В таком случае знак, указывающий на то, что произойдёт, если положить фальшивые монеты слева, а настоящие справа, будет записан три раза, если монеты оказались в группе A, и ровно один раз из трёх во всех оставшихся случаях. Итак, отбрасывание двух одинаковых знаков приведёт к требуемому результату.

Перейдём к случаю, когда фальшивые монеты находятся в разных группах. Пусть тяжёлая монета находится в группе A, а лёгкая — в группе B. Тогда в результате первого взвешивания обе фальшивые монеты окажутся слева, а в результате оставшихся взвешиваний дважды получится знак «$>$»:

$$A+C>B+D,$$
$$A+D>B+C.$$

Тем самым в этом случае после отбрасывания двух одинаковых знаков «$>$», мы получим знак первого взвешивания, когда фальшивые монеты окажутся слева, а настоящие — справа. Аналогичное рассуждение можно провести в случаях, когда тяжёлая монета находится в группе A, а лёгкая — в группах C или D.

Если же лёгкая монета окажется в группе A, а тяжёлая — в группах B, C или D, то опять же однажды обе фальшивые монеты окажутся слева, а дважды получится знак «$<$», поэтому отбрасывание двух одинаковых знаков вновь укажет нам знак, получаемый в ситуации, если положить фальшивые монеты слева, а настоящие — справа.

Наконец, если обе фальшивые монеты находятся в каких-то двух из групп B, C или D, то дважды они окажутся по разные стороны, дав по одному разу оба знака «$<$» и «$>$», а однажды окажутся справа. Однако соответствующий знак будет отброшен как парный и останется противоположный, т. е. знак, получаемый в ситуации, если положить фальшивые монеты слева, а настоящие — справа.

Таким образом, в результате трёх указанных взвешиваний мы всегда сможем установить, что тяжелее: две фальшивые монеты или две настоящие, или же они весят одинаково.

Комментарий. Отметим, что при решении данной задачи мы использовали *пассивный алгоритм* взвешивания, т. е. такой алгоритм, при котором все взвешивания продумываются заранее, ещё до начала процесса взвешивания. Существует и другой алгоритм, используемый при решении задач на взвешивания, называемый *адаптивным* или *условным*. Суть этого алгоритма в том, что каждое следующее взвешивание продумывается с учётом результатов предыдущего. В нашей задаче не было необходимости прибегать к такому алгоритму, но существуют задачи на взвешивания, решение которых можно получить только с его использованием. Зачастую в условиях задач на взвешивания обговаривается, допустимо ли применение того или иного метода. Предлагаем интересующемуся читателю попробовать решить поставленную задачу с применением адаптивного алгоритма взвешивания.

5. Исходную дробь p/q мы будем считать несократимой, так как в противном случае дробь можно сократить, никак не изменяя при этом периода дроби и его длины n.

Докажем, что число n является длиной периода несократимой дроби p/q тогда и только тогда, когда n есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее при некотором целом неотрицательном k условию $10^{k+n} - 10^k \,\vdots\, q$.

Можно считать, что $p < q$ (если $p = q$, то дробь несократима лишь при $p = q = 1$, а случай $p > q$ сводится к случаю

$p<q$ выделением целой части дроби p/q, что не влияет на период всей дроби). Тогда десятичная запись периодической дроби p/q с периодом длины n имеет вид

$$\frac{p}{q} = \overline{0{,}a_1a_2\ldots a_k(a_{k+1}\ldots a_{k+n})},$$

где $(a_{k+1}\ldots a_{k+n})$ — период дроби (при $k=0$ дробь имеет вид $\overline{0,(a_1a_2\ldots a_n)}$). Тогда число

$$10^{k+n}\cdot\frac{p}{q} - 10^k\cdot\frac{p}{q} = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{k+n},(a_{k+1}\ldots a_{k+n})} - \\ - \overline{a_1a_2\ldots a_k,(a_{k+1}\ldots a_{k+n})}$$

является целым, поэтому $(10^{k+n}-10^k)\cdot p \,\vdots\, q$. Поскольку дробь p/q несократима, т. е. числа p и q взаимно просты, имеем $10^{k+n}-10^k \,\vdots\, q$.

Обратно, пусть n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условию $10^{k+n}-10^k \,\vdots\, q$ для некоторого целого неотрицательного k. Тем самым число $(10^{k+n}-10^k)\cdot p/q$ является целым. Пусть $p/q = \overline{0{,}a_1a_2\ldots}$ Число

$$10^{k+n}\cdot\frac{p}{q} - 10^k\cdot\frac{p}{q} = \overline{a_1a_2\ldots a_ka_{k+1}\ldots a_{k+n},a_{k+n+1}\ldots} - \\ - \overline{a_1a_2\ldots a_k,a_{k+1}\ldots}$$

является целым тогда и только тогда, когда

$$\overline{0{,}a_{k+n+1}\ldots} = \overline{0{,}a_{k+1}\ldots}.$$

Поскольку n — наименьшее натуральное число, для которого выполнено это равенство, получаем, что $\overline{(a_{k+1}\ldots a_{k+n})}$ есть в точности период дроби p/q длины n.

Теперь рассмотрим дробь $\dfrac{1}{10^n-1} = 0{,}\underbrace{0\ldots01}_{n}\underbrace{0\ldots01}_{n}\ldots$ Квадрат этой дроби $\dfrac{1}{(10^n-1)^2}$ имеет период длины $n(10^n-1)$. Действительно, как показано выше, длина периода этой дроби t есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее при некотором натуральном s соотношению

$$10^{s+t}-10^s = 10^s\cdot(10^t-1) \,\vdots\, (10^n-1)^2.$$

Числа 10^s и $(10^n-1)^2$ взаимно просты, поэтому указанное соотношение приводится к виду

$$10^t-1 \,\vdots\, (10^n-1)^2.$$

Покажем, что $10^t-1 \,\vdots\, (10^n-1)^2$ тогда и только тогда, когда $t \,\vdots\, n(10^n-1)$. Поделим t на n с остатком: $t=mn+r$, $0\leqslant r<n$. Тогда

$$10^t-1=10^{mn+r}-1=10^{mn}(10^r-1)+(10^{mn}-1)=$$
$$=10^{mn}(10^r-1)+(10^n-1)(1+10^n+\ldots+10^{(m-1)n}).$$

Поскольку $r<n$, первое слагаемое в этом выражении делится на $(10^n-1)^2$ тогда и только тогда, когда $r=0$, т. е. $t=mn$. Второе же слагаемое кратно $(10^n-1)^2$ тогда и только тогда, когда

$$1+10^n+\ldots+10^{(m-1)n} \,\vdots\, (10^n-1),$$

что равносильно условию $m \,\vdots\, (10^n-1)$ (последнее следует из того, что каждое из чисел 1, 10^n, 10^{2n}, …, $10^{(m-1)n}$ даёт остаток 1 при делении на 10^n-1, а всего таких чисел m). Таким образом, $t=mn$ и $m \,\vdots\, (10^n-1)$, тем самым t есть минимальное натуральное число, удовлетворяющее условию $t \,\vdots\, n(10^n-1)$, откуда $t=n(10^n-1)$.

Квадрат любой другой дроби с периодом длины n имеет период, длина которого не превосходит $n(10^n-1)$, так как если $10^{k+n}-10^k=10^k(10^n-1) \,\vdots\, q$, то

$$10^{2k}(10^{n(10^n-1)}-1) \,\vdots\, 10^{2k}(10^n-1)^2 \,\vdots\, q^2.$$

К о м м е н т а р и й. Исследованию периодов десятичных дробей посвящены многие, зачастую весьма непростые вопросы алгебры и арифметики. Предложенная задача является лишь частным случаем следующей теоремы: если две дроби имеют периоды длин t_1 и t_2, то произведение этих дробей имеет период длины $t\leqslant \text{НОК}(t_1, t_2)\left(10^{\text{НОД}(t_1,t_2)}-1\right)$, причём неравенство является точным и достигается, например, для дробей $\frac{1}{10^{t_1}-1}$ и $\frac{1}{10^{t_2}-1}$. Интересующегося читателя отсылаем за деталями к книге [25, гл. 6, задача 6.70] и теореме 3 статьи [19], написанной автором рассмотренной задачи.

10 класс

1. Разобьём квадрат со стороной 1 на прямоугольники так, как показано на рис. 135. Пусть $BK=x$. Тогда $KC=MD=1-x$. Для того чтобы прямоугольники были подобны, необходимо и достаточно, чтобы отношения больших сторон к меньшим в этих прямоугольниках совпадали.

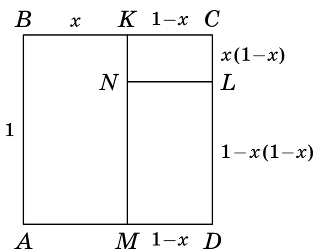


Рис. 135

Поэтому для подобия прямоугольников $KCLN$ и $ABKM$ достаточно, чтобы сторона CL равнялась $x(1-x)$. Заметим, что тогда $CL<KC$, так как $x<1$. Поскольку $CD=1$, получаем $LD=1-x(1-x)$. Исходя из того, что $1-x(1-x)>1-x$, можем заключить, что $LD>MD$. Далее, запишем равенство отношений больших сторон к меньшим в прямоугольниках $MNLD$ и $ABKM$, необходимое и достаточное для их подобия:

$$\frac{1-x(1-x)}{1-x}=\frac{1}{x}.$$

Это равенство задаёт уравнение на x, равносильное уравнению

$$1-x=x(1-x(1-x)),$$

которое имеет по крайней мере одно решение $x_0\in(0;1)$, так как при $x=0$ левая часть равенства больше правой $(1>0)$, а при $x=1$ — наоборот $(0<1)$. При этом значении x_0 мы получим искомое разрезание квадрата. Действительно, подобие прямоугольников $ABKM$, $KCLN$ и $MNLD$ следует из самого построения и определения величины x_0. Кроме того, эти прямоугольники различны, так как их меньшие стороны попарно не равны друг другу.

Комментарий. Уравнение, к которому мы пришли при решении этой задачи, является кубическим и обладает единственным действительным корнем. При желании можно найти этот корень, используя *формулу Кардано*, хотя его вид и «оставляет желать лучшего»:

$$x_0=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{\frac{11+3\sqrt{69}}{2}}-5\sqrt[3]{\frac{2}{11+3\sqrt{69}}}\right).$$

Отметим, что при решении этой задачи мы могли рассмотреть случай другого подобия прямоугольников $KCLN$ и $ABKM$, а именно случай, когда прямоугольники $KCLN$ и $ABKM$ подобны, но $CL>KC$. Получающиеся при таком подобии длины сторон указаны на рис. 136.

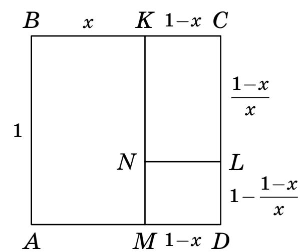


Рис. 136

Если $LD<MD$, то необходимое для подобия соотношение

$$\frac{1-\dfrac{1-x}{x}}{1-x}=x$$

приводится к такому же, как и в вышеприведённом решении, уравнению

$$1-x=x(1-x(1-x)),$$

а значит, определяет аналогичные (с точностью до перестановки) прямоугольники.

Если же $LD>MD$, то соотношение подобия принимает вид

$$\frac{1-\dfrac{1-x}{x}}{1-x}=\frac{1}{x},$$

откуда сразу находится $x=2/3$. Для этого значения x получаем $LD=CL=1/2$, а значит, прямоугольники $KCLN$ и $MNLD$ хотя и будут подобны, но окажутся равными, что не соответствует требованиям задачи.

На самом деле, можно показать, что существует лишь один (с точностью до перестановки прямоугольников) способ разрезания единичного квадрата на три подобных и попарно различных прямоугольника, совпадающий со способом, указанном в приведённом решении.

2. Сначала заметим, что одно из чисел p, q равно 2, а другое — нечётно. В самом деле, если числа p и q нечётные, то нечётны и числа p^q, q^p, а значит, число r чётно. Простое число является чётным только в том случае, когда оно равно 2. Но числа p и q — простые, а значит, $p>1$, $q>1$ и, как следствие, $r\neq 2$. Это означает, что хотя бы одно из чисел p, q является чётным и, учитывая его простоту, равно 2. Таким образом, исходное уравнение приводится к виду

$$s^2 + 2^s = r,$$

где s есть одно из чисел p, q и s нечётно.

Покажем, что число s равно 3. Предположим противное. Остаток от деления на 3 правой части уравнения не равен 0, так как r — простое число, большее трёх. Поскольку число s нечётно, остаток от деления числа 2^s на 3 равен 2, а остаток числа s^2 равен 1, следовательно, остаток от деления на 3 всей левой части уравнения равен 0 и не равен остатку правой части, противоречие. Тем самым, $s=3$. Подставляя это значение в уравнение, получаем $r=17$, что в результате даёт две тройки решений: $(p;\, q;\, r) = (2;\, 3;\, 17)$ и $(p;\, q;\, r) = (3;\, 2;\, 17)$.

3. Определим функцию $s(x)$ следующим образом:

$$s(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Покажем, что для числа $x = -\frac{\pi}{2} + s(a)\cdot\frac{\pi}{3} + s(b)\cdot\frac{\pi}{9} + s(c)\cdot\frac{\pi}{27}$ выполнены неравенства

$$s(a)\cdot\cos x > \frac{1}{2}, \quad s(b)\cdot\cos 3x > \frac{1}{2}, \quad s(c)\cdot\cos 9x > \frac{1}{2}.$$

Проверим первое неравенство. Имеем

$$\cos x = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + s(a)\cdot\frac{\pi}{3} + s(b)\cdot\frac{\pi}{9} + s(c)\cdot\frac{\pi}{27}\right) = \\ = \sin\left(s(a)\cdot\frac{\pi}{3} + s(b)\cdot\frac{\pi}{9} + s(c)\cdot\frac{\pi}{27}\right).$$

В зависимости от a, b и c выражение $s(a)\cdot\frac{\pi}{3} + s(b)\cdot\frac{\pi}{9} + s(c)\cdot\frac{\pi}{27}$ может принимать одно из 8 различных значений: $\pm\frac{5\pi}{27}$, $\pm\frac{7\pi}{27}$, $\pm\frac{11\pi}{27}$, $\pm\frac{13\pi}{27}$, причём знак этого значения совпадает со знаком $s(a)$. Следовательно,

$$\cos x = \sin\left(s(a)\cdot\frac{\pi}{3} + s(b)\cdot\frac{\pi}{9} + s(c)\cdot\frac{\pi}{27}\right) = s(a)\cdot\sin\alpha,$$

где α — одно из чисел $\frac{5\pi}{27}, \frac{7\pi}{27}, \frac{11\pi}{27}, \frac{13\pi}{27}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} > \frac{13\pi}{27} > \frac{11\pi}{27} > \frac{7\pi}{27} > \frac{5\pi}{27} > \frac{\pi}{6}$, получаем $\sin\alpha > \frac{1}{2}$, а значит,

$$s(a)\cdot\cos x = (s(a))^2\cdot\sin\alpha = \sin\alpha > \frac{1}{2},$$

откуда следует первое неравенство.

Перейдём к проверке второго неравенства. Имеем

$$\cos 3x = \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + s(a)\cdot\pi + s(b)\cdot\frac{\pi}{3} + s(c)\cdot\frac{\pi}{9}\right) =$$
$$= -\sin\left(s(a)\cdot\pi + s(b)\cdot\frac{\pi}{3} + s(c)\cdot\frac{\pi}{9}\right) = \sin\left(s(b)\cdot\frac{\pi}{3} + s(c)\cdot\frac{\pi}{9}\right).$$

В зависимости от b и c выражение $s(b)\cdot\frac{\pi}{3} + s(c)\cdot\frac{\pi}{9}$ может принимать одно из 4 различных значений: $\pm\frac{2\pi}{9}$, $\pm\frac{4\pi}{9}$, причём знак этого значения совпадает со знаком $s(b)$. Таким образом,

$$\cos 3x = \sin\left(s(b)\cdot\frac{\pi}{3} + s(c)\cdot\frac{\pi}{9}\right) = s(b)\cdot\sin\beta,$$

где β — одно из чисел $\frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}$. Поскольку $\frac{\pi}{2} > \frac{4\pi}{9} > \frac{2\pi}{9} > \frac{\pi}{6}$, получаем $\sin\beta > \frac{1}{2}$, поэтому

$$s(b)\cdot\cos 3x = (s(b))^2\cdot\sin\beta = \sin\beta > \frac{1}{2}.$$

Наконец, проверим третье неравенство. В этом случае

$$\cos 9x = \cos\left(-\frac{9\pi}{2} + s(a)\cdot 3\pi + s(b)\cdot\pi + s(c)\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \sin\left(s(a)\cdot 3\pi + s(b)\cdot\pi + s(c)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(s(b)\cdot\pi + s(c)\cdot\frac{\pi}{3}\right) =$$
$$= \sin\left(s(c)\cdot\frac{\pi}{3}\right) = s(c)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},$$

поэтому

$$s(c)\cdot\cos 9x = (s(c))^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2},$$

т. е. доказано и третье неравенство.

Покажем, что для указанного значения x из трёх полученных неравенств следуют неравенства

$$a\cos x \geqslant \frac{|a|}{2}, \quad b\cos 3x \geqslant \frac{|b|}{2}, \quad c\cos 9x \geqslant \frac{|c|}{2},$$

каждое из которых обращается в равенство тогда и только тогда, когда a, b и c соответственно равны нулю.

Действительно, рассмотрим неравенство $s(a)\cdot\cos x > 1/2$. Если $a > 0$, то $s(a) = 1$, поэтому, умножая обе части неравенства $\cos x > 1/2$ на a, получаем $a\cos x > a/2$, т. е. $a\cos x > |a|/2$. Если же $a < 0$, то $s(a) = -1$, поэтому неравенство принимает вид $-\cos x > 1/2$ и после умножения на $-a$ получаем $a\cos x > -a/2$, т. е. снова $a\cos x > |a|/2$. При $a = 0$ неравенство $a\cos x \geqslant |a|/2$ обратится в равенство. Рассуждения для остальных двух неравенств аналогичны.

По условию хотя бы одно из чисел a, b, c отлично от нуля, поэтому хотя бы одно из трёх неравенств строгое. Сложив три неравенства, получаем

$$a\cos x + b\cos 3x + c\cos 9x > \frac{|a| + |b| + |c|}{2}.$$

К о м м е н т а р и й. В приведённом решении кусочно постоянная функция $s(x)$ использовалась исключительно для удобства изложения. В действительности же число x можно задать без неё:

$$x = -\frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{27},$$

где знаки плюс или минус выбираются совпадающими со знаками коэффициентов a, b, c соответственно, причём знак числа 0 считается для определённости положительным. Внимательный читатель мог заметить, что функция $s(x)$ во всех точках, кроме 0, совпадает с хорошо известной функцией $\operatorname{sgn} x$:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

В частности, как для функции $\operatorname{sgn} x$ выполнено равенство $\operatorname{sgn} x\cdot x = |x|$ для всякого x, так и $s(x)\cdot x = |x|$. Отметим, что одна функция может быть выражена через другую: $s(x) = \operatorname{sgn} x - \operatorname{sgn}^2 x + 1$.

Функция $s(x)$ также близка к ещё одной хорошо известной кусочно-постоянной *тета-функции Хевисайда*

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

В качестве упражнения предлагаем читателю найти выражение функции $s(x)$ через функцию $\vartheta(x)$.

4. Пусть в некотором круге расположены точки A, B, C и D. Без ограничения общности будем считать, что длина отрезка AB не меньше длин других отрезков с концами в этих точках, а расстояние от точки C до прямой AB не меньше расстояния от точки D до этой прямой.

Докажем сначала, что на окружности ω, являющейся границей рассматриваемого круга, найдутся такие точки A', B' и C', что произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D не больше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A', B', C' и D. Проведём три прямые: прямую AB и две перпендикулярные к ней прямые l и m, проходящие через точки C и D соответственно (см. рис. 137). Пусть H_1 и H_2 — точки пересечения прямой AB с прямыми l и m соответственно. Поскольку длина отрезка AB не меньше длин других от-

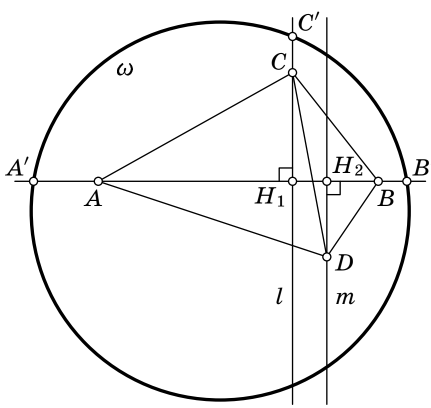


Рис. 137

резков с концами в точках A, B, C и D, точки H_1 и H_2 лежат внутри отрезка AB. Обозначим через A' и B' такие точки пересечения окружности ω с прямой AB, что точка A лежит на отрезке $A'B$, а точка B лежит на отрезке AB'. Обозначим также через C' такую точку пересечения окружности ω с прямой l, что точка C лежит на отрезке $C'H_1$.

