В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, М. М. КОВАЛЕВ,
М. К. КРАВЦОВ

# МНОГОГРАННИКИ
# ГРАФЫ
# ОПТИМИЗАЦИЯ

МНОГОГРАННИКИ • ГРАФЫ • ОПТИМИЗАЦИЯ

В. А. ЕМЕЛИЧЕВ, М. М. КОВАЛЕВ,
М. К. КРАВЦОВ

# МНОГОГРАННИКИ ГРАФЫ ОПТИМИЗАЦИЯ

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1981

22.19
E60
УДК 519.8

**Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория многогранников).** Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. — 344 с.

Книга посвящена комбинаторной теории многогранников. Наряду с классическими результатами представлена новая проблематика, порожденная задачами оптимизации. Устанавливаются и исследуются связи многогранников с графами и проективными геометриями, излагаются способы построения выпуклых оболочек допустимых областей в задачах целочисленного программирования. Детально изложены результаты о многогранниках транспортной задачи. Рассмотрены проблемы полиэдральной комбинаторики, связанные с задачами оптимизации на матроидах и полиматроидах.



$E \frac{20204-117}{053(02)-81}$ 35-81. 1702070000

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ВВЕДЕНИЕ

Исследованием многогранников занимались еще в античные времена: XIII книга Евклида посвящена пяти правильным многогранникам, так называемым платоновым телам. Архимед в своем сочинении «О многогранниках» описал все полуправильные многогранники (тела Архимеда).

Первым результатом комбинаторной теории многогранников можно считать один из классических результатов математики — формулу для числа вершин, ребер и граней трехмерного многогранника, полученную Р. Декартом и позднее, в 1736 г., независимо от него Л. Эйлером. Обобщение этой формулы для выпуклых многогранников произвольной размерности дал А. Пуанкаре. Эта формула легла в основу комбинаторной топологии.

В рамках исследования фигур, образованных вершинами и ребрами некоторого трехмерного многогранника, возникла также другая дисциплина — теория графов.

Выделившись в самостоятельные разделы математики, теория графов и комбинаторная топология дали аппарат для исследования задач, возникших в комбинаторной теории многогранников в конце прошлого столетия в результате изучения свойств многомерных параллелоэдров (выпуклых многогранников). Характеризация выпуклых тел посредством выпуклых многогранников остается основным приемом исследования и в наше время. Эффективность такого подхода связана с тем, что многогранники характеризуются конечным числом данных. Под выпуклым многогранником мы понимаем всюду выпуклую линейную оболочку конечного множества точек в $n$-мерном евклидовом пространстве.

Работы Г. Ф. Вороного, Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина и Г. Минковского [24] по геометрии чисел привели к появлению новых классов задач на многогранниках — задач о распределении целых точек в многогранниках, возникновение которых обусловлено геометрическими исследованиями знаменитого русского кристаллографа Е. С. Федорова. Классические теоремы Г. Минковского и Л. Кронекера дают критерии существования целой точки в выпуклом теле, симметричном относительно начала координат. Проблема существования целой точки в многограннике, другими словами, состоит в поиске условий существования решений системы линейных диофантовых неравенств.

Благодаря работам А. Д. Александрова [1] в середине 20-го столетия были завершены исследования в метрической теории многогранников, начатые еще О. Коши и приведшие к созданию А. В. Погореловым общей теории выпуклых поверхностей [9].

В сороковых годах нашего столетия на передний край математической науки выдвинулась, как фундамент кибернетики, дискретная математика [5, 15], что привело к выделению в самостоятельную научную дисциплину комбинаторной и дискретной геометрий, изучающих задачи о нахождении в том или ином смысле наилучших расположений конечных систем точек или геометрических фигур [2, 10, 11]. Типичные для комбинаторной геометрии задачи связаны с оценкой числа фигур, входящих в удовлетворяющую условиям задачи конфигурацию. Большинство задач комбинаторной геометрии ставится для выпуклых тел, в связи с чем при решении многих из них используются свойства многогранников. Последнее стимулировало исследование комбинаторных и метрических свойств многогранников и зависимостей между ними. Это привело в начале 50-х годов к возникновению и выдвижению на первое место нового раздела теории выпуклых многогранников — комбинаторной теории многогранников.

Комбинаторная теория многогранников изучает экстремальные свойства многогранников, рассматривая множество его граней всех размерностей как некоторый комплекс.

Отчасти современные тенденции формирования новой проблематики комбинаторной теории многогранников нашли свое отражение в монографиях Б. Грюнбаума [18], П. Макмюллена и Г. Шепарда [26], Г. Бартельса [16] и в обзорных докладах [21, 25], прочитанных на Ванкуверском математическом конгрессе.

Однако эти монографии, как и многочисленные обзоры (см. [19]), не затрагивают многие актуальные направления в изучении многогранников, возникшие в конце пятидесятых годов на стыке двух важных для приложений разделов математики — теории конечных неравенств и теории оптимизации. Главной задачей, как мы считаем, является теперь решение комбинаторных проблем, в постановку которых входит не геометрическое или топологическое представление многогранника, а его аналитическая трактовка с помощью систем линейных неравенств. Некоторые из этих проблем решены полностью,— такова задача о максимальном числе неравенств в аналитическом описании многогранников с фиксированным числом вершин. Решение других проблем находится на стадии разработки,— такова задача о диаметре многогранника и «наилучшем» симплексном методе линейного программирования.

Основной объект изучения данной книги — комбинаторные задачи теории линейных неравенств как с действительными, так и с целочисленными переменными и коэффициентами. Исследуются как общие системы линейных неравенств, так и специальные. Почти все результаты, изложенные в книге в геометрической интерпретации, допускают переформулировку в терминах теории линейных неравенств.

Начало систематического изучения многогранников как множеств решений конечных систем линейных неравенств можно отнести к концу прошлого столетия, хотя отдельные свойства систем линейных неравенств можно найти в более ранних работах Ж. Б. Фурье (метод исключения), М. В. Остроградского (связь с аналитической механикой), И. Фаркаша. Однако общая задача изучения геометрических свойств многогранника как решений конечной системы линейных неравенств возникла, по-видимому, только после работ Г. Ф. Вороного [30]. В частности, Г. Ф. Вороным [31] был получен критерий, с помощью которого можно было определить совместность системы строгих неравенств и размерность многогранника ее решений. В дальнейшем изучение систем линейных неравенств привлекало многих видных математиков, таких как Г. Минковский [23], Г. Вейль [3]. Значительный вклад в развитие этой теории внесли советские математики. Здесь в первую очередь, следует отметить работы С. Н. Черникова [14], И. И. Еремина [6, 7] и В. С. Чарина [13].

Особенность данной монографии состоит в изучении комбинаторных свойств многогранников (множеств решений систем линейных неравенств) в тесной связи с задачами оптимизации, которые важны для практических применений. Как классические работы Л. В. Канторовича [8] и Д. Данцига [4], так и более поздние работы В. Кли [20] и Л. Г. Хачияна [12] вскрывают роль комбинаторных характеристик допустимых областей для построения эффективных методов решения задач линейного программирования. Поэтому в изложении материала книги упор сделан на связь комбинаторных и топологических аспектов теории многогранников со способами их аналитического описания и в конечном итоге с теорией линейного и дискретного программирования.

Центральной в комбинаторной теории многогранников является проблема перечисления и классификации многогранников с заданной структурой его граней. Более точно комбинаторные свойства многогранника могут быть охарактеризованы при помощи понятия комбинаторной эквивалентности (изоморфизма многогранников).

Л. Эйлер решил ряд задач перечисления для некоторых типов триангулированных многогранников, расположенных на плоскости, все же существенные шаги в теории перечисления многогранников еще не сделаны. Основные усилия направлены на перечисление 3-мерных многогранников с данным числом вершин из-за их многочисленных приложений. Перечислением 3-мерных многогранников занимались Я. Штейнер [29], Киркман [22], Брюкнер [17] и др. Благодаря теореме Штейница (§ 1 гл. II) эта задача эквивалентна задаче перечисления трехсвязных планарных графов. Однако и в этом случае проблема полностью не решена [28]. Для произвольного $d$ в настоящее время перечислены только $d$-мерные многогранники с числом вершин не превосходящим $d+3$ (§ 2 гл. III).

Проблема перечисления и классификации комбинаторных типов многогранников, заданных в аналитической форме, поставлена впервые. Применение традиционного аппарата в виде помеченных граничных комплексов многогранников в такой форме задания приводит к ряду затруднений. Чтобы их преодолеть, в монографии введен новый прием перечисления и классификации многогранников с помощью полуматроидов многогранников, несущих информацию об инцидентных отношениях между вершинами и гранями максимальной размерности. Благодаря этому приему получены критерии комбинаторной эквивалентности помеченных многогранников (§ 1 гл. III). С помощью полуматроидов многогранников удалось установить комбинаторный тип многогранника условий во многих важных для приложений задачах, таких как задачи стандартизации и экстремальные задачи на перестановках (гл. V). Вторым основополагающим понятием при идентификации комбинаторного типа помеченного многогранника явилось понятие спектра двух многогранников (§ 1 гл. III). Особенно результативным оказалось использование этого понятия при установлении разнообразных комбинаторных свойств транспортных многогранников (§§ 6—9 гл. VI).

Второй важной проблемой комбинаторной теории многогранников со времен Эйлера считается задача описания области значений векторной функции $f(M)$ ($f$ — вектор), компоненты которой указывают число граней соответствующей размерности многогранника $M$. Как мы уже отмечали, формула Эйлера — Пуанкаре была первым результатом, указавшим гиперплоскость, в которой лежат $f$-векторы всех многогранников данной размерности. Позже было установлено, что отличных от формулы Эйлера — Пуанкаре линейных соотношений для $f$-векторов многогранников не существует.

Предпринимались попытки получить нелинейное соотношение, а также линейные для специальных подклассов многогранников. Наиболее известные из них — уравнения Дена — Соммервилля для симплициальных многогранников (§ 5 гл. I).

Мощным стимулом к изучению многогранников явились две гипотезы: о максимальном и минимальном числе граней в классе всех $d$-мерных многогранников с фиксированным числом вершин, выдвинутые примерно в 1957 г. Обе эти гипотезы породили обширную литературу (обзор см. в [19]). Наконец в 1970 г. первая из них была полностью решена П. Макмюлленом, а вторая в 1971 г. частично (для симплициальных многогранников) — Барнеттом, (§ 3, 4 гл. III). Границы изменения $f$-вектора в классах специальных многогранников продолжают изучаться. Заметим, что полностью значения функции $f(M)$ известны только на классах $d$-мерных многогранников с числом вершин, не превосходящим $d+3$, а также для отдельных комбинаторных типов многогранников: симплексов, призм, пирамид и т. д. В книге детально изучены важные для приложений транспортные многогранники. В частности, для так называемых классических транспортных многогранников (гл. VI) проведена классификация по числу граней, выделены классы с экстремальными значениями $f$-вектора, а также найдены критерии принадлежности транспортного многогранника с фиксированным числом граней к классу многогранников с минимальным и максимальным числом вершин. На основе этих критериев решается ряд известных проблем и гипотез комбинаторной теории транспортных многогранников. Часть результатов, полученных для классических транспортных многогранников, удается перенести на многоиндексные транспортные многогранники (планарные и аксиальные). Отдельно исследованы многогранники транспортных задач с запретами и с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

Третья проблема касается изучения свойств графов (1-скелетов) многогранников (гл. II). Фундаментальными здесь являются теоремы Штейница и Балинского. Первая из них утверждает, что граф является 1-скелетом 3-мерного многогранника тогда и только тогда, когда он планарен и трехсвязен, вторая — что граф $d$-мерного многогранника является $d$-связным.

Среди графовых характеристик многогранников наибольший интерес представляют диаметр, радиус и высота. Диаметр $D(M)$ многогранника $M$ определяется как наименьшее целое $k$ такое, что между любой парой его вершин существует цепь на графе многогранника длины не больше $k$. Обозначим через $\Delta(d, n)$ максимальный диаметр в классе $d$-мерных многогранников с $n$ гранями максимальной размерности. С максимальным диаметром многогранника связана следующая известная гипотеза (гипотеза о максимальном диаметре): $\Delta(d, n) \leqslant n-d$. В общем случае гипотеза не доказана. Известные границы для величины $\Delta(d, n)$:

$$[(n-d)-(n-d)/[5d/4]]+1 \leqslant \Delta(d, n) \leqslant 2^{d-3}n$$

показывают, как мало мы еще знаем о максимальном диаметре. Установлено только, что гипотезу достаточно доказать для случая $n=2d$. Имеется ряд частных результатов, дающих вычисление $\max D(M)$ для случая, когда $M$ пробегает некоторые специальные классы многогранников: многогранники бистохастических матриц (§ 1 гл. V), многогранники задачи коммивояжера (§ 2 гл. V), многогранник задачи стандартизации (§ 5 гл. V), перестановочные многогранники (§ 3 гл. V). Все сказанное поднимает важный вопрос о выделении тех или иных классов многогранников, для которых удается либо доказать гипотезу о максимальном диаметре, либо понизить оценки для $\Delta(d, n)$. Существенное продвижение в решении гипотезы о максимальном диаметре удается получить для транспортных многогранников (§ 4 гл. VI).

Значительный интерес представляет и решение обратной задачи о характеризации всех многогранников с данным диаметром или радиусом. Полностью эта проблема решена только для многогранников, имеющих либо радиус, либо диаметр, равный двум.

Отметим тесную связь результатов о метрических характеристиках графа многогранника с проблемами оценки числа итераций и эффективности алгоритмов симплексного типа в задачах линейного программирования. Если требуется определить экстремум линейной функции на многограннике $M$ с $n$ гранями максимальной размерности, то максимальное число вершин в классе многогранников с $n$ гранями можно считать верхней границей числа итераций. Диаметр и радиус многогранника есть максимальное число итераций «наилучшего» симплексного алгоритма соответственно при наихудшем и наилучшем выборе стартовой вершины. Наиболее точно характеризует эффективность симплексных алгоритмов такая характеристика многогранника $M$, как высота. Под высотой $\eta(M)$ многогранника $M$ понимается длина (по числу ребер) самой длинной цепи в графе $G(M)$, вдоль которого некоторая линейная функция строго монотонна, т. е. высоту многогранника можно интерпретировать как точное число итераций «наихудшего» симплексного алгоритма при неудачном выборе стартовой вершины. В. Кли и Минти показали, что

$$\alpha n^{[d/2]} < \max \eta(M) < \beta n^{[d/2]},$$

где максимум берется по всем $d$-мерным многогранникам с $n$ гранями максимальной размерности, $\alpha$, $\beta$ — константы, зависящие от $d$. В частности, доказано, что $\max \eta(M) \geqslant 2^d - 1$, и приведен пример задачи линейного программирования, где эта оценка достижима.

Классическая теорема Вейля — Минковского утверждает, что множество $M \subset E_n$ есть многогранник тогда и только тогда, когда оно ограничено и является пересечением конечного числа замкнутых полупространств. Минимальное семейство замкнутых полупространств, пересечение которых есть множество $M$, определяется гиперплоскостями, являющимися аффинными оболочками граней максимальной размерности многогранника $M$. Из теоремы Вейля — Минковского следует существование двух форм задания многогранника: первой — в виде выпуклой оболочки конечного множества его точек (параметрическое представление); второй — как множество решений конечной системы неравенств (аналитическое представление), причем минимальное множество точек, выпуклая оболочка которых есть многогранник $M$, совпадает с множеством его вершин, а неприводимая система неравенств, задающая многогранник, определяется гранями максимальной размерности.

Четвертая проблема комбинаторной теории многогранников охватывает комплекс задач, связанный с поиском эффективного способа перехода от одной формы задания многогранника к другой. Для перехода от аналитической формы задания к параметрической необходимо найти все вершины многогранника. В некоторых случаях это удается сделать в явном виде, но чаще изучаются только свойства вершин. Особенно важно бывает установить целочисленность координат всех вершин многогранника; такие многогранники называются *целочисленными*. Целочисленные многогранники играют фундаментальную роль в целочисленном программировании. Задача описания всех систем линейных неравенств, задающих целочисленные многогранники, не решена. Однако уже вскрыта глубокая связь между целочисленными многогранниками и многими важными проблемами теории графов и гиперграфов, такими, как сильная гипотеза Бержа о совершенных графах (§ 5 гл. IV). Любой результат, касающийся целочисленных многогранников, автоматически влечет серию результатов в теории графов. Так, в гл. IV практически все наиболее важные теоремы о покрытиях и паросочетаниях в графах, такие, как теорема Кенига, Уитни, Менгера, Гейла и др. выводятся из свойств целочисленных многогранников. Многие ставшие хорошо известными теоремы о матроидах и полиматроидах также выводятся из свойства целочисленности соответствующих многогранников. Введенное в гл. IV понятие $\alpha$-модулярных матриц дает возможность расширить известные ранее классы целочисленных многогранников. В гл. IV предпринимается систематическое изучение также классов многогранников, у которых часть вершин с целыми координатами обладает определенными свойствами, позволяющими решать задачи целочисленного программирования алгоритмами симплексного типа. Среди таких многогранников оказались такие важные для приложений задачи, как задача о $p$-медиане, об упаковке ребер гиперграфа, о размещении.

Переход от параметрической формы задания выпуклого многогранника к аналитической имеет большое значение для задач дискретной оптимизации, так как позволяет сформулировать их в терминах линейного программирования. Чтобы его осуществить, необходимо дать описание всех граней максимальной размерности многогранника. Для большинства задач дискретной оптимизации явный вид всех граней до настоящего времени не найден. Наиболее интересные результаты получены для многогранников задачи об упаковке, задачи о максимальном паросочетании графа, задачи коммивояжера, задачи о рюкзаке (все они приводятся в гл. IV). В теоретическом плане значительный интерес представляет задача аналитического описания выпуклой оболочки целочисленных решений системы линейных неравенств, т. е. целочисленных точек многогранника. На принципиальную возможность получения такого описания указывает еще теорема Гильберта о конечном базисе кольца многочленов, однако эффективные методы до сих пор не получены. В § 1 гл. IV излагается подход к построению методов аналитического и параметрического описания целых точек многогранников, основанный на выделении порождающих множеств полугрупп.

Наряду с использованием общих подходов построения выпуклых оболочек в гл. IV при аналитическом описании многогранников, имеющих в качестве вершин перестановки компонент некоторого вектора (такие многогранники возникают в теории расписаний), применяются и специальные теоремы Биркгофа и Радо о перестановочных матрицах.

Еще одна особенность монографии состоит в установлении связи между многогранниками и комбинаторным анализом (см. [27]). В частности, изучены зависимости между многоиндексными задачами о назначениях и ортогональными системами латинских кубов. Тем самым обнаружена связь между свойствами многогранников и конечных геометрий (§ 3 гл. VIII).

Таким образом, в монографии систематизирован и единообразно изложен обширный материал по изучению комбинаторных свойств множеств допустимых решений разнообразных задач оптимизации.

В конце каждой главы помещен ряд вспомогательных и специальных результатов. Они сформулированы в виде задач, решение которых в большинстве случаев можно найти в указанных источниках. Среди задач имеются и такие (отмечены звездочкой), решение которых авторам не известно.

В конце книги предложены нерешенные проблемы и гипотезы. Часть из них хорошо известна, но большинство формулируется впервые.

ГЛАВА I

# ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

## § 1. Выпуклые множества

Цель этого параграфа — напомнить некоторые свойства выпуклых множеств, а также дать читателю возможность увидеть место выпуклых многогранников в классе всех выпуклых множеств. По поводу доказательств приведенных здесь классических результатов следует обратиться к одной из книг [4,8 — 10,18].

**1. Аффинные множества.** Множество $A$ точек евклидова действительного $d$-мерного пространства $E_d$ называется *аффинным множеством,* если оно вместе с любыми своими двумя различными точками содержит прямую, проходящую через них, т. е. если $x$, $y \in A$, то и $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$ для каждого $\lambda \in E_1$. Аффинные множества, содержащие нулевую точку (обозначается 0), являются линейными пространствами.

Отображение $\alpha$: $E_d \to E_k$, определенное правилом

$$\alpha(x) = Ax + a, \qquad x \in E_d,$$

где $A$ — $(k \times d)$-матрица и $a \in E_k$, называется *аффинным отображением.* Если $A$ — невырожденная матрица, то отображение $\alpha$ называется *невырожденным отображением,* а в противном случае — *вырожденным.*

Для $A \subset E_d$ и $a \in E_d$ *сдвигом множества $A$ на вектор $a$* называется множество $A + a = \{x + a: x \in A\}$. Два аффинных множества называются *параллельными множествами,* если одно из них может быть получено сдвигом другого множества или его подмножества на некоторый вектор. Два множества $A$ и $A'$ называются *аффинно эквивалентными,* если существует невырожденное аффинное отображение $\alpha$ такое, что $\alpha(A) = A'$. Каждое непустое аффинное множество параллельно единственному пространству:

$$L = \{x - a: x \in A\}, \qquad a \in A.$$

Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$ точек $x^1, \ldots, x^n$ из $E_d$ называется *аффинной комбинацией,* если $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, где $\lambda_i \in E_1$. Конечное множество точек называется *линейно* (*аффинно*) *независимым,* если ни одна точка этого множества не принадлежит линейной (аффинной) комбинации остальных точек множества. Ясно, что множество точек $x^1, \ldots, x^n$ является линейно (аффинно) зависимым, если точка 0 может быть представлена в виде $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i$ с некоторыми $\lambda_i \neq 0$ (в случае аффинной зависимости $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$). Максимальное число линейно независимых точек множества $\{x^1, \ldots, x^n\}$, где $x^j = (x_{1j}, \ldots, x_{dj}) \in E_d$, равно рангу $(d \times n)$-матрицы $\| x_{ij} \|$, в то время, как максимальное число аффинно независимых точек равно рангу $((d+1) \times n)$-матрицы, столбцами которой являются векторы $\bar{x}^j = (x_{1j}, \ldots, x_{dj}, 1)$. Максимальное число линейно (аффинно) независимых точек в $E_d$ равно $d (d+1)$.

Линейное пространство (аффинное множество) называется *d-мерным,* если максимальное число линейно (аффинно) независимых точек, содержащихся в нем, равно $d (d+1)$. Размерность множества $A$ обозначается через $\dim A$. Ясно, что размерность аффинного множества равна размерности того линейного пространства, сдвигом которого получается $A$. Размерность пустого множества считается равной $-1$. Аффинные множества размерностей 0, 1 и 2 есть, соответственно, точка, прямая и плоскость.

Пусть $S$ — произвольное непустое подмножество из $E_d$. Тогда совокупность всех аффинных комбинаций каждого набора точек из $S$ является аффинным множеством, называется *аффинной оболочкой* $S$ и обозначается через $\operatorname{aff} S$. Понятно, что если $S$ — аффинное множество, то $\operatorname{aff} S = S$.

Следующая теорема показывает, что при построении аффинных оболочек нет необходимости брать аффинные комбинации всех наборов точек, а достаточно ограничиться рассмотрением только некоторых наборов, так называемых *порождающих наборов.*

Теорема 1.1. *Аффинное k-мерное множество $A \subseteq E_d$ есть аффинная оболочка любого подмножества $S \subseteq A$, состоящего из $k+1$ аффинно независимых точек, и наоборот.*

Аффинно независимая система точек $S$, порождающая множество $A$, т. е. такая, как в теореме 1.1, называется *аффинным базисом* множества $A$.

Для любых аффинных базисов существует единственное невырожденное аффинное преобразование, переводящее один базис в другой.

Аффинное множество размерности $d-1$ в $E_d$ называется *гиперплоскостью*. Всякая гиперплоскость $H \subset E_d$ представима уравнением вида $ax = \beta$, где $a \in E_d$, $a \neq 0$ $\beta \in E_1$; при этом вектор $a$ называется *направляющим вектором* гиперплоскости $H$. Гиперплоскости называются *линейно независимыми гиперплоскостями*, если их направляющие векторы линейно независимы.

Теорема 1.2. *Всякое аффинное множество размерности $d-k$ в $E_d$ может быть представлено как пересечение $k$ линейно независимых гиперплоскостей. Обратно, пересечение $k$ линейно независимых гиперплоскостей в $E_d$ есть аффинное множество размерности $d-k$.*

Пусть заданы вектор $b \in E_m$ и $(m \times d)$-матрица $A$ ранга $m$. Тогда непустое множество решений линейной системы уравнений

$$Ax = b \tag{1.1}$$

есть $(d-m)$-мерное аффинное множество в $E_d$.

**2. Выпуклые множества.** *Отрезком*, соединяющим точки $x, y \in E_d$, называется множество всех точек вида $\lambda x + (1-\lambda) y$, где $\lambda$ пробегает все действительные числа между 0 и 1 (включая их). Такой отрезок будем обозначать через $[x, y]$.

Множество $W \subseteq E_d$ называется *выпуклым множеством*, если оно вместе с любыми двумя точками $x$ и $y$ содержит и соединяющий их отрезок.

Приведем примеры выпуклых множеств.

1. Аффинное множество.
2. Луч $\{x \in E_d\colon\ x = a + bt,\ \ t \geqslant 0\}$ с концом в точке $a \in E_d$ и направляющим вектором $b \neq 0$.
3. Замкнутые полупространства $\overset{(-)}{H^+} = \{x \in E_d\colon\ ax \overset{(\leqslant)}{\geqslant} \beta\}$, определяемые гиперплоскостью $H = \{x \in E_d\colon\ ax = \beta\}$.
4. Замкнутый (открытый) шар $S(a, r) = \{x \in E_d\colon\ \|x - a\| \overset{(<)}{\leqslant} r\}$ с центром в точке $a$ и радиусом $r \geqslant 0$.

Так как пересечение любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество, то совокупность решений любой (конечной или бесконечной) системы линейных неравенств $a_i x \leqslant \beta_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ либо выпуклое, либо пустое множество (если система несовместна).

Множество решений конечной системы линейных неравенств называется *полиэдром*.

Выпуклые множества $W_1, W_2 \subset E_d$ называются *отделимыми*, если существует такая гиперплоскость $H \subset E_d$, что множество $W_1$ расположено в одном, а $W_2$ — в другом замкнутом полупространстве, определяемом гиперплоскостью $H$; сама гиперплоскость $H$ называется *отделяющей гиперплоскостью*. Далее, выпуклые множества $W_1, W_2 \subset E_d$ называются *сильно отделимыми*, если для них существует такая отделяющая гиперплоскость $H$, что множества $W_1$ и $W_2$ содержатся в соответствующих открытых полупространствах. Если множество $W_1$ принадлежит открытому полупространству, порождаемому гиперплоскостью $H$, а $W_2$ принадлежит другому полупространству (возможно, замкнутому), то говорят, что *гиперплоскость $H$ строго отделяет множество $W_1$ от множества $W_2$*.

Сформулируем одно фундаментальное утверждение относительно выпуклых множеств. Это утверждение является основой доказательства большинства важных фактов теории выпуклых множеств.

Напомним, что множество называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре.

Теорема 1.3 (об отделимости). *Пусть $W_1$, $W_2$ — произвольные выпуклые замкнутые множества в $E_d$ без общих точек, из которых хотя бы одно ограничено. Тогда множества $W_1$ и $W_2$ сильно отделимы.*

Следствие 1.4. *Если $W_1$ и $W_2$ — произвольные выпуклые множества без общих точек, то они отделимы.*

Важными следствиями из теоремы об отделимости выпуклых множеств являются теоремы об опорных гиперплоскостях.

Пусть $W$ — некоторое непустое множество в $E_d$. Гиперплоскость $H$ называется *опорной гиперплоскостью* к множеству $W$, если $H$ имеет хотя бы одну общую точку с $W$, и множество $W$ лежит в одном из двух замкнутых полупространств $H^+$ или $H^-$, определяемых этой гиперплоскостью. Полупространство, содержащее множество $W$, называем *опорным* к $W$.

Следствие 1.5. *Для всякого замкнутого ограниченного выпуклого множества $W \subset E_d$ существует опорная гиперплоскость к $W$ с любым заданным направляющим вектором.*

*Проекцией точки $x$ на выпуклое множество $W$* назовем точку $x'$, на которой достигается $\inf\limits_{y \in W} \|x - y\|$. Такая точка всегда единственна.

Следствие 1.6. *Для всякого замкнутого ограниченного выпуклого множества $W$ и точки $x \notin W$ существует опорная гиперплоскость $H$, строго отделяющая точку $x$; при этом $H \cap W = \{x'\}$, где $x'$ — проекция точки $x$ на множество $W$.*

Теорема 1.7. *Любое замкнутое выпуклое множество $W \neq E_d$ представимо в виде пересечения некоторого семейства замкнутых полупространств. В качестве таких полупространств достаточно взять все опорные полупространства к $W$.*

Таким образом, любое замкнутое выпуклое множество в $E_d$ можно задать с помощью некоторой, вообще говоря, бесконечной системы линейных неравенств.

*Размерностью выпуклого множества $W$* из $E_d$ называется размерность его аффинной оболочки. Совокупность всех внутренних точек множества $W$ в $E_d$ обозначается через $\operatorname{int} W$ и называется *внутренностью множества* $W$. Ясно, что размерность выпуклого множества $W$, имеющего непустую внутренность в $E_d$, равна $d$. Если размерность множества $W$ меньше $d$, то это множество не имеет внутренних точек в $E_d$. Относительно своей аффинной оболочки $\operatorname{aff} W$ выпуклое множество $W$ имеет внутренние точки.

Внутренность множества $W \subset E_d$ относительно его аффинной оболочки, размерность которой меньше $d$, обозначается через $\operatorname{rel\,int} W$. Если множество $W \subset E_d$ выпукло, то его замыкание $\overline{W}$ и относительная внутренность $\operatorname{rel\,int} W$ также являются выпуклыми множествами. Множество $\overline{W} \setminus \operatorname{rel\,int} W$, т. е. граница выпуклого множества $W$, обозначается через $\operatorname{rel\,bd} W$. Если $\dim W = d$, то множество $\operatorname{rel\,bd} W = \overline{W} \setminus \operatorname{int} W$ представляет собой границу множества $W$ в $E_d$ и обозначается через $\operatorname{bd} W$.

Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$ точек $x^1, \ldots, x^m \in E_d$ называется *выпуклой*, если $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Пусть $S$ — некоторое непустое множество в $E_d$. Тогда совокупность $\operatorname{conv} S$ всех выпуклых комбинаций каждого конечного набора точек из $S$ является выпуклым множеством, которое называется *выпуклой оболочкой множества* $S$. Выпуклая оболочка $\operatorname{conv} S$ множества $S \subseteq E_d$ есть наименьшее выпуклое множество, содержащее $S$. Множество $W$ является выпуклым тогда и только тогда, когда $W = \operatorname{conv} W$.

Следующий классический результат, принадлежащий Каратеодори [12, 13], показывает, что при рассмотрении выпуклой оболочки множества $S \subset E_d$ нет необходимости брать комбинации, включающие более чем $d+1$ точек.

Теорема 1.8. *Выпуклая оболочка всякого множества $S \subseteq E_d$ совпадает с объединением выпуклых комбинаций всех подмножеств из $S$, содержащих не более $d+1$ точек.*

Точка $x$ выпуклого множества $W$ называется *крайней*, если она не лежит внутри отрезка с концами из $W$.

Теорема 1.9. *Непустое выпуклое ограниченное замкнутое множество в $E_d$ имеет крайние точки и является выпуклой оболочкой всех своих крайних точек.*

**3. Выпуклые конусы.** Подмножество $K$ из $E_d$ называется *конусом*, если $\lambda x \in K$ для всех $x \in K$ и $\lambda \geqslant 0$. *Выпуклый конус* — это конус, являющийся выпуклым множеством. Выпуклым конусом, например, является всякое линейное пространство в $E_d$. Полупространство в $E_d$, определяемое гиперплоскостью, проходящей через нулевую точку, также конус. Так как пересечение выпуклых конусов является выпуклым конусом, то множество решений конечной системы однородных линейных неравенств — также выпуклый конус. Последний называется *полиэдральным конусом*.

*Конической комбинацией* множества точек $x^1, \ldots, x^m \in E_d$ называется всякая точка $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, $\lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_m$.

Пусть $S$ — некоторое непустое множество в $E_d$. Тогда совокупность $\operatorname{kon} S$ конических комбинаций всевозможных наборов точек из $S$ является выпуклым конусом, который называется *конусом, порожденным множеством* $S$. Выпуклый конус, порожденный конечным набором векторов, называется *многогранным* Выпуклый конус называется *острым конусом*, если он не содержит ненулевых подпространств. Острый конус не содержит целиком ни одной прямой. Для острого многогранного конуса существует единственное (с точностью до положительного скаляра) порождающее множество, элементы которого называем *остовом конуса*.

Следующий фундаментальный результат в теории выпуклых конусов и теории линейных неравенств, принадлежит Вейлю [35].

Теорема 1.10. *Выпуклый конус $K$ является полиэдральным тогда и только тогда, когда $K$ — многогранный конус.*

## § 2. Выпуклые многогранники

В этом параграфе наряду с классической теоремой Вейля — Минковского приводятся элементарные сведения о многогранниках [22, 28].

Определение 2.1. Выпуклая оболочка конечного множества точек $V$ в $E_d$ называется *выпуклым многогранником*, порожденным точками из $V$.

Поскольку в дальнейшем речь будет идти только о выпуклых многогранниках и конусах, слово выпуклый будет опускаться.

**1. Вершины.** Пусть $H$ — опорная гиперплоскость к многограннику $M$.

Определение 2.2. Множество $F = M \cap H$ называется *гранью многогранника* $M$, порожденной $H$. Если $\dim F = i$, то $F$ называется *$i$-гранью* многогранника $M$, 0-грани называются *вершинами* многогранника $M$, множество всех вершин обозначаем через $\operatorname{vert} M$; 1-грани называем *ребрами* многогранника $M$; $\varnothing$ и $M$ называем *несобственными гранями*, а все остальные грани — *собственными гранями* многогранника $M$.

Теорема 2.1. *Многогранник имеет конечное число различных граней и каждая его грань есть многогранник.*

Доказательство. Предположим, что многогранник $M = \operatorname{conv} V$, где $V = \{x^1, \ldots, x^n\}$. Пусть $H = \{x \in E_d\colon\ ax = \beta\}$ — опорная гиперплоскость к $M$, порождающая грань $F$. Пусть для простоты $H \cap V = \{x^1, \ldots, x^s\}$. Докажем, что грань $F$ есть многогранник. Для этого покажем, что $F = \operatorname{conv}(x^1, \ldots, x^s)$. Для произвольной точки $x \in M$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \in N_n.$$

Вычислим

$$ax = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a x^i = \beta \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i = \beta + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_i,$$

где $\delta_i = ax^i - \beta$. Пусть $M \subset H^+$. Тогда $x^i \in H^+\ \forall i \in N_n$. Ясно, что $x^i \notin H$ для $i = s+1, \ldots, n$. Поэтому $\delta_i = 0\ \ \forall i \in N_s$, но $\delta_i > 0$, $i = s+1, \ldots, n$. Точка $x \in F$ тогда и только тогда, когда

$ax=\beta$. Последнее возможно только тогда, когда $\lambda_i=0$ для $i=s+1, \ldots, n$. Поэтому $F=\operatorname{conv}(x^1, \ldots, x^s)$, т. е. $F$ — многогранник. Множество $V$ конечно, и так как каждая грань порождается некоторым его подмножеством, то получаем, что число граней конечно. Теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2. *Многогранник совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин.*

Следствие 2.3. *Каждая грань $F$ многогранника совпадает с выпуклой оболочкой своих вершин, т. е. $F=\operatorname{conv}\operatorname{vert} F$.*

Следствие 2.4. *Крайними точками многогранника являются лишь его вершины.*

Теорема 2.2 и следствие 2.4 позволяют дать новое определение вершины многогранника.

Определение 2.3. Точка многогранника $M$ называется *вершиной*, если она не является выпуклой комбинацией никаких других точек этого многогранника.

**2. Теорема Вейля — Минковского.**

Теорема 2.5 (Вейля — Минковского [30, 35]). *Множество $M$ является многогранником тогда и только тогда, когда $M$ — ограниченный полиэдр.*

Доказательство. Пусть $M$ — многогранник. Без ограничения общности считаем, что $M$ — $d$-многогранник в $E_d$. Это избавит нас от необходимости рассматривать $\operatorname{rel}\operatorname{int} M$. Пусть $F_1, \ldots, F_s$ — семейство всех $(d-1)$-граней $M$ и пусть $H_1, \ldots, H_s$ — опорные гиперплоскости к $M$, порождающие грани $F_1, \ldots, F_s$. Пусть $H_1^+, \ldots, H_s^+$ — опорные полупространства к $M$, соответствующие гиперплоскостям $H_1, \ldots, H_s$. Докажем, что

$$M=\bigcap_{i=1}^{s} H_i^+. \tag{2.1}$$

То, что многогранник $M$ принадлежит общей части полупространств $H_i^+$ $\forall i\in N_s$, очевидно.

Докажем противоположное включение. Предположим противное. Пусть существует точка $x$, которая принадлежит общей части полупространств $H_i^+$ $\forall i\in N_s$, но не принадлежит многограннику $M$. Рассмотрим аффинные оболочки $A_\omega$ каждого $(d-1)$-подмножества $\omega$ множества $\operatorname{vert} M$ и точки $x$. Пусть $A=\bigcup\limits_{\omega} A_\omega$. Так как $\dim M=d$, а размерность каждого $A_\omega$ не превосходит $d-1$, то существует точка $y$ такая, что $y\in\operatorname{int} M$ и $y\notin A$. Поскольку точка $x\notin M$, то существует единственная точка $z$ пересечения отрезка $[x, y]$ с $\operatorname{bd} M$. Покажем, что $z$ принадлежит некоторой $(d-1)$-грани $F_i$. Действительно, если $z$ принадлежит некоторой $j$-грани меньшей размерности, то в силу теорем 2.1 и 2.2 $z\in\operatorname{conv}(x^1, \ldots, x^s)$, где $x^1, \ldots, x^s$ — некоторые вершины этой грани, причем по теореме Каратеодори (теорема 1.8) $s\leqslant j+1$ и поэтому $s \leqslant d-1$. Следовательно, $z \in A$, но по построению множества $A$ точка $x \in A$ и поэтому весь отрезок $[x, y] \in A$, но это противоречит выбору точки $y$. Следовательно, $z$ принадлежит некоторой $(d-1)$-грани $F_i$, но тогда $z \in H_i$. Поскольку точка $y \in \operatorname{int} M \subset H_i^+$, то $x \notin H_i^+$. Полученное противоречие показывает, что $x \in M$ и, следовательно, справедливо равенство (2.1).

Пусть $M = \bigcap\limits_{i=1}^{s} H_i^+$ — ограниченный полиэдр, где $H_1^+, \ldots, H_s^+$ — замкнутые полупространства. Без ограничения общности считаем, что $\dim M = d$, и среди $H_i^+$ нет избыточных полупространств.

Пусть $F_i = M \cap H_i$. Тогда

$$F_i = \left(\bigcap_{j=1}^{s} H_j^+\right) \cap H_i = \bigcap_{j \neq i} \left(H_j^+ \cap H_i\right). \tag{2.2}$$

Из-за ограниченности множества $M$ и в силу соотношения (2.2), $F_i$ — ограниченный полиэдр для каждого $i$.

Доказательство проведем индукцией по $d$. Ограниченный полиэдр $M$ в $E_1$, очевидно, является либо точкой, либо отрезком. В первом случае множество $M = x = \operatorname{conv} x$, а во втором случае $M = [x^1, x^2] = \operatorname{conv}(x^1, x^2)$. Допустим справедливость утверждения для пространства $E_{d-1}$. Поскольку $\dim F_i \leqslant d-1$, то по предложению индукции $F_i$ — многогранник. Согласно теореме 2.2 $F_i = \operatorname{conv} \operatorname{vert} F_i$. Пусть $V = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \operatorname{vert} F_i$. Так как $V \subseteq M$ и $M$ — выпуклое множество, то $\operatorname{conv} V \subseteq M$.

Покажем справедливость противоположного включения. Пусть $x \in M$. Допустим сначала, что $x \in \operatorname{bd} M$. Каждая точка границы $\operatorname{bd} M$ лежит на границе одного из $H_i^+$. Ясно, что $\operatorname{bd} M = \bigcup\limits_{i=1}^{s} F_i$. Поэтому $x \in F_i$ для некоторого $i \in N_s$. По предложению индукции $x \in \operatorname{conv} \operatorname{vert} F_i$ и, следовательно, $x \in \operatorname{conv} V$. Пусть теперь точка $x \in \operatorname{int} M$. Рассмотрим прямую, проходящую через $x$. Эта прямая пересечет $\operatorname{bd} M$ ($M$ — выпуклое ограниченное множество) в двух точках, $x'$ и $x''$. Согласно предыдущему $x', x'' \in \operatorname{conv} V$ и, следовательно, точка $x \in \operatorname{conv}(x', x'')$ также принадлежит множеству $\operatorname{conv} V$. Итак, $\operatorname{conv} V = M$. Теорема 2.5 доказана.

Следствие 2.6. *Всякий $d$-многогранник в $E_d$ с $m$ $(d-1)$-гранями образован пересечением $m$ замкнутых полупространств.*

Следствие 2.7. *Если $M$ — многогранник в $E_d$ и $A$ — аффинное множество в $E_d$, то $A \cap M$ — также многогранник.*

**3. Грани.**

Предложение 2.8. *Пусть $M_1$, $M_2$ — многогранники такие, что $M_2 \subset M_1$. Если $F$ — грань многогранника $M_1$, то $F \cap M_2$ — грань многогранника $M_2$ (возможно, несобственная).*

Доказательство. Предложение очевидно, если $F$ — несобственная грань $M_1$. В противном случае, пусть $H$ — опорная гиперплоскость многогранника $M_1$, порождающая грань $F$. Ясно, что либо $M_2 \cap H = \emptyset$, либо $H$ — опорная гиперплоскость к $M_2$. В первом случае $H \cap M_2 = \emptyset$ — несобственная грань $M_2$. Во втором, — $H \cap M_2 = F \cap M_2$ — собственная грань $M_2$.

Теорема 2.9. *Пусть $F_1$, $F_2$ — грани многогранника $M$, $F_2 \subset F_1$. Тогда $F_2$ — грань многогранника $F_1$. Обратно, если $F_1$ — грань многогранника $M$, а $F_2$ — грань многогранника $F_1$, то $F_2$ — также грань многогранника $M$.*

Доказательство. Первая часть теоремы непосредственно следует из предложения 2.8. Докажем вторую часть. Без ограничения общности считаем, что $0 \in F_2$ и $M$ есть $d$-многогранник в $E_d$. Пусть $a_1$ — направляющий вектор гиперплоскости $H_1$, порождающей грань $F_1$, причем $M \subset H_1^+$. Пусть вектор $a_2 \in H_1$, такой, что $F_1 \subset \{x \in H_1\colon a_2x \geqslant 0\}$ и $F_2 = F_1 \cap H_2$, где $H_2 = \{x \in H_1\colon a_2x = 0\}$ — аффинное множество размерности $d-2$. Пусть $H_\varepsilon = \{x \in E_d\colon (a_1 + \varepsilon a_2)x = 0\}$. Тогда $H_\varepsilon \supset H_2 \supset F_2$ для каждого $\varepsilon$. Пусть $\alpha = \max\{|a_2x|\colon x \in \operatorname{vert} M \setminus \operatorname{vert} F_1\}$, $\beta = \min\{a_1x\colon x \in \operatorname{vert} M \setminus \operatorname{vert} F_1, a_1x > 0\}$. Покажем, что если $0 < \varepsilon < \beta / 2\alpha$ ($0 < \varepsilon$, если $\alpha = 0$), то $H_\varepsilon$ — опорная гиперплоскость к $M$ и $F_2 = M \cap H_\varepsilon$. В самом деле, если $x \in \operatorname{vert} M \setminus \operatorname{vert} F_1$, то $(a_1 + \varepsilon a_2)x \geqslant \beta - \varepsilon\alpha > \beta/2 > 0$, а если $x \in \operatorname{vert} F_1 \setminus \operatorname{vert} F_2$, то $(a_1 + \varepsilon a_2)x = \varepsilon a_2 x > 0$; наконец, если $x \in \operatorname{vert} F_2$, то $(a_1 + \varepsilon a_2)x = 0$, т. е. $x \in H_\varepsilon$. Теорема 2.9 доказана.

Теорема 2.10. *Пусть $F_1, \ldots, F_s$ — некоторое семейство граней многогранника $M$. Тогда $F = \bigcap_{i=1}^{s} F_i$ — также грань многогранника $M$ (возможно, несобственная).*

Доказательство. Если $F = \emptyset$ или $s = 1$, то теорема очевидна. Пусть $F \neq \emptyset$ и $s \neq 1$. Без ограничения общности считаем, что $F_i$ — собственные грани $M$ и выбрана такая система координат, что $0 \in F$. Пусть $H_i = \{x \in E_d\colon a_ix = 0\}$ — опорная гиперплоскость к $M$, порождающая грань $F_i$ и $M \subset H_i^+$ $\forall i \in N_s$. Пусть $H = \{x \in E_d\colon ax = 0\}$, где $a = \sum_{i=1}^{s} a_i$. Тогда $M \subset H^+$, и так как $0 \in H \cap M$, то $H$ — опорная гиперплоскость к многограннику $M$. Осталось показать, что $F = H \cap M$. Для каждого $x \in F$ имеем $a_ix = 0$ $\forall i \in N_s$, и, следовательно, $x \in M \cap H$. Поэтому $F \subseteq M \cap H$. С другой стороны, если $x \in M \setminus F$, то $a_ix > 0$ по крайней мере для одного $i$, и поэтому $ax > 0$. Следовательно, $x \notin M \cap H$, и поэтому $M \cap H \subseteq F$.

Следствие 2.11. *Каждая $(d-2)$-грань $d$-многогранника есть пересечение двух его $(d-1)$-граней.*

Теорема 2.12. *Пусть $F^j$ — собственная $j$-грань $d$-многогранника $M$ и пусть $j \leqslant k \leqslant d-1$. Тогда $F^j$ есть пересечение по крайней мере $k-j+1$ $k$-граней многогранника $M$, содержащих $F^j$.*

Доказательство. Докажем сначала, что для $F^j$ существуют такие $(j+1), \ldots, (d-1)$-грани $F^j, F^{j+1}, \ldots, F^{d-1}$ многогранника $M$, для которых справедливы включения $F^j \subset F^{j+1} \subset \ldots \subset F^{d-1}$. Для этого убедимся в том, что если $F^j$ — собственная грань многогранника $M$, то $F^j$ — также грань некоторой $(d-1)$-грани. Выберем точку $x \in \operatorname{relint} F^j$. Тогда $x \in \operatorname{bd} M$, так как $F^j \subset \operatorname{bd} M$, но мы уже при доказательстве теоремы 2.5 убедились, что граница $\operatorname{bd} M$ совпадает с объединением всех $(d-1)$-граней $d$-многогранника, поэтому существует $(d-1)$-грань $F^{d-1}$, содержащая точку $x$. Пусть $H$ — опорная гиперплоскость к $M$, порождающая грань $F^{d-1}$. Так как $x \in \operatorname{rel\,int} F^{d-1} \cap H$, и $H$ — опорная гиперплоскость к $M$, то $F^j \subset H$. Следовательно, $F^j \subset F^{d-1}$ и по теореме 2 9 $F^j$ — грань многогранника $F^{d-1}$. Продолжая рассуждения по индукции, выводим, что $F^j$ — грань некоторой грани $F^{d-2}$ многогранника $F^{d-1}$ и т. д.

Пусть $F^{k+1}$ — $(k+1)$-грань, содержащая грань $F^j$ (если $k=d-1$, то $F^{k+1}=M$). Тогда каждая $(k-1)$-грань, в том числе $F^{k-1}$, многогранника $F^{k+1}$ есть пересечение двух его $k$-граней (следствие 2.11), каждая $(k-2)$-грань, в том числе $F^{k-2}$, есть в свою очередь пересечение двух $(k-1)$-граней многогранника $F^{k+1}$ и т. д. В конце концов, получим, что грань $F^j$ есть пересечение не менее $k-j+1$ $k$-граней многогранника $F^{k+1}$, которые по теореме 2.10 являются гранями многогранника $M$.

Следствие 2.13. *Всякая $j$-грань $d$-многогранника есть пересечение не менее $d-j$ его $(d-1)$-граней.*

Предложение 2.14. *Пусть $F$ — $j$-грань $d$-многогранника $M$. Тогда существует $(d-j-1)$-грань $F'$ многогранника $M$ такая, что* $\dim \operatorname{conv}(F \cup F') = d$.

Доказательство. Отметим сначала, что из определения размерности следует $F \cap F' = \varnothing$. Если $F$ — $(d-1)$-грань многогранника $M$, то в качестве $F'$ возьмем вершину, не принадлежащую $F$. Если $\dim F = j \leqslant d-2$, то грань $F$ содержится в некоторой $(d-1)$-грани $G$ многогранника $M$, и по предположению индукции существует $(d-j-2)$-грань $G'$ многогранника $G$ такая, что $\dim(F \cup G') = d-1$. Пусть $F'$ — $(d-j-1)$-грань многогранника $M$, которая содержит $G'$, но не содержится в $G$. Существование такой грани $F'$ очевидно, так как $G'$ содержится в некоторой $(d-1)$-грани многогранника $M$, отличной от $G$. Тогда $F'$ — искомая грань многогранника, так как $\dim \operatorname{conv}(F \cup F') > \dim \operatorname{conv}(F \cup G') = d-1$.

Предложение 2.15. *Пусть $M$ — многогранник и пусть $W \subseteq V = \operatorname{vert} M$. Тогда* $\operatorname{conv} W$ *есть грань многогранника $M$ в том и только том случае, когда* $\operatorname{aff} W \cap \operatorname{conv}(V \setminus W) = \varnothing$.

Доказательство этого простого утверждения предоставляем читателю.

**4. Примеры многогранников.** Простейший тип многогранников — симплексы.

Определение 2.4. Выпуклая оболочка аффинно независимых точек называется *симплексом*, $d$-симплекс обозначается через $T_d$.

Каждая грань многогранника есть выпуклая оболочка некоторого подмножества его вершин. Так как подмножество аффинно независимого множества также аффинно независимо, то каждая грань симплекса есть также симплекс соответствующей размерности. Пусть $T_d \subset E_d$. Тогда каждое $d$-подмножество $W \subset \operatorname{vert} T_d$ определяет гиперплоскость в $E_d$, которая, очевидно, является опорной к $T_d$. Поэтому $\operatorname{conv} W$ есть $(d-1)$-грань симплекса $T_d$. Так как каждая грань симплекса $\operatorname{conv} W$, согласно теореме 2.9 есть грань симплекса $T_d$, то по индукции получаем следующее предложение.

Предложение 2.16. *Пусть $0 \leqslant k \leqslant d-1$. Каждое $(k+1)$-подмножество вершин $d$-симплекса определяет $k$-грань. Число $f_k(T_d)$ $k$-граней симплекса $T_d$ равно* $\binom{d+1}{k+1}$.

Ясно, что любые два $k$-симплекса в $E_d$, $k \leqslant d$, аффинно эквивалентны. Действительно, если $T'_k$ и $T''_k$ — два $k$-симплекса в $E_d$, то множества их вершин $x^0, \ldots, x^k$, $y^0, \ldots, y^k$ можно дополнить до аффинных базисов $x^0, \ldots, x^d$ и $y^0, \ldots, y^d$ в $E_d$. Существует аффинное невырожденное преобразование $\alpha$, переводящее один базис в другой: $\alpha(x^i) = y^i$, $i = 0, 1, \ldots, d$. Следовательно, симплексы $T'_k$ и $T''_k$ — аффинно эквивалентны.

Симплекс $T_d$ имеет $d+1$ $(d-1)$-граней и при определенно выбранной системе координат задается в $E_d$ следующими ограничениями:

$$\sum_{i=1}^{d} x_i \leqslant 1, \qquad x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_d.$$

Такой симплекс называется *регулярным симплексом*.

Определение 2.5. Многогранник называется *симплициальным*, если все его собственные грани — симплексы.

Говорят, что множество точек $V$ в $E_d$ находится в общем положении, если каждое его $(d+1)$-подмножество состоит из аффинно независимых точек. Если все вершины некоторого $d$-многогранника находятся в общем положении, то в $E_d$ не существует гиперплоскости, которая содержала бы больше чем $d$ вершин из $M$. Так как любые вершины у такого многогранника аффинно независимы, то каждая его $(d-1)$-грань — симплекс. Следовательно, выпуклая оболочка множества точек, находящихся в общем положении, есть симплициальный многогранник. Заметим, что существуют симплициальные многогранники, у которых не все вершины находятся в общем положении: более $d$ вершин могут находиться в одной гиперплоскости $H$, лишь бы $H$ не была опорной к $M$ (рис. 1).

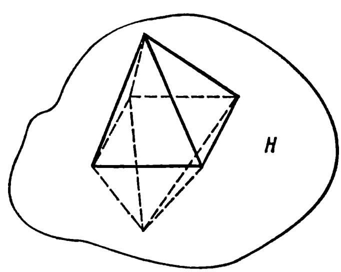


Рис. 1.

Каждая $j$-грань $d$-многогранника согласно теореме 2.12 есть пересечение не менее $d-j$ $(d-1)$-граней. Рассмотрим класс $d$-многогранников, у которых $(d-1)$-грани находятся в общем положении. Это означает, что каждая $j$-грань определяется пересечением точно $d-j$ граней размерности $d-1$.

Определение 2.6. $d$-многогранник называется *простым многогранником*, если каждая его вершина принадлежит (инцидентна) ровно $d$ граням максимальной размерности.

Позже мы увидим, что простые и симплициальные многогранники тесно связаны между собой и являются в определенном смысле двойственными.

Рассмотрим один из наиболее интересных примеров симплициальных многогранников. Пусть в $E_d$ в параметрической форме задана кривая $x(\tau)=(x_1(\tau), \ldots, x_d(\tau))$, где $x_i(\tau)=\tau^i$.

Определение 2.7. *Циклическим многогранником* (обозначается $C(d, n)$) называется выпуклая оболочка $n$ различных точек, лежащих на кривой $x(\tau)$.

Циклические многогранники играют важную роль в комбинаторной теории многогранников. Они были введены в 1907 г. Каратеодори [12] и переоткрыты в 1956 г. Д. Гейлом [20, 21]; см. также [11].

Предложение 2.17. *Циклический многогранник является симплициальным.*

Доказательство. Покажем, что все вершины циклического многогранника $C(d, n)$ находятся в общем положении. Для этого возьмем $d+1$ вершин $x(\tau_1), \ldots, x(\tau_{d+1})$. Тогда

$$\Delta=\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \ldots & \tau_{d+1} \\ \tau_1^2 & \tau_2^2 & \ldots & \tau_{d+1}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_1^d & \tau_2^d & \ldots & \tau_{d+1}^d \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

есть определитель Вандермонда и поэтому $\Delta \neq 0$. Следовательно, точки $x(\tau_i)$ — аффинно независимы, и поэтому каждая собственная грань циклического многогранника является симплексом.

Определение 2.8. Многогранник $M$ называется *$k$-смежностным многогранником*, если каждое $k$-подмножество его вершин является множеством вершин некоторой собственной грани многогранника $M$.

Например, $d$-симплекс является $d$-смежностным многогранником, а всякий многогранник — 1-смежностным.

Предложение 2.18. *Циклический многогранник $C(d, n)$ является $[d/2]$-смежностным.*

Доказательство. Пусть $m=[d/2]$. Для произвольного $m$-подмножества $V_m=\{x(\tau_i^*)\colon i \in N_m\}$, где $\tau_1^*<\ldots<\tau_m^*$, вершин циклического многогранника $C(d, n)$ введем полином

$$g(\tau)=\prod_{i=1}^{m}(\tau-\tau_i^*)^2=\beta_0+\beta_1\tau+\ldots+\beta_{2m}\tau^{2m}.$$

Пусть $H=\{x\in E_d\colon ax=-\beta_0\}$ — гиперплоскость с направляющим вектором $a=(\beta_1, \ldots, \beta_d)$, где $\beta_d=0$, если $d=2m+1$. Ясно, что $x(\tau_i^*)\in H$ $\forall i\in N_m$, и для каждой вершины $C(d, n)$ справедливо

$$ax(\tau')=-\beta_0+\prod_{i=1}^{m}(\tau'-\tau_i^*)^2>-\beta_0.$$

Следовательно, $H$ — опорная гиперплоскость к многограннику $C(d, n)$ и $H\cap \operatorname{vert} C(d, n)=V_m$, а это означает, что вершины из множества $V_m$ порождают грань $F=H\cap C(d, n)$.

Следствие 2.19. $f_i(C(d, n))=\binom{n}{i+1}$ $\forall i\in N_{[d/2]}$.

## § 3. Операции над многогранниками

**1. Простейшие операции.** Пусть $M_1$ и $M_2$ — многогранники в $E_d$. Множество

$$M=\{x\in E_d\colon x=x_1+x_2,\quad x_1\in M_1,\quad x_2\in M_2\}$$

называется *суммой многогранников* $M_1$ и $M_2$ и обозначается $M_1+$ $+M_2$ Понятно, что операцию сложения многогранников можно обобщить на произвольные выпуклые множества, причем их сумма будет также выпуклым множеством.

С помощью введенной операции теорему 1.10 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3.1. *Полиэдр $P$ решений совместной неоднородной системы линейных неравенств представляется в виде суммы $P=$ $=M+K$ некоторого многогранника $M$ и многогранного конуса $K$, который совпадает с полиэдральным конусом решений соответствующей системы однородных неравенств.*

*Произведением двух многогранников* $M_1$ в $E_{d_1}$ и $M_2$ в $E_{d_2}$ называется множество

$$M_1\otimes M_2=\{(x_1, x_2)\colon x_i\in M_i,\ i=1, 2\}.$$

*Проективным преобразованием* пространства $E_d$ в $E_k$ называется отображение $\tau$, заданное правилом

$$\tau(x)=\frac{\alpha(x)}{ax+\beta},\qquad x\in E_d,$$

где $\alpha$ — аффинное преобразование $E_d$ в $E_k$, $a$ — $d$-вектор, $\beta$ — действительное число. Проективное преобразование $\tau$ называется *невырожденным*, если соответствующее ему аффинное преобразование $\alpha$: $E_{d+1}\to E_{k+1}$, определенное правилом $\alpha(x, 1)=(\alpha(x),\ ax+\beta)$, является невырожденным. Проективное преобразование $\tau$ называется *допустимым для множества* $W$, если $W \cap H = \varnothing$, где $H = \{x \in E_d:\ ax+\beta=0\}$.

*Проективным образом многогранника* $M \subset E_d$ называется множество $\tau(M)$, где $\tau$ — проективное преобразование, допустимое для $M$.

Предложение 3.2. *Многогранниками являются:* 1) *сумма конечного числа многогранников*; 2) *выпуклая оболочка конечного числа многогранников*; 3) *непустое пересечение конечного числа многогранников*; 4) *произведение конечного числа многогранников*; 5) *аффинный образ многогранника*; 6) *проективный образ многогранника*.