Поскольку $AH_1 \leqslant A'H_1$ и $CH_1 \leqslant C'H_1$, имеем $AC \leqslant A'C'$. Аналогично получаем $BC \leqslant B'C'$, $AD \leqslant A'D$ и $BD \leqslant B'D$. Заметим, что

$$CD^2 = H_1H_2^2 + (CH_1 \pm DH_2)^2 \text{ и } C'D^2 = H_1H_2^2 + (C'H_1 \pm DH_2)^2,$$

где в обоих равенствах выбирается знак плюс в случае, если точки C' и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, и в обоих равенствах выбирается знак минус в противном случае. Поскольку $DH_2 \leqslant CH_1 \leqslant C'H_1$, из последних равенств получаем $CD \leqslant C'D$. Наконец, по построению точек A' и B' имеем $AB \leqslant A'B'$. Таким образом, произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D не больше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A', B', C' и D.

Далее докажем, что если точка D лежит внутри треугольника ABC, вписанного в окружность ω, то найдётся такая точка D', что произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D меньше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D', причём эти четыре точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Поскольку сумма углов треугольника ABC равна 180°, а сумма углов ADB, BDC и CDA равна 360°, хотя бы одна из сумм $\angle ACB + \angle ADB$, $\angle BAC + \angle BDC$ или $\angle CBA + \angle CDA$ не меньше 180°. Без ограничения общности будем считать, что это сумма $\angle ACB + \angle ADB$. Тогда точка D', симметричная точке D относительно AB, лежит в круге окружности ω в силу того, что $\angle AD'B = \angle ADB \geqslant$ $\geqslant 180^\circ - \angle ACB$ (см. рис. 138). Нетрудно видеть, что при таком выборе точки D' имеем $AD = AD'$, $BD = BD'$. Прове-

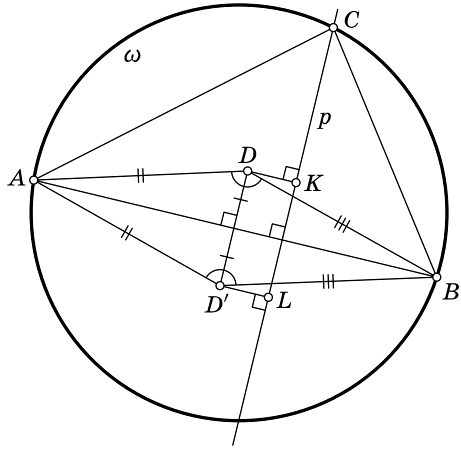


Рис. 138

дём через точку C прямую p перпендикулярно AB. Пусть K и L — ортогональные проекции точек D и D' на эту прямую. Прямые DD' и p перпендикулярны AB, а следовательно, параллельны между собой. Значит, $DK = D'L$ и, в силу неравенства $CK < CL$, получаем $CD < CD'$. Поэтому произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D меньше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D', причём эти четыре точки являются вершинами выпуклого четырёхугольника.

Наконец, докажем, что если точка D лежит в данном круге, но не лежит внутри треугольника ABC, вписанного в окружность ω, то на этой окружности найдётся такая точка D', что произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D не больше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D'. Проведём через точку D прямую q, перпендикулярную ближайшей к точке D стороне треугольника ABC. Без ограничения общности будем считать, что это сторона AB. Пусть H — точка пересечения q с этой стороной, а

D' — такая точка пересечения этой прямой с окружностью ω, что точка D лежит на отрезке $D'H$ (см. рис. 139). Тогда справедливы неравенства $AD \leqslant AD'$, $BD \leqslant BD'$ и $CD \leqslant CD'$. Значит, произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D не больше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D'.

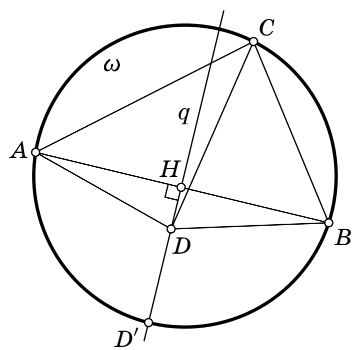


Рис. 139

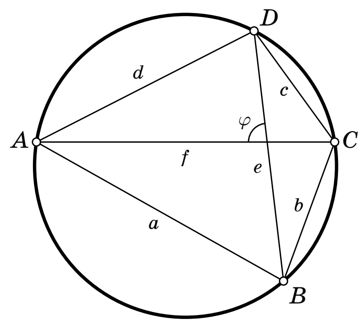


Рис. 140

Из доказанного следует, что для любых четырёх точек A, B, C и D, лежащих в данном круге, найдутся такие четыре точки A', B', C' и D', что четырёхугольник $A'B'C'D'$ вписан в окружность ω, а произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D не больше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A', B', C' и D'. Если при этом хотя бы одна из точек A, B, C или D не лежит на окружности ω, то произведение всех попарных расстояний между точками A, B, C и D будет меньше, чем произведение всех попарных расстояний между точками A', B', C' и D'.

Рассмотрим произвольный вписанный в окружность ω четырёхугольник $ABCD$. Введём обозначения: $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = AD$, $e = BD$, $f = AC$, φ — угол между AC и BD, R — радиус данного круга (см. рис. 140). По известной формуле имеем $ade = 4S_1R$, $bce = 4S_2R$, $abf = 4S_3R$, $cdf = 4S_4R$, где S_1, S_2, S_3 и S_4 — площади треугольников

ABD, BCD, ABC и ACD соответственно. Перемножая эти четыре равенства, извлекая квадратный корень и применяя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем

$$abcdef = 16R^2\sqrt{S_1S_2S_3S_4} \leqslant 4R^2(S_1+S_2)(S_3+S_4) = 4S^2R^2,$$

где S — площадь четырёхугольника $ABCD$ и неравенство обращается в равенство при $S_1=S_2$ и $S_3=S_4$. Согласно формуле площади четырёхугольника справедливо неравенство $S=\frac{1}{2}ef\sin\varphi\leqslant 2R^2$, которое обращается в равенство лишь в случае, когда диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и являются диаметрами данного круга. Значит, $abcdef\leqslant 16R^6$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $ABCD$ — квадрат.

Итак, для того чтобы попарное произведение всех расстояний между четырьмя точками в данном круге было максимальным, необходимо и достаточно, чтобы они были расположены в вершинах произвольного квадрата, вписанного в данный круг.

Комментарий. Желающим более детально разобраться в задачах на минимумы и максимумы в геометрии мы рекомендуем написанную специально для школьников брошюру [47].

Обратим внимание читателей, знакомых с понятием комплексного числа, на то, что предложенная задача является частным случаем следующей теоремы Исайи Шура: произведение

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}|z_i-z_j|^2,$$

где комплексные числа $z_1, \ldots, z_n$ таковы, что $|z_i|\leqslant 1$, $i=1, \ldots, n$, достигает своего максимального значения тогда и только тогда, когда z_i — корни некоторого многочлена вида $p(z)=z^n+c$, где c — такое комплексное число, что $|c|=1$; иными словами, тогда и только тогда, когда комплексные числа $z_1, \ldots, z_n$ образуют на комплексной плоскости правильный n-угольник, вписанный в единичную окружность.

Менее элементарно эту теорему можно сформулировать и так: среди всех комплексных многочленов степени n со старшим коэффициентом 1 и корнями, по модулю не превышающими единицы, наибольший модуль дискриминанта, равный n^n, имеют многочлены z^n+c, для которых $|c|=1$.

5. Рассмотрим в плоскости ACD такую точку B', что $AB' = AB$, $CB' = CB$ и точки B' и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC (см. рис. 141). Тогда треугольники $AB'C$ и ABC равны по трём сторонам и $\angle AB'C = \angle ABC = \beta$.

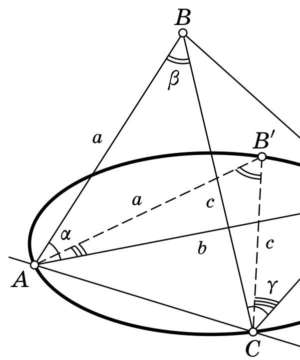


Рис. 141

Положим $a = AB = AB'$, $b = AD$, $c = CB = CB'$, $d = CD$, $\gamma = \angle B'CD$. Поскольку $\angle AB'C = \angle ADC = \beta$, а точки B' и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC, заключаем, что точки A, B', C, D лежат на одной окружности и $\angle B'AD = \angle B'CD = \gamma$ как опирающиеся на одну хорду $B'D$. По теореме косинусов в треугольниках $B'AD$ и $B'CD$ получаем

$$B'D^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2 + d^2 - 2cd\cos\gamma,$$

откуда

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab - cd)}.$$

Отметим, что число $\cos\gamma$ определено корректно, т. е. $ab - cd \neq 0$, так как в противном случае имеем $a/d = c/b$, что вместе с наличием в обоих треугольниках $AB'D$ и CDB' угла γ влечёт их подобие, но поскольку эти треугольники имеют общую сторону $B'D$, они равны, поэтому $AB' = CD$, но это противоречит условию $AB \neq CD$.

Применяя теорему косинусов в треугольниках BAD и BCD, получаем

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha,$$

откуда находим

$$\cos\alpha = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)} = \cos\gamma.$$

Оба угла α и γ меньше 180°, поэтому из равенства их косинусов получаем $\alpha=\gamma$. Следовательно, $BD=B'D$. Покажем, что отсюда следует совпадение точек B и B'.

Действительно, предположим, что это не так. Тогда геометрическим местом точек, равноудалённых от B и B', является плоскость, проходящая через середину отрезка BB' перпендикулярно ему, причём точки A, C и D лежат в этой плоскости, а точка B' не лежит. Пришли к противоречию с тем, что точка B' лежит в плоскости ACD.

Таким образом, точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Обозначим её радиус через R. По теореме синусов для треугольников ABC и BAD получаем

$$\frac{AC}{\sin\beta} = 2R = \frac{BD}{\sin\gamma} = \frac{BD}{\sin\alpha},$$

откуда находим искомое отношение:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

Комментарий. Обратим внимание на то, что условие $AB \neq CD$ является существенным. В самом деле, пусть треугольники ABC и ADC равны и являются равнобедренными с общим основанием AC. Тогда исходные условия задачи на равенство углов выполнены при различных положениях точек B и D, при этом значение отношения $AC:BD$ однозначно установить невозможно.

11 класс

1. *Первый способ*. Заметим, что выражение определено только при $1-y^2 \geqslant 0$ и $1-x^2 \geqslant 0$, что равносильно условиям $|y| \leqslant 1$ и $|x| \leqslant 1$. Следовательно, найдутся такие числа

φ и ψ из отрезка $[0;\pi]$, что $x=\cos\varphi$, $y=\cos\psi$. Тогда

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=\cos\varphi\sqrt{1-\cos^2\psi}+\cos\psi\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$
$$=\cos\varphi\,|\sin\psi|+\cos\psi\,|\sin\varphi|=\cos\varphi\sin\psi+\cos\psi\sin\varphi=$$
$$=\sin(\varphi+\psi)\leqslant 1,$$

что даёт оценку сверху для нашего выражения. Остаётся заметить, что равенство достигается, например, при $x=0$, $y=1$, откуда следует, что наибольшее значение выражения равно в точности 1.

Второй способ. Для всяких двух действительных чисел a и b справедливо неравенство

$$ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Воспользуемся этим неравенством для оценки заданного выражения:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\leqslant\frac{x^2+(1-y^2)}{2}+\frac{y^2+(1-x^2)}{2}=1.$$

Поскольку равенство достигается, например, при $x=1$, $y=0$, наибольшее значение выражения равно 1.

Комментарий. Нетрудно указать все пары чисел x и y, при которых исследуемое выражение достигает своего максимума. В первом решении, поскольку φ и ψ лежат на отрезке $[0;\pi]$, полученное нами неравенство $\sin(\varphi+\psi)\leqslant 1$ достигается тогда и только тогда, когда $\varphi+\psi=\pi/2$, т. е. при $x=\cos\varphi=\cos(\pi/2-\psi)=\sin\psi\geqslant 0$ и $y=\cos\psi=\cos(\pi/2-\varphi)=\sin\varphi\geqslant 0$, причём $x^2+y^2=\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$. Это означает, что точки $(x;y)$ пробегают лежащую в первой четверти часть единичной окружности с центром в начале координат.

Положенное в основу второго решения неравенство $ab\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$ обращается в равенство тогда и только тогда, когда $a=b$. Поэтому условия для достижения максимального значения выражения таковы:

$$\begin{cases} x=\sqrt{1-y^2};\\ y=\sqrt{1-x^2}, \end{cases}\quad\text{откуда}\quad \begin{cases} x,\,y\geqslant 0;\\ x^2+y^2=1, \end{cases}$$

что даёт все пары чисел $(x;y)$, при которых выражение достигает своего максимума.

2. Заметим сначала, что если функция $f(x)$, определённая на отрезке $[0;1]$, удовлетворяет тождеству $f(f(x))\equiv x^2$, то множество её значений должно содержаться в отрезке $[0;1]$, т. е. $f(x)\in[0;1]$ для всякого $x\in[0;1]$, иначе в некоторой точке $x\in[0;1]$ было бы невозможно найти значение функции $f(f(x))$.

Покажем, что равенства $f(x)=x$ и $f(x)=x^2$ не выполняются ни при каком $x\in(0;1)$. В самом деле, пусть $f(x_0)=x_0$ для некоторого числа $x_0\in(0;1)$. Тогда $x_0^2=f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$, что неверно при $x_0\in(0;1)$. Если же $f(x_0)=x_0^2$ для некоторого $x_0\in(0;1)$, то $x_0^2=f(f(x_0))=f(x_0^2)$, чего не может быть, так как $f(x)\neq x$ при всех $x\in(0;1)$, а $x_0^2\in(0;1)$.

Рассмотрим функцию $g(x)=f(x)-x$. Она определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$ и не обращается в нуль на интервале $(0;1)$. Значит, на этом интервале функция $g(x)$ сохраняет знак. Если $g(x)>0$ при $x\in(0;1)$, то на отрезке $[0;1]$ по непрерывности выполняется неравенство $g(x)\geqslant 0$. Поскольку $f(x)$ принимает значения только из отрезка $[0;1]$, получаем $g(f(x))\geqslant 0$ при $x\in(0;1)$, а значит, $x^2=f(f(x))\geqslant f(x)>x$, что неверно при $x\in(0;1)$. Тем самым, $g(x)<0$ при $x\in(0;1)$, т. е. $f(x)-x<0$ и одно из требуемых неравенств доказано.

Рассмотрим теперь функцию $h(x)=f(x)-x^2$. Она также определена и непрерывна на отрезке $[0;1]$ и не обращается в нуль на интервале $(0;1)$, поэтому на этом интервале она сохраняет знак. Если $h(x)<0$ при $x\in(0;1)$, то по непрерывности $h(x)\leqslant 0$ при $x\in[0;1]$, откуда получаем $h(f(x))\leqslant 0$ при $x\in(0;1)$, а следовательно, $x^2=f(f(x))\leqslant (f(x))^2<(x^2)^2$, что тоже не является верным при $x\in(0;1)$. Таким образом, $h(x)<0$ при $x\in(0;1)$, т. е. $f(x)-x^2>0$, и второе из требуемых неравенств доказано.

Примером функции, удовлетворяющей условиям задачи, служит функция $f(x)=x^{\sqrt{2}}$: эта функция определена на отрезке $[0;1]$, непрерывна, причём $f(f(x))=(x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=x^2$ при $x\in[0;1]$.

3. Обозначим стороны треугольника $AB=a$, $BC=b$, биссектрису $BL=l$ и угол $\angle ABL=\alpha$ (см. рис. 142). По условию $\angle LBC=2\angle LBM=2\angle MBC=\alpha$. Поскольку BM и BL — медианы в треугольниках ABC и ABM соответственно, получаем $AM=MC=2AL=2LM$. Применяя в треугольнике ABC теорему о биссектрисе, получаем соотношения

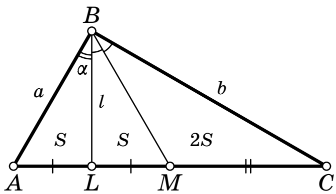


Рис. 142

$$\frac{a}{b}=\frac{AL}{LC}=\frac{1}{3},$$

откуда $b=3a$. Аналогично, применяя теорему в треугольнике LBC, имеем

$$\frac{l}{b}=\frac{LM}{MC}=\frac{1}{2},$$

следовательно, $b=2l$.

Треугольники ABL, LBM и MBC имеют общую высоту, опущенную из вершины B, поэтому площади этих треугольников относятся, как их основания, т. е. $S=S_{ABL}=S_{LBM}=S_{MBC}/2$. Пользуясь этим, запишем выражения для площадей

$$4S=S_{ABC}=\frac{a\cdot b}{2}\sin 2\alpha=\frac{a\cdot 3a}{2}\sin 2\alpha,$$
$$S=S_{ABL}=\frac{a\cdot l}{2}\sin\alpha=\frac{a\cdot 1{,}5a}{2}\sin\alpha,$$
$$3S=S_{LBC}=\frac{l\cdot b}{2}\sin\alpha=\frac{1{,}5a\cdot 3a}{2}\sin\alpha,$$

откуда следует равенство

$$\frac{a\cdot 3a}{2}\sin 2\alpha=\frac{a\cdot 1{,}5a}{2}\sin\alpha+\frac{1{,}5a\cdot 3a}{2}\sin\alpha,$$

преобразуя которое получаем $\sin 2\alpha=2\sin\alpha$, т. е.

$$2\sin\alpha\,(\cos\alpha-1)=0,$$

что невозможно, так как угол α острый.

4. Докажем сначала утверждение задачи для всех чисел вида 5^n, где n — натуральное число. Выберем из всех n-значных чисел, кратных 5^n, число l с наибольшим количеством m идущих подряд справа нечётных цифр. Покажем, что $m = n$, т. е. все n цифр числа l нечётны.

Пусть $m < n$. Число $l + 5^n \cdot 10^m$ кратно 5^n. Поделим это число на 10^n с остатком:

$$l + 5^n \cdot 10^m = 10^n \cdot q + r.$$

Заметим, что число r делится на 5^n. В самом деле, число r представляется в виде

$$r = l + 5^n \cdot 10^m - 10^n \cdot q,$$

причём каждое из слагаемых делится на 5^n. Поскольку последняя цифра числа 5^n всегда равна 5, т. е. является нечётной, число r имеет более m нечётных цифр подряд. Если число r является n-значным, то сразу получаем противоречие с максимальностью количества нечётных цифр для выбранного числа l. Если же в числе r меньше, чем n знаков, то достаточно рассмотреть n-значное число $r + 5 \cdot 10^{n-1}$, также делящееся на 5^n и имеющее более m нечётных цифр подряд, совпадающих с нечётными подряд идущими цифрами числа r.

Рассмотрим теперь случай произвольного нечётного числа. Любое нечётное натуральное число представимо в виде $5^n \cdot k$, где n — неотрицательное целое число, а k не кратно 5. Для любого натурального p положим $l_p = l(1 + 10^n + 10^{2n} + \ldots + 10^{(p-1)n})$ — число, в десятичной записи которого p раз подряд повторяется десятичная запись найденного выше числа l (в случае $n = 0$ считаем $l = 1$ и $l_p = 11\ldots1$ — число, десятичная запись которого состоит из p единиц). Рассмотрим остатки от деления на k чисел $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$. Поскольку количество возможных различных остатков равно k, среди рассмотренных $k + 1$ чисел $l_1, l_2, \ldots, l_{k+1}$ найдутся два числа l_i и l_j, остатки которых совпадают, а значит разность $l_i - l_j$ этих чисел делится на k.

Пусть $i > j$. Заметим, что $l_i - l_j = l_{i-j} \cdot 10^{nj}$ при $n > 0$, так как число l является n-значным, и $l_i - l_j = l_{i-j} \cdot 10^j$ при $n = 0$. Число k взаимно просто с 10 как нечётное число, не кратное 5, следовательно, число l_{i-j} делится на k. Кроме того, число l_{i-j} делится на 5^n и составлено только из нечётных цифр, так как число l_{i-j} есть записанное $i-j$ раз подряд число l, которое делится на 5^n и составлено только из нечётных цифр. Таким образом, искомое число, состоящее только из нечётных цифр и делящееся на $5^n \cdot k$, равно l_{i-j}.

Комментарий. С середины XX века и по сегодняшний день на многих математических кружках предлагается уже ставшая фольклорной задача: доказать, что для всякого числа, не делящегося на 2 и на 5, найдётся кратное ему число, десятичная запись которого состоит только из цифры 1. Доказательство этого утверждения является частью приведённого выше решения.

На 1-й Всесоюзной олимпиаде (1967 г.) школьникам 8–9 классов была предложена следующая задача (см. [10, задача 88]): доказать, что для любого натурального числа n найдётся число, кратное 5^n, все десятичные цифры которого отличны от нуля.