Первые четыре утверждения очевидны, а пятое и шестое вытекают из определения аффинного и проективного преобразований и их очевидных свойств $\alpha(M) = \operatorname{conv} \alpha(\operatorname{vert} M)$, $\tau(M) = \operatorname{conv} \tau(\operatorname{vert} M)$.

**2. Поляры.** Согласно теореме 2.2 многогранник полностью определяется своими вершинами. Поэтому естественно многограннику поставить в соответствие множество, совпадающее с общей частью замкнутых полупространств, направляющими векторами которых являются вершины исходного многогранника.

Определение 3.1. Если $W$ — произвольное непустое множество в $E_d$, то *полярой к* $W$ называется множество $W^*$ вида

$$W^* = \{y \in E_d:\ xy \leqslant 1,\ x \in W\}.$$

Рассмотрим примеры поляр к некоторым выпуклым множествам

1. Если $a$ — точка в $E_d$, то $a^* = \{y \in E_d:\ ay \leqslant 1\}$ — полупространство в $E_d$, $0^* = E_d$.

2. Поляра к полупространству $H^- = \{x \in E_d:\ ax \leqslant \beta\}$ есть отрезок $(H^-)^* = \{y \in E_d:\ y = at,\ 0 \leqslant t \leqslant 1/\beta\}$, если $\beta > 0$, и луч — $(H^-)^* = \{y \in E_d:\ y = at,\ t \geqslant 0\}$, если $\beta \leqslant 0$.

3. Поляра к шару $S(0, r)$ с центром в 0 и радиусом $r$ есть шар $S(0, 1/r)$ с тем же центром и радиусом $1/r$.

Согласно определению 3.1 поляра $W^*$ совпадает с пересечением замкнутых полупространств $H_x^- = \{y \in E_d:\ xy \leqslant 1\}$ $\forall x \in W$, т. е. $W^* = \bigcap_{x \in W} H_x^-$. Следовательно, поляра к любому непустому (не обязательно выпуклому) множеству есть выпуклое и замкнутое множество. Непосредственно из определения 3.1 вытекает также следующее свойство поляр.

Лемма 3.3. *Если* $\varnothing \neq W_1 \subseteq W_2$, *то* $W_1^* \supseteq W_2^*$.

Теорема 3.4. *Если* $M$ — *многогранник и* $0 \in \operatorname{int} M$, *то поляра* $M^*$ *есть также многогранник*.

Доказательство. Пусть $\operatorname{vert} M = \{x^1, \ldots, x^s\}$. Докажем сначала, что

$$M^* = \bigcap_{i=1}^{s} (x^i)^* = \bigcap_{i=1}^{s} \{y \in E_d:\ x^i y \leqslant 1\}. \tag{3.1}$$

Так как $\operatorname{vert} M \subset M$, то по лемме 3.3 $M^* \subset (\operatorname{vert} M)^* = \bigcap_{i=1}^{s} (x^i)^*$. С другой стороны, пусть $y \in (\operatorname{vert} M)^*$, т. е. справедливы неравенства $x^i y \leqslant 1 \quad \forall i \in N_s$. Пусть $a \in M$; тогда $a = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i$, $\sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_s$, и поэтому $ay = \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i x^i) y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x^i y \leqslant 1$, т. е. $y \in M^*$, и поэтому $M^* \supset (\operatorname{vert} M)^*$. Итак, справедливо (3.1).

Теперь покажем, что $M^*$ — ограниченный полиэдр. Так как $0 \in \operatorname{int} M$, то существует $r > 0$ такое, что шар $S(0, r)$ содержится в $M$. Поляра к шару $S(0, r)$ есть шар $S(0, 1/r)$. В силу леммы 3.3 $M^* \subset S(0, 1/r)$ и, следовательно, по теореме 2.5 $M^*$ — многогранник. Теорема 3.4 доказана.

Лемма 3.5. *Если многогранник $M$ содержит $0$ (не обязательно в качестве внутренней точки), то $M^{**} = M$.*

Доказательство. Сначала покажем, что $M \subseteq M^{**}$. Если $x \in M$, то для любого $y \in M^*$ имеем $yx \leqslant 1$. Это означает, что $x \in M^{**}$. Поэтому $M \subseteq M^{**}$.

Докажем теперь, что $M^{**} \subseteq M$. Пусть это не так, т. е. существует точка $a \in M^{**}$, но $a \notin M$. Пусть $a'$ — проекция точки $a$ на $M$. Тогда гиперплоскость $H = \{x \in E_d:\ (a - a') x = \alpha\}$, проходящая через точку $a'$, является опорной к $M$ (следствие 1.5). Имеем $(a - a') x \leqslant \alpha$ для всех $x \in M$, но $(a - a') a > \alpha$. Если $\alpha < \alpha_1 < (a - a') a$ и так как $0 \in M$, то $\alpha_1 > 0$. Поэтому для любого $x \in M$ имеем $cx < 1$, где $c = (a - a')/\alpha_1$. Следовательно, $c \in M^*$. Но для любого $y \in M^*$ должно выполняться неравенство $ay \leqslant 1$, в то время как $ac > 1$. Итак, $M^{**} \subseteq M$.

Лемма 3.6. *Пусть $F$ — грань многогранника $M$ и $0 \in \operatorname{int} M$. Тогда множество*

$$\varphi(F) = \{y \in M^*:\ xy = 1 \ \ \forall x \in F\} \tag{3.2}$$

*есть грань многогранника $M^*$.*

Доказательство. Из (3.2) следует, что $\varphi(\varnothing) = M^*$ и $\varphi(M) = \varnothing$. Поэтому предполагаем, что $F$ — собственная грань $M$. Пусть $x^0 \in \operatorname{rel\,int} F$. Тогда гиперплоскость $H = \{y \in E_d:\ x^0 y = 1\}$ является опорной к многограннику $M^*$ и поэтому $F^* = M^* \cap H$ — грань многогранника $M^*$. Кроме того, $\varphi(F) \subseteq F^*$. Покажем, что $\varphi(F) \supseteq F^*$. Пусть $y^0 \in M^* \setminus \varphi(F)$. Тогда существует такая точка $x^1 \in F$, что $x^1 y^0 < 1$. Поскольку $x^0 \in \operatorname{rel\,int} F$, найдется точка $x^2 \in F$, обладающая свойством: $x^0 = (1 - \lambda) x^1 + \lambda x^2$ для $0 < \lambda < 1$. Так как $y^0 \in M^*$, то $y^0 x^2 \leqslant 1$ и поэтому $y^0 x^0 = (1 - \lambda) y^0 x^1 + \lambda y^0 x^2 < 1$. Следовательно, $y^0 \notin F^*$. Итак, $F^* = \varphi(F)$, т. е. $\varphi(F)$ — грань $M^*$.

3. **Двойственность.** Двойственность — одно из фундаментальных понятий в теории выпуклых множеств и, в частности, в теории

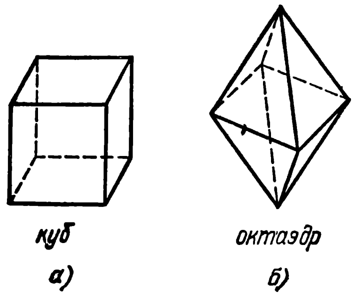
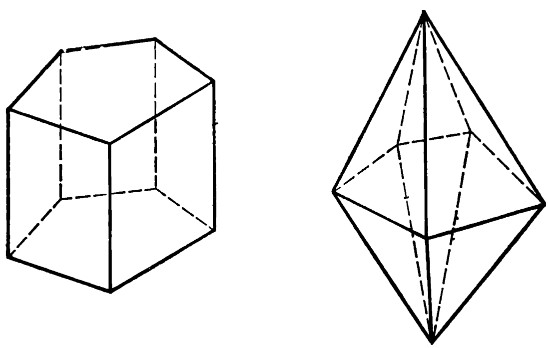
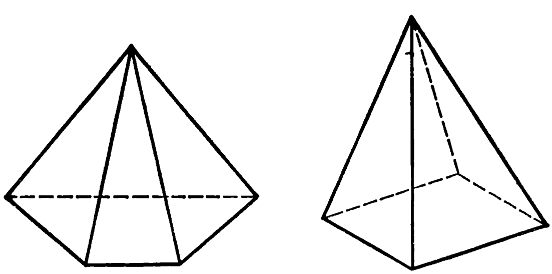


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.

многогранников. Естественно, что различные аспекты двойственности в теории многогранников исследовались многими авторами и в первую очередь Т. Вейлем [35], Т. Моцкиным [31], В. Фенхелем [18], С. Кутателадзе и А. Рубиновым [7].

Определение 3.2. Многогранник $M^0$ назовем *двойственным* к многограннику $M$, если существует взаимно однозначное соответствие между множествами граней всех размерностей многогранников $M$ и $M^0$, обладающее свойством: $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow \varphi(F_1) \supset \varphi(F_2)$. Такое соответствие между гранями двух многогранников будем называть *антиизоморфизмом.*

Примером двойственных 3-многогранников могут служить куб и октаэдр (рис. 2). Два других примера см. на рис. 3, 4. Симплекс, очевидно, двойственен сам себе.

Из определения 3.2 вытекает, что $\dim M = \dim M^0 = \dim F + \dim \varphi(F) + 1$, для каждой грани $F$ многогранника $M$.

Следующая теорема дает ответ на вопрос: имеет ли каждый $d$-многогранник двойственный?

Теорема 3.7. *Пусть $M$ — многогранник в $E_d$ и пусть $0 \in \operatorname{int} M$. Тогда поляра $M^*$ есть многогранник, двойственный к $M$.*

Доказательство. Покажем, что отображение $\varphi$, определенное соотношением (3.2), есть требуемый определением 3.2 антиизоморфизм. Если $F_1 \subset F_2$, то в силу лемм 3.3 и 3.6 имеем $\varphi(F_1) \supset \varphi(F_2)$. Теперь, если покажем, что $\varphi(\varphi(F)) = F$, теорема будет доказана.

По определению, $\varphi(\varphi(F)) = \{x \in M^{**}:\quad yx = 1\quad \forall y \in \varphi(F)\}$. Так как $M^{**} = M$ (лемма 3.5), то $F \subseteq \varphi(\varphi(F))$.

Пусть грань $F$ порождена опорной гиперплоскостью $H = \{x \in E_d\colon ax = 1\}$ и $M \subset H^-$. Ясно, что $a^0 \in \varphi(F)$. Если $x^0 \in M \setminus F$, то $ax^0 < 1$ и $x^0 \notin \varphi(\varphi(F))$. Следовательно, $\varphi(\varphi(F)) \subseteq F$. Теорема 3.7 доказана.

Из теоремы 3.7, леммы 3.6 и определений 2.5 и 2.6 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 3.8. *Многогранник, двойственный симплициальному многограннику, — простой, и, обратно, многогранник, двойственный простому, — симплициальный.*

**4. Построение опорных полупространств.** Лемма 3.5 дает алгоритм для представления многогранника в виде пересечения конечного числа замкнутых полупространств. Действительно, пусть $d$-многогранник $M \subset E_d$ имеет вид

$$M = \operatorname{conv}(v^1, \ldots, v^n). \tag{3.3}$$

Рассмотрим вспомогательный многогранник $M_1 = \operatorname{conv}(v^1 - v^0, \ldots, v^n - v^0)$, где вектор $v^0$ таков, что $0 \in \operatorname{int} M_1$. Такой вектор существует в силу условия $\operatorname{int} M \neq \emptyset$. Поляра $M_1^*$ к $M_1$ задается следующей системой неравенств: $(v^i - v^0)\, x \leqslant 1\quad \forall i \in N_n$. По теореме 3.4 $M_1^*$ — многогранник и, следовательно, $M_1^* = \operatorname{conv}(u^1, \ldots, u^s)$, где $\{u^1, \ldots, u^s\}$ — множество всех вершин $M_1^*$. Теперь многогранник $M_1^{**}$ задается системой ограничений $u^i x \leqslant 1\ \forall i \in N_s$.

В силу леммы 3.5 $M_1^{**}=M_1$. Поэтому многогранник $M=M_1+v^0$ будет задаваться следующей системой неравенств:

$$u^i x \leqslant 1+u^i v^0 \qquad \forall i \in N_s. \tag{3.4}$$

Итак, чтобы перейти от параметрического представления (3.3) многогранника $M$ к аналитическому представлению (3.4), необходимо иметь способ построения всех вершин его поляры или вершин поляры к вспомогательному многограннику $M_1$, если $M$ не содержит 0 в качестве внутренней точки.

## § 4. Многогранник решений системы линейных неравенств

Теорема Вейля — Минковского (теорема 2.5) показывает, что всякий многогранник в определенной системе координат может быть задан с помощью системы, состоящей из конечного числа линейных неравенств. Это обстоятельство позволяет, с одной стороны, привлечь для изучения многогранников хорошо разработанный аппарат теории линейных неравенств, а с другой стороны, геометрическим свойствам многогранников придать алгебраическую интерпретацию. В данном параграфе рассматриваются способы задания многогранников с помощью различных систем линейных неравенств.

**1. Формы задания многогранников.** Пусть $M$ — $d$-многогранник и пусть $f_{d-1}(M)=n$. Тогда по теореме 2.5 $M$ есть общая часть $n$ полупространств $H_i^+$ в $E_d$, которые задаются неравенствами

$$A_i x \geqslant b_i, \qquad A_i \in E_d \quad \forall i \in N_n. \tag{4.1}$$

Если размерность $d$ многогранника $M$ меньше размерности пространства $E_m$, в котором он задан, то $M$ является пересечением $m-d$ линейно независимых гиперплоскостей:

$$A_i x = b_i, \qquad A_i \in E_m \quad \forall i \in N_{m-d}, \tag{4.2}$$

с общей частью $n$ полупространств

$$A_i x \geqslant b_i, \qquad A_i \in E_m, \quad i=m-d+1, \ldots, m-d+n. \tag{4.3}$$

В линейном программировании $d$-многогранник $M$ чаще всего рассматривается в пространстве, размерность $m$ которого равна числу $n$ его $(d-1)$-граней, а в качестве базиса пространства $E_n$ выбраны векторы, ортогональные к гиперплоскостям, порождающим $(d-1)$-грани многогранника В $E_n$ при такой системе координат многогранник задается следующими ограничениями

$$A_i x = b_i, \qquad A_i \in E_n \quad \forall i \in N_{n-d}, \tag{4.4}$$

$$x \geqslant 0. \tag{4.5}$$

Обозначается такой многогранник через $M(A, b)$. С другой стороны, любое ограниченное подмножество в $E_d$, определенное $n$ линейными неравенствами (4.1) с $d$ переменными, есть многогранник $M$, у которого $\dim M \leqslant d$ и $f_{d-1}(M) \leqslant n$.

Определение 4.1. Если многогранник задан системой неравенств (4.1), то эту систему будем называть *нормальной формой задания многогранника*. Аналогично, если многогранник задан системой (4.4), (4.5), то называем эту систему *канонической формой задания многогранника*.

От канонической формы задания многогранника легко перейти с помощью вырожденного аффинного преобразования к нормальной и наоборот. Пусть многогранник $M$ задан системой условий (4.4), (4.5). Тогда из уравнений (4.4) выражаем $r$ переменных ($r$ — ранг системы (4.4)) через остальные. Если это будут первые $r$ переменных, то в результате получим систему специального вида

$$x_i = \bar{b}_i + \sum_{j=1}^{n-d} \bar{a}_{ij} x_j \geqslant 0 \qquad \forall i \in N_r,$$

которая дает нормальную форму аффинного множества, определенного системой (4.4), (4.5), что в матричной форме дает

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Hx_H \geqslant 0,$$

где $B$ — базис вектор-столбцов матрицы $A$, $H$ — остальные столбцы матрицы $A$, $x_B$, $x_H$ — векторы, состоящие из компонент вектора $x$ с номерами вектор-столбцов матрицы $A$ соответственно, в матрице $B$ и $H$.

Если затем неравенства $x_B \geqslant 0$ заменяем на

$$\sum_{j=r+1}^{n-d} \bar{a}_{ij} x_j \geqslant -\bar{b}_i \qquad \forall i \in N_r \quad (B^{-1}Hx_H \geqslant B^{-1}b),$$

и присоединим остальные неравенства

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = r+1, \ldots, n \quad (x_H \geqslant 0),$$

то получим нормальную форму задания многогранника в $E_{n-r}$. Чтобы перейти от нормальной формы (4.1) задания многогранника $M$ к канонической, достаточно ввести $n$ дополнительных переменных $x_{n+i}$ $\forall i \in N_n$. Тогда система

$$A_i x + x_{n+i} = b_i \qquad \forall i \in N_n,$$
$$x_{n+i} \geqslant 0 \qquad \forall i \in N_n,$$

очевидно, задает тот же многогранник $M$.

Определение 4.2. Условие с номером $i$ системы (4.2), (4.3) назовем *жестким ограничением многогранника* $M$, если координаты любой точки $M$ удовлетворяют ему как точному равенству.

Ясно, что любое из условий (4.2) или (4.4) является жестким ограничением. Жесткими ограничениями могут оказаться и некоторые из условий системы (4.3) (или (4.5)). Чтобы убедиться в том, что неравенство с номером $i$ является нежестким ограничением многогранника, достаточно указать точку многогранника, координаты которой удовлетворяют этому неравенству как строгому.

Матрицу, строками которой являются направляющие вектора $A_i$ гиперплоскостей (опорных и несущих), называем *матрицей ограничений* многогранника.

Следующее предложение есть следствие теоремы 1.2 и определения размерности выпуклого множества.

Предложение 4.1. *Размерность многогранника $M$ в $E_n$ как при нормальной форме задания, так и при канонической, равна $n-r$, где $r$ — ранг матрицы жестких ограничений многогранника.*

Число $(d-1)$-граней $d$-многогранника $M$, определяемого некоторой системой условий, необязательно равно числу нежестких ограничений, так как среди них могут быть избыточные. *Избыточное ограничение* — это ограничение (равенство или неравенство), которое можно выбросить из системы условий, не изменив при этом многогранника. Аналитический поиск таких ограничений весьма затруднителен. Поэтому при изучении многогранников, задаваемых конкретными системами уравнений и неравенств, будем учитывать, что среди них могут быть избыточные. Геометрически избыточное ограничение $A_kx \leqslant b_k$ определяет гиперплоскость $H_k = \{x \in E_n \colon A_kx = b_k\}$, которая либо не имеет общих точек с многогранником $M$, либо, несмотря на то, что имеет, $\dim(M \cap H_k) < d-1$. Ясно, что если ранг системы жестких ограничений равен их числу, то среди жестких ограничений нет избыточных. Приведем без доказательства фундаментальный критерий проверки системы на избыточность, принадлежащий Фаркашу [17] и Г. Минковскому [30].

Теорема 4.2. *Неравенство $A_kx \leqslant b_k$ является избыточным в системе $A_ix \leqslant b_i$ $\forall i \in N_m$, в том и только том случае, когда существуют такие неотрицательные числа $\lambda_i$, что*

$$A_k = \sum_{i \neq k} \lambda_i A_i, \quad b_k \geqslant \sum_{i \neq k} \lambda_i b_i.$$

Определение 4.3. Систему (4.2), (4.3) называем *неприводимой системой*, если ранг системы жестких ограничений равен их числу, а среди неравенств (4.3) нет избыточных.

Понятно, что если система (4.2), (4.3) неприводима, то соответствующий многогранник имеет размерность $d$, а число его $(d-1)$-граней равно числу нежестких ограничений. С другой стороны, если размерность многогранника равна размерности пространства, в котором он рассматривается, то в этом случае многогранник имеет единственную неприводимую систему задания.

Пусть система (4.2), (4.3) неприводима. Согласно следствию 2.13 каждая $j$-грань $d$-многогранника $M$ в $E_d$ есть пересечение его $(d-1)$-граней. Поэтому систему, задающую $j$-грань, получим, если заменим некоторые из неравенств в (4.3) на равенства так, чтобы число линейно независимых жестких ограничений стало равным $m-j$. Для удобства ссылок сформулируем этот факт в форме следующего утверждения.

Предложение 4.3. *Подмножество $F$ решений системы* (4.2), (4.3), *задающей $d$-многогранник $M$, есть $j$-грань многогранника $M$ в том и только том случае, когда среди условий* (4.2), (4.3) *найдутся $m-j$ линейно независимых ограничений, каждому из которых всякая точка $x \in F$ удовлетворяет как равенству.*

В частности, точка $x \in F$ является вершиной многогранника в том и только том случае, если среди условий (4.2), (4.3), задающих его, найдутся $m$ линейно независимых ограничений, каждому из которых $x$ удовлетворяет как равенству. Каждой вершине отвечает свой набор из $m$ линейно независимых уравнений с $m$ неизвестными, причем разным вершинам соответствуют разные наборы. Возьмем жесткие ограничения многогранника и заменим некоторые из неравенств на равенства так, чтобы получить систему из $m$ линейно независимых уравнений. Если единственное решение этой системы удовлетворяет остальным ограничениям (неравенствам), то получена вершина многогранника.

**2. Базисы, допустимые базисы.** Рассмотрим подробнее, как определяются вершины многогранника, заданного в канонической форме (4.4), (4.5). Пусть $A$ — матрица жестких ограничений (4.4). Предполагаем, что среди ограничений (4.5) нет жестких. Чтобы получить систему для определения координат вершины многогранника $M$, нужно систему жестких ограничений (4.4) дополнить равенствами

$$x_j = 0 \qquad \forall j \in J_H, \tag{4.6}$$

где $J_H$ — такое $d$-подмножество множества $N_n$, что ранг матрицы ограничений (4.5), (4.6) равен $n$. Очевидно, что это имеет место, если ранг подматрицы $B$ матрицы $A$, составленной из столбцов с номерами $j \in J_B$, где $J_B = N_n \setminus J_H$, равен $n-d$.

Пусть ранг матрицы $A$ жестких ограничений многогранника $M$ равен $m$.

Определение 4.4. Совокупность $m$ линейно независимых столбцов матрицы $A$ называем *базисом многогранника $M$*.

Каждый базис $B$ многогранника определяет систему, в которой $n$ линейно независимых уравнений

$$Bx_B = b, \tag{4.7}$$

$$x_j = 0, \qquad j \in J_H. \tag{4.8}$$

Решение $(x_B^0, 0)$ этой системы называется *базисным решением*. Оно представляет собой точку пересечения линейно независимых гиперплоскостей. Базисное решение является вершиной многогранника $M$ в том и только том случае, когда компоненты вектора $x_B^0$ (базисные переменные) удовлетворяют остальным ограничениям, т. е. когда $x_B^0 \geqslant 0$.

Класс многогранников, заданных системой условий (4.4), (4.5), обозначим через $\mathfrak{M}(m, n)$, где $m = n - d$. Пусть $\beta(A, b)$ — число базисов многогранника $M(A, b) = \{x \in E_n\colon Ax = b, \; x \geqslant 0\}$ из класса $\mathfrak{M}(m, n)$, в предположении, что система (4.4), (4.5) —

неприводима. На первый взгляд кажется, что функция $\beta(A, b)$ зависит только от матрицы $A$. Однако это не совсем так, потому что для некоторых $b$ система (4.4), (4.5) является либо приводимой, либо несовместной.

Возникает следующая проблема: описать область значений функции $\beta(A, b)$ на множестве $\mathfrak{M}(m, n)$ и дать характеризацию классов многогранников $M(A, b)$ из $\mathfrak{M}(m, n)$ с фиксированным числом базисов [5, 25, 26].

Проблема иногда ставится более широко. Для этого рассмотрим понятие матроида, введенное в 1933 г. Уитни [36].

Определение 4.5. *Матроидом* $\mathcal{M}$ называется пара $(J, \mathcal{B})$, где $J$ — непустое конечное множество, а $\mathcal{B}$ — непустая совокупность его подмножеств (называемых базисами), удовлетворяющая следующим условиям: 1) никакой базис не содержит в качестве собственного подмножества другой базис; 2) если $J'$ и $J''$ — базисы и $e$ — любой элемент из $J'$, то существует элемент $f$ из $J''$, обладающий тем свойством, что $J' \setminus e \cup f$ также является базисом.

Несложно показать, что любые два базиса матроида $\mathcal{M}$ содержат одинаковое число элементов; это число называется *рангом матроида* $\mathcal{M}$.

Если $J$ — конечное множество векторов в $E_m$, например, столбцов $(m \times n)$-матрицы $A$, то, взяв в качестве базисов всевозможные максимальные линейно независимые подмножества из $J$, порождающие $E_m$, получим матроид, который принято называть *векторным матроидом.*

Таким образом, более широкая проблема состоит в характеризации значений функции $\beta(\mathcal{M})$ (число базисов матроида $\mathcal{M}$) на классе всех матроидов ранга $m$ над $n$-множеством $J$ и перечислении неизоморфных матроидов с фиксированным рангом. Заметим, что базис векторного матроида, порожденного столбцами матрицы $A$, это то же, что базис многогранника $M(A, b)$.

Ясно, что число базисов многогранника из класса $\mathfrak{M}(m, n)$ не может превосходить числа $\binom{n}{m}$. Укажем для $n > m$ способ конструирования $(m \times n)$-матриц $A$ ранга $m$ с числом базисов, равным $\binom{n}{m}$. Для $m = 1$ и любого $n$ такой матрицей является каждая $(1 \times n)$-матрица с ненулевыми компонентами. Пусть $((m-1) \times n)$-матрица $A$ имеет $\binom{n}{m-1}$ базисов. Пусть $A^l = \sum_{j \in J_B} \lambda_{jl}^B A^j$ — разложение столбца $A^l$ по базису $B$. Рассмотрим вектор-строку $A_m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$, первые $m-1$ компонент которой произвольные, отличные от нуля числа, а каждая следующая компонента $a_{ml}$ не равна ни одному из чисел $\left\{\sum_{j \in J_B} \lambda_{jl}^B a_{mj}\right\}$. Здесь $B$ — всевозможные базисы, составленные из первых $l-1$ столбцов и $m-1$ строк матрицы $A$. Пусть $\bar{A} = \left\| \begin{matrix} A \\ A_m \end{matrix} \right\|$. Покажем, что $\beta(\bar{A}) = \binom{n}{m}$. Предположим противное. Пусть существует вырожденная $(m \times m)$-подматрица $\bar{B}$ матрицы $\bar{A}$. Пусть $\bar{A}^s$ — ее столбец с наибольшим номером. В силу выроженности $\bar{B}$ имеем

$$A^s = \sum_{j \in J_{\bar{B}} \setminus s} \mu_j A^j, \quad a_{ms} = \sum_{j \in J_{\bar{B}} \setminus s} \mu_j a_{mj}. \tag{4.9}$$

Здесь $A^s$, $A^j$ — векторы, составленные из первых $m-1$ компонент векторов $\bar{A}^s$, $\bar{A}^j$. В силу единственности разложения вектора $A^s$ в базисе $B$, определяемом столбцами $A^j$ с номерами из $J_{\bar{B}} \setminus s$, имеем $\mu_j = \lambda_{js}^B$. Следовательно, равенство (4.9) противоречит выбору числа $a_{ms}$.

Другой способ описания матриц, имеющих максимально возможное число базисов, получим, если будем проводить индукцию по $n$. Пусть $(m \times n)$-матрица $A$ обладает указанным свойством. Рассмотрим совокупность, состоящую из $\binom{n}{m-1}$ $(m-1)$-мерных линейных подпространств $m$-мерного пространства, порожденных всевозможными наборами, состоящими из $m-1$ столбца матрицы $A$. Очевидно, что всегда можно выбрать $m$-вектор $A^{n+1}$, не принадлежащий ни одному из этих подпространств. Например, достаточно положить

$$A^{n+1} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j A^j, \quad \lambda_j = \left(\frac{pm}{q}\right)^j \quad \forall j \in N_m,$$

где $p$ и $q$ — наибольший и наименьший по абсолютной величине миноры порядка $m$ матрицы $A$.

Определение 4.6. *Симплекс-таблицей* матрицы $A$ назовем матрицу $\Lambda_B = \| \lambda_{ij}^B \|_{m \times (n-m)}$ коэффициентов разложения по базису $B$ вектор-столбцов матрицы $A$, не вошедших в $B$, т. е. $\Lambda_B = B^{-1}H$, если $A = \| B, H \|$.

Предложение 4.4. *$(m \times n)$-матрица $A$ имеет максимальное число $\binom{n}{m}$ базисов тогда и только тогда, когда хотя бы у одной ее симплекс-таблицы все миноры отличны от нуля.*

Доказательство вытекает из свойства системы $m$-векторов $A^1, \ldots, A^m$ быть линейно независимой в том и только в том случае, когда при любой невырожденной матрице $B$ линейно независима система векторов $BA^1, \ldots, BA^m$.

Область значений функции $\beta(A, b)$ на $\mathfrak{M}(m, n)$ описана только в простейших случаях [25]. Так, на множестве $\mathfrak{M}(2, n)$ только числа

$$\left\{ \frac{1}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) : \ \sum_{i=1}^{n} u_i = n, \ u_1 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant 0, \ u_i - \text{целые} \right\}$$

могут быть значениями функции $\beta(A, b)$. Справедливость этого факта вытекает из того, что столбцы любой матрицы можно разбить на группы коллинеарных векторов, $i$-я из которых состоит из $u_i$ векторов.

Несложно подсчитать число базисов унимодулярной матрицы, т. е. матрицы, у которой $\det B = \pm 1$ для любого базиса $B$.

Предложение 4.5. *Если $A$ — унимодулярная матрица, то число ее базисов равно* $\det(AA^{\mathrm{T}})$.

Доказательство предложения вытекает из известной формулы Бине — Коши:

$$\det AB = \sum_{\substack{J \subset N_n \\ |J| = m}} \det A^J_{N_m} \det B^{N_m}_J,$$

где $A$ — $(m \times n)$ — матрица, $B$ — $(n \times m)$ — матрица $n \geqslant m$.

Определение 4.7. Базис многогранника $M$ называется *допустимым базисом*, если базисное решение удовлетворяет неравенствам (4.5), т. е. если базисные переменные неотрицательны. Если $B$ — допустимый базис, то соответствующее решение системы (4.4), (4.5) называется *допустимым базисным решением.*

Перечисление допустимых базисов многогранников из класса $\mathfrak{M}(m, n)$ является сложной задачей. Как будет видно из дальнейшего, эта задача не всегда тождественна задаче перечисления вершин многогранника. Рассмотрим один возможный метод перечисления допустимых базисов.

Пусть $B$ — некоторый базис. Рассмотрим конус $\operatorname{kon} B$, порожденный вектор-столбцами $A^j$, входящими в $B$. Базис $B$ является допустимым тогда и только тогда, когда $b \in \operatorname{kon} B$. Следовательно, задача подсчета числа допустимых базисов многогранника $M(A, b)$ (обозначается $\beta^*(A, b)$) эквивалентна задаче перечисления всех конусов $\operatorname{kon} B$, содержащих вектор $b$.

Методику, предложенную в [5, 25] для подсчета $\beta^*(A, b)$, проиллюстрируем в случае, когда $m = 3$ и все векторы $A^j$ имеют неотрицательные компоненты. Если пересечь конус $\operatorname{kon} A$ в $E_m$ плоскостью

$$\sum_{j=1}^{m} x_j = 1, \tag{4.10}$$

то каждому конусу $\operatorname{kon}(A^p, A^q, A^s)$ будет отвечать треугольник с вершинами, образованными пересечением векторов $A^p$, $A^q$, $A^s$ плоскостью (4.10), и если $b \in \operatorname{kon} B$, то точка пересечения $b$ с плоскостью (4.10) содержится внутри этого треугольника.

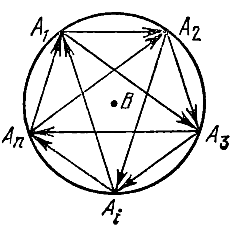


Рис. 5.

Теперь задаче описания области значений функции $\beta^*(A, b)$ можно дать следующую геометрическую интерпретацию: на плоскости дано $n$ точек $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$; необходимо найти число треугольников $\mathscr{A}_p\mathscr{A}_q\mathscr{A}_s$, содержащих данную точку $\mathscr{B}$. Ясно, что это число не меняется при перемещении каждой из точек $\mathscr{A}_j$ вдоль лучей, исходящих из $\mathscr{B}$ и проходящих через $\mathscr{A}_j$. Поэтому считаем, что все точки $\mathscr{A}_j$ лежат на единичной окружности с центром в точке $\mathscr{B}$. Определим на каждом ребре $\mathscr{A}_j\mathscr{A}_k$ такую ориентацию, чтобы точка $\mathscr{B}$ находилась справа от прямой $\mathscr{A}_j\mathscr{A}_k$. Полученную совокупность точек и ориентированных ребер (см. рис. 5) назовем *диаграммой многогранника* $M(A, b)$.

П р е д л о ж е н и е 4.6. *Число допустимых базисов* $\beta^*(A, b)$ *многогранника* $M(A, b)$ *из класса* $\mathfrak{M}(3, n)$ *определяется формулой*

$$\binom{n}{3} - \sum_{i=1}^{n} \binom{s_i}{2},$$

*где* $s_i$ — *число ребер, выходящих из вершины* $\mathcal{A}_i$ *в диаграмме многогранника.*

Доказательство основано на известной формуле для числа циклических троек турнира (см. [2]).

**3. Вырожденные многогранники.**

О п р е д е л е н и е 4.8. Допустимое базисное решение многогранника называется *невырожденным решением*, если число соотношений системы условий многогранника, которым оно удовлетворяет как равенствам, равно $n$. Если допустимое базисное решение обращает в равенство более чем $n$ соотношений из системы условий, то его называем *вырожденным решением*. Вершину многогранника $M$, соответствующую вырожденному допустимому решению называем также *вырожденной вершиной*. Систему, имеющую хотя бы одно вырожденное допустимое решение, будем называть *вырожденной формой задания многогранника* $M$, а такой многогранник — *вырожденным многогранником*.

Вырожденность канонической формы задания многогранника соответствует тому случаю, когда существует допустимое базисное решение, среди базисных переменных которого имеются равные нулю.

Вырожденную форму задания многогранник $M$ может иметь по двум причинам. Прежде всего число опорных к $M$ гиперплоскостей, пересекающихся в вершине, может превышать размерность многогранника. Так, всякий не простой многогранник допускает только вырожденную форму задания. Поэтому всякая невырожденная неприводимая система ограничений задает простой многогранник.

Кроме того, если система ограничений приводима, т. е. содержит избыточные ограничения, то она вырожденная. Итак, можем сформулировать следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 4.7. *Многогранник* $M$ *является вырожденным в том и только том случае, когда либо* $M$ *не является простым многогранником, либо система, задающая многогранник, содержит избыточные ограничения.*

Если многогранник вырожденный, то вырожденной вершине многогранника соответствует не один допустимый базис.

**4. Многогранники с малым числом граней.** Класс $\mathfrak{M}(m, n)$ разобьем на подклассы $\mathfrak{M}(m, n, k)$ многогранников с фиксированным числом $(d-1)$-граней: $M(A, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f_{d-1}(M(A, b)) = d + k$. Задача выделения неприводимой системы задания многогранника $M(A, b)$ сводится к нахождению класса

$\mathfrak{M}(m, n, k)$, к которому принадлежит конкретный многогранник $M(A, b)$ [6].

Пусть $B$ — допустимый базис многогранника $M(A, b)$.

Определение 4.9. Симплекс-таблицу $\Lambda_B$ будем называть $k$-регулярной ($k \in N_m$), если

$$\min\left\{\frac{\lambda_{i0}^B}{\lambda_{ij}^B}: \forall i \in J_B, \ \lambda_{ij}^B > 0\right\}, \quad (\lambda_{i\,0}^B)_{i \in J_B} = B^{-1}b \tag{4.11}$$

достигается ровно для $k$ различных $i$ при всех значениях $j \in J_H$.

Лемма 4.8. *Если существует такой допустимый базис $B$ невырожденного многогранника $M(A, b)$, что $\Lambda_B$—$k$-регулярная симплекс-таблица, то найдется такое $l \geqslant k$, что $M(A, b) \in \mathfrak{M}(m, n, l)$.*

Доказательство. Пусть минимумы в (4.11) при всех значениях $j \in J_H$ достигаются на индексах $i$ из множества $J_B^0 \subset J_B$. Тогда ясно, что в допустимом базисе $B$ можно заменить всякий вектор-столбец $A^i$ для $i \in J_B^0$ на некоторый вектор-столбец $A^j$ $\forall j \in J_H$, и в результате опять получим допустимый базис. Следовательно, множества $F_i = \{x \in M(A, b): x_i = 0\}$ для $i \in J_B^0$ — непусты и вместе с множествами $F_j$ для $j \in J_H$ являются $(d-1)$-гранями многогранника $M(A, b)$.

Определение 4.10. Симплекс-таблицы $\Lambda_{B'}$ и $\Lambda_{B''}$ называем *$k$-подобными*, если они обе $k$-регулярные и $J_{B'}^0 = J_{B''}^0$.

Из леммы 4.8 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.9. *Если симплекс-таблицы всех допустимых базисов многогранника $M(A, b)$ $k$-подобны, то $M(A, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$.*

Из теоремы 4.9 немедленно следует, что многогранник $M(A, b)$ является симплексом тогда и только тогда, когда симплекс-таблицы всех допустимых базисов $B$ матрицы $A$ 1-подобные. Легко убедиться, что последнее утверждение имеет место, если симплекс-таблица хотя бы одного допустимого базиса является 1-регулярной. Пусть, например, $B$ — такой базис и $J_B^0 = \{k\}$. Тогда неприводимая система задания многогранника $M(A, b)$ имеет вид

$$x_k + \sum_{j \in J_H} \lambda_{kj}^B x_j = \lambda_{k0}^B,$$

$$x_i = \lambda_{i0}^B, \qquad i \in J_B \setminus k,$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j \in J_H \cup k.$$

Из теоремы 4.9 и импликации (если симплекс-таблица допустимого базиса $B$ матрицы $A$ 1-регулярная, то все симплекс-таблицы — 1-подобные) следует, что многогранник $M(A, b) \in \mathfrak{M}(m, n, 2)$ тогда и только тогда, когда симплекс-таблицы всех допустимых базисов 2-подобные.

## § 5. $f$-вектор многогранника

Пусть $M$ — $d$-многогранник и пусть $i$ — целое число, $i \in N_{d-1}$. Как обычно, обозначаем через $f_i(M)$ число $i$-граней многогранника $M$. Когда ясно, о каком многограннике идет речь, мы пишем просто $f_i$. Таким образом, с каждым $d$-многогранником $M$ связываем $d$-мерный вектор $f(M) = (f_0, f_1, \ldots, f_{d-1})$. Далее такой вектор будем называть *$f$-вектором многогранника.*

Определение 5.1. Два многогранника $M$ и $M'$ называем *$f$-эквивалентными*, если их $f$-векторы совпадают, т. е. $f(M)=f(M')$.

Естественно, возникает задача выделения классов $f$-эквивалентных многогранников и описания области значений функции $f$ для различных классов $d$-многогранников.

**1. Формула Эйлера — Пуанкаре.** В 1752 г. Л. Эйлер в [16] опубликовал формулу, связывающую компоненту $f$-вектора 3-многогранника:

$$f_0 - f_1 + f_2 = 2.$$

Интересно отметить, что эта формула была известна еще Р. Декарту и содержалась в одной из его рукописей, опубликованных Г. Лейбницем в 1760 г. Пуанкаре в 1899 г. [29] обобщил формулу Эйлера на случай $d$-многогранников. В доказательстве Пуанкаре использовался топологический аппарат. Приводимое здесь элементарное геометрическое доказательство формулы Эйлера — Пуанкаре принадлежит Б. Грюнбауму [22]. Другие доказательства этой формулы можно найти в [1, 3].

Теорема 5.1 (Эйлера — Пуанкаре). *Пусть $M$ — $d$-многогранник. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i(M) = 1 + (-1)^{d-1}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу $d$. Теорема верна для $d=1$, так как $f_0(M)=2$. Предполагаем, что теорема верна для всех многогранников, размерность которых не превосходит $d-1$ $(d \geqslant 2)$.

Пусть $M$ — $d$-многогранник в $E_d$ с $n$ вершинами. Пусть $a \in E_d$ — произвольный вектор, не принадлежащий ни одной из гиперплоскостей, перпендикулярных к ребрам многогранника. Пусть $H$ — гиперплоскость с направляющим вектором $a$. Построим $n$ гиперплоскостей $H_1, H_3, \ldots, H_{2n-1}$, каждая из которых параллельна $H$ и содержит ровно одну вершину многогранника $M$. (Из-за выбора $H$ такое возможно.) Пусть $H_2, H_4, \ldots, H_{2n-2}$ — гиперплоскости, параллельные $H$ и такие, что для $\forall k \in N_{n-1}$ гиперплоскость $H_{2k}$ лежит между $H_{2k-1}$ и $H_{2k+1}$. Ясно, что гиперплоскости $H_1$ и $H_{2n-1}$ являются опорными к многограннику $M$, а для каждого $i = 2, 4, \ldots, 2n-2$ множество $M_i = M \cap H_i$ является $(d-1)$-многогранником (рис. 6).

Для каждой $j$-грани $F$, $j \in N_{d-1}$, многогранника $M$ и каждого многогранника $M_i$, $i=2, 4, \ldots, 2n-2$, определим функцию

$$\Psi(F, M_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } M_i \cap \operatorname{rel\,int} F = \varnothing, \\ 1, & \text{если } M_i \cap \operatorname{rel\,int} F \neq \varnothing. \end{cases}$$

Первая и последняя из гиперплоскостей, пересекающих каждую $j$-грань $F$, имеют нечетные индексы. Пусть это будут соответственно индексы $2l-1$, $2m-1$, причем $l \neq m$ при $j \neq 0$. Следовательно, для $i=2l, \ldots, 2m-2$ имеем $M_i \cap \operatorname{rel\,int} F \neq \varnothing$ и поэтому $M_i \cap F$ является $(j-1)$-гранью многогранника $M_i$ (см. предложение 2.8). Итак, для каждой $j$-грани $F$ многогранника $M$, если $\Psi(F, M_i)=1$ для четного $i$, то и $\Psi(F, M_i)=1$ для стольких же нечетных $i$, т. е. справедливо

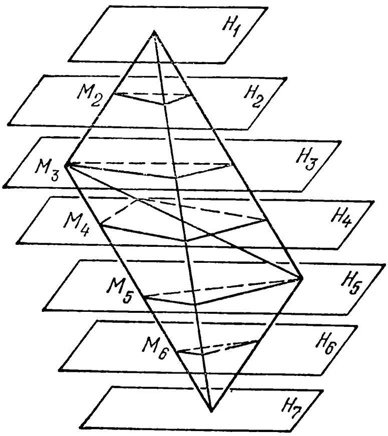


Рис. 6.

$$\sum_{i=2}^{2n-2} (-1)^i \Psi(F, M_i) = 1,$$

или иначе

$$\sum_F \sum_{i=2}^{2n-2} (-1)^i \Psi(F, M_i) = f_j(M), \quad j \in N_{d-1}. \tag{5.1}$$

Здесь суммирование ведется по всем $j$-граням $F$ многогранника $M$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \sum_F \sum_{i=2}^{2n-2} (-1)^j \Psi(F, M_i) = \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_j(M). \tag{5.2}$$

Найдем другое выражение для левого члена равенства (5.1), изменяя порядок суммирования. Заметим, что если $i$ — четное или $j>1$, то каждая $(j-1)$-грань многогранника $M_i$ является пересечением $j$-грани многогранника $M$ с гиперплоскостью $H_i$; если $i$ — нечетное или $j=1$, то одна из вершин многогранника $M_i$ является вершиной многогранника $M$, а остальные вершины являются пересечением ребер многогранника $M$ с $H_i$. Получаем

$$\sum_F \Psi(F, M_i) = \begin{cases} f_0(M_i)-1, & \text{если } j=1 \text{ и } i \text{ — нечетное}, \\ f_{j-1}(M_i), & \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \sum_F \Psi(F, M_i) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_{j-1}(M_i)+1, & \text{если } i \text{ — нечетное}, \\ \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_{j-1}(M_i), & \text{если } i \text{ — четное}, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (-1)^{d-1}, & \text{если } i \text{ — нечетное}, \\ (-1)^{d-1}-1, & \text{если } i \text{ — четное}. \end{cases}$$

Последнее равенство имеет место в силу индуктивного предположения о справедливости формулы Эйлера — Пуанкаре для $(d-1)$-многогранника $M_i$, $i=2, \ldots, 2n-2$.

Итак, имеем

$$\sum_{i=2}^{2n-2} (-1)^i \sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j \sum_F \Psi(F, M_i) = (-1)^{d-1} - 1 - (n-2).$$

Подставляя последнее выражение в (5.2) и заменяя $n$ на $f_0(M)$, окончательно получаем

$$\sum_{j=1}^{d-1} (-1)^j f_j(M) = 1 + (-1)^{d-1} - f_0(M).$$

Теорема 5.1 доказана.

Замечание. Используя символы $f_{-1}(M)=1$ и $f_d(M)=1$ для числа несобственных граней многогранника $M$, формулу Эйлера — Пуанкаре можно записать в форме $\sum_{j=1}^{d} (-1)^j f_j(M) = 0$.

Формула Эйлера — Пуанкаре устанавливает линейную зависимость между компонентами $f$-вектора любого $d$-многогранника. Как показывает следующая теорема, других линейных зависимостей для компонент $f$-вектора многогранника фиксированной размерности не существует.

Теорема 5.2. *Аффинная оболочка $f$-векторов всех $d$-многогранников совпадает с пространством $E_d$.*

Согласно формуле Эйлера — Пуанкаре $f$-векторы всех $d$-многогранников лежат в $d$-мерной гиперплоскости. Нужно показать, что каждое линейное уравнение

$$\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j f_j(M) = \beta, \tag{5.3}$$

верное для всех $d$-многогранников $M$, совпадает с уравнением Эйлера — Пуанкаре. Прежде чем переходить к доказательству теоремы 5.2, установим вид $f$ векторов у двух специальных классов многогранников.

Определение 5.2. *Пирамидой* называется выпуклая оболочка многогранника $Q$, называемого *основанием пирамиды*, и точки $x \notin \operatorname{aff} Q$, называемой *вершиной пирамиды*.

Предложение 5.3. *Если $M$ — $d$-пирамида с основанием $Q$ и вершиной $v$, то*

$$f_k(M) = f_k(Q) + f_{k-1}(Q) \qquad \forall k \in N_{d-1},$$

*где* $f_{d-1}(Q) = 1$.

Доказательство. Пусть $F$ — $k$-грань пирамиды $M$, порождаемая опорной гиперплоскостью $H$, т. е. $F = M \cap H$. Так как $\operatorname{vert} M \subset \operatorname{vert}(Q \cup v)$, то имеют место две возможности.

1. $v \notin \operatorname{vert} F$. Тогда согласно следствию 2.3 $F$ есть $k$-грань основания $Q$.

2. $v \in \operatorname{vert} F$. Тогда $\operatorname{vert} F \setminus v \subset \operatorname{vert} Q$ и является множеством вершин $(k-1)$-грани $Q \cap H = F \cap H$ многогранника $Q$ (предложение 2.8).

Наоборот, в силу теоремы 2.9 каждая грань многогранника $Q$, включая $Q$, есть собственная грань пирамиды $M$. Предложение доказано.

Определение 5.3. *$d$-бипирамидой* называется выпуклая оболочка $(d-1)$-многогранника $Q$ (основание) и такого отрезка $[a, b]$, что $\operatorname{rel\,int} Q \cap \operatorname{rel\,int}[a, b]$ есть единственная точка (рис. 7).

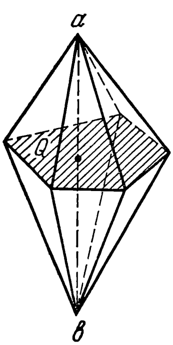


Рис. 7.

Как и для пирамиды, убеждаемся, что каждая грань бипирамиды $M$ есть либо собственная грань многогранника $Q$, либо пирамида, основанием у которой является грань многогранника $Q$, а вершиной — $a$ или $b$; либо одна из вершин $a$ или $b$. Поэтому справедливо предложение.

Предложение 5.4. *Пусть $M$ — $d$-бипирамида с основанием $Q$, $\dim Q = d - 1$. Тогда*

$$f_j(M) = f_j(Q) + 2f_{j-1}(Q),$$

$$f_{d-1}(M) = 2f_{d-2}(Q).$$

Вернемся к доказательству теоремы 5.2. Пусть теорема справедлива для $f$-векторов многогранников размерности, не превышающей $d-1$ (для $d=1$ теорема тривиальна). Пусть $M^*$ — $d$-пирамида с основанием $Q$ и пусть $M^{**}$ — $d$-бипирамида с тем же основанием $Q$. Для их $f$-векторов имеем

$$\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j f_j(M^*) = \beta, \tag{5.4}$$

$$\sum_{j=0}^{d-1} \alpha_j f_j(M^{**}) = \beta. \tag{5.5}$$

Согласно предложениям 5.3 и 5.4, $f$-вектора пирамиды $M^*$ и бипирамиды $M^{**}$ имеют вид

$$f(M^*)=(1+f_0(Q),\ f_0(Q)+f_1(Q),\ \ldots,\ f_{d-3}(Q)+f_{d-2}(Q),\ f_{d-2}(Q)+1),$$
$$f(M^{**})=(2+f_0(Q),\ 2f_0(Q)+f_1(Q),\ \ldots,\ 2f_{d-3}(Q)+f_{d-2}(Q),\ 2f_{d-2}(Q)).$$

Вычитая равенство (5.4) из (5.5), получаем $\sum\limits_{j=0}^{d-2}\alpha_j f_j(Q)=\alpha_{d-1}-\alpha_0$. Исключая тривиальный случай, когда уравнение (5.3) — тождество, и учитывая предположение индукции, имеем $\alpha_j=(-1)^j\alpha_0$ $\forall j\in N_{d-1}$ и $\alpha_0=(-1)^{d+1}\alpha_{d+1}$. Подставляя в (5.3) значения $f_j(M)$ для $d$-симплекса, находим $\beta=(1-(-1)^d)\alpha_0$. Итак, равенство (5.3) совпадает с формулой Эйлера — Пуанкаре.

**2. Уравнения Дена — Соммервилля.** Как устанавливает теорема 5.2, никаких других формул, кроме формулы Эйлера — Пуанкаре, для $f$-векторов в классе всех $d$-многогранников не существует. Однако $f$-вектор специальных классов многогранников может удовлетворять и некоторым другим линейным уравнениям. Наиболее важными из них являются уравнения Дена — Соммервилля для симплициальных многогранников. Ученик Д. Гильберта М. Ден в 1905 г. [15] доказал, что $f$-вектор симплициального $d$-многогранника удовлетворяет при $d=4$ двум, а при $d=5$ — трем линейно независимым уравнениям, и высказал гипотезу, что число таких уравнений для произвольного $d$ равно $[(d+1)/2]$. Все уравнения при произвольном $d$ нашел в 1927 г. известный английский геометр Соммервилль [32].

Теорема 5.5 (Дена — Соммервилля). *Для каждого симплициального многогранника $M$ справедлива следующая система линейных уравнений*

$$\sum_{j=k}^{d-1}(-1)^j\binom{j+1}{k+1}f_j(M)=(-1)^{d-1}f_k(M),\qquad k=0,\ 1,\ \ldots,\ d-2. \quad (5.6)$$

Доказательство. Для каждой $k$-грани $F^k$ и $j$-грани $F^j$ многогранника $M$ $(0\leqslant k\leqslant j\leqslant d-1)$ определим функцию

$$\delta(F^k,\ F^j)=\begin{cases}0, & \text{если } F^k\not\subseteq F^j,\\ 1, & \text{если } F^k\subseteq F^j.\end{cases}$$

Для вычисления суммы

$$\sum_{j=k}^{d-1}(-1)^j\sum_{F^k}\sum_{F^j}\delta(F^k,\ F^j) \quad (5.7)$$

(суммирование ведется по всем граням многогранника $M$ размерности $k$ и $j$ соответственно) нам понадобится следующая лемма.

Лемма 5.6. *Пусть $F_1$, $F_2$ — грани многогранника $M$ и пусть $\mathcal{F}(F_1,\ F_2)$ — множество граней $M$, обладающих свойством $F_1\subseteq F\subseteq F_2$. Тогда существует многогранник (обозначается $M(F_1,\ F_2)$)*

*размерности* $\dim F_2 - \dim F_1 - 1$, *между множеством граней которого и множеством* $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ *существует взаимно однозначное соответствие* $\psi$, *обладающее свойством*: $F' \subset F'' \Leftrightarrow \psi(F') \subset \psi(F'')$.

Доказательство леммы. В силу теоремы 2.9 $F_1$ есть грань многогранника $F_2$. Пусть $F_2^*$ — многогранник, двойственный к $F_2$. Тогда его грань $\varphi(F_1) = \{y \in F_2^*\colon xy = 1 \ \forall x \in F_1\}$ (согласно лемме 3.6) имеет размерность $\dim F_2 - \dim F_1 - 1$. Кроме того, имеем $\varphi(F_2) \subseteq \varphi(F_1) \subseteq \varphi(\emptyset) = F_2^*$. Поэтому, если перейти от многогранника $\varphi(F_1)$ к его двойственному $(\varphi(F_1))^*$, то получим требуемый многогранник $M(F_1, F_2)$ (рис. 8). Лемма доказана.

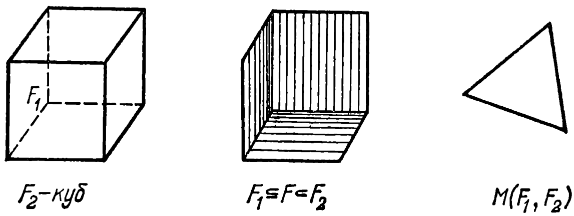



Рис. 8.

Итак, каждой грани $F^j$ многогранника $M$, такой, что $\delta(F^k, F^j) = 1$, соответствует $(j-k-1)$-грань $(d-k-1)$-многогранника $M(F^k, M)$, и наоборот. Следовательно, $\sum_{F^j} \delta(F^k, F^j)$ дает число $(j-k-1)$-граней многогранника $M(F^k, M)$ и поэтому согласно уравнению Эйлера — Пуанкаре

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j \sum_{F^j} \delta(F^k, F^j) = (-1)^{d-1}.$$

Заметим, что случаю $j = k$ соответствует несобственная грань $\emptyset = M(F^k, F^k)$. Итак,

$$\sum_{F^k} \sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j \sum_{F^j} \delta(F^k, F^j) = (-1)^{d-1} f_k(M). \tag{5.8}$$

С другой стороны, $\sum_{F^k} \delta(F^k, F^j)$ есть число $k$-граней $j$-многогранника $F^j$ и так как грань $F^j$ является симплексом, то

$$\sum_{F^k} \delta(F^k, F^j) = \binom{j+1}{k+1}.$$

Поэтому

$$\sum_{F^j} \sum_{F^k} \delta(F^k, F^j) = \binom{j+1}{k+1} f_j(M). \tag{5.9}$$

Подставляя (5.9) в (5.7), с учетом (5.8) получаем уравнения (5.6). Теорема доказана.

В дальнейшем систему уравнений (5.6), дополненную уравнением Эйлера — Пуанкаре, называем *уравнениями Дена — Соммервилля* и записываем в единой форме:

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j \binom{j+1}{k+1} f_j(M) = (-1)^{d-1} f_k(M), \qquad (5.10_k)$$

где $k=-1, 0, 1, \ldots, d-2$; $f_{-1}(M)=1$. Среди уравнений Дена — Соммервилля не менее $[(d+1)/2]$ уравнений линейно независимы. Действительно, если $d$ — четное число, то для $j=0, 1, \ldots, d/2-1$ член $f_{2j}(M)$ входит только в первые $j+1$ из уравнений $(5.10_{-1})$, $(5.10_1)$, ..., $(5.10_{d-3})$. Поэтому все эти уравнения будут линейно независимы. Аналогично, если $d$ — нечетное число, то неоднородное уравнение $(5.10_{-1})$ и уравнения $(5.10_1)$, ..., $(5.10_{d-2})$, из которых член $f_{2j-1}$ $\forall j \in N_{(d-1)/2}$, входит только в первые $j+1$ уравнений, будут линейно независимыми, Покажем, что линейно независимых уравнений будет ровно $[(d+1)/2]$. Для этого построим $[d/2]+1$ симплициальных многогранников с аффинно независимыми $f$-векторами. Рассмотрим циклические многогранники $C(d, n)$, $C(d, n+1)$, ..., $C(d, n+k)$, где $k=[d/2]$. Их $f$-векторы будут аффинно независимыми, так как определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \cdots & \binom{n+1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \binom{n+k}{1} & \binom{n+k}{2} & \cdots & \binom{n+k}{n} \end{vmatrix},$$

составленный из $k$ первых компонент их $f$-векторов, отличен от нуля (точнее, $D=1$). В этом легко убедиться, последовательно вычитая из каждой строки предыдущую. Сопоставляя этот факт, с ранее установленным результатом о том, что не менее $[(d+1)/2]$ уравнений Дена — Соммервилля линейно независимы, получаем следующий результат.

Теорема 5.7. *Для $d \geqslant 1$ ровно $[(d+1)/2]$ уравнений Дена — Соммервилля линейно независимы. Геометрически это означает, что аффинное множество, в котором лежат $f$-векторы симплициальных $d$-многогранников, имеет размерность $[d/2]$.*

**3. Решение уравнений Дена — Соммервилля.** Ранг системы Дена — Соммервилля равен $[(d+1)/2]$, поэтому можно $[(d+1)/2]$ переменных $f_i$ выразить через оставшиеся. Очевидно, что существует большое число возможных наборов линейно независимых столбцов матрицы системы этих уравнений, поэтому в литературе существуют различные варианты решений уравнений Дена — Соммервилля. Следующий вариант, в котором вторая половина переменных $f_i$ выражается через первую, изложен в [28].

Теорема 5.8. *Для $f$-вектора любого симплициального $d$-многогранника справедливы соотношения*

$$f_{m+p}=\begin{cases}\sum\limits_{q=0}^{m-1}(-1)^q\frac{m-q}{p+q+1}\chi(m-1,\ p,\ q)f_{m-q-1} & \text{при } d=2m,\\ \sum\limits_{q=0}^{m-1}(-1)^q\frac{m+p+2}{p+q+1}\chi(m,\ p,\ q)f_{m-q-1} & \text{при } d=2m+1,\end{cases}$$

*где* $p=0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,\ \chi(m,\ p,\ q)=\sum\limits_s\binom{m-s}{p}\binom{m-s+q+1}{m+1}$.

Отметим, что совсем недавно Р. Стэнли [33] дал полную характеризацию $f$-векторов симплициальных многогранников.

**4. 3-многогранники.** Для симплициальных 3-многогранников уравнения Дена — Соммервилля имеют вид

$$f_0-f_1+f_2=2,\quad -2f_1+3f_2=0,$$

или $f_1=3f_0-6$, $f_2=2f_0-4$.

Теорема 5.9. *Вектор* $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ *является $f$-вектором симплициального 3-многогранника тогда и только тогда, когда* $f_1=3f_0-6$, $f_2=2f_0-4$.

Доказательство. Достаточно показать, что для каждого вектора $(f_0,\ f_1,\ f_2)$, удовлетворяющего условиям теоремы, существует 3-многогранник с таким $f$-вектором. Докажем это по индукции. Если $f_0=4$, то 3-симплекс имеет вектор (4, 6, 4). Для $f_0>4$ пусть $M$ — симплициальный многогранник такой, что $f(M)=(f_0-1,\ 3(f_0-1)-6,\ 2(f_0-1)-4)$. Пусть $v^*\in E_3$ — точка, которая не принадлежит ни одной плоскости, порожденной вершинами многогранника $M$, и которая строго отделена от $M$ точно одной из опорных плоскостей, порождающих 2-грани многогранника. Тогда, как легко проверить, симплициальный многогранник $M^*=\operatorname{conv}(M\cup v^*)$ имеет следующий $f$-вектор: $f(M^*)=(f_0,\ 3f_0-6,\ 2f_0-4)$. Теорема доказана.

Переходя от симплициальных многогранников к двойственным, т. е. простым 3-многогранникам, получаем следующее следствие.

Следствие 5.10. *$f$-вектор каждого простого 3-многогранника имеет вид* $(2f_2-4,\ 3f_2-6,\ f_2)$, $f_2=4,\ 5,\ 6,\ \ldots$

В общем случае справедлива следующая теорема, доказанная Штейницем [34].

Теорема 5.11. *Вектор* $(f_0,\ f_1,\ f_2)$ *является $f$-вектором 3-многогранника тогда и только тогда, когда целые числа* $f_0,\ f_1,\ f_2$ *удовлетворяют следующим условиям:*

$$f_1=f_0+f_2-2,\quad 4\leqslant f_0\leqslant 2f_2-4,\quad 4\leqslant f_2\leqslant 2f_0-4.$$

**Задачи и дополнения**

1. Показать, что вершине полиэдра $P$ можно дать следующее определение: точка $x^0 \in P$ является вершиной полиэдра $P$, если существует такой вектор $c$, что $\max\{cx\colon x \in P\}$ достигается только в точке $x^0$.

2. Пусть $v$ — вершина многогранника $M$, $H^+$ — замкнутое полупространство такое, что $v \in H^0$, а все ребра, инцидентные $v$, принадлежат $H^+$. Тогда $H^+$ — опорное полупространство.

3. Если $M$ — $d$-многогранник в $E_d$ и $\tau$ — проективное преобразование в $E_d$ (не обязательно невырожденное), то верно ли, что $f_i(\tau(M)) \leqslant f_i(M)$, $i \in N_d$?

4. Пусть $(k-1)$-грань $F_{k-1} \in F_{k+1}$ — $(k+1)$-грань $d$-многогранника $M$. Доказать, что: 1) существуют точно две $k$-грани $M$, каждая из которых содержит $F_{k-1}$ и содержится в $F_{k+1}$; 2) для любого $k \in N_d$ существует $(d-k)$-грань $d$-многогранника, не содержащая любые $k$ его вершин; 3) $i$-грань каждого простого $d$-многогранника содержится точно в $\binom{d-i}{d-j}$ $j$-гранях, где $0 \leqslant i \leqslant \leqslant j \leqslant d-1$.

5. $d$-параллелепипед есть сумма $d$ непараллельных отрезков с общей граничной точкой. Простейший $d$-параллелепипед — единичный $d$-куб (обозначается $\mathscr{K}_d$). Кубом $\mathscr{K}_d$ называется многогранник, который есть сумма $d$ взаимно ортогональных отрезков единичной длины, т. е.

$$\mathscr{K}_d = \operatorname{conv}(0, e_1, \ldots, e_d) = \{x \in E_d\colon\ 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad \forall i \in N_d\}.$$

Здесь $e_1, \ldots, e_d$ — ортогональный базис $E_d$. Доказать, что

$$f_k(\mathscr{K}_d) = 2^{d-k}\binom{d}{k}, \quad k = 0, 1, \ldots, d-1.$$

6. Пусть $Q$ — $(d-1)$-многогранник в $E_d$ и пусть отрезок $I = [0, a]$ не параллелен гиперплоскости $\operatorname{aff} Q$. Тогда сумма $M = Q + I$ называется *$d$-призмой* с основанием $Q$. Легко убедиться, что призма $M$ есть выпуклая оболочка основания $Q$ и множества $x + Q$. Каждая $k$-грань призмы $M$ либо совпадает с $k$-гранью основания $Q$ или многогранника $x + Q$, либо есть сумма отрезка $I$ и $(k-1)$-грани основания $Q$. Обратно, каждая грань $Q$ и $x + Q$ (исключая несобственные) есть грань $M$; сумма отрезка $I$ и каждой грани $Q$ есть также грань $M$. Доказать, что $f_k(M) = 2f_k(Q) + f_{k-1}(Q)$, $k = 0, 1, \ldots, d-1$.

Простейший представитель $r$-гранных бипирамид — $r$-октаэдрон $Q_d$, который есть выпуклая оболочка $d$ отрезков, взаимно ортогональных и имеющих общую внутреннюю точку. Доказать, что

$$f_k(Q_d) = 2^{k+1}\binom{d}{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, d-1.$$

7 [22]. Пусть $k$ и $s$ — целые такие, что $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant d-1$. $d$-многогранник $M$ называем *$r$-симплициальным*, если каждая его $r$-грань есть симплекс, и *$s$-простым*, если каждая его $(d-1-s)$-грань содержится точно в $(s+1)$-й $(d-1)$-грани. Говорим, что многогранник имеет тип $(r, s)$, если он $r$-симплициальный и $s$-простой.

Доказать, что: 1) симплициальный $d$-многогранник относится к типу $(d-1, 1)$, а простой — к типу $(1, d-1)$; 2) $i$-простой многогранник является и $j$-простым для всех $j \leqslant i$; 3) если $d$-многогранник $M$ имеет тип $(r, s)$ при $r + s \geqslant d + 1$, то $M$ — симплекс; 4) многогранник, являющийся пересечением $(d+1)$-куба в $E_{d+1}$ с гиперплоскостью $\sum_{i=1}^{d+1} x_i = k$, относится к $(2, d-2)$-типу; 5) $d$-многогранник, заданный условиями $\sum_{i=1}^{d} \varepsilon_i x_i \leqslant d-2$, где $\varepsilon_i = \pm 1$ $\forall i \in N_d$, причем число чисел $\varepsilon_i$, равных 1, нечетно, относится к $(3, d-3)$-типу.

8. Доказать, что многогранник $T_d^r = \operatorname{conv}(T_r \cup T_{d-r})$ является симплициальным. Здесь $T_r$ и $T_{d-r}$ — симплексы, расположенные в $E_d$ так, что пересечение

$T_r \cap T_{d-r}$ есть единственная точка, принадлежащая $\operatorname{rel\,int} T_r \cap \operatorname{rel\,int} T_{d-r}$, $r \leqslant [d/2]$. Найти $f_l(T_d^r)$ для всех $l$.

9. Пусть $\mathcal{A} \subseteq E_n$ и $D \subseteq E_n$ — непустые множества, и пусть $A^*$ и $D^*$ — их поляры. Множество $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^* \cap D$ называется *антиблокирующим по отношению к $D$*. Важное значение для получения минимаксных соотношений в целочисленном программировании имеет ответ на вопрос: когда $\mathcal{A} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$, т. е. когда $\mathcal{A}$ и $\bar{\mathcal{A}}$ составляют пару антиблокирующих множеств [19]. Заметим, что антиблокирующее множество $\bar{\mathcal{A}}$ по отношению к $E_n$ совпадает с полярой $\mathcal{A}^*$. Доказать, что $\bar{\bar{\mathcal{A}}} = \mathcal{A}$ по отношению к замкнутому выпуклому множеству $D \ni 0$ тогда и только тогда, когда существует замкнутое выпуклое множество $C \subseteq E_n$ такое, что $\mathcal{A} = C \cap D$ и $D^* \subseteq C$. Пусть $\mathcal{A} = \{x \in E_n^+ \colon Ax \leqslant e\}$, где $A$ — матрица с неотрицательными элементами, не содержащая нулевого столбца. Доказать, что $\mathcal{A} = \bar{\bar{\mathcal{A}}}$ по отношению к множеству $D = E_n^+$ и $\bar{\mathcal{A}} = \{x \in E_n^+ \colon Bx \leqslant e\}$, где $B$ — матрица, строками которой являются координаты вершин многогранника $\mathcal{A}$.

10. Пусть многогранник $M$ задан как пересечение замкнутых полупространств: $M = \{x \in E_d \colon A_i x \leqslant 1 \ \forall i \in N_n\}$. Доказать, что $M^* = \operatorname{conv}(A_1, \ldots, A_n)$.

11. Определить многогранник, двойственный к циклическому $C(d, n)$ в виде пересечения опорных полупространств.

12. Пусть $Q$ — $(d-1)$-многогранник, двойственный сам себе (самодвойственный). Доказать, что $d$-пирамида с основанием $Q$ — самодвойственный многогранник.

13. Обобщить теоремы двойственности многогранников на полиэдры.

14. Существует ли многогранник, каждое из нежестких ограничений которого избыточно?

15. *Сечением многогранника* $M$ назовем множество $M \cap A$, где $A$ — некоторое аффинное множество. Доказать, что любой $d$-многогранник с $n$ $(d-1)$-гранями $(n \geqslant d+1)$ является сечением $(n-1)$-симплекса.

16. Пусть многогранник $M^*(A, b)$ задан в $E_n$ неприводимой системой $Ax \leqslant b$, где $A \in E_{m,n}$. *$r$-мерным базисным множеством* многогранника $M^*(A, b)$ называется множество решений системы, составленной из $n-r$ линейно независимых уравнений вида $A_i x = b_i$ $\forall i \in I \subset N_m$.

*Базисной точкой* называется 0-мерное базисное множество. Если $r$-мерное базисное множество имеет непустое пересечение с многогранником, то оно является гранью многогранника.

Г. Бартельс [14] установил, что:

1) минимальное число базисных точек многогранника $M^*(A, b)$ равно $2^{m-1}(n-m+2)$ при $m \leqslant n$; $2^{n-3}(m-n+2)(m-n+4)$ при $m > n$ и $m-n \equiv 0 \pmod 2$; $2^{n-3}(m-n+3)^2$ при $m > n$ и $m-n \equiv 1 \pmod 2$;

2) если многогранник $M^*(A, b)$ имеет минимальное число базисных точек, то компоненты его $f$-вектора имеют вид

$$f_0 = \begin{cases} 2^{m-1}(n-m+2) & \text{при} \quad m \leqslant n, \\ 2^{n-2}(m-n+4) & \text{при} \quad m \geqslant n, \end{cases}$$

$$f_r = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{r} 2^{m-i-1}\binom{m-1}{i}\binom{n-m+2}{r-i+1} \quad \text{при} \quad m \leqslant n, \\ 2^{n-r-2}(m-n+4)\binom{n-2}{r} + 2^{n-r-1}(m-n+4)\binom{n-2}{r-1} + \\ \qquad + 2^{n-r}\binom{n-r}{r-2} \quad \text{при} \quad n \geqslant m; \end{cases}$$

3) максимальное число $r$-мерных базисных множеств многогранника $M^*(A, b)$ равно $\binom{n}{n-m-r}$;

4) минимальное число $r$-мерных базисных множеств многогранника $M^*(A, b)$ равно

$$\sum_{i=0}^{r} 2^{m-i-1}\binom{m-1}{i}\binom{n-m+2}{r-i+1} \quad \text{при} \quad m \leqslant n;$$

$$2^{n-r-3}(m-n+4)\binom{n-2}{r}+2^{n-r-1}(m-n+4)\binom{n-2}{r-1}+$$
$$+2^{n-r}\binom{n-2}{r-2} \quad \text{при} \quad m>n,\ m-n\equiv 1 \pmod 2;$$

$$2^{n-3-r}(m-n+3)^2\binom{n-2}{r}+2^{n-r-1}(m-n+4)\binom{n-2}{r-1}+$$
$$+2^{n-r}\binom{n-2}{r-2} \quad \text{при} \quad m>n,\ m-n\equiv 0 \pmod 2.$$

17. Пусть $\mathfrak{M}^k(m, n)$ — класс многогранников $M(A, b)\in\mathfrak{M}(m, n)$, у которых существует такой базис $B$, что ранг симплекс-матрицы $\Lambda_B$ равен $k$.

Доказать, что:

1) если $M(A, b)\in\mathfrak{M}(m, n)$, то $\beta(A, b)=1+\sum\limits_{s=1}^{\min(m,\,n-m)} i_s(\Lambda_B)$, где $i_s(\Lambda_B)$ — число ненулевых миноров порядка $s$ симплекс-матрицы $\Lambda_B$;

2) если $M(A, b)\in\mathfrak{M}^k(m, n)$, то $\beta(A, b)\leqslant 1+\sum\limits_{s=1}^{k}\binom{m}{s}\binom{n-m}{s}$, причем эта граница достижима;

3) если $M(A, b)\in\mathfrak{M}^1(m, n)$, то лишь числа $1+s(n-m)$ $\forall s\in N_m$ могут быть значениями функции $\beta(A, b)$.

18. Пусть $\mathcal{M}$ — матроид на множестве $N_n$ ранга $r$. Пусть $i(\mathcal{M})$ — число независимых множеств матроида $\mathcal{M}$, $\beta(\mathcal{M})$ — число базисов матроида. Доказать, что: 1) если целое число $t$ обладает свойством $\binom{n}{t}\leqslant\beta(\mathcal{M})\leqslant\binom{n}{t+1}$, то $1+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{t}\leqslant i(\mathcal{M})\leqslant 1+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{t+1}$; 2) каждый матроид ранга 2 является векторным.

19. Получить условие, при котором множество столбцов $(m\times n)$-матрицы ранга $m$ можно разбить на $k$ попарно непересекающихся линейно независимых подмножеств. Обобщить это условие на матроиды.

20. Если $x$ — невырожденная вершина многогранника $M$ в $E_n$, ранг системы жестких ограничений которого равен $m$, то число ребер, инцидентных $x$, равно $n-m$. Привести примеры, показывающие, что если $x$ — вырожденная вершина многогранника $M$, то число ребер многогранника, инцидентных $x$, может быть больше, чем $n-m$. $i$-грань $F$ многогранника $M$ называется *вырожденной*, если все точки $F$ обращают в равенство больше чем $n-i$ ограничений, задающих многогранник $M$. Если $d$-многогранник имеет вырожденную грань, то можно ли утверждать, что $M$ — вырожденный многогранник? Если у $M$ есть вырожденная $i$-грань, то у него есть вырожденная $q$-грань, где $q\leqslant i$.

21 [14]. При $n\leqslant 5$ или $m\leqslant 2$ число вершин невырожденного многогранника в $E_n$, заданного условиями $Ax\leqslant b$, $A\in E_{m,n}$ однозначно определяет остальные компоненты $f$-вектора. Привести примеры многогранников при $m>2$, $n>5$, для которых это утверждение неверно.

22 [23, 24]. Справедливы следующие нелинейные соотношения для $f$-векторов симплициальных $d$-многогранников:

$$\binom{k+1}{r} f_k \leqslant \binom{f_0+r-1-k}{r} f_{k-r};$$

$$(k+1)\binom{k}{r} f_k \leqslant \binom{f_0+r-k}{r}((k+1-r) f_{k-r} - r f_{k-r-1});$$

где $r=0, 1, \ldots, k$, $k=0, 1, \ldots, d$.

23. Справедливо следующее обобщение формулы Эйлера — Пуанкаре. Пусть $F$ — $k$-грань $d$-многогранника $M$. Тогда

$$\sum_{j=k}^{d-1} (-1)^j h_j(F) = (-1)^{d-1},$$

где $h_j(F)$ есть число $j$-граней многогранника $M$, которые содержат грань $F$; подробнее см. [27].

24 [22]. Пусть $P$ — полиэдр размерности $d$ и пусть $f_k^0(P)$ — число ограниченных $k$-граней, $f_k^\infty(P)$ — число неограниченных $k$-граней. Тогда справедливы формулы

$$\sum_{i=0}^{d-1} (-1)^i f_i^0(P) = 1, \qquad \sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i^\infty(P) = 1,$$

$$\sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(P) = 0, \qquad f_i(P) = f_i^0(P) + f_i^\infty(P).$$

25 [22]. Из уравнений Дена — Соммервилля получить следующие соотношения:

$$f_m = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \frac{i+1}{m+1} \binom{2m-i}{m} f_i,$$

$$f_{2m-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \frac{i+1}{m} \binom{2m-2-i}{m-i} f_i,$$

если $d=2m$, и

$$f_m = \sum_{i=-1}^{m-1} (-1)^{m-i-1} \binom{2m-i+1}{m+1} f_i,$$

$$f_{2m} = 2\sum_{i=-1}^{m-1} (-1)^{m-i+1} \binom{2m-i-1}{m} f_i,$$

если $d=2m+1$.

26. Уравнения Дена — Соммервилля дают следующие выражения для компонент $f$-вектора 4- и 5-многогранников:

$$d=4, \quad f_2 = 2f_1 - 2f_0, \quad f_3 = f_1 - f_0;$$

$$d=5, \quad f_2 = 4f_1 - 10f_0 + 20, \quad f_3 = 5f_1 - 15f_0 + 30, \quad f_4 = 2f_1 - 6f_0 + 12.$$

27. Уравнения Дена — Соммервилля эквивалентны следующим:

$$\sum_{i=-1}^{k-1} (-1)^{d+i} \binom{d-i-1}{d-k} f_i = \sum_{i=-1}^{d-k-1} (-1)^i \binom{d-i-1}{k} f_i,$$

$$k = 0, 1, \ldots, [(d-1)/2].$$

28. Если $d=2m$, то аффинная оболочка $f$-векторов симплициальных многогранников совпадает с аффинной оболочкой $m+1$ векторов $h^k$, где $h^k = \left(h_0^k, \ldots, h_{2m-1}^k\right)$ и

$$h_i^k = \binom{k}{1+i-k}, \quad i=0, 1, \ldots, 2m-2, \quad k=0, 1, \ldots, m.$$

29. Уравнения Дена — Соммервилля для простых $d$-многогранников имеют вид

$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^{i+d-r-1} \binom{i+d-r}{d-r} f_{r-i} = (-1)^{d-1} f_r,$$

или

$$\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+d-r-1} \binom{i+d-r}{d-r} f_{r-i} = f_r \left((-1)^{d-1} - (-1)^{d-r-1}\right),$$

$$r \in N_{[d/2]}.$$

30. Для $f$-вектора каждого симплициального $d$-многогранника справедливы соотношения:

$$f_{m+p} = \sum_{i=-1}^{d-m-2} \left\{ \sum_{k=0}^{d-m-1} (-1)^{k+i+1} \binom{k}{d-m-1-p} \binom{d-1-i}{d-k} \right\} f_i +$$
$$+ \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{m+i+1} \binom{d-1-i}{d-m-1-p} \binom{m+p-i-1}{p} f_i,$$
$$p=0, \ldots, d-m-1.$$

## ГЛАВА II

# ГРАФЫ МНОГОГРАННИКОВ

Пару, состоящую из множества вершин и множества ребер многогранника $M$ будем называть *графом многогранника* и обозначать $G(M)$.

Графы многогранников обладают многими интересными свойствами; при их изучении возникает большое число задач, представляющих интерес не только для теории графов, комбинаторики, топологии и геометрии, но и для теории линейного программирования.

Граф $G$ называется *$d$-полиэдральным графом* тогда и только тогда, когда он изоморфен графу некоторого $d$-многогранника $M$. В этом случае говорим, что многогранник $M$ реализует граф многогранника $G(M)$. Первая и основная проблема теории полиэдральных графов заключается в описании свойств этих графов. В случае, когда $d=2$, проблема тривиальна. А именно, граф $G$ является 2-полиэдральным тогда и только тогда, когда $G$ — цикл с $n \geqslant 3$ вершинами. Полностью описаны также 3-полиэдральные графы (теорема Штейница [15]). Из общих результатов следует выделить теорему о числе вершинно непересекающихся цепей в графе $d$-многогранника, полученную М. Балинским [6] и независимо в [2, 3].

Вторая проблема, которая оказала большое влияние на развитие теории полиэдральных графов, связана с проблемой эффективности методов линейного программирования и заключается в отыскании верхних и нижних границ для таких метрических характеристик графов многогранников, как диаметр, радиус, высота и др.

## § 1. Связность полиэдральных графов

Известно много результатов, касающихся описания $d$-полиэдральных графов, но полное решение основной проблемы для $d \geqslant 4$ пока не получено. Единственный общий результат принадлежит Балинскому и касается связности полиэдральных графов.

**1. Определения.** Чтобы избежать терминологической путаницы, приведем несколько стандартных определений из теории графов [4]. *Графом* называем пару $(V, E)$, состоящую из конечного непустого множества $V$, элементы которого называются вершинами, и заданного множества $E$ неупорядоченных пар различных вершин из $V$. Каждую пару вершин $e=(i, j)$, $i, j \in V$, в $E$ называем *ребром графа* $G$, при этом говорим, что $i$ и $j$ — *смежные вершины, инцидентные ребру* $e$.

Смежные вершины графа многогранника принадлежат 1-грани (ребру) многогранника. Такие вершины называем *смежными вершинами многогранника*. С учетом различных форм задания многогранника можно получить разные критерии смежности его вершин. Так, если многогранник $M$ задан в $E_n$ в канонической форме (ее мы чаще всего используем)

$$Ax=b, \qquad x \geqslant 0, \tag{1.1}$$

то ребро есть непустое подмножество точек многогранника, удовлетворяющих дополнительным равенствам

$$x_j=0 \qquad \forall j \in \omega, \tag{1.2}$$

где $\omega$ — такое подмножество множества $N_n$, что число линейно независимых уравнений среди равенств (1.1) и (1.2) равно $n-1$. Отсюда вытекает следующее, эквивалентное выше данному, определение смежных вершин многогранника.

Определение 1.1. Две вершины многогранника $M$, заданного в канонической форме, являются *смежными*, когда отвечающие им допустимые базисы отличаются только одним вектор-столбцом.

*Подграфом* графа $G$ называем граф, у которого все вершины и ребра принадлежат $G$. Подграф, содержащий все вершины графа, называем *остовным подграфом*. Для любого подмножества $S$ вершин графа $G$ порожденным подграфом (обозначается $G(S)$) называется *максимальный подграф* графа $G$, множеством вершин которого является $S$. *Цепью* $L$ в графе $G$ между вершинами $u$ и $v$ называется подграф, имеющий вершины $u=v_0, v_1, \ldots, v_n=v$ и ребра $(v_{i-1}, v_i)\ \forall i \in N_n$, причем все ребра различны. Если в цепи $v_0=v_n$, то цепь называется *циклом*. Если различны все вершины цепи, то $L$ называем *простой цепью*, если при этом $v_0=v_n$, то $L$ называем *простым циклом*. Граф $G$ называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует простая цепь. Две простые цепи между вершинами $u$ и $v$ называются *вершинно непересекающимися*, если у них нет общих вершин, отличных от $v$ и $u$. Граф $G$ называется *$d$-связным графом*, если между каждой парой его вершин существует $d$ вершинно непересекающихся цепей.

Удаление вершины $v$ из графа $G$ приводит к подграфу $G_v$, содержащему все вершины графа $G$, за исключением $v$, и все ребра графа $G$ не инцидентные $v$. Следующая теорема, принадлежащая Уитни (см. [36] и § 4 гл. IV), дает критерий $d$-связности графа.

Теорема 1.1. *Граф $G$ $d$-связен тогда и только тогда, когда подграф, полученный из $G$ удалением любых $d-1$ вершин, связен.*

Доказательство теоремы и другие ее варианты будут даны в следующей главе.

*Степенью вершины* $v$ графа $G$ называется число ребер, инцидентных $v$ (обозначается $\deg v$). Ясно, что степень каждой вершины $d$-связного графа не меньше $d$.

**2. Теорема Балинского**

Теорема 1.2. *Граф $d$-многогранника $d$-связен.*

Доказательство. На основании теоремы 1.1 достаточно показать, что удаление любых $d-1$ вершин не нарушает связность графа многогранника. Пусть $x^1, \ldots, x^{d-1}$ — произвольные вершины $d$-многогранника $M$ и пусть $G^*(M)$ — подграф графа многогранника $G(M)$, полученный после удаления вершин $x^1, \ldots, x^{d-1}$.

Докажем, что $G^*(M)$ — связный граф. Пусть $Q = \operatorname{aff}(x^1, \ldots, x^{d-1})$. Возможны два случая: а) $Q \cap \operatorname{int} M = \varnothing$, б) $Q \cap \operatorname{int} M \neq \varnothing$.

Случай а). Пусть $F = Q \cap M$ — грань $(\dim Q < d-1)$ многогранника $M$ и пусть $H$ — порождающая ее опорная гиперплоскость. Рассмотрим опорную гиперплоскость $H'$, параллельную $H$. Каждая вершина $x$ графа $G^*(M)$ либо принадлежит гиперплоскости $H'$, либо существует смежная ей вершина $x'$ такая, что расстояние от $x'$ до $H'$ (в евклидовой метрике) строго меньше, чем от $x$ до $H'$. Действительно, если $x \notin H'$, то требуемая вершина $x'$ существует, иначе гиперплоскость, проходящая через точку $x$ параллельно $H'$, должна быть опорной к $M$, что невозможно (см. задачу 2 гл. I). Если вершина $x' \notin H'$, то существует смежная ей $x''$, расположенная ближе к $H'$, чем $x'$ и т. д. В конце концов построим цепь в графе $G^*(M)$ между вершиной $x$ и некоторой вершиной $x^* \in H'$. Аналогично, для произвольной вершины $y \neq x$ графа $G^*(M)$ существует цепь, соединяющая ее с некоторой вершиной $y^* \in H'$. Так как $H' \cap M$ есть многогранник, то его граф связный и поэтому между вершинами $y^*$ и $x^*$ существует цепь в графе $G(H' \cap M)$. Следовательно, между произвольными вершинами $y$ и $x$, отличными от $x^1, \ldots, x^n$, в графе $G^*(M)$ существует цепь, т. е. $G^*(M)$ — связный граф.

Случай б). Пусть $H$ — гиперплоскость, содержащая аффинное множество $Q$ и произвольную вершину $u$ многогранника $M$. Такая гиперплоскость существует, так как $\dim Q < d-1$. Рассмотрим две опорные к многограннику $M$ гиперплоскости $H'$ и $H''$, параллельные $H$. Пусть $x$ и $y$ — произвольные вершины многогранника $M$, отличные от $x^1, \ldots, x^{d-1}$. Случай, когда вершины $x$ и $y$ принадлежат одному замкнутому полупространству, порожденному $H$, полностью аналогичен случаю а). Поэтому пусть $x$ и $y$ принадлежат разным полупространствам, порожденным $H$. Как и в случае а), находим цепи в $G^*(M)$ между вершинами $x$ и $u$ и между вершинами $y$ и $u$, а затем их объединяем и получаем цепь между $x$ и $y$. Следовательно, $G^*(M)$ — связный граф.

Следствие 1.3. *Граф, полученный из графа многогранника удалением всех вершин произвольной его грани, связный.*

Для доказательства следствия необходимо построить две опорные к многограннику $M$ и параллельные между собой гиперплоскости $H$ и $H'$, одна из которых порождает грань $F$, содержащую удаленные вершины. Затем поиск цепи между произвольными вершинами $x$ и $y$ осуществляется так же, как и при доказательстве случая а) теоремы 1.2.

**3. Теорема Штейница.** Граф называется *планарным,* если его можно уложить на плоскости так, чтобы никакие два его ребра не пересекались.

Теорема 1.4 (теорема Штейница [15]). *Граф является 3-полиэдральным тогда и только тогда, когда он планарен и трехсвязен.*

Значение теоремы Штейница заключается в том, что она позволяет изучение 3-многогранников заменять исследованием трехсвязных планарных графов.

Необходимость условий теоремы Штейница очевидна. Утверждение, что каждый граф 3-многогранника является трехсвязным, есть частный случай теоремы 1.2. Реализацию графа 3-многогранника на плоскости получим следующим образом. Выбросим одну из граней многогранника и деформируем остальные грани так, чтобы все они расположились в плоскости, порождающей отброшенную грань. Области, определяемые графом, реализованным на плоскости, назовем *гранями графа*: неограниченную область будем называть *внешней гранью*, остальные — *внутренними*. Ясно, что грани графа 3-многогранника $M$ взаимно однозначно соответствуют 2-граням многогранника $M$.

Доказательство достаточности — трудная часть теоремы. Известные доказательства основаны на индуктивном по числу ребер $e$ построении 3-многогранника, который реализует данный трехсвязный граф $G$. Предположение, что $G$ — трехсвязный граф, влечет, что $e \geqslant 6$, причем равенство возможно в том и только том случае, когда $G = K_4$. В этом случае $G$ реализуем 3-симплексом. Общий шаг индуктивного доказательства разбивается на две стадии. На первой стадии указывается метод, по которому каждому трехсвязному планарному графу с более чем 6 ребрами ставится в соответствие граф $G^*$ такого же типа, но имеющий меньшее число ребер, чем $G$. На второй стадии дается метод, по которому из 3-многогранника, реализующего $G^*$, строится 3-многогранник $M$, реализующий $G$. Имеющиеся доказательства различаются методами, используемыми на второй стадии.

Перейдем к детальному рассмотрению доказательства достаточности теоремы.

С целью сокращения введем новые обозначения $v = f_0(M)$, $e = f_1(M)$, $p = f_2(M)$. Число вершин многогранника $M$ степени $k$

обозначаем символом $v_k = v_k(M)$ и символом $p_k = p_k(M)$ обозначаем число $k$-угольных 2-граней ($k$-угольников) многогранника $M$. Тогда $v = \sum_{k \geqslant 3} v_k$ и $p = \sum_{k \geqslant 3} p_k$ и формула Эйлера принимает вид $v - e + p = 2$. Поскольку каждое ребро является пересечением двух 2-граней, то имеем $2e = \sum_{k \geqslant 3} kp_k$ и аналогично, поскольку каждому ребру инцидентно 2 вершины, то имеем $2e = \sum_{k \geqslant 3} kv_k$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{k \geqslant 3} kp_k + \sum_{k \geqslant 3} kv_k = 4e = 4v + 4p - 8 = 4 \sum_{k \geqslant 3} v_k + 4 \sum_{k \geqslant 3} p_k - 8.$$

Следовательно, $v_3 + p_3 = 8 + \sum_{k \geqslant 5} (k-4)(v_k + p_k) \geqslant 8$, т. е. каждый 3-многогранник $M$ имеет по крайней мере восемь трехвалентных элементов (треугольников или вершин степени 3).

Процедуру получения из данного планарного и трехсвязного графа $G$ и фиксированного в нем трехвалентного элемента нового

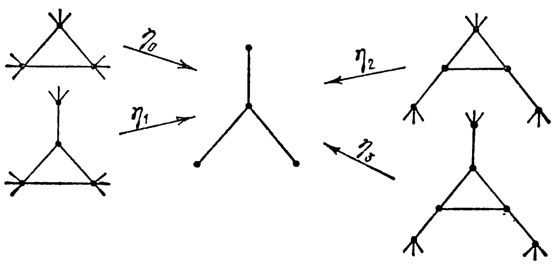



Рис. 9.

графа $G^*$ — также планарного трехсвязного, назовем *редукцией графа* $G$. Если при этом фиксированный трехвалентный элемент графа $G$ содержит вершину степени 3, инцидентную треугольнику, то редукция уменьшает число ребер графа $G$ по крайней мере на одно ребро. Если же граф $G$ не содержит такой вершины, то покажем, что в этом случае существует конечная последовательность редукций, приводящих к графу, содержащему вершину степени 3, инцидентную треугольнику. Редукция графа $G$ для случая, когда фиксируется вершина степени 3, изображена на рис. 9, а для случая, когда фиксируется треугольник, изображена на рис. 10. Очевидно, что каждый граф $G^*$, полученный редукцией планарного трехсвязного графа $G$, также планарен и трехсвязен. Причем для редукций $\omega_i \forall i \in N_3$ и $\eta_i \forall i \in N_3$ граф $G^*$ содержит на $i$ ребер меньше, чем $G$.

Опишем общую процедуру восстановления $M$ по его «редукционному» прообразу. Пусть $M^*$ — 3-многогранник, граф $G(M^*)$ которого изоморфен $G^*$. Опишем конструкцию многогранника $M$, реализующего граф $G$. Для редукций $\eta_i$ многогранник $M$ получаем из многогранника $M^*$, отсекая плоскостью вершину $v^*$. В случае редукций $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ многогранник $M$ есть выпуклая оболочка многогранника $M^*$ и точки $v$, сильно отделенной от многогранника $M^*$ только плоскостью $\operatorname{aff} F$. Причем точка $v$ выбрана так, чтобы в случае редукции $\omega_0$ она совпадала с точкой пересечения плоскостей, порождающих грани многогранника $M^*$, смежные новому треугольнику (если такой точки не существует, когда плоскости параллельны, то предварительно применяем к $M^*$ проективное преобразование); в случае редукций $\omega_1$ точка $v$ принадлежит пересечению только двух таких плоскостей; в случае редукции $\omega_2$ точка $v$ принадлежит только одной такой плоскости; в случае редукции $\omega_3$ точка $v$ не принадлежит ни одной из таких плоскостей.

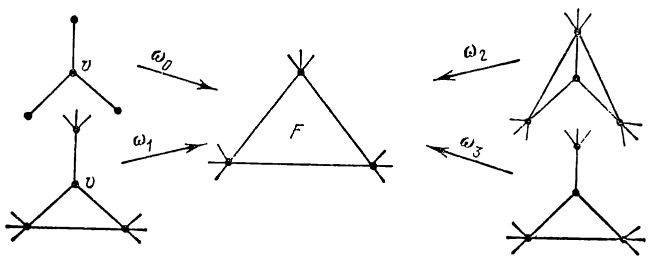



Рис. 10.

Пусть $G$ — планарный трехсвязный граф. Граф $I(G)$ определим следующим образом: вершинами $I(G)$ являются ребра $G$, причем две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им ребра графа $G$ имеют общую вершину и инцидентны одной и той же грани реализации графа $G$ на плоскости. Ясно, что граф $I(G)$ также планарный и трехсвязный, и каждая его вершина имеет степень 4. Грани графа $I(G)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством, составленным из вершин и граней графа $G$, т. е. $p(I(G)) = p(G) + v(G)$. Грани графа $I(G)$ имеют общее ребро в том и только том случае, когда соответствующие вершина и грань графа $G$ инцидентны друг другу. $k$-угольник графа $I(G)$ соответствует либо $k$-угольнику графа $G$, либо его вершине степени $k$.

Пусть $G$ — трехсвязный планарный граф, все вершины которого имеют степень 4. Будем говорить, что ребро $(i, j)$ имеет *прямое продолжение* $(j, k)$ в графе $G$, если ребра $(i, j)$ и $(j, k)$ в плоской реализации графа $G$ разделяют два других ребра, инцидентных вершине $j$. Цепь $j_0, j_1, \ldots, j_n$ в графе $G$ называется *геодезической линией*, если ребро $(j_{k-1}, j_k)$ имеет в качестве прямого продолжения ребро $(j_k, j_{k+1})$ $\forall k \in N_{n-1}$, и *замкнутой геодезической линией*, если $j_0 = i_n$ и ребро $(j_{n-1}, j_n)$ имеет в качестве прямого продолжения ребро $(j_n, j_0)$.

Подграф $L$ графа $G$ называется *линзой*, если выполнены условия:

1) $L$ состоит из цикла $l$, называемого *границей линзы* $L$, и вершин и ребер, лежащих внутри $l$ в плоской реализации $G$;

2) цикл $l$ состоит из двух геодезических линий $i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0$ и $j_0, j_1, \ldots, j_m, i_0$ таких, что в подграфе $L$ нет ребер, инцидентных вершинам $i_0$ и $j_0$, кроме ребер $(i_0, i_1)$, $(j_m, i_0)$, $(i_n, j_0)$, $(j_0, j_1)$.

На рис. 11, *а, б* изображены линзы; подграф, изображенный на рис. 11, *в*, линзой не является.

Линза $L$ называется *неприводимой линзой*, если она не содержит линз в качестве подграфов. Каждый граф $G$ содержит по крайней мере одну неприводимую линзу. Если $L$ — неприводимая линза, то каждая вершина $i_k \forall k \in N_n$ соединена с единственной вершиной $j_s \forall s \in N_n$ геодезической линией $l_k$, содержащейся в $L$ и называемой *сечением линзы* $L$. Сечения $l_k$ и $l_r$, $k \neq r$, пересекаются по крайней мере в одной из внутренних вершин линзы $L$. Каждая внутренняя вершина принадлежит ровно двум сечениям.

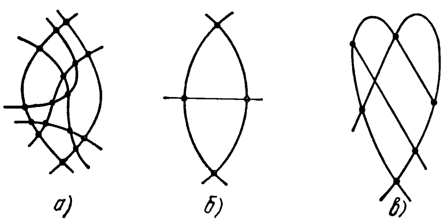


Рис. 11.

Рассмотрим класс всех подграфов графа $G$, содержащих простой цикл, составленный самое большее из двух геодезических линий и внутренних по отношению к этому циклу вершин и ребер. Легко видеть, что минимальные по числу вершин элементы этого класса будут неприводимыми линзами.

Лемма 1.5. *Каждая неприводимая линза $L$ содержит треугольник, инцидентный ее границе.*

Доказательство. Если линза $L$ не имеет внутренних вершин, то грань линзы $L$, инцидентная вершине $i_0$, является треугольником. Пусть линза $L$ имеет внутренние вершины $d_1, \ldots$ $\ldots, d_r$, каждая внутренняя вершина $d_i$ смежна некоторой вершине $i_k$. Пусть $h(d_i)$ — число граней линзы $L$, содержащихся в области $i_s, i_k, d_i$, ограниченной границей $l$ и двумя сечениями $l_s$ и $l_k$, пересекающимися в вершине $d_i$. Пусть $h(d_n) = \min\{h(d_1), \ldots, h(d_r)\}$. Тогда вершины $d_n$, $i_s$, $i_k$ определяют треугольник, инцидентный границе $l$ линзы $L$. Лемма доказана.

Пусть $g(G)$ — минимальное число граней в неприводимой линзе $L$ графа $I(G)$. Имеем

$$2 \leqslant g(G) \leqslant \frac{1}{2} p(I(G)) = \frac{1}{2}(p(G) + v(G)) < l(G).$$

Если $g(G) = 2$, то соответствующая неприводимая линза имеет вид, изображенный на рис. 11, *б*. В этом случае граф $G$ содержит треугольник, инцидентный вершине степени 3 и поэтому редукция $\omega_i$ или $\eta_i \forall i \in N_3$ применима к графу $G$.

Для завершения доказательства теоремы 1.4 осталось показать, что с помощью редукций $\omega_0$ и $\eta_0$ граф со свойством $g(G)>2$ может быть преобразован в граф $G^*$, обладающий свойством $g(G^*)<g(G)$.

Рассматриваем в графе $I(G)$ неприводимую линзу $L$ с $g(G)$ гранями. Согласно лемме 1.5 в линзе $L$ существует треугольник $T$, инцидентный ее границе. В зависимости от того, соответствует в графе $G$ треугольнику $T$ треугольник графа $G$ или вершина степени 3, применяем одну из редукций $\eta_0$ или $\omega_0$. В обоих случаях легко проверяется, что $g(G^*)<g(G)$.

Теорема Штейница доказана.

*Максимальным планарным графом* называется граф, который при добавлении любого ребра перестает быть планарным. Уитни (см. [4]) доказал, что каждый максимальный планарный граф, имеющий $p \geqslant 4$ вершин, трехсвязен.

Следствие 1.6. *Каждый максимальный планарный граф, содержащий по крайней мере черыре вершины, является 3-полиэдральным.*

Пусть $G$ — трехсвязный планарный граф. Его двойственный граф $G^*$ строится следующим образом: поместим в каждую область реализации графа $G$ на плоскости (включая внешнюю) по одной вершине графа $G^*$ и, если две области имеют общее ребро $e$, соединим помещенные в них вершины ребром $e^*$, пересекающим только $e$. В результате получится планарный граф, который будет трехсвязным. Поэтому имеем такое следствие.

Следствие 1.7. *Двойственные трехсвязные планарные графы $G$ и $G^*$ реализуются двойственными многогранниками.*

## § 2. Диаметр многогранника

Интерес к исследованию метрических характеристик графа многогранника возник сравнительно недавно и вызван широким распространением методов линейного программирования.

Напомним, что расстояние $r(u, v)$ между вершинами $u$ и $v$ связного графа $G$ определяется как длина (по числу ребер) кратчайшей цепи между $u$ и $v$.

Определение 2.1. *Диаметр графа $G$* есть наименьшее целое $k$ такое, что расстояние между любыми двумя его вершинами не более $k$. Под *диаметром многогранника* (обозначается $\operatorname{diam} M$) будем понимать диаметр его графа $G(M)$.

**1. Гипотеза о максимальном диаметре.** Обозначим через $\Delta(d, n)$ максимальный диаметр многогранника в классе всех $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями. Проблема определения величины $\Delta(d, n)$ тесно связана с оценкой числа итераций симплексных алгоритмов в линейном программировании. Под *симплексными алгоритмами* понимаем алгоритмы, основанные на построении некоторой цепи между начальной вершиной (выбирается, вообще говоря, произвольно) и оптимальной вершиной. Каждая итерация таких алгоритмов заключается в выборе по определенным правилам (разным для разных алгоритмов) последующей вершины цепи из множества смежных к последней из уже построенных. Если $x$ и $y$ вершины многогранника $M$ такие, что $r(x, y) = \operatorname{diam} M$, то, взяв линейную функцию $cx$, экстремум которой достигается в вершине $y$ и, выбрав в качестве стартовой вершины вершину $x$, получим, что число итераций симплексного алгоритма при решении задачи $\operatorname{extr}\{cx: x \in M\}$ не может быть меньше $\operatorname{diam} M$. В этом смысле величина $\Delta(d, n)$ выражает число итераций, требуемых для решения «наилучшим» симплексным алгоритмом «наихудшей» задачи линейного программирования [13]. Разумеется, при условии, что «наилучший» алгоритм будет построен.

Широкую известность получила гипотеза о максимальном диаметре (см. введение), согласно которой $\Delta(d, n) \leqslant n - d$. Гипотеза доказана только для частных случаев. Во-первых, очевидно, что $\Delta(2, n) = [n/2]$. Кроме того, В. Кли и Д. Волкап [14] показали, что $\Delta(3, n) = [2n/3] - 1$. В [14] гипотеза доказана также для случая, когда $n \leqslant d + 5$. Покажем, что гипотезу о максимальном диаметре достаточно доказать для простых многогранников. Сначала приведем конструкцию, позволяющую любой многогранник превратить в симплициальный с тем же числом вершин и не меньшим числом граней всех размерностей. Конструкция предложена Г. Эгльстоном, Б. Грюнбаумом и В. Кли [10].

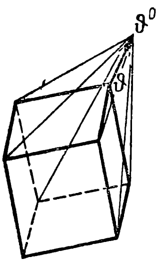


Рис. 12.

Будем говорить, что точка $v^0$ *отделена* (*строго отделена*) $(d-1)$-гранью $F$ $d$-многогранника $M$, если гиперплоскость $\operatorname{aff} F$ отделяет (строго отделяет) точку $v^0$ от $M$.

Определение 2.2. Пусть $v$ — вершина $d$-многогранника $M$ и пусть $v^0 \notin M$ и строго отделена остальными гранями от многогранника $M$. Тогда будем говорить, что *многогранник* $M^0 = \operatorname{conv}(M \cup v^0)$ *получен правильным смещением вершины* $v$ (рис. 12).

Лемма 2.1. *Пусть $d$-многогранник $M^0 \subset E_d$ получен из $d$-многогранника $M$ правильным смещением вершины $v$ в точку $v^0$. Тогда каждая $i$-грань многогранника $M^0 = \operatorname{conv}(M \cup v^0)$ имеет только один из двух следующих типов:*

1) *$i$-грань $F$ многогранника $M$ является гранью многогранника $M^0$ в том и только том случае, когда $F$ является гранью некоторой $(d-1)$-грани, не содержащей вершину $v$;*

2) *$i$-пирамида $F^0$ с вершиной $v^0$ и основанием $F$ является гранью многогранника $M^0$ в том и только том случае, когда $F$ $(i-1)$-грань, не содержащая вершину $v$, но являющаяся гранью такой $(d-1)$-грани многогранника $M$, которая содержит вершину $v$.*

Доказательство. Ясно, что каждая грань многогранника $M^0$ есть либо грань многогранника $M$, либо выпуклая оболочка точки $v^0$ и некоторой грани многогранника $M$. Очевидно также, что грань $F$ многогранника $M$ есть грань многогранника $M^0$

в том и только том случае, когда имеет место утверждение 1) доказываемой леммы.

Докажем утверждение 2) леммы. Пусть $F$ — $(i-1)$-грань многогранника $M$ и пусть $F^0=\operatorname{conv}(F\cup v^0)$ — $i$-грань многогранника $M^0$. Тогда $F=M\cap \operatorname{aff} F^0$. Пусть $x^0\in \operatorname{rel\,int} F$, $y^0\in \operatorname{int} M$ и $E=\operatorname{aff}(v^0,\ x^0,\ y^0)$ — плоскость, содержащая точки $v^0$, $x^0$, $y^0$. Тогда $\bar M=E\cap M$ есть 2-многогранник (многоугольник). Прямая $L=\operatorname{aff}(x^0,\ v^0)$ есть пересечение плоскости $E$ с $\operatorname{aff} F^0$ и $\bar F=L\cap\bar M$ есть либо ребро (рис. 13), либо вершина (рис. 14) многоугольника $\bar M$. Случай, когда $\bar F=L\cap\bar M$ — ребро многоугольника $\bar M$, невозможен, так как тогда $v^0\in\operatorname{aff}\bar F\subseteq\operatorname{aff} F$ и, следовательно, $i=\dim F^0=\dim F=i-1$. Если $\bar F$ — вершина, то она совпадает

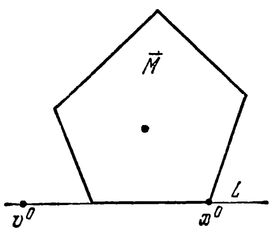



Рис. 13.

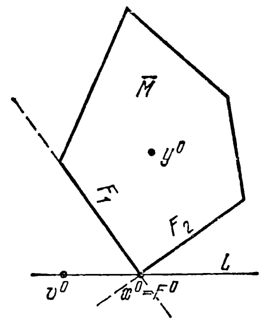



Рис. 14.

с $x^0$ и точка $v^0$ в плоскости $E$ строго отделена одним и не отделена другим из ребер многоугольника $\bar M$, инцидентных вершине $x^0$. Поэтому если $F_1$ и $F_2$ — $(d-1)$-грани многогранника $M$, содержащие, соответственно, эти ребра, то точка $v^0$ в $E_d$ строго отделена одной из граней $F_1$ или $F_2$, например $F_1$, и не отделена второй. По определению 2.2 грань $F_1$ содержит точку $v$.

Пусть теперь $F$ — грань многогранника $M$, удовлетворяющая условиям 2) леммы. Покажем, что $F^0=\operatorname{conv}(F\cup v^0)$ — грань многогранника $M^0$. Если $v^0\in\operatorname{aff} F$, то очевидно, что требуемое выполняется. Пусть $v^0\notin\operatorname{aff} F$ и $(d-1)$-грани $F_1$ и $F_2$ таковы, что $F\subset F_1\cap F_2$ и $F_1$ строго отделяет точку $v^0$, а $F_2$ не отделяет $v^0$ от многогранника $M$. Пусть $H_i=\operatorname{aff} F_i$ и пусть $H_0$ — опорная гиперплоскость, порождающая грань $F$. Поворачиваем гиперплоскости $H_i$ вокруг $H_i\cap H_0$, приближая их к $H_0$, до тех пор, пока для новых гиперплоскостей $H_i^*$ не будет выполнено условие: $H_i^*\cap M=F$ и в тоже время точка $v^0$ строго отделена $H_1^*$ и не отделена $H_2^*$ от $M$. Точнее, если

$$H_i=\{x\in E_d:\quad a^ix=0\},\qquad i=0,\ 1,\ 2$$

(для простоты предполагаем, что $0\in F$) и $M\subset H_i^+$, то, положив

$$\lambda_1=\sup\{\lambda:\ (c^1+\lambda c^0)\,v^0\leqslant 0\},$$
$$\lambda_2=\sup\{\lambda:\ (c^2+\lambda c^0)\,v^0\geqslant 0\},$$

получим требуемые гиперплоскости

$$H_i^* = \{x \in E_d\colon\ (c^i + c^0\lambda_i/2)\,x = 0\}, \qquad i = 1,\ 2.$$

Гиперплоскость $H_0^* = \operatorname{aff}(v^0 \cup (H_1^* \cap H_2^*))$ содержит точку $v^0$ и порождает грань $F$. Далее, так как $H_0^* \cap M^0 = H_0^* \cap \operatorname{conv}(M \cup v^0) = \operatorname{conv}(F \cup v^0) = F^0$, то $F^0$ есть грань многогранника $M^0$. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Существует простой $d$-многогранник с $n$ $(d-1)$-гранями и диаметром $\Delta(d,\ n)$.*

Доказательство. Сначала дадим одно определение. *Грань-диаметр* $d$-многогранника определяется как наименьшее целое $k$ такое, что для любых двух его $(d-1)$-граней $F$ и $G$ может быть построена последовательность $(d-1)$-граней $F = F_0,\ F_1,\ \ldots$ $\ldots,\ F_k = G$, в которой множество $F_{i-1} \cap F_i$ $\forall_i \in N_k$ есть $(d-2)$-грань. Такая последовательность называется *грань-цепью*. Ясно, что грань-диаметр многогранника совпадает с диаметром многогранника, двойственного к нему.

Пусть $M$ — $d$-многогранник, для которого $\operatorname{diam} M = \Delta(d,\ n)$. Переходим от $M$ к двойственному многограннику $M^*$. Правильными смещениями вершин $d$-многогранник $M^*$ может быть преобразован в симплициальный $M^0$ (лемма 2.1), грань-диаметр которого, как легко проверить, не меньше, чем у многогранника $M^*$. Поэтому для простого многогранника $(M^0)^*$, имеющего $n$ $(d-1)$-граней, справедливо соотношение $\operatorname{diam}(M^0)^* \geqslant \operatorname{diam} M$. Теорема 2.2 доказана.

Установим диаметр произведения двух многогранников (определение см. в § 3 гл. I). Символ $r_M(x,\ y)$ употребляем, когда необходимо подчеркнуть, для какого многогранника $M$ определяется величина $r(x,\ y)$.

Лемма 2.3. $\operatorname{diam}(M_1 \otimes M_2) = \operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2$.

Доказательство. Пусть $(v_1,\ v_2)$, $(v_1',\ v_2')$ — две вершины многогранника $M_1 \otimes M_2$, где $v_i$, $v_i'$ — вершины многогранника $M_i$, $i = 1,\ 2$. Если $v_i = v_i^0,\ \ldots,\ v_i^{k_i} = v_i'$ — кратчайшая цепь между вершинами $v_i$ и $v_i'$ многогранника $M_i$, $i = 1,\ 2$, то $(v_1,\ v_2) = (v_1^0,\ v_2),\ \ldots$ $\ldots,\ (v_1^{k_1},\ v_2) = (v_1',\ v_2^0),\ \ldots,\ (v_1',\ v_2^{k_2}) = (v_1',\ v_2')$ — цепь длины $k_1 + k_2$ между вершинами $(v_1,\ v_2)$ и $(v_1',\ v_2')$ многогранника $M_1 \otimes M_2$. Следовательно,

$$r_{M_1 \otimes M_2}((v_1,\ v_2),\ (v_1',\ v_2')) \leqslant r_{M_1}(v_1,\ v_1') + r_{M_2}(v_2,\ v_2').$$

Далее, если $(u_1,\ u_2)$, $(u_1',\ u_2')$ — пара смежных вершин в $M_1 \otimes M_2$, где $u_i$, $u_i' \in M_i$, $i = 1,\ 2$, то либо $u_1 = u_1'$ и $u_2$, $u_2'$ — смежные вершины многогранника $M_2$, либо $u_2 = u_2'$ и $u_1$, $u_1'$ — смежные вершины многогранника $M_1$. Поэтому

$$r_{M_1 \otimes M_2}((v_1,\ v_2),\ (v_1',\ v_2')) \geqslant r_{M_1}(v_1,\ v_1') + r_{M_2}(v_2,\ v_2').$$

Следовательно,

$$\operatorname{diam}(M_1 \otimes M_2) = \operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.4. $\Delta(d_1+d_2,\ n_1+n_2) \geqslant \Delta(d_1,\ n_1) + \Delta(d_2,\ n_2)$, *и в частности*, $\Delta(d+1,\ n+2) \geqslant \Delta(d,\ n)+1$.

Доказательство. Пусть $M_i$ — $d_i$-многогранник с $n_i$ $(d_i-1)$-гранями и пусть $\operatorname{diam} M_i = \Delta(d_i,\ n_i)$, $i=1,\ 2$. Так как

$$\dim M_1 \otimes M_2 = d_1+d_2, \quad f_{d_1+d_2-1}(M_1 \otimes M_2) = n_1+n_2,$$

то в силу леммы 2.3

$$\Delta(d_1+d_2,\ n_1+n_2) \geqslant \operatorname{diam}(M_1 \otimes M_2) = \\ = \operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2 = \Delta(d_1,\ n_1) + \Delta(d_2,\ n_2).$$

Так как $\Delta(1,\ 2)=1$, то $\Delta(d+1,\ n+2) \geqslant \Delta(d,\ n)+1$.

Определение 2.3. *Клином над $d$-многогранником $M$ относительно его $k$-грани* $F$ $(0 \leqslant k < d)$ назовем $(d+1)$-многогранник $W = H^+ \cap (M \otimes L)$, где $L=[0,\ \infty)$, $H^+$ — полупространство, содержащее $M$ и такое, что $H \cap M = F$, и гиперплоскость $H$ пересекает внутренность $M \otimes L$. Пример клина приведен на рис. 15.

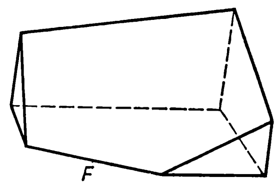



Рис. 15.

$d$-грани $M$ и $H \cap (M \otimes L)$ называем соответственно *нижним* и *верхним основаниями*. Каждой вершине $x \in M$, $x \notin F$ сопоставим вершину $x'$ верхнего основания, образованную пересечением верхнего основания с $x \otimes L$. Если $M$ — простой $d$-многогранник и $F$ — $(d-1)$-грань его, то клин $W$ также является простым многогранником. В силу леммы 2.3 и с учетом конструкции клина $W$ имеем равенство $\operatorname{diam} W = \operatorname{diam} M$.

Определение 2.4. *Невозвращающейся цепью* в графе $G(M)$ многогранника $M$ называется последовательность смежных вершин $v^1, \ldots, v^s$, обладающая свойством: если вершина $v^j$ принадлежит некоторой $(d-1)$-грани $F$, а вершина $v^{j+1}$ не принадлежит ей, то и вершины $v^{j+k} \forall k \in N_{s-j}$ не принадлежат грани $F$.

Определение 2.5. *$d$-фигурой Данцига* называется тройка $(M,\ x,\ y)$, в которой $M$ — простой $d$-многогранник с $2d$ $(d-1)$-гранями, из которых $d$ инцидентно вершине $x$ и $d$ других инцидентно вершине $y$.

В. Кли и Д. Волкап [14] дали несколько эквивалентных формулировок гипотезы о максимальном диаметре.

Теорема 2.5. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *любые две вершины каждого простого многогранника соединены невозвращающейся цепью*;

(2) $\Delta(d,\ n) \leqslant n-d$ *для любых* $d,\ n,\ 1 \leqslant d < n$;

(3) $\Delta(d,\ 2d) \leqslant d$ *для каждого* $d$;

(4) *для каждой $d$-фигуры Данцига $(M, x, y)$ справедливо равенство $r(x, y)=d$.*

Доказательство. $(1)\Rightarrow(2)$. Пусть произвольные вершины $x$ и $y$ простого $d$-многогранника $M$ инцидентны $k$ $(0\leqslant k\leqslant d-1)$ общим $(d-1)$-граням. Тогда из определения невозвращающейся цепи следует, что $r(x, y)\leqslant n-d-k$. Следовательно, $\operatorname{diam} M\leqslant n-d-k\leqslant n-d$.

В силу произвольности многогранника $M$ и благодаря теореме 2.2 убеждаемся в справедливости утверждения (2).

$(2)\Rightarrow(3)$. Очевидно, достаточно положить $n=2d$.

$(3)\Rightarrow(4)$. Утверждение (3) влечет, что $r(x, y)\leqslant d$. С другой стороны, так как вершины $x$ и $y$ не инцидентны общим $(d-1)$-граням, то $r(x, y)\geqslant d$. Поэтому $r(x, y)=d$.

$(4)\Rightarrow(1)$. Пусть $M$ — простой $d$-многогранник с $d+m$ $(d-1)$-гранями, и пусть $x$ и $y$ — произвольные его вершины. Положим $y=y_0$ и рассмотрим грань $F_0$ наименьшей размерности, содержащую вершины $x$ и $y$. Пусть $\dim F_0=d'$ и $f_{d'-1}(F_0)=d'+m'$, где $d'\leqslant d$, $m'\leqslant m$. Так как в $F_0$ нет $(d'-1)$-граней, инцидентных одновременно обеим вершинам $x$ и $y$, то $m'=d'+k$, где $k$ — число $(d'-1)$-граней, не инцидентных ни вершине $x$, ни вершине $y$. Если $k>0$, то пусть $G$ — $(d'-1)$-грань многогранника $F_0$, не содержащая вершин $x$ и $y$. Образуем клин $F_1$ над многогранником $F_0$ относительно его грани $G$. $(d'+1)$-многогранник $F_1$ имеет $k-1$ $d'$-граней, не инцидентных ни вершине $x$, ни $y_1$ — вершине верхнего основания клина $F_1$. Повторяя описанный процесс замены многогранника клином с меньшим числом граней, не инцидентных выделенным вершинам, самое большее через $k$ шагов получим $(d'+k')$-фигуру Данцига $(F_k, x, y_k)$.

По предположению $r_{F_k}(x, y_k)=m'=d'+k$. Из определения 2.5 вытекает, что между вершинами $x$ и $y_k$ фигуры Данцига $F_k$ существует невозвращающаяся цепь. Легко заметить, что невозвращающейся цепи $C$ клина $W$ над многогранником $M$ отвечает также невозвращающаяся цепь в многограннике $M$, полученная из $C$ заменой каждой вершины верхнего основания соответствующей ей вершиной нижнего основания. Поэтому невозвращающейся цепи между вершинами $x$, $y_k$ соответствующей фигуры Данцига соответствует невозвращающаяся цепь между вершинами $x$ и $y$ многогранника $M$. Теорема доказана.