Дальнейшее развитие эта идея получила на 5-й Всесоюзной олимпиаде (1971 г.), на которой школьникам 8 класса предлагалось доказать (см. [10, задача 144]), что для любого натурального числа n найдётся число, составленное только из цифр 1 и 2, делящееся на 2^n. Решение этой задачи можно провести, используя метод математической индукции.

Аналогичным образом решается и следующая задача (которую можно использовать в качестве леммы при решении задачи 4 для 11 класса 1990 г.): для любого натурального числа n существует число, делящееся на 5^n, все цифры которого есть только 1, 2, 3, 4, 5.

Поскольку для всякого натурального N, взаимно простого с 10, найдётся такое сколь угодно большое натуральное число n, что $1 + 10^n + 10^{2n} + \ldots$ делится на N (так как $10^n - 1$ при некотором n кратно N), из предыдущих утверждений следует, что если n нечётно, то существует кратное ему число, все цифры которого есть только 1, 2, 3, 4, 5, а если n не делится на 5, то существует кратное ему число, все цифры которого есть только 1 и 2.

Интересующемуся читателю предлагаем доказать следующие более общие утверждения: 1) для любого нечётного числа n найдётся кратное ему число, в десятичной записи которого есть только: а) цифры от 1 до 5; б) цифры от 5 до 9; в) нечётные цифры; 2) для любого не кратного 5 числа n найдётся кратное ему число, в десятичной записи которого есть только а) цифры 1, 2; б) цифры 3, 4; и т. д.

5. Рассмотрим четыре произвольные плоскости в пространстве. Они являются плоскостями граней некоторого тетраэдра тогда и только тогда, когда каждые три плоскости пересекаются в одной точке, и в то же время все четыре плоскости не проходят через одну точку. Действительно, при этих условиях четыре тройки, составленные из этих четырёх плоскостей, пересекаются в четырёх различных точках, которые и являются вершинами тетраэдра. Поскольку три плоскости пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда они не параллельны одной прямой, получаем, что четыре произвольные плоскости в пространстве являются плоскостями граней некоторого тетраэдра тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:

а) никакие три плоскости не параллельны одной прямой;

б) четыре плоскости не имеют общей точки.

Пусть A_1, A_2, A_3, A_4 — заданные четыре точки в пространстве. Выберем некоторую точку O (отличную от заданных точек) и проведём через каждую точку A_i плоскость α_i, перпендикулярную отрезку A_iO. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 могут служить проекциями точки O на четыре плоскости граней тетраэдра тогда и только тогда, когда четыре плоскости α_1, α_2, α_3 и α_4 являются плоскостями граней тетраэдра, т. е. тогда и только тогда, когда плоскости α_1, α_2, α_3 и α_4 удовлетворяют условиям а) и б). Покажем, что это бывает тогда и только тогда, когда никакие три из точек A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат на одной прямой и все четыре точки не лежат на одной окружности.

В самом деле, если три точки, скажем A_1, A_2, A_3, лежат на одной прямой, то плоскости α_1, α_2, α_3 параллельны произвольной прямой, перпендикулярной плоскости точек A_1, A_2, A_3, O, а значит, условие а) не выполняется. Если же все четыре точки лежат на одной окружности, то либо O принадлежит плоскости этой окружности, и в этом случае все плоскости α_i параллельны перпендикуляру к этой плоскости, что вновь противоречит условию а), либо эта окружность и точка O лежат на некоторой сфере. Тогда можно заметить, что все плоскости α_i проходят через точку сферы, диаметрально противоположную точке O, что противоречит условию б).

Обратно: если никакие три из точек A_i не лежат на одной прямой, то можно выбрать точку O так, что никакие три из отрезков A_iO не будут лежать в одной плоскости, что гарантирует выполнение условия а) для плоскостей α_1, α_2, α_3, α_4. Одновременно с этим, если все четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 не лежат на одной окружности, можно выбрать точку O так, что точки A_1, A_2, A_3, A_4, O не будут лежать на одной сфере, что гарантирует выполнение условия б).

Таким образом, четыре точки в пространстве могут служить проекциями какой-либо точки на четыре плоскости граней некоторого тетраэдра тогда и только тогда, когда никакие три точки не лежат на одной прямой, и все четыре точки не лежат на одной окружности.

1991 год (*LIV олимпиада*)

8 класс

1. Раскладывая данное выражение на множители, получаем

$$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$$
$$=a^2(b-c)-ab^2+ac^2+b^2c-bc^2=$$
$$=a^2(b-c)-a(b-c)(b+c)+bc(b-c)=$$
$$=(b-c)(a^2-a(b+c)+bc)=(b-c)(a-b)(a-c)>0,$$

так как по условию $b>c$, $a>b$, $a>c$.

2. Для данной точки X будем обозначать через X' точку, симметричную ей относительно точки B. Требование задачи состоит в том, чтобы построить точку $C=A'$, пользуясь только циркулем раствора r. Заметим сначала, что если $AB = r$, то искомую точку $C = A'$ можно построить так, как показано на рис. 143: начертив окружность с центром в точке B (она пройдёт через точку A), последовательно находим на ней точки D, E и A', где $AB = AD = DE = EA' = BA' = r$.

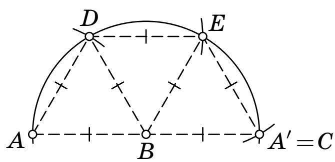


Рис. 143

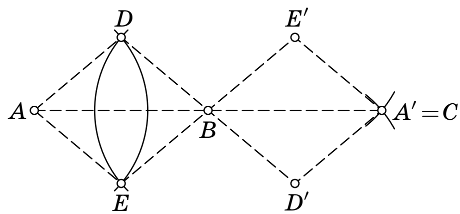


Рис. 144

а) Пусть $AB < 2r$. Тогда построим две точки D и E на пересечении окружностей радиусов r с центрами в точках A и B. Поскольку $BD = BE = r$, то как и выше, мы можем построить симметричные им точки D' и E'. Но тогда искомая точка A' является точкой пересечения окружностей радиуса r с центрами в точках D' и E', отличной от B (см. рис. 144).

б) Пусть теперь $AB \geqslant 2r$. Выбирая любую точку на расстоянии r от точки A, мы можем построить правильный треугольник со стороной r, двумя из вершин которого являются эти точки. Затем выбирая только что построенную точку и одну из предыдущих, можно построить ещё один правильный треугольник, и т. д. Таким способом можно построить на плоскости любые точки, лежащие в узлах получающейся решётки из правильных треугольников. Расстояние от точки B до вершин правильного треугольника этой решётки, в который она попадает, не превосходит r, поэтому этот треугольник полностью лежит в круге с центром в точке B и радиусом r. Пусть D и E — две из вершин этого треугольника (см. рис. 145). Поскольку расстояния от этих точек до B меньше $2r$, можно воспользоваться построением из пункта а) и найти симметричные им точки

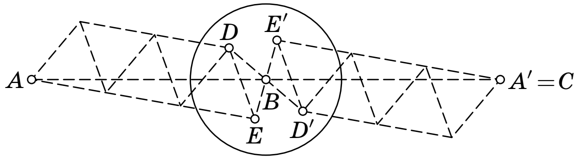


Рис. 145

D' и E'. Осталось от этих точек построить симметричную сеть вершин правильных треугольников, которая и приведёт к искомой точке A'.

Комментарий. Особенностью данной задачи на построение является то, что раствор циркуля фиксирован. Если раствор не фиксировать, то известная теорема Мора—Маскерони утверждает, что одним циркулем можно выполнить любое построение, в котором используется также и линейка (см. [71, с. 167]).

3. Четырёх дежурных хватит, если каждый будет дежурить одни сутки и отдыхать трое суток.

Докажем, что трёх дежурных недостаточно. Предположим, что это не так, т. е. трое дежурных смогут обеспечить круглосуточную охрану объекта с соблюдением условия задачи.

Пусть S суток — суммарная длительность отдыха, положенного всем трём дежурным на данный момент времени.

По окончании дневной смены дежурившему в эту смену полагаются не менее одних суток отдыха, а у каждого из двух других оставшееся время отдыха уменьшается на 0,5 суток (по сравнению с моментом начала дневной смены), поэтому за время дневной смены значение S не может уменьшиться.

По окончании ночной смены дежурившему в эту смену полагаются не менее полутора суток отдыха, а у каждого из двух других оставшееся время отдыха уменьшается на 0,5 суток (по сравнению с моментом начала ночной смены), поэтому за время ночной смены значение S увеличивается не менее чем на 0,5 суток.

Суточную смену можно считать двумя сменами подряд, поэтому по её окончании значение S увеличивается не менее чем на 0,5 суток.

Таким образом, за 15 ночных и суточных смен суммарная длительность отдыха, положенного всем трём дежурным, превысит 7,5 суток. Следовательно, хотя бы одному из них будет положено отдыхать более 2,5 суток.

Остаётся показать, что двое дежурных не могут обеспечить круглосуточную охрану объекта длительностью более 2,5 суток. В самом деле, поскольку наименьшая возможная длительность отдыха равна наибольшей продолжительности одной смены, т. е. одним суткам, чтобы первый дежурный потом смог сменить второго, он должен отработать именно дневную смену, затем второй дежурный должен дежурить сутки, но тогда по окончании ещё одних суток первый уже не сможет продолжать дежурить, а второй ещё не сможет его сменить.

4. Если выполнено соотношение $x_1+x_2+x_3=x_6$, то из неравенств

$$x_1+x_2+x_3 \geqslant 1+2+3=6 \geqslant x_6$$

следует, что $x_6=6$ и x_1, x_2, x_3 равны в каком-то порядке 1, 2 и 3, тогда оставшиеся два числа x_4, x_5 равны в каком-то порядке 4 и 5. Если выполнено и второе условие $x_1+x_6<x_3+x_5$, то, поскольку $x_1\geqslant 1$, $x_3\leqslant 3$, $x_5\leqslant 5$, получаем неравенства

$$7\leqslant x_1+x_6<x_3+x_5\leqslant 8,$$

откуда $x_1+x_6=7$, $x_3+x_5=8$. Это возможно лишь в случае, если $x_1=1$, $x_3=3$, $x_5=5$, и тогда $x_2=2$, $x_4=4$, т. е. $x_k=k$ при всех значениях $k=1, \ldots, 6$.

5. Для каждого города A первой страны обозначим через $M(A)$ множество всех городов второй страны, в которые есть рейс из A (тогда из остальных городов второй страны, не входящих в $M(A)$, можно, наоборот, вылететь в A). По условию, из каждого города первой страны можно вылететь в какой-то из городов второй страны, поэтому каждое такое множество $M(A)$ непусто, т. е. содержит хотя бы один город. Если предположить, что для любых двух таких множеств одно содержится в другом, то тогда множество, в котором наименьшее число городов, содержится в любом из остальных. Потому в какой-нибудь город, принадлежащий этому множеству, есть рейс из каждого города первой страны, но ни в один из них нет обратного рейса, что противоречит условию задачи. Значит, это предположение неверно, и найдутся два таких множества $M(A)$ и $M(C)$, что в первом есть город B, не принадлежащий второму, и наоборот, во втором есть город D, не принадлежащий первому (см. рис. 146). Тогда из A можно вылететь в B, из B — в C, из C — в D, из D — в A. Тем самым искомая четвёрка городов найдена.

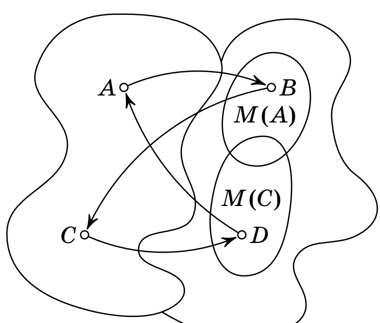


Рис. 146

К о м м е н т а р и й. Схема авиасообщения, описанная в условии этой задачи, представляет собой пример *ориентированного графа*. Подробнее о них можно почитать в книге [41, гл. V—VI]. Одну из теорем об ориентированных графах из этой книги можно сформулировать так: если в некоторой стране все города попарно соединены рейсами, но только в одном направлении, и из каждого множества городов можно одним из рейсов вылететь в город не из этого множества, то существует циклический маршрут, по которому можно облететь все города страны.

9 класс

1. Чтобы воспользоваться формулой

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1),$$

сначала непосредственно проверим, что $x = 1$ не является корнем уравнения: $3 \cdot 11 \neq 7^2$. При $x \neq 1$ умножим обе части уравнения на $(x-1)^2$ и проведём равносильные преобразования:

$$(x^3 - 1)(x^{11} - 1) = (x^7 - 1)^2;$$
$$x^{14} - x^{11} - x^3 + 1 = x^{14} - 2x^7 + 1;$$
$$x^3(x^4 - 1)^2 = 0,$$

откуда $x = -1;\ 0$.

2. а) Пусть при первой раскладке фокусник разложил все карты на кучки по 1, 2, ..., 8 карт (тогда будут разложены все $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$ карт), а при второй в одну кучку взял по одной карте с разными номерами (всего 8 штук), в следующую — по одной карте с разными номерами из оставшихся (всего 7 штук), и т. д. Тогда среди пар чисел, записанных на картах, нет одинаковых, а для каждой пары (m, n) можно найти пару (n, m).

Наглядно это можно представить следующим образом: если на некоторой карте после двух раскладок написана пара чисел (m, n), то разместим её в прямоугольной таблице на пересечении строки с номером n и столбца с номером m. При этом в каждой строке и в каждом столбце число карт кратно номеру строки или номеру столбца соответственно. Пара раскладок удовлетворяет условию задачи, если в этой таблице все 36 карт окажутся на разных местах, причём симметрично относительно диагонали (мест, в которых номер строки равен номеру столбца). Таблица, соответствующая описанному выше варианту двух раскладок, изображена на рис. 147, где крестиками отмечены занятые картами ячейки.

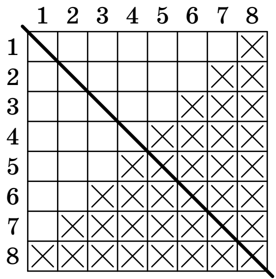


Рис. 147

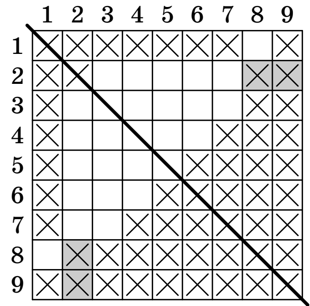


Рис. 148

б) Покажем, как фокусник может дважды разложить 54 карты так, чтобы условие задачи было выполнено. Пример двух подходящих раскладок проиллюстрирован на рис. 148. На нём изображена таблица 9×9, в которой 54 ячейки отмечены крестиками. Пусть каждой из 54 карт соответствует своя отмеченная ячейка. Для удобства будем считать, что каждая карта лежит в соответствующей ей ячейке. При первой раскладке все карты из первой строки разложим на 8 кучек по одной карте, карты из двух закрашенных ячеек второй строки положим вместе в одну кучку из двух карт, карты из двух незакрашенных ячеек второй строки — в другую кучку из двух карт, составим ещё семь кучек из карт каждой из оставшихся строк. При второй раскладке составим такие же кучки, используя теперь номера столбцов вместо строк (сначала все карты из первого столбца разложим на 8 кучек по одной карте, карты из двух закрашенных ячеек второго столбца положим вместе в одну кучу из двух карт, и т. д.). При таких раскладках на каждой из карт будет написано два числа: сначала номер её строки, а потом номер её столбца. Поскольку в этой таблице каждой ячейке сопоставлено по одной карте, а сами ячейки отмечены крестиками симметрично относительно её диагонали, среди пар чисел, записанных на картах, нет одинаковых, а для каждой пары (m, n) можно найти пару (n, m).

3. Рассмотрим треугольник $A_3A_5A_{11}$ (рис. 149). Прямые A_3A_8, A_5A_1 и $A_{11}A_4$ являются биссектрисами его углов, так как дуги A_5A_8 и A_8A_{11} описанной окружности (соответственно, $A_{11}A_1$ и A_1A_3, A_3A_4 и A_4A_5) равны, а значит, равны и вписанные в них углы. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, поэтому диагональ A_1A_5 проходит через точку O пересечения диагоналей A_3A_8 и A_4A_{11}. Рассматривая треугольник $A_2A_4A_8$, аналогично получаем, что прямые A_2A_6, A_4A_{11} и A_8A_3 являются биссектрисами его углов и также проходят через одну точку, поэтому диагональ A_2A_6 также проходит через точку O.

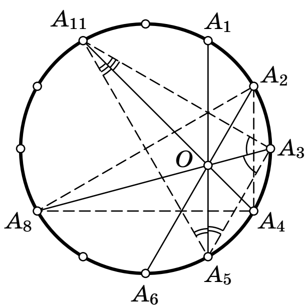


Рис. 149

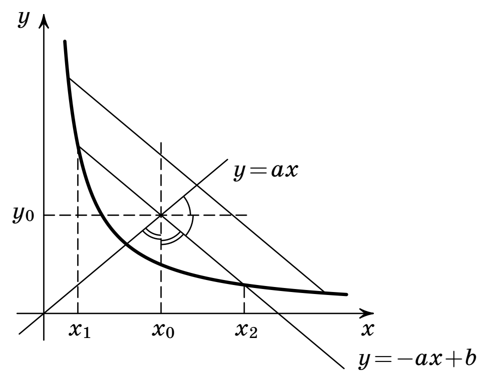


Рис. 150

4. Покажем, что середины любых хорд к гиперболе $y=1/x$, $x>0$, параллельных фиксированной прямой $y=-ax$, лежат на прямой $y=ax$. Действительно, если хорда лежит на прямой $y=-ax+b$ (см. рис. 150), то абсциссы x_1 и x_2 её концов удовлетворяют уравнению

$$-ax+b=\frac{1}{x}, \quad \text{или} \quad ax^2-bx+1=0,$$

а середина хорды имеет координаты

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{и} \quad y_0=\frac{1/x_1+1/x_2}{2}=\frac{x_1+x_2}{2x_1x_2}=ax_0,$$

так как по теореме Виета $x_1x_2=1/a$. Таким образом, если провести прямую через середины пары параллельных хорд[1], то она пройдёт через начало координат, причём её угловой коэффициент будет таким же по модулю, но противоположным по знаку по отношению к угловому коэффициенту пары хорд. Биссектрисы углов между этой прямой и любой из этих хорд параллельны осям координат. Если выбрать какую-нибудь другую пару параллельных хорд (не параллельных первой паре) и также провести прямую через их середины, то в пересечении с первой прямой получим начало координат. Проводя через него прямые, параллельные биссектрисам углов в пересечении этой прямой с парой хорд, получим координатные оси. Поскольку изначально была дана ветвь гиперболы $y=1/x$ при $x>0$, оси должны быть направлены в стороны сближения с гиперболой.

Комментарий. Известна также задача о восстановлении с помощью циркуля и линейки осей координат для стандартной параболы $y=x^2$, предлагавшаяся в 1982 г. на Всесоюзной математической олимпиаде (см. [10, задача 339]), а также в 1996 г. на Турнире городов.

5. Если заменить все числа в указанной таблице числами ± 1 в соответствии со знаками исходных чисел, то таблица по-прежнему будет удовлетворять условию задачи. Таблицу $m\times n$, в которой расставлены числа ± 1 и каждое число равно произведению соседних, назовём *пригодной*. Докажем, что любая пригодная таблица $m\times 15$, где $m=1, 3, 7, 15$, заполнена лишь одними единицами, т. е. тривиальна.

Покажем сначала, что пригодная таблица 1×15 тривиальна. Действительно, если в какой-то из её концевых клеток стоит число -1, то в соседней также стоит -1, а в следующей 1, и далее этот блок повторяется. Поскольку число 15, равное количеству клеток, делится на 3, в другой

[1] Построение с помощью циркуля и линейки прямой, параллельной данной, а также середины заданного отрезка производится стандартным образом.

концевой клетке стоит число 1. Но тогда в единственной соседней с ней клетке также должно быть число 1, а это не так. Следовательно, пригодная таблица 1×15 может быть заполнена лишь единицами.

Допустим, что существует пригодная нетривиальная таблица 15×15. Если она симметрична относительно средней строки, то в этой строке каждое число совпадает с произведением соседей по горизонтали, т. е. является пригодной таблицей 1×15. По уже доказанному все числа в ней равны 1. Тогда над этой строкой располагается пригодная нетривиальная таблица 7×15. Если же таблица 15×15 не симметрична относительно средней строки, то каждое число в таблице 7×15 над средней строкой умножим на число, симметричное ему относительно средней строки. Полученная таблица 7×15 будет нетривиальной, иначе исходная таблица была бы симметрична. Кроме того, такая таблица также пригодна. В самом деле, для всех чисел над её нижней строкой это очевидно, а для каждого числа из нижней строки это выполнено, так как знак соседнего числа из средней строки при описанной операции был учтён дважды, и поэтому не влияет на знак этого числа.