**2. Верхняя граница для диаметра.** Приводимая ниже оценка получена Ларманом [7].

Теорема 2.6. *Если $d\geqslant 3$, то $\Delta(d, n)\leqslant 2^{d-3}n$.*

Заметим, что объявленная в 1974 г. несколько улучшенная оценка (см. Barnette D. An upper bound for the diameter of polytope. — Diser. Math., 1974, v. 10)

$$\Delta(d, n)\leqslant\frac{1}{3}\,2^{d-3}\left(n-d+\frac{5}{2}\right)$$

в настоящее время подвергается сомнению (см. Barnette D. Relations between combinatorics and other parts of mathematics. — Pros. Symp. Pure Math., 1979, v. 34).

Лемма 2.7. *Максимальный диаметр в классе $d$-многогранников, имеющих $n$ вершин, не больше* $[(n-2)/d]+1$.

Доказательство. Выберем любые две вершины $d$-многогранника. По теореме 1.2 между ними существует, по крайней мере, $d$ вершинно непересекающихся реберных цепей. Поэтому длина самой короткой реберной цепи, соединяющей выбранные вершины, не превосходит $[(n-2)/d]+1$.

Лемма 2.8. *Имеет место неравенство*

$$\Delta(3,\ n) \leqslant \left[\frac{2}{3}n\right]-1. \tag{2.1}$$

Доказательство. По теореме 2.2 достаточно ограничиться случаем простых 3-многогранников. Согласно следствию 5.10 гл. I число вершин простого 3-многогранника, имеющего $n$ 2-граней, выражается формулой $f_0=2f_2-4$. Поэтому с учетом леммы 2.7 имеем следующую цепочку неравенств:

$$\Delta(3,\ n)=\Delta(3,\ f_2=n)=\Delta(3,\ f_0=2f_2-4)\leqslant$$
$$\leqslant\left[\frac{2f_2-4-2}{3}\right]+1\leqslant\left[\frac{2}{3}n\right]-1.$$

Заметим, хотя этот факт не понадобится в дальнейшем, что оценки, полученные в этих леммах, точные. Более того, существуют даже симплициальные многогранники, на которых достигается оценка леммы 2.7. В качестве экстремальной конструкции

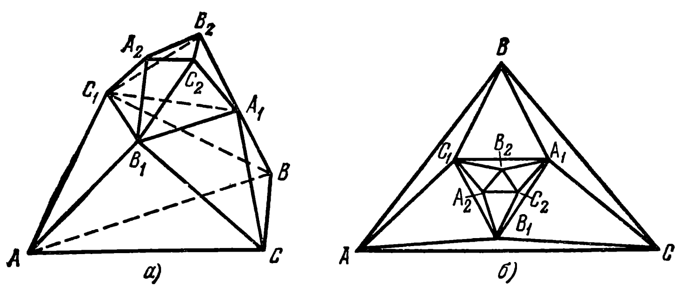



Рис. 16.

можно взять следующую [14]. Рассмотрим $d$-многогранники $P(d,\ j)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,$ являющиеся выпуклой оболочкой $j+1$ $(d-1)$-симплексов, расположенных в параллельных гиперплоскостях таким образом, что последовательные симплексы антигомотетичны и их относительная граница лежит на границе $P(d,\ j)$. Так, на рис. 16, *а* показан многогранник $P(3,\ 2)$, а на рис. 16, *б* изображен «вид сверху» на $P(3,\ 2)$.

Отметим, что $d$-многогранник $P(d, j)$ имеет $d(j+1)$-вершин и $(2^d-2)j+2$ $(d-1)$-граней. Нетрудно видеть, что на $P(d, j)$ достижима оценка леммы 2.7. Кроме того, многогранники $P(d, j)$ имеют *фасетный* диаметр, т. е. диаметр соответствующего двойственного многогранника, равный $(d-1)j+2$. Так что на многогранниках $P(d, j)$ достигается оценка (2.2) (см. также упр. 11).

Пусть $M$ есть $d$-многогранник, $C=\{v^1, v^2, \ldots, v^s\}$ — цепь в графе $G(M)$. *Посещением цепью $C$ грани $F$* называется подцепь $v^i, v^{i+1}, \ldots, v^{j-1}, v^j$ цепи $C$, удовлетворяющая условиям $v^t \in F$, $i \leqslant t \leqslant j$, $v^{i-1}, v^{j+1} \notin F$. Говорим, что *цепь $C$ посещает грань $F$ $k$ раз*, если $C$ содержит ровно $k$ различных посещений грани $F$.

Пусть $F$ — грань многогранника $M$. Под расстоянием $r(x, F)$ от вершины $x$ до грани $F$ будем понимать величину $\min\{r(x, y): y \in F\}$. Символ $r_M(x, F)$ употребляем, когда необходимо подчеркнуть, что данная величина определяется для многогранника $M$.

Лемма 2.9. *Между любыми вершинами $x$ и $y$ простого $d$-многогранника $M$, $d \geqslant 3$, существует цепь, которая посещает каждую $(d-1)$-грань не более чем $2^{d-3}$ раза.*

Доказательство проведем индукцией по $d$. При $d=3$ из (2.1) имеем $\operatorname{diam} M \leqslant \frac{2}{3}n-1$, и, следовательно, по теореме 2.5 лемма 2.9 верна.

Пусть длина кратчайших грань-цепей между вершинами $x$ и $y$ равна $k$, и пусть $F_1$ — первая $(d-1)$-грань одной из таких цепей. Среди всех грань-цепей из $x$ в $y$ длины $k$, начинающихся с $F_1$, выбираем грань-цепь с такой второй $(d-1)$-гранью $F_2$, для которой величина $r_{F_1}(x, F_1 \cap F_2)$ минимальна. Пусть $x^1$ — вершина $(d-2)$-грани $F_1 \cap F_2$ с условием $r_{F_1}(x, x^1) = r_{F_1}(x, F_1 \cap F_2)$. Далее, среди всех грань-цепей из $x$ в $y$ длины $k$, началом которых служит пара граней $F_1$, $F_2$, выбираем грань-цепь с такой третьей гранью $F_3$, что величина $r_{F_2}(x^1, F_2 \cap F_3)$ минимальна. Пусть $x^2$ — вершина грани $F_2 \cap F_3$ с условием $r_{F_2}(x^1, x^2) = r_{F_2}(x^1, F_2 \cap F_3)$. Продолжая описанный процесс, построим грань-цепь $F_1, F_2, \ldots, F_k$, для которой $x \in F_1$, $y \in F_k$. Через $C_i$, $i \in N_k$, обозначим кратчайшую цепь между вершинами $x^{i-1}$ и $x^i$ многогранника $F_i$ $(x^0 = x,\ x^k = y)$. Объединение цепей $C_i$, $i \in N_k$, дает цепь $C$ в многограннике $M$. Понятно, что

$$C_i \cap C_{i+1} = x^i \qquad \forall i \in N_{k-1}.$$

Рассмотрим какую-нибудь $(d-1)$-грань $F$ многогранника $M$. Если грань $F$ совпадает с некоторой гранью $F_i$, $i \in N_k$, то цепь $C$ посещает грань $F$ один раз вдоль цепи $C_i$ и по индуктивному предположению, поскольку $\dim(F_i \cap F_{i+1}) = d-2$, не более чем $2^{d-4}$ раза вдоль цепи $C_{i+1}$.

Пусть $F$ — $(d-1)$-грань многогранника $M$, отличная от граней $F_i$, $i \in N_k$. Если $F$ пересекается только с одной из этих граней, например с $F_i$, то по индуктивному предположению цепь $C_i$ посещает грань $F \cap F_i$ многогранника $F_i$ не более чем $2^{d-4}$ раза, поскольку $\dim(F \cap F_i) = d-2$. Последнее следует из того, что многогранник $M$ — простой.

Ясно, что грань $F$ может пересекать самое большое три грани из кратчайшей грань-цепи $F_1, F_2, \ldots, F_k$. Причем, если $F$ пересекает ровно 3 грани, то последние должны быть последовательными $F_{i-1}, F_i, F_{i+1}$. Значит, $F \cap C$ содержится в $C_{i-1} \cup C_i \cup C_{i+1}$.

Теперь покажем, что $F \cap C$ содержится либо в $C_{i-1} \cup C_i$, либо в $C_i \cup C_{i+1}$. Действительно, если $F$ встречается с цепями $C_{i-1}$ и $C_{i+1}$, причем с цепью $C_{i-1}$ в вершине, отличной от $x^{i-1}$, то, заменив $F_i$ на $F$ в грань-цепи $F_1, F_2, \ldots, F_k$, получим противоречие с правилом выбора $F_i$.

Итак, пусть, например, $F \cap C \subseteq C_i \cup C_{i+1}$. Тогда, если $F \cap F_i \neq \neq \varnothing$, то $\dim(F \cap F_i) = d-2$, и поэтому по индуктивному предположению цепь $C_i$ посещает грань $F \cap F_i$ многогранника $F_i$ не более чем $2^{d-4}$ раза. Следовательно, цепь $C$ посещает грань $F$ не более чем $2^{d-3}$ раза.

Доказательство теоремы 2.6. На основании теоремы 2.2 достаточно ограничиться рассмотрением лишь простых $d$-многогранников.

Пусть $x$, $y$ — произвольные вершины $d$-многогранника $M$ с $n$ $(d-1)$-гранями. По лемме 2.9 существует цепь $C = \{x^0, x^1, \ldots, x^p\}$, $x^0 = x$, $x^p = y$, которая посещает каждую $(d-1)$-грань многогранника $M$ не более чем $2^{d-3}$ раза, причем при переходе из вершины $x^i$ в вершину $x^{i+1}$ цепь $C$ заканчивает посещение одной какой-то $(d-1)$-грани и начинает посещение какой-то другой $(d-1)$-грани. Поэтому если $p > 2^{d-3}n$, то существует не менее одной $(d-1)$-грани многогранника $M$, которая посещается цепью $C$ более чем $2^{d-3}$ раза, что противоречит выбору цепи $C$. Следовательно, $p \leqslant 2^{d-3}n$, а так как вершины $x$, $y$ выбраны произвольно, то $\Delta(d, n) \leqslant 2^{d-3}n$.

**3. Нижняя граница максимального диаметра [5].** Пусть $M_1$, $M_2$ — два простых $d$-многогранника.

Определение 2.6. *Склейкой* этих *многогранников* по вершинам $v^1$, $v^2$ (обозначается $M_1 \oplus M_2$) называется многогранник, полученный с помощью процедуры, содержащей следующие этапы:

1. Фиксируем вершины $v^1$ и $v^2$ многогранников $M_1$ и $M_2$.

2. Осуществляем правильные отсечения вершин $v^i$ (см. определение 3.3 гл. I), образуя многогранники $M_i'$ с симплициальными гранями $F_i = M_i \cap H$, $i = 1, 2$, где $H_i$ — гиперплоскости, отсекающие вершины $v^i$.

3. Пусть $\tau_i$ — проективное преобразование, переводящее гиперплоскость $H_i'$, содержащую вершину $v^i$ в бесконечность. Строим многогранник $\tau_i(M_i')$ так, чтобы все его $(d-1)$-грани, пересекающие $\tau_i(F_i)$, были параллельны.

4. С помощью соответствующего аффинного преобразования $\alpha_i$ строим многогранник $M_i^* = \alpha_i(\tau_i(M_i'))$, в котором каждая $(d-1)$-грань, пересекающая $\alpha_i(\tau_i(M_i'))$, перпендикулярна к ней.

5. Найдем аффинное преобразование $\alpha_3$ многогранника $M_1^2$, которое переводит грань $\alpha_1(\tau_1(F_1))$ в $\alpha_2(\tau_2(F_2))$, а грани, пересекающие $\alpha_1(\tau_1(F_1))$, оставляет перпендикулярными к ней.

6. Расположим $M_2^2$ и $\alpha_3(M_1^2)$ так, что $\alpha_3(\alpha_1(\tau_1(F_1)))$ и $\alpha_2(\tau_2(F_2))$ совпадают, а внутренность $M_2^2$ не пересекает внутренность $\alpha_2(M_1^2)$.

Заметим, что все грани многогранника $M_i$, не содержащие $v^i$, будут гранями и $M_1 \oplus M_2$, и что $d$ $(d-1)$-граней многогранника $M_1$, пересекающихся в $v^1$, вместе с $d$ $(d-1)$-гранями многогранника $M_2$, пересекающимися в $v^2$, образуют (после преобразования) остальные $d$ $(d-1)$-граней многогранника $M_1 \oplus M_2$ (рис. 17).

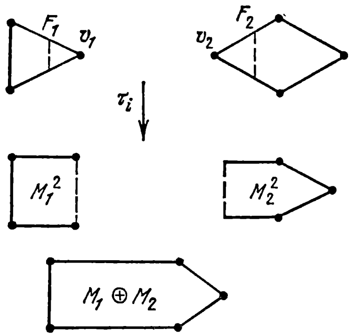


Рис. 17.

Непосредственно из определения следует, что $\dim(M_1 \oplus M_2) = d$, $f_{d-1}(M_1 \oplus M_2) = f_{d-1}(M_1) + f_{d-1}(M_2) - d$. Отметим еще, что многогранник $M_1 \oplus M_2$ определяется неоднозначно и зависит от выбора вершин $v^1$, $v^2$.

Лемма 2.10. *Существует такая склейка двух $d$-многогранников $M_1$ и $M_2$, что*

$$\operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2 - 1 \leqslant \operatorname{diam}(M_1 \oplus M_2) \leqslant \operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2. \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть $v_i$, $v_i' \in M_i$ — такие вершины многогранника $M_i$, что $r_{M_i}(v_i, v_i') = \operatorname{diam} M_i$, $i = 1, 2$.

Пусть $M_1 \oplus M_2$ — склейка многогранников $M_1$ и $M_2$ по вершинам $v_1$, $v_2$. Если вершины $v_i^0$, $v_i$ многогранника $M$ смежны, то благодаря равенству $r_{M_i}(v_i, v_i') = \operatorname{diam} M_i$, величина $r_{M_i}(v_i^0, v_i')$ равна $\operatorname{diam} M_i$ или $\operatorname{diam} M_i - 1$, $i = 1, 2$. Каждая вершина $M_1$, смежная $v_1$, смежна в $M_1 \oplus M_2$ точно одной вершине из $M_2$, Следовательно, верно (2.1).

Лемма 2.11. $\Delta(d, n_1 + n_2 - d) \geqslant \Delta(d, n_1) + \Delta(d, n_2) - 1$.

Доказательство. Пусть $M_i$ — $d$-многогранники с $n_i$ $(d-1)$-гранями, имеющие максимальные диаметры, т. е. $\operatorname{diam} M_i = \Delta(d, n_i)$, $i = 1, 2$. В силу леммы 2.10, осуществив склейку этих многогранников, получим

$$\Delta(d, n_1 + n_2 - d) \geqslant \operatorname{diam}(M_1 \oplus M_2) \geqslant \operatorname{diam} M_1 + \operatorname{diam} M_2 - 1 = \Delta(d, n_1) + \Delta(d, n_2) - 1.$$

Теорема 2.12. $\Delta(d, n) \geqslant \left[n - d - \frac{n-d}{[5d/4]}\right] + 1$.

Доказательство. Величину $[n - d - (n-d)/[5d/4]] + 1$ обозначим через $Z(d, n)$. Доказательство проведем индукцией по $d$. Для $d \leqslant 2$ имеем $\Delta(d, n) = [n/2] \geqslant Z(d, n)$. Предположим, что $\Delta(d-1, n) \geqslant Z(d-1, n)$ для некоторого $d - 1 \geqslant 2$ и всех $n \geqslant d$.

В силу леммы 2.4 и предположения индукции имеем

$$\Delta(d, n) \geqslant \Delta(d-1, n-2)+1 \geqslant Z(d-1, n-2)+1.$$

Пусть $d \not\equiv 0 \pmod 4$. Тогда

$$Z(d-1, n-2)+1=\left[n-d-\frac{n-d-1}{[5d/4]-1}\right]+1.$$

Таким образом, в этом случае для $1 \leqslant n-d \leqslant [5d/4]$ справедливо неравенство $Z(d-1, n-2)+1 \geqslant Z(d, n)$.

Пусть $d \equiv 0 \pmod 4$. Тогда

$$Z(d-1, n-2)+1=\left[n-d+\frac{n-d-1}{[5d/4]-2}\right]+1,$$

и подобно предыдущему случаю

$$\Delta(d, n) \geqslant Z(d, n) \text{ при } n-d \leqslant [5d/4]-1.$$

Более того, так как $d \equiv 0 \pmod 4$ и $\Delta(4, 9)=5$ (задача 15), то, используя лемму 2.4, имеем

$$\Delta\left(d, d+\frac{5d}{4}\right)=\Delta\left(\frac{d}{4}\cdot 4, \frac{d}{4}\cdot 9\right) \geqslant \frac{d}{4}\Delta(4, 9)=\frac{5d}{4}=Z\left(d, d+\frac{5d}{4}\right).$$

Итак, мы доказали, что для всех $n-d \leqslant [5d/4]$ справедливо $\Delta(d, n) \geqslant Z(d, n)$.

Предположим теперь, что $\Delta(d, n) \geqslant Z(d, n)$ для всех $n \leqslant n_0$, где $n_0 \geqslant d+[5d/4]$. Пусть $n_0-d \equiv b (\mathrm{mod}[5d/4])$, т. е. $n_0-d-b= =k[5d/4]$, $0 \leqslant b < [5d/4]$. В силу леммы 2.11 и предположения индукции справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\Delta(d, n_0+1) \geqslant \Delta(d, n_0-b)+\Delta(d, b+d+1)-1 \geqslant \\
&\geqslant Z(d, n_0-b)+Z(d, b+1+d)-1= \\
&=\left[n_0-b-d-\frac{n_0-b-d}{[5d/4]}\right]+1+\left[b+1+d-d-\frac{b+1+d-d}{[5d/4]}\right]+1-1= \\
&=k[5d/4]-k\frac{[5d/4]}{[5d/4]}+\left[b+1-\frac{b+1}{[5d/4]}\right]+1= \\
&=\left[n_0+1-d-\frac{n_0+1-d}{[5d/4]}\right]+1=Z(d, n_0+1).
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

**4. Толщина.**

Определение 2.7. *Толщина многогранника* $M$ (обозначается $\lambda(M)$) определяется как число вершин в самой длинной простой цепи графа многогранника.

Иначе, $\lambda(M)=\mu(M)+1$, где $\mu(M)$ — длина самой длинной простой цепи на графе многогранника.

Если в графе $G(M)$ имеется простой остовный цикл $C$, то $G$ называется *гамильтоновым графом*, а $C$ — *гамильтоновым циклом*. Таким образом, если граф многогранника $M$ — гамильтонов, то толщина $\lambda(M)$ равна числу вершин многогранника. Отметим, что начало исследований гамильтоновых графов относится именно к графам многогранников. У. Гамильтон строил простые циклы, содержащие каждую вершину 3-многогранника (додекаэдра) Тейт в 1880 г. высказал предположение, что каждый 3-полиэдральный граф является гамильтоновым. Отметим, что справедливость гипотезы Тейта означала бы также справедливость гипотезы четырех красок. Это обстоятельство обусловило появление большого числа работ, посвященных установлению гамильтоновости полиэдральных графов. Первый контрпример к гипотезе Тейта построил Татт в 1964 г. Граф Татта изображен на рис. 18.

Отметим, что для каждых $d$ и $n$ $(n \geqslant d+1)$ существует $d$-многогранник с $n$ вершинами, граф которого гамильтонов. Примером такого многогранника может служить циклический многогранник $C(d, n)$. Для $d>3$ каждый циклический $d$-многогранник 2-смежностный (это означает, что любые две вершины соединены ребром) и, следовательно, его граф гамильтонов. Для $d=3$, воспользовавшись характеризацией 1-граней, легко показать, что граф многогранника $C(3, n)$ также гамильтонов. Итак, максимальная толщина $d$-многогранника с $n$ вершинами равна $n$. Она достигается на симплициальных многогранниках.

Предложение 2.13. *Максимальная толщина многогранника в классе всех $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями равна*

$$\binom{n-[(d+1)/2]}{n-d}+\binom{n-[(d+2)/2]}{n-d}.$$

*Эта толщина достигается на простых $d$-многогранниках.*

Доказательство предложения будет вытекать из результатов § 3 гл. III.

Предложение 2.14. *Минимальная толщина в классе простых $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями не превосходит числа $(d-1)(n-d)+2$.*

Доказательство. Пусть $x$ — вершина многогранника $M$ и пусть гиперплоскость $H$ сильно отделяет точку $x$ от множества $\operatorname{conv} \operatorname{vert}(M \setminus x)$. Будем говорить, что многогранник $M \cap H^+$ получен в результате правильного отсечения вершины $x$. Ясно, что если $M$ — простой многогранник, то грань $M \cap H$ многогранника $M \cap H^+$ является симплексом. Рассмотрим многогранник $Q(d, n)$, полученный из $d$-симплекса после $n-d-1$ последовательных правильных отсечений вершин. Осталось заметить, что если граф простого $d$-многогранника $Q(d, n-1)$ гамильтонов, то граф многогранника $Q(d, n)$, полученного путем правильного отсечения некоторой вершины $Q(d, n-1)$, также гамильтонов.

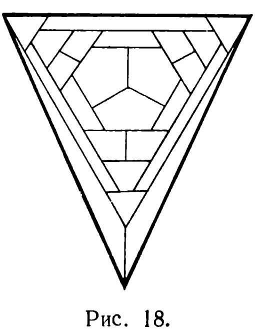


Рис. 18.

Определение 2.8. *$l$-толщиной многогранника $M$* назовем число ребер в самой длинной простой цепи $x^0, \ldots, x^s$ графа $G(M)$, для которой существует линейная функция $l(x)=cx$ такая, что $cx^0<cx^1<\ldots<cx^s$.

Обозначим через $H(d, n)$ наибольшую $l$-толщину в классе $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями.

В. Кли и Г. Минти [13] получили следующие оценки:

$$\alpha_d n^{[d/2]} < H(d, n) < \beta_d n^{[d/2]}, \quad n > d, \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{2^{[d/2]^2}} < \liminf_{n\to\infty} \frac{H(d, n)}{n^{[d/2]}} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{H(d, n)}{n^{[d/2]}} \leqslant \frac{2}{[d/2]!}. \tag{2.3}$$

Для приложений интересно знать не только $l$-толщину многогранника, а и тесно связанную с ней так называемую *симплексную толщину*, которая определяется как максимальное число шагов стандартного симплекс-метода при решении всякой задачи линейного программирования на многограннике $M$. Обозначим через $\theta(d, n)$ наибольшую симплексную толщину в классе $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями. Ясно, что $H(d, n) \geqslant \theta(d, n)$. Оказывается, что для величины $\theta(d, n)$ справедливы те же оценки (2.2), (2.3).

В заключение приведем пример многогранника, полученного малой деформацией $(0 < \varepsilon < 1/2)$ $d$-куба, $l(x) = x_d$-толщина которого равна $2^d - 1$ (рис. 19):

$$\begin{gathered} 0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \\ \varepsilon x_1 \leqslant x_2 \leqslant 1 - \varepsilon x_1, \\ \varepsilon x_2 \leqslant x_3 \leqslant 1 - \varepsilon x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varepsilon x_{d-1} \leqslant x_d \leqslant 1 - \varepsilon x_{d-1}. \end{gathered}$$

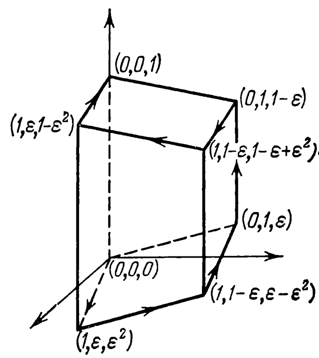



Рис. 19.

**Задачи и дополнения**

1. В графе $d$-многогранника между любыми различными парами вершин $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)$, где $m = [(d+1)/3]$, существуют вершинно непересекающиеся цепи. Показать, что в случае симплициальных $d$-многогранников таких пар может быть $[(d+1)/2]$.

2. Граф каждого симплициального $d$-многогранника содержит в качестве подграфа полный граф $K_{d-i}$, $i = 0, 1, \ldots, d-1$.

3. Трехсвязный граф с $p \geqslant 6$ вершинами планарен тогда и только тогда, когда в нем нет подграфов, гомеоморфных графу $K_{3,3}$.

4 [8]. Каждый 3-полиэдральный граф содержит остовное дерево, степени вершин которого не превышают 3.

5*. Доказать или опровергнуть две следующие гипотезы Барнетта, (см. [8]):

1) граф каждого простого 4-многогранника гамильтонов; частичным подтверждением гипотезы служит следующая теорема Татта: каждый 4-связный планарный граф — гамильтонов;

2) если все 2-грани простого 3-многогранника имеют четное число ребер, то граф такого многогранника гамильтонов.

6. Для каждого $d \geqslant 3$ существует $d$-полиэдральный граф, не являющийся гамильтоновым.

7 [11]. Доказать, что 1) минимальное число вершин и ребер 3-многогранника, граф которого не содержит гамильтонова цикла, равно соответствен-

но 11 и 18; 2) минимальное число граней 3-многогранника, граф которого не содержит гамильтонова цикла, равно 9; 3) соответствующие характеристики для симплициального 3-многогранника, граф которого не содержит гамильтонова цикла, равны 11 и 27.

8. Проблема существования 3-многогранников с данным числом $p_k$ $k$-угольных граней и данным числом $v_k$ вершин степени $k$ восходит к классической теореме Эберхарда [9] и насчитывает ныне много результатов. Приведем некоторые из них (подробнее можно прочитать в [11]).

1) Из формулы Эйлера непосредственно вытекает, что последовательности $p_k$, $v_k$ удовлетворяют условиям

$$\sum_{k\geq 3}(6-k)\,p_k+2\sum_{k\geq 3}(3-k)\,v_k=12,$$

$$\sum_{k\geq 3}(4-k)\,(p_k+v_k)=8. \qquad (*)$$

2) Если даны неотрицательные целые числа $p_5$, $p_6$, ..., $p_n$, удовлетворяющие условиям $p_6\geq 8$ и

$$\sum_{k\geq 5}(6-k)\,p_k=12, \qquad (**)$$

то существует простой 3-многогранник $M$ со свойством $p_k(M)=p_k$ при $k\geq 5$.

3) Пусть даны неотрицательные целые числа $p_3$, $p_5$, $p_6$, ..., $p_n$, удовлетворяющие условию $\sum\limits_{k\geq 3}(4-k)\,p_k=8$. Тогда существует 3-многогранник $M$ со свойством $p_k(M)=p_k$ при $k\neq 4$, $v_4(M)=f_0(M)$.

4) Если $M$ — многогранник и если $\sum\limits_{k\geq 7}p_k(M)\geq 3$, то

$$p_6(M)\geq 2+\frac{p_3(M)}{2}-\frac{p_5(M)}{2}-\sum_{k\geq 7}p_k(M),$$

$$3p_6(M)>12-2p_4(M)-3p_5(M)+\sum_{k\geq 7}\left(\left[\frac{1}{2}\,(k+1)\right]-6\right)p_k(M).$$

5) Если $p_3$, ..., $p_n$, $v_3$, ..., $v_m$ — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условиям $(*)$ и $\sum\limits_{k\geq 3}kv_k\equiv 0\pmod 2$, то существует 3-многогранник $M$ со свойством $p_k(M)=p_k$ и $v_k(M)=v_k$ для всех $k\neq 4$.

6) Если последовательность $\{p_k\}$ удовлетворяет условию $(**)$, то существует число $m_0\leq 3\sum\limits_{k\neq 6}p_k$ такое, что для каждого $p_6=m_0+2m$, $m$ — положительное целое, существует простой 3-многогранник $M$ с $p_k(M)=p_k$.

9 [11]. Граф каждого 3-многогранника имеет по крайней мере три ребра $e=(v_1^i, v_2^i)$, для каждого из которых $\deg v_1^i+\deg v_2^i\leq 13$. Симплициальный 3-многогранник имеет по крайней мере 6 таких ребер.

10. Пусть $e_{ij}$ — число ребер графа многогранника, степени концевых вершин которого равны $i$ и $j$ соответственно. Тогда для симплициального 3-многогранника имеет место следующее неравенство $120\leq e_{33}+25e_{34}+16e_{36}+2013e_{37}+$ $+5e_{38}+512e_{39}+2e_{3\,10}+20e_{44}+11e_{45}+5e_{46}+5e_{47}+5e_{48}+3e_{49}+8e_{55}+2e_{56}+2e_{57}+$ $+2e_{58}$, в частности, если $e_{jk}=0$ при $j+k\leq 12$, то $e_{3\,10}\geq 60$.

11. Максимальный диаметр в классе $d$-многогранников с $n$ вершинами равен $[(n-2)/d]+1$, причем существует симплициальный $d$-многогранник с $n$ вершинами и таким диаметром. При $d=3$ максимальный диаметр имеют треугольные призмы с четырехгранными шапками на треугольниках в верхнем и нижнем основаниях в случае, когда $n\equiv 2\pmod 3$. В других случаях одна или обе шапки могут быть удалены.

12. Большинство из сформулированных ниже утверждений доказаны В. Кли (см. [14]):

1) в классе простых $d$-многогранников с $n$ вершинами максимальный диаметр равен $[(n-2)/d]+1$ для $d\leqslant 3$ и не меньше $(d-1)[(n-2)/(2^d-2)]+1$ для $n\geqslant 2^d$;

2) максимальный диаметр в классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ $(d-1)$-гранями для $d\leqslant 3$ равен $[(n-2d)/(2^d-2)]+2$, а для остальных $d$ не меньше этой величины и не больше $\min\{n-d,\ (n+2d(d-1))/d(d-1)\}$;

3) минимальный диаметр в классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ вершинами равен 2 при $d=3$ и 1 при $d\geqslant 4$.

13. Под радиусом $R(M)$ многогранника $M$ понимаем радиус его графа $G(M)$, который определяется как наименьшее целое число $r$ такое, что длина цепи от некоторой вершины графа $G(M)$ до любой другой вершины не превосходит $r$. Доказать, что

1) $R(M)\leqslant \operatorname{diam} M\leqslant 2R(M)$;

2) минимальный радиус в классе $d$-многогранников с $n$ вершинами не меньше числа $]\log_{d-1}((d-2)n+2)/d[$ и равен этому числу, если $n\equiv 2(\operatorname{mod}(d-1))$;

3) минимальный радиус в классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ вершинами равен числу $]\log_{d-1}((d-1)(d-2)n-d^3-3d^2-2)/d[$;

4*) максимальный радиус в классе 3-многогранников с $n\geqslant 6$ вершинами больше или равен $[(n+4)/4]$ (гипотеза Юковича — Муна).

14 [11]. Доказать, что

1) максимальная толщина в классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ гранями не превосходит величины $[(n-2)/(d-1)]+d$ и равна этой величине, если $n\equiv 2\ (\operatorname{mod} d-1)$;

2) минимальная толщина в классе $d$-многогранников с $n$ гранями не меньше величины $2\log_2(n+4)/2$;

3) число $3\log_2(2n+1)-6$ является нижней границей для минимальной толщины в классе простых 3-многогранников с $n$ ребрами;

4) минимальная толщина в классе 3-многогранников с $n$ вершинами не меньше числа $2\log_2 n-5$;

5) существуют константы $\alpha<1$, $c$ и простой 3-многогранник $M$ с $n$ вершинами такой, что существует простая цепь в графе $G(M)$, содержащая по крайней мере $cn^\alpha$ вершин.

15. *Графом полиэдра* (неограниченного многогранника) называется граф, порожденный вершинами и ограниченными ребрами этого полиэдра (предполагается, что полиэдр имеет по крайней мере одну вершину). Максимальный диаметр графа $d$-полиэдра с $n$ $(d-1)$-гранями обозначается $\Delta^*(d, n)$. Справедливы соотношения [12]:

1) $\Delta^*(2, n)=n-2$, $\Delta^*(3, n)=n-3$, $\Delta^*(4, 4)=5$, $\Delta^*(4, 8)=\Delta(4, 9)=5$;

2) $\Delta^*(d+1, n+1)\geqslant\Delta^*(d, n)$, $\Delta^*(d, n+1)>\Delta^*(d, n)$;

3) $\Delta^*(d, 2d)\geqslant d+[d/4]$;

4) $\Delta^*(d, n)\geqslant n-d+\min\{[d/4], [(n-d)/4]\}$,

т. е. гипотеза о максимальном диаметре не верна для $d$-полиэдров при $d\geqslant 4$.

16. Эквивалентность следующих утверждений установил А. Н. Исаченко:

(1) простой $d$-многогранник $M$ имеет $d+2$ $(d-1)$-грани;

(2) $\operatorname{diam} M=2$;

(3) $M=T_k\otimes T_{d-k}$, $k\in N_d$.

17. Каждый простой $d$-многогранник радиуса 2 есть клин, основанием которого является $(d-1)$-многогранник радиуса 2.

ГЛАВА III

# КОМБИНАТОРНЫЕ СВОЙСТВА ГРАНИЧНЫХ КОМПЛЕКСОВ МНОГОГРАННИКОВ

## § 1. Комбинаторные типы многогранников

Наряду с аналитической трактовкой многогранников — заданием их при помощи неравенств, получила распространение и топологическая интерпретация многогранников как комплексов. Хорошо развитый аппарат комбинаторной топологии [1, 3] позволяет решить некоторые задачи классификации многогранников. В этом параграфе будут введены основные определения и понятия.

**1. Комбинаторная эквивалентность.**

Определение 1.1. *Комплексом* называется конечная совокупность $\mathcal{K}$ многогранников в $E_d$, удовлетворяющая условиям: 1) наряду с каждым многогранником $M$ из семейства $\mathcal{K}$ в $\mathcal{K}$ входит также и любая грань многогранника $M$; 2) пересечение любых двух многогранников из $\mathcal{K}$ является гранью каждого из них.

Максимальная размерность многогранников из $\mathcal{K}$ называется *размерностью комплекса*, $k$-мерный комплекс называется *$k$-комплексом*.

Если каждый элемент из $\mathcal{K}$ — симплекс, то $\mathcal{K}$ называется *симплициальным комплексом*.

Пусть $M$ — $d$-многогранник в $E_d$ и пусть целое число $k$ удовлетворяет условию $0 \leqslant k \leqslant d$. Множество всех граней многогранника $M$ размерности не превышающей $k$ является комплексом. Последний называем *$k$-скелетом многогранника* $M$ и обозначаем $\mathrm{skel}_k M$. $(d-1)$-скелет многогранника $M$ будем обозначать символом $\mathcal{F}(M)$ и называть *граничным комплексом многогранника*; 1-скелет многогранника $M$ является, очевидно, графом.

Два комплекса, $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$, называются *изоморфными комплексами*, если между ними существует взаимно однозначное отображение $\varphi$, сохраняющее операцию включения: $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow \varphi(F_1) \subset \subset \varphi(F_2)$.

Возникает естественный вопрос: существует ли для данного комплекса $\mathcal{K}$ в $E_n$ многогранник $M$ в $E_m$, граничный комплекс

$\mathcal{F}(M)$ которого изоморфен $\mathcal{K}$? Если такой многогранник существует, то будем говорить, что *комплекс* $\mathcal{K}$ *реализуется многогранником* $M$.

Характеризация комплексов, реализуемых 2-многогранниками, тривиальна. Ясно, что такой комплекс должен быть одномерным. 1-комплекс реализуем 2-многогранником тогда и только тогда, когда он состоит из $s$ различных точек $v^1, \ldots, v^s$, $s \geqslant 3$, и $s$ отрезков $[v^{i-1}, v^i]$ $\forall i \in N_s$ $v^0 = v^s$.

Результатов, относящихся к проблеме реализации, насчитывается немного. Это в основном необходимые условия, которым должен удовлетворять комплекс, чтобы быть реализуемым.

Определение 1.2. Два многогранника $M$ и $M'$ называются *комбинаторно эквивалентными* (обозначается $M \cong M'$), если изоморфны их граничные комплексы $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}(M')$.

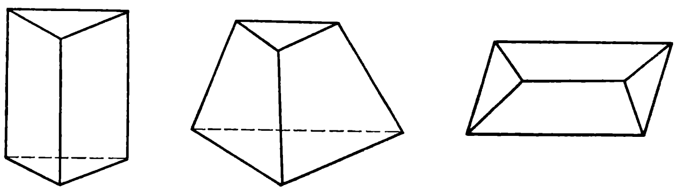


Рис. 20.

Другими словами, многогранники $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентны, если между их граничными комплексами существует взаимно однозначное отображение $\varphi$, сохраняющее операцию включения: $F_1 \subset F_2 \Leftrightarrow \varphi(F_1) \subset \varphi(F_2)$. Так, например, треугольная призма, треугольная усеченная пирамида и клин (рис. 20) комбинаторно эквивалентны.

О двух комбинаторно экивалентных многогранниках говорят также, что они являются многогранниками одного типа. Проблема выявления всех комбинаторных типов $d$-многогранников с фиксированным числом вершин или граней является важнейшей в комбинаторной теории многогранников. Над определением числа комбинаторных типов многогранников работали Л. Эйлер, Я. Штейнер [21], А. Кэли [9]. Для $d=2$ проблема тривиальна: два многоугольника комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число вершин. Однако уже в случае $d=3$ проблема перечисления комбинаторных типов многогранников, несмотря на ее большое практическое значение в кристаллографии, полностью не решена. К проблеме перечисления комбинаторных типов многогранников мы будем возвращаться на протяжении всей главы.

Легко устанавливаются следующие свойства, касающиеся комбинаторно эквивалентных многогранников.

1. Если $M \cong M'$, то $\dim F = \dim \varphi(F)$ и $F \cong \varphi(F)$.

2. Если $M \cong M'$ и $\{F_1, \ldots, F_n\}$ — некоторое семейство граней многогранника $M$, то $\varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi(F_i)$.

3. Если $\alpha$ — невырожденное аффинное преобразование пространства $E_d$ в себя и если $M$ — многогранник в $E_d$, то $M \cong \alpha(M)$, т. е. аффинная эквивалентность многогранников влечет их комбинаторную эквивалентность.

4. Если $\tau$ — невырожденное проективное преобразование, то $M \cong \tau(M)$.

В частности, так как $d$-симплексы аффинно эквивалентны, то все они имеют один комбинаторный тип.

В дальнейшем нам понадобятся две элементарные теоремы, касающиеся реализуемости подкомплексов граничного комплекса многогранника. Сначала отметим один очевидный факт. Если $M \cong M_1$, $M^* \cong M_1^*$, и многогранники $M$ и $M^*$ двойственны, то и многогранники $M_1$ и $M_1^*$ двойственны. Обратно, если многогранники $M_1$ и $M_2$ двойственны многограннику $M^*$, то $M_1 \cong M_2$.

Пусть $M$ — многогранник, и $\mathcal{F}(M)$ — его граничный комплекс. Пусть $F_1$ и $F_2 \in \mathcal{F}(M)$, и $F_1 \subseteq F_2$. Обозначим через $\mathcal{F}(M, F_1, F_2)$ — подкомплекс комплекса $\mathcal{F}(M)$, содержащий всякую грань $F$ многогранника $M$ такую, что $F_1 \subseteq F \subseteq F_2$. В новых терминах лемма 5.6 из гл. I примет следующий вид.

Теорема 1.1. *Подкомплекс $\mathcal{F}(M, F_1, F_2)$ изоморфен граничному комплексу многогранника $M(F_1, F_2)$ размерности* $\dim F_2 - \dim F_1 - 1$.

Следствие 1.2. *Если $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3$ — грани многогранника $M$, то многогранник $M(F_1, F_2)$ комбинаторно эквивалентен некоторой грани многогранника $M(F_1, F_3)$.*

Пусть $x$ — вершина многогранника $M$ и пусть гиперплоскость $H$ сильно отделяет точку $x$ от множества $\operatorname{conv} \operatorname{vert}(M \setminus x)$.

Определение 1.3. Многогранник $M \cap H$ называется *срезом вершины $x$* многогранника $M$ и обозначается через $M_x$ (см. рис. 10 — многогранник $M_x$ заштрихован).

Понятия среза и правильного отсечения вершины широко используется при доказательстве разных теорем о многогранниках.

Теорема 1.3. *Срез вершины $x$ многогранника $M$ есть многогранник, комбинаторно эквивалентный многограннику $M(x, M)$.*

Доказательство. Требуемую в определении 1.3 гиперплоскость $H$ строим следующим образом. Пусть $x'$ — проекция вершины $x$ на многогранник $\operatorname{conv} \operatorname{vert}(M \setminus x)$. Тогда $H$ есть гиперплоскость с направляющим вектором $x - x'$, пересекающая отрезок $[x, x']$ во внутренней точке. Гиперплоскость $H$ пересекает относительную внутренность каждой грани, содержащей $x$, и для каждой пары таких граней $F_1 \subset F_2$ имеем $\varnothing \neq F_1 \cap H \subseteq F_2 \cap H$. Так устанавливается взаимно однозначное соответствие между гранями многогранника $M$, содержащими вершину $x$, и гранями среза вершины $x$ (рис. 21).

Следствие 1.4. *Срез любой вершины простого $d$-многогранника является $(d-1)$-симплексом.*

Теорема 1.3 позволяет конструировать многогранник $M(F_1, F_2)$, последовательно строя срезы вершин. Действительно, если $F_1$ — $j$-грань многогранника $M$, то, как и при доказательстве теоремы 2.12 гл I, построим последовательность $0, 1, \ldots, (j-1)$-граней $F^0, F^1, \ldots, F^{j-1}$ многогранника $M$, обладающую свойством $F^0 \subset F^1 \subset \subset \ldots \subset F^{j-1}$. Теперь, если $F_2$ — $k$-грань, содержащая $F_1$, то для каждого $i=0, 1, \ldots, j$ многогранник $M(F^i, F_2)$ комбинаторно эквивалентен срезу вершины охватывающему $F_i$ в $M(F^{i-1}, F_2)$, $F^{-1}=\varnothing$, $F^j=F_1$. В результате по индукции построим многогранник $M(F_1, F_2)$.

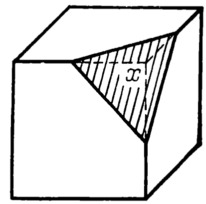


Рис. 21.

Многогранник вполне определяется своими вершинами Поэтому для задания комплекса $\mathscr{K}$ в $E_d$ достаточно указать вершины всех его многогранников и отметить те подмножества вершин, выпуклые оболочки которых дают все многогранники из $\mathscr{K}$. Геометрическое положение вершин при установлении изоморфизма не имеет значения. Отвлекаясь от положения вершин комплекса, приходим к следующему определению.

Определение 1.4. *Абстрактным комплексом* называется семейство $\mathfrak{K}$ подмножеств (называемых также *абстрактными многогранниками*) конечного множества $V$, обладающих свойствами: 1) все одноэлементные подмножества множества $V$ содержатся в $\mathfrak{K}$ и называются *вершинами*; 2) если $F$ и $F' \in \mathfrak{K}$, то и $F \cap F' \in \mathfrak{K}$.

Очевидно, что каждому комплексу $\mathscr{K}$ соответствует абстрактный комплекс $\mathfrak{K}$ и притом один. Так, граничному комплексу многогранника $M$ соответствует абстрактный комплекс $\mathfrak{K}(M)$, у которого $V=\operatorname{vert} M$ и семейство $\mathfrak{K}(M)$ состоит из подмножеств $\operatorname{vert} F$ для всех граней $F$ многогранника $M$. Ясно, что многогранники $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда изоморфны их абстрактные комплексы.

Абстрактный комплекс $\mathfrak{K}$ реализуется $d$-многогранником $M$, если $\mathfrak{K} \cong \mathfrak{K}(M)$. Проблемы распознавания реализуемости данного абстрактного комплекса многогранником и перечисления всех комбинаторных типов $d$-многогранников с фиксированным числом вершин алгоритмически разрешимы [11].

**2. Теорема Понтрягина.** Абстрактный комплекс $\mathfrak{K}$ называется *абстрактным симплициальным комплексом*, если наряду с каждым абстрактным многогранником из $\mathfrak{K}$, называемым *абстрактным симплексом*, в $\mathfrak{K}$ содержится и каждое его подмножество.

Если абстрактный симплекс $\mathfrak{K}_s=\{v_0, v_1, \ldots, v_s\}$ имеет $s+1$ вершин, то $s$ называется его *размерностью*. Максимальная из размерностей абстрактных симплексов, входящих в абстрактный симплициальный комплекс $\mathfrak{K}$, называется *размерностью комплекса* $\mathfrak{K}$.

Вопрос о реализации абстрактных симплициальных комплексов решается просто. Пусть $\mathfrak{K}$ — абстрактный симплициальный комплекс с вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_n$, и пусть $T_n$ есть $n$-симплекс в $E_n$ с вершинами $x^0, x^1, \ldots, x^n$. Каждому абстрактному симплексу $\mathfrak{K}_s = \{v_{i_0}, \ldots, v_{i_s}\}$ комплекса $\mathfrak{K}$ поставим в соответствие грань $T_s = \operatorname{conv}(x^{i_0}, \ldots, x^{i_s})$ симплекса $T_n$. Очевидно, что полученная так совокупность $\mathcal{K}$ симплексов составляет комплекс, так как для граней симплекса $T_n$ выполнено условие 2) определения 1.1. Полученную так геометрическую реализацию $\mathcal{K}$ абстрактного симплициального комплекса называем его *естественной реализацией*.

Следующая теорема, принадлежащая Л. С. Понтрягину [3], показывает, что абстрактный симплициальный комплекс допускает и другие реализации, отличные от естественной.

Теорема 1.5. *Абстрактный симплициальный $n$-комплекс всегда можно реализовать в виде комплекса, расположенного в $E_{2n+1}$. При этом вершины комплекса можно выбрать в $E_{2n+1}$ произвольно, лишь бы они находились в общем положении.*

Доказательство. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_n$ — вершины абстрактного симплициального $n$-комплекса $\mathfrak{K}$. Каждой вершине $v_i$ поставим в соответствие точку $x^i \in E_{2n+1}$ так, чтобы система $x^0, x^1 \ldots \ldots, x^n$ находилась в общем положении в $E_{2n+1}$. Каждому абстрактному симплексу $\mathfrak{K}_s = \{v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_s}\}$ из $\mathfrak{K}$ поставим в соответствие симплекс $T(\mathfrak{K}_s) = \operatorname{conv}(x^{i_0}, \ldots, x^{i_s})$. Требуется доказать, что полученная так совокупность $\mathcal{K}$ симплексов в $E_{2n+1}$ является симплициальным комплексом, т. е. для $\mathcal{K}$ выполнены условия 1) и 2) определения 1.1. То, что каждый элемент комплекса $\mathcal{K}$ — симплекс, видно из построения Выполнимость условия 1) определения 1.1 вытекает из определения абстрактного симплициального комплекса. Покажем, что условие 2) определения 1.1 также выполнено.

Пусть $\mathfrak{K}_r$ и $\mathfrak{K}_s$ — два абстрактных симплекса из $\mathfrak{K}$, а $T(\mathfrak{K}_r)$ и $T(\mathfrak{K}_s)$ — соответствующие им симплексы совокупности $\mathcal{K}$. Обозначим через $x^0, x^1, \ldots, x^t$ совокупность всех точек из $E_{2n+1}$, являющихся вершинами симплексов $T(\mathfrak{K}_r)$ и $T(\mathfrak{K}_s)$. Так как размерность $\mathfrak{K}$ равна $n$, то $r \leqslant n$, $s \leqslant n$, и поэтому $t \leqslant 2n+1$. Таким образом, в $E_{2n+1}$ существует симплекс $T_t = \operatorname{conv}(x^0, \ldots, x^t)$, хотя он, конечно, может и не принадлежать совокупности $\mathcal{K}$. Симплексы $T(\mathfrak{K}_r)$ и $T(\mathfrak{K}_s)$ являются гранями симплекса $T_t$ и поэтому для них выполнено условие 2) определения 1.1. Следовательно, $\mathcal{K}$ является комплексом, реализующим абстрактный комплекс $\mathfrak{K}$. Теорема 1.5 доказана.

Следующая теорема показывает, что не только симплициальный но и произвольный $n$-комплекс реализуем в $E_{2n+1}$.

Теорема 1.6. *Для всякого $n$-комплекса в $E_d$ существует изоморфный $n$-комплекс в $E_{2n+1}$.*

Отметим, что вопрос о реализации комплекса $\mathcal{K} \subseteq E_d$ в пространстве другой размерности не является тривиальным. Например, $n$-скелет симплекса $T_{2n+2}$ не реализуем даже в $E_{2n}$.

Доказательство. Предполагаем, что $d \geqslant 2n+1$, в противном случае не нужно доказывать. Каждое из аффинных множеств $H_{ij} = \operatorname{aff}(F_i \cup F_j)$ для $F_i$, $F_j \in \mathcal{K}$ имеет размерность, не превышающую $2n+1 \leqslant d-1$. Поэтому пространство $E_d$ содержит одномерное пространство $L$, которое не содержится ни в одном $H_{ij}$ и не параллельно ни одному из $H_{ij}$. Пусть $H$ — подпространство в $E_d$ размерности $d-1$, не содержащее $L$, и пусть $\tau$ — проекция $E_d$ на $H$ параллельно $L$. Тогда комплекс $\{\tau(F): F \in \mathcal{K}\}$ изоморфен $\mathcal{K}$ и содержится в $E_{d-1}$. Индукция завершает доказательство теоремы 1.6.

**3. Полуматроиды.** $k$-скелеты $d$-многогранников при $k$ близких к $d$ достаточно громоздкий объект для изучения. 1-скелеты (графы многогранников) учитывают только инцидентные соотношения между его ребрами и вершинами, что при $d > 3$ недостаточно для идентификации комбинаторных типов многогранников. Рассмотрим новый прием изучения многогранников с помощью полуматроидов — своеобразной сети, построенной на основе инцидентности вершин многогранника и граней максимальной размерности [2, 13].

Определение 1.5 *Полуматроидом ранга* $d$ называется пара $(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, где $\mathcal{F}$ — непустое конечное множество, элементы которого называются *абстрактными гранями*, $\mathcal{V}$ — семейство его непустых подмножеств, называемых *вершинами*. При этом вершины и грани должны удовлетворять следующим свойствам: 1) каждая вершина $v$ содержит ровно $d$ абстрактных граней $\{F_1, \ldots, F_d\}$, при этом говорим, что грань $F_i \forall i \in N_d$ и вершина $v$ инцидентны между собой; 2) для любой абстрактной грани $F$, инцидентной вершине $v \in \mathcal{V}$, существует единственная абстрактная грань $F' \in \mathcal{F} \setminus v$ такая, что $v \setminus \{F\} \cup \{F'\}$ — также вершина.

Свойство 2) из определения 1.5 можно заменить на эквивалентное: 2′) для любого подмножества из $d-1$ абстрактных граней либо существует ровно две вершины, которым все они инцидентны, либо таких вершин вовсе не существует.

Докажем эквивалентность свойств 2) и 2′). Пусть сначала имеет место свойство 2). Произвольное $(d-1)$-подмножество $G \subset \mathcal{F}$ не может принадлежать единственной вершине $v$, которая в этом случае инцидентна граням множества $G$ и некоторой грани $F$. Иначе, для грани $F \in v$ не существует грани $F'$, такой, что $v \setminus \{F\} \cup \{F'\} = G \cup \{F'\}$. Если же $G$ содержится более чем в двух вершинах, например, $v_1 = G \cup \{F\}$, $v_2 = G \cup \{F'\}$, $v_3 = G \cup \{F''\}$, то это противоречит свойству 2), гарантирующему единственность грани $F'$. Следовательно, либо $G$ принадлежит ровно двум вершинам, либо не принадлежит ни одной.

Обратно, пусть $v$ — вершина, обладающая свойствами 1) и 2′), и пусть $F$ — произвольная грань, инцидентная ей. Тогда $(d-1)$-

подмножество $G=v\setminus\{F\}$ согласно свойству 2') содержится кроме $v$ еще ровно в одной вершине $v_1$. Поэтому грань $F'=v_1\setminus G$ — единственная для данной грани $F\in v$ (т. е. свойство 2) имеет место).

Два полуматроида $\mathscr{P}=(\mathscr{F}, \mathscr{V})$ и $\mathscr{P}'=(\mathscr{F}', \mathscr{V}')$ называются изоморфными, если существует взаимно однозначное отображение $\psi$ между $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$, сохраняющее инцидентность.

Пусть $M$ — простой $d$-многогранник, т. е. каждая его вершина инцидентна ровно $d$ граням размерности $d-1$. Пара $(\mathscr{F}, \mathscr{V})$, где $\mathscr{F}$ — множество $(d-1)$-граней многогранника $M$, а $\mathscr{V}$ — множество его вершин является полуматроидом. Назовем его *полуматроидом многогранника* $M$ и обозначим через $\mathscr{P}(M)$.

Теорема 1.7. *Простые многогранники $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их полуматроиды $\mathscr{P}(M)$ и $\mathscr{P}(M')$ изоморфны.*

Приведем частную формулировку теоремы 1.7 в привычных терминах.

Определение 1.6. Многогранник $M$ называем *помеченным многогранником*, если его граням максимальной размерности приписаны метки, например, числа $1, 2, \ldots, f_{d-1}(M)$. Два помеченных многогранника $M$ и $M'$ называются *эквивалентными* (*обозначается* $M\sim M'$), если существует изоморфизм их граничных комплексов, сохраняющий метки граней.

В силу теоремы 1.7 два простых многогранника эквивалентны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм их полуматроидов, сохраняющий метки. Поэтому эквивалентность многогранников влечет их комбинаторную эквивалентность. Чаще всего понятие эквивалентности многогранников используется в ситуациях, когда многогранник задан в канонической форме. В этом случае $(d-1)$-гранями многогранника $M(A,b)$ служат непустые множества $F_j=\{x\in M(A,b)\colon x_j=0\}$ $\forall j\in N_n$. Каждую из них помечаем числом $j$. Таким образом, комбинаторная эквивалентность многогранников $M(A,b)$ является инвариантом относительно невырожденных аффинных преобразований пространства $E_n$, а эквивалентность — не инвариант этих преобразований.

Установим критерий эквивалентности многогранников из класса $\mathfrak{M}(A)$ невырожденных многогранников $M(A,b)$ в $E_n$ при фиксированной матрице $A$ (обозначаем такие многогранники $M(b)$). Пусть ранг $(m\times n)$-матрицы $A$ равен $m$ и ограничения $x\geqslant 0$ являются нежесткими.

Следовательно, $\dim M(b)=d=n-m$. Без ограничения общности, будем считать, что все $F_j\neq\varnothing$. Пусть $J_H$ — некоторое $d$-подмножество из $N_n$ и $J_B=N_n\setminus J_H$. Обозначим через $B$ подматрицу, образованную столбцами матрицы $A$ с номерами из $J_H$, оставшиеся столбцы из $A$ обозначим через $H$. Множество $J_H$ определяет вершину $(x_B, x_H)=(B^{-1}b, 0)$ многогранника $M(b)$ тогда и только тогда, когда $\det B\neq 0$ и вектор $b$ принадлежит конусу $\operatorname{kon} B$, порожденному столбцами из $B$, т. е. когда $B$ — допустимый базис многогранника $M(b)$. Итак, с учетом теоремы 1.7 доказана лемма.

Лемма 1.8. *Многогранники $M(b)$, $M(b')$ из класса $\mathfrak{M}(A)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда допустимый базис одного многогранника является допустимым базисом другого.*

Доказательство теоремы 1.7. Докажем только достаточность, т. е. покажем, что граничные комплексы $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}(M')$ изоморфны. Пусть $\Psi$ — изоморфизм полуматроидов $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(M')$, т. е. такое взаимно однозначное отображение между $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}'$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}'$, что для всякой вершины $v=\{F_{i_1}, \ldots, F_{i_d}\} \in \in \mathcal{V}$ справедливо $\Psi(v)=(\Psi(F_{i_1}), \ldots, \Psi(F_{i_d})) \in \mathcal{V}'$. Всякая собственная грань $F$ многогранника $M$ представляет собой либо пересечение некоторого множества $\omega$ $(d-1)$-граней (следствие 2.13 гл. I): $F=\bigcap\limits_{i\in\omega} F_i$, либо выпуклую оболочку своих вершин $\operatorname{vert} F$ (следствие 2.4 гл. I): $F=\operatorname{conv}\operatorname{vert} F$. Определим отображение $\varphi$ граничного комплекса $\mathcal{F}(M)$, положив для каждой собственной грани $F\in\mathcal{F}(M)$

$$\varphi(F)=\bigcap_{i\in\omega}\Psi(F_i) \qquad (\varphi(\varnothing)=\varnothing,\ \varphi(M)=M').$$

Так как $\Psi$ — изоморфизм полуматроидов $\mathcal{P}(M)$ и $\mathcal{P}(M')$, то справедливы соотношения

$$\Psi\left(\operatorname{vert}\bigcap_{i\in\omega} F_i\right)=\operatorname{vert}\bigcap_{i\in\omega}\Psi(F_i) \qquad \forall\omega\subseteq\mathcal{F},$$

$$\Psi^{-1}\left(\operatorname{vert}\bigcap_{i\in\omega} F_i\right)=\operatorname{vert}\bigcap_{i\in\omega}\Psi^{-1}(F_i) \qquad \forall\omega\subseteq\mathcal{F}'.$$

Из этих равенств вытекает, что $\varphi$ — взаимно однозначное отображение граничных комплексов $\mathcal{F}(M)$ и $\mathcal{F}(M')$, сохраняющее операцию включения, т. е. многогранники $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентные. Теорема доказана.

Определение. 1.7. *Спектром $S(b_1, b_2)$ многогранников $M(b_1)$,* $M(b_2)\in\mathfrak{M}(A)$ называется множество всех таких чисел $\lambda\in(0,1)$, что многогранник $M(b_\lambda)$ — вырожденный. Здесь $b_\lambda=\lambda b_1+(1-\lambda)b_2$.

Вырожденность многогранника $M(b_\lambda)$ соответствует случаю, когда вектор $b_\lambda$ принадлежит некоторому конусу, порожденному менее чем $m$ вектор-столбцами матрицы $A$.

Теорема 1.9. *Два многогранника из класса $\mathfrak{M}(A)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их спектр пуст.*

Доказательство. Достаточность. Пусть спектр $S(b_1, b_2)$ многогранников $M(b_1)$, $M(b_2)\in\mathfrak{M}(A)$ пуст. Допустим противное, т. е. помеченные многогранники $M(b_1)$ и $M(b_2)$ не являются эквивалентными, что согласно лемме 1.8 означает существование базиса $B$ матрицы $A$, допустимого для $M(b_1)$ и недопустимого для $M(b_2)$. Покажем, что отрезок $\lambda b_1+(1-\lambda)b_2$, где $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, имеет точку пересечения $b_\lambda$ с гранью конуса $\operatorname{kon} B$.

Пусть $(\beta_1', \ldots, \beta_m')$, $(\beta_1'', \ldots, \beta_m'')$ компоненты векторов $B^{-1}b_1$ и $B^{-1}b_2$ соответственно. В силу предположения все $\beta_i'>0$, а среди $\beta_i''$ существуют отрицательные. Пусть $J^- = \{i:\beta_i'' < 0\}$, $J^+ = \{i:\beta_i'' > 0\}$. В силу невырожденности $M(b_2)$ среди $\beta_i''$ нет равных нулю. Очевидно, что для всех $\lambda > 0$ имеют место неравенства $\lambda\beta_i' + (1-\lambda)\beta_i'' > 0$ $\forall i \in J^+$. Пусть $\lambda_0 = \min\{-\beta_i'/(\beta_i' - \beta_i''): i \in J^-\}$, причем минимум достигается на индексе $i = s$. Нетрудно видеть, что $0 < \lambda_0 < 1$. Из способа выбора $\lambda_0$ и невырожденности $M(b_1)$, $M(b_2)$ вытекает, что

$$\lambda_0\beta_i' + (1-\lambda_0)\beta_i'' \begin{cases} > 0, & i \in J^+, \\ = 0, & i = s, \\ \geqslant 0, & i \in J^- \setminus s. \end{cases} \qquad (1.1)$$

Неравенства (1.1) означают, что $B$ — допустимый базис для многогранника $M(b_{\lambda_0})$, причем у вершины, определяемой базисом $B$, по крайней мере $s$-я базисная координата равна нулю, т. е. $M(b_{\lambda_0})$ — вырожденный многогранник. Полученное противоречие доказывает достаточность условий теоремы.

Необходимость. Пусть $M(b_1) \sim M(b_2)$. Согласно лемме 1.8 всякий допустимый базис $B$ многогранника $M(b_1)$ является допустимым для $M(b_2)$, и наоборот, а это значит, что векторы $b_1$ и $b_2$ принадлежат одним и тем же конусам $\operatorname{kon} B$, порожденным наборами $B$, состоящими из $m$ столбцов матрицы $A$. Следовательно, вектор $b_\lambda$ лежит внутри этих конусов и не принадлежит ни одному другому конусу.

## § 2. Диаграммы Гейла

Одним из немногих общих методов исследования комбинаторной структуры многогранников является метод диаграмм Гейла [10]. В этом параграфе мы изложим суть метода диаграмм Гейла и проиллюстрируем его возможности для решения задачи перечисления комбинаторных типов многогранников. В частности, приведем результаты перечисления $d$-многогранников с $d+2$ и $d+3$ вершинами.

**1. Множества Гейла.** Пусть $M$ — $d$-многогранник в $E_d$, и пусть $V = \operatorname{vert} M = \{v^1, \ldots, v^n\}$. Рассмотрим пространство $L(V)$ всех решений $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ следующей системы линейных однородных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0. \qquad (2.1)$$

Пусть $a^1, \ldots, a^{n-d-1}$ — некоторый базис пространства $L(V)$. Здесь $a^i = (\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ $\forall i \in N_{n-d-1}$. Пусть $A(V)$ — $((n-d-1)\times n)$-матрица, в качестве строк которой взяты векторы $a^1, \ldots, a^{n-d-1}$. Для каждого $j \in N_n$ обозначим через $\bar{v}^j$ $j$-й столбец матрицы $A(V)$, он имеет компоненты $(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{n-d-1,\,j})$.

Для каждого подмножества $Z \subseteq V$ употребляем обозначение $\Gamma(Z)$, имея в виду множество $\{\bar{v}^j: v^j \in Z\}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Множество $\Gamma(V)$ назовем *множеством Гейла* многогранника $M$.

Разным вершинам многогранника $M$ может соответствовать одна точка в множестве Гейла. Поэтому каждой точке $\bar{v}^j \in \Gamma(V)$ сопоставляем метку $m_j = |\Gamma^{-1}(\bar{v}^j)|$.

Очевидно, что множество Гейла не единственно. Выбирая разные базисы пространства $L(V)$, получаем различные (с точностью до линейного оператора) множества Гейла.

О п р е д е л е н и е 2.2. Подмножество $Z \subseteq V$ называется *кограныю многогранника* $M$, если $F = \operatorname{conv}(V \setminus Z)$есть грань $M$.

Т е о р е м а 2.1. *Подмножество $Z \subseteq V$ есть когрань многогранника $M$ тогда и только тогда, когда* $0 \in \operatorname{rel\,int\,conv}\Gamma(Z)$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.15 гл. I $Z$ — когрань многогранника $M$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{aff}(V \setminus Z) \cap \operatorname{conv} Z = \emptyset. \tag{2.2}$$

Предположим, что $Z = \{v^1, \ldots, v^s\}$ не является кограныю, т. е. $\operatorname{conv}(v^1, \ldots, v^s) \cap \operatorname{aff}(v^{s+1}, \ldots, v^n) \neq \emptyset$. Тогда существует точка $x$ такая, что

$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i v^i, \qquad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0 \ \ \forall i \in N_s \tag{2.3}$$

и

$$x = \sum_{i=s+1}^{n} (-\lambda_i) v^i, \qquad \sum_{i=s+1}^{n} (-\lambda_i) = 1. \tag{2.4}$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v^i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0. \tag{2.5}$$

Равенства (2.5) означают, что вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in L(V)$. Следовательно, $\lambda = \sum_{i=1}^{n-d-1} \gamma_i a_i$. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-d-1})$. Тогда по определению 2.1 $\lambda_i = \gamma\Gamma(v^i) \ \forall i \in N_n$ и, учитывая (2.3), имеем $\gamma\Gamma(v^i) \geqslant 0 \ \forall i \in N_s$. Так как среди $\lambda_i \ \forall i \in N_s$ есть по крайней мере одно строго положительное, то хотя бы одна из точек $\Gamma(v^i)$ лежит в открытом полупространстве $\gamma x > 0$, а остальные лежат в замкнутом полупространстве $\gamma x \geqslant 0$. Поэтому имеем, что $0 \notin \operatorname{rel\,int\,conv}\ (\Gamma(v^1), \ldots, \Gamma(v^s))$. Достаточность условия теоремы доказывается полностью в обратном порядке.

С л е д с т в и е 2.2. *$d$-многогранник $M \subset E_d$ является симплициальным тогда и только тогда, когда для каждой гиперплоскости $H \subset E_{n-d-1}$, содержащей нуль, имеем* $0 \notin \operatorname{rel\,int\,conv}(H \cap \Gamma(V))$ *или, иначе,* $\dim\operatorname{conv}\Gamma(Z) = \dim\operatorname{conv}\Gamma(V)$ *для каждой непустой когрдни $Z$.*

Следующая теорема дает характеризацию точек в $E_{n-d-1}$, являющихся множествами Гейла некоторого многогранника.

Теорема 2.3. *Пусть* $\bar{V}=\{\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n\}$ — *множество точек в* $E_s$, *обладающих свойствами* 1) $\sum_{i=1}^{n} \bar{v}^i=0$; 2) *каждое открытое полупространство* $H^+$, *порожденное гиперплоскостью* $H$, *причем* $0 \in H$, *содержит по крайней мере две точки из* $\bar{V}$.

*Тогда* $\bar{V}$ *есть множество Гейла некоторого* $(n-s-1)$-*многогранника.*

Доказательство. Пусть $\bar{A}=\|\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n\|$ — $(s\times n)$-матрица, столбцами которой являются векторы $\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n$ Система уравнений $\bar{A}y=0$ имеет $n-s-1$ аффинно независимых решений, скажем, $y^1, \ldots, y^{n-s-1}$. Из-за условия 1) система имеет также решение $e=(1, \ldots, 1)$. Все эти решения запишем как столбцы матрицы $A$ размера $n\times(n-s-1)$ и пусть $V=\{v^1, \ldots, v^n\}$ — строки матрицы $A$. Благодаря условию 2) и теореме 2.1 устанавливаем, что каждая точка множества $V$ есть вершина многогранника $\operatorname{conv} V$. Поэтому $\bar{V}$ есть множество Гейла многогранника $\operatorname{conv} V$.

Теорема 2.4. *Многогранник* $M$ *есть пирамида с вершиной* $v$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma(v)=0$. *Далее, если* $M$ — *пирамида с основанием* $Q$, *то* $\Gamma(Q)=\Gamma(V)\setminus\Gamma(v)$.

Доказательство. Если $M$ — пирамида с основанием $Q$ и вершиной $v$, то $v \notin \operatorname{aff} Q$, т. е. в (2.1) коэффициент при $v$ всегда равен 0. Таким образом, матрица $A(\operatorname{vert} M)$ образуется из матрицы $A(\operatorname{vert} Q)$ прибавлением нулевого столбца, соответствующего точке $v$. Действуя аналогично в обратном порядке, доказываем достаточность условий теоремы.

Определение 2.3. *$r$-гранной $d$-пирамидой* называется пирамида $M$, у которой основание $Q$ является $(r-1)$-гранной $(d-1)$-пирамидой, причем 1-гранной $d$-пирамидой является $d$-пирамида.

Теорема 2.4 очевидным образом распространяется на $r$-гранные пирамиды: многогранник $M$ является $r$-гранной пирамидой, если метка точки 0 в множестве Гейла $\Gamma(M)$ равна $r$.

Приведем одну из возможных геометрических интерпретаций множеств Гейла. Пусть $E_d$ и $E_{n-d-1}$ — ортогональные подпространства в $E_{n-1}$, и пусть $T_{n-1}$ — $(n-1)$-симплекс с центром в нуле. Если $V$ — ортогональная проекция множества $\operatorname{vert} T_{n-1}$ в $E_d$, а $\bar{V}$ — ортогональная проекция множества $\operatorname{vert} T_{n-1}$ в $E_{n-d-1}$, то $V=\Gamma(\bar{V})$, и наоборот, $\bar{V}=\Gamma(V)$.

**2. Диаграммы Гейла.** Среди множеств Гейла многогранника удобно зафиксировать одно.

Определение 2.4. Два множества точек $\bar{V}=\{\bar{v}^1, \ldots, \bar{v}^n\}$ и $\bar{U}=\{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^n\}$ в $E_{n-d-1}$, обладающих свойством $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\bar{V}$, $0 \in \operatorname{int}\operatorname{conv}\bar{U}$, называем *изоморфными*, если соответствие $\varphi: \bar{v}^i \leftrightarrow \bar{u}^i$, обладает свойством: для каждой пары подмножеств

$Z \subseteq \bar{V}$, $\varphi(Z) \subseteq \bar{U}$, либо $0 \in \operatorname{rel\,int\,conv} Z$, $0 \in \operatorname{rel\,int\,conv} \varphi(Z)$, либо $0 \notin \operatorname{rel\,int\,conv} Z$, $0 \notin \operatorname{rel\,int\,conv} \varphi(Z)$.

Например, все множества Гейла некоторого многогранника, порожденные разными базисами пространства $L(V)$, изоморфны между собой. В частности, если $\mu_i > 0$, то множество $\bar{U} = \{\mu_1 \bar{v}^1, \ldots, \mu_n \bar{v}^n\}$ изоморфно множеству $\bar{V}$.

Определение 2.5. *Диаграммой Гейла* $\mathscr{D}(M)$ *$d$-многогранника* $M \subset E_d$ с $n$ вершинами $v^1, \ldots, v^n$ назовем множество точек $\hat{v}^1, \ldots, \hat{v}^n \in E_{n-d-1}$, определенных по правилу: $\hat{v}^i = 0$ при $\Gamma(v^i) = 0$; $\hat{v}^i = \Gamma(v^i)/\|\Gamma(v^i)\|$ при $\Gamma(v^i) \neq 0$. Каждой точке $\hat{v}^i \in \mathscr{D}(M)$ сопоставлена метка $m_i = |\Gamma^{-1}(\bar{v}^i)|$.

Таким образом, диаграмма Гейла состоит из подмножества точек множества $S^{n-d-2} \cup \{0\}$, где $S^{n-d-2}$ — единичная сфера в $E_{n-d-1}$ с центром в начале координат.

Из теоремы 2.1 и определений 2.4, 2.5 вытекает следующий важный результат.

Теорема 2.5. *Два многогранника $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их диаграммы Гейла изоморфны.*

Изоморфизм произвольного множества Гейла и диаграммы Гейла данного многогранника позволяет переформулировать все результаты о множествах Гейла в терминах диаграмм Гейла. Сведем все эти результаты в одну теорему.

Если $Z \subset \operatorname{vert} M$, то через $\hat{Z}$ будем обозначать множества точек диаграммы Гейла $\mathscr{D}(M)$, соответствующих множеству $Z$.

Теорема 2.6. 1) *Множество $Z \subset \operatorname{vert} M$ есть кограмь многогранника $M$ тогда и только тогда, когда* $0 \in \operatorname{rel\,int\,conv} \hat{Z}$;

2) *множество $\hat{V} \subset E_{n-d}$, состоящее из $n$ точек, есть диаграмма Гейла некоторого $d$-многогранника $M$ с $n$ вершинами тогда и только тогда, когда каждое открытое полупространство, порожденное гиперплоскостью, проходящей через* 0, *содержит по крайней мере две точки из* $\hat{V}$;

3) *если $F$ есть грань многогранника $M$, и $Z$ — ей соответствующая кограмь, то $\hat{Z}$ есть множество вершин симплекса, содержащего нуль в его относительной внутренности*;

4) *многогранник $M$ является симплициальным тогда и только тогда, когда для каждой гиперплоскости $H$, содержащей* 0, $0 \notin \operatorname{rel\,int\,conv}(\hat{V} \cap H)$;

5) *многогранник $M$ является $r$-гранной пирамидой тогда и только тогда, когда в его диаграмме Гейла нуль имеет метку $r$.*

**3. Многогранники с $d+2$ вершинами.** Диаграмма Гейла $d$-многогранника с $d+2$ вершинами в $E_1 (n-d-1=1)$ содержится в 3-точечном множестве $\{-1, 0, 1\}$. Пусть точки $-1, 0, 1$ имеют метки $m_{-1}$, $m_0$, $m_1$ соответственно (рис. 22). В силу теоремы 1.6

$$m_0 \geqslant 0, \quad m_1 \geqslant 2, \quad m_{-1} \geqslant 2, \quad m_0 + m_1 + m_{-1} = d + 2. \qquad (2.6)$$

Обратно, любая тройка $(m_{-1}, m_0, m_1)$, удовлетворяющая условиям (2.6), в силу утверждения 2 теоремы 2.6 задает некоторый $d$-многогранник с $d+2$ вершинами. Согласно теореме 2.5 два $d$-многогранника $M$ и $M'$ с $d+2$ вершинами комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда $(m_{-1}, m_0, m_1)=(m'_{-1}, m'_0, m'_1)$ или $(m_1, m_0, m_{-1})=(m'_{-1}, m'_0, m'_1)$, где $(m_{-1}, m_0, m_1)$ и $(m'_{-1}, m'_0, m'_1)$ — метки точек (—1, 0, 1) в диаграммах Гейла многогранников $M$ и $M'$ соответственно.

На основании утверждения 4 теоремы 2.6, $M$ — симплициальный многогранник в том и только том случае, когда $m_0=0$. Таким образом, число разбиений числа $d$ на два положительных целых слагаемых дает число комбинаторных типов симплициальных многогранников. Итак, симплициальных $d$-многогранников с $d+2$ вершинами существует $[d/2]$ типов. Симплициальный $d$-многогранник, в диаграмме Гейла которого одна из меток равна $r+1$, а вторая — $d-r+1$, обозначим через $T^r_d \forall r \in N_{[d/2]}$.

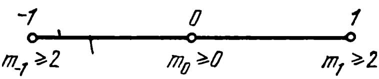



Рис. 22.

Если $m_0>0$, то многогранник $M$ есть $m_0$-гранная пирамида, основание у которой — $(d-m_0)$-многогранник $T^r_{d-m_0}$, где $r \in N_{[(d-m_0)/2]}$. Резюмируя выше изложенное, получаем следующий результат:

Теорема 2.7. *Существует $[d^2/2]$ различных комбинаторных типов $d$-многогранников с $d+2$ вершинами Из них $[d/2]$ являются симплициальными многогранниками $T^r_d$, $r \in N_{[d/2]}$, а оставшиеся — $t$-гранными пирамидами $T^{t;\,r}_d$, основанием которых является симплициальный многогранник $T^r_{d-t}$, $r \in N_{[(d-t)/2]}$.*

Отметим, что число симплициальных $d$-многогранников с $d+2$ вершинами установил Шлегель еще в 1891 г. [19].

Подсчитаем число $k$-граней у симплициального $d$-многогранника $T^r_d$. $k$-грань многогранника $T^r_d$ есть $k$-симплекс, и ее когрань имеет $d-k+1$ точки, причем на диаграмме Гейла по крайней мере одна из них совпадает с точкой —1 и одна — с точкой 1 (утверждение 3, теорема 2.6). Поэтому для каждого $k \in N_{d-1}$ имеем

$$f_k(T^r_d)=\sum_{\substack{u+v=d-k+1\\ u,\,v\geqslant 1}}\binom{r+1}{u}\binom{d+1}{v}=\binom{d+2}{d-k+1}-\binom{r+1}{d-k+1}-\binom{d-r+1}{d-k+1},$$

откуда для числа $k$-граней $t$-гранной пирамиды $T^{t;\,r}_d$ с основанием $T^r_d$ имеем следующую формулу:

$$f_k(T^{t;\,r}_d)=\sum_i\binom{t}{i}f_{k-i}(T^r_d)=$$

$$=\binom{d+2}{d-k+1}-\binom{r+t+1}{d-k+1}-\binom{d-r+1}{d-k+1}+\binom{t+1}{d-k+1}.$$

Несложно установить для каждого $d$-многогранника $M$ с $d+2$ вершинами следующее неравенство

$$f_k(T_d^{d-2,\ 1}) \leqslant f_k(M) \leqslant f_k(T_d^{0,\ [d/2]}) = f_k(T_d^{[d/2]}) \qquad \forall k \in N_{d-1}.$$

В дальнейшем (см. § 3) станет ясно, что многогранник $T_d^{[d/2]}$ комбинаторно эквивалентен циклическому $C(d,\ d+2)$.

**4. Многогранники с $d+3$-вершинами.** Диаграмма Гейла $d$-многогранника с $d+3$-вершинами состоит из точек, расположенных на единичной окружности в $E_2$ и в ее центре. Проведем диаметры через каждую точку диаграммы Гейла. Существует ряд операций, которые можно выполнять над диаграммой Гейла, в результате которых получим изоморфную ей диаграмму. Во-первых, можем изменять углы между диаметрами, не изменяя их взаимного расположения. Во-вторых, если два смежных диаметра имеют точки из $\hat{V}$ только на одном конце диаметра, то можно эти диаметры совместить, увеличив соответственно метку (рис. 23).

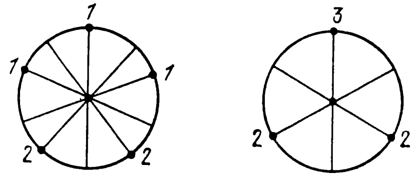



Рис. 23.

Определение 2.6. *Стандартной диаграммой Гейла* $d$-многогранника с $d+3$-вершинами назовем вершины правильного многоугольника, вписанного в единичную окружность, помеченные

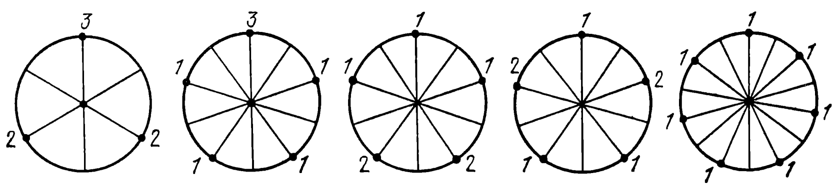


Рис. 24.

в соответствии со следующими правилами: 1) каждая метка есть неотрицательное число, и сумма меток равна $d+3-t$, где $t$ — метка центра окружности; 2) никакие две противоположные вершины многоугольника (концы одного диаметра) не носят обе метки нуль; 3) никакие две смежные вершины не носят обе метки нуль; 4) сумма меток вершин, лежащих в каждом открытом полупространстве, порожденном прямой, проходящей через центр, не меньше двух.

Заметим, что правило 4) автоматически выполняется при $n \geqslant 5$. Всевозможные стандартные диаграммы Гейла 4-многогранников с 7 вершинами изображены на рис. 24.

Два $d$-многогранника с $d+3$ вершинами комбинаторно эквивалентны тогда и только тогда, когда их стандартные диаграммы

Гейла изоморфны (т. е. могут быть совмещены с помощью вращения или отражения). Поэтому задача подсчета числа комбинаторных типов таких многогранников сводится к перечислению всех стандартных диаграмм Гейла.

В стандартной диаграмме Гейла симплициальных $d$-многогранников с $d+3$-вершинами центр окружности имеет нулевую метку, и только один конец каждого диаметра имеет ненулевую метку. Это обстоятельство несколько упрощает технику перечисления стандартных диаграмм Гейла симплициальных $d$-многогранников. Методы перечисления неизоморфных стандартных диаграмм Гейла на плоскости не отличаются от применяемых при перечислении графов. Вводится группа подстановок, действующая на вершинах диаграммы Гейла, и затем, используя теорию перечислений Пойа — Бернсайда, подсчитывается число подстановок, инвариантных по каждой возможной симметрии (отражения и вращения).

С помощью такой техники установлено [11], что число комбинаторных типов симплициальных $d$-многогранников с $d+3$-вершинами равно числу

$$2^{[d/2]}-\left[\frac{d+4}{2}\right]+\frac{1}{4(d+3)}\sum_{h}\varphi(h)\,2^{(d+3)/h},$$

где суммирование ведется по всем нечетным делителям $d+3$, $\varphi(h)=h\prod_{p}(1-1/p)$ — функция Эйлера.

В 1970 г. К. Ллойд [15] перечислил все комбинаторные типы $d$-многогранников с $d+3$-вершинами.

## § 3. Максимальное число граней

Проблема описания области значений $f$-векторов многогранников в общем случае не решена. Предпринимаются попытки установить границы изменения отдельных компонент $f$-вектора при фиксированных значениях других. Обширная литература посвящена проблеме отыскания точной верхней границы $\varphi_k(d, n)$ $k$-граней при фиксированном числе $n$ вершин $d$-многогранника $M$: $\varphi_k(d, n)=\max\{f_k(M)\colon \dim M=d,\ f_0(M)=n\}$, где $1\leqslant k<d<n$. С этой проблемой связана гипотеза, сформулированная в 1957 г. Т. Моцкиным [18], согласно которой $\varphi_k(d, n)=f_k(C(d, n))$ $\forall k\in N_{d-1}$. Иными словами утверждается, что среди $d$-многогранников с фиксированным числом вершин наибольшее число граней всех размерностей имеет циклический многогранник. Гипотеза была полностью доказана П. Мак-Мюлленом в 1970 г. [17]. В многочисленных предшествующих работах (обзор их можно найти в [11, 17]) гипотеза доказывалась для частных значений параметров $d$ и $n$.

Гипотезу о верхней границе достаточно доказать для симплициальных многогранников.

Теорема 3.1. *Пусть многогранник $M^0$ получен из $d$-многогранника $M$ правильным смещением каждой из его вершин. Тогда $M^0$ — симплициальный многогранник, обладающий свойством $f_0(M^0)=f_0(M)$, $f_i(M^0)\geqslant f_i(M)$ $\forall i\in N_{d-1}$.*

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из определения пирамиды, ее свойств и леммы 2.1 гл. II.

**1. Преобразование уравнений Дена—Соммервилля.** Пусть $M$— симплициальный $d$-многогранник. Рассмотрим полином $f(M, t) = \sum_{j=-1}^{d-1}(-1)^{j+1}f_j(M)t^{j+1}$. Уравнения Дена—Соммервилля, очевидно, эквивалентны соотношению

$$f(M,\ (1-t))=(-1)^d f(M,\ t). \tag{3.1}$$

Наряду с полиномом $f(M, t)$, введем полином от $t$ степени $d$

$$g(M,\ t)=(1-t)^d f(M,\ t/(t-1)). \tag{3.2}$$

Обозначим коэффициенты этого полинома через $g_k(M)$, т. е.

$$g(M,\ t)=\sum_{k=-1}^{d-1} g_k(M)\,t^{k+1}. \tag{3.3}$$

Лемма 3.2. *Для доказательства гипотезы о верхней границе достаточно убедиться в справедливости неравенств*

$$g_k(M)\leqslant \frac{n-d+k}{k+1}g_{k-1}(M) \qquad \forall k\in N_{d-1} \tag{3.4}$$

*для каждого симплициального $d$-многогранника с $n$ вершинами.*

Доказательство. Установим соотношения между коэффициентами полиномов $f(M, t)$ и $g(M, t)$. Из (3.2) и (3.3), приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, устанавливаем, что

$$g_k(M)=\sum_{j=-1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{d-j-1}{d-k-1}f_j(M). \tag{3.5}$$

С другой стороны, из (3.1) и (3.2) заключаем, что

$$t^d g(M,\ t^{-1})=t^d(1-t^{-1})^d f(M,\ t^{-1}/(t^{-1}-1))=$$
$$=(t-1)^d f(M,\ 1-t/(t-1))=(1-t)^d f(M,\ t/(t-1))=g(M,\ t).$$

Итак,

$$t^d g(M,\ t^{-1})=g(M,\ t). \tag{3.6}$$

Из (3.3) и (3.6) заключаем, что

$$g_k(M)=g_{d-k-2}(M), \qquad k=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ [d/2]-1. \tag{3.7}$$

Легко проверить, что $f(M,\ t)=(1-t)^d g(M,\ t/(t-1))$, и поэтому

$$f_j(M)=\sum_{k=-1}^{d}\binom{d-k-1}{d-j-1}g_k(M). \tag{3.8}$$

Мы установили соответствие между числами $f_j(M)$ и $g_k(M)$ и получили систему уравнений (3.7), эквивалентную уравнениям Дена — Соммервилля. Уравнения (3.7) независимы при нечетном $d=2m+1$; в случае четного $d=2m$ $(m-1)$-е уравнение, очевидно, лишнее. Ввиду отношений (3.7) равенства (3.8) можем переписать в виде

$$f_j(M)=\sum_{k=-1}^{m-1}\left\{\binom{d-k-1}{d-j-1}+(1-\delta_{k,\,d-m-1})\binom{k+1}{d-j-1}\right\}g_k(M), \quad (3.9)$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера, $m=[d/2]$. Коэффициенты при $g_k(M)$ в равенствах (3.9) при каждом $j$ неотрицательны, а при $j\geqslant m-1$ — положительны для каждого $k$.

Для циклического многогранника имеем (следствие 2.19 гл. I)

$$f_j(C(d,\ n))=\binom{n}{j+1}, \qquad j=-1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ m-1,$$

и поэтому

$$g_k(C(d,\ n))=\sum_{j=-1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{d-j-1}{d-k-1}\binom{n}{j+1}=\binom{n-d+k}{k+1}. \quad (3.10)$$

Равенство (3.10) проще всего доказать, заметив, что $f(M,\ t)$ и $(1-t)^n$ — полиномы, которые отличаются только членами степени выше чем $m$. То же самое справедливо для полиномов $g(M,\ t)$ и $(1-t)^d(1-t/(t-1))^n=(1-t)^{-(n-d)}$, и коэффициент при $t^{k+1}$ в последнем из упомянутых выражений равен $\binom{n-d+k}{k+1}$.

Из равенств (3.9) и (3.10) вытекает, что неравенства

$$f_j(M)\leqslant f_j(C(n,\ d)) \qquad \forall j\in N_{d-1}$$

являются следствием неравенств

$$g_k(M)\leqslant\binom{n-d+k}{k+1} \qquad \forall k\in N_{d-1}. \quad (3\ 11)$$

Кроме того, $g_0(M)=n-d$. Поэтому соотношения (3.11) имеют место, если справедливы неравенства (3.4). Лемма доказана.

**2. Развертка граней граничного комплекса.**

Определение 3.1. *Развеpткой граничного комплекса* $\mathscr{F}(M)$ многогранника $M$ назовем нумерацию его $(d-1)$-граней, скажем, $F_1,\ \ldots,\ F_u$ $(u=f_{d-1}(M))$, обладающую свойством: всякое множество $F_s\cap\left(\bigcup_{t=1}^{s-1}F_t\right)$ $(s=2,\ \ldots,\ u-1)$ гомеоморфно $(d-2)$-шару.

Из определения 3.1 вытекает, что всякое множество $\bigcap_{t=1}^{s}F_t$ $\forall s\in N_{u-1}$ гомеоморфно $(d-1)$-шару.

Г. Бругесером и П. Мани [8] было доказано существование развертки граничного комплекса многогранника. Предложенный ими метод доказательства схематично состоит в следующем. Берется кривая $L$, которая пересекает в различных точках все опорные гиперплоскости, порождающие $(d-1)$-грани многогранника $M$, и которая также пересекает внутренность $M$. Пусть точка $z$ движется вдоль кривой $L$, начиная с точки $L \cap \operatorname{int} M$, и последовательно пересекая опорные гиперплоскости $H_1, \ldots, H_u$, порождающие грани $F_1, \ldots, F_u$. Тогда доказывается, что $F_1, \ldots, F_u$ есть развертка многогранника $M$ (рис. 25).

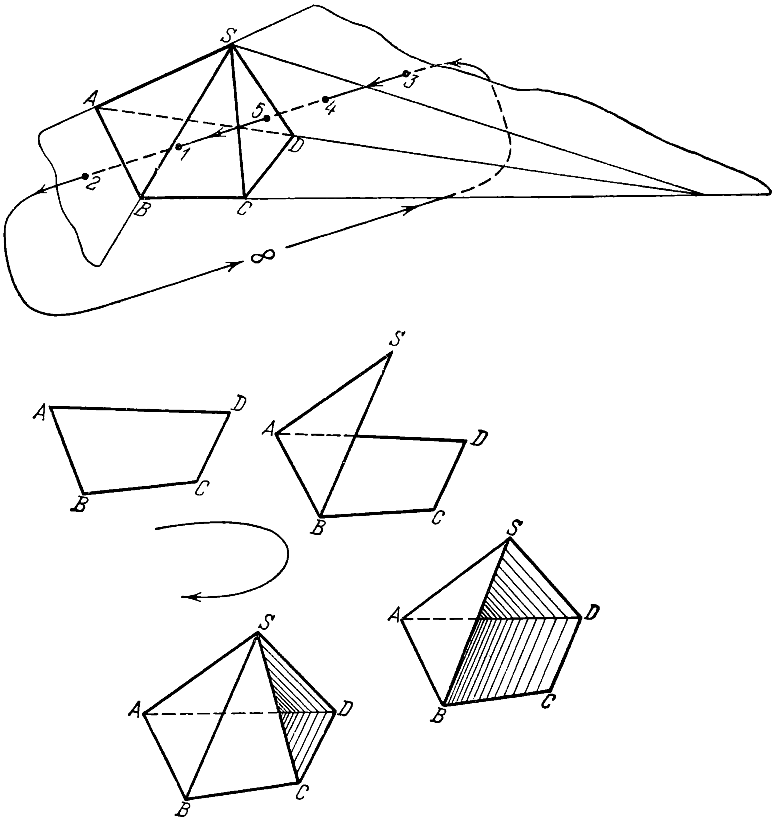



Рис. 25.

Пусть $F_1, \ldots, F_u$ — развертка симплициального $d$-многогранника $M$. Пусть $M_s = \bigcup_{t=1}^{s} F_t$, и пусть $f_j(M_s)$ — число $j$-граней многогранника $M$, принадлежащих $M_s$. Пусть, далее,

$$g_k(M_s) = \sum_{j=-1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{d-j-1}{d-k-1} f_j(M_s),$$
$$k = -1, 0, 1, \ldots, d-1.$$

Вычислим величину $g_k(M_s)-g_k(M_{s-1})$, считая $g_k(M_0)=0$. Множество $F_s \cap M_{s-1}$ есть топологически $(d-2)$-шар в границе $(d-1)$-симплекса $F_s$, поэтому $F_s \cap M_{s-1}$ есть объединение некоторых $(d-2)$-граней $F_s$. Пусть пересечение этих граней есть $(d-r-2)$-грань $F'$. Согласно предложению 2.14 гл. I у многогранника $F_s$ существует такая $r$-грань $F$, что $F \cap F' = \varnothing$. При добавлении грани $F_s$ к развертке $M_{s-1}$ добавляются грани, которые содержат $r$-грань $F$. Число таких $j$-граней равно $f_{j-r-1}(M(F, F_s)) = \binom{d-r-1}{d-j-1}$, так как $M(F, F_s)-(d-r-2)$-симплекс (следствие 1.2). Таким образом,

$$g_k(M_s)-g_k(M_{s-1}) =$$
$$= \sum_{j=-1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{d-j-1}{d-k-1} [f_j(M_s)-f_j(M_{s-1})] =$$
$$= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{d-r-1}{d-k-1} \binom{d-r-1}{d-j-1} = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} \binom{d-r-1}{d-k-1} \binom{k-r}{j-r} = \delta_{kr}, \tag{3.12}$$

где $\delta_{kr}$ — символ Кронекера. Равенство (3.12) выполняется также в крайних случаях $s=1$, $r=-1$ и $s=u$, $r=d-1$. Итак, при переходе от $M_{s-1}$ к $M_s$ коэффициент $g_r$ увеличивается на единицу, а остальные $g_k$, $k \neq r$, не изменяются. Из формулы (3.12) вытекает, что $g_k(M)=g_k(M_u) \geqslant 0$.

Лемма 3.3. *Пусть $M$ — симплициальный $d$-многогранник. Тогда*

$$g_k(M) \leqslant \frac{n-d+k}{k+1} g_{k-1}(M), \qquad k=-1, 0, 1, \ldots, d-1.$$

Доказательство. Пусть $x$ — вершина многогранника $M$, и пусть $M_x$ — срез вершины $x$ многогранника $M$. Для доказательства леммы оценим двумя способами величину $\sum_{x \in \mathrm{vert}\, M} g_{k-1}(M_x)$.

Во-первых, используя соотношение $\sum_{x \in \mathrm{vert}\, M} f_{j-1}(M_x) = (j+1) f_j(M)$, и вычисляя по формуле (3.5) значение $g_{k-1}(M_x)$, получаем равенство

$$\sum_{x \in \mathrm{vert}\, M} g_{k-1}(M_x) = (k+1) g_k(M) + (d-k) g_{k-1}(M). \tag{3.13}$$

Убедиться в справедливости (3.13) можно также с помощью геометрических соображений. Развертка комплекса $\mathscr{F}(M)$ будет вызывать развертку каждого из комплексов $\mathscr{F}(M_x)$. Пусть $F_1, \ldots, F_u$ — развертка $\mathscr{F}(M)$, и пусть, прибавляя $F_s$ к $M_{s-1}$, чтобы получить $M_s$, мы увеличиваем $g_r(M)$ на единицу, и никакое другое $g_k(M)$ не изменяется. Посмотрим, что происходит при этом с величинами $g_k(M_x)$, относящимися к многогранникам $M_x$. Ясно, что в $r+1$ из них мы присоединяем единицу к $g_{r-1}(M_x)$, благодаря $(r-1)$-граням $r$-грани, не содержащим вершин $x$, по которым производился срез; в оставшихся $d-r-1$ из них мы присоединяем единицу к $g_r(M_x)$. Суммируя по всем $x \in \operatorname{vert} M$, приходим к (3.13).

Во-вторых, докажем неравенство

$$\sum_{x \in \operatorname{vert} M} g_{k-1}(M_x) \leqslant n g_{k-1}(M). \tag{3.14}$$

Для этого рассмотрим развертку $M_x$, при которой сначала $M_s$ состоит из всех граней, содержащих вершину $x$, и только затем начинаем присоединять остальные грани. Легко заметить, что в индуцированной развертке $\mathscr{F}(M_x)$ присоединение к $g_{k-1}(M_x)$ единицы вызывает также присоединение единицы к $g_{k-1}(M)$ для $\mathscr{F}(M)$ Таким образом,

$$g_{k-1}(M_x) \leqslant g_{k-1}(M),$$

и, суммируя по всем вершинам многогранника $M$, получаем неравенство (3.14). Сопоставляя (3.13) и (3.14), получаем требуемое в формулировке леммы неравенство.

Из теоремы 3.1, лемм 3.2 и 3.3 получаем решение гипотезы о верхней границе.

Теорема 3.4. *Циклические многогранники имеют максимальное число граней всех размерностей в классе d-многогранников с фиксированным числом вершин.*

**3. $f$-вектор циклического многогранника.** Часть компонент $f$-вектора циклического многогранника $C(d, n)$ была найдена в § 2 гл. I

$$f_k(C(d, n)) = \binom{n}{k+1} \qquad \forall k \in N_{[d/2]}.$$

Остальные компоненты можно найти, подставив $f_k$ $\forall k \in N_{[d/2]}$ в уравнения Дена — Соммервилля (теорема 5.8 гл. I). Однако упрощение полученных выражений довольно громоздко. Ниже приводится метод перечисления $k$-граней циклического многогранника $C(d, n)$ для всех $k$, основанный на необходимых и достаточных условиях, налагаемых на подмножества вершин, порождающих грани. Метод предложен П. Мак-Мюлленом и Шепардом [17].

Теорема 3.5. *Число $k$-граней $(1 \leqslant k \leqslant d-1)$ циклического $d$-многогранника $C(d, n)$ задается выражением*

$$f_k(C(d, n)) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}\binom{j}{k+1-j}, & \text{если } d = 2m-1, \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{k+2}{n-j}\binom{n-j}{j+1}\binom{j+1}{k+1-j}, & \text{если } d = 2m. \end{cases} \tag{3.15}$$

Доказательство состоит из двух частей. В первой — установим свойства подмножеств вершин, порождающих $k$-грани, во второй — перечислим такие подмножества.

Считаем, что все вершины $x^i = x(\tau_i)$ $\forall i \in N_n$ упорядочены в порядке возрастания параметра $\tau$. Пусть $W \subset \operatorname{vert} C(d, n)$. Подмножество $V \subseteq W$ называем *связным*, если существуют $i$, $j \in N_n$, $i < j$, такие, что $V = \{x^i, x^{i+1}, \ldots, x^j\}$, $x^{i-1} \in W$, $x^{j+1} \notin W$.

Подмножества $Y_1$, $Y_2 \subseteq W$ вида

$$Y_1 = \{x^1, \ldots, x^i\}, \qquad x^{i+1} \notin W,$$
$$Y_2 = \{x^j, \ldots, x^n\}, \qquad x^{j-1} \notin W$$

называем *концевыми*. Ясно, что каждое собственное подмножество $W \subset \operatorname{vert} C(d, n)$ представимо единственным образом в форме $W = Y_1 \cup V_1 \cup \ldots \cup V_t \cup Y_2$, где $0 \leqslant t \leqslant [(n-1)/2]$, $V_i$ — связные множества, $Y_1$, $Y_2$ — концевые множества. Подмножество $W$ называем $(r, s)$-*множеством*, если $|W| = r$, и точно $s$ из его связных подмножеств содержат нечетное число элементов.

Лемма 3.6. *Пусть* $W \subset \operatorname{vert} C(d, n)$, $n \geqslant d+1$. *Тогда* $\operatorname{conv} W$ — $k$-*грань циклического многогранника в том и только том случае, когда существует* $0 \leqslant s \leqslant d-k-1$ *такое, что* $W$ *является* $(k+1, s)$-*множеством.*

Доказательство. Согласно предложению 2.17 гл. I, $C(d, n)$ — симплициальный многогранник. Поэтому если $\operatorname{conv} W$ есть $k$-грань многогранника $C(d, n)$, то $|W| = k+1$

Рассмотрим сначала случай, когда $k = d-1$. Пусть $|W| = d$. Тогда точки из $W$ аффинно независимы. Поэтому $H = \operatorname{aff} W$ — гиперплоскость в $E_d$. Так как кривая $x(\tau) \subset E_d$, то точки из $W$ делят ее на $d+1$ дуг, лежащих поочередно по разные стороны $H$. Далее, $\operatorname{conv} W$ — грань многогранника $C(d, n)$ в том и только том случае, когда гиперплоскость $H$ является опорной к $C(d, n)$, т. е. когда точки $\operatorname{vert} C(d, n) \setminus W$ расположены в одном из полупространств, порождаемых $H$ (предложение 2.15 гл. I). Ясно, что это может быть в том и только в том случае, если между каждыми двумя точками из $\operatorname{vert} C(d, n) \setminus W$ лежит четное число точек из $W$, и это в свою очередь эквивалентно тому, что $W$ — $(d, 0)$-множество, т. е. не содержит связных подмножеств с нечетным числом элементов.

Рассмотрим общий случай. Пусть $W \subset \operatorname{vert} C(d, n)$ и $|W| = k+1$. Если $W$ имеет не более $d-k-1$ связных подмножеств с нечетным числом элементом, то можно найти подмножество $T$ точек на кривой $x(\tau)$ таких, что $T \cap C(d, n) = \varnothing$, $|T| = d-k-1$, и $T \cup W$ из $(n+d-k-1, 0)$-множества $T \cup \operatorname{vert} C(d, n)$ имеет только связные подмножества из четного числа элементов. Тогда гиперплоскость $H = \operatorname{aff}(T \cup W)$ — опорная к циклическому многограннику $C(d, n+d-k-1) = \operatorname{conv}(T \cup \operatorname{vert} C(d, n))$, следовательно, $H \cap \operatorname{vert} C(d, n) = W$, и $C(d, n) \subseteq C(d, n+d-k-1)$. Ввиду теоремы 2.2 гл. I гиперплоскость $H$ порождает грань многогранника $C(d, n)$. Условия также необходимы, ибо по теореме 2.12 гл. I, если $\operatorname{conv} W$ есть грань многогранника $C(d, n)$, то она есть также грань некоторой $(d-1)$-грани $\operatorname{conv} W'$, где $W \subseteq W' \subseteq$

$\subseteq \operatorname{vert} C(d, n)$. Так как $W'$ не имеет связных подмножеств нечетной мощности, то ясно, что $W$ не может иметь больше, чем $d-k-1$ связных подмножеств с нечетным числом элементов. Лемма доказана.

Займемся теперь определением числа различных $(k+1, s)$-множеств $W \subset \operatorname{vert} C(d, n)$, где $s \leqslant d-k-1$.

Введем вспомогательное понятие. Множество из $n$ различных точек, взятых на ориентированной замкнутой кривой, называем *n-циклом*. Каждая точка $n$-цикла имеет единственную последующую (*потомок*) и единственную предшествующую точки; $n$-й потомок каждой точки совпадает с ней самой. Связные подмножества $n$-цикла определяются точно так же, как и связные подмножества вершин циклического многогранника. Говорим, что $W$ есть $(r, s)$-множество $n$-цикла $V$, если $W \subset V$, $|W|=r$ и $W$ содержит точно $s$ связных подмножеств с нечетным числом элементов.

Пусть $d=2m$, $V=\operatorname{vert} C(d, n)$ и пусть $W-(k+1, s-1)$- или $(k+1, s)$-множество $(s \equiv (k+1) \bmod 2)$. Превратим множество $V$ в $n$-цикл $V_1$, отождествив точки $x(\tau_0-\varepsilon)$ и $x(\tau_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, кривой $x(\tau)$, иначе считаем, что $x_0$ — есть потомок $x_n$ в $V_1$. Тогда $W$ превратится в $(k+1, s)$-множество $W_1$ $n$-цикла $V_1$ (если $W-(k+1, s-1)$-множество в $V$, то условие $s \equiv (k+1) \bmod 2$ влечет объединение двух концевых подмножеств в связное множество с нечетным числом элементов). Пусть $z(n, k+1, s)$-число различных $(k+1, s)$-множеств $W_1$ $n$-цикла $V_1$. Если присоединим к каждому из $s$ связных множеств с нечетным числом элементов его потомка, то данное $(k+1, s)$-множество $W_1$ превратится в $(k+s+1, 0)$-множество $W_2$. Число $k+s+1$ из-за $s \equiv (k+1) \bmod 2$ есть четное. Пусть $k+s+1=2j$. Множество $W_2$ разобьем на $j$ пар смежных точек $V_1$. Каждому множеству $W_2$, очевидно, соответствует $\binom{j}{s}$ различных подмножеств $W_1$, получаемых удалением второй точки в каждой из $s$ пар, произвольно выбранных из данных $j$ пар. Так как число подмножеств $W_2$ есть $z(n, 2j, 0)$, получаем соотношение

$$z(n, k+1, s)=\binom{j}{s} z(n, 2j, 0), \quad 2j=k+s+1. \tag{3.16}$$

Вычисляем $z(n, 2j, 0)$. Если удалим по одной точке в каждой из $j$ пар $W_2$, то получим подмножество $W_3$ $(n-j)$-цикла $V_2$, причем $|W_2|=j$. Легко установить, что число таких подмножеств $W_3$ равно $\binom{n-j}{j}$. Соотношения между числом различных подмножеств $W_2$ и $W_3$ устанавливается следующим образом.

Пусть $r$ — число циклических подстановок, действующих на $V_2$, которые оставляют подмножества $W_3$ неподвижными. Ясно, что число циклических подстановок, действующих на $V_1$, которые оставляют $W_2$ неподвижным, есть также $r$. Итак, циклические подстановки множества $V_2$, примененные к $W_3$, дают $(n-j)/r$

различных подмножеств $V_2$, а циклические подстановки множества $V_1$, примененные к $W_2$, дают $n/r$ различных $(2j, 0)$-подмножеств $V_1$. Следовательно,

$$z(n, 2j, 0)=\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}. \tag{3.17}$$

Из (3.16), (3.17) получаем

$$z(n, k+1, s)=\frac{n}{n-j}\binom{n-j}{j}\binom{j}{s}, \quad 2j=k+s+1. \tag{3.18}$$

Благодаря лемме 3.6 получаем

$$f_k(C(2m, n))=\sum_{\substack{s=0 \\ s\equiv(k+1)\bmod 2}}^{2m-k-1} z(n, k+1, s). \tag{3.19}$$

Подставляя в (3.19) значение $z(n, k+1, s)$ (согласно (3.18)), изменив порядок суммирования, получаем (3.15) для четного $d$.

Пусть $d=2m+1$. В отличие от случая четного $d$, построим $(n+1)$-цикл $V_1$, добавив фиктивную точку $x^{n+1}$ между вершинами $x^n$ и $x^1$ ($x^{n+1}$ — потомок $x^n$, а $x^1$ — потомок $x^{n+1}$). Для данного $(k+1, s-1)$- или $(k+1, s)$-подмножества $(s\equiv k \pmod 2)$ вершин циклического многогранника определим также, как и в предыдущем случае $(k+2, s)$-множество $W_1$ $(n+1)$-цикла $V_1$. Из (3.19) следует, что число таких подмножеств равно

$$\sum_{\substack{s=0 \\ s\equiv k \pmod 2}}^{2m-k} z(n+1, k+2, s)=f_{k+1}(C(2m+2, n+1)). \tag{3.20}$$

Пусть для каждого $(k+2, s)$-множества $W_1 (s\equiv k \pmod 2)$ $r$ есть число циклических подстановок, действующих на $V_1$, которые сохраняют $W_1$. Циклические подстановки, действующие на $V_1$ относительно $W_1$, дают $(n+1)/r$ различных $(k+2, s)$-подмножеств $(n+1)$-цикла $V_1$. Удаление одной точки из $k+2$ точек $W_1$ преобразует цикл $V_1$ в множество $V$, и при этом каждое подмножество $W_1$ дает $(k+2)/r$ различных $(k+1, s-1)$-подмножеств (или $k+1$, $s$)-множеств, в зависимости от места удаленной точки) $W$ вершин многогранника $C(d, n)$. Следовательно, общее число различных$(k+1, s)$-множеств $(s\leqslant 2m-k)$, с учетом (3.20), равно

$$f_k(C(2m+1, n))=\frac{k+1}{n+1}f_{k+1}(C(2m+2, n+1)).$$

Подставляя уже найденное значение $f_{k+1}(C(2m+2, n+1))$ и изменяя индекс суммирования $j$ на $j-1$, получаем (3.15) для нечетного $d$. Теорема доказана.

Следствием доказанных теорем является следующий важный результат.

Теорема 3.7. *Для числа $k$-граней ($1 \leqslant k \leqslant d-1$) произвольного $d$-многогранника $M$ с $n$ вершинами справедливы неравенства*

$$f_k(M) \leqslant \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{n}{n-j}\dbinom{n-j}{j}\dbinom{j}{k+1-j} & \text{при } d=2m-1, \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \dfrac{k+2}{n-j}\dbinom{n-j}{j+1}\dbinom{j+1}{k+j-1} & \text{при } d=2m. \end{cases}$$

## § 4. Минимальное число граней

**1. Гипотеза о нижней границе.** О нижней границе $\mu_k(d, n)$ числа $k$-граней произвольного $d$-многогранника с $n$ вершинами известно немного. Прежде всего используя верхнюю границу для числа $(d-1)$-граней $d$-многогранника, легко получить соотношение

$$\mu_{d-1}(d, n) \geqslant \min\{r\colon f_{d-1}(C(d, r)) \geqslant n\}.$$

Кроме того, в [11] доказаны следующие неравенства:

$$\mu_k(d, d+s) \geqslant \mu_k(d, d+r) \geqslant \binom{d+1}{k+1} + \binom{d}{k+1} - \binom{d+1-r}{k+1},$$

где $k \in N_{d-1}$, $r \in N_{\min\{4, d\}}$, $s > r$.

Пусть $\mu_k^s(d, n)$ — нижняя граница числа $k$-граней симплициального $d$-многогранника с $n$ вершинами. В. Кли предположил, что

$$\mu_{d-1}^s(d, n) = (d-1)n - (d+1)(d+2). \tag{4.1}$$

Это предположение дополнил Б. Грюнбаум:

$$\mu_k^s(d, n) = \binom{d}{k} n - \binom{d+1}{k+1} k \quad \forall k \in N_{d-2}. \tag{4.2}$$

Соотношения (4.1) и (4.2) известны как гипотеза о нижней границе. В двойственной форме эта гипотеза выглядит следующим образом: для $f$-вектора каждого простого $d$-многогранника справедливы неравенства

$$f_0 \geqslant (d-1) f_{d-1} - (d+1)(d+2), \tag{4.1'}$$

$$f_{d-k} \geqslant \binom{d}{k} f_{d-1} - \binom{d+1}{k+1} k \quad \forall k \in N_{d-2}. \tag{4.2'}$$

Гипотеза о нижней границе была полностью доказана в 1973 г. Д. Барнеттом [7]: там же можно найти указание на более ранние работы, посвященные доказательству гипотезы для частных случаев. Схема доказательства Барнетта состоит в следующем: сначала доказывается гипотеза для числа вершин простого многогранника (неравенство (4.1')) или, что то же самое, для числа $(d-1)$-граней симплициального $d$-многогранника.

Далее устанавливается нижняя граница для числа $(d-2)$-граней простого многогранника, используя которую доказывается справедливость гипотезы для ребер симплициального многогранника. В заключение показывается, что если для симплициального $d$-многогранника гипотеза верна при $k=1$, $d-1$, то она верна и для остальных $k$.

**2. Нижняя граница для числа вершин простого многогранника.** Установим нижнюю границу для числа вершин простого $d$-многогранника с фиксированным числом граней.

Сначала сделаем несколько вспомогательных построений. Подкомплекс $\mathcal{F}'$ граничного комплекса $\mathcal{F}(M)$ простого $d$-многогранника $M$ назовем *связным подкомплексом*, если существует такая нумерация $F_1, \ldots, F_n$ $(d-1)$-граней, входящих в $\mathcal{F}'$, что множество $F_i \cap F_{i+1} \neq \varnothing$ для каждого $i$, т. е. является $(d-2)$-гранью многогранника $M$. Будем говорить, что вершина $x$

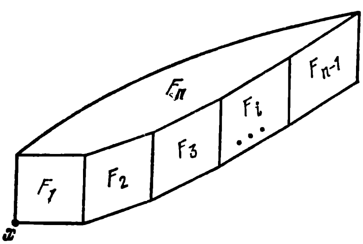


Рис. 26.

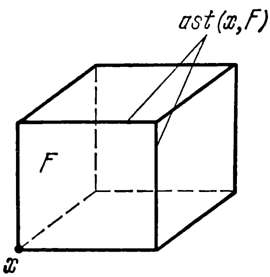


Рис. 27.

является *внешней вершиной связного комплекса* $\mathcal{F}'$, если она принадлежит только одной $(d-1)$-грани комплекса $\mathcal{F}'$ (рис. 26).

Пусть $x$ — вершина многогранника $M$. Обозначим через $\operatorname{ast}(x, M)$ множество всех $(d-1)$-граней $M$, не содержащих вершину $x$. Это множество будем называть *антизвездой граничного комплекса.*

Для связного комплекса $\mathcal{F}'$ и вершины $x$, принадлежащей некоторой $(d-1)$-грани $F \in \mathcal{F}'$, введем обозначение $\mathcal{F}' / \operatorname{ast}(x, F)$, имея в виду те связные комплексы, на которые топологически множество $\operatorname{ast}(x, F)$ разделяет комплекс $\mathcal{F}'$ (рис. 27).

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{F}'$ — связный подкомплекс граничного комплекса простого $d$-многогранника $M$, и пусть $\mathcal{F}'$ имеет по крайней мере одну внешнюю вершину. Тогда существует внешняя вершина $x$, принадлежащая некоторой $(d-1)$-грани $F$ из $\mathcal{F}'$, такая, что множество $\mathcal{F}' / \operatorname{ast}(x, F)$ состоит точно из двух связных комплексов, один из которых состоит из единственной $(d-1)$-грани $F$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть для любой внешней вершины $x$ комплекса $\mathcal{F}$ множество $\mathcal{F}/\operatorname{ast}(x, F)$ состоит из трех связных комплексов $\{F\}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}_1$. Тогда в качестве $x$ выбираем ту из внешних вершин $\mathcal{F}'$, для которой связный комплекс $\mathfrak{B}$ имеет максимальное число $(d-1)$-граней. Если $\mathfrak{B}_1$ не имеет внешних вершин помимо тех, что содержит $F$, то удаление таких вершин делает граф многогранника $M$ не связным, что невозможно по условию. Если $\mathfrak{B}_1$ имеет внешнюю вершину $x^1$, не принадлежащую $F$, то эта вершина является внешней и у связного комплекса $\mathcal{F}$. Пусть $x^1 \in F_1$, где $F_1$ — $(d-1)$-грань из $\mathcal{F}$. Так как $\mathfrak{B} \cup \{F\}$ — связный подкомплекс, составленный из граней из $\mathcal{F}/\operatorname{ast}(x^1, F_1)$, то получили противоречие с выбором $x$. Лемма 4.1 доказана.

Пусть $x$ — вершина простого $d$-многогранника $M$, и пусть $\mathcal{F} = \operatorname{ast}(x, M)$. Ясно, что $\mathcal{F}$ — связный подкомплекс граничного комплекса многогранника $M$. Убедимся в том, что у комплекса $\mathcal{F}$ существует внешняя вершина. Так как между произвольной вершиной из $\mathcal{F}$ и вершиной $x$ существует $d$ вершинно непересекающихся цепей, то найдется ровно $d$ ребер, каждое из которых образовано пересечением точно $d-1$ $(d-1)$-граней многогранника $M$, не принадлежащих $\mathcal{F}$. Эти ребра инцидентны ровно $d$ вершинам из $\mathcal{F}$, каждая из которых является внешней вершиной в $\mathcal{F}$.

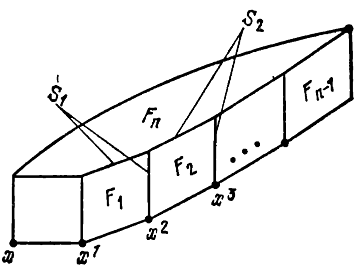


Рис. 28.

Благодаря лемме 4.1 можно реализовать следующий процесс. Выбираем такую внешнюю вершину $x^1$ из $\mathcal{F}$, что множество $\mathcal{F}/\operatorname{ast}(x^1, F_1)$ состоит из двух связных подкомплексов $F_1$ и $(d-1)$-грани $F_1$, содержащей $x^1$. Множество $S_1 = \mathcal{F}_1 \cap F_1$ назовем *разделяющим*. Далее, у связного комплекса $\mathcal{F}_1$ выбираем внешнюю вершину $x^2$, принадлежащую грани $F_2$, из $\mathcal{F}_1$ так, чтобы множество $\mathcal{F}_1/\operatorname{ast}(x^2, F_2)$ состояло из двух связных подкомплексов $\mathcal{F}_2$ и $F_2$; разделяющее множество $F_2 \cap \mathcal{F}_2$ обозначим через $S_2$. Продолжая этот процесс, получим три последовательности: связных комплексов $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$, разделяющих множеств $S_1, \ldots, S_n$ и $(d-1)$-граней $F_1, \ldots, F_n$, где $n = f_{d-1} - d - 1$ (рис. 28).

Лемма 4.2. *Для любых двух связных комплексов $\mathcal{F}_i$, $\mathcal{F}_{i+1}$ из построенной последовательности существует $d-1$ различных вершин $v_1^i, \ldots, v_{d-1}^i$,* обладающих свойствами: *а) $v_k^i$ — внешняя вершина комплекса $\mathcal{F}_i$; б) $v_k^i$ не является внешней вершиной комплекса $\mathcal{F}_{i-1}$.*

Доказательство. Пусть $F_i^0$ — $(d-1)$-грань из $\mathcal{F}_i$, имеющая непустое пересечение с $(d-1)$-гранью $F_i$. Пусть $x_0^i$ — вершина из $F_i^0$, не принадлежащая $S_i$. Тогда между вершинами $x^i$ и $x_0^i$ в графе $(d-1)$-комплекса $\mathcal{F}_{i-1}$ существует $d-1$ вершинно непересекающихся цепей. Пусть $v_k^i$ — первая вершина в $k$-й цепи от $x^i$ к $x_0^i$, принадлежащая разделяющему множеству $S_i$.

Тогда предшествующее в $k$-й цепи ребро образовано пересечением $d-1$ $(d-1)$-граней, не принадлежащих $\mathcal{F}_i$. Поэтому $v_k^i$ — внешняя вершина комплекса $\mathcal{F}_i$. Так как вершина $v_k^i \in S_i$, то она не может быть внешней у комплекса $\mathcal{F}_{i-1}$. Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Если $M$ — простой $d$-многогранник, то*

$$f_0(M) \geqslant (d-1) f_{d-1}(M) - (d+1)(d-2).$$

Доказательство. Оно непосредственно вытекает из леммы 4.1. Действительно,

$$f_0(M) \geqslant (d+1) + (d-1) n = (d+1) + (d-1)(f_{d-1}(M) - d - 1) = \\ = (d-1) f_{d-1}(M) - (d+1)(d-2).$$

**3. Нижняя граница для числа ($d$—2)-граней простого многогранника.**

Теорема 4.4. *Если $M$ — простой $d$-многогранник, то*

$$f_{d-2}(M) \geqslant d f_{d-1}(M) - d^2 - d.$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную $(d-1)$-грань $F_i$ из последовательности $F_1, \ldots, F_n$. Пусть $F_i^*$ — $(d-1)$-многогранник, двойственный $F_i$, и пусть $x^1, \ldots, x^k$ — его вершины, двойственные $(d-2)$-граням, принадлежащим $S_i$. Пусть $G_i$ — $(d-2)$-грань многогранника $F_i^*$, двойственная вершине $x^i$. Возьмем точку $w^i$, строго отделенную гиперплоскостью, порождающей $G_i$, от многогранника $F_i^*$ и в то же время близкую к центру грани $G_i$. Тогда граф, являющийся объединением графа многогранника $F_i^*$ и вершины $w^i$, соединенной ребрами с вершинами грани $G_i$, есть граф $(d-1)$-многогранника $\operatorname{conv}(F_i^* \cup \cup w^i)$. В этом графе существует $d-1$ непересекающихся цепей $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d-1}$ между вершинами $w^i$ и $x^1$. Для каждой цепи $\Gamma_k$ пусть $x_0^k$ — последняя вершина при движении вдоль цепи от $w^i$ к $x^1$ перед первой из вершин $x^1, \ldots, x^k$. Вершины $x_0^k$ будут различными и, следовательно, двойственные им $(d-2)$-грани многогранника $M$ тоже различны. Отметим также, что пересечение разделяющего множества $S_i$ с каждой из этих $(d-2)$-граней есть $(d-3)$-грань многогранника $M$. $(d-2)$-грани, обладающие таким свойством, назовем *правильными*. Таким образом, многогранник $M$ имеет по крайней мере $(d-1)(f_{d-1} - d - 1)$ правильных $(d-2)$-граней.