Итак, из существования пригодной нетривиальной таблицы 15×15 мы вывели существование такой таблицы 7×15. Рассуждая аналогично, найдём пригодную нетривиальную таблицу 3×15, а затем и 1×15. Противоречие.

Комментарий. Заменяя -1 на 1, а 1 на 0, можно эту задачу переформулировать как задачу о таблице из 0 и 1 (такие таблицы называют *булевыми матрицами* в честь английского математика Дж. Буля), в которой каждое число равно сумме по модулю два его соседей (операция сложения по модулю два отличается от обычного сложения равенством $1+1=0$): требуется доказать, что эта матрица нулевая. Также эту задачу можно сформулировать как задачу о решении некоторой системы из 225 линейных уравнений с 225 неизвестными из поля, содержащего только 0 и 1. Подобные задачи часто возникают в теории кодирования и криптографии. Приведённое решение, очевидно, проходит и в случае, если заменить 15 на $2^n - 1$. Однако для таблиц 5×5 или 11×11 утверждение задачи неверно.

10 класс

1. а) Запишем равенство из условия задачи при $x=0$ и $x=1$:

$$f(0)+\frac{1}{2}f(1)=1,$$

$$f(1)+\frac{3}{2}f(0)=1.$$

Вычитая из удвоенного первого равенства второе, получим $\frac{1}{2}f(0)=1$, откуда $f(0)=2$. Следовательно, $f(1)=1-3=-2$.

б) Подставляя вместо x выражение $1-x$, получаем ещё одно тождество

$$f(1-x)+\left(\frac{3}{2}-x\right)\cdot f(x)=1.$$

Выразим из него $f(1-x)$ и подставим в исходное:

$$f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)\cdot f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)=1,$$

откуда при $x\neq\frac{1}{2}$ получаем

$$f(x)=\frac{1/2-x}{1+(x+1/2)(x-3/2)}=\frac{1/2-x}{x^2-x+1/4}=\frac{1}{1/2-x}.$$

Оставшееся значение $f(1/2)$ находим подстановкой $x=1/2$ в исходное тождество: $f(1/2)+(1/2+1/2)\cdot f(1/2)=1$, откуда $f(1/2)=1/2$. Найденная функция является единственной, удовлетворяющей условию задачи.

2. Удвоенное число точек касания при расположении n шаров указанным в задаче способом равно $3n$, поэтому n чётно, причём $n>2$. Значение $n=4$ удовлетворяет условию задачи, так как четыре шара можно расположить требуемым образом так, чтобы их центры лежали в вершинах правильного тетраэдра с ребром $a=2r$, где r — радиус каждого шара. Пусть теперь $n=2k$, $k>2$. Тогда расположим $2k$ шаров так, чтобы их центры лежали в вершинах правильной k-угольной призмы, у которой все рёбра также равны $a = 2r$. Каждый из шаров при таком расположении касается ровно трёх других: двух шаров с центрами в соседних вершинах k-угольника, лежащего в том же основании, и одного шара с центром в соответствующей вершине k-угольника, лежащего в другом основании. Таким образом, все чётные значения $n > 4$ также годятся.

3. *Первый способ*. Пусть O — вершина угла, O_1 и O_2 — центры меньшего и большего кругов соответственно, D и E — их соответствующие точки касания с прямой BC, P и Q — точки пересечения прямой BC с прямыми AO_1 и AO_2 соответственно, H — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A (см. рис. 151).

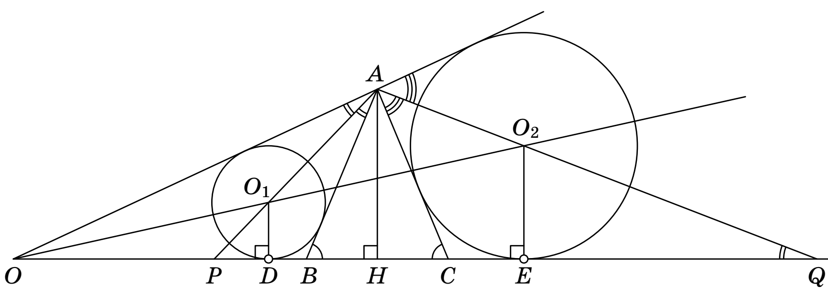


Рис. 151

Из условия следует, что точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе этого угла и луч AO_1 является биссектрисой угла OAB, а луч AO_2 является биссектрисой угла, смежного с углом OAC. Следовательно, $\angle BAC = 180^\circ - 2(\angle OAP + \angle CAQ)$. С другой стороны, $\angle BAC = 180^\circ - 2\angle BCA$. Значит, $\angle BCA = \angle OAP + \angle CAQ$. По теореме о внешнем угле треугольника для CAQ также получаем $\angle BCA = \angle CQA + \angle CAQ$. Поэтому $\angle OAP = \angle CQA$. Тогда треугольники OAP и OQA подобны по двум углам и, следовательно, $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{OQ}{OA}$. По свойству биссектрис треугольников OAP и OQA также имеем $\dfrac{OA}{OP} = \dfrac{AO_1}{O_1P}$

и $\dfrac{OQ}{OA}=\dfrac{QO_2}{O_2A}$. Отсюда следует, что $\dfrac{AO_1}{O_1P}=\dfrac{QO_2}{O_2A}$ и

$$\frac{PO_1}{PA}+\frac{QO_2}{QA}=\frac{1}{\frac{AO_1}{O_1P}+1}+\frac{\frac{QO_2}{O_2A}}{\frac{QO_2}{O_2A}+1}=\frac{1}{\frac{AO_1}{O_1P}+1}+\frac{\frac{AO_1}{O_1P}}{\frac{AO_1}{O_1P}+1}=1.$$

Далее, прямоугольные треугольники PO_1D и PAH подобны, и аналогично подобны треугольники QO_2E и QAH. Значит, $\dfrac{PO_1}{PA}=\dfrac{O_1D}{AH}$ и $\dfrac{QO_2}{QA}=\dfrac{O_2E}{AH}$. Следовательно, $\dfrac{O_1D}{AH}+\dfrac{O_2E}{AH}=$ $=1$, откуда $AH=O_1D+O_2E$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть, как и в предыдущем решении, O — вершина угла и соответственно O_1 и O_2 — центры меньшего и большего кругов, D и E — точки касания этих кругов со стороной угла, на которой лежит отрезок BC, H — основание высоты треугольника ABC, опущенной из вершины A. Пусть также r и R — радиусы меньшего и большего кругов соответственно. Обозначим через F и G точки касания этих кругов с другой стороной угла, а через K и L — точки касания со сторонами AB и BC треугольника ABC (см. рис. 152).

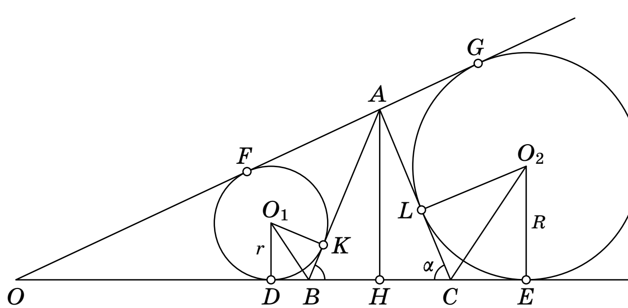


Рис. 152

Поскольку треугольник ABC равнобедренный, углы при его основании равны. Обозначим $\alpha=\angle ABC=\angle ACB$. Отрезки касательных к окружности, проведённых из одной точки, равны, поэтому

$$FG = OG - OF = OE - OD = DE,$$

$$BD + CE + BC = DE = FG = AF + AG = AK + AL =$$
$$= AB - BK + AC - CL = 2AB - BD - CE,$$

откуда

$$BD + CE = AB - \frac{BC}{2} = AB - BH = AB - AB\cos\alpha =$$
$$= AB(1 - \cos\alpha).$$

Далее, $\angle O_1BD = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle O_2CE$, значит $\angle BO_1D = \angle CO_2E = \frac{\alpha}{2}$, поэтому из треугольников O_1BD и O_2CE находим

$$r + R = O_1D + O_2E = BD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + CE\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = (BD + CE)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} =$$
$$= AB(1 - \cos\alpha)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = AB\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} =$$
$$= AB\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = AB\sin\alpha = AH,$$

что и требовалось доказать.

Это решение можно окончить иначе. Пусть уже доказано, что

$$r + R = (BD + CE)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \left(AB - \frac{BC}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, сумма радиусов зависит только от сторон и углов треугольника ABC и не зависит от величины угла, в который вписаны круги. Рассмотрим предельную ситуацию, когда радиусы кругов равны, а угол вырождается в пару параллельных прямых (см. рис. 153). Для неё сумма радиусов равна диаметру каждой из окружностей и равна высоте треугольни-

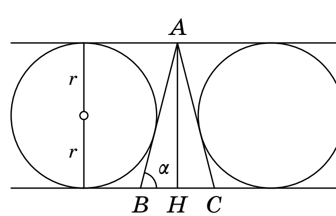


Рис. 153

ка ABC, опущенной из вершины A. Значит, этой же величине равна сумма радиусов и в общем случае, когда радиусы различны.

4. Пусть $ABCDEFGH$ — данный в условии задачи куб. Будем считать, что угловой кубик при вершине A чёрный. Разрежем весь куб на куски размера $2 \times 2 \times 2$ и разобьём все чёрные кубики на 4 множества M_A, M_C, M_F и M_H следующим образом: к каждому из этих множеств отнесём все чёрные кубики, расположенные относительно своего куска так же, как соответствующий угловой кубик относительно исходного куба (см. рис. 154). Например, в множество M_A попадут все чёрные кубики, стоящие на рисунке в левом нижнем углу своего куска $2 \times 2 \times 2$. Аналогичным образом определим множества M_B, M_D, M_E и M_G белых кубиков.

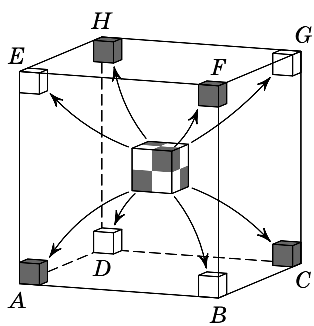


Рис. 154

Докажем, что из каждого множества M_A, M_C, M_F и M_H вынуто по одинаковому количеству чёрных кубиков, откуда и будет следовать, что общее количество вынутых чёрных кубиков делится на 4. В самом деле, множества M_A и M_B заполняют 25 рядов, параллельных ребру AB, поэтому из них в общей сложности вынуто 25 кубиков. Аналогично из множеств M_B и M_C также вынуто в общей сложности 25 кубиков. Поскольку все кубики, вынутые из множества M_B, — белые, из множества M_A вынуто столько же кубиков, сколько из множества M_C. Повторяя это рассуждение с заменой множества M_C на множества M_F и M_H, убеждаемся, что из каждого из них вынуто столько же кубиков, сколько из M_A. Таким образом, общее число вынутых чёрных кубиков вчетверо больше количества кубиков, вынутых из M_A, а значит, делится на 4.

5. Покажем, что фокусник мог добиться нужного результата за три раскладки. Пусть первые две раскладки таковы, что среди упорядоченных пар чисел, написанных после этого на картах, нет одинаковых, но для каждой пары (m, n) можно найти пару (n, m). Возможный способ такой пары раскладок приведён в решении задачи 2 б) для 9 класса и проиллюстрирован таблицей на рис. 148 к решению этой задачи. Поскольку номера после первой и второй раскладок зритель мог расположить на карте в разном порядке, при $m \neq n$ множество чисел $\{m, n\}$ будет соответствовать двум картам. При третьей раскладке фокусник может разложить все карты на две кучки так, чтобы такие карты попали в разные кучки, а затем в одну из кучек добавить оставшиеся карты, на которых написаны пары чисел (n, n), $n = 9, 8, 7, 6, 2, 1$ (например, в одну кучку сложить карты, находящиеся в таблице над диагональю и на ней, а в другую — стоящие под диагональю). Тогда в одной кучке окажется 24 карты, а в другой 30, так что ранее неразличимые пары (m, n) и (n, m), где $m < n \leqslant 9$, станут различными тройками $\{m, n, 30\}$ и $\{n, m, 24\}$.

Докажем теперь, что двух раскладок недостаточно. Действительно, предположим, что существуют такие две раскладки, после которых на всех картах оказались написаны разные множества чисел. Проиллюстрируем эти раскладки таблицей размера $k \times k$, где k — число карт в наибольшей из всех кучек, образованных при этих раскладках, $k > 1$. Пусть натуральные числа m и n пробегают все значения от 1 до k. Если найдётся такая карта, на которой при первой раскладке написали число m, а при второй — n, то отметим общую ячейку m-й строки и n-го столбца крестиком, иначе оставим эту ячейку пустой (см. рис. 155). Поскольку при этих раскладках была образована кучка из k карт, либо в k-й строке, либо в k-м столбце найдётся отмеченная крестиком ячейка. По предположению на всех k картах из этой кучки написаны разные множества чисел, поэтому отмечены крестиками и все другие ячейки этой строки или этого столбца. Значит, отмечена крестиком и ячейка на пересечении k-й строки и k-го столбца. Аналогичные рассуждения показывают, что тогда отмечены крестиками все ячейки как k-й строки, так и k-го столбца. Следовательно, найдутся две разные карты, на которых написано множество чисел $\{1, k\}$. Пришли к противоречию.

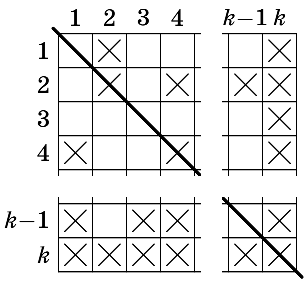


Рис. 155

11 класс

1. Если поставить знак «+» (или «×») между k-й и $(k+1)$-й цифрами данного числа, то слагаемые (соответственно, множители) будут иметь вид

$$1\underbrace{9\ldots9}_{k-1 \text{ девяток}} = 2\cdot10^{k-1}-1 \quad \text{и} \quad \underbrace{9\ldots9}_{1992-k \text{ девяток}}1 = 10^{1993-k}-9.$$

а) Сумма получившихся чисел равна $2\cdot10^{k-1}+10^{1993-k}-$ $-10=f(10^{k-1})-10$, где $f(x)=2x+\dfrac{10^{1992}}{x}$. Анализируя знак производной

$$f'(x)=2-\frac{10^{1992}}{x^2}=\left(\sqrt{2}-\frac{10^{996}}{x}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{10^{996}}{x}\right),$$

получаем, что функция $f(x)$ возрастает при $x\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}10^{996}$ (в частности, при $x\geqslant10^{996}$) и убывает при $0<x\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}10^{996}$ (в частности, при $0<x\leqslant10^{995}$). Значит, достаточно срав-

нить значения $f(10^{996})$ и $f(10^{995})$:

$$f(10^{996}) = 2\cdot 10^{996} + 10^{996} = 3\cdot 10^{996},$$
$$f(10^{995}) = 2\cdot 10^{995} + 10^{997} > 10^{997} = 10\cdot 10^{996} > f(10^{996}).$$

Итак, наименьшим среди значений $f(10^{k-1})$ является значение, соответствующее $k-1=996$, т. е. $k=997$.

б) Произведение получившихся чисел равно

$$(2\cdot 10^{k-1}-1)(10^{1993-k}-9) = 2\cdot 10^{1992}+9-18\cdot 10^{k-1} - \\ -10^{1993-k} = 2\cdot 10^{1992}+9-g(10^{k-1}),$$

где $g(x)=18x+\dfrac{10^{1992}}{x}$. Оно будет наибольшим при наименьшем значении $g(10^{k-1})$. Как и в предыдущем пункте, по знаку производной определяем, что функция $g(x)$ возрастает при $x\geqslant\dfrac{1}{3\sqrt{2}}10^{996}$ (в частности, при $x\geqslant 10^{996}$) и убывает при $0<x\leqslant\dfrac{1}{3\sqrt{2}}10^{996}$ (в частности, при $0<x\leqslant 10^{995}$). Сравним значения $g(10^{996})$ и $g(10^{995})$:

$$g(10^{996}) = 18\cdot 10^{996} + 10^{996} = 19\cdot 10^{996},$$
$$g(10^{995}) = 18\cdot 10^{995} + 10^{997} = 11{,}8\cdot 10^{996} < g(10^{996}).$$

Таким образом, в этом случае наименьшим среди значений $g(10^{k-1})$ является таковое при $k=996$.

2. Соединим точки A и B отрезком и проведём через его середину O перпендикулярную прямую. Искомая проекция северного полюса лежит на этой прямой на некотором расстоянии x от точки O. Будем называть всякую прямую пространства *вертикальной*, если она параллельна этой прямой, и *горизонтальной*, если она ей перпендикулярна. Для решения задачи достаточно построить отрезок длины x.

Пусть R — радиус земного шара, a — расстояние от точки O до каждой из двух точек пересечения проведённого перпендикуляра с проекцией экватора (см. рис. 156). Рассмотрим «вид сбоку», т. е. ортогональную проекцию земного шара вдоль прямой AB на некоторую плоскость. Эта проекция изображена на рис. 157: точки A, B и O проек-

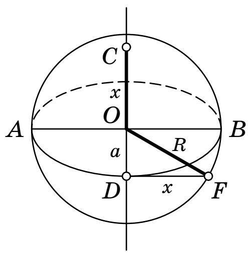


Рис. 156

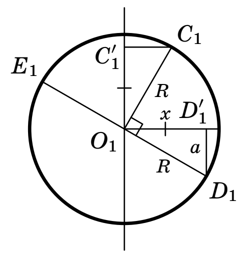


Рис. 157

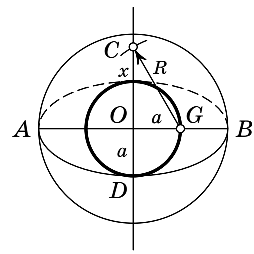


Рис. 158

тируются в одну и ту же точку O_1, D_1E_1 — проекция экватора, C_1 — проекция северного полюса. В плоскости проекции проведём через точку O_1 вертикальную и горизонтальную прямые (такие прямые существуют и единственны, так как AB — горизонтальная прямая). Пусть C_1' и D_1' — основания перпендикуляров, опущенных из точек C_1 и D_1 на эти прямые соответственно. Тогда длина отрезка O_1C_1' равна искомой величине x. Прямоугольные треугольники $O_1C_1C_1'$ и $O_1D_1D_1'$ равны, так как $\angle C_1O_1D_1 = \angle C_1'O_1D_1' = 90^\circ$ и $O_1C_1 = O_1D_1 = R$, поэтому $O_1C_1' = O_1D_1' = x$. Но $D_1D_1' = a$ и $O_1D_1 = R$, поэтому $O_1D_1' = x$ есть катет в прямоугольном треугольнике с другим катетом a и гипотенузой R. Построим треугольник, равный треугольнику $O_1D_1D_1'$ (и $O_1C_1C_1'$), на исходном рис. 5. Для этого проведём через точку D прямую, параллельную AB, до пересечения в точке F с проекцией земного шара. Тогда в прямоугольном треугольнике ODF имеем $OD = a$, $OF = R$ и, значит, $DF = x$.

Комментарий. Разумеется, отрезок длины x можно найти и другими способами — например, построить на отдельном чертеже прямоугольный треугольник с катетом a и гипотенузой R, или так, как показано на рис. 158: провести окружность с центром O через точку D, а затем ещё одну окружность радиуса $R = OB$ с центром в точке G пересечения первой и отрезка OB, тогда вторая окружность и пересечёт верхнюю часть серединного перпендикуляра к AB в искомой точке C.

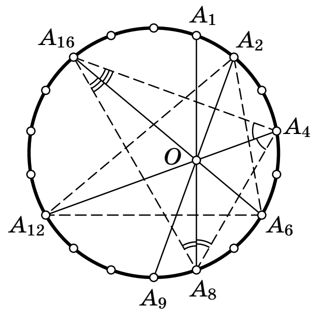


Рис. 159

3. Пусть $A_1A_2\ldots A_{18}$ — правильный 18-угольник с вершинами, выбранными через две из вершин данного 54-угольника. Покажем, что его диагонали A_1A_8, A_2A_9, A_4A_{12} и A_6A_{16} (очевидно, не проходящие через центр) пересекаются в одной точке. Действительно, как и при решении аналогичной задачи 3 для 9 класса, получаем, что в треугольнике $A_4A_8A_{16}$ прямые A_4A_{12}, A_8A_1, $A_{16}A_6$ являются биссектрисами и поэтому пересекаются в одной точке, а в треугольнике $A_2A_6A_{12}$ биссектрисами являются прямые A_2A_9, A_6A_{16}, $A_{12}A_4$, проходящие через эту же точку.

Комментарий. Интересующийся читатель может попробовать выяснить, для каких ещё значений n, кроме кратных 12 и 18, в правильном n-угольнике найдутся четыре диагонали, пересекающиеся в одной точке, а также существует ли такое n, что в правильном n-угольнике пять диагоналей пересекаются в одной точке, отличной от центра этого n-угольника.

4. Если $k \leqslant 1990$, то возможен вариант, при котором первые 10 депутатов предложат ничего не выделять по первой статье расходов, а по остальным 199 статьям выделить поровну, т. е. по $\frac{S}{199}$, следующие 10 депутатов предложат ничего не выделять по второй статье, а по остальным статьям выделить по $\frac{S}{199}$, и т. д. В результате по каждой статье ровно 1990 депутатов будут согласны выделить сумму $\frac{S}{199}$, а значит эта сумма и будет утверждена. Но тогда по всем 200 статьям будет утверждена сумма $200 \cdot \frac{S}{199}$, т. е. превышающая S. Итак, при $k \leqslant 1990$ гарантировать, что общая сумма утверждённых расходов не превысит S, нельзя.

Покажем, что при $k = 1991$ сумма утверждённых расходов не превысит S, какой бы вариант распределения расходов ни предложили депутаты. Действительно, в этом случае по каждой статье не более 9 депутатов могли предложить величину расходов, меньшую утверждённой по этой статье. Поскольку $200 \cdot 9 < 2000$, найдётся депутат, предложивший по всем статьям величину расходов, не меньшую утверждённой. Но сумма всех предложенных им расходов не превосходит S. Следовательно, утверждённая сумма расходов по всем статьям также не превосходит S.

5. Каждой погасшей клетке поставим в соответствие квадрат 2×2, в котором кроме неё были ещё три не светящиеся клетки, т. е. в котором она погасла последней. Поскольку двум разным погасшим клеткам не может соответствовать один и тот же квадрат 2×2, суммарное число погасших клеток не превосходит числа квадратов 2×2 в прямоугольнике $m \times n$. Это число равно $(m-1)(n-1)$, так как каждый квадрат 2×2 однозначно определяется своей клеткой в левом верхнем углу, а такими клетками могут быть все, кроме клеток в самом нижнем ряду и в самом правом столбце. Значит, всего погасших клеток не больше, чем $(m-1)(n-1)$. Поскольку по условию изначально светящихся клеток было больше этого числа, по крайней мере одна клетка никогда не погаснет.

1992 год (LV олимпиада)

8 класс

1. *Первый способ.* Поскольку $a+b+c+d>0$, получаем $-(c+d)<a+b$, а складывая неравенства $c<a$ и $d<b$, получаем $c+d<a+b$. Одно из чисел $-(c+d)$ и $c+d$ неотрица-

тельно, а $a+b$ больше их обоих, значит, $a+b$ положительно. Далее, $-(a+b)<c+d<a+b$, поэтому $|c+d|<a+b=$ $=|a+b|$.

Второй способ. Неравенство $|a+b|>|c+d|$ равносильно каждому из неравенств

$$(a+b)^2 > (c+d)^2,$$
$$(a+b-c-d)(a+b+c+d) > 0,$$
$$((a-c)+(b-d))(a+b+c+d) > 0,$$

последнее из которых следует из условия задачи.

2. В условии задачи указано, что число всех диагоналей равно 30, поэтому предполагается, что угловые клетки доски представляют собой диагонали единичной длины. Рассмотрим диагонали, составленные из чёрных клеток. Есть ровно одна диагональ, состоящая из 8 клеток (см. рис. 160). Параллельными ей являются ровно 6 диагоналей. Итого имеются 7 диагоналей этого направления. Рассмотрим диагонали другого направления. Это 8 диагоналей длин 1, 3, 5, 7 (по две диагонали для каждого значения длины).

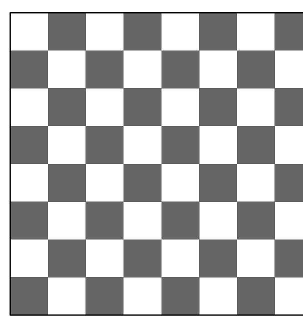


Рис. 160

Сосчитаем количество фигур, стоящих на чёрных клетках. На чёрных диагоналях одного направления (с самой длинной диагональю, их семь) стоит нечётное число фигур, на чёрных диагоналях другого направления (их восемь) — чётное. Получили противоречие.

3. Каждый участник за оба дня решил столько задач, сколько решили во второй день все остальные в сумме и ещё он сам, т. е. ровно столько, сколько решили все участники во второй день. Значит, за оба дня все участники решили поровну задач.

4. Поскольку при изменении массы каждой гири в одинаковое (положительное) число раз возможность разложить набор на заданное количество кучек равной массы сохраняется, можно считать, что суммарная масса всех гирь равна 60 г (т. е. наименьшему общему кратному чисел 3, 4 и 5). Тогда из возможности разложения на пять кучек равной массы (по 12 г) получаем, что масса любой гири не может превышать 12 г. Поэтому если разложить все гири на четыре кучки равной массы (по 15 г), то в каждой кучке должно быть не менее двух гирь, а значит, количество гирь не может быть меньше 8.

Если число гирь равно 8, то из возможности разложения на пять кучек по 12 г вытекает, что среди них найдутся хотя бы две гири по 12 г. В самом деле, если 12-граммовых гирь меньше двух, то как минимум в четырёх кучках не менее чем по две гири, поэтому число гирь не менее $4\cdot 2+1=9$. Далее, из возможности разложения на четыре кучки по 15 г следует, что найдутся хотя бы две гири по 3 г. В самом деле, рассмотрим любые две кучки, содержащие 12-граммовые гири. Поскольку каждая из оставшихся двух кучек должна содержать не менее двух гирь, дополнить каждую из двух 12-граммовых гирь можно только одной гирей.

Далее, из возможности разложения гирь на три кучки по 20 г вытекает, что число 12-граммовых гирь не превосходит трёх, а поскольку 20 не делится на 3, в каждой кучке должна быть хотя бы одна гиря с некратной 3 или вообще нецелочисленной массой. Выберем любые три гири с некратными 3 или нецелочисленными массами и обозначим эти массы m_1, m_2, m_3. Если число 12-граммовых гирь равно трём, то из возможности разложения на четыре кучки по 15 г получаем, что число 3-граммовых гирь не меньше трёх, но тогда остаётся не более двух гирь с некратными 3 или нецелочисленными массами. Противоречие. Следовательно, имеются ровно две гири по 12 г.

Предположим теперь, что такой набор гирь можно разложить на пять кучек по 12 г. Тогда две 12-граммовые гири образуют две кучки, а остальные 6 гирь, массы которых в граммах равны 3, 3, m_1, m_2, m_3, m_4, необходимо разложить на три кучки по 12 г. Это означает, что в каждой из трёх кучек должно быть ровно по две гири, а дополнить каждую из 3-граммовых гирь можно лишь 9-граммовой, но среди чисел m_1, m_2, m_3, m_4 лишь последнее может быть равно 9. Полученное противоречие означает, число гирь не может равняться 8.

Приведём пример набора из 9 гирь с массами (в граммах) 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 12, который можно разложить и на 3 ($8+12$, $3+5+12$, $3+4+6+7$), и на 4 ($3+12$, $3+12$, $4+5+6$, $7+8$), и на 5 ($3+3+6$, $4+8$, $5+7$, 12, 12) кучек равной массы.

Комментарий. Как отыскать подходящий набор из 9 гирь? Для этого необходимо организовать грамотный перебор вариантов.

Попробуем найти подходящий набор из 9 гирь с целыми массами и суммарной массой 60 г. Как показано в решении, среди этих гирь должна быть хотя бы одна массой 12 г. Пусть такая гиря ровно одна. Тогда при раскладывании на 5 кучек равной массы четыре кучки будут содержать по две гири и одна — единственную гирю массой 12 г.

Заметим, что при раскладывании на 4 кучки равной массы три кучки будут содержать 2 гири и одна — 3 гири (иначе обязательно найдётся кучка из одной гири массой 15 г, что невозможно). Предположим, что гиря массой 12 г попадёт в эту последнюю кучку. Тогда сумма масс двух других гирь в этой кучке равна 3 г. Таким образом, одна из этих гирь имеет массу 1 г, а другая — 2 г. Следовательно, эти две гири при раскладывании на 5 кучек равной массы находились в одной кучке с гирей массой 11 г и гирей массой 10 г соответственно. В свою очередь эти гири с массами 11 г и 10 г при раскладывании на 4 кучки равной массы находились в одной кучке с гирей массой 4 г и гирей массой 5 г соответственно. Наконец, эти две гири с массами 4 г и 5 г при раскладывании на 5 кучек равной массы находились в одной кучке с гирей массой 8 г и гирей массой 7 г соответственно.

Видно, что найденный набор гирь с массами 1 г, 2 г, 4 г, 5 г, 7 г, 8 г, 10 г, 11 г и 12 г можно разложить и на 4, и на 5 кучек равной массы. Также имеем $8+12=2+7+11=1+4+5+10=20$. Следовательно, найденный набор гирь можно разложить и на 3 кучки равной массы.

Другие примеры подходящих наборов из 9 гирь можно получить исходя из предположения другой схемы раскладки гирь на 4 и на 5 кучек равной массы. Приведём значения масс (в граммах) ещё трёх подходящих наборов из 9 гирь с суммарной массой 60 г: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12; 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12; 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8, 9, 12. Есть и другие примеры.

5. *Первый способ*. Рассмотрим сначала случай равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, в котором CD — биссектриса прямого угла C. Поскольку треугольник ACD равнобедренный с углом при основании, равном 45°, угол ADC прямой, следовательно, прямые AB и CD перпендикулярны, причём $AD = BD = CD$ (см. рис. 161). Значит, в данном случае длина биссектрисы прямого угла равна половине длины проекции гипотенузы на прямую, перпендикулярную биссектрисе. Всюду далее в этом и других решениях этой задачи будем считать, что треугольник ABC не является равнобедренным.

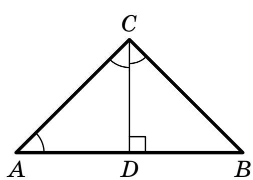


Рис. 161

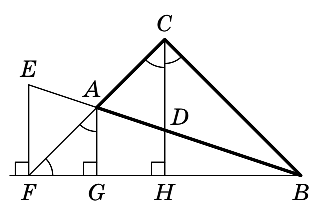


Рис. 162

Пусть теперь ABC — прямоугольный треугольник, в котором CD — биссектриса прямого угла C и $AC < BC$ (см. рис. 162). Найдём на луче CA такую точку F, что $FC = BC$. Тогда FCB — равнобедренный прямоугольный треугольник с основанием FB, а прямая CD перпендикулярна этому основанию и пересекает его в некоторой точке H. Опустим из точки A перпендикуляр AG на основание FB. Тогда $\angle FAG = 90^\circ - \angle AFG = 45^\circ = \angle AFG$ и $AG = FG$. Заметим, что BG — проекция гипотенузы AB на прямую, перпендикулярную биссектрисе CD. Пусть перпендикуляр, восстановленный из точки F к прямой FB, пересекает прямую

AB в точке E. Тогда прямые EF и CH параллельны, а DH — средняя линия треугольника EFB, так как $FH = HB$. Значит, $EF = 2DH$. Следовательно,

$$2(CD + DH) = FG + BG = AG + BG < EF + BG = 2DH + BG,$$

откуда $2CD < BG$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть CD — биссектриса, проведённая из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника ABC. Через вершину B проведём прямую, перпендикулярную CD (см. рис. 163). Пусть A_1 и D_1 — проекции точек A и C на эту прямую (если $AC = BC$, то они совпадут с точками A и D соответственно).

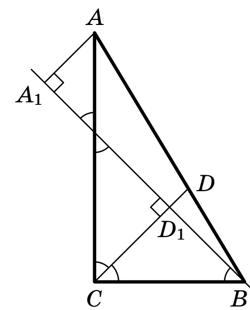


Рис. 163

Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $CD = x$. Тогда из равнобедренных прямоугольных треугольников получаем

$$A_1D_1 = \frac{b}{\sqrt{2}}, \quad BD_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad A_1B = A_1D_1 + D_1B = \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Равенство $S_{ABC} = S_{ADC} + S_{BDC}$ принимает вид

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ax \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}bx \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда находим $x = \dfrac{ab\sqrt{2}}{a+b}$.

Преобразуем теперь доказываемое неравенство $CD \leqslant \dfrac{1}{2}A_1B$ равносильным образом:

$$\frac{ab\sqrt{2}}{a+b} \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; \frac{2ab}{a+b} \leqslant \frac{a+b}{2} \;\Leftrightarrow\; 4ab \leqslant (a+b)^2 \;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 0 \leqslant (a-b)^2.$$

Последнее неравенство выполнено всегда, причём обращается в равенство только при $a = b$.

Третий способ. Пусть CD — биссектриса, проведённая из вершины прямого угла C прямоугольного треугольника

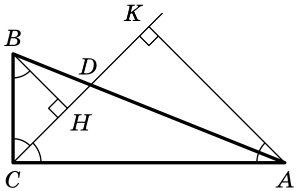


Рис. 164

ABC. Обозначим проекции вершин A и B на прямую CD через K и H соответственно (см. рис. 164).

Без ограничения общности можно считать, что $AC \geqslant BC$. Тогда по свойству биссектрисы треугольника

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} \geqslant 1.$$

Прямоугольные треугольники ADK и BDH подобны, поэтому $\frac{KD}{DH} = \frac{AD}{DB} \geqslant 1$, а значит, $KD \geqslant DH$, откуда получаем

$$CD \leqslant \frac{1}{2}(CH + CK).$$

В прямоугольных треугольниках $\triangle ACK$ и $\triangle BCH$ острые углы равны 45°, поэтому $AK = CK$ и $BH = CH$. Следовательно,

$$CD \leqslant \frac{1}{2}(CH + CK) = \frac{1}{2}(AK + BH),$$

но $AK + BH$ и есть длина проекции гипотенузы на любую прямую, перпендикулярную биссектрисе CD.

6. Рассмотрим правильный восьмиугольник. Заметим, что множество, состоящее из всех его сторон и диагоналей, можно представить в виде объединения звеньев четырёх ломаных, каждая из которых проходит через все вершины так, что никакие две ломаные не имеют общих звеньев (см. рис. 165).

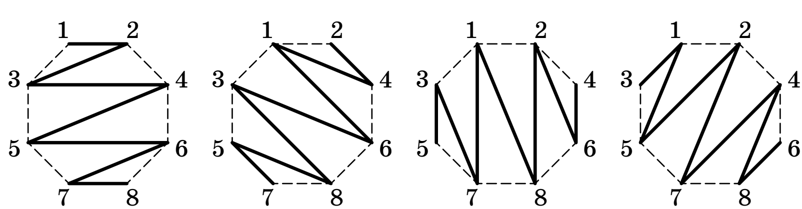


Рис. 165

Покажем, как, используя эти ломаные, можно 4 раза рассадить 9 человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза. Выберем любую ломаную и занумеруем вершины многоугольника в порядке следования на этой ломаной (на рис. 165 для нумерации вершин выбрана первая ломаная). Далее, занумеруем рассаживаемых натуральными числами от 1 до 9. При первом рассаживании по левую руку от номера 1 расположим последовательно номера 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (см. рис. 166), а номер 9 поместим между 8 и 1. Второе, третье и четвёртое рассаживания проведём согласно порядку следования номеров на соответствующей ломаной, при этом номер 9 каждый раз будем располагать между номерами, стоящими на концах этой ломаной. Тогда описанные 4 способа рассадки 9 человек удовлетворяют условию задачи.

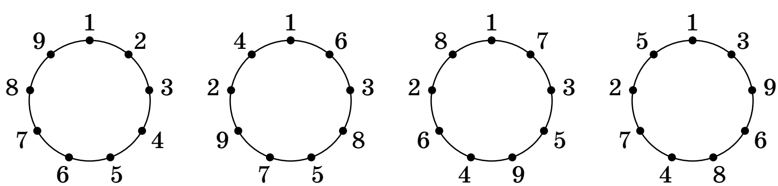


Рис. 166

К о м м е н т а р и й. Проведённое рассуждение допускает обобщение. Можно показать, что для любого натурального числа n можно n раз рассадить $2n+1$ человек за круглым столом так, чтобы никакие двое не сидели рядом более 1 раза. Для этого представим множество всех сторон и диагоналей выпуклого $2n$-угольника в виде объединения звеньев таких n ломаных, что каждая из них проходит через все $2n$ вершин многоугольника и никакие две ломаные не имеют общих звеньев, следующим образом. Обозначим правильный $2n$-угольник через $A_1A_2\ldots A_{2n}$. Тогда пусть i-я ($i=1, \ldots, n$) ломаная включает в себя сторону A_iA_{i+1}, все параллельные ей диагонали, сторону $A_{n+i}A_{n+i+1}$ ($A_{2n}A_1$ при $i=n$) и все диагонали, перпендикулярные прямой A_iA_{n+i}. Следуя порядку расположения вершин на этих ломаных можно провести искомые n рассаживаний, каждый раз располагая человека с номером $2n+1$ между людьми с номерами i и $n+i$.

На языке теории графов рассматриваемое утверждение означает, что в полном графе K_{2n+1} с $2n+1$ вершинами (граф называется полным, если в нём проведены все возможные рёбра) можно так выбрать

n циклов, каждый из которых проходит по всем вершинам по одному разу (такие циклы называются *гамильтоновыми*), чтобы разные циклы не имели бы общих рёбер. Поскольку в цикле каждые две соседние вершины соединяются ребром и каждые два соседних ребра имеют общую вершину, каждый цикл содержит $2n+1$ вершину и столько же рёбер, а значит, эти n циклов содержат в совокупности $n(2n+1)$ рёбер. Но граф K_{2n+1} имеет ровно $n(2n+1)$ рёбер, поэтому получается, что он представляется в виде суммы n гамильтоновых циклов, что составляет известную теорему теории графов (см., например, [61, теорема 9.6]).

9 класс

1. В ходе соревнований каждый из участников выиграл столько партий, сколько выиграли чёрными все остальные вместе взятые и ещё он сам, т. е. ровно столько, сколько выиграли все участники чёрными. Значит, все участники выиграли поровну партий.

2. *Первый способ*. Разбив все нечётные натуральные числа $n<10\,000$ на пары a и b, для которых $a+b=10\,000$, заметим, что сумма

$$a^9+b^9=(a^3+b^3)(a^6-a^3b^3+b^6)=\\ =(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^6-a^3b^3+b^6)$$

делится на $10\,000$, т. е. заканчивается четырьмя нулями. Следовательно, сумма чисел a' и b', образованных четырьмя последними цифрами чисел a и b соответственно, также равна $10\,000$. Поэтому неравенство $a>a'$ равносильно неравенству $b<b'$. Это означает, что если для одного из чисел любой пары число, образованное четырьмя последними цифрами его девятой степени будет больше него, то для второго числа пары будет выполнено обратное неравенство. Таким образом, количества чисел, описанных в условии задачи, совпадают.

Второй способ. Пусть n — нечётное число, $n<10\,000$. Поскольку $(10\,000-n)^9=10\,000^9+c_1n+\ldots+c_8n^8-n^9$, где все целые числа $c_1, \ldots, c_8$ делятся на $10\,000$, получаем $(10\,000-n)^9=10\,000K-n^9$, где K — некоторое натуральное число. Значит, если N — число, образованное последними четырьмя цифрами числа n^9, то последние четыре цифры числа $(10\,000-n)^9$ образуют число $10\,000-N$. Но $N>n$ тогда и только тогда, когда $10\,000-N<10\,000-n$. Следовательно, число n принадлежит первому множеству тогда и только тогда, когда число $10\,000-n$ принадлежит второму множеству. Поскольку мы рассматриваем лишь нечётные числа, равенство $n=10\,000-n$ невозможно и, таким образом, чисел в этих множествах поровну.

Комментарий. Имеет место и более сильное утверждение: при всех натуральных k и m количество нечётных натуральных чисел $n<10^k$, для которых число, образованное k последними цифрами числа n^{2m-1}, больше n, равно количеству нечётных натуральных чисел $n<10^k$, для которых число, образованное k последними цифрами числа n^{2m-1}, меньше n. Предлагаем заинтересованому читателю провести доказательство самостоятельно (можно рассуждать аналогично изложенным решениям).

3. После каждого отрезания пирог сохраняет форму выпуклого многоугольника (варианты формы после одного или двух отрезаний показаны на рис. 167). Поскольку любой кусок отрезается по линии, пересекающей некоторые его две соседние стороны в точках, отличных от вершин, от каждой из сторон многоугольника всегда будет оставаться отрезок, по-прежнему являющийся одной из сторон многоугольника. В частности, в любой момент времени найдутся четыре стороны многоугольника, лежащие на сторонах исходного квадрата.