Следующий этап доказательства заключается в перечислении $(d-2)$-граней многогранника $M$, принадлежащих разделяющим множествам. Покажем, что каждое разделяющее множество $S_i$ имеет по крайней мере одну $(d-2)$-грань, не являющуюся правильной. Отметим, что $(d-2)$-грань из разделяющегося множества $S_i$ является правильной, если она в пересечении с некоторым другим разделяющим множеством дает $(d-3)$-грань. Рассматриваем последовательно все разделяющие множества $S_j$, $j > i$, которые в пересечении с $S_i$ имеют $(d-3)$-грани. Пусть в множестве $S_j \cap S_i$ содержится $(d-3)$-грань $F$. Так как $M$ — простой $d$-многогранник, то грань $F$ есть пересечение точно трех $(d-1)$-граней $F_i$, $F_j$ и некоторой $F_k$. Множество $F_k \cap F_i$ непусто, и поэтому есть $(d-2)$-грань. Так как множество $S_j$ топологически разделяет связный комплекс $\mathcal{F}_j$, то $S_j$ также разделяет и $S_i$. Выбираем тот связный комплекс $\mathfrak{B}$, отделенный разделяющим множеством $S_j$, который содержит $(d-2)$-грань, которая не становится правильной, когда удаляем $F_j$. Поэтому некоторое другое разделяющее множество $S_l$ пересекает комплекс $\mathfrak{B}$, и пересечение трех $(d-1)$-граней $F_i$, $F_l$ и некоторой $F_m$ дает $(d-3)$-грань $F'$ в $\mathfrak{B}$. Ясно, что $F_m \cap F_i$ — $(d-2)$-грань в $S_i$.

Если $F_m \cap F_i$ не принадлежит комплексу $\mathfrak{B}$, то $(d-2)$-грань $F_i \cap F_l$ из $\mathfrak{B}$ пересекает $(d-2)$-грань $F_m \cap F_i$ не в $\mathfrak{B}$, и тогда $F'$ содержится в разделяющем множестве $S_j$, пересекающем $S_i$.

Ясно, что разделяющие множества дают различные $(d-2)$-грани. Поэтому имеем по крайней мере четыре $(d-2)$-грани, содержащие $F'$: две в $S_i$ и по одной в $S_l$ и $S_j$, что невозможно.

Следовательно, множество $F_i \cap F_m$ принадлежит комплексу $\mathfrak{B}$. Тогда $S_m$ разделяет комплекс $\mathfrak{B}$, и по крайней мере один из его подкомплексов содержит $(d-2)$-грань, не ставшую правильной, когда удалили $F_m$. Повторяя описанный процесс, в конце концов придем к $(d-2)$-грани в разделяющем множестве $S_i$, которая не является правильной. Итак, нижняя граница для числа $(d-2)$-граней равна $(d-1)(f_{d-1}-d-1)+f_{d-1}-d-1 = df_{d-1} - d^2 - d$. Теорема 4.4 доказана.

**4. Нижняя граница для числа ребер.**

Лемма 4.5. *Если $f_1(M) \geqslant dn-k$ для любого симплициального $d$-многогранника $M$ с $n$ вершинами, где константа $k$ зависит только от $d$, то*

$$f_1(M) \geqslant dn - \frac{d(d+1)}{2}. \tag{4.3}$$

Доказательство. Предположим, что для симплициального многогранника $M$ с $n$ вершинами соотношение (4.3) не имеет места, т. е. справедливо равенство

$$f_1(M) = dn - \frac{d^2+d}{2} - r,$$

где $r$ — положительное целое число. Пусть $(d-1)$-грань $F$ порождена опорной гиперплоскостью $H$. Пусть $M'$ — объединение многогранника $M$ и его зеркального отображения относительно $H$. Множество $M'$ не обязательно является выпуклым, однако если $M$ сначала деформировать с помощью подходящего невырожденного проективного преобразования, то $M'$ будет симплициальным $d$-многогранником (рис. 29). Так как $F$ — симплекс, то число ребер $M'$ равно $2dn-d^2-d-2r-(d^2-d)/2 = (2n-d)d - (d^2+d)/2 - 2r$.

Так как число вершин $d$-многогранника $M'$ равно $2n-d$, то для $M'$ соотношение (4.3) также не имеет места. Аналогично, зеркально отображая $M'$ относительно гиперплоскости $H$, порождающей некоторую $(d-1)$-грань $F$, получаем симплициальный $d$-многогранник $M''$, для которого по-прежнему (4.3) не выполняется, и при этом правая часть отличается от требуемой на $4r$. Продолжая этот процесс, получаем противоречие с утверждением, что константа $k$ зависит только от $d$. Лемма 4.5 доказана.

Из леммы 4.5 вытекает следующий факт.

Теорема 4.6. *Гипотеза о нижней границе справедлива для ребер симплициального многогранника.*

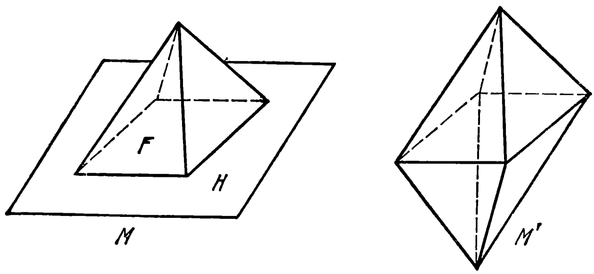



Рис. 29.

**5. Минимальное число граней симплициального многогранника.**

Лемма 4.7. *Если гипотеза о нижней границе справедлива для 1-граней (ребер) симплициального d-многогранника, то она верна для граней всех размерностей.*

Доказательство. Проведем индукцию по $d$. Ясно, что утверждение леммы верно для $d=3$. Предположим, что (4.2) имеет место для симплициального $(d-1)$-многогранника при $k=1$. Тогда оно справедливо и при $k=2, \ldots, d-2$. Пусть $M$ — симплициальный $d$-многогранник с $n$ вершинами. Пусть $x^i$ — произвольная вершина многогранника $M$. Пусть вершина $x^i$ образована пересечением $n_i\,(d-1)$-граней. В силу предположения индукции число $k-1$ граней в срезе вершины $x^i$ не меньше $\mu^s_{k-1}(d-1,\ n_i)$. Поэтому вершина $x^i$ инцидентна по крайней мере $\mu^s_{k-1}(d-1,\ n_i)$ $k$-граням многогранника $M$. Число инциденций вершин и $k$-граней многогранника $M$ равно

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^s_{k-1}(d-1,\ n_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n}\left[\binom{d-1}{k-1} - \binom{d}{k}(k-1)\right] =$$

$$= \binom{d-1}{k-1}\sum_{i=1}^{n} n_i - n\binom{d}{k}(k-1) \quad (4\ 4)$$

Из соотношения (4.1) при $k=1$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{n} n_i = 2f_1 \geqslant 2dn - d^2 - d$.

Подставляя это в равенство (4.4), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_{k-1}^{s}(d-1,\ n_i) \geqslant \binom{d-1}{k-1}(2dn-d^2-d)-n\binom{d}{k}(k-1)=$$
$$=2k\binom{d}{n}-k\binom{d}{n}+n\binom{d}{k}-\binom{d+1}{k+1}k(k+1)=$$
$$=\binom{d}{k}n(k+1)-\binom{d+1}{k+1}k(k+1).$$

С другой стороны, так как $M$ — симплициальный многогранник, то число инциденций вершин и $k$-граней равно $(k+1)f_k$. Поэтому

$$f_k \geqslant \binom{d}{k}n-\binom{d+1}{k+1}k, \qquad k=2,\ \ldots,\ n-2.$$

Лемма 4.7 доказана.

Теорема 4.8. *Минимальное число $k$-граней в классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ вершинами задается формулой*

$$\mu_k^s(d,\ n)=\begin{cases}(d-1)n-(d+1)(d+2) & \textit{при} \quad k=d-1,\\ \binom{d}{k}n-\binom{d+1}{k+1}k & \textit{при} \quad k\in N_{d-2}.\end{cases}$$

Доказательство. Объединяя утверждения теорем 4.3, 4.4, леммы 4.7 и теоремы 4.6 убеждаемся, что число $\mu_k^s(d,\ n)$ является нижней границей для значения $f_k(M)$ на классе симплициальных $d$-многогранников с $n$ вершинами.

Покажем, что эти границы достижимы. Для этого укажем простой $d$-многогранник с $n$ $(d-1)$-гранями, для которого неравенства (4.1), (4.2) выполняются как равенства. Таким многогранником является многогранник $M$, полученный из $d$-симплекса с помощью $n-d-1$ последовательных правильных отсеченных вершин. Теорема доказана.

### Задачи и дополнения

1 [11]. Если $k$-скелеты многогранников $M$ и $M'$ изоморфны при $k \geqslant [d/2]$, где $d=\dim M$, то $\dim M'=d$. Если $(d-2)$-скелеты многогранников $M$ и $M'$ изоморфны, то многогранники $M$ и $M'$ комбинаторно эквивалентны.

2. Связный $d$-комплекс $\mathcal{K}$ в $E_n$ $(1\leqslant d\leqslant n)$ назовем *простым*, если каждая его $i$-грань $(0\leqslant i\leqslant d)$ содержится ровно в $d-i+1$ различных $d$-гранях. Доказать, что $\mathcal{K}$ — простой $d$-комплекс тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}$ изоморфен полному граничному комплексу простого $(d+1)$-многогранника.

3 [11]. $d$-комплекс $\mathcal{K}$ называется *размерностно неопределенным*, если существуют два многогранника $M'$ и $M''$ такие, что $\mathcal{K}$ изоморфен $d$-скелетам обоих из них. Привести примеры размерностно неопределенных комплексов. Доказать, что:

1) $i$-скелет $d$-многогранника при $i\geqslant [d/2]$ не является размерностно неопределенным;

2) для каждого $i$ и $d$ $(1\leqslant i<[d/2])$ существует $d$-многогранник, $i$-скелет которого является размерностно неопределенным.

4. Пусть $M'$ и $M''$ два многогранника и пусть $\psi$ биекция между $\operatorname{vert} M'$ и $\operatorname{vert} M''$, обладающая свойством: множество $A\subset \operatorname{vert} M'$ порождает грань $F'$ многогранника $M'$ (в смысле $A=\operatorname{vert} F'$) тогда и только тогда, когда суще-

ствует грань $F''$ многогранника $M''$ такая, что $\psi(A)=\operatorname{vert} F''$. Доказать, что $M'\cong M''$.

5. Пусть $M'$ и $M''$ комбинаторно эквивалентные многогранники в $E_n$ и пусть $\varphi(F)$ — грань $M''$, соответствующая грани $F$ многогранника $M'$. Доказать, что существует аффинное преобразование $\alpha$ из $E_d$ такое, что $\alpha(F)=\varphi(F)$ для каждой грани $F$ многогранника $M'$.

6. $d$-многогранник $M$ является проективно единственным, если каждый $d$-многогранник $M'$ комбинаторно эквивалентный $M$, будет проективно эквивалентным $M$. С помощью диаграмм Гейла доказать, что 3-многогранник является проективно единственным тогда и только тогда, когда $M$ имеет не более 9 ребер.

7 [11]. С помощью диаграмм Гейла доказать, что для каждого $d$-многогранника с не более чем $d+3$ вершинами существует комбинаторно эквивалентный многогранник, все вершины которого в $E_d$ имеют рациональные координаты. Построить 8-многогранник с 12 вершинами, для которого не существует комбинаторно эквивалентного многогранника, все вершины которого в $E_d$ имеют рациональные координаты.

8. Справедливы следующие соотношения:

$$f_k\left(T_d^1\right)<f_k\left(T_d^2\right)<\ldots<f_k\left(T_d^k\right)=f_k\left(T_d^{k+1}\right)=\ldots=f_k\left(T_d^{[d/2]}\right),$$

где $k<[d/2]$, $f_{d-1}\left(T_d^{[d/2]}\right)=\left[(d+2)^2/4\right]$.

Если для $d$-многогранника $M$ с $d+3$ вершинами при $d=2n$ справедливо $f_k(M)=f_k(C(d,\ d+3))$, $k=n-1,\ \ldots,\ 2n-1$, то $M\cong C(d,\ d+3)$.

9 [6, 16]. С помощью диаграмм Гейла вывести следующую формулу для числа симплициальных $n$-смежностных $(2n+1)$-многогранников с $2n+4$ вершинами:

$$2^{[(n-1)/2]}+\frac{1}{4(n+2)}\sum\varphi(h)\,2^{(n+2)/h},$$

где суммирование ведется по всем нечетным $h$, которые делят $n+2$, $\varphi(h)$ — функция Эйлера.

Убедиться, что число произвольных (не обязательно симплициальных) $n$-смежностных $(2n+1)$-многогранников с $2n+4$ вершинами равно

$$\frac{1}{4}\left\{(5+(-1)^n)\,3^{[(n+1)/2]}+6\right\}+\frac{1}{4(n+2)}\sum\varphi(h)\left(3^{(n+2)/h}-1\right),$$

где суммирование ведется по тем же $h$, что и в предыдущей формуле. Для доказательства приведенных формул следует убедиться в том, что на диаграмме Гейла $n$-смежностных $(2n+1)$-многогранников с $2n+4$ вершинами сумма меток точек, лежащих на концах диаметра, не более двух, а точки на окружности $S^2$ расположены равномерно.

10. Упростить выражения для числа $k$-граней циклического многогранника для частных значений $k$, например, убедиться, что

$$f_m(C(d,\ n))=\begin{cases}\dbinom{n}{m+1}-\dbinom{n-m-2}{m+1} & \text{при}\quad d=2m+1,\\[2mm] \dbinom{n}{m+1}-\dbinom{n-m-2}{m} & \text{при}\quad d=2m;\end{cases}$$

$$f_{d-1}(C(d,\ n))=\begin{cases}\dbinom{n-m}{m}\dfrac{n}{n-m} & \text{при}\quad d=2m,\\[2mm] 2\dbinom{n-m-1}{m} & \text{при}\quad d=2m+1,\end{cases}$$

или

$$f_{d-1}(C(d,\ n))=\binom{n-[(d+1)/2]}{n-d}+\binom{n-[(d+2)/2]}{n-d}.$$

11. Все $(d-1)$-грани циклического $d$-многогранника $C(d, n)$ можно упорядочить в такую последовательность $F_0, F_1, \ldots, F_u$, $u=f_{d-1}(C(d, n))$, что $F_{i-1}\cap F_i$ — $(d-2)$-грань $C(d, n)$.

12. Проверить, что $\mu_1(2, n)=n$, если $n\geqslant 3$.

13. Используя характеризацию $f$-векторов 3-многогранников, убедиться, что

$$\mu_1(3, n)=[(3n+1)/2], \quad \mu_2(3, n)=[(n+3)/2], \qquad n\geqslant 4.$$

14. Указать симплициальный $d$-многогранник с $n$ вершинами, для которого $f_k(M)=\mu_k^s(d, n)$, где $n>d>k>0$.

15 [12]. Построить $d$-полиэдр с $n$ гранями и $n-d+1$ вершинами и доказать, что $n-d+1$ есть нижняя граница для числа вершин у всех простых полиэдров $P$ размерности $d$ с $n$ гранями ($\operatorname{vert} P\neq\varnothing$). Термин «простой» полиэдр $P$ означает, что каждая вершина $P$ образована пересечением $d$ $(d-1)$-граней. Минимальное число вершин у простых $d$-полиэдров с $n$ $(d-1)$-гранями и $v$ неограниченными $(d-1)$-гранями равно $(v-n-2)(d-1)+2$.

16. *Абстрактным многогранником* будем называть полуматроид $(\mathcal{F}, \mathcal{V})$, обладающий свойством: для каждой пары вершин $V^*$, $V^{**}$ существует последовательность вершин $V_1=V^*, V_2, \ldots, V_k=V^{**}$ таких, что $|V_i\cap V_{i+1}|=d-1$, $V^*\cap V^{**}\subset V_i$ $\forall i\in N_{k-1}$.

*Графом полуматроида* назовем граф с множеством вершин, взаимно однозначно соответствующих вершинам полуматроида; при этом две вершины $V'$, $V''$ смежны тогда и только тогда, когда $|V'\cap V''|=d-1$.

*Абстрактной гранью* размерности $d-k$, $k\leqslant d$, полуматроида $(\mathcal{F}, \mathcal{V})$ назовем пару $(\mathcal{F}(w), \mathcal{V}(w))$, где $w$ — произвольное $k$-подмножество множества $\mathcal{F}$,

$$\mathcal{V}(w)=\{\bar{V}\colon\ \bar{V}\subset\mathcal{F}\setminus w,\ \bar{V}\cup w\in\mathcal{V}\},\quad \mathcal{F}(w)=\bigcup_{\bar{V}\in\mathcal{V}(w)}\bar{V}.$$

Доказать, что полуматроид является абстрактным многогранником тогда и только тогда, когда граф каждой его грани связный.

17. Гипотеза о максимальном диаметре для абстрактных многогранников сформулирована в [6]: $\Delta_a(d, n)\leqslant n-d$. В [5, 6] доказано, что гипотеза верна при $\Delta_a(2, n)=[n/2]$. Теорему 2.5 из гл. II можно перенести на случай абстрактных многогранников. Для произвольных комплексов гипотеза о максимальном диаметре не верна. Контрпример построен в [22].

18. Привести примеры абстрактных $d$-многогранников, не реализуемых простыми $d$-многогранниками. Показать, что все абстрактные $d$-многогранники над $d+k$, $k\leqslant 3$, символами реализуемы.

19. Число попарно комбинаторно не эквивалентных многогранников размерности $d$ $(d\geqslant 2)$ радиуса 2 определяется формулой

$$[d/2]+\sum_{i=0}^{d-3}[(d-i)/2]+\sum_{n=d+4}^{2d+1}\ \sum_{j=0}^{2d-n+1}\gamma_{n-d-1}(d-j),$$

где $\gamma_{n-d-1}(d-j)$ есть количество разбиений числа $d-j$ на $n-d-j$ положительных слагаемых. Этот результат получен А. Н. Исаченко.

ГЛАВА IV

# ЦЕЛЫЕ ТОЧКИ ПОЛИЭДРОВ

Всякий вектор $x \in E_n$, у которого все координаты — целые числа, будем называть *целочисленным вектором* или *целочисленной точкой*. Множество всех целочисленных точек в $E_n$ обозначаем через $Z_n$ и называем *целочисленной решеткой* [9].

С распределением точек целочисленной решетки в полиэдрах связано несколько классических проблем. Первая проблема заключается в отыскании критерия существования целочисленных решений системы линейных неравенств. В случае существования точек целочисленной решетки в полиэдре возникает задача оценки их числа и поиска условий равномерного распределения. Классические теоремы Кронекера и Минковского дают частичное решение этой проблемы. Если первая проблема в основном составляет предмет геометрии чисел и математической кристаллографии и лишь отчасти связана с качественной теорией целочисленного программирования [2], то следующие две проблемы непосредственно связаны с целочисленным программированием.

Вторая проблема охватывает комплекс задач, связанных с построением выпуклых оболочек целочисленных точек полиэдров. Главная из них состоит в разработке методов построения систем линейных неравенств, задающих выпуклые оболочки целочисленных точек для конкретных классов полиэдров, что в конечном итоге позволяет сводить задачи целочисленного линейного программирования к задачам линейного программирования. Далее, с помощью теорем двойственности линейного программирования выводятся важные комбинаторные и графовые теоремы.

Третья проблема заключается в описании систем линейных неравенств, задающих полиэдры с целочисленными точками в качестве вершин. Заметим, что не каждый комбинаторный тип многогранника можно задать в $E_n$ так, чтобы все его вершины были целочисленными точками (см. задачу 30 гл. I).

Вторая и третья проблемы в известном смысле двойственны друг к другу. Если в одной из них надо по фиксированной системе неравенств установить целочисленность вершин многогранника решений этой системы, то в другой необходимо по заданным целочисленным точкам многогранника найти «явный» вид линейных неравенств, задающих многогранник. Именно двумя последними проблемами мы и занимаемся в четвертой и пятой главах.

## § 1. Целочисленные решения систем линейных неравенств

В параграфе дается алгебраическая характеризация множеств, образованных пересечением полиэдров и целочисленной решетки. Символом $W_Z$ обозначаем множество целочисленных точек множества $W$.

**1. Полиэдральная полугруппа.** Целочисленная решетка $Z_n$ образует полугруппу относительно сложения.

Определение 1.1. Полугруппу $K_Z$, составленную из целочисленных точек полиэдрального конуса $K=\{x \in E_n\colon\ Ax \geqslant 0\}$, называем *полиэдральной*. Полугруппа целочисленных векторов называется *конечнопорожденной*, если $\mathfrak{B}=\left\{x\colon\ x=\sum\limits_{j=1}^{t} z_j q^j,\ z_j \in Z^+\ \ \forall j \in N_t\right\}$. Здесь $q^1, \ldots, q^t$ — заданные целочисленные векторы, называемые *порождающим множеством полугруппы* $\mathfrak{B}$, которая в этом случае обозначается символом $\mathfrak{B}(q^1, \ldots, q^t)$.

Не всякая полиэдральная полугруппа является конечнопорожденной. Например, полугруппа целочисленных точек в $E_2^+$, которые расположены в первой четверти между двумя полупрямыми, выходящими из начала координат и имеющими иррациональные угловые коэффициенты, не является конечнопорожденной. Обратно, не каждая конечнопорожденная полугруппа является полиэдральной (см. задачу 5).

Излагаемые далее результаты вытекают из теоремы Гильберта о базисе многочленов [46]. Эти результаты неоднократно переоткрывались и обобщались [15, 16, 37, 49, 65]. Доказательства большинства из приводимых теорем принадлежат В. Н. Шевченко и Н. Н. Иванову [8, 20, 22].

Теорема 1.1. *Пусть $K=\{x \in E_n\colon\ Ax \geqslant 0\}$ — полиэдральный конус, и пусть $A$ — матрица с рациональными элементами. Тогда полиэдральная полугруппа $K_Z$ является конечнопорожденной.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $A$ — целочисленная матрица. Согласно теореме 1.10 из гл. I о представлении полиэдрального конуса имеем $K=\operatorname{kon}(q^1, \ldots, q^t)$, причем в силу целочисленности элементов матрицы $A$, образующие $q^1, \ldots, q^t$ конуса можно выбрать так, чтобы они имели целочисленные компоненты. Покажем, что множество $\{q^1, \ldots, q^t\}$, дополненное целочисленными точками полуоткрытого «параллелепипеда» $Q=\left\{y \in E_n\colon\ y=\sum\limits_{i=1}^{t} \lambda_i q^i,\ 0 \leqslant \lambda_i < 1 \quad \forall i \in N_t\right\}$, является порождающим множеством полугруппы $K_Z$. Возьмем произвольный элемент $x \in K_Z$. Так как $q^1, \ldots, q^t$ — образующие конуса $K$, то существуют такие $\lambda_i \geqslant 0$ $\forall i \in N_t$, что $x = \sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i$. Рассмотрим вектор

$$x' = \sum_{i=1}^{t} \{\lambda_i\} q^i = x - \sum_{i=1}^{t} [\lambda_i] q^i.$$

Тогда $x' \in Q_Z$. Справедливо соотношение $x = x' + \sum_{i=1}^{t} [\lambda_i] q^i$, которое показывает, что любой элемент из $K_Z$ можно представить в виде линейной комбинации с целыми неотрицательными коэффициентами векторов $q^1, \ldots, q^t$ и целочисленного вектора из «параллелепипеда» $Q$. Легко видеть, что множество $Q$ содержит конечное число целочисленных точек. Итак, $\{q^1, \ldots, q^t\} \cup Q_Z$ — конечное порождающее множество полугруппы $K_Z$. Теорема доказана.

Перенесем результаты теоремы 1.1 на случай неоднородной системы линейных неравенств.

Теорема 1.2. *Пусть $M = \{x \in E_n^+ \colon Ax \geqslant b\}$ — полиэдр, и пусть $A$ — матрица с рациональными элементами. Тогда существует такое конечное множество целочисленных векторов $G$ и конечнопорожденная полугруппа $\mathfrak{B}(p^1, \ldots, p^s)$, что любую целочисленную точку полиэдра можно представить в виде*

$$x = g + \sum_{j=1}^{s} z_j p^j, \qquad z_j \in Z^+ \quad \forall j \in N_s, \tag{1 1}$$

*где $g \in G$.*

Доказательство. Как обычно в таких ситуациях, если $b \neq 0$, то превратим неоднородную систему $Ax \geqslant b$ в однородную:

$$(A, \ -b)\,\bar{x} \geqslant 0, \qquad \bar{x} \in Z_{n+1}, \tag{1 2}$$

$$x_{n+1} = 1. \tag{1.3}$$

Множество целочисленных векторов $\bar{x}$, удовлетворяющих условию (1.2), образует полиэдральную полугруппу, которая согласно теореме 1.1 имеет конечное порождающее множество $\{\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^k\}$. Это означает, что любую целочисленную точку конуса, заданного условиями $(A, \ -b)\,\bar{x} \geqslant 0$, можно представить в виде

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{k} z_j \bar{q}^j, \qquad z_j \in Z^+ \quad \forall j \in N_k, \tag{1.4}$$

и обратно, любой вектор вида (1.4) является решением системы (1.2). Для того чтобы получить множество решений системы (1.2), (1.3), следует учесть ограничение

$$x_{n+1} = \sum_{j=1}^{k} z_j q_{n+1}^j = 1, \tag{1.5}$$

где $q^j_{n+1}$ — $(n+1)$-я компонента вектора $q^j$. Так как $q^j_{n+1} \geqslant 0$ $\forall j \in N_k$, то из (1.5) следует, что коэффициенты $z_j$ при $q^j_{n+1} = 0$ принимают произвольные неотрицательные целочисленные значения, при $q^j_{n+1} = 1 - z_j = 1$, но только для одного такого $j$, все остальные $z_j = 0$. Из порождающего множества $\{\bar{q}^1, \ldots, \bar{q}^k\}$ возьмем все векторы с компонентой $q^j_{n+1} = 0$ или 1. Пусть

$$G = \{(q^j_1, \ldots, q^j_n)\colon\ q^j_{n+1} = 1 \quad \forall j \in N_k\}; \tag{1.6}$$

$$P = \{(q^j_1, \ldots, q^j_n)\colon\ q^j_{n+1} = 0 \quad \forall j \in N_k\}. \tag{1.7}$$

Тогда любая целочисленная точка полиэдра $M$ при условии, что $b \neq 0$, а множества $G$ и $P = \{p^1, \ldots, p^t\}$ определены соотношениями (1.6), (1 7), имет вид (1.1). Отметим, что $P$ — порождающее множество полиэдральной полугруппы $K_Z = \{x \in Z^+_n\colon\ Ax \geqslant 0\}$. В случае, если $b = 0$, то $G = \varnothing$, и по теореме 1.1 имеем $x = \sum_{j=1}^{t} z_j p^j$, $z_j \in Z^+$ $\forall_j \in N_t$ для каждой точки $x \in M_z$.

Следствие 1.3. *Пусть* $\mathfrak{B}_g = \left\{x\colon\ x = g + \sum_{j=1}^{t} z_i p^j, z_j \in Z^+ \forall j \in \in N_t\right\}$. *В предположениях теоремы* 1.2 *имеет место равенство* $M_z = \bigcup_{g \in G} \mathfrak{B}_g$.

Замечания. 1. Целочисленные точки многогранника

$$M(A, b) = \{x \in E^+_n\colon\ Ax = b\}$$

также имеют параметрическое представление в форме (1.1). Для доказательства этого факта достаточно множество $M(A, b)$ задать в следующем виде: $\{x \in E^+_n\colon\ Ax \geqslant b, \quad -Ax \geqslant -b\}$.

2. Если элементы матрицы $A$ и компоненты вектора $b$ — действительные числа, то теорема 1.2 остается справедливой с учетом того, что множества $G$ и $P$ могут быть бесконечными.

3. Теорема 1.2 следует также из результатов Пресбургера [65], касающихся вопросов разрешимости арифметических систем.

**2. Выпуклые оболочки целых точек полиэдров.**

Теорема 1.4. *Пусть* $M = \{x \in E^+_n\colon\ Ax \geqslant b\}$ — *полиэдр и пусть* $A$ — *матрица с рациональными элементами. Тогда, если множество целочисленных точек полиэдра* $M$ *непусто, то их выпуклая оболочка является полиэдром.*

Если $M$ — многогранник, то в силу конечности $M_Z$ теорема 1.4 будет верна даже при действительных элементах матрицы $A$. Если же $M$ — неограниченное множество, и среди элементов матрицы $A$ есть иррациональные, то, вообще говоря, множество $M_Z$ нельзя описать конечной системой неравенств. Например, множество $\operatorname{conv}\{(x, y) \in Z_2\colon\ x - \sqrt{2}\,y \geqslant 0,\ x \geqslant -1\}$ не является полиэдром.

Доказательство теоремы 1.4. Согласно следствию 1.3 имеем $M_Z=\bigcup_{g\in G}\mathfrak{B}_g$. Поэтому $\operatorname{conv} M_Z=\operatorname{conv}\bigcup_{g\in G}\mathfrak{B}_g=$ $=\operatorname{conv}\bigcup_{g\in G}\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$. Покажем, что множество $\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$ совпадает с множеством точек $x\in E_n$, представимых в форме

$$x=g+\sum_{j=1}^{t}\lambda_j p^j,\qquad \lambda_j\geqslant 0\quad \forall j\in N_t. \tag{1.8}$$

Ясно, что каждая точка $x\in\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$ представима в виде (1.8). Пусть теперь $x$ имеет вид (1.8). Тогда $x=t^{-1}\sum_{j=1}^{t}x^j$, где $x^j=g+$ $+t\lambda_j p^j$ $\forall j\in N_t$. Убедимся в том, что $x^j\in\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$ $\forall j\in N_t$. Для этого рассмотрим точки $\bar{x}^j=g+t[\lambda_j]p^j$, $\bar{\bar{x}}^j=g+t([\lambda_j]+1)p^j$, принадлежащие $\mathfrak{B}_g$. Очевидно, что $x^j=(1-\{\lambda_j\})\bar{x}^j+\{\lambda_j\}\bar{\bar{x}}^j$. Итак, $x^j\in\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$, что влечет $x\in\operatorname{conv}\mathfrak{B}_g$. Поэтому

$$\operatorname{conv} M_Z=\Big\{x\colon\ x=\sum_{g\in G}\mu_g g+\sum_{j=1}^{t}\lambda_j p^j,\quad \sum_{g\in G}\mu_g=1,\quad \mu_g\geqslant 0,\ \lambda_j\geqslant 0\ \ \forall j\in N^t\Big\},$$

а это, в силу теоремы 3.1 из гл. I, означает, что $\operatorname{conv} M_Z$ есть полиэдр. Теорема доказана.

Заметим, что несмотря на конструктивность доказательства теоремы 1.4, эффективных алгоритмов для нахождения системы неравенств, задающих $\operatorname{conv} M_Z$, пока неизвестно.

**3. Разрешимость линейных диофантовых уравнений.** Рассмотрим один из методов решения систем линейных уравнений в целых числах, основанный на приведении матрицы $A$ к нормальной диагональной форме [68].

Определение 1.2. Целочисленная матрица $D=\|d_{ij}\|_{m\times n}$ называется *нормальной диагональной*, если для некоторого $r\leqslant$ $\leqslant\min(m,n)$ диагональные элементы $d_{ii}$ — положительные целые числа ($\forall i\in N_r$), а остальные элементы $d_{ij}=0$, причем

$$d_{i+1,\,i+1}\equiv 0\,(\operatorname{mod} d_{ii})\qquad \forall i\in N_{r-1}, \tag{1.9}$$

т. е. каждый элемент $d_{jj}$ делит все $d_{ii}$, $j>i$.

Теорема 1.5. *Для каждой целочисленной матрицы $A$ существуют унимодулярные матрицы $U$ и $V$ такие, что матрица $D=UAV$ является нормальной диагональной, причем нормальная диагональная форма $D$ матрицы $A$ единственна.*

Доказательство. Для доказательства существования нормальной диагональной формы матрицы $A$ опишем метод ее построения с помощью последовательности преобразований трех видов (называемых *элементарными преобразованиями строк*): а) перестановка строк, б) прибавление к одной строке другой, умноженной на целое число, в) умножение строки на $-1$. Аналогичные преобразования над столбцами назовем *элементарными преобразованиями столбцов.*

Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы можно осуществить, умножая ее справа (слева) на соответствующую *элементарную* матрицу $U$, представляющую собой результат такого же элементарного преобразования над единичной матрицей. Отметим, что определитель элементарной матрицы равен $\pm 1$, т. е. эта матрица является унимодулярной.

Метод построения нормальной диагональной формы матрицы $A$ состоит из двух этапов.

На первом этапе за $r$ шагов, $r = \operatorname{rang} A$, диагонализируем матрицу $A$. Опишем первый шаг, на котором необходимо определить такие унимодулярные матрицы $U_1$ и $V_1$, что

$$U_1 A V_1 = \left\| \begin{array}{c|c} b_{11} & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{array} \right\|. \tag{1.10}$$

С помощью элементарных преобразований типа а) добьемся, чтобы элемент $a_{11}$ был наименьшим по абсолютной величине среди всех ненулевых элементов в первой строке и первом столбце. После последовательного вычитания 1-го столбца, умноженного на $\lambda_j = [a_{1j} / a_{11}]$, из $j$-го столбца, $j \neq 1$, и 1-й строки, умноженной на $\lambda_i = [a_{i1} / a_{11}]$ из $i$-й строки, $i \neq 1$, получим матрицу, в которой каждая компонента первого столбца и первой строки (кроме $a_{11}$) либо равна нулю, либо меньше $a_{11}$ по абсолютной величине. Процесс повторяем до тех пор, пока не получим матрицу вида (1.10). Пусть матрицы $P_1, \ldots, P_s$ и $Q_1, \ldots, Q_p$ отвечают проведенным элементарным преобразованиям строк и столбцов. Положим $U_1 = P_1, \ldots P_s$ и $V_1 = Q_1, \ldots Q_p$. Ясно, что матрица $U_1 A V_1$ имеет вид (1.10). Остальные шаги аналогичны. Следует заметить, что на каждом шаге этапа диагонализации матрицы $A$ мы, по существу, отыскиваем наибольший общий делитель элементов соответствующей строки и столбца. Пусть $\alpha_{1j}$ — наибольший общий делитель элементов первой строки матрицы $A$ (н. о. д. $(a_{11}, \ldots, a_{1n})$). Пусть $\alpha_{1j} = a_{1j} / \delta \ \forall j \in N_n$. Тогда существуют целые взаимно простые числа $\gamma_j$ такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j}\gamma_j = 1$, и существует унимодулярная матрица $V_1$, элементы первого столбца которой равны соответственно $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. Поэтому первая строка матрицы $AV_1$ имеет вид $(\delta, \delta\beta_{12}, \ldots, \delta\beta_{1n})$; если положим

$$V_2 = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & -\beta_{12} & \ldots & -\beta_{1,n-1} & -\beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{array} \right\|,$$

то в матрице $AV_1V_2$ первая строка будет иметь вид $(\delta, 0, \ldots, 0)$. Повторив описанные преобразования над строками полученной матрицы, построим матрицу вида (1.10).

На втором этапе нормализуем диагональную матрицу

$$B = \left\| \begin{array}{cccc|c} b_{11} & & & & \\ & b_{22} & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{rr} & \\ \hline 0 & & & & 0 \end{array} \right\|,$$

полученную на первом этапе, т. е. добиваемся, чтобы для матрицы $B$ было выполнено условие (1.9). Если некоторое число $b_{jj}$ не делит $b_{ii}$, $i > j$, т. е. $b_{ii} = \lambda b_{jj} + q$, $0 < q < b_{jj}$, то производим над столбцами и строками, имеющими номера $i$ и $j$, цепочку элементарных преобразований, которая для соответствующей $(2\times 2)$-подматрицы $B\{^{i,\, j}_{i,\, j}\}$ выглядит следующим образом:

$$\left\| \begin{matrix} b_{jj} & 0 \\ 0 & \lambda b_{jj} + q \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} b_{jj} & 0 \\ \lambda b_{jj} & \lambda b_{jj} + q \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} b_{jj} & -b_{jj} \\ \lambda b_{jj} & q \end{matrix} \right\| \to \left\| \begin{matrix} q & \lambda b_{jj} \\ -b_{jj} & b_{jj} \end{matrix} \right\|. \quad (1.11)$$

Полученную матрицу диагонализируем, как на первом этапе. В результате будем либо иметь диагональную матрицу $B'$ с $b'_{jj}$, делящим $b'_{ii}$, либо элемент $b'_{jj}$ будет меньше $q$ и тогда цепочку элементарных преобразований (1.11) повторяем. Процесс продолжаем пока не получим матрицу, для которой выполнено условие (1.9).

Таким образом, с помощью конечного числа элементарных преобразований находим нормальную диагональную матрицу $D$ и унимодулярные матрицы $U$ и $V$, отвечающие проведенным преобразованиям.

Установим инварианты элементарных преобразований, которые будут гарантировать единственность нормальной диагональной формы матрицы $A$.

Через $\Delta_\nu(A)$ обозначим наибольший общий делитель всех миноров $\nu$-го порядка матрицы $A$.

Лемма 1.6. *Пусть $D = UAV$, где $U, V$ — унимодулярные матрицы. Тогда $\Delta_\nu(A) = \Delta_\nu(D)$ $\forall \nu \in N_r$, $r = \operatorname{rang} A$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $D = UA$. Пусть $D_I^J$ — квадратная подматрица, причем $|I| = |J| = \nu$. Тогда согласно формуле Бине — Коши, $\det D_I^J = \sum \det U_J^{I'} \det A_{I'}^I$, где суммирование ведется по всем подмножествам $I' \subset N_m$ со свойством $|I'| = \nu$. Следовательно, $\Delta_\nu(A)$ делит $\det D_I^J$ для всех подмножеств $I$ и $J$ мощности $\nu$, откуда следует, что $\Delta_\nu(A)$ делит $\Delta_\nu(D)$. Далее, так как $A = U^{-1}D$, то $\Delta_\nu(D)$ делит $\Delta_\nu(A)$. Следовательно, $\Delta_\nu(A) = \Delta_\nu(D)$. Лемма доказана.

Единственность нормальной диагональной формы $D$ матрицы $A$ следует из того, что в силу леммы 1.6 ее элементы однозначно выражаются через наибольшие общие делители $\Delta_\nu(A)$ по следующим формулам: $d_{11}=\Delta_1(A)$, $d_{ii}=\Delta_i(A)/\Delta_{i-1}(A)$, $i=2, \ldots, r$.

Теорема 1.5 полностью доказана.

С помощью нормальной диагональной формы матрицы $A$ получим общий вид целочисленных решений системы

$$Ax=b, \quad A\in Z_{m,n}, \quad b\in Z_m. \tag{1.12}$$

Для этого умножим систему (1.12) слева на унимодулярную матрицу $U$, а затем сделаем замену переменных $x=Vy$; в результате получим систему

$$Dy=Ub. \tag{1.13}$$

Так как $V$ — унимодулярная матрица, то аффинное преобразование $x=Vy$ взаимно однозначно отображает множество целочисленных решений системы (1.13) на множество целочисленных решений системы (1.12). Поэтому для разрешимости в целых числах системы (1.12) необходимо и достаточно выполнение условия: $d_{ii}$ делит $i$-ю компоненту $(Ub)_i$ вектора $Ub$. С учетом леммы 1.6 и теоремы 1.5 получаем следующий критерий.

Теорема 1.7. *Система линейных уравнений* (1.12) *имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда* $\Delta_\nu(A)=\Delta_\nu\|A, b\|$ $\forall\nu\in N_r$.

Пусть $R=N_r$. Тогда из системы (1.13) определим вектор $y_R^0=(y_1^0, \ldots, y_r^0)$, где $y_i^0=(Ub)_i/d_{ii}$ $\forall i\in N_r$. Целочисленные решения системы (1.12) имеют следующий общий вид: $x=V^R y_R^0 + V^{\bar{R}} y_{\bar{R}} = x^0 + V^{\bar{R}} y_{\bar{R}}$, где $x^0=V^R y_R^0$ — частное целочисленное решение системы (1.12), и $V^{\bar{R}} y_{\bar{R}}$ — общее решение однородной системы $Ax=0$, зависящее от $n-r$ целочисленных параметров $y_{\bar{R}}=(y_{r+1}, \ldots, y_n)$. Итак, множество целочисленных точек полиэдра $M(A, b)$ находится во взаимно однозначном соответствии $y=Vx$ с множеством целочисленных точек полиэдра, заданного следующей системой неравенств:

$$V^{\bar{R}} y_{\bar{R}} \geqslant -x^0.$$

Заметим, что в последнее время были предложены эффективные (полиномиальные) алгоритмы для нахождения общего целочисленного решения системы уравнений с целочисленными коэффициентами; см., например, [4].

**4. Агрегация.** Задачу доказательства существования и поиска вектора $t\in E_m$ такого, что симплекс $T(t, A, b)=\{x\in E_n^+ : tAx=tb\}$ имеет те же целочисленные точки, что и многогранник $M(A, b)$, называют *проблемой агрегации.* Иными словами, по данной системе уравнений (1.12) с целыми коэффициентами нужно найти линейную комбинацию этих уравнений (*агрегирующее уравнение*), имеющую то же множество решений в неотрицательных целых числах, что и исходная система. Первые результаты, относящиеся к проблеме агрегации, получил еще в 1897 г. Мэтьюз [56]. Интерес к этой проблеме возрос в связи с возможностью сведéния задачи целочисленного линейного программирования к задаче о рюкзаке [7,62]. Полностью проблема агрегации была решена в [3,21].

Теорема 1.8. *Если* $\operatorname{kon} A$ — *острый конус, то существует такой вектор* $t \in Z_m$, *что* $M_Z(A,\ b) = T_Z(t,\ A,\ b)$.

Отметим, что для всякого $t \in E_m$ справедливо включение $M_Z(A,\ b) \supseteq T_Z(t,\ A,\ b)$. Противоположное включение доказывается с использованием следующего результат.

Лемма 1.9. *Для выполнения равенства* $M_Z(A,\ b) = T_Z(t,\ A,\ b)$ *необходимо и достаточно, чтобы гиперплоскость* $H = \{u \in E_m\colon tu = tb\}$ *не содержала точек* $u \in \mathfrak{B}(A)$, *кроме, может быть,* $b$.

Доказательство леммы. Пусть существует такая точка $u^0$, что $u^0 \neq b$, но $u^0 \in H$ и $u^0 \in \mathfrak{B}(A)$. Поскольку $u^0 \in \mathfrak{B}(A)$, то существует $x \in M_Z(A,\ u^0)$, причем $x \notin M_Z(A,\ b)$, так как $u^0 \neq b$. С другой стороны, $x \in T_Z(t,\ A,\ b)$, так как $M_Z(A,\ u^0) \subseteq T_Z(t,\ A,\ u^0)$ и $u^0 \in H$.

Если же существует вектор $y$ такой, что $y \notin M_Z(A,\ b)$, но $y \in T_Z(t,\ A,\ b)$, то построим вектор $v = Ay$. Тогда $v \neq b$, $v \in \mathfrak{B}(A)$, $tb = (tA)\,y = t\,(Ay) = tv$. Лемма доказана.

Вместо доказательства теоремы рассмотрим некоторые из возможных методов агрегации. Согласно лемме 1.9 для этого необходимо выявить такие уравнения $tu = tb$, которые на $\mathfrak{B}(A)$ имеют единственное целочисленное решение $u = b$. Такие уравнения строить довольно трудно, поэтому обычно указывают уравнения, которые имеют единственное целочисленное решение на некотором множестве $\Omega \supset \mathfrak{B}(A)$. Чаще всего в качестве $\Omega$ берется решетка $Z_n^+$.

Практически все методы агрегации основаны на двух следующих принципах, идею которых поясним на примере агрегации двух уравнений.

Принцип первый. Пусть н. о. д. $(t_1,\ t_2) = 1$ и $t_1$ не делит $y_2(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j - b_2$ ни при каком $x \in Z_n^+$, а $t_2$ не делит $y_1(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j - b_1$ ни при каком $x \in Z_n^+$. Тогда уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} (t_1a_{1j} + t_2a_{2j})\,x_j = t_1b_1 + t_2b_2 \tag{1.14}$$

эквивалентно на $Z_n^+$ системе:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad i = 1,\ 2. \tag{1.15}$$

Принцип второй. Пусть н. о. д. $(t_1,\ t_2) = 1$, $t_1 > \sup\{y_2(x)\colon x \in Z_n^+\}$, $t_2 > \sup\{y_1(x)\colon x \in Z_n^+\}$. Тогда (1.14) и (1.15) эквивалентны на $Z_n^+$.

Из теоремы 1.8 можно получить следующий дискретный аналог леммы Фаркаша — Минковского.

Следствие 1.10. *Если* $\operatorname{kon} A$ — *острый конус, то* $M_Z(A, b) \neq \varnothing$ *тогда и только тогда, когда* $tb \in T_Z(t, A, b)\ \forall t$.

Понятно, что ограниченность множества $M(A, b)$ существенна для того, чтобы агрегация была возможна. Действительно, если $M_Z(A, b) \neq \varnothing$, $\operatorname{rang} A \geqslant 2$ и конус $\operatorname{kon} A$ не является острым, то, как показано в [21], не существует вектора $t \in Z_m$ такого, что $M_Z(A, b) = T_Z(t, A, b)$.

Естественно, что дополнительная информация об области значений функций $y_i(x)$ позволяет несколько уменьшить коэффициенты $t_1$, $t_2$. Тем не менее, все известные способы агрегации приводят к быстрому росту от $m$ коэффициентов агрегирующего уравнения. Следующая теорема показывает закономерность этого явления.

Теорема 1.11. *Для всяких* $m, d \in Z^+$, $m \geqslant 2$ *существует такая система* (1.12), *что любое агрегирующее уравнение имеет* $m$ *коэффициентов, каждый из которых не меньше* $(d+1)^{m-1}$.

Доказательство. Пусть система (1.12) обладает свойством: существует $m$ линейно независимых столбцов, например, $A^1, \ldots, A^m$, таких, что $b = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j A^j$, $\lambda_j \geqslant d$, $\lambda_j \in Z^+$ $\forall j \in N_m$.

Покажем, что в этом случае для коэффициентов $\alpha_j = \sum\limits_{i=1}^{m} t_i a_{ij}$ агрегирующего уравнения справедливы соотношения

$$\alpha_j \geqslant \prod_{i \neq j} (\lambda_i + 1) \geqslant (d+1)^{m-1} \quad \forall j \in N_m. \tag{1.16}$$

Так как система $\sum\limits_{j=1}^{m} A^j x_j = b$ имеет единственное решение $(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m)$, то и уравнение

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = \alpha_0 \tag{1.17}$$

также должно иметь единственное целочисленное решение $(\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_m)$. Покажем, что это возможно лишь в случае, когда справедливо неравенство (1.16). Предположим противное, — что нашелся такой номер $k$, для которого $\alpha_k < \prod\limits_{i \neq k} (\lambda_i + 1)$. Докажем, что тогда уравнение (1.17) имеет целочисленное решение, отличное от $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$. Для всякой целочисленной точки параллелепипеда $H = \{(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)\colon 0 \leqslant y_i \leqslant \lambda_i\}$ в $E_{n-1}$ найдем целые числа $h(y)$ и $r(y)$ такие, что

$$\sum_{i \neq k} \alpha_i y_i = h(y)\alpha_k + r(y), \qquad r(y) \leqslant \alpha_k - 1.$$

Так как $|H_Z|=\prod\limits_{i\neq k}(\lambda_i+1)$, а функция $r(y)$ принимает на этих точках не более $\alpha_k$ различных значений, то найдутся $y'\in H_Z$, $y''\in H_Z$ такие, что $y'\neq y''$, но $r(y')=r(y'')$. Откуда

$$\sum_{i\neq k}\alpha_i y_i'=h(y')\alpha_k+\sum_{i\neq k}\alpha_i y_i''-h(y'')\alpha_k.$$

Предположим для определенности, что $h(y')\geqslant h(y'')$. Нетрудно видеть, что $q=(\lambda_1-y_1'+y_1'', \ldots, \lambda_{k-1}-y_{k-1}'+y_{k+1}'', \lambda_k+h(y')-h(y''), \lambda_{k+1}-y_{k+1}'+y_{k+1}'', \ldots, \lambda_m-y_m'+y_m'')$ — решение уравнения (1.17) и $q\neq p$. Полученное противоречие доказывает теорему.

## § 2. Условия целочисленности полиэдра

В этом параграфе рассматриваем проблему распознавания свойства целочисленности координат всех вершин полиэдра по его алгебраическому описанию. Полиэдры, у которых все вершины имеют целые координаты, называются *целочисленными*. Проблема описания систем линейных неравенств, задающих целочисленные полиэдры, до сих пор не решена. Проще оказалась задача описания классов матриц ограничений, для которых полиэдр является целочисленным при любом целочисленном векторе правых частей. Приведем такие условия целочисленности вершин полиэдров в терминах унимодулярных матриц.

**1. Критерий Данцига — Вейнотта.** Первый критерий целочисленности полиэдра был получен Гофманом и Краскалом [47]. С целью упрощения доказательств мы начнем изложение с критерия, предложенного Данцигом и Вейноттом [72].

Теорема 2.1. *Пусть $A\in Z_{m,n}$. Для целочисленности полиэдра*

$$M(A,\ b)=\{x\in E_n\colon\ Ax=b,\ x\geqslant 0\}$$

*при любом векторе $b\in Z_m$ необходима и достаточна унимодулярность матрицы $A$.*

Доказательство. Достаточность. Каждая вершина (базисное допустимое решение) $x=(x_1, \ldots, x_n)$ многогранника $M(A, b)$ однозначно определяется заданием индексов $j_1, \ldots, j_m$ базисных переменных (без ограничения общности считаем, что ранг матрицы $A$ равен $m$). Пусть $B$ — допустимый базис, содержащий столбцы с номерами $j_1, \ldots, j_m$. Тогда компоненты $x_B=(x_{j_1}, \ldots, x_{j_m})$ допустимого базисного решения $x$ связаны с базисом $B$ соотношением $Bx_B=b$. По условию теоремы $\det B=\pm 1$, а $b$ — целочисленный вектор. Поэтому по правилу Крамера получаем, что $x_B$ — целочисленный вектор. Но поскольку остальные компоненты вектора $x$ равны нулю, $x$ — целочисленная вершина.

Необходимость. Требуется доказать, что если $B$ — базис и $x_B$ — целочисленный вектор, то $\det B=\pm 1$. Пусть вектор $y\in Z_m$

и обладает свойством

$$y+B^{-1}e_i \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Рассмотрим систему

$$Az=b^0, \qquad b^0=By+e_i. \tag{2.2}$$

Поскольку $B$ — базис матрицы $A$, то система (2.2) совместна. Базисное решение системы (2.2) с ненулевыми компонентами $z_B = B^{-1}(By+e_i)=(y+B^{-1}e_i)$ в силу (2.1) неотрицательно и, следовательно, является вершиной многогранника $M(A, b^0)$. По предположению, многогранник $M(A, b)$ целочислен при любом целом $b$, в том числе и при $b=b_0$. Поэтому $z_B$ — целочисленный вектор. Так как левая часть равенства $z_B - y = B^{-1}e_i$ — целочисленный вектор, то и вектор $B^{-1}e_i$, являющийся $i$-м столбцом матрицы $B^{-1}$, целочисленный. Итак, $B^{-1}$ — целочисленная матрица. Отсюда, поскольку определители матриц $B$ и $B^{-1}$ — целые числа, и $\det B \times \det B^{-1}=1$, $\det B=\pm 1$

Теорема 2.1 доказана.

Определение 2.2. Матрица называется *абсолютно унимодулярной*, если все ее ненулевые миноры равны либо 1, либо —1.

Теорема 2.3. *Пусть $A \in Z_{m,n}$. Многогранник*

$$M(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)=\{x \in E_n\colon\ b^1 \leqslant Ax \leqslant b^2,\ d^1 \leqslant x \leqslant d^2\}$$

*является целочисленным при любых векторах $b^1$, $b^2 \in Z_m$, $d^1$, $d^2 \in Z_n$ тогда и только тогда, когда матрица $A$ абсолютно унимодулярная.*

Теорема 2.3 вытекает из теоремы 2.1, если перейти от нормальной формы задания многогранника $M(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)$ к канонической, вводя фиктивные переменные, и воспользоваться очевидным утверждением: матрица $A$ является унимодулярной тогда и только тогда, когда абсолютно унимодулярна матрица $\|A,\ I_m\|$, где $I_m$ — единичная $(m \times m)$-матрица.

**2. $\alpha$-модулярные матрицы.**

Определение 2.4. Матрицу $A$ ранга $m$ назовем *$\alpha$-модулярной*, если все ее отличные от нуля миноры порядка $m$ равны $\pm\alpha$ ($\alpha$ — положительное число).

Следующий результат содержится в [13, 52].

Теорема 2.5 *Пусть $A$ — $\alpha$-модулярная матрица. Тогда необходимым и достаточным условием целочисленности полиэдра $M(A, b)$ является существование у него хотя бы одной целочисленной вершины.*

Необходимость условий теоремы очевидна. Прежде чем доказывать их достаточность, укажем некоторые свойства $\alpha$-модулярных матриц.

Лемма 2.6. *Следующие высказывания равносильны:*

(1) *$A$ — $\alpha$-модулярная матрица;*

(2) *$B^{-1}A$ — унимодулярная целочисленная матрица для любого базиса $B$ матрицы $A$;*

(3) $B^{-1}H$ — *абсолютно унимодулярная матрица для любого базиса $B$ матрицы $A$, где $H$ — подматрица, образованная столбцами матрицы $A$, не вошедшими в базис $B$;*

(4) *матрица $A$ представима в виде произведения невырожденной матрицы $D$ ($\det D = \alpha$) и унимодулярной матрицы $V$.*

Доказательство леммы. (2) $\Leftrightarrow$ (3). Матрица $B^{-1}A$ коэффициентов разложения столбцов матрицы $A$ по базису $B$ (после перестановки столбцов) имеет вид $(B^{-1}H, I_m)$, где $I_m$ — единичная $(m \times m)$-матрица. Поэтому утверждения (2) и (3) равносильны.

(1) $\Rightarrow$ (2). Прежде всего отметим, что если $B$ — базис $\alpha$-модулярной матрицы, то всякий элемент матрицы $B^{-1}A$ равен либо 0, либо $\pm 1$. Действительно, пусть $B = \| A^{j_1}, \ldots, A^{j_m} \|$ и пусть $A^j$ — произвольный внебазисный столбец. Тогда, решая систему уравнений

$$A^j = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A^{j_i},$$

получим $\lambda_i = -1, 0, 1$. Унимодулярность произвольного базиса $B^{-1} \| A^{j_1}, \ldots, A^{j_m} \|$ матрицы $B^{-1}A$ следует из соотношений

$$\det \| B^{-1}A^{k_1}, \ldots, B^{-1}A^{k_m} \| = \det B^{-1} \det \| A^{k_1}, \ldots, A^{k_m} \| = \pm 1,$$

справедливых в силу теоремы об умножении определителей и определения $\alpha$-модулярной матрицы.

(2) $\Rightarrow$ (4). Если $B^{-1}A$ — унимодулярная матрица, то, положив $D = B$, получим $A = DB^{-1}A = DV$, где $V = B^{-1}A$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Любой базис $B$ матрицы $A$, представимой в форме $A = DV$, имеет вид $\| DV^{j_1}, \ldots, DV^{j_m} \|$. В силу унимодулярности $V$ имеем $\det B = \det D \det \| V^{j_1}, \ldots, V^{j_m} \| = \det D$, т. е. $A$ — $\alpha$-модулярная матрица. Лемма доказана.

Для проверки свойства $\alpha$-модулярности матрицы $A$ достаточно убедиться в унимодулярности матрицы $B^{-1}A$ или абсолютной унимодулярности матрицы $B^{-1}H$ для любого базиса $B$ матрицы $A$. Как видно из доказательства леммы 2.6, если существует базис $B$ такой, что матрица разложения столбцов матрицы $A$ по базису $B$ — унимодулярная, то и для любого базиса $U$ матрицы $A$ $U^{-1}A$ — унимодулярная матрица.

Доказательство достаточности условий теоремы 2.5. Пусть $B$ — такой базис, что $(B^{-1}, b, 0)$ — целочисленная вершина полиэдра $M(A, b)$. Рассмотрим систему $Ax = b$ и систему, ей эквивалентную:

$$B^{-1}Ax = B^{-1}b. \tag{2.3}$$

В силу леммы 2.6 $B^{-1}A$ — целочисленная унимодулярная матрица а по условию теоремы $B^{-1}b$ — целочисленный вектор. Далее, в силу теоремы 2.1 все базисные решения системы (2.3) целочисленны. Отсюда вытекает целочисленность всех базисных решений системы $Ax = b$, т. е. целочисленность полиэдра $M(A, b)$.

Следствие 2.7. *Пусть $A$ — $\alpha$-модулярная матрица, и $B$ — произвольный ее базис. Тогда полиэдр $M(A, b)$ целочислен для всех таких векторов $b$, что $B^{-1}b$ — целочисленный вектор.*

Например, если расширенная матрица $\|A, b\|$ $\alpha$-модулярная, то $B^{-1}b$ — целочисленный вектор и, следовательно, $M(A, b)$ — целочисленный полиэдр.

**3. ($\pm 1$)-матрицы.** Матрицу $A$, элементы которой равны $\pm 1$, будем называть $(\pm 1)$-*матрицей* и обозначать $A_{\pm 1}$. Исследуем при каких значениях вектора $b$ полиэдр $M(A_{\pm 1}, b)$ будет целочисленным.

Будем говорить, что компоненты вектора $b = (b_1, \ldots, b_m)$ имеют *одинаковую четность*, если все они одновременно либо четные, либо нечетные, т. е. $b_1 \equiv b_2 \equiv \ldots \equiv b_m \pmod 2$.