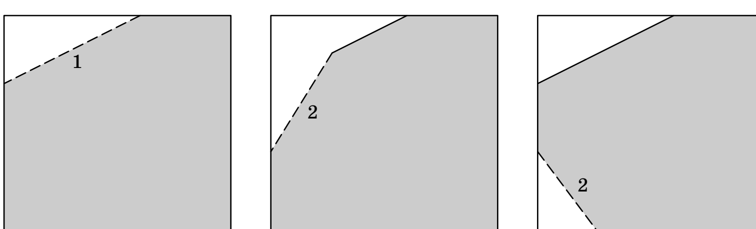


Рис. 167

Выберем на каждой из этих сторон по одной точке и соединим их отрезками (см. рис. 168). Полученный четырёхугольник целиком лежит внутри многоугольника. Докажем, что изюминка обязательно будет лежать внутри этого четырёхугольника.

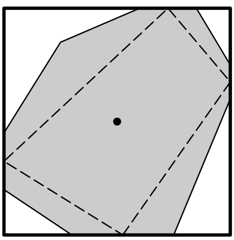


Рис. 168

Рассмотрим любую прямую, содержащую некоторую сторону этого четырёхугольника. Относительно неё одна из вершин квадрата лежит в одной полуплоскости, а три другие — в другой. Поскольку изюминка лежит на отрезке, соединяющем две из трёх упомянутых вершин, она лежит в той же полуплоскости, что и эти вершины, а следовательно, в той же полуплоскости, что и сам четырёхугольник. Таким образом, изюминка лежит внутри построенного четырёхугольника, поэтому отрезать её нельзя.

Комментарий. Рассмотрим любую сторону I квадрата, являвшегося границей пирога до того, как отрезали первый кусок. После отрезания первого куска границей пирога будет пятиугольник, причём одна из его сторон I_1 будет лежать на стороне I квадрата: $I \supset I_1$. После отрезания второго куска аналогично получим $I \supset I_1 \supset I_2$ и т. д. Такие отрезки I, I_1, I_2, ... называют *вложенными*, а *лемма о вложенных отрезках*, согласно которой любая система отрезков $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ имеет хотя бы одну общую точку, является одним из фундаментальных утверждений математического анализа. Отметим, что наличие общей точки для конечной системы вложенных отрезков очевидно. Именно такие точки на каждой стороне квадрата мы и выбирали в решении задачи.

4. Запишем в каждую клетку таблицы число путей, которые ведут в неё из левой нижней клетки таблицы. Поскольку через отмеченные клетки пути проходить не могут, заполним их нулями. Во все клетки левого столбца и нижней строки можно попасть только одним способом. Пусть, далее, двигаясь в направлениях вверх или вправо мы достигли некоторой клетки. Тогда предыдущая клет-

1	1	8	39	39	114	339	339	678
1	0	7	31	0	75	225	0	339
1	2	7	24	41	75	150	225	339
1	1	5	17	17	34	75	75	114
1	0	4	12	0	17	41	0	39
1	2	4	8	12	17	24	31	39
1	1	2	4	4	5	7	7	8
1	0	1	2	0	1	2	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис. 169

1					
1	5		$\iddots$		
1	4	10			
1	3	6	10		
1	2	3	4	5	
1	1	1	1	1	1

Рис. 170

ка этого пути есть либо левый, либо нижний сосед данной клетки, поэтому искомое число путей равно сумме чисел, записанных в соседних клетках слева и снизу от данной. Двигаясь по диагоналям (1; 1, 1; 1, 0, 1; 1, 1, 1, 1; 1, 2, 2, 2, 1; ...), мы заполним все оставшиеся клетки таблицы. Таблица заполняется однозначно, а в правой верхней клетке оказывается число 678.

Комментарий. Полученная таблица с числами симметрична относительно диагонали, соединяющей левую нижнюю и правую верхнюю клетки. Это связано как с правилами движения по клеткам, так и с симметрией расположения отмеченных клеток. Добавим, что если бы отмеченных клеток не было, то таблица была бы заполнена биномиальными коэффициентами (см. рис. 170) и представляла бы собой «вырезку» из *треугольника Паскаля*, а в правой верхней клетке стояло бы число 12870.

5. *Первый способ.* Обозначим $\angle ADB = \alpha$, $\angle CDB = \beta$. Тогда $\angle ADE = \alpha$, так как прямая ED симметрична BD относительно AD (см. рис. 171). Поскольку треугольник ACD равнобедренный ($AC = CD$), получаем $\angle CAD = \angle CDA = \alpha + \beta$.

Проведём через точку B прямую, параллельную DE. Пусть она пересекает прямые AD и AE в точках F и G

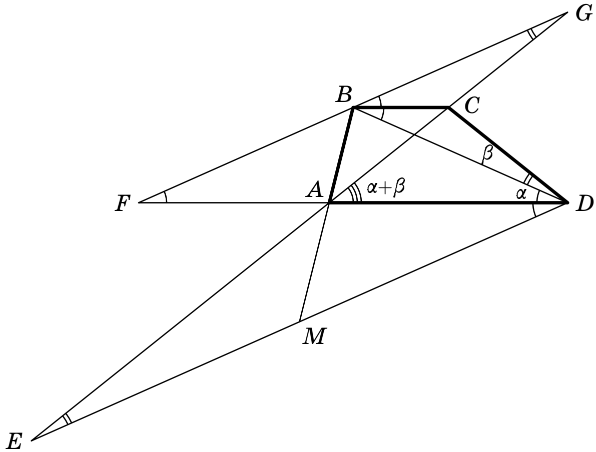


Рис. 171

соответственно (точки пересечения есть, поскольку прямая DE пересекает каждую из этих прямых).

Точка B лежит на прямой FG между точками F и G. Пусть прямая AB пересекает отрезок DE в точке M. Треугольники AFG и ADE подобны по двум углам: $\angle GAF = \angle EAD$ как вертикальные, а $\angle AFG = \angle ADE = \alpha$ как внутренние накрест лежащие между секущей FD и параллельными прямыми FG и ED. Утверждение о том, что точка M — середина DE, равносильно равенству $FB = BG$. В самом деле, прямая BM разбивает треугольники AFG и ADE на две пары подобных треугольников: $\triangle FAB \sim \triangle DAM$ и $\triangle ABG \sim \triangle AME$, причём коэффициенты подобия для обеих пар совпадают (они равны $\frac{AB}{AM}$). Следовательно, $\frac{FB}{DM} = \frac{BG}{ME}$, откуда $\frac{FB}{BG} = \frac{DM}{ME}$.

Рассматривая секущие FG и BD параллельных прямых BC и AD, получим $\angle GBC = \angle GFD = \alpha$ и $\angle CBD = \angle ADB = \alpha$. Поскольку $\angle CAD$ — внешний угол треугольника AFG, находим

$$\angle AGF = \angle CAD - \angle GFA = (\alpha + \beta) - \alpha = \beta.$$

Рассмотрим треугольники BCG и BCD. Так как $\angle GBC = \angle DBC$ и $\angle BGC = \angle BDC$, получаем $\angle GCB = \angle DCB$, поэтому рассматриваемые треугольники равны по стороне BC и прилежащим к ней углам. Следовательно, $BG = BD$. Поскольку в треугольнике FBD углы при основании FD равны, он равнобедренный, поэтому $FB = BD$. Таким образом, $FB = BG$.

Второй способ. Обозначим через M точку пресечения прямых AB и DE, через L — такую точку на луче DA, что $DL = BC$ (см. рис. 172). Поскольку $ABCD$ — трапеция, точки A и L различны. Тогда $BCDL$ — параллелограмм, так как две его стороны параллельны и равны. Обозначим точку пересечения его диагоналей через O.

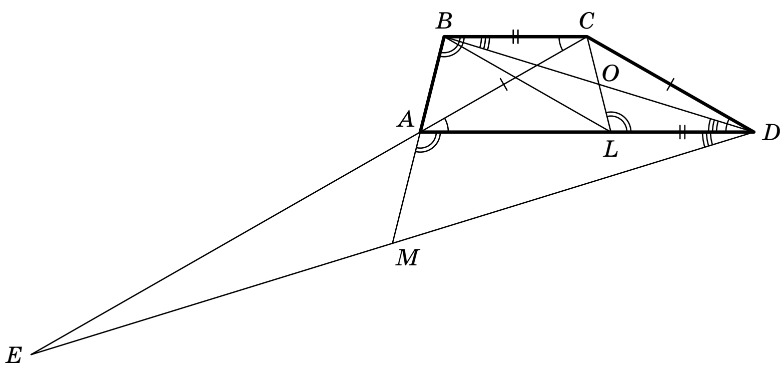


Рис. 172

Поскольку $BC = LD$, $AC = CD$ и $\angle CDA = \angle CAD = \angle BCA$, треугольники ABC и CLD равны. Значит, $\angle CLD = \angle ABC$. По свойствам углов, образованных параллельными прямыми и секущей, получаем $\angle BCO = \angle CLD$ и $\angle ABC = \angle MAD$, поэтому $\angle BCO = \angle MAD$.

Далее, по свойству внутренних односторонних углов $\angle BCD = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \angle DAC = \angle EAD$. В силу симметрии прямых BD и DE относительно прямой AD получаем $\angle CBD = \angle BDA = \angle EDA$. Следовательно, два угла треугольника ADE соответственно равны двум углам треугольника CBD, поэтому эти треугольники подобны. При преобразовании подобия, переводящем первый из них во второй, $\triangle ADM$ переходит в $\triangle CBO$, так как $\angle BCO = \angle MAD$ и $\angle CBD = \angle ADM$. Значит, точка M переходит в точку O. Поскольку CO — медиана треугольника CBD, получаем, что AM — медиана треугольника ADE.

6. а) Занумеруем 11 человек натуральными числами от 1 до 11. Организуем рассаживания следующим образом. Пусть соседом слева k-го ($k = 1, \ldots, 11$) человека при i-м ($i = 1, \ldots, 5$) рассаживании будет человек с номером $k + i$, если $k + i \leqslant 11$, и с номером $k + i - 11$, если $k + i > 11$. Тогда описанные 5 способов рассадки 11 человек удовлетворяют условию задачи (см. рис. 173).

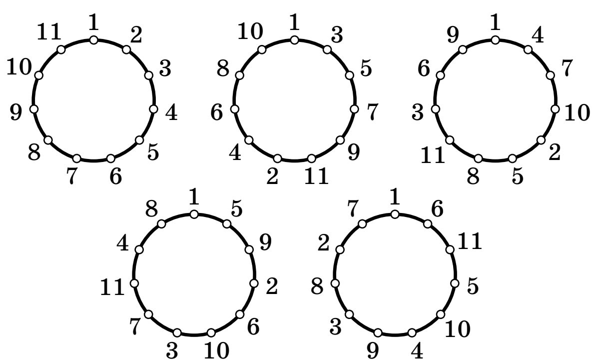


Рис. 173

б) Покажем, как получить из каждой предложенной в решении пункта а) рассадки для $n = 5$ такие две рассадки для $n = 10$, чтобы набор из десяти полученных рассадок удовлетворял условиям пункта б). Если в исходной рассадке по часовой стрелке последовательно стояли числа 1, a, b, c, d, e, f, g, h, i и j, то образуем две рассадки так, как показано на рис. 174. Заметим, что во всех полученных рассадках сумма чисел, стоящих на местах, соединённых горизонтальными линиями, будет равна 23.

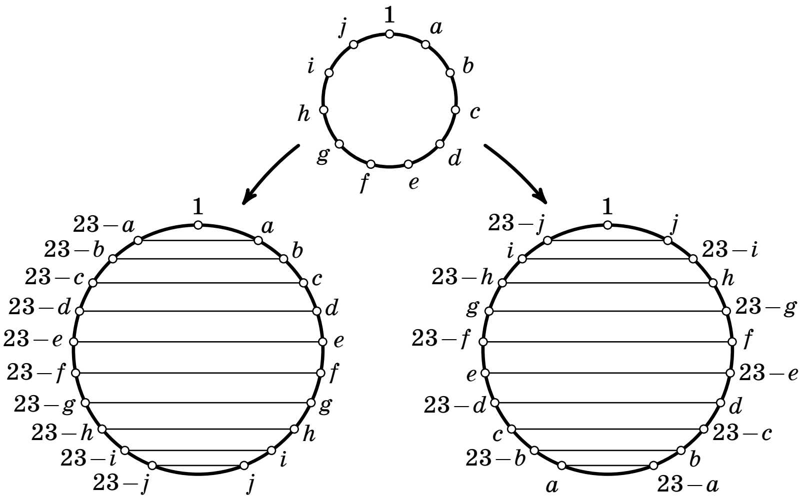


Рис. 174

Пусть k и l — любые различные натуральные числа от 2 до 11. Заметим, что k и l стоят рядом в исходной рассадке тогда и только тогда, когда в первой из полученных рассадок стоят рядом числа k и l, а также числа $23-k$ и $23-l$, а во второй из полученных рассадок стоят рядом числа k и $23-l$, а также числа $23-k$ и l. Поскольку в пяти рассадках из решения п. а) рядом по одному разу стояли все различные числа от 2 до 11, отсюда следует, что в десяти полученных рассадках по одному разу стоят все различные числа от 2 до 21. Наконец, нетрудно видеть, что в этих рассадках число 1 также стоит по одному разу с каждым из чисел от 2 до 21.

Комментарий. Заметим, что описанный в решении п. а) способ организации рассадок не проходит в том случае, когда число $2n+1$ составное. Действительно, в этом случае у числа $2n+1$ найдётся отличный от 1 делитель $i<n$. Тогда предложенный в решении i-й способ рассаживания будет некорректен, так как один и тот же человек должен будет сидеть одновременно более чем в одном месте. Универсальный способ организации рассадок $2n+1$ человека для любого n описан в комментарии к решению задачи 6 для 8 класса.

10 класс

1. Если α, β, γ, δ — углы четырёхугольника, то их сумма равна 2π, поэтому $\frac{\gamma+\delta}{2}=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$, а значит, $\cos\frac{\gamma+\delta}{2}=$ $=-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$. Следовательно,

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=$$
$$=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)=$$
$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{4}\sin\frac{\alpha-\beta-\gamma+\delta}{4}=$$
$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma-(2\pi-\alpha-\gamma)}{4}\sin\frac{\alpha+\delta-(2\pi-\alpha-\delta)}{4}=$$
$$=-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

Из условия задачи вытекает, что это произведение равно нулю. Если $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$, то $\alpha+\beta=\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Поскольку $0<\alpha+\beta<2\pi$, получаем $\alpha+\beta=\pi$. Аналогично если $\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}=0$, то $\alpha+\gamma=\pi$, и если $\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=0$, то $\alpha+\delta=\pi$.

Таким образом, сумма некоторых двух углов четырёхугольника равна π. Если это два соседних угла, то данный четырёхугольник — трапеция или параллелограмм, а если это два противоположных угла, то рассматриваемый четырёхугольник — вписанный.

2. Рассуждая аналогично решению задачи 3 для 9 класса, получим, что в любой момент времени пирог имеет форму выпуклого многоугольника, причём некоторые его пять сторон лежат на сторонах исходного пятиугольника (по одной на каждой стороне). Выберем на каждой из этих пяти сторон многоугольника по одной точке и соединим их отрезками (см. рис. 175).

Полученный пятиугольник целиком лежит внутри многоугольника и содержит пятиугольник P, вершинами которого являются точки пересечения диагоналей исходного пятиугольника (см. рис. 176). Это означает, что если воткнуть свечку в любую точку, лежащую внутри или на границе пятиугольника P, то отрезать её будет нельзя.

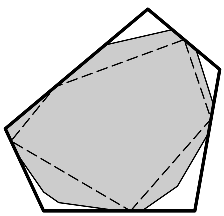


Рис. 175

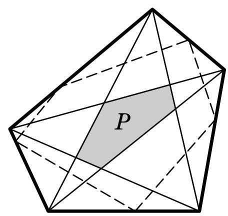


Рис. 176

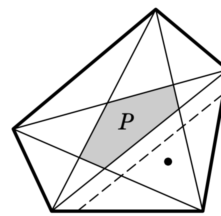


Рис. 177

Остаётся показать, что если воткнуть свечку вне пятиугольника P, то её можно будет отрезать. В самом деле, в этом случае найдётся такая диагональ исходного пятиугольника, что точка и пятиугольник P будут лежать в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей эту диагональ, причём пятиугольник имеет общие точки с диагональю, а точка на диагонали не лежит (см. рис. 177). Следовательно, существует прямая, параллельная этой диагонали и пересекающая две соседние стороны исходного пятиугольника, относительно которой пятиугольник P и рассматриваемая точка лежат строго в разных полуплоскостях, поэтому проводя разрез по отрезку этой прямой, можно отрезать данную точку от пирога.

Комментарий. См. комментарий к решению задачи 3 для 9 класса.

3. Раскрасим доску в два цвета в шахматном порядке. Пройти из любого угла доски в противоположный можно за $n+m-2$ хода, причём на каждом ходе цвет занятой клетки изменяется. Следовательно, если сумма $n+m$ нечётна, то вначале фишки стоят на клетках разных цветов, а если чётна, то на клетках одного цвета.

Если фишки вначале стояли на клетках разных цветов, то после любого хода белой фишкой они будут располагаться на клетках одного цвета, поэтому чёрная фишка никогда не сможет попасть на клетку, занятую фишкой противника, т. е. обеспечить себе выигрыш. Если же фишки вначале стояли на клетках одного цвета, то после любого хода белой фишкой они будут располагаться на клетках разных цветов, а значит, в этом случае белая фишка никогда не сможет попасть на клетку, занятую фишкой противника, т. е. обеспечить себе выигрыш.

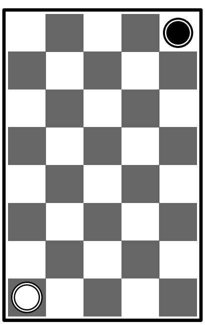


Рис. 178

Покажем, что если сумма $m+n$ нечётна (см. рис. 178), то при правильной игре выигрывает играющий белой фишкой. Без ограничения общности можно считать, что m — число горизонталей доски и оно больше числа n её вертикалей. В самом деле, равенство $m=n$ невозможно, поскольку сумма $m+n$ нечётна, а если $m<n$, то в дальнейшем рассуждении достаточно заменить все ходы белых вправо на ходы вверх и наоборот.

Рассмотрим диагональ, состоящую из n клеток, на первой из которых исходно находится белая фишка, и далее будем говорить о диагоналях только этого направления. В начале игры диагонали, на которых стоят фишки, параллельны, причём диагональ чёрной фишки расположена выше.

Опишем выигрышную стратегию играющего белой фишкой. Первые ходы будут представлять собой сдвиги вверх по левой вертикали доски. С каждым ходом диагональ белой фишки поднимается вверх, причём после некоторого хода белая фишка окажется на той диагонали, на которой в данный момент расположена чёрная фишка. Действительно, все клетки, на которые возможен ход чёрной фишки, каждый раз расположены выше текущей диагонали белой фишки (см. рис. 179), с каждым ходом белых область над этой диагональю сокращается, а при достижении белой фишкой верхней строки область полностью исчезает. Чёрная фишка не может первой оказаться на диагонали белой фишки, так как клетки любой диагонали одноцветные, а после хода чёрной фишки цвета клеток, занятых фишками, различны. Значит, очередным ходом белая фишка непременно попадёт на диагональ чёрной фишки. После этого на каждый ход чёрной фишкой играющий белой делает симметричный ход в следующем смысле: на ход вниз отвечает ходом вправо, на ход влево отвечает ходом вверх, а ходы чёрной фишкой вверх и вправо просто повторяет (направления вправо, влево, вверх, вниз здесь указаны с точки зрения играющего белой фишкой). После каждого хода белой фишки она остаётся на одной диагонали с чёрной, причём расстояние между фишками не возрастает, но сохраняться оно может только при движении чёрной фишки вправо и вверх, а число таких последовательных ходов ограничено, значит, расстояние между фишками будет нестрого убывать и рано или поздно станет нулём, т. е. белая фишка догонит чёрную.

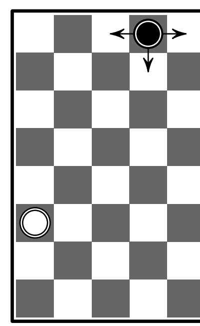


Рис. 179

Если сумма $m + n$ чётна, то выигрывает играющий чёрными. Это доказывается аналогично разобранному выше случаю, так как после первого хода белой фишки белая и чёрная фишки будут располагаться в клетках разных цветов, а следующий ход делает играющий чёрной фишкой.

4. Как и при решении задачи 4 для 8 класса, можем считать, что суммарная масса гирь набора равна 60 г. Тогда из возможности разложения на 6 кучек равной массы (по 10 г) получаем, что масса любой гири не может превышать 10 г. Поэтому если разложить все гири на 5 кучек равной массы (по 12 г), то в каждой кучке должно быть не менее двух гирь, а значит, количество гирь не может быть меньше 10.

Пусть число гирь равно десяти. Тогда каждая из пяти кучек массы 12 г состоит ровно из двух гирь. При любом разложении десяти гирь на шесть кучек как минимум в двух кучках будет по одной гире. Следовательно, в наборе имеется не менее двух 10-граммовых гирь, а значит, и не менее двух гирь массой 2 г, дополняющих 10-граммовые гири при раскладке на 5 кучек по 12 г.