Теорема 2.8. *Условие одинаковой четности компонент вектора $b$ является необходимым, а если $A_{\pm 1}$ — $2^{m-1}$-модулярная $(m \times n)$-матрица, то и достаточным для целочисленности полиэдра $M(A_{\pm 1}, b)$.*

Доказательство существенно использует следующую лемму, вытекающую из описанного в § 1 метода диагонализации матрицы.

Лемма 2.9. *Пусть $B_{\pm 1}$ — невырожденная $(m \times m)$-матрица, элементы которой равны $\pm 1$. Тогда существует такая унимодулярная $(m \times m)$-матрица $V$, что матрица $H = B_{\pm 1}V$ (эрмитова форма матрицы $B_{\pm 1}$) имеет вид: $h_{i1} = \pm 1$ $\forall i \in N_m$; $h_{ij} \equiv 0 \pmod 2$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_m$, $i \geqslant j$, $j \neq 1$; $h_{ij} = 0$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_m$, $i < j$.*

Доказательство теоремы 2.8. В силу унимодулярности матрицы $V$ для любого базиса $B$ система $Bx_B = b$ имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда система

$$Hy = b \tag{2.4}$$

имеет целочисленное решение. Связь между такими решениями устанавливается правилом $x_B = Vy$, $y = V^{-1}x_B$. Структура матрицы $H$, указанная леммой 2.9, требует для разрешимости системы (2.4) в целых числах одинаковой четности компонент вектора $b$.

Если $A$ — $2^{m-1}$-модулярная матрица, то $h_{ii} = \pm 2$ для всех $i > 2$. Поэтому в этом случае условие одинаковой четности компонент вектора не только необходимо, но и достаточно для разрешимости системы (2.4).

Следствие 2.10. *Если все элементы невырожденной матрицы $B$ порядка $m \geqslant 2$ равны $\pm 1$, то* $\det B \equiv 0 \pmod{2^{m-1}}$.

## § 3. Абсолютно унимодулярные матрицы

Понятно, что абсолютно унимодулярные матрицы могут иметь компонентами лишь числа 0, $+1$, $-1$. Класс всех $(m \times n)$-матриц с такими компонентами обозначим через $C_{m,n}$.

**1. Критерий абсолютной унимодулярности.**

Определение 3.1. Матрица называется *эйлеровой матрицей*, если сумма элементов в каждой ее строке и каждом ее столбце четна.

Теорема 3.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $A$ — *абсолютно унимодулярная матрица*;

(2) *для каждого вектора* $x$ *с компонентами* $0, \pm 1$ *существует вектор* $y$ *с компонентами* $0, \pm 1$ *такой, что*

$$y \equiv x \pmod 2, \tag{3.1}$$

$$A_i y = \begin{cases} 0, & \text{если } A_i x \equiv 0 \pmod 2, \\ \pm 1, & \text{если } A_i x \equiv 1 \pmod 2 \end{cases} \tag{3.2}$$

*для всех строк* $A_i$ *матрицы* $A$;

(3) *любая квадратная эйлерова подматрица матрицы* $A$ *вырожденная*;

(4) *любой минор матрицы* $A$ *равен либо нулю, либо нечетному числу*;

(5) *для произвольной невырожденной подматрицы* $A_I^J$ *матрицы* $A$ *выполнено условие*: *н. о. д.* $\left\{\sum_{j \in J} \lambda_j a_{ij}\colon i \in I\right\} = 1$ *для всех* $\lambda_j \in \{0, \pm 1\}$, *не равных одновременно* 0.

Доказательство. Проведем его по следующей схеме: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (1)$, $(1) \Rightarrow (4) \Rightarrow (3)$, $(1) \Rightarrow (5) \Rightarrow (3)$. Критерии абсолютной унимодулярности (2)—(5) были предложены соответственно Падбергом [59], Камьо [30], Р. Гомори [30], Чандрасекараном [31].

$(1) \Rightarrow (2)$. Если $A$ — абсолютно унимодулярная матрица, то, взяв произвольный вектор $x$ с компонентами $0, \pm 1$, и положив

$$d_i^\nu = \begin{cases} 0, & \text{если } x_i \equiv 0 \pmod 2, \\ (x_i - 1)/2, & \text{если } x_i \equiv 1 \pmod 2, \ \nu = 1, \\ (x_i + 1)/2, & \text{если } x_i \equiv 1 \pmod 2, \ \nu = 2, \end{cases}$$

$$b_i^\nu = \begin{cases} a_i/2, & \text{если } a_i \equiv 0 \pmod 2, \\ (a_i - 1)/2, & \text{если } a_i \equiv 1 \pmod 2, \ \nu = 1, \\ (a_i + 1)/2, & \text{если } a_i \equiv 1 \pmod 2, \ \nu = 2, \end{cases}$$

где $a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, из теоремы 2.2 получим, что непустой полиэдр $M = M(A, b^1, b^2, d^1, d^2)$ целочислен. Поэтому существует целочисленный вектор $x' \in M$. Следовательно, вектор $y = x - 2x'$ удовлетворяет условиям (3.1), (3.2).

$(2) \Rightarrow (3)$. Пусть $A_I^J$ — эйлерова подматрица матрицы $A$. Возьмем вектор $x$ с компонентами $x_j = 1$, $j \in J$ и $x_j = 0$, $j \notin J$. Тогда существует такой вектор $y \neq 0$, что $A_i y = 0$ при $i \in I$, а это значит, что строки матрицы $A_I^J$ линейно зависимы и, следовательно, $\det A_I^J = 0$.

$(3) \Rightarrow (1)$. Пусть матрица $A$ не является абсолютно унимодулярной. Пусть, далее, $B$ — минимальная $(s \times s)$-подматрица матрицы $A$, для которой выполняется условие $\det B \neq 0, \pm 1$. Рассмотрим матрицу $\bar{B} = B^{-1} \det B$. Возьмем произвольный, например, $k$-й, ее столбец $\bar{B}^k$. Тогда $B\bar{B}^k = \det B e_k$. Из правила вычисления обратной матрицы и предположения о том, что все собственные подматрицы матрицы $B$ абсолютно унимодулярные, следует, что $\bar{B} \in C_{s,s}$. Переставим строки так, чтобы вектор $\bar{B}^k$ имел вид $(d, 0)$, где все компоненты вектора $d$ равны $\pm 1$. Для соответствующей вектору $d$ подматрицы $D$ матрицы $B$ имеем $Dd = B\bar{B}^k = e_k \det B$.

Так как $\det B \neq 0$, то существует невырожденная подматрица $D'$ матрицы $D$, такая, что $D'd = e'_k \det B$, где $e'_k$ — компоненты вектора $e_k$, соответствующие подматрице $D'$. Поскольку компоненты вектора $d$ равны $\pm 1$, то, заменив один из столбцов матрицы $D'$ на столбец $e'_k \det B$ и разложив определитель полученной матрицы $D''$ по последнему столбцу, будем иметь $0 \neq \det D' = \pm \det D'' = \pm \det B$. Последнее равенство справедливо из-за абсолютной унимодулярности любой собственной подматрицы матрицы $B$.

В силу минимальности $B$ заключаем, что $D' = B$, $d = \bar{B}^k$. Следовательно, компоненты каждого (из-за произвольности $k$) столбца матрицы $\bar{B}$ равны $\pm 1$. Итак, $\bar{B}$ — $\pm 1$-матрица. Поэтому в силу следствия 2.10 $\det \bar{B} \equiv 0 \pmod{2^{s-1}}$. С другой стороны, $\det \bar{B} = (\det B)^s \det B^{-1} = (\det B)^{s-1}$. Следовательно, $\det B \equiv 0 \pmod 2$.

В то же время $B\bar{B}^k = e_k \det B$, откуда следует, что сумма элементов в $k$-й, а следовательно, и в каждой строке, есть число четное. Аналогично доказывается, что сумма элементов в каждом столбце матрицы $B$ — число четное. Итак, матрица $B$ является эйлеровой, но это противоречит предположению, что $\det B \neq 0$.

(1) $\Rightarrow$ (4). Очевидно.

(4) $\Rightarrow$ (3). Докажем от противного. Пусть эйлерова подматрица $B$ матрицы $A$ невырожденная. Тогда, сложив все строки этой матрицы, получим ненулевую строку, все элементы которой четные числа. Поэтому $\det B$ — четное число. Полученное противоречие доказывает импликацию (4) $\Rightarrow$ (3).

(1) $\Rightarrow$ (5). Пусть для невырожденной подматрицы $A_I^J$ при некоторых $\lambda_j \in \{0, +1, -1\}$ утверждение (5) не выполнено. Заменим в матрице $A_I^J$ столбец $s$, для которого $\lambda_s \neq 0$, столбцом с элементами $\sum\limits_{j \in J} \lambda_j a_{ij}$. В результате получим матрицу $B$, для которой имеем $0 \neq \det A_I^J = \pm \det B = \det B'$ н. о. д. $\left\{\sum\limits_{j \in J} \lambda_j a_{ij} : i \in I\right\}$, где $B'$ — целочисленная матрица. Получили противоречие с утверждением, что $\det A_I^J = \pm 1$.

(5) $\Rightarrow$ (3). Пусть существует невырожденная эйлерова подматрица $A_I^J$ матрицы $A$. Утверждение (5) справедливо для любых $\lambda_j \in \{0, +1, -1)$, в том числе и для $\lambda_j = 1$. Поэтому н о. д. $\left\{\sum\limits_{j \in J} a_{ij}: i \in I\right\} = 1$, что невозможно в силу условий $\sum\limits_{j \in J} a_{ij} \equiv 0 \pmod 2$.

Теорема 3.2 полностью доказана.

**2. Эйлеровы матрицы.** Центральным в теореме 3.1 является алгебраическая характеризация абсолютно унимодулярных матриц с помощью эйлеровых подматриц. Высказыванию (3) теоремы 3.1 можно придать графовую интерпретацию. Для этого матрице $A \in C_{m,n}$ поставим в соответствие граф $G_A$, вершинам которого соответствуют строки и столбцы, причем вершины $i$ и $j$ смежны тогда и только тогда, когда $a_{ij} \neq 0$. Тогда эйлеровы подматрицы $B$ матрицы $A$ находятся во взаимно однозначном соответствии с подграфами $G'$ графа $G_A$, имеющими четные степени вершин, т. е. $G'$ есть цикл в графе $G$. Такие графы называются *эйлеровыми графами.* Припишем ребру $(i, j)$ вес $a_{ij}$ и обозначим через $l(G')$ сумму весов ребер из $G'$.

Теорема 3.3. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $A$ — *абсолютно унимодулярная матрица;*

(2) *у каждой квадратной эйлеровой подматрицы матрицы $A$ сумма всех элементов кратна четырем;*

(3) *для каждого эйлерова подграфа $G'$ графа $G_A$ величина $l(G')$ кратна четырем.*

Доказательство. Очевидно, что утверждения (2) и (3) эквивалентны. Поэтому достаточно показать эквивалентность (1) и (2).

$(1) \Longrightarrow (2)$. Пусть $A_I^J$ — эйлерова подматрица абсолютно унимодулярной матрицы $A$. Тогда $\sum_{j \in J} a_{ij}x_j \equiv 0 \pmod 2$ $\forall i \in I$, где все $x_j = 1$. Согласно высказыванию (2) теоремы 3.2 существует вектор $y$ с компонентами 1 или —1, для которого $\sum_{j \in J} a_{ij}y_j = 0$ $\forall i \in I$. Рассмотрим вектор $w$, полученный из $y$ заменой всех компонент, равных —1, на +1. Так как в каждом столбце эйлеровой подматрицы четное число ненулевых компонент, то имеем

$$0 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}y_j \equiv \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij}w_j \pmod 4,$$

откуда получаем

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} a_{ij} \equiv 0 \pmod 4. \tag{3.3}$$

$(2) \Longrightarrow (1)$. В силу высказывания (3) теоремы 3.2 достаточно показать, что если для квадратной эйлеровой подматрицы $A_I^J$ выполнено равенство (3.3), то $\det A_I^J = 0$. Предположим, что существует эйлерова подматрица $B$, для которой выполнено условие (3.3), но $\det A_I^J \neq 0$. Пусть $B$ имеет минимальный порядок из всех матриц, обладающих такими свойствами. Следовательно, всякая собственная эйлерова подматрица матрицы $B$ вырожденная, и поэтому все собственные подматрицы матрицы $B$ абсолютно унимодулярные (теорема 3.2).

Пусть $b = A_I^J e$, где $e$ — вектор, состоящий из единиц. Заменим в матрице $A_I^J$ любой, например, последний столбец на столбец $b$. Тогда полученная матрица $B$ будет абсолютно унимодулярной. Следовательно, существует вектор $y$ (утверждение (2) теоремы 3.2) такой, что $yB = (0, 0, \ldots, 0, 4k)$, $k$ — целое число. Поэтому $\det A_I^J = \det B = \pm 4k$. Так как, по предположению, $\det A_I^J \neq 0$, то $|\det A_I^J| \geq 4$.

Для завершения доказательства нам понадобится следующая лемма, принадлежащая Р. Гомори (см. [30]).

Лемма 3.4. *Если* $A \in C_{n,n}$ и $|\det A| > 2$, *то существует квадратная подматрица* $Q$ *матрицы* $A$, *обладающая свойством* $\det Q = 2$.

Доказательство леммы. Пусть $D = \|A, I_n\|$ и пусть $\mathcal{K} \subset C_{n,2n}$ — класс матриц, каждая из которых может быть получена из $D$ посредством умножения слева на унимодулярную матрицу, и содержит в качестве подматрицы $I_n$.

Пусть $F \in \mathcal{K}$ и обладает свойством: в первых $n$ столбцах матрицы $F$ содержится наибольшее число единичных вектор-столбцов. Хотя бы один вектор-столбец $F^k$, $k \leq n$, не единичный, так как в классе $\mathcal{K}$ нет матриц вида $\|I_n, G\|$ в силу того, что $|\det A| > 2$.

Пусть это будет столбец $F^1$ и пусть множество $J$ содержит 1 и номера $j$, $j < n$ единичных вектор-столбцов $F^j$ матрицы $F$.

Рассмотрим $(n \times n)$-подматрицу матрицы $F$, составленную из столбцов $A^j$, $j \in J$, и любых единичных вектор-столбцов из оставшейся части матрицы $F$. Очевидно, что имеется $n - |J|$ таких подматриц. Среди них есть хотя бы одна невырожденная, так как иначе матрица, определенная первыми $n$ столбцами матрицы $F$, вырожденная, что противоречит предположению $|\det A| > 2$. Без ограничения общности считаем, что невырожденной является подматрица

$$U = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \varepsilon_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_n & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Из-за ее невырожденности $\varepsilon_1 \neq 0$ и, следовательно, $\varepsilon_1 \in \{1, -1\}$. Пусть, для определенности, $\varepsilon_1 = 1$. Тогда матрица $U^{-1}$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\varepsilon_2 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\varepsilon_n & 0 & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Матрица $U^{-1}F \notin \mathcal{K}$, так как она содержит в первых $n$ столбцах на один единичный вектор больше, чем $F$, что невозможно по предположению. Поэтому среди элементов матрицы $U^{-1}F$ имеются неравные 0 и $\pm 1$. Унимодулярную матрицу $U^{-1}$ представим как произведение элементарных матриц $U_n \dots U_2$, где

$$U_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\varepsilon_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \quad \dots, \quad U_n = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\varepsilon_n & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Пусть $q$ — наименьшее целое число такое, что один из элементов матрицы $W = U_q \dots U_2 F$ не равен 0, $\pm 1$. Преобразование, отвечающее матрице $U_q$, складывает (вычитает) в зависимости от знака $\varepsilon_q$ первую строку матрицы $U_{q-1} \dots U_2 F$ с $q$-й строкой. Поэтому элементы матрицы $W$, не равные 0 и $\pm 1$, будут равны $\pm 2$, и все они находятся в $q$-й строке, причем соответствующие им элементы первой строки не равны нулю. Пусть $W_q^j = \pm 2$. Отметим, что в первом столбце матрицы $W$ элемент $W_q^1 = 0$. Поэтому матрица $W$ содержит подматрицу

$$\begin{Vmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & \pm 2 \end{Vmatrix},$$

стоящую на пересечении 1-го и $j$-го столбцов, 1-й и $q$-й строк.

Пусть $S$ — множество, элементами которого являются номера $k$, $j$ и номера $(n-2)$-х единичных столбцов, не имеющих единиц в 1-й и $q$-й строках. Поэтому $\det D^S = \det W^S$, так как матрица $W^S$ получена умножением справа на некоторую унимодулярную матрицу. Поскольку $D = \| A, I_n \|$, то $\det D^S$ совпадает с определителем некоторой подматрицы $Q$ матрицы $A$. Итак, $\det Q = \pm 2$. Лемма доказана.

**3. Унимодулярные гиперграфы.** Рассмотрим условия абсолютной унимодулярности булевых матриц. Каждая булева матрица является матрицей инциденций гиперграфа. Термины теории гиперграфов взяты из [5], [27].

Пара $H = (I, E)$ называется *гиперграфом*, если $I$ — конечное множество, а $E$ — семейство непустых подмножеств множества $I$. Элементы множества $I$ называются *вершинами*, а подмножества $E_j$ из семейства $E$ — *ребрами гиперграфа*.

Пусть $I' \subset I$. *Гиперграфом, порожденным вершинами из* $I'$, называется пара $H_{I'} = (I', E_{I'})$, где $E_{I'} = \{E_j \cap I' : E_j \cap I' \neq \varnothing\}$.

Будем говорить, что гиперграф $H$ *бихроматически уравновешен*, если его вершины раскрашены в два цвета так, что для каждого ребра число вершин, окрашенных в первый цвет, равно числу вершин, окрашенных во второй или отличается от этого числа на единицу.

Определение 3.5. Гиперграф $H = (I, E)$ называется *унимодулярным*, если порожденный всяким подмножеством вершин $I' \subseteq I$ гиперграф $H_{I'} = (I', E_{I'})$ бихроматически уравновешен.

Следующий критерий, по-видимому, впервые был получен Гуйя-Ури [40].

Теорема 3.6. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$A$ — булева абсолютно унимодулярная матрица;*

(2) *$A$ — матрица инциденций унимодулярного гиперграфа;*

(3) *каждое подмножество $I$ номеров строк булевой матрицы $A$ можно разбить на два подмножества $I'$, $I''$ так, что*

$$\left| \sum_{i \in I'} A_i - \sum_{i \in I''} A_i \right| \leqslant e,$$

*где $A_i$ $i$-я строка матрицы $A$.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (2) и (3) очевидна.

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $H$ — гиперграф, порожденный матрицей $A$ как матрицей инциденций. Благодаря теореме 3.2 достаточно показать эквивалентность утверждения (2) теоремы 3.2 и утверждения (2) доказываемой теоремы. Утверждение (2) теоремы 3.2 переформулируем в следующей эквивалентной форме: для любого подмножества $I$ множества номеров строк матрицы $A$ существует вектор $y$, обладающий свойствами

$$y_i = 0 \quad \forall i \notin I, \tag{3.4}$$

$$y_i = \pm 1 \quad \forall i \in I, \tag{3.5}$$

$$yA^j = 0, \ \pm 1 \quad \forall j. \tag{3.6}$$

Каждому вектору $y$, компоненты которого удовлетворяют соотношениям (3.4)—(3.6), сопоставим раскраску вершин гиперграфа $H_I$ в два цвета, в зависимости от значений компонент $y_i$, $i \in I$. Соотношения (3.6) гарантируют, что гиперграф $H_I$ является бихроматически уравновешенным. Обратно, каждому бихроматически уравновешенному гиперграфу, порожденному вершинами из $I$, можно сопоставить вектор $y$, удовлетворяющий соотношениям (3.4)—(3.6).

Пример. Пусть на прямой $L$ задано множество точек $I$ и конечное семейство его подмножеств $E_{a_i,\, b_i} = \{x \in I\colon a_i \leqslant x \leqslant \leqslant b_i\}$ $\forall i \in N_n$. Гиперграф $H = (I, E)$, где $E = \{E_{a_i,\, b_i} : i \in N_n\}$, называется *гиперграфом интервалов*. Очевидно, что гиперграф интервалов унимодулярен. Требуемую раскраску получим, окрашивая поочередно точки из $I$ в порядке продвижения по прямой. По теореме 3.6 матрица инциденций принадлежности точек прямой $L$ отрезкам $[a_i, b_i]$ является абсолютно унимодулярной.

Подмножество $I'$ вершин гиперграфа $H = (I, E)$ называется *внутренне устойчивым*, если $|I' \cap E_j| \leqslant 1$ для каждого ребра $E_j \in E$. *Число внутренней устойчивости* $\alpha(H)$ гиперграфа $H$ определяется как наибольшее число вершин внутренне устойчивых множеств гиперграфа $H$. *Число внешней устойчивости* $\rho(H)$ гиперграфа $H$ есть наименьшее число ребер, покрывающих все вершины гиперграфа $H$.

Следствие 3.7 (К. Берж [27]). *Если $H$ — унимодулярный гиперграф, то его числа внутренней и внешней устойчивости равны.*

Доказательство. Пусть $x=(x_1,\dots,x_n)$ — характеристический вектор множества внутренней устойчивости. Тогда, если $A$ — матрица инциденций гиперграфа $H$, то в силу теорем 3.3 и 3.6 имеем $\alpha(H)=\max\{ex\colon\ xA\leqslant e,\ \ x\geqslant 0\}$. Двойственная задача $\min\{ey\colon\ Ay\geqslant e,\ \ y\geqslant 0\}$, в силу унимодулярности матрицы $A$ также имеет целочисленное решение $y^*$, компоненты которого равны 0 или 1. Поэтому в силу теоремы двойственности линейного программирования имеем $\alpha(H)=\rho(H)$. Следствие доказано.

*Цепью длины $q$ в гиперграфе $H$* называется последовательность различных вершин и ребер вида $v_1,\ E_1,\ v_2,\ E_2,\dots,\ E_q,\ v_{q+1}$, такая, что $v_k,\ v_{k+1}\in E_k\ \ \forall k\in N_q$. Если $v_{q+1}=v_1$, то такую цепь называем *циклом длины $q$*. *Нечетный цикл гиперграфа* это цикл нечетной длины.

Предложение 3.8. *Если гиперграф не содержит нечетных циклов, то он — унимодулярный.*

Доказательство. Пусть ребро $E_i$ гиперграфа $H$ состоит из вершин $\left\{v_i^1,\dots,\ v_i^{n_i}\right\}$, где $n_i=|E_i|$. Рассмотрим граф $G=(V,\ E)$, где $E=\left\{\left(v_i^1,\ v_i^2\right),\dots,\ \left(v_i^{2[n_i/2]-1},\ v_i^{2[n_i/2]}\right)\ \forall i\in N_n\right\}$.

Пусть граф $G$ содержит нечетный цикл. Тогда рассмотрим нечетный цикл $\mu$ минимальной длины. Если цикл $\mu$ содержит два ребра $(v_s,\ v_{s+1})$ и $(v_t,\ v_{t+1})$ с вершинами, принадлежащими некоторому ребру $E_l$ гиперграфа $H$, то разбиваем его на две цепи нечетной длины вида $v_1,\ v_2,\dots,\ v_s,\ v_t,\ v_{t+1},\dots,\ v_1$,; $v_1,\dots,\ v_s,\ v_{t+1},\dots,\ v_1$. Действуя таким образом, получим последовательность цепей нечетной длины, которые в совокупности определяют нечетный цикл гиперграфа $H$, что невозможно по предположению. Следовательно, граф $G$ не содержит нечетных циклов и поэтому бихроматичен (см. следствие 4.3). Из существования бихроматической раскраски графа $G$ следует, что как сам гиперграф $H$, так и каждый порожденный подмножеством его вершин гиперграф являются бихроматически уравновешенными. Следовательно, $H$ — унимодулярный гиперграф.

## § 4. Унимодулярные матрицы инциденций

Если матрица инциденций графа является абсолютно унимодулярной, то экстремальная задача на таком графе сводится к задаче линейного программирования, что в конечном итоге обеспечивает построение простых и эффективных алгоритмов поиска экстремума. Кроме того, для таких задач справедливы теоремы двойственности линейного программирования, следствием которых являются многие важные комбинаторные теоремы.

**1. Критерии абсолютной унимодулярности.** Пусть $C^*_{m,n}$ — множество тех матриц из класса $C_{m,n}$, которые содержат ровно два ненулевых элемента в каждом столбце. Ясно, что каждая матрица $A\in C^*_{m,n}$ является матрицей инциденций (вершины — ребра) некоторого смешанного графа $G(A)$, имеющего как ориентированные, так и неориентированные ребра. Без ограничения общности считаем, что в $A$ нет столбцов, оба ненулевых элемента которых отрицательны. Такие столбцы можно умножить на $-1$ — это изменит только знак отдельных миноров $A$.

Теорема 4.1. *Пусть $A \in C^*_{m,n}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$A$ — абсолютно унимодулярная матрица;*

(2) *$A$ — матрица инциденций смешанного графа $G(A)$, в котором каждый цикл, составленный как из ориентированных (без учета ориентации), так и из неориентированных ребер, имеет четное число неориентированных ребер;*

(1) (*критерий Хеллера — Томпкинса* [45]) *строки матрицы $A$ можно разбить на два непересекающихся множества $J_1$ и $J_2$ так, что ненулевые элементы одного столбца принадлежат строкам разных множеств, если они одного знака, и строкам одного множества — в противном случае.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Пусть $G(A)$ содержит цикл $C$, в котором имеется нечетное число $l$ неориентированных ребер. Пусть $B$ — $(k \times k)$-подматрица матрицы $A$, отвечающая циклу $C$. Вычислим определитель матрицы $B$. Сначала избавимся от столбцов, содержащих ненулевые элементы разных знаков. Для этого прибавляем к строке $i$, содержащей элемент $a_{ie} = -1$, строку $p$ с элементом $a_{pe} = 1$, в результате получим столбец с единственным ненулевым элементом $a_{pe}$, и, разлагая определитель по элементам этого столбца, получим $\det B = \pm \det B'$, где $B'$ — $(k-1) \times$ $\times (k-1)$-матрица, отвечающая циклу $C'$, который получен из $C$ после стягивания орребра $e$ и выбрасывания вершины $i$. Продолжая эту процедуру, в конце концов получим $(l \times l)$-матрицу инциденций цикла, составленного из $l$ неориентированных ребер. Эта матрица с точностью до перестановки строк и столбцов имеет вид

$$B^* = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $\det B^* = 1 + (-1)^{l-1}$ и, следовательно, если $l$ — нечетное число, то $\det B = \pm \det B^* = \pm 2$. Полученное противоречие доказывает импликацию (1)$\Rightarrow$(2).

(2)$\Rightarrow$(3). Пусть $G(A)$ — связный граф (связность понимается без учета ориентации ребер), иначе все построения проводим отдельно для каждой компоненты связности, и учитываем, что матрица $A$ в этом случае имеет блочную структуру. Выбираем произвольную вершину $i$ графа $G(A)$ Образуем два множества вершин $J_1$ и $J_2$ следующим образом: вершину $i$ и все вершины, для которых из $i$ существует цепь с четным числом неориентированных ребер, включаем в множество $J_1$; вершины, до которых из $i$ существует цепь с нечетным числом неориентированных ребер, включаем в $J_2$. Из-за связности графа $G(A)$ и условия (2) каждая вершина попадает только в одно из подмножеств $J_1$, $J_2$. Кроме того, в графе $G(A)$ нет неориентированных ребер, соединяющих вершины из одного множества $J_1$ или $J_2$, и в то же время любое ориентированное ребро соединяет вершины из одного множества, иначе бы обнаружился цикл с нечетным числом неориентированных ребер. Итак, получено разбиение строк на требуемые множества $J_1$ и $J_2$.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Доказательство проведем индукцией по размерности произвольной ($k\times k$)-подматрицы $B$ матрицы $A$. Утверждение (1) верно для $k=1$, так как все $a_{ij}=0$, $\pm 1$. Предположим, что все миноры порядка $k$ равны 0 или $\pm 1$, и рассмотрим произвольную $(k+1)\times(k+1)$-подматрицу $B$. Если подматрица $B$ содержит нулевой столбец, то $\det B=0$. Если у матрицы $B$ существует столбец с единственным ненулевым элементом, то, разлагая определитель матрицы $B$ по элементам этого столбца, получаем $\det B=\beta'$, где $\beta'$ — алгебраическое дополнение нулевого элемента. По предположению индукции $\beta'=\pm 1{,}0$. Остается рассмотреть случай, когда каждый столбец матрицы $B$ имеет два ненулевых элемента. Тогда в силу утверждения (3)

$$\sum_{i\in J_1} A_i = \sum_{i\in J_2} A_i.$$

Значит, строки матрицы $B$ линейно зависимы, и поэтому $\det B=0$. Все рассуждения остаются справедливыми, если одно из множеств $J_k$ пусто. Теорема 4.1 доказана.

Следствие 4.2. *Матрица инциденций любого ориентированного графа абсолютно унимодулярна.*

Утверждение следствия 4.2 фактически сформулировал еще А. Пуанкаре [63].

*Раскраской графа* называется такое приписывание цветов его вершинам, что никакие две смежные вершины не получают одинакового цвета. Таким образом, раскраска графа в $k$ цветов разбивает множество его вершин на $k$ непересекающихся классов, в каждом из которых нет попарно несмежных вершин. *Хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G$ определяется как наименьшее $k$, для которого граф $G$ имеет раскраску в $k$ цветов. Граф, раскрашиваемый в два цвета, называется *бихроматическим.*

Следствие 4.3. *Граф бихроматичен тогда и только тогда, когда он не содержит нечетных циклов.*

В качестве следствия из теоремы 4.1 приведем достаточное условие унимодулярности матрицы, принадлежащее Хеллеру [43].

Следствие 4.4. *Матрица, столбцы которой представляют собой координаты ребер симплекса по отношению к базису, состоящему из подмножества ребер этого симплекса, является унимодулярной.*

Доказательство. Пусть симплекс $T_{n-1}$ задается условиями

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_n.$$

Любое его ребро $l$ представляет собой пересечение симплекса $T_{n-1}$ с гиперплоскостями $x_i = 0$, $i \neq p$, $s$, где $p$, $s \in \bar{N}_n$. Любая нормаль к ребру $l$ имеет компоненты $\alpha_p = \alpha_s = 1$, а остальные $\alpha_i$, $i \neq s$, $p$, — произвольные числа. Направляющий вектор $a^l = (a_1, \ldots, a_n)$ ребра $l$ (без учета ориентации) определим из условия $\alpha a^l = 0$. Следсвательно, $a_i = 0$, $i \neq p$, $s$, $a_p = \pm 1$, $a_s = \mp 1$. Матрица $A$, составленная из векторов $a^l$ для всех ребер $l$ симплекса $T_{n-1}$, является абсолютно унимодулярной в силу теоремы 4.1. Благодаря лемме 2.4 матрица коэффициентов разложения небазисных векторов по каждому базису $B$ является также абсолютно унимодулярной. Следствие 4.4 доказано.

**2. Двудольные графы.** Неориентированные графы с абсолютно унимодулярными матрицами инциденций играют заметную роль в различных приложениях теории графов.

Определение 4.1. *Двудольным графом* называется граф $G = (U, V, E)$, в котором множество вершин распадается на два непересекающихся подмножества $U$ и $V$ так, что каждое ребро $(i, j) \in E$ соединяет некоторую вершину $i \in U$ с вершиной $j \in V$.

Если каждые две вершины $i \in U$, $j \in V$ графа $G$ соединены ребром $(i, j)$, то этот граф называется *полным двудольным* и обозначается $K_{m,n}$, где $m = |U|$, $n = |V|$.

Из эквивалентности утверждений (2) и (3) теоремы 4.1 следует, что граф $G$ является двудольным тогда и только тогда, когда все его простые циклы имеют четную длину.

Матрица инциденций $R$ полного двудольного графа $K_{m,n}$ имеет следующий вид:

$$R = \begin{Vmatrix} 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \ldots 1 & \ldots & 0 \ldots 0 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots & 1 \ldots 1 \\ 1 \ldots 0 & 1 \ldots 0 & \ldots & 1 \ldots 0 \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 0 \ldots 1 & 0 \ldots 1 & \ldots & 0 \ldots 1 \end{Vmatrix}.$$

В силу эквивалентности утверждений (1) и (3) теоремы 4.3 получаем следующий результат.

Следствие 4.5. *Матрица инциденций неориентированного графа $G$ абсолютно унимодулярна тогда и только тогда, когда $G$ — двудольный граф.*

В теории двудольных графов фундаментальную роль играет теорема Кёнига, которую здесь мы приведем в матричной интерпретации.

*Линией матрицы* называется ее строка или ее столбец. Два элемента матрицы называются *неколлинеарными*, если они не лежат на одной линии.

Т е о р е м а 4.6 (т е о р е м а К ё н и г а). *Максимальное число попарно неколлинеарных единиц любой булевой матрицы равно минимальному числу линий, покрывающих все единицы матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения максимального числа попарно неколлинеарных единиц булевой $(m\times n)$-матрицы $\|c_{ij}\|$ достаточно найти

$$\max \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall\, j \in N_n, \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant 1 \quad \forall i \in N_m, \tag{4.2}$$

$$x_{ij}=0 \text{ или } 1 \quad \forall\,(i,\ j) \in N_m \times N_n.$$

Минимальное число линий, покрывающих все единицы матрицы $|c_{ij}\|$, найдем, решив задачу:

$$\min \sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j,$$

$$u_i + v_j \geqslant c_{ij} \quad \forall\,(i,\ j) \in N_m \times N_n, \tag{4.3}$$

$$u_i,\ v_j = 0 \text{ или } 1 \quad \forall\,(i,\ j) \in N_m \times N_n.$$

Оптимальному решению $(u_i^*, v_j^*)$ последней задачи отвечает минимальное покрытие, состоящее из множеств строк $I$, для которых $u_i^*=1$, и столбцов $J$, для которых $v_j^*=1$. Матрицы $A$ и $A^T$ коэффициентов (4.1), (4.2) и (4.3) являются абсолютно унимодулярными, как матрицы инциденций двудольного графа (см. следствие 4.6). Поэтому условия целочисленности переменных заменяем на условие их неотрицательности, и тогда получаем пару двойственных задач линейного программирования и согласно теореме двойственности имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}^* = \sum_{i=1}^{m} u_i^* + \sum_{j=1}^{n} v_j^*.$$

Теорема 4.6 доказана.

Необходимо заметить, что теорема Кёнига остается справедливой, если вместо булевых матриц рассматривать неотрицательные матрицы, т. е. матрицы с неотрицательными элементами. Разумеется, что в этом случае устанавливается связь между линиями, покрывающими все положительные элементы матрицы.

Последовательность элементов $c_{1\pi_1}, \ldots, c_{n\pi_n}$, любые два из которых не коллинеарны, называется *диагональю матрицы* $\|c_{ij}\|_{n\times n}$. Следующий результат принадлежит Фробениусу [18] и будет нами использован позднее.

Следствие 4.7. *Для того чтобы каждая диагональ неотрицательной* ($n \times n$)*-матрицы* $A$ *включала нулевой элемент, необходимо и достаточно, чтобы* $A$ *содержала нулевую* ($s \times t$)*-подматрицу, где* $s+t \geqslant n+1$.

Доказательство. Если каждая диагональ включает нулевой элемент, то согласно теореме Кёнига для минимального числа $\rho$ линий, покрывающих неотрицательные элементы матрицы, справедливо неравенство $\rho < n$. Пусть среди этих линий имеется $r$ строк и $l$ столбцов. Тогда вне покрывающих линий лежит нулевая подматрица, которая имеет $s=n-r$ строк и $t=n-l$ столбцов. Следовательно, $s+t=n-r+n-l=2n-\rho>n$.

Пусть теперь матрица $A$ имеет ненулевую ($s \times t$)-подматрицу $A_I^J$, причем $|I|+|J|=s+t>n$. Пусть, далее, существует диагональ матрицы $A$, не содержащая нулевого элемента. Тогда в столбцах с номерами из $J$ элементы диагонали должны лежать в $((n-s)\times t)$-подматрице $A_{N_n \setminus I}^J$ и, следовательно, $t \leqslant n-s$. Но $t>n-s$, и мы приходим к противоречию.

**3. Теоремы о потоках.** Пусть $G=(V, E)$ — ориентированный граф (*орграф*) с двумя выделенными вершинами $s$ и $t$, называемыми соответственно *источник* и *сток*. Пусть каждому орребру $(i, j) \in E$ орграфа $G$ приписан вес $d_{ij} \geqslant 0$, так называемая *пропускная способность*. *Потоком* величины $\vartheta$ в орграфе $G$ называется набор чисел $\{(x_{ij}) : (i, j) \in E\}$, для которого выполнены условия

$$\sum_{i:\ (i,\ j) \in E} x_{ij} - \sum_{k:\ (j,\ k) \in E} x_{jk} = \begin{cases} -\vartheta & \text{при } j=s, \\ \vartheta & \text{при } j=t, \\ 0 & \text{при } j \neq s,\ t, \end{cases} \tag{4.4}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad \forall (i, j) \in E. \tag{4.5}$$

Поток $(x_{ij})$ называется *максимальным*, если его величина $\vartheta$ принимает наибольшее значение.

Пусть $(S, T)$ — разбиение множества вершин орграфа $G$ на два таких непересекающихся подмножества $S$ и $T$, что $s \in S$, $t \in T$. Тогда множество орребер $(i, j) \in E$, обладающих свойством $i \in S$, $j \in T$, называется *разрезом орграфа* $G$. *Пропускной способностью разреза* $(S, T)$ называется сумма пропускных способностей орребер этого разреза. Следующая теорема широко известна как теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Она принадлежит Форду и Фалкерсону [24].

Теорема 4.8 (Форда — Фалкерсона). *Величина максимального потока в орграфе* $G$ *равна пропускной способности минимального разреза.*

Доказательство. Введем двойственные переменные $u_i$, $\forall i \in V$, соответствующие ограничениям (4.4) и $w_{ij}$ $\forall (i, j) \in E$, соответствующие ограничениям (4.5). Тогда задача, двойственная к задаче о максимальном потоке, имеет вид

$$\min \sum_{(i,\ j) \in E} c_{ij} w_{ij},$$

$$-u_s + u_t \geqslant 1,$$

$$-u_i + u_j + w_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i,\ j) \in E,$$

$$w_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i,\ j) \in E.$$

Очевидно, что матрица ограничений (4.4) является матрицей инциденций орграфа $G$ и в силу следствия 4.2 является абсолютно унимодулярной. Следовательно, оптимальное решение двойственной задачи — целочисленно. Более того, из правила Крамера вытекает, что компоненты оптимального решения равны 1 или 0. Определим по этому оптимальному решению разрез $(S,\ T)$, считая, что $i \in S$, если $u_i = 1$, и $i \in T$, если $u_i = 0$. Ясно, что при этом выполняется условие $w_{ij} = 1$, если $i \in S$, $j \in T$, и $w_{ij} = 0$ — в противном случае. Из теоремы двойственности вытекает утверждение теоремы 4.8.

Следствие 4.9. *Если пропускные способности $d_{ij}$ — целые числа, то существует целочисленный максимальный поток.*

Следующее утверждение, известное как теорема Менгера [24], следует из теоремы 4.8 и следствия 4.9.

Следствие 4.10. *Пусть $S$ и $T$ — два непересекающихся множества вершин графа $G$. Максимальное число вершинно непересекающихся цепей из $S$ в $T$ равно минимальному числу вершин в некотором $(S,\ T)$-рассекающем множестве, под которым понимается множество вершин, блокирующих все цепи из $S$ в $T$.*

Второй вариант теоремы Менгера был опубликован Уитни [24].

Следствие 4.10′ (теорема Уитни). *Любая пара вершин графа $G$ может быть соединена по крайней мере $n$ вершинно непересекающимися цепями тогда и только тогда, когда в нем существует $n$ вершин, удаление которых приводит к несвязному графу.*

Следствием теоремы 4.8 является теорема о спросе и предложении. Пусть в орграфе $G$ выделено не две вершины $s$ и $t$ в качестве источника и стока, а два подмножества вершин $S$ и $T$, и пусть каждой вершине $i \in S$ соответствует число $a_i \geqslant 0$ (предложение источника $i$), а каждой вершине $j \in T$ соответствует число $b_j \geqslant 0$ (спрос стока $j$) Возникает вопрос: можно ли, используя пропускные способности орребер, удовлетворить спрос стоков с помощью предложения источников, т. е. определить, совместна ли следующая система ограничений:

$$\sum_{j:\ (i,\ j) \in E} x_{ij} - \sum_{j:\ (j,\ i) \in E} x_{ji} \begin{cases} \leqslant a_i, & \text{если} \quad i \in S, \\ = 0, & \text{если} \quad i \notin S,\ i \notin T, \\ \leqslant -b_i, & \text{если} \quad i \in T, \end{cases} \tag{4.6}$$

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad \forall (i,\ j) \in E? \tag{4.7}$$

На этот вопрос отвечает следующая теорема, принадлежащая Гейлу [24].

Теорема 4.11. *Система ограничений* (4.6), (4.7) *совместна тогда и только тогда, когда для любого множества* $I \subset V$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{i \in T \cap \bar{I}} b_i - \sum_{i \in S \cap \bar{I}} a_i \leqslant \sum_{(i,j) \in (\bar{I}, I)} d_{ij}, \tag{4.8}$$

*где* $\bar{I} = V \setminus I$.

Доказательство. Если система (4.6), (4.7) имеет решение $(x_{ij})$, то, умножая каждое из неравенств (4.6) при $i \in T$ на $-1$ и суммируя их после этого по $i \in \bar{I}$, получим

$$\sum_{i \in T \cap \bar{I}} b_i - \sum_{i \in S \cap \bar{I}} a_i \leqslant \sum_{(i,j) \in (V, \bar{I})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\bar{I}, V)} x_{ij} =$$
$$= \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in (\bar{I}, I)} x_{ij} \leqslant \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} x_{ij} \leqslant \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} d_{ij}.$$

Необходимость условий (4.8) доказана. Чтобы доказать их достаточность, рассмотрим орграф $G^*$ с множеством вершин $V^* = V \cup \{s, t\}$ и множеством орребер $E^* = E \cup \{(s, i): i \in S\} \cup \cup \{(i, t): i \in T\}$. Определим пропускные способности орребер нового графа по формуле

$$d_{ij}^* = \begin{cases} a_j, & \text{если } i = s,\ j \in S, \\ b_i, & \text{если } i \in T,\ j = t, \\ d_{ij}, & \text{если } (i, j) \in E. \end{cases}$$

Докажем, что множество $(T, t)$ является минимальным разрезом в графе $G^*$. Действительно, пусть $(U, \bar{U})$ — произвольный разрез в $G^*$ Тогда, положив $I = U \setminus s$, $\bar{I} = \bar{U} \setminus t$, получим разрез $(I, \bar{I})$ в графе $G$, для которого

$$\sum_{(i,j) \in (U, \bar{U})} d_{ij}^* - \sum_{(i,j) \in (T, t)} d_{ij}^* = \sum_{(i,j) \in (I, t)} d_{ij}^* + \sum_{(i,j) \in (s, \bar{I})} d_{ij}^* +$$
$$+ \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} d_{ij}^* - \sum_{(i,j) \in (T, t)} d_{ij}^* = \sum_{i \in T \cap I} b_i + \sum_{i \in S \cap \bar{I}} a_i +$$
$$+ \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} d_{ij} - \sum_{j \in T} b_j = - \sum_{j \in T \cap \bar{I}} b_j + \sum_{i \in S \cap \bar{I}} a_i + \sum_{(i,j) \in (I, \bar{I})} d_{ij} \geqslant 0.$$

Из теоремы Форда — Фалкерсона, примененной к орграфу $G^*$, следует существование потока $x^*$ величины $\sum\limits_{(i,j) \in (T, t)} d_{ij}^*$, суже́ние которого на множество $E$ очевидно удовлетворяет ограничениям (4.6), (4.7).

В частности, если $G$ — двудольный граф, и $\sum\limits_{i \in S} a_i = \sum\limits_{j \in T} b_j$, то теорема 4.11 принимает следующий вид:

Следствие 4.12. *Система*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij}, \tag{4.9}$$

*в которой все $a_i$, $b_j$, $d_{ij}$ — заданные неотрицательные числа, совместна тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

*и выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

$$1) \sum_{j=1}^{n} \max\left(0,\ b_j - \sum_{i \in I} d_{ij}\right) \leqslant \sum_{i \in \overline{I}} a_i \quad \forall I \subset N_m;$$

$$2) \sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i,\ \sum_{j \in J} d_{ij}\right) \geqslant \sum_{j \in J} b_j \quad \forall J \subset N_n.$$

Если все числа $a_i$, $b_j$, $d_{ij}$ — целые, и если выполнены условия следствия 4.12, то в силу абсолютной унимодулярности матрицы ограничений (4.9) существует целочисленное решение у системы (4.9). Поэтому при $d_{ij} = 1$ из следствия 4.12 вытекает следующий результат, известный как теорема Райзера [24] о существовании булевых матриц с данными суммами элементов в каждой линии.

Следствие 4.13. *Система линейных неравенств*

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i \quad \forall i \in N_m, \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j \quad \forall j \in N_n,$$
$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1 \qquad \forall (i, j) \in N_m \times N_n$$

*имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{j=1}^{s} b_j \leqslant \sum_{j=1}^{s} a_j^* \quad \forall s \in N_n,$$

*где $a_j^*$ — число элементов $a_1, \ldots, a_m$, не меньших $j$.*

Пусть дано конечное множество $I = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и некоторое семейство $E$ его подмножеств $E_1, \ldots, E_n$, не обязательно различных. Множество $\{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq I$ называется *системой различных представителей (с. р. п.)* семейства $E$, если $e_j \in E_j$ $\forall j \in N_n$.

Следствие 4.14 (теорема Холла). *Для существования с. р. п. системы подмножеств $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$ множества $I$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого подмножества $J \subset N_n$ выполнялось неравенство*

$$\left| \bigcup_{j \in J} E_j \right| \geqslant |J|. \tag{4.10}$$

Доказательство. Необходимость условия (4.10) очевидна. Для доказательства достаточности воспользуемся следствием 4.13, положив $a_i = b_j = 1$ и

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in E_j, \\ 0, & \text{если } e_i \notin E_j. \end{cases}$$

## § 5. Многогранники покрытий, разбиений и упаковок

Задачи о разбиении, покрытии и упаковке служат математической моделью для многих теоретических и прикладных задач, таких как раскраски графов, построение совершенных кодов и минимальных дизъюнктивных нормальных форм, составление блок-схем, поиск информации, составление графиков движения поездов, судов и самолетов, административное районирование и др. (подробнее об этом см. в [17], [24], [25]). В этом параграфе исследуются основные свойства многогранников — выпуклых оболочек характеристических векторов разбиений, покрытий и упаковок.

**1. Постановка задач.** Пусть дано конечное множество $I = \{v_1, \ldots, v_m\}$ и семейство его подмножеств $E = \{E_1, \ldots, E_n\}$. Пусть $E' = \{E_{j_1}, \ldots, E_{j_s}\}$ — некоторое подсемейство семейства $E$. Если каждый элемент $v_i$ содержится не более (не менее) чем в одном из подмножеств $E_j$, входящих в $E'$, то $E'$ называем *упаковкой* (*покрытием*) *множества* $I$. Покрытие, являющееся одновременно и упаковкой, называем *разбиением множества* $I$. Пусть $A = \| a_{ij} \|_{m \times n}$ — матрица инциденций элементов $I$ и подмножеств $E_j$: $a_{ij} = 1$, если $v_i \in E_j$, и $a_{ij} = 0$, если $v_i \notin E_j$. Каждое подсемейство $E'$ семейства $E$ задаем с помощью характеристического вектора, у которого компонента $x_j = 1$, если подмножество $E_j$ входит в $E'$, и $x_j = 0$ в противном случае. Таким образом, между покрытиями, разбиениями, упаковками множества и целочисленными решениями одной из трех следующих систем линейных неравенств

$$1)\ Ax \geqslant e, \quad 2)\ Ax = e, \quad 3)\ Ax \leqslant e, \tag{5.1}$$

$$\text{где } 0 \leqslant x \leqslant e, \tag{5.2}$$

существует взаимно однозначное соответствие. Многогранник решений каждой из систем (5.1), (5.2) обозначаем соответственно символом $M^{\geqslant}(A, e)$, $M^{=}(A, e)$, $M^{\leqslant}(A, e)$ в зависимости от того, какой выбран знак в неравенствах (5.1). Имеем три следующие задачи:

$\max \{ex\colon x \in M_Z^{\leqslant}(A, e)\}$ — задача об упаковке;

$\min \{ex\colon x \in M_Z^{=}(A, e)\}$ — задача о разбиении;

$\min \{ex\colon x \in M_Z^{\geqslant}(A, e)\}$ — задача о покрытии.

О п р е д е л е н и е 5.1. Выпуклую оболочку множества $M_Z^{\leqslant}(A, e)$ называем *многогранником упаковок*. Аналогично, определяется *многогранник разбиений* и *многогранник покрытий*. Множество $M_Z^{\substack{\geqslant\\=\\\leqslant}}(A, e)$ называем *релаксационным многогранником* соответственно *покрытий, разбиений, упаковок*.

Рассмотрим покрытия и упаковки в графах. Как правило, в задачах о покрытии (упаковке) на графах в качестве покрываемого (упаковываемого) множества $I$ фигурирует либо множество вершин, либо множество ребер.

Пусть дан граф $G=(V, E)$ с $m$ вершинами и $n$ ребрами. Уточним некоторые термины. Упаковку ребер графа $G$ называем *паросочетанием графа*, иными словами, паросочетание есть множество несмежных ребер. Паросочетание, покрывающее все вершины графа $G$, называется *совершенным паросочетанием*. Упаковка вершин графа $G$ называется его *внутренне устойчивым множеством*, а покрытие — *внешне устойчивым множеством*. Иными словами, внутренне устойчивым множеством графа $G$ называется подмножество его вершин, среди которых нет смежных, а внешне устойчивым — подмножество вершин, покрывающих все ребра.

Пусть $A_G$ — $(m\times n)$-матрица инциденций графа $G$, а $A_G^T$ — транспонированная матрица. Тогда важнейшие графовые характеристики определяются соотношениями:

$\nu(G)=\max\{ex\colon\ x\in M^{\overset{\leqslant}{Z}}(A_G, e)\}$ — число паросочетаний;

$\rho(G)=\min\{ex\colon\ x\in M^{\overset{\geqslant}{Z}}(A_G, e)\}$ — число реберного покрытия;

$\alpha(G)=\max\{ex\colon\ x\in M^{\overset{\leqslant}{Z}}(A_G^T, e)\}$ — число внутренней устойчивости;

$\tau(G)=\min\{ex\colon\ x\in M^{\overset{\geqslant}{Z}}(A_G^T, e)\}$ — число вершинного покрытия.

В случае, когда релаксационные многогранники покрытий, упаковок или разбиений целочисленны, в силу теоремы двойственности для введенных характеристик выполняются важные в теории графов соотношения.

Отметим, что в силу следствия 4.5 многогранники $M^{\substack{\geqslant\\\leqslant}}(A_G, e)$ целочисленны, если $G$ — двудольный граф.

Поэтому в новых обозначениях теорема Кёнига может быть переформулирована в следующей форме:

Т е о р е м а 5.1. *Если $G$ — двудольный граф, то* $\nu(G)=\tau(G)$.

Перейдем к описанию других важных классов целочисленных многогранников $M^{\leqslant}(A, e)$.

**2. Клики графа пересечений.** Сформулируем условия целочисленности релаксационного многогранника упаковок $M^{\leqslant}(A, e)$. Введем граф пересечений $G_A$ булевой матрицы $A$ следующим образом: $G_A$ имеет вершины, соответствующие каждому столбцу матрицы $A$, причем две вершины $k$ и $j$, отвечающие столбцам

$A^k$, $A^j$, соединены ребром, если скалярное произведение $A^kA^j \geqslant 1$, т. е. если в столбцах $A^k$ и $A^j$ существует по крайней мере одна компонента $a_{ik}=a_{ij}=1$. Обозначим через $A_G$ — матрицу инциденций графа пересечений $G_A$. Легко проверить, что $M_Z^{\leqslant}(A, e) = M_Z^{\leqslant}(A_G, e)$. Таким образом, задача об упаковке с произвольной матрицей инциденций $A$ эквивалентна задаче об упаковке вершин графа пересечений $G_A$. Среди первых результатов, относящихся к проблеме построения выпуклой оболочки упаковок, можно отметить следующую теорему Фалкерсона [38].

Клика графа — это его любой максимальный полный подграф.

Теорема 5.2. *Неравенство*

$$\sum_{j \in K} x_j \leqslant 1 \quad \forall K \subseteq N_n \tag{5.3}$$

*определяет* $(n-1)$*-грань* $n$*-многогранника упаковок* $\operatorname{conv} M_Z^{\leqslant}(A, e)$ *тогда и только тогда, когда* $K$ *— множество вершин некоторой клики графа пересечений матрицы* $A$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $K$ — множество вершин клики графа $G_A$. Тогда в графе $G_A$ для всех $i, j \in K$ существует ребро. Поэтому неравенство (5.3) верно для всех $x \in M_Z^{\leqslant}(A, e)$. Покажем, что размерность грани (5.3) равна $n-1$. Рассмотрим $|K|$ точек $x^i = e_i$, $i \in K$, и $n-|K|$ точек $x^{i,j}$, $i \in K$, $\forall j \in N_n \backslash K$, $(i, j) \notin E$, у каждой из которых компоненты $x_i = x_j = 1$, а остальные равны 0. Требуемая здесь вершина $i$ существует, так как по определению клика есть максимальный полный подграф. Построенные точки обращают неравенство (5.3) в равенство и являются линейно независимыми.

Чтобы доказать необходимость условий теоремы, заметим в первую очередь, что подграф, порожденный вершинами из $K$, является полным. Предположим, что этот подграф не есть клика графа $G_A$. Пусть тогда вершины множества $K \cup i$ порождают полный подграф. Тогда неравенство $\sum_{j \in K \cup i} x_j \leqslant 1$ обращают в равенство все те точки, которые обращали в равенство (5.3), и по крайней мере одна новая точка $x = e_i$. Следовательно, (5.3) не может быть гранью. Теорема 5.2 доказана.

*Матрицей клик графа* называется матрица инциденций вершин графа его кликам, т. е. $a_{ij}=1$, если вершина $v_j$ принадлежит некоторой клике $K_i$, и $a_{ij}=0$ — в противном случае. Из теоремы 5.2 вытекает, что для целочисленности многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$ необходимо, в предположении неприводимости его системы, чтобы матрица $A$ совпадала с матрицей клик своего графа пересечений. Если система задания многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$ избыточна, то в матрице $A$, кроме строк, отвечающих кликам графа пересечений, могут встречаться доминируемые ими (в векторном смысле). Опишем класс матриц $A$, для которых указанные условия будут и достаточными.

**3. Совершенные графы.** Максимальная мощность клики графа $G$ называется *плотностью* и обозначается $\omega(G)$. Граф $G$ называется *совершенным* графом, если для каждого порожденного подграфа $G'$ хроматическое число $\chi(G')$ совпадает с плотностью $\omega(G')$.

*Дополнением* $\bar{G}$ *графа* $G$ называется граф, который имеет те же вершины, что и $G$, и две вершины в $\bar{G}$ смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в $G$.

Отметим, что поскольку каждому внутренне устойчивому множеству графа $G$ отвечает клика графа $\bar{G}$, и наоборот, то $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$.

Теорема 5.3. *Пусть $A$ — матрица клик графа $G$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G$ — совершенный граф;*

(2) *релаксационный многогранник упаковок $M^{\leqslant}(A, e)$ целочисленный;*

(3) *гипотеза Бержа о том, что дополнение совершенного графа есть совершенный граф, верна.*

Доказательство. Проводим его по схеме $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1)$. Отметим, что эквивалентность утверждений (1) и (2) доказана Фалкерсоном [38], а эквивалентность утверждений (1) и (3) Ловасом [54]. При изложении доказательства теоремы мы следуем работе Ловаса [55].

$(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $G$ — совершенный граф и пусть $A$ — матрица его клик. Рассмотрим вершину $x$ многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$. Ясно, что компоненты вектора $x$ — рациональные числа и поэтому существует такое целое число $k$, что вектор $kx = (p_1, \ldots, p_n)$ — целочисленный. Каждую вершину $v_i$ совершенного графа $G$, для которой $p_i > 0$, заменим полным графом $K_{p_i}$, соединив ребрами каждую вершину графа $K_{p_i}$, со всеми теми вершинами графа $G$, которые были смежны вершине $v_i$. Легко убедиться, что полученный граф $G'$ будет совершенным. Пусть $K'$ — клика графа $G'$, и $K$ — ей соответствующий подграф графа $G$. Тогда $|K'| \leqslant \leqslant \sum_{i \in K} p_i = k \sum_{i \in K} x_i \leqslant k$. Так как $G'$ — совершенный граф, то $\chi(G') = \omega(G') \leqslant k$. Пусть $\{V'_1, \ldots, V'_k\}$ — раскраска в $k$ цветов вершин графа $G'$, при которой вершины каждого из подмножеств $V'_i$ окрашены одинаково, и пусть $V_i$, соответствующее $V'_i$, подмножество вершин графа $G$, а $y^i$ — его характеристический вектор. Каждая вершина $v_k$ принадлежит ровно $p_k$ подмножествам $V_i$. Поэтому

$$k^{-1} \sum_{i=1}^{k} y^i = x. \tag{5.4}$$

Так как $x$ — вершина многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$ и $y^i \in M^{\leqslant}(A, e)$ $\forall i \in N_k$, то равенство (5.4) имеет место лишь в случае, когда $x = y^1 = \ldots = y^k$, т. е. $x$ — целочисленная точка.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Пусть $M^{\leqslant}(A, e)$ — целочисленный многогранник. Очевидно, что тем же свойством обладает и каждая его грань. Поэтому достаточно показать, что из целочисленности многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$ следует, что $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$. Так как $M^{\leqslant}(A, e)$ — целочисленный многогранник, а $A$ — матрица клик графа $G$, то

$$\alpha(G) = \max\{ex:\ x \in M^{\leqslant}(A, e)\}. \tag{5.5}$$

Все оптимальные решения в задаче (5.5) принадлежат грани $F$, порожденной опорной гиперплоскостью $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \alpha(G)$. Грань $F$ образована пересечением некоторых граней максимальной размерности, среди которых обязательно есть хотя бы одна грань, порожденная гиперплоскостью: $\sum\limits_{i \in K} x_i = 1$, где $K$ — некоторая клика графа $G$. Клика $K$ имеет точно одну общую вершину с каждым внутренне устойчивым множеством максимальной мощности $\alpha(G)$. Поэтому $\alpha(G \setminus K) = \alpha(G) - 1$. Повторяя этот процесс, докажем, что $\alpha(G)$ клик покрывают все вершины графа $G$. Очевидно, что это есть минимальное число клик, покрывающих все вершины графа $G$. Это число называется *кликоматическим* и обозначается символом $\theta(G)$. Итак, доказано, что $\alpha(G) = \theta(G)$. Каждой клике графа $G$ отвечает внутренне устойчивое множество в графе $\bar{G}$, и наоборот. Поэтому $\chi(G) \leqslant \theta(G)$, и $\alpha(G) = \omega(\bar{G})$. В то же время $\chi(\bar{G}) \geqslant \omega(\bar{G})$, следовательно, $\chi(\bar{G}) = \omega(\bar{G})$, что и требовалось доказать.