Далее приведём два способа рассуждений.

Первый способ. Из возможности разложения набора на 4 кучки по 15 г получаем, что в наборе есть как минимум четыре гири с нечётными или вообще нецелочисленными массами (иначе масса каждой из четырёх кучек была бы чётна). Следовательно, разложение рассматриваемого набора из 10 гирь на 5 кучек по 12 г будет иметь вид: $2+10$, $2+10$, a_1+a_2, a_3+a_4, b_1+b_2, где каждое из чисел a_1, a_2, a_3, a_4 является или нечётным, или нецелым (для краткости назовём такие числа *особыми*).

Рассмотрим теперь разложение набора на 6 кучек по 10 г. Две 10-граммовые гири образуют две кучки. Ни одно из чисел b_1, b_2 не может равняться 10, так как тогда второе из них равно 2, а три гири по 2 г и четыре гири с особыми массами нельзя разложить на три кучки по 10 г. В самом деле, хотя бы в одной из таких трёх кучек лежало бы не более одной гири с особой массой, поэтому дополнить эту кучку до 10 г, используя только три гири по 2 г, невозможно. Значит, все числа a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2 меньше 10. Следовательно, каждая из четырёх кучек по 10 г содержит ровно две гири. Но каждую из 2-граммовых гирь мы можем дополнить лишь 8-граммовой гирей, что получится, только если $b_1=b_2=8$, но тогда $b_1+b_2=16$, а не 12. Противоречие. Итак, набор нельзя разложить на 6 кучек по 10 г.

Второй способ. Из возможности разложения набора на 4 кучки по 15 г получаем, что число 10-граммовых гирь не может быть больше четырёх. Если их ровно четыре, то есть не менее двух 5-граммовых гирь (поскольку мы должны дополнить каждую из 10-граммовых гирь до 15 г, имея шесть гирь), а также есть не менее четырёх 2-граммовых гирь (они дополняют 10-граммовые гири в каждой кучке по 12 г). Тогда набор состоит в точности из четырёх гирь по 10 г, двух гирь по 5 г и четырёх гирь по 2 г, но его масса равна 58 г, что не соответствует предположению.

Предположим, что число 10-граммовых гирь равно трём. Тогда в наборе есть и три гири по 2 г. Оставшиеся четыре гири в сумме составляют 24 г. Пусть они имеют массы $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ г. Тогда, поскольку при разложении на 4 кучки по 15 г в трёх кучках лежит по одной гире массой 10 г, в них должно лежать ещё хотя бы по одной из оставшихся четырёх гирь (так как из 2- и 10-граммовых гирь нельзя составить 15 г). Значит, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant 5$, поэтому $9 \leqslant a_4 < 10$ и $14 < a_1 + a_2 + a_3 \leqslant 15$.

Рассмотрим разложение набора на 6 кучек по 10 г. Поскольку неравенство $a_2 < 1$ невозможно (иначе $a_3 > 12$), дополнить гирю массы a_4 г можно только гирей массы a_1 г, поэтому $a_1 \leqslant 1$, но тогда $a_2 + a_3 > 13$, что неверно.

Остаётся исследовать случай, когда в набор входят ровно две гири по 10 г. Тогда каждая из четырёх кучек по 10 г содержит ровно две гири. Как показано выше, имеются две гири по 2 г, а значит, есть и две дополняющие их гири по 8 г. Далее, из разложения на кучки по 12 г следует наличие двух гирь по 4 г, составляющих кучки с 8-граммовыми гирями. Наконец, из разложения на кучки по 10 г следует наличие двух гирь по 6 г, дополняющих 4-граммовые гири. Итак, мы получили 10 гирь чётной массы (в граммах): 10, 10, 2, 2, 8, 8, 4, 4, 6, 6, но из них нельзя составить ни одной кучки по 15 г. Противоречие.

Таким образом, мы двумя способами показали, что число гирь не менее 11. Приведём пример набора из 11 гирь с массами (в граммах) 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 10, который можно разложить и на 4 ($2+3+4+6$, $2+3+10$,

$5+10$, $7+8$), и на 5 ($2+10$, $2+10$, $3+3+6$, $4+8$, $5+7$), и на 6 ($2+8$, $2+3+5$, $3+7$, $4+6$, 10, 10) кучек равной массы.

Комментарий. Приведём значения масс (в граммах) ещё трёх наборов из 11 гирь с суммарной массой 60 г, которые также можно разложить и на 4, и на 5, и на 6 кучек равной массы: 1, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 9, 9, 10; 1, 2, 3, 3, 5, 5, 7, 7, 8, 9, 10; 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8, 10. Подробнее о том, как отыскать такие наборы, написано в комментарии к решению задачи 4 для 8 класса. Есть и другие подходящие наборы из 11 гирь.

5. Пусть O — центр симметрии многоугольника, A — одна из наиболее удалённых от O вершин, B — вершина, симметричная A относительно O. Проведём через точки A и B прямые, перпендикулярные прямой AB. Покажем, что многоугольник лежит внутри и на границе полосы, ограниченной этими прямыми.

В самом деле, если бы некоторая точка Q многоугольника лежала вне этой полосы, то отрезок OQ пересекал бы одну из этих двух прямых. Будем считать, что он пересекает прямую, проходящую через точку A. Тогда или OQ содержит точку A, или образуется треугольник OAQ с тупым углом OAQ (см. рис. 180). В любом случае получаем, что $OQ > OA$. Это противоречит выбору точки A.

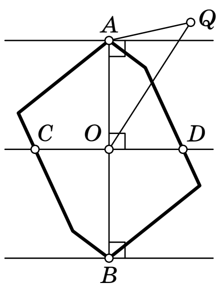


Рис. 180

Проведём теперь через точку O прямую, перпендикулярную прямой AB. В силу выпуклости и симметричности многоугольника, прямая пересечёт его ровно в двух симметричных относительно O точках C и D.

Через любую точку на границе выпуклого многоугольника можно провести так называемую *опорную* прямую к данному многоугольнику — такую прямую, что многоугольник лежит по одну сторону от неё. Для этого можно провести прямую, содержащую сторону, на которой лежит эта точка. В случае когда точка является вершиной этого многоугольника, существует бесконечно много подходящих прямых.

Проведём через точку C опорную прямую (см. рис. 181). Тогда в силу симметрии параллельная ей прямая, проходящая через точку D, также будет опорной. При пересечении четырёх рассмотренных прямых, проведённых через точки A, B, C, D, получим параллелограмм $KLMN$. По построению параллелограмма он содержит данный многоугольник, поэтому площадь многоугольника не превосходит площади параллелограмма.

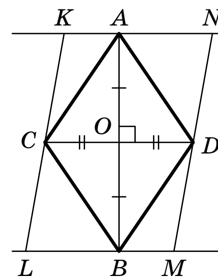


Рис. 181

Рассмотрим теперь четырёхугольник $ACBD$. Его диагонали перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, следовательно, $ACBD$ — ромб. Площадь ромба равна половине произведения длин диагоналей AB и CD. Заметим, что диагональ AB равна высоте параллелограмма $KLMN$, а диагональ CD — его стороне LM, так как $LCDM$ — параллелограмм. Следовательно, площадь ромба $ACBD$ равна половине площади параллелограмма $KLMN$ и не меньше половины площади данного многоугольника. Чтобы получить искомый ромб, совершим гомотетию с центром в точке O и коэффициентом, равным корню из отношения площади данного многоугольника к площади параллелограмма $KLMN$. Поскольку этот коэффициент не превосходит 1, при этой гомотетии ромб $ACBD$ перейдёт в ромб $A'C'B'D'$, также содержащийся внутри данного многоугольника. Отношение площади этого ромба к площади ромба $ABCD$ равно квадрату коэффициента гомотетии, т. е. равно отношению площади данного многоугольника к площади параллелограмма $KLMN$. Значит, площадь ромба $A'C'B'D'$ равна половине площади данного многоугольника, а сам этот ромб удовлетворяет условию задачи.

Комментарий. Предлагаем заинтересованному читателю попытаться самостоятельно решить такую задачу: верно ли, что для любого $\varepsilon \in (0, 1/2)$ найдётся такой выпуклый многоугольник, в который нельзя поместить ромб, площадь которого составляет более $1/2+\varepsilon$ от площади этого многоугольника?

Вот указание к её решению. Рассмотрите прямоугольник, одна сторона которого в k раз больше другой его стороны. Докажите, что все вписанные в него ромбы подобны друг другу, причём наибольшей площадью из них обладает ромб, имеющий общую диагональ с этим прямоугольником. Затем подберите число k так, чтобы площадь этого ромба составляла не более $1/2+\varepsilon$ от площади этого прямоугольника. Рассуждая таким образом, можно показать, что искомый многоугольник всегда найдётся.

6. Рассмотрим произвольный многогранник, каждая грань которого — многоугольник с чётным числом сторон. Предположим, что его рёбра можно раскрасить в два цвета так, чтобы у любой грани оказалось поровну рёбер разных цветов. Каждое ребро многогранника лежит ровно в двух его гранях. Значит, количество рёбер первого цвета в многограннике равно половине суммы всех количеств рёбер первого цвета в каждой из его граней. Аналогично количество рёбер второго цвета в многограннике равно половине суммы всех количеств рёбер второго цвета в каждой из его граней. Эти суммы равны, поэтому равны и количества рёбер первого и второго цвета в многограннике. Следовательно, общее число его рёбер чётно.

Если мы докажем существование многогранника, который имеет нечётное число рёбер, а каждая его грань — чётноугольник, то из этого будет следовать, что требуемая раскраска рёбер возможна не всегда.

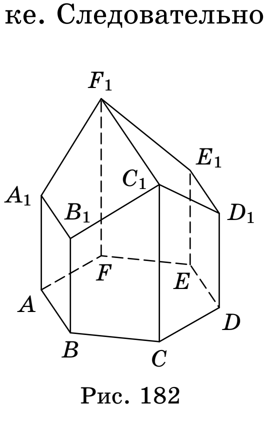


Рис. 182

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной 1 (см. рис. 182). Проведём через его вершины прямые, перпендикулярные плоскости шестиугольника, и отложим на них в одно и то же полупространство отрезки AA_1, BB_1, DD_1 и EE_1 длины 1 и отрезки CC_1 и FF_1 длины 2. Проведём необходимые отрезки так, чтобы получились четырёхугольники $A_1B_1C_1F_1$ и $C_1D_1E_1F_1$ (это возможно, поскольку прямые A_1B_1, C_1F_1 и D_1E_1 параллельны). Построенный многогранник является выпуклым, все грани — чётноугольники (один шестиугольник и восемь четырёхугольников), а число рёбер равно 19. Значит, требуемая раскраска его рёбер невозможна.

Комментарий. Существуют и другие примеры многогранников, требуемая раскраска рёбер которых невозможна, причём все они имеют не менее 19 рёбер. Предлагаем заинтересованному читателю убедиться в этом самостоятельно.

11 класс

1. а) Запишем во все клетки верхней и нижней строк данной таблицы число 1, в центральную клетку число -1, а во все остальные клетки нули. Тогда сумма чисел на любой диагонали равна 1. В самом деле, если диагональ не проходит через центральную клетку, то она имеет только одну общую клетку ровно с одной из строк, заполненных единицами. Если же она проходит через центральную клетку, то она имеет по одной общей клетке с каждой из строк, заполненных единицами.

б) Пусть описанное заполнение возможно. Раскрасим таблицу в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Тогда количество чёрных диагоналей того направления, для которого наибольшая диагональ содержит 1992 клетки, равно 1991, а количество чёрных диагоналей другого направления (для которого обе угловые чёрные клетки являются диагоналями единичной длины) равно 1992. Значит, сумма чисел, записанных в чёрных клетках, равна одновременно 1991 и 1992, что невозможно.

Комментарий. В решении задачи фактически показано, что описанным в условии способом таблицу можно заполнить тогда и только тогда, когда число n нечётно.

2. Проведём окружность через точки A, B и C. Поскольку $\angle ABC + \angle ADC > 180^\circ$, точка D лежит внутри этой окружности. Продлим отрезок BD до пересечения с окружностью в точке K. Покажем, что BK — диаметр окружности. В самом деле, дуга BCK (см. рис. 183) складывается из двух дуг, на которые опираются вписанные углы $\angle BAC$ и $\angle CBK$, поэтому градусная мера дуги BCK равна $2(30^\circ + 60^\circ) = 180^\circ$.

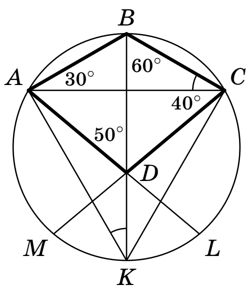


Рис. 183

Продлим отрезки AD и CD до пересечения с окружностью в точках L и M соответственно. Вписанные углы AKB и ACB равны как опирающиеся на одну хорду. По теореме о внешнем угле треугольника имеем $\angle AKD + \angle DAK = 50^\circ$. Поскольку угол BCK опирается на диаметр, он прямой, а значит, $\angle ACB + 40^\circ + \angle DCK = 90^\circ$. Отсюда $\angle AKD + \angle DAK = \angle ACB + \angle DCK$ и $\angle DAK = \angle DCK$. Поэтому дуги KL и KM равны, а точки L и M симметричны относительно прямой BK. При такой симметрии прямая DL перейдёт в прямую DM, а окружность перейдёт в себя. Следовательно, при этой симметрии точка A перейдёт в точку C, а четырёхугольник $ABCD$ перейдёт в себя. Значит, в этом четырёхугольнике $\angle A = \angle C = \angle BAC + \angle ACD = 70^\circ$, $\angle B = 120^\circ$ и $\angle D = 100^\circ$.

Комментарий. Заметим, что условие $\angle ABC + \angle ADC > 180^\circ$ наталкивает на идею проведения окружности через точки A, B и C. Можно показать, что замена этого условия на равенство $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ приводит к другому ответу: $\angle A = \angle C = 90^\circ$, $\angle B = 100^\circ$, $\angle D = 80^\circ$, а конфигурация, при которой $\angle ABC + \angle ADC < 180^\circ$, не существует.

3. *Первый способ.* По данному пути Аладдина построим новый путь следующим образом. Сохраним все движения на восток и на запад, а все мгновенные перемещения в диаметрально противоположные точки исключим. Тогда если мы докажем утверждение задачи для нового пути, оно будет выполняться и для старого, так как для любого отрезка времени разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад для нового и старого путей одинаковы.

Рассмотрим новый путь Аладдина. Заметим, что в каждый момент времени точки экватора, в которых находился Аладдин, двигаясь по старому и по новому путям, либо совпадают, либо диаметрально противоположны. Поскольку Аладдин, проделав старый путь, побывал во всех точках экватора, новый путь будет проходить как минимум по половине экватора. Без ограничения общности можно считать скорость перемещения Аладдина постоянной. Построим график пройденного Аладдином пути с учётом направления, считая, что в начальный момент времени пройденный путь равен нулю (см. рис. 184). График будет представлять собой ломаную, у которой наибольшее и наименьшее значения различаются не меньше, чем на половину длины экватора. Точки, в которых эти значения принимаются, и являются концами искомого отрезка времени.

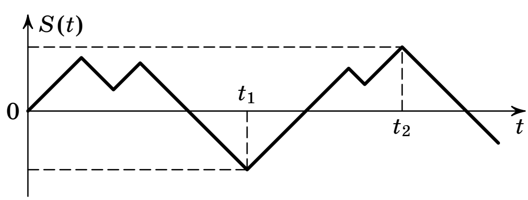


Рис. 184

Второй способ. Обозначим через A и A' произвольные диаметрально противоположные точки экватора, а через C — центр Земли (см. рис. 185). Рассмотрим плоскость экватора с введённой на ней произвольной декартовой системой координат Oxy. Сопоставим каждой точке экватора точку в этой плоскости следующим образом. Поставим точке A в соответствие точку $A^*(1; 0)$, а произвольной точке экватора B — такую точку B^*, что если вектор $\overrightarrow{CB}$ получается из вектора $\overrightarrow{CA}$ поворотом на угол α вокруг точки

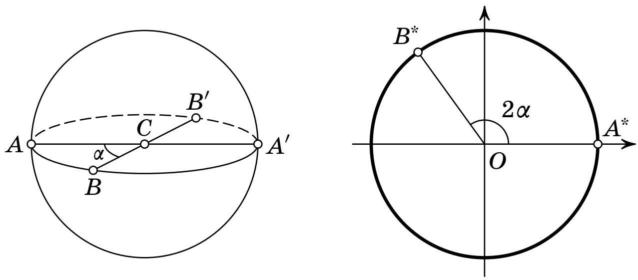


Рис. 185

C в некотором направлении, то вектор $\overrightarrow{OB^*}$ получается из вектора $\overrightarrow{OA^*}$ поворотом вокруг точки O на угол 2α в том же направлении [1]. Заметим, что при таком соответствии диаметрально противоположным точкам экватора соответствуют одинаковые точки лежащей в плоскости Oxy единичной окружности с центром O.

Пусть точка B обозначает положение Аладдина в разные моменты времени. Тогда при движении этой точки на восток или на запад точка B^* движется против или по часовой стрелке соответственно, а при перемещении точки B в диаметрально противоположную точку Земли точка B^* не меняется.

Из условия задачи следует, что точка B^* прошла через все точки единичной окружности, причём двигалась по ней непрерывно. Значит, её координаты $(\cos 2\alpha;\ \sin 2\alpha)$ менялись непрерывно, а сам угол 2α можно представить как непрерывную функцию $2\pi\varphi(t)$ от времени t, где дробная часть $\{\varphi(t)\}$ принимает все значения из промежутка $[0;\,1)$ (дробная часть числа равна разности между числом и его целой частью, график функции $y=\{x\}$ см. на рис. 186).

Если разность между максимумом и минимумом функции $\varphi(t)$ меньше единицы, то функция $\{\varphi(t)\}$ не может принимать все значения из промежутка $[0;\,1)$. Значит, эта

---

[1] Здесь и далее в решении мы считаем, что угол измеряется в радианах и может принимать любые значения.

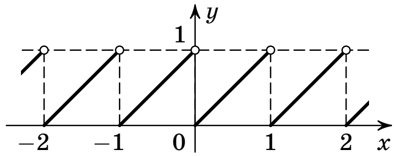


Рис. 186

разность не меньше единицы. Тогда найдутся такие моменты времени $t_1 < t_2$, что $|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \geqslant 1$, т. е. B^* за время от t_1 до t_2 прошла хотя бы один полный круг. Следовательно, за этот отрезок времени разность расстояний, пройденных Аладдином на восток и на запад, не меньше половины длины экватора.

Комментарий. В условии задачи имеется в виду, что разность расстояний вычисляется в одном из двух возможных порядков — фактически рассматривается модуль разности.

4. а) Обозначим через $\vec{n}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, единичный вектор, перпендикулярный i-й грани правильного тетраэдра и направленный наружу тетраэдра. Поскольку при повороте на 120° в любом направлении вокруг любой из его высот правильный тетраэдр переходит в себя, сумма $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4$ также не меняется при таком повороте. Значит, эта сумма параллельна каждой из высот этого тетраэдра, а следовательно, $\vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_3 + \vec{n}_4 = \vec{0}$.

Пусть теперь $\vec{a}$ — любой из двух возможных векторов, перпендикулярных плоскости треугольника, расположенного внутри тетраэдра, и равный по модулю площади этого треугольника. Тогда по формуле для площади ортогональной проекции многоугольника получаем $|(\vec{a}, \vec{n}_i)| = P_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$$P_1 = |(\vec{a}, \vec{n}_1)| = |(\vec{a}, -\vec{n}_2 - \vec{n}_3 - \vec{n}_4)| =$$
$$= |(\vec{a}, \vec{n}_2) + (\vec{a}, \vec{n}_3) + (\vec{a}, \vec{n}_4)| \leqslant |(\vec{a}, \vec{n}_2)| + |(\vec{a}, \vec{n}_3)| + |(\vec{a}, \vec{n}_4)| =$$
$$= P_2 + P_3 + P_4,$$

что и требовалось доказать.

б) Обозначим теперь через $\vec{n}_i$, $i=1, 2, 3, 4$, вектор, перпендикулярный i-й грани тетраэдра, направленный наружу тетраэдра и равный по модулю площади этой грани. Покажем, что $\vec{n}_1+\vec{n}_2+\vec{n}_3+\vec{n}_4=\vec{0}$. Пусть $\vec{e}$ — произвольный единичный вектор. Тогда $(\vec{e}, \vec{n}_i)=S_i\cos\alpha_i$, где α_i — угол между векторами $\vec{e}$ и $\vec{n}_i$. Модуль числа $S_i\cos\alpha_i$ равен площади проекции i-й грани тетраэдра на плоскость π, ортогональную вектору $\vec{e}$, и имеет знак «$-$», если векторы $\vec{e}$ и $\vec{n}_i$ образуют тупой угол, и знак «$+$» иначе. Следовательно, скалярное произведение вектора $\vec{n}_1+\vec{n}_2+\vec{n}_3+$ $+\vec{n}_4$ на вектор $\vec{e}$ равно сумме площадей проекций всех граней тетраэдра на плоскость π, в которой каждая из этих площадей берётся со знаком «$+$» или «$-$» в зависимости от того, острый или тупой угол образуют векторы $\vec{e}$ и $\vec{n}_i$. Примем направление вектора $\vec{e}$ за направление «вверх». Каждая точка внутри ортогональной проекции тетраэдра на плоскость π дважды покроется проекциями его граней на эту плоскость: один раз проекцией «верхней» грани и один раз «нижней». Площади этих двух проекций брались в сумме с разными знаками, поэтому площадь проекции тетраэдра на плоскость π равна сумме площадей проекций всех его «верхних» граней. Она также равна сумме площадей проекций всех его «нижних» граней, поэтому сумма проекций всех граней равна разности этих сумм, т. е. нулю. Следовательно, скалярное произведение вектора $\vec{n}_1+\vec{n}_2+\vec{n}_3+\vec{n}_4$ на произвольный единичный вектор $\vec{e}$ равно нулю, а значит, это нулевой вектор.

Пусть теперь $\vec{a}$ — любой из двух возможных векторов, перпендикулярных плоскости треугольника, расположенного внутри тетраэдра, и равный по модулю площади этого треугольника. Тогда по формуле для площади ортогональной проекции многоугольника получаем $|(\vec{a}, \vec{n}_i)|=$ $=P_iS_i$, где $i=1, 2, 3, 4$. Следовательно,

$$P_1S_1=|(\vec{a}, \vec{n}_1)|=|(\vec{a}, \vec{n}_2)+(\vec{a}, \vec{n}_3)+(\vec{a}, \vec{n}_4)|\leqslant$$
$$\leqslant|(\vec{a}, \vec{n}_2)|+|(\vec{a}, \vec{n}_3)|+|(\vec{a}, \vec{n}_4)|=P_2S_2+P_3S_3+P_4S_4,$$

что и требовалось доказать.

К о м м е н т а р и й. Утверждение о том, что если на каждой грани многогранника выбрать по точке и в каждой из этих точек построить наружу многогранника вектор, который перпендикулярен соответствующей грани и длина которого равна её площади, то сумма всех построенных векторов равна нулю, называется также «леммой о еже». Эта лемма имеет любопытное механическое доказательство: заполним многогранник идеальным газом и поместим в вакуум. Сила давления на каждую грань перпендикулярна ей и пропорциональна её площади. Если сумма этих сил отлична от нуля, то такой многогранник будет двигаться равноускоренно в направлении равнодействующей этих сил, что противоречит закону сохранения энергии. Отметим также, что для правильного многогранника данная лемма утверждает равенство нулю суммы единичных векторов, перпендикулярных граням и направленных наружу (см. также векторное решение задачи 1 для 10 класса в 1982 г.).

5. Рассмотрим выпуклый многогранник, построенный в решении задачи 6 для 10 класса. Если бы его рёбра можно было раскрасить в два цвета так, чтобы у каждой грани количества рёбер разных цветов отличались не более чем на 1, то, поскольку все грани имеют чётное число рёбер, это означало бы, что в каждый из двух цветов должна быть покрашена ровно половина рёбер любой грани. В силу задачи 6 для 10 класса это невозможно.

6. а) Занумеруем правила числами 1, 2, 3. Тогда при сравнении чисел $\log_{25} 75$ и $\log_{65} 260$ прибор будет работать следующим образом:

$$\log_{25} 75 \text{ и } \log_{65} 260 \xrightarrow{\text{правило 1}} \log_{25} 3 \text{ и } \log_{65} 4 \xrightarrow{\text{правило 2}}$$
$$\to \log_4 65 \text{ и } \log_3 25 \xrightarrow{\text{правило 1}} \log_4 \frac{65}{4} \text{ и } \log_3 \frac{25}{3} \xrightarrow{\text{правило 1}}$$
$$\to \log_4 \frac{65}{16} \text{ и } \log_3 \frac{25}{9} \xrightarrow{\text{правило 3}} \text{ответ: } \log_{25} 75 > \log_{65} 260,$$

так как $\frac{65}{16} > 4$ и $\frac{25}{9} < 3$, а значит, $\log_4 \frac{65}{16} > 1 > \log_3 \frac{25}{9}$.

б) *Первый способ*. Покажем, что прибор правильно сравнит любые два неравных логарифма за конечное число шагов. Заметим сначала, что в любой момент времени выполняются условия ровно одного из трёх правил, поэтому алгоритм на каждом шаге или переходит к новой паре чисел, или выдаёт ответ. Далее, при переходе по правилам 1 или 2 условие $a, b, c, d > 1$ сохраняется. Покажем, что на каждом шаге сохраняется и знак неравенства между сравниваемыми логарифмами. В самом деле, переход по правилу 1 равносилен вычитанию единицы из обеих частей неравенства, а поскольку $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ и $\log_c d = \frac{1}{\log_d c}$, переход

$$\log_a b \text{ и } \log_c d \xrightarrow{\text{правило 2}} \log_d c \text{ и } \log_b a$$

представляет собой умножение обеих частей неравенства на положительное число $\log_b a \log_d c$. Наконец, при выполнении условия правила 3 получаем или $a < b$, $c > d$, или $a > b$, $c < d$, поэтому между числами $\log_a b$ и $\log_c d$ можно вставить единицу, а значит, и в самом деле сравнение логарифмов успешно завершается.

Заметим, что переходы по правилу 1, равносильные вычитанию единицы из сравниваемых чисел, не меняют разности сравниваемых логарифмов и не могут следовать друг за другом бесконечное число раз: на некотором шаге хотя бы одно из чисел $\log_a b$ и $\log_c d$ окажется не больше единицы, а значит, условие $b > a$ и $d > c$ нарушится. Далее, заметим, что переход по правилу 2 никогда не производится два раза подряд.

Покажем теперь, что если исходные логарифмы не равны, то алгоритм закончит работу за конечное число шагов. Пусть натуральное число $n > 1$ таково, что модуль разности исходных логарифмов больше $1/n$. Если на некотором шаге впервые окажутся выполнены условия правила 2, т. е. $b < a$ и $d < c$, то это будет означать, что оба числа $\log_a b$ и $\log_c d$ оказались на интервале $(0; 1)$, причём хотя бы одно из этих чисел меньше $1 - 1/n$. Поэтому

$$|\log_d c - \log_b a| = \frac{|\log_a b - \log_c d|}{\log_a b \log_c d} > \frac{1/n}{1 - 1/n} = \frac{1}{n-1}.$$

Рассуждая аналогичным образом далее, получим, что если условия правила 2 будут выполнены в k-й раз ($k=2$, 3, ..., $n-1$), то после применения этого правила модуль разности между сравниваемыми логарифмами будет больше $\frac{1}{n-k}$. Следовательно, при сравнении таких логарифмов количество переходов по правилу 2 не может превосходить $n-1$, так как если разность между сравниваемыми числами станет больше единицы, то после выполнения достаточного числа переходов по правилу 1 один из логарифмов окажется меньше 1, а второй — больше, поэтому будут выполнены условия правила 3 и алгоритм завершит работу.

Второй способ. Покажем, что если исходные логарифмы не равны, то алгоритм закончит работу за конечное число шагов. Предположим противное: пусть прибор не сможет сравнить неравные логарифмы $\log_a b$ и $\log_c d$ за конечное число шагов. Поскольку логарифмы различны, между ними всегда найдётся положительное рациональное число, т. е. такое число $a_1 = m/n$, где m и n — натуральные взаимно простые числа, что $(a_1 - \log_a b)(a_1 - \log_c d) < 0$.

Индукцией по $k = 1$, 2, ... определим рациональные числа a_k и докажем, что a_k находится между логарифмами, сравниваемыми прибором на k-м шаге при любом натуральном k. Число a_1 определено выше и находится между логарифмами, сравниваемыми прибором на первом шаге. Пусть число a_k при некотором из таких k уже определено и находится между логарифмами, сравниваемыми прибором на k-м шаге. Как и в первом решении, заметим, что переход по правилу 1 уменьшает сравниваемые числа на 1, переход по правилу 2 обращает эти числа и переставляет их местами. Положим $a_{k+1} = a_k - 1$, если на k-м шаге происходит переход по правилу 1, и $a_{k+1} = \frac{1}{a_k}$, если на k-м шаге происходит переход по правилу 2. Пусть на k-м шаге сравнивались числа x и y. По предположению $(a_k - x)(a_k - y) < 0$. Отсюда получаем

$$((a_k - 1) - (x - 1))((a_k - 1) - (y - 1)) = (a_k - x)(a_k - y) < 0$$

и
$$\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{x}\right)=\frac{(a_k-x)(a_k-y)}{a_k^2xy}<0.$$

Значит, число a_{k+1} находится между сравниваемыми прибором на $(k+1)$-м шаге логарифмами. Доказательство по индукции закончено.

Далее будем считать, что все числа a_k записаны в виде несократимых дробей. Заметим, что если для некоторого натурального k на k-м шаге происходит переход по правилу 1, то сумма числителя и знаменателя числа a_{k+1} меньше, чем сумма числителя и знаменателя числа a_k, а если на k-м шаге происходит переход по правилу 2, то сумма числителя и знаменателя числа a_{k+1} равна сумме числителя и знаменателя числа a_k. Поскольку прибор не может сделать два перехода по правилу 2 подряд, сумма числителя и знаменателя числа a_{k+2} меньше суммы числителя и знаменателя числа a_k при любом натуральном k. Следовательно, последовательность чисел a_k не может быть бесконечной. Полученное противоречие доказывает, что прибор сравнит любые два неравных логарифма $\log_a b$ и $\log_c d$ за конечное число шагов.

Комментарий. Второе решение пункта б) по сути основано на том, что алгоритм Евклида позволяет за конечное число шагов представить любое рациональное число m/n в виде так называемой *цепной дроби*, т. е. найти такое целое число $q_0 \geqslant 0$ и такой конечный набор натуральных чисел $(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, что

$$\frac{m}{n}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{q_k}}}}.$$

Более подробно познакомиться с цепными дробями и их свойствами можно, прочитав, например, книги [3] и [63].

Путеводитель по задачам

Арифметика и целые числа

Алгебра и начала анализа

Логика и дискретная математика

Геометрические фигуры

Геометрические понятия

Методы и приёмы

Авторы задач

[&] в соавторстве.

Список литературы

[1] XXV Турнир им. М. В. Ломоносова 2002 года / Сост. А. К. Кулыгин. — М.: МЦНМО, 2003.
http://olympiads.mccme.ru/turlom/2002/book-el/tl2002.pdf

[2] Андреева А. Н., Барабанов А. И., Чернявский И. Я. Саратовские математические олимпиады. — М.: МЦНМО, 2013.

[3] Арнольд В. И. Цепные дроби. — М.: МЦНМО, 2015.
http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.14-full.pdf

[4] Баранов В. И., Стечкин Б. С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения. — М.: Физматлит, 2004.

[5] Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. — М.: Мир, 1965.

[6] Болтянский В. Г. Равновеликие и равносоставленные фигуры. — М.: Гостехиздат, 1956.
http://ilib.mccme.ru/plm/ann/a22.htm

[7] Вавилов В. В., Устинов А. В. Окружности на решётках // Квант. — 2006, № 6. — С. 10—14.
http://kvant.mccme.ru/pdf/2006-06s.pdf

[8] Васильев Н. Б. Вокруг формулы Пика // Квант. — 1974, № 12. — С. 39—43.
http://kvant.mccme.ru/1974/12/vokrug_formuly_pika.htm

[9] Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. Заочные математические олимпиады. — М.: Наука, 1974. — (2-е изд. — М.: Наука, 1987).
http://ilib.mccme.ru/djvu/olimp/zaochnye.htm

[10] Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. — М.: Наука, 1988. — (Б-ка математического кружка; Вып. 18).
http://ilib.mccme.ru/djvu/olimp/vsesojuznye.htm

[11] Васильев Н. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л., Савин А. П. Математические соревнования. Геометрия. — М.: Наука, 1974. — (Б-чка физ.-мат. школы; Вып. 4*).
http://math.ru/lib/zaochn/9

[12] Вейль Г. Симметрия. — М.: Наука, 1968.
http://ilib.mccme.ru/djvu/weyl-symmetry.htm

[13] Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Задачи и упражнения по дискретной математике. — М.: Физматлит, 2006.

[14] Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1986.
http://ilib.mccme.ru/djvu/olimp/galperin-tolpygo.htm

[15] Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971. — (2-е изд. — М.: Мир, 1999).

[16] Гашков С. Б. Геометрические неравенства. Путеводитель в задачах и теоремах. — М.: Либроком, 2013.

[17] Гашков С. Б. Задача Чебышёва и тригонометрические многочлены // Квант. — 1990. № 6. — С. 25–27.
http://kvant.mccme.ru/1990/06/zadacha_chebysheva_i_trigonome.htm

[18] Гашков С. Б. Занимательная компьютерная арифметика. Математика и искусство счёта на компьютерах и без них. — М.: Либроком, 2012.

[19] Гашков С. Б. Легко ли складывать и умножать дроби // Квант. — 1994. № 3. — С. 41–43.
http://kvant.mccme.ru/1994/03/legko_li_skladyvat_i_umnozhat.htm

[20] Гашков С. Б. Системы счисления и их применение. — М.: МЦНМО, 2004. — (2-е изд. — М.: МЦНМО, 2012).
http://www.mccme.ru/free-books/mmmf-lectures/book.29.pdf
http://math.ru/lib/mmmf/29

[21] Гашков С. Б. Современная элементарная алгебра в задачах и упражнениях. — М.: МЦНМО, 2006.

[22] Gaschkov S. B. Ein einfacher geometrischer Beweis für die Determinantenungleihung von O. Szasz // Elemente der Mathematik. — Basel, 1990. — V. 45, № 6. — Pp. 153—155.
http://www.e-periodica.ch/cntmng?pid=edm-001:1990:45::262

[23] Гашков С. Б. О тригонометрических многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, с фиксированным средним коэффициентом // Математическое просвещение. Сер. 3. — М.: МЦНМО, 2005. — Вып. 9. — С. 56—68.

[24] Гашков С. Б. Неравенства для площади и периметра выпуклого многоугольника // Квант. — 1985, № 10. — С. 15–19.
http://kvant.mccme.ru/1985/10/neravenstva_dlya_ploshchadi_i.htm

[25] Гашков С. Б., Чубариков В. Н. Арифметика. Алгоритмы. Сложность вычислений. — М.: Дрофа, 2005.

[26] Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978.

[27] Гильберт Д. Основания геометрии. — Л.: Сеятель, 1923.
http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/osn_geom.htm

[28] Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел. — М.: Наука, 1971.

[29] Евклид. Начала / Предисл., пояснит. введ. и доп. М. Е. Ващенко-Захарченко. — М.: Либроком, 2012.

[30] Избранные задачи из журнала «American Mathematical Monthly» / Под ред. В. М. Алексеева. — М.: Мир, 1977. — (Задачи и олимпиады). — (Другое издание : Избранные задачи по математике из журнала «American Mathematical Monthly». — 3-е изд. — М.: УРСС, Либроком, 2009).

[31] Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. — М.: Наука, 1980.

[32] Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2014.

[33] Кнут Д. Э. Искусство программирования: В 4 т. — Т. 2.: Получисленные алгоритмы. — 3-е изд. — М.: Вильямс, 2000.

[34] Ловас Л., Пламмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. — М.: Мир, 1998.

[35] Lucas É. Récréations mathématiques. — Paris: Gauthier-Villars, 1881–1894.
https://archive.org/details/rcrationsmathma00lucagoog

[36] Мельников И. Г. Удобные числа в рукописном наследии Эйлера // Историко-математические исследования. Вып. XXVII: Сб. статей. — М.: Наука, 1983. — С. 10—26.

[37] Mitrinović D. S. Analytic Inequalities. — Berlin: Springer-Verlag, 1970.

[38] Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги. — М.: Просвещение, 1976.
http://ilib.mccme.ru/djvu/olimp/mezhdunarodnye.htm

[39] Московские математические олимпиады 1935—1957 г. / В. Прасолов и др. — М.: МЦНМО, 2010.

[40] Московские математические олимпиады 1958—1967 г. / В. Прасолов и др. — М.: МЦНМО, 2013.

[41] Оре О. Графы и их применения. — М.: Мир, 1965.

[42] Оре О. Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980.
http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/ore.htm

[43] Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. — М.: Мир, 1984.

[44] Петер Р. Игра с бесконечностью. — М.: Молодая гвардия, 1967.

[45] Питерсон У., Уэлдон Э. Коды, исправляющие ошибки: Пер. с англ. — М.: Мир, 1976.

[46] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. — М.: МЦНМО, 2006.
http://math.ru/lib/426

[47] Протасов В. Ю. Максимумы и минимумы в геометрии. — М.: МЦНМО, 2012.
http://math.ru/lib/mmmf/31

[48] Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. — М.: Физматгиз, 1962.
http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/num-fig.htm

[49] Решения задачника Кванта. Математика // Квант. — 1982, № 1. — С. 29–30.
http://kvant.mccme.ru/1982/01/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

[50] Решения задачника Кванта. Математика // Квант. — 1982, № 2. — С. 29—30.
http://kvant.mccme.ru/1982/02/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

[51] Решения задачника Кванта. Математика // Квант. — 1985, № 4. — С. 39—42.
http://kvant.mccme.ru/1985/11/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

[52] Решения задачника Кванта. Математика // Квант. — 1985, № 11. — С. 38.
http://kvant.mccme.ru/1985/11/resheniya_zadachnika_kvanta_ma.htm

[53] Решения задачника Кванта. Математика // Квант. — 1990, № 2. — С. 33—37.
http://kvant.mccme.ru/1990/02/resheniya_zadach_m1181_-_m1185.htm

[54] Сендеров В., Спивак А. Уравнения Пелля (часть I) // Квант. — 2002, № 3. — С. 3—9.
http://kvant.mccme.ru/pdf/2002/03/kv0302senderov.pdf

[55] Сендеров В., Френкин Б. Гипотеза Каталана // Квант. — 2007, № 4. — С. 8—10.
http://kvant.mccme.ru/pdf/2007-04s.pdf

[56] Серпинский В. 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968.
http://ilib.mccme.ru/djvu/serp-250-tch.htm

[57] Серпинский В. О решении уравнений в целых числах. — М.: Физматлит, 1961.
http://ilib.mccme.ru/djvu/serp-int_eq.htm

[58] Тригг Ч. Задачи с изюминкой. — М.: Мир, 1975. (2-е изд. — М.: Мир, 2000.)
http://math.ru/lib/272

[59] Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады (задачи олимпиад 1961—1993 гг.). — СПб: Политехника, 1994.

[60] Хадвигер Г. Лекции об объёме, площади поверхности и изопериметрии. — М.: Наука, 1966.

[61] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973. — (Другое издание : М.: Едиториал УРСС, 2003).

[62] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.

[63] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Физматлит, 1960.
http://ilib.mccme.ru/djvu/hinchin-cep-dr.htm

[64] Хованский А. Г. Построения циркулем и линейкой // Математическое просвещение. Сер. 3. — М.: МЦНМО, 2013. — Вып. 17. — С. 42—60.
http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mph.pdf

[65] Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.

[66] Чашкин А. В. Лекции по дискретной математике. — М.: МГУ, 2010. http://new.math.msu.su/department/dm/dmmc/EDU/DM07.pdf

[67] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970. — (Б-ка математического кружка; Вып. 12).
http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/shk-12.htm

[68] Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1974. — (Б-ка математического кружка; Вып. 13).
http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-mat-kr/shk-13.htm

[69] Штейнгауз Г. Сто задач. — М.: Наука, 1976.

[70] Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга. — М.: Учпедгиз, 1939.
http://ilib.mccme.ru/djvu/geometry/shteiner.htm

[71] Энциклопедия элементарной математики. Книга четвёртая. — М.: Физматгиз, 1963.
http://ilib.mccme.ru/djvu/encikl/enc-el-4.htm

[72] Эрдёш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике. — М.: Мир, 1976.

[73] Яблонский С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Сборник статей по математической логике и её приложениям к некоторым вопросам кибернетики. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 5—142. — (Тр. МИАН СССР; Т. 51).

[74] Яглом А. М., Яглом И. М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — М.: ГТТИ, 1954. — (Б-ка математического кружка; Вып. 5). — (Другое издание : М.: URSS, 2015).
http://ilib.mccme.ru/djvu/yaglom/ne-elem-zadachi.htm

Интернет-источники

[75] Coppersmith D., Nagy G., Ravsky A. On curves contained in convex subsets on the plane. — arXiv: 1205.0663v1. [math.MG]

[76] Diophantine Equation
http://mathworld.wolfram.com/DiophantineEquation2ndPowers.html

[77] Журнал «Квант»
http://kvant.mccme.ru

[78] Интернет-проект «Задачи»
http://www.problems.ru

Оглавление