Очевидно, что цепочка (3) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (1) доказывается полностью аналогично после замены совершенного графа $G$ на совершенный граф $\bar{G}$. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 5.3 вытекает следующая характеризация совершенных графов.

Следствие 5.4. *Граф $G$ является совершенным тогда и только тогда, когда кликоматическое число $\theta(G')$ каждого порожденного подграфа $G'$ совпадает с его числом внутренней устойчивости $\alpha(G')$.*

Характеризацию класса целочисленных многогранников $M^{\leqslant}(A, e)$ в терминах запрещенных подматриц предложил Падберг [60] — [62].

Пусть $B$ — невырожденная булева $(m \times k)$-матрица $(m \geqslant k)$.

Определение 5.2. Будем говорить, что матрица $B$ обладает свойством $\pi_{\beta, k}$, если выполнены следующие условия: 1) $B$ содержит невырожденную $(k \times k)$-подматрицу $B'$, сумма элементов каждой линии которой равна $\beta$; 2) каждая строка, не вошедшая в подматрицу $B'$, либо имеет сумму элементов строго меньшую $\beta$, либо совпадает с одной из строк подматрицы $B'$.

Теорема 5.5. *Многогранник $M^{\leqslant}(A, e)$ целочислен в том и только в том случае, когда матрица $A$ не содержит $(m \times k)$-подматриц $B$, обладающих свойством $\pi_{\beta, k}$ для $\beta \geqslant 2$, $3 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство теоремы основано на характеризации базисов (подматриц) матрицы $\| A, J_n \|$, порождающих нецелочисленные вершины многогранника $M^{\leqslant}(A, e)$ (см. задачу 16).

Сформулированные в теореме 5.5 условия не являются достаточными условиями целочисленности релаксационного многогранника покрытий $M^{\geqslant}(A, e)$. Такие условия получил Берж [28]. Булеву матрицу называем *уравновешенной матрицей*, если она не содержит квадратных подматриц нечетного порядка с суммами элементов в каждой строке и каждом столбце, равными 2. Если $A$ — уравновешенная матрица, то $M^{\geqslant}(A, e)$ — целочисленный многогранник (подробнее см. задачу 18).

В заключение сформулируем известную в теории графов так называемую сильную гипотезу Бержа о совершенных графах [27]. *Циклом без хорд* графа $G$ называется цикл, каждая вершина которого в графе $G$ инцидентна точно двум вершинам цикла. Гипотеза Бержа: граф $G$ является совершенным тогда и только тогда, когда ни он, ни его дополнение не содержат нечетных циклов длины, не меньшей 5 без хорд Гипотеза Бержа доказана пока только для планарных графов [70].

Частичным подтверждением гипотезы Бержа служит следующий результат, установленный в [62].

Теорема 5.6. *Пусть для каждого* $J \subseteq N_n$

$$T(J) = \{ j \in N_n \setminus J : A^k A^j \geqslant 1, \ k \in J \}.$$

*Тогда, если в графе пересечений матрицы $A$ $J$ является* 1) *нечетным циклом без хорд длины, не меньшей* 5, *или* 2) *его дополнением, то существуют такие целые* $\beta_j$, $0 \leqslant \beta_j \leqslant s$, *что*

$$\sum_{j \in J} x_j + \sum_{j \in T(J)} \beta_j x_j \leqslant s$$

*есть грань многогранника* $\operatorname{conv} M_Z^{\leqslant}(A, e)$. *Здесь* $s = (|S| - 1)/2$ *в случае* 1) *и* $s = 2$ — *в случае* 2).

**3. Многогранник паросочетаний.** Напомним, что *многогранником паросочетаний* данного графа $G$ называется выпуклая оболочка всех паросочетаний графа $G$. Обозначаем такой многогранник символом $M(G)$. Иначе, $M(G) = \operatorname{conv} M_Z^{\leqslant}(A_G, e)$, где $A_G$ — матрица инциденций графа $G$. Многогранник $M^{\leqslant}(A_G, e)$ содержит многогранник паросочетаний $M(G)$, но совпадает с ним лишь в случае, когда $G$ — двудольный граф (следствие 4.5). Иначе, как видно из доказательства теоремы 4.1, многогранник $M^{\leqslant}(A_G, e)$ имеет вершины с координатами, равными $^1/_2$. Внимательно проследив доказательство теоремы 4.1, можно установить следующий факт.

Предложение 5.7. *Пусть $C_1, \ldots, C_p$ — различные нечетные циклы, и пусть $\mathcal{P}$ — паросочетание в подграфе, порожденном вершинами, не входящими в $C_i$, $\forall i \in N_p$. Тогда вектор $x$*

*с компонентами*

$$x_i = \begin{cases} 1/2, & \text{если } e_i \in C_1 \cup \ldots \cup C_p, \\ 1, & \text{если } e_i \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5.6}$$

*является вершиной многогранника* $M^{\leqslant}(A_G, e)$, *и каждая его вершина имеет вид* (5.6).

Таким образом, чтобы построить систему неравенств, задающих $M(G)$, необходимо построить гиперплоскости, отсекающие от $M^{\leqslant}(A_G, e)$ вершины (5.6) при $p \geqslant 1$. Такое описание выпуклой оболочки $M(G)$ впервые дал Эдмондс [35].

Теорема 5.8. *Многогранник* $M(G)$ *паросочетаний графа* $G$ *задается следующей системой неравенств*:

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in N_n, \tag{5.7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant 1 \quad \forall i \in N_m, \tag{5.8}$$

$$\sum_{j:\, e_j \in G(S)} x_j \leqslant \frac{|S|-1}{2} \quad \forall S \subseteq V,\ |S| - \text{нечетно}. \tag{5.9}$$

Доказательство. Отметим сначала, что характеристический вектор каждого паросочетания графа $G$ удовлетворяет неравенствам (5.7) — (5.9). Далее покажем, что каждая $(n-1)$-грань $n$-многогранника порождается одной из опорных гиперплоскостей, уравнение которой получим превращением некоторого из неравенств (5.7) — (5.9) в равенство. Итак, пусть гиперплоскость $H$, заданная уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b, \tag{5.10}$$

порождает $(n-1)$-грань $F$ многогранника $M(G)$, и пусть многогранник $M(G)$ лежит в полупространстве $H^-$.

Случай 1. Пусть существует такой индекс $j_0$, что $a_{j_0} < 0$. Тогда каждое паросочетание $x$, принадлежащее грани $F$, необходимо удовлетворяет условию $x_{j_0} = 0$, иначе $H$ — не опорная гиперплоскость. Следовательно, $\dim F < n-1$ и случай 1 невозможен.

Случай 2. Пусть все $a_j \geqslant 0$, и существует такая вершина $v_i$ графа $G$, что каждое паросочетание, принадлежащее грани $F$, содержит ребро, инцидентное $v_i$. Тогда каждое такое паросочетание удовлетворяет равенству

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 1, \tag{5.11}$$

и следовательно, соответствующее (5.11) неравенство совпадает с (5.8).

Случай 3. Пусть $a_j \geqslant 0$ $\forall j \in N_n$, и для каждой вершины графа $G$ существует паросочетание, которое ее не содержит, но само принадлежит грани $F$. Пусть $G'$ — граф, образованный ребрами $e_j$, для которых $a_j > 0$. Считаем, что $G'$ — связный граф, иначе все построения проводим для каждой его компоненты связности. Покажем, что каждое паросочетание, принадлежащее грани $F$, не покрывает точно одну вершину из $G'$. Предположим, что $\mathscr{P}_1$ — паросочетание, принадлежащее грани $F$ и не покрывающее вершины $u$, $v \in V$. Проводим индукцию по расстоянию между $u$ и $v$. Утверждение тривиально, если $u$ и $v$ смежны в $G'$. Если $u$ и $v$ не смежны, то выбираем вершину $z$ на кратчайшей цепи между $u$ и $v$. Пусть $\mathscr{P}_2$ — паросочетание, которое принадлежит грани $F$, но не покрывает вершину $z$. По индуктивному предположению, $\mathscr{P}_1$ покрывает $z$, а $\mathscr{P}_2$ покрывает как $u$, так и $v$. Рассмотрим две связные компоненты графа $\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_2$, которые содержат вершины $u$ и $v$ соответственно. Это будут цепи. Одна из них, например, цепь $C$, не содержит вершину $z$. Положим $\mathscr{P}' = (\mathscr{P}_1 - (\mathscr{P}_1 \cap C)) \cup (\mathscr{P}_2 \cap C)$, $\mathscr{P}'' = (\mathscr{P}_2 - (\mathscr{P}_2 \cap C)) \cup (\mathscr{P}_1 \cap C)$. Тогда $\mathscr{P}'$ и $\mathscr{P}''$ будут паросочетания, для которых справедливо

$$2b \geqslant \sum_{i:\, e_i \in \mathscr{P}'} a_i x_i + \sum_{i:\, e_i \in \mathscr{P}''} a_i x_i = \sum_{i:\, e_i \in \mathscr{P}_1} a_i x_i + \sum_{i:\, e_i \in \mathscr{P}_2} a_i x_i = 2b.$$

Итак, паросочетание $\mathscr{P}''$ принадлежит грани $F$, не покрывает $z$ и либо $u$, либо $v$. Полученное противоречие показывает, что граф $G'$ имеет нечетное число вершин, и каждое паросочетание, принадлежащее грани $F$, удовлетворяет равенству

$$\sum_{i:\, e_i \in G(S)} x_i = \frac{|S|-1}{2}, \tag{5.12}$$

где $S$ — множество вершин графа $G'$. Следовательно, равенства (5.12) и (5.9) идентичны. Теорема доказана.

## § 6. Полиматроиды

В этом параграфе изучается особый класс целочисленных многогранников — полиматроидов. Простое строение граничного комплекса полиматроидов позволяет эффективно решать задачи максимизации (минимизации) линейных и выпуклых функций на множестве целых точек полиматроидов. Полиматроиды введены Эдмондсом [36], им же получены основные результаты об их строении.

**1. Субмодулярные функции.** На множестве $E_n^+$ введем частичный порядок $x \leqslant y$, имея в виду покоординатные неравенства $x_i \leqslant y_i$, $\forall i \in N_n$. Пусть $D \subseteq E_n^+$. Элемент $x^0 \in D$ называется *минимальным* (*максимальным*) *элементом частично упорядоченного множества* $D$, если не существует другого элемента $x$ из $D$ такого, что $x \leqslant x^0$ ($x \geqslant x^0$). Для $x$, $y \in E_n^+$ символом $x \vee y$ обозначаем вектор с координатами $\max(x_i, y_i)$ и символом $x \wedge y$ — вектор с координатами $\min(x_i, y_i)$.

Определение 6.1. *Ограниченным полиматроидом* в $E_n^+$ называется многогранник $M$, обладающий свойствами: (1) если $0 \leqslant y \leqslant x$, $x \in M$, то $y \in M$; (2) для всякого вектора $a \in E_n^+$ все максимальные элементы множества $M_a = \{x \in M\colon \ x \leqslant a\}$ имеют одинаковую сумму компонент.

Максимальные элементы множества $M_a$ называются *базами вектора*, а сумма их компонент называется *рангом* этого вектора и обозначается через $r(a)$. Функцию $r(a)$, заданную на $E_n^+$, называем *ранговой функцией полиматроида*.

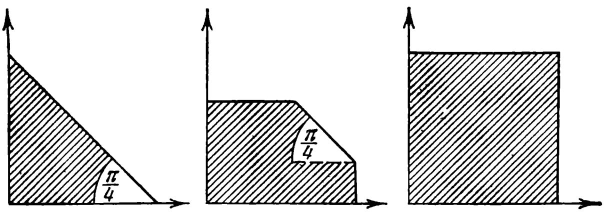



Рис. 30.

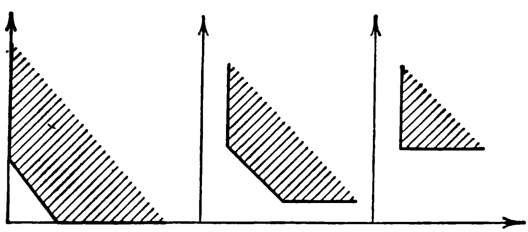


Рис. 31.

Определение 6.2. *Неограниченным полиматроидом* в $E_n^+$ называется полиэдр $Q$, обладающий свойствами: (1) если $y \geqslant x$, $x \in Q$, то $y \in Q$; (2) для всякого вектора $a \in E_n^+$ каждый минимальный вектор в множестве $Q_a = \{x \in Q\colon \ x \geqslant a\}$ имеет одну и ту же сумму компонент, называемую рангом $r(a)$ вектора $a$.

Полиматроиды в $E_2^+$ (ограниченный и неограниченный) изображены на рис. 30, 31.

Займемся изучением способов описания полиматроидов с помощью систем линейных неравенств.

Определение 6.3. Действительную функцию, заданную на $2^{N_n}$, называем *субмодулярной*, если выполняется неравенство

$$\rho(U) + \rho(V) \geqslant \rho(U \cup V) + \rho(U \cap V) \quad \forall U,\ V \subseteq N_n$$

и *супермодулярной*, если имеет место противоположное неравенство.

Теорема 6.1. *Многогранник $M \subset E_n^+$ является ограниченным полиматроидом тогда и только тогда, когда на $2^{N_n}$ существует такая неубывающая субмодулярная функция $\rho(\omega)$ $(\rho(\varnothing)=0)$, что $M = M(\rho)$, где*

$$M(\rho) = \left\{x \in E_n^+ : \sum_{i \in \omega} x_i \leqslant \rho(\omega) \quad \forall \omega \subseteq N_n\right\}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $M$ — полиматроид с ранговой функцией $r$. Определим функцию $\rho(\omega)$ по правилу $\rho(\varnothing)=0$, $\rho(\omega) = \max\left\{\sum_{i \in \omega} x_i : x \in M\right\}$. Ясно, что $\rho(\omega)$ — неубывающая и неотрицательная функция. Покажем, что $\rho(\omega)$ — субмодулярная функция. Для $U$, $V \subseteq N_n$ определим векторы $u$ и $v$ следующим образом:

$$u_j = \begin{cases} \rho(j), & \text{если} \quad j \in U, \\ \rho(N_n), & \text{если} \quad j \notin U, \end{cases}$$

$$v_j = \begin{cases} \rho(j), & \text{если} \quad j \in V, \\ \rho(N_n), & \text{если} \quad j \notin V. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\rho(U) = r(u)$, $\rho(V) = r(v)$, $\rho(U \cup V) = r(u \vee v)$ и $\rho(U \cap V) = r(u \wedge v)$. Субмодулярность функции $\rho(\omega)$ будет доказана, если мы убедимся в справедливости неравенства

$$r(u) + r(v) \geqslant r(u \vee v) + r(u \wedge v). \tag{6.2}$$

Пусть $a$ — база вектора $u \wedge v$. Тогда из определения полиматроида следует, что существует вектор $b \in M$, удовлетворяющий условиям $a \leqslant b \leqslant u \vee v$, $r(b) = \sum_{i=1}^{n} b_i = r(u \vee v)$. Отсюда $a = b \wedge (u \wedge v)$, что дает $a + b = (b \wedge u) + (b \wedge v)$. Но $b \wedge u$, $b \wedge v \in M$, и при этом $b \wedge u \leqslant u$, $b \wedge v \leqslant v$. Поэтому

$$r(u \wedge v) + r(u \vee v) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (b \wedge u)_i + \sum_{i=1}^{n} (b \wedge v)_i \leqslant r(u) + r(v).$$

Неравенство (6.2) доказано. Осталось показать, что $M = M(\rho)$. Из определения $\rho(\omega)$ вытекает, что $M \subseteq M(\rho)$. Докажем, что $M(\rho) \subseteq M$. Пусть $x \in M(\rho)$, но $x \notin M$. Тогда выбираем базу $u$ вектора $x$ с наибольшим числом компонент $u_i$, меньших $x_i$. Пусть $w = (u + x)/2$ и пусть $J(u) = \{i \in N_n : u_i < x_i\}$. Тогда $u \leqslant w \leqslant x$. Ясно, что $u$ является также базой вектора $w$. Тогда $r(x) = r(w)$, и каждая база $w$ есть также база вектора $x$. Для $\omega \subseteq N_n$ определим вектор $x^{\omega}$ с координатами $x_i^{\omega} = x_i$, $\forall i \in \omega$, и $x_i^{\omega} = 0$,

$\forall l \in N_n \setminus \omega$. Так как

$$\sum_{i \in J(u)} u_i < \sum_{i \in J(u)} w_i \leqslant \rho(J(u)),$$

то вектор $u \wedge x^{J(u)}$ не может быть базой вектора $w \wedge x^{J(u)}$. Расширяя его до базы $w \wedge x^{J(u)}$, получим базу $\hat{u}$ вектора $w$. Так как

$$\sum_{i \in J(u)} \hat{u}_i > \sum_{i \in J(u)} u_i, \quad \sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i = \sum_{i=1}^{n} u_i,$$

то $\hat{u}_i < u_i$ для некоторого $i \notin J(u)$. Последние неравенства противоречат выбору вектора $u$, как вектора с максимальной мощностью множества $J(u)$. Таким образом, $M = M(\rho)$.

Достаточность. Пусть дан многогранник $M(\rho)$, где $\rho(\omega)$ — субмодулярная неубывающая функция, причем $\rho(\varnothing) = 0$. Свойство (1) из определения 6.2, очевидно, выполняется. Пусть для некоторого вектора $z \in E_n^+$ существуют базы $u$, $v$, для которых свойство (2) не выполняется, т. е. $r(u) < r(v)$. Положим $J(u) = \{i \in N_n\colon u_i < v_i\}$. Тогда для $e \in J(u)$ существует множество $\omega_e \subseteq N_n$ такое, что $e \in \omega_e$ и

$$\sum_{i \in \omega_e} u_i = \rho(\omega_e). \tag{6.3}$$

Пусть $\omega$ — максимальное подмножество $N_n$, обладающее свойством (6.3). Из субмодулярности функции $\rho(\omega)$ следует, что

$$\sum_{i \in \omega \cup \omega_e} u_i = \rho(\omega \cup \omega_e).$$

Отсюда видно, что если $e \notin \omega$, то $\omega$ — не максимальное множество со свойством (6.3). Поэтому $e \in \omega$. Так как $e$ — произвольный элемент из $J(u)$, то $J(u) \subset \omega$. Но тогда $\rho(\omega) = \sum_{i \in \omega} u_i < \sum_{i \in \omega} v_i$, а это противоречит тому, что $v \in M(\rho)$. Теорема доказана.

Если функция $\rho(\omega)$ является субмодулярной, то функция $\rho'(\omega) = \rho(N_n) - \rho(N_n \setminus \omega)$ является супермодулярной. Поэтому множество $Q(\rho') = \left\{x \in E_n\colon \sum_{l \in \omega} x_l \geqslant \rho'(\omega) \quad \forall \omega \subseteq N_n\right\}$ является неограниченным полиматроидом тогда и только тогда, когда множество $M(\rho)$ является ограниченным полиматроидом.

Теорема 6.2. *Полиэдр $Q \subseteq E_n^+$ является неограниченным полиматроидом тогда и только тогда, когда существует такая неубывающая супермодулярная функция $\rho'(\omega)$, $\rho'(\varnothing) = 0$, что $Q = Q(\rho')$.*

**2. Вершины полиматроида.** Для каждой перестановки $(\pi_1, \ldots, \pi_n) \in S_n$ определим множества $\omega_\pi^0 = \varnothing$, $\omega_\pi^s = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ $\forall s \in N_n$.

Теорема 6.3. *Точка $x$ является вершиной (ограниченного или неограниченного) полиматроида $M(\rho)$ тогда и только тогда, когда* *существует такая перестановка* $\pi \in S_n$ *и целое число* $0 \leqslant k \leqslant n$ *такие, что компоненты вектора* $x$ *вычисляются по правилу*

$$x_{\pi_s} = \rho(\omega_\pi^s) - \rho(\omega_\pi^{s-1}) \quad \forall s \in N_k, \qquad (6.4)$$
$$x_{\pi_s} = 0 \quad \forall s \in N_n \setminus N_k.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для произвольного вектора $c = (c_1, \ldots, c_n)$ максимум в задаче линейного программирования

$$\max \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \qquad (6.5)$$

$$\sum_{i \in \omega} x_i \leqslant \rho(\omega) \quad \forall \omega \subseteq N_n, \qquad (6.6)$$

$$x_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_n \qquad (6.7)$$

достигается в точке, вычисленной по правилу (6.4) (см. задачу 1 к гл. I). Рассмотрим задачу

$$\min \sum_{\omega \subseteq N_n} \rho(\omega) y_\omega, \qquad (6.8)$$

$$y_\omega \geqslant 0 \quad \forall \omega \subseteq N_n, \qquad (6.9)$$

$$\sum_{\substack{\omega \subseteq N_n \\ \omega \ni i}} y_\omega \geqslant c_i \quad \forall i \in N_n, \qquad (6.10)\,^{*)}$$

двойственную к (6.5)—(6.7). Пусть $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — перестановка, обладающая свойством $c_{\pi_1} \geqslant \ldots \geqslant c_{\pi_k} > 0 \geqslant c_{\pi_{k+1}} \geqslant \ldots \geqslant c_{\pi_n}$. Определим вектор $y^*$ с компонентами

$$y^*_{\omega_\pi^s} = c_{\pi_s} - c_{\pi_{s+1}} \quad \forall s \in N_{k-1},$$
$$y^*_{\omega_\pi^k} = c_{\pi_k},$$
$$y^*_\omega = 0, \quad \omega \neq \omega_\pi^i \quad \forall i \in N_k.$$

Непосредственно проверяется, что $y^*$ удовлетворяет ограничениям (6.9), (6.10) и $\sum_{\omega \subseteq N_n} \rho(\omega) y^*_\omega = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*$, где компоненты вектора $x^*$ определены по правилу (6.4). Согласно теореме двойственности линейного программирования векторы $x^*$ и $y^*$ являются оптимальными решениями соответственно прямой (6.5)—(6.7) и двойственной (6.8)—(6.10) задач. Теорема доказана.

Если функция $\rho(\omega)$ на $2^{N_n}$ принимает только целые значения, то многогранник (полиматроид) $M(\rho)$ является целочисленным.

**3. Грани полиматроида.** Для определенности будем считать, что $M = M(\rho)$ — ограниченный полиматроид. Все утверждения

---

*) В (6.10) суммирование ведется по всем $\omega \subseteq N_n$, содержащим элемент $i$.

очевидным образом распространяются на случай неограниченных полиматроидов.

Определение 6.3. Подмножество $\omega^0 \subset N_n$ назовем $\rho$-*замкнутым*, если для каждого $\omega \supset \omega^0$, $\omega \subseteq N_n$ имеет место неравенство $\rho(\omega^0) < \rho(\omega)$. Подмножество $\omega^0 \subseteq N_n$ назовем $\rho$-*сепарабельным*, если $\rho(\omega^0) = \rho(\omega_1^0) + \rho(\omega_2^0)$, где $\omega_1^0 \cup \omega_2^0 = \omega^0$ и $\omega_1^0 \cap \omega_2^0 = \varnothing$. В противном случае множество $\omega^0$ назовем $\rho$-*несепарабельным*.

Легко проверить, что полиматроид $M(\rho)$ в $E_n^+$ имеет размерность $n$ тогда и только тогда, когда пустое множество является $\rho$-*замкнутым*. Если размерность многогранника $M$ в $E_n$ равна $n$, существует единственная неприводимая система линейных неравенств такая, что множество их решений есть $M$. Такие неравенства определяют $(n-1)$-грани $M$.

Теорема 6.4. *Пусть для функции $\rho(\omega)$ пустое множество является $\rho$-замкнутым. Тогда $(n-1)$-гранями $n$-полиматроида $M(\rho)$ являются множества вида $F_j = \{x \in M(\rho)\colon x_j = 0\}$ для каждого $j \in N_n$ и*

$$F_\omega = \left\{x \in M(\rho)\colon \sum_{i \in \omega} x_i = \rho(\omega)\right\}$$

*для каждого $\rho$-замкнутого и $\rho$-несепарабельного подмножества $\omega \subseteq N_n$.*

**4. Пересечение полиматроидов.** Следующая теорема описывает класс целочисленных многогранников, матрицы ограничений которых не являются абсолютно унимодулярными.

Теорема 6.5. *Пусть $M_1$ и $M_2$ — два целочисленных полиматроида в $E_n^+$. Тогда многогранник $M_1 \cap M_2$ является целочисленным.*

Доказательство. Покажем сначала, что если для некоторого вектора $x^0 \in M(\rho)$ выполняются равенства

$$\sum_{i \in U} x_i^0 = \rho(U), \quad \sum_{i \in V} x_i^0 = \rho(V),$$

то либо $U \cap V = \varnothing$, либо

$$\sum_{i \in U \cap V} x_i = \rho(U \cap V). \tag{6.11}$$

Считаем для определенности, что $M(\rho)$ — ограниченный полиматроид, т. е. $\rho$ — субмодулярная функция. Из субмодулярности функции $\rho$ следует, что

$$\rho(U \cup V) + \rho(U \cap V) \leqslant \rho(U) + \rho(V) = \sum_{i \in U} x_i^0 + \sum_{i \in V} x_i^0 =$$
$$= \sum_{i \in U \cup V} x_i^0 + \sum_{i \in U \cap V} x_i^0 \leqslant \rho(U \cup V) + \rho(U \cap V).$$

Отсюда получаем требуемое равенство (6.11).

Пусть $x^0$ — произвольная вершина многогранника $M_1 \cap M_2$, где $M_i = M(\rho_i)$. Тогда ее ненулевые координаты являются решением системы уравнений

$$\sum_{i \in \omega} x_i = \rho_1(\omega) \quad \forall \omega \in V_1, \tag{6.12}$$

$$\sum_{i \in \omega} x_i = \rho_2(\omega) \quad \forall \omega \in V_2, \tag{6.13}$$

где $V_1$, $V_2$ — семейства подмножеств множества $N_n$. В силу доказанного выше свойства любые два подмножества из $V_i$ либо не пересекаются, либо в $V_i$ существует третье подмножество, совпадающее с их пересечением. Поэтому из матрицы $A$ коэффициентов системы (6.12), (6.13) путем вычитания в каждой группе $V_i$ соответствующих строк можно получить матрицу $A'$ типа, указанного в предложении (3) теоремы 4.1. Итак, $A'$ — абсолютно унимодулярная матрица. Следовательно, система (6.12), (6.13) имеет целочисленное решение. Теорема доказана.

Земетим, что у многогранника, который является пересечением трех и более целочисленных полиматроидов, могут быть нецелочисленные вершины.

**5. Многогранник матроида.** Теория матроидов обобщает многие результаты теории графов, проективной геометрии, теории электрических цепей. В терминах экстремальных задач на матроидах могут быть сформулированы различные оптимизационные задачи, в первую очередь задачи оптимизации на сетях. Покажем, что многогранники условий в большинстве экстремальных задач на матроидах являются целочисленными.

Определение 6.4. *Матроидом* $\mathcal{M}$ называется пара $(J, \mathcal{F})$, в которой $J$ есть конечное множество и $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств $J$, называемых *независимыми множествами* и обладающих свойствами: 1) каждое подмножество независимого множества само независимо; 2) для всякого подмножества $\omega \subseteq J$ все независимые множества матроида, содержащиеся в $\omega$ и являющиеся максимальными в $\omega$ по включению, имеют одинаковое число элементов.

Максимальные по включению независимые множества называют *базисами матроида*, *рангом* $r(\omega)$ множества $\omega \subseteq J$ называют мощность максимального независимого подмножества из $J$.

Предоставляем читателю доказать эквивалентность определения 6.4 ранее данному определению 4.5 гл. I.

Приведем примеры наиболее важных матроидов. В § 5 гл. I мы рассматривали так называемый векторный матроид, у которого множество $J$ состоит из столбцов матрицы $A$, а $\mathcal{F}$ содержит все линейно независимые подмножества столбцов из $A$.

Пусть $J$ — множество ребер графа $G$, а $\mathcal{F}$ состоит из подмножеств ребер, являющихся ребрами ациклических подграфов графа $G$ (лесов). Пара $\mathcal{M} = (J, \mathcal{F})$ является матроидом, который называется *графическим*. Базисами графического матроида являются все остовные леса, а в случае, когда $G$ — связный граф, все остовные деревья.

Пусть дано разбиение конечного множества $J$ на $m$ различных подмножеств $E_1, \ldots, E_m$, для каждого из которых задано целое неотрицательное число $d_i$. Рассмотрим семейство $\mathscr{F} \subset 2^J$ такое, что каждое $I \in \mathscr{F}$ содержит не более $d_i$ элементов множества $E_i$ $\forall i \in N_m$. Пара $\mathscr{M} = (J, \mathscr{F})$ является матроидом, который называется *матроидом разбиений*. В случае, когда $d_i = 1$ $\forall i \in N_m$, матроид разбиений называется *трансверсальным матроидом*, независимые множества называются *частичными трансверсалями*, а базисы — *системами различных представителей*.

Матроид паросочетаний определяется на множестве вершин данного графа, независимыми множествами являются подмножества вершин, для которых в $G$ существует совершенное паросочетание.

Пусть $\mathscr{M} = (J, \mathscr{F})$ — матроид, и пусть $r(\omega)$ — его ранговая функция. Из определения матроида вытекает, что $r(\varnothing) = 0$, и $r(\omega)$ — неубывающая функция.

Покажем, что ранговая функция матроида является субмодулярной:

$$r(U \cup V) + r(U \cap V) \leqslant r(U) + r(V).$$

Обозначим через $\omega_{U \cap V}$ — максимальное независимое подмножество множества $U \cap V$. Так как $\omega_{U \cap V}$ — независимое подмножество в $U$, то его можно расширить до максимального независимого подмножества $\omega_U$ множества $U$. Аналогичным образом множество $\omega_U$ можно расширить до максимального независимого подмножества $\omega_{U \cup V}$ множества $U \cup V$. Поскольку множество $\omega_{U \cap V} \cup (\omega_{U \cup V} \setminus \omega_U)$ является независимым подмножеством в $V$, то отсюда следует, что

$$r(V) \geqslant r(\omega_{U \cap V} \cup (\omega_{U \cup V} \setminus \omega_U)) =$$
$$= |\omega_{U \cap V}| + |\omega_{U \cup V}| - |\omega_U| = \rho(U \cap V) + \rho(U \cup V) - \rho(U).$$

Это и требовалось доказать. Поэтому в силу теоремы 6.1 многогранник

$$M(r) = \left\{x \in E_n^+ : \sum_{i \in \omega} x_i \leqslant r(\omega) \ \ \forall \omega \subseteq N_n\right\}, \qquad n = |J|$$

является полиматроидом. Его будем называть *многогранником матроида* $\mathscr{M}$.

Теорема 6.6. *Вершины многогранника матроида и только они являются характеристическими векторами независимых множеств матроида.*

Доказательство. Для характеристического вектора $x^0$ любого независимого множества $F$ матроида $\mathscr{M}$ выполняются ограничения

$$\sum_{i \in \omega} x_i^0 \leqslant r(\omega) \qquad \forall \omega \subseteq N_n,$$

так как множество $\omega \cap F$ является независимым подмножеством и поэтому

$$\sum_{i \in \omega} x_i^0 = r(\omega \cap F) \leqslant r(\omega).$$

Вершина многогранника $M(r)$ является единственным решением подсистемы ранга $n$, полученной путем замены некоторых из неравенств, задающих $M(r)$, на равенства. Легко усмотреть, что вектор $x^0$ — решение, например, следующей системы уравнений ранга $n$:

$$x_i = 0 \quad \forall i \notin F,$$
$$x_i = r(i) \quad \forall i \in F.$$

Следовательно, вектор $x^0$ является вершиной многогранника матроида $M(r)$.

Обратное утверждение следует из теоремы 6.3 о характеризации вершин полиматроида $M(r)$ и очевидного свойства ранговой функции матроида: $r(i) = 1$, если $\{i\} \in \mathscr{F}$. Теорема доказана.

Из теорем 6.5 и 6.6 получаем следующее описание множеств, являющихся независимыми у двух данных матроидов.

Теорема 6.7. *Пусть $M_1$ и $M_2$ — многогранники матроидов $\mathscr{M}_1 = (J, \mathscr{F}_1)$ и $\mathscr{M}_2 = (J, \mathscr{F}_2)$. Тогда вершины многогранника $M_1 \cap M_2$ и только они являются характеристическими векторами всех множеств, независимых в $\mathscr{M}_1$ и в $\mathscr{M}_2$.*

Из теоремы 6.7, в частности, следует, что вершины многогранника

$$\sum_{i \in \omega} x_i \leqslant r(\omega) \quad \forall \omega \subset N_n, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = r(N_n)$$

взаимно однозначно соответствуют базисам матроида $\mathscr{M} = (J, \mathscr{F})$ с ранговой функцией $r(\omega)$.

**6. Двойственные теоремы.** Многогранник, двойственный к целочисленному многограннику, являющемуся пересечением двух полиматроидов, вообще говоря, не является целочисленным, однако, как показывает следующая теорема, задача линейного программирования, двойственная к задаче на $M_1 \cap M_2$, имеет целочисленный оптимум.

Теорема 6.8. *Пусть $c_j$ — целые числа, $r_1(\omega)$, $r_2(\omega)$ — целочисленные ранговые функции матроидов $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$. Тогда у двойственных задач линейного программирования*

$$\begin{gathered} \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \\ \sum_{j \in \omega} x_j \leqslant r_1(\omega) \quad \forall \omega \subseteq N_n, \\ \sum_{j \in \omega} x_j \leqslant r_2(\omega) \quad \forall \omega \subseteq N_n, \\ x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in N_n, \end{gathered} \tag{6.14}$$

$$\begin{gathered} \min \sum_{\omega \subseteq N_n} [r_1(\omega) y_1(\omega) + r_2(\omega) y_2(\omega)], \\ \sum_{j \in \omega \subset N_n} [y_1(\omega) + y_2(\omega)] \geqslant c_j \quad \forall j \in N_n, \\ y_1(\omega) \geqslant 0, \quad y_2(\omega) \geqslant 0 \quad \forall \omega \subseteq N_n, \end{gathered} \tag{6.15}$$

*существуют оптимальные целочисленные решения $x^*$, $y^*$, причем $cx^* = ry^*$.*

Доказательство. Достаточно показать, что у многогранника условий задачи (6.15) существует целочисленная вершина, минимизирующая $ry$. Тогда на основании теоремы двойственности линейного программирования и теоремы 6.5 о целочисленности многогранника, являющегося пересечением двух полиматроидов, получаем утверждения теоремы.

Пусть $y^0$ — оптимальное решение задачи (6.15). Рассмотрим две задачи линейного программирования для $s=1$ и $s=2$:

$$\min \sum_{\omega \subseteq N_n} r_s(\omega)\, y_s(\omega), \tag{6.16$_s$}$$

$$\sum_{j \in \omega \subseteq N_n} y_s(\omega) \geqslant c_j^s \quad \forall j \in N_n, \qquad y_s(\omega) \geqslant 0 \quad \forall \omega \subseteq N_n,$$

где $c_j^s = \sum\limits_{j \in \omega \subseteq N_n} y_s^0(\omega)$.

Пусть $y_s^*$ — оптимальное решение в задаче (6.16$_s$). Согласно теореме 6.3 существует такое $y_s^*$, что множества $\omega$, для которых $y_s^*(\omega) \neq 0$, образуют последовательность

$$\omega_s^1 \subset \omega_s^2 \subset \ldots \tag{6.17}$$

Так как $y_s^0$ удовлетворяет ограничениям задачи (6.16$_s$), то $r_s y_s^* \leqslant r_s y_s^0$ для $s=1$, 2 и поэтому $ry^* \leqslant ry^0$. В то же время $c_j^1 + c_j^2 \geqslant c_j$ для каждого $j \in N_n$ и, следовательно, $y^*$ удовлетворяет ограничениям задачи (6.15), и поэтому $y^*$ — оптимальное решение задачи (6.15). Итак, существует оптимальное решение задачи (6.15), обладающее свойством (6.17). Его ненулевые координаты удовлетворяют системе равенств

$$\sum_{j \in \omega_l} y(\omega_l^1) + \sum_{j \in \omega_l} y(\omega_l^2) = c_j \quad \forall j \in N_n. \tag{6.18}$$

Столбцы матрицы $A$ коэффициентов ограничений (6.18) можно разбить на два подмножества $V_1$ и $V_2$, причем для любых двух столбцов $A^q$, $A^p$ из одного подмножества выполняется одно из двух неравенств $A^q \geqslant A^p$ или $A^p \geqslant A^q$. Следовательно (см. задачу 11), матрица $A$ — абсолютно унимодулярная, и поэтому $y^*$ — целочисленное оптимальное решение задачи (6.15). Теорема доказана.

Из теоремы 6.8 в случае, когда $c_j = 1$, а $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$ — ранговые функции матроидов, получаем следующий известный факт.

Теорема 6.9 (Татт [71]). *Пусть $\mathcal{M}_1 = (J, \mathcal{F}_1)$ и $\mathcal{M}_2 = (J, \mathcal{F}_2)$ — матроиды с ранговыми функциями $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$. Тогда*

$$\max_{\omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} |\omega| = \min_{\omega \subseteq J} [r_1(\omega) + r_2(J \setminus \omega)].$$

Теорема 6.9 обобщает такие известные двойственные утверждения из комбинаторного анализа, как теорему Кёнига (теорема 4.6), теорему Холла (следствие 4.14), теорему о максимальном потоке и минимальном разрезе (теорема 4.8).

В задачах о покрытии на произвольном матроиде $\mathscr{M}=(J, \mathscr{F})$ в качестве покрываемого фигурирует множество $J$, а в качестве покрывающего множество $\mathscr{F}$. Аналогично формулируются задачи об упаковке и о разбиении независимых множеств матроида. Приведем некоторые из результатов, являющихся, по существу, следствием теоремы 6.8 и касающихся разбиений матроида.

Теорема 6.10. *Разбиение элементов $J$ матроида $\mathscr{M}=(J, \mathscr{F})$ с ранговой функцией $r(\omega)$ на не более чем $k$ независимых подмножеств, существует тогда и только тогда, когда $|\omega| \leqslant kr(\omega)$ для произвольного $\omega \subseteq J$.*

Когда матроид — графический, теорема 6.10 эквивалентна теореме Нэша-Вильямса о разложении на непересекающиеся по ребрам остовные леса. Теорема 6.10 допускает следующее обобщение (теорема Радо [36]).

Теорема 6.11. *Пусть $\mathscr{M}_i=(J, \mathscr{F}_i)$ — матроиды с ранговыми функциями $r_i(\omega)$ $\forall i \in N_k$. Множество $I \subseteq J$ можно разбить на $k$ подмножеств $I_i$ таких, что $I_i \in \mathscr{F}_i$ тогда и только тогда, когда для каждого подмножества $\omega \subseteq I$ справедливо неравенство* $|\omega| \leqslant \sum_{i=1}^{k} r_i(\omega)$.

## § 7. Локально целочисленные многогранники

Основная цель данного параграфа — введение классов многогранников, у которых целочисленные вершины сохраняют смежность при переходе к выпуклой оболочке всех целочисленных точек многогранника.

**1. Квазицелочисленные многогранники.**

Определение 7.1. Многогранник $M$ называется *квазицелочисленным*, если всякое ребро многогранника $\operatorname{conv} M_Z$ является ребром многогранника $M$ или, иными словами, если граф $G(\operatorname{conv} M_Z)$ является подграфом графа $G(M)$.

Интерес (см. [10], [13], [19], [52]) к изучению квазицелочисленных многогранников вызван следующим обстоятельством. Для решения задач ЦЛП, областью допустимых решений которой является множество целочисленных точек квазицелочисленного многогранника, применим симплекс-метод, в который внесена следующая поправка. Поскольку $\operatorname{conv} M_Z$ — целочисленный многогранник, то можно, начиная с любой его вершины, с помощью стандартного симплекс-метода достичь оптимума, двигаясь от вершины к вершине по ребрам многогранника $\operatorname{conv} M_Z$. Из определения квазицелочисленного многогранника следует, что этот путь существует и на многограннике $M$. Итак, наша версия симплекс-метода, назовем его *целочисленным симплекс-методом*, состоит в следующем: выбираем в качестве начального допустимого базисного решения произвольную целочисленную вершину, на каждом шаге в базис вводим переменную, обеспечивающую: 1) улучшение значения целевой функции; 2) целочисленность базисных переменных. Метод заканчивает работу и дает оптимальное решение задачи ЦЛП, когда отсутствуют кандидаты для ввода в базис, обладающие свойствами 1) и 2).

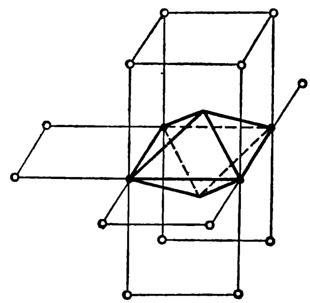


Рис. 32.

Примером квазицелочисленного многогранника является многогранник, у которого существует целочисленная грань, содержащая все его целочисленные точки. Как показывает рис. 32, существуют квазицелочисленные многогранники, целочисленные точки которых не принадлежат одной грани. Тем не менее, ввиду того, что целочисленные грани многогранника $M$ являются и гранями многогранника $\operatorname{conv} M_Z$ (теорема 2.4 гл. I), справедлив следующий достаточный (но не необходимый, см. рис. 32) признак квазицелочисленности многогранника.

Предложение 7.1. *Пусть $M_Z \subseteq \operatorname{vert} M$. Если для любых двух целочисленных вершин многогранника $M$ существует целочисленная грань их содержащая, то $M$ — квазицелочисленный многогранник.*

**2. Релаксационный многогранник разбиений.** Как показал В. А. Трубин [19], релаксационный многогранник разбиений, введенный в § 5, является квазицелочисленным. Релаксационный многогранник разбиений $M^=(A, e) \subset E_n$ задается ограничениями

$$Ax = e, \quad x \geqslant 0, \tag{7.1}$$

где $A$ — булева $(m \times n)$-матрица. Без ограничения общности, считаем, что $A$ не содержит нулевых столбцов и строк.

Теорема 7.2. *Релаксационный многогранник разбиений является квазицелочисленным.*

Доказательство. Так как $A$ — булева матрица без нулевых столбцов, то для всякой точки $x \in M^=(A, e)$ имеют место неравенства $x_i \leqslant 1$ $\forall i \in N_n$, т. е. многогранник $M^=(A, e)$ лежит внутри (0, 1)-куба. Поэтому каждая целочисленная точка из $M^=(A, e)$ является его вершиной и, следовательно, в силу предложения 7.1 для доказательства теоремы достаточно показать, что произвольные вершины $x'$, $x''$ многогранника $M^=(A, e)$ принадлежат его целочисленной грани. Разобьем множество индексов $N_n$ на три попарно непересекающихся подмножества

$$J_0=\{j:\ x'_j=x''_j=0\},\quad J_1=\{j:\ x'_j=x''_j=1\},\ J_2=\{j:\ x'_j\neq x''_j\}.$$

Рассмотрим семейство гиперплоскостей

$$x_j=0 \quad \forall j\in J_0, \tag{7.2}$$

$$x_j=1 \quad \forall j\in J_1, \tag{7.3}$$

каждая из которых является опорной к многограннику $M^=(A, e)$. Поэтому множество точек многогранника $M^=(A, e)$, удовлетворяющих условиям (7.2) и (7.3), является гранью (может совпадать с $M(A, e)$, например, если $J_0\cap J_1=\varnothing$). Обозначим эту грань через $F$. Для доказательства целочисленности многогранника $F$ достаточно убедиться в абсолютной унимодулярности матрицы $A^{J_2}$. Вектор $x^0=(x'+x'')/2\in M^=(A, e)$. Поэтому $2=\sum\limits_{j\in J} a_{ij}(x'_j+x''_j)=$ $=\sum\limits_{j\in J_2} a_{ij}$, т. е. в каждой строке матрицы $A^{J_2}$ содержится ровно два элемента, равных 1. Разобьем все столбцы матрицы $A^{J_2}$ на два непересекающихся подмножества, отнеся к первому те, для которых $x'_j=1$, а ко второму те, для которых $x''_j=1$. Таким образом, матрица $A^{J_2}$ удовлетворяет с точностью до транспозиции условиям теоремы 4.1 и, следовательно, является абсолютно унимодулярной.

Следствие 7.3. *Пусть $D$ — неотрицательная целочисленная $(m\times n)$-матрица. Тогда $M(D, e)=\{x\in E_n\colon Dx=e,\ x\geqslant 0\}$ — квазицелочисленный многогранник.*

Доказательство. Пусть $J_0$ — номера всех столбцов матрицы $D$, в каждом из которых имеется элемент, не меньший двух. Тогда согласно теореме 7.2 грань $F=\{x\in M(D, e)\colon x_i=0\ \forall i\in J_0\}$ является квазицелочисленным многогранником. Но многогранник, у которого существует квазицелочисленная грань, содержащая все его целочисленные точки, сам является квазицелочисленным.

**3. Простейшая задача размещения.** Задача заключается в следующем:

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}x_{ij}+c_iy_i),$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\quad \forall i\in N_m, \tag{7.4}$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant y_i\quad \forall (i,\ j)\in N_m\times N_n, \tag{7.5}$$

$$y_i=1,\ 0\quad \forall i\in N_m. \tag{7.6}$$

В матричной форме ограничения (7.4) и (7.5) имеют вид $A^*x\lesseqgtr b^*$, где

$$x=(x_{11}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{mn}, y_1, \ldots, y_m),$$

$$b^*=(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0),$$

$$A^*=\left\|\begin{array}{c|ccc} J_m \; J_m \; \ldots \; J_m & & & \\ \hline & -e & & \\ \cline{2-4} J_{mn} & & -e & \\ \cline{2-4} & & & -e \end{array}\right\|$$

Здесь $J_k$ — единичная $(k\times k)$-матрица, $-e$ — вектор-столбец размерности $n$, все компоненты которого равны $-1$. Обозначим через $M(A^*, b^*)$ многогранник условий (7.4) и (7.5).

Теорема 7.4. *Многогранник $M(A^*, b^*)$ простейшей задачи размещения — квазицелочисленный.*

Все целые точки многогранника $M(A^*, b^*)$ являются его вершинами. Поэтому в силу предложения 5.1 для доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 7.5. *Любые две целочисленные вершины $x'$, $x''$ многогранника $M(A^*, b^*)$ принадлежат некоторой целочисленной грани многогранника.*

Доказательство. Рассмотрим грань $F(x', x'')$ многогранника, заданную условиями (7.4), (7.5) и $y_i=y'_i$ для таких $i$, что $y'_i=y''_i$, $x_{ij}=x'_{ij}$ для таких $i$, $j$, что $x'_{ij}=x''_{ij}$.

После исключения фиксированных переменных и ограничений, обратившихся в тождества, получаем систему

$$\bar{A}\bar{x}\leqslant\bar{b},$$
$$\bar{x}\geqslant 0,$$

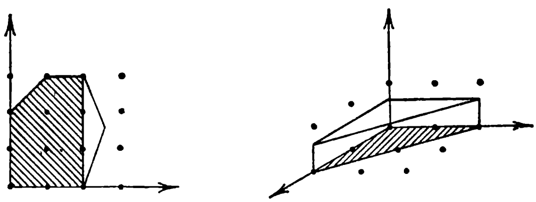
задающую область изменения нефиксированных переменных грани $F(x', x'')$ (эти переменные составляют вектор $\bar{x}$). Точка $\bar{x}^0=(\bar{x}'+\bar{x}'')/2$, дополненная фиксированными компонентами, принадлежит грани $F(x', x'')$. Поэтому в каждой из первых $m$ строк матрицы $\bar{A}$ содержится ровно два ненулевых элемента, равных 1. В остальных строках матрицы $\bar{A}$ также содержится ровно по два ненулевых элемента, равных 1 и $-1$. Как и при доказательстве теоремы 7.2, разбиваем все столбцы матрицы $\bar{A}$ на два подмножества так, чтобы были выполнены условия теоремы 4.1, в силу которой матрица $\bar{A}$ является абсолютно унимодулярной. Следовательно, $F(x', x'')$ — целочисленный многогранник. Лемма, а вместе с ней и теорема 7.4, доказаны.

**4. Связноцелочисленные многогранники.** Рассмотрим класс многогранников более широкий, чем класс квазицелочисленных, но, тем не менее, обладающих свойствами, позволяющими отыскивать локальные экстремумы в задаче целочисленного линейного программирования с помощью целочисленного симплекс-метода.

Определение 7.2. Многогранник $M$ называется *связноцелочисленным*, если подграф графа $G(M)$, порожденный его целыми вершинами, является остовным подграфом графа $G(\operatorname{conv} M_Z)$.

Иными словами, многогранник $M$ называется связноцелочисленным, если: 1) $\operatorname{vert}\operatorname{conv} M_Z \subseteq \operatorname{vert} M$; 2) подграф графа $G(M)$, порожденный его целочисленными вершинами, есть связный граф.

Отметим, что если все целочисленные точки многогранника $M$ суть его вершины, то условие 1) автоматически выполняется. Ясно, что всякий квазицелочисленный многогранник является связноцелочисленным (рис. 33, *б*), но обратное, вообще говоря, неверно (см. рис. 33, *а*). На обоих рисунках заштрихован многогранник $\operatorname{conv} M_Z$.



*а)* *б)*

Рис. 33.

Рассмотрим многогранник $M(A, e') = \{x \in En\colon\ Ax = e',\ x \geqslant 0\}$, где $A$ — булева матрица, $e' = (k, 1, \ldots, 1)$, $k$ — натуральное число больше или равное 2. Многогранник $M(A, e')$ является обобщением релаксационного многогранника разбиений.

Теорема 7.6. *Если для всякого $k$-подмножества $w$ множества $J_1 = \{j \in N_n\colon\ a_{1j} = 1\}$ грань $F(w) = \{x \in M(A, e')\colon\ x_j = 1\ \ \forall j \in w\}$ многогранника $M(A, e')$ непуста, то многогранник $M(A, e')$ является связноцелочисленным.*

Для доказательства нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 7.7. *Если множество $F(w)$ непусто, то многогранник $F(w)$ является квазицелочисленным.*

Доказательство. Подставив $x_j = 1\ \forall j \in w$, $x_j = 0\ \forall j \in J_1 \setminus w$ в систему $Ax = e'$ и удалив ограничения, которые обратились в тождества, получим систему ограничений $\bar{A}\bar{x} = \bar{e}$, $\bar{x} \geqslant 0$, определяющую вместе с фиксированными переменными грань $F(w)$. Здесь $\bar{A}$ — булева матрица, $\bar{e} = (1, \ldots, 1)$. Ввиду теоремы 7.2 $F(w)$ — квазицелочисленный многогранник.

Лемма 7.8. *Пусть $w', w'' \subset J_1$, $|w' \cap w''| = k - 1$, $x' \in F(w')$ и $x'' \in F(w'')$ — целочисленные вершины многогранника $M(A, e')$. Тогда грань $F(w', w'') = \{x \in M(A, e')\colon\ x_j = 1\ \ \forall j \in w' \cap w''\}$ является квазицелочисленным многогранником, содержащим вершины $x'$, $x''$.*

Доказательство. Грань $F(w', w'')$ задается следующей системой ограничений

$$x_j = 1 \quad \forall j \in w' \cap w'',$$
$$x_j = 0 \quad \forall j \in J_1 \setminus (w' \cup w''),$$
$$\sum_{j \in v} x_j = 1,$$
$$\sum_{j \notin J_1 \setminus (w' \cup w'')} a_{ij} x_j = 1, \quad i = 2, \ldots, m,$$

где $v = (w' \cup w'') \setminus (w' \cap w'')$. Согласно теореме 7.2 многогранник $F(w', w'')$ квазицелочисленный. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7.6. Все целочисленные точки многогранника $M(A, e')$ являются его вершинами. Поэтому достаточно показать, что между любыми двумя целочисленными вершинами $x'$, $x''$ многогранника $M(A, e')$ на его графе существует цепь, содержащая только целочисленные вершины этого многогранника. Рассмотрим грань $F(w')$, где $w' = \{j \in J_1 \colon x'_j = 1\}$, содержащую вершину $x'$, и аналогичную грань $F(w'')$, содержащую вершину $x''$. Пусть последовательность $w' = w_1, \ldots, w_s = w''$ такова, что $w' \cap w'' \subset w_i \subset J_1$, $|w_i| = k$ и $|w_i \cap w_{i+1}| = k - 1$ для любого $i \in N_s$. По условию теоремы $F(w_i) \neq \emptyset$, $\forall i \in N_n$, и, следовательно, в силу леммы 7.7, являются квазицелочисленными многогранниками. Кроме того, в силу леммы 7.8, грань $F(w_i, w_{i+1})$, $\forall i \in N_{n-1}$, является также квазицелочисленным многогранником. Поэтому если на каждой грани $F(w_i)$ выбрать целочисленную вершину $x^i$, то в графе, порожденном целочисленными вершинами многогранника $M(A, e')$, существует цепь между вершинами $x'$ и $x^{i+1}$. Объединяя такие цепи, получаем цепь между вершинами $x'$, $x''$. Теорема доказана.

5. **Медианы графа.** Пусть $M(k, n)$ — многогранник, заданный условиями

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N_n, \tag{7.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = k, \tag{7.8}$$

$$x_{ij} - x_{ii} \leqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n, \quad i \neq j, \tag{7.9}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N_n \times N_n. \tag{7.10}$$

Целочисленные точки многогранника $M(k, n)$ служат допустимой областью в важной для приложений задаче о размещении $k$-медиан в графе [14]. Поэтому многогранник $M(k, n)$ будем называть *многогранником медиан графа.* Задача о $k$-медиане заключается в выделении в данном взвешенном графе такого подмножества из $k$ вершин (медианные центры), для которого сумма весов ребер вдоль цепей, соединяющих выделенные вершины с остальными вершинами графа, минимальна. Пусть $\|c_{ij}\|_{n\times n}$ — матрица кратчайших расстояний между вершинами графа. Тогда задача о $k$-медиане графа заключается в отыскании $\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при условиях (7.7) — (7.10) и дополнительном условии: $x_{ij}$ — целые. Уравнения (7.7) гарантируют выполнимость следующего условия: каждая вершина $j$ графа $G$ будет прикреплена только к одному медианному центру. Ограничения (7.9) запрещают прикреплять вершину $j$ к вершине $i$, не являющейся медианным центром. И наконец ограничения (7.8) гарантируют, что медианных центров будет ровно $k$.

Исследуем многогранник $M(k, n)$ и покажем, что он является связноцелочисленным. Перепишем ограничения (7.7) — (7.10) в матричной форме $Ax \leqslant b$, где $x = (x_{11}, \ldots, x_{n1}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{nn})$, $b = (1, \ldots 1, k, 0, \ldots, 0)$,

$$A = \begin{Vmatrix} J_n & J_n & \ldots & J_n \\ e_1 & e_2 & \ldots & e_n \\ U_1 & & & \\ & U_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_n \end{Vmatrix}.$$

Здесь $U_k$ — $((n-1)\times n)$-матрица, полученная из единичной $J_{n-1}$ добавлением между $(k—1)$-м и $k$-м столбцами вектор-столбца, все элементы которого равны —1.

Прежде всего заметим, что многогранник $M(k, n)$, не является целочисленным. При $n > 2$ и $k \neq n-1$, многогранник $M(k, n)$ имеет вершины с дробными координатами следующего вида. Фиксируем два неравных индекса $s$, $p \in N_n$. Рассмотрим систему, составленную из уравнений (7.7) — (7.10) и условий $x_{ij} = 0$ для всех таких $(i, j)$, что $i \neq j$, $j \neq s$, $(i, j) \neq (s, p)$, $x_{is} = x_{ss}$ для всех $i \neq s$. Эту систему перепишем иначе:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = k,$$

$$x_{ss} + x_{sp} = 1,$$

$$x_{ii} + x_{is} = 1, \qquad i \neq s,$$

$$x_{is} = x_{ss}, \qquad i \neq s,$$

$$x_{ij} = 0 \qquad \text{для остальных } (i, j).$$

Ранг этой системы равен $n^2$. Следовательно, ее решение

$$x_{is} = \frac{n-k-1}{n-2}, \quad x_{ii} = \frac{k-1}{n-2}, \quad \neq s, \quad x_{sp} = \frac{k-1}{n-2},$$

$$x_{ij} = 0 \text{ для остальных } (i, j)$$

является вершиной многогранника $M(k, n)$.

Предложение 7.9. *Многогранник $M(k, n)$ медиан графа при $k=1$ и при $k=n-1$ — целочисленный.*

Доказательство. Случай $k=1$. Если $x^0=\|x_{ij}^0\|$ — нецелочисленная точка многогранника $M(1, n)$, то в силу (7.7)—(7.10) все компоненты каждого столбца равны между собой. Поэтому $x^0=\sum_{s=1}^{n}\lambda_s x^s$, где $\lambda_s=x_{ss}^0$, $x^s$ — целочисленная вершина многогранника $M(1, n)$ с ненулевыми компонентами $x_{is}=1$, $\forall i\in N_n$. Следовательно, каждая нецелочисленная точка $x^0$ представима как выпуклая комбинация вершин $x^s$ из $M(1, n)$ и поэтому не может быть вершиной. Итак, $M(1, n)$ — целочисленный многогранник.

Случай $k=n-1$. Для доказательства целочисленности многогранника $M(n-1, n)$ убедимся в выполнении соотношения $\operatorname{conv} M_Z(n-1, n)=M(n-1, n)$. Занумеруем все целые точки многогранника $M(n-1, n)$ двумя индексами $x^{s,k}$, $(s, k)\in N_n\times N_n$, $s\neq k$. Здесь индекс $s$ указывает номер столбца со всеми нулевыми компонентами, а индекс $k$ — номер столбца, содержащего две ненулевые компоненты. Иначе, точка $x^{s,k}$ имеет ненулевые компоненты

$$x_{ii}=1\quad \forall i\in N_n\setminus s,$$
$$x_{sk}=1.$$

Всякая точка $x\in\operatorname{conv} M_Z(n-1, n)$ может быть представлена в форме

$$x=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}\lambda_{sk}x^{sk}, \tag{7.11}$$

где $\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}\lambda_{sk}=1$, и каждое $\lambda_{sk}\geqslant 0$. Теперь, учитывая строение целых точек из $M(n-1, n)$, имеем

$$x=\begin{Vmatrix} \sum\limits_{s\neq 1}\sum\limits_{k\neq s}\lambda_{sk} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \sum\limits_{s\neq 2}\sum\limits_{k\neq s}\lambda_{sk} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \sum\limits_{s\neq n}\sum\limits_{k\neq s}\lambda_{sk} \end{Vmatrix}.$$

С другой стороны, пусть $x^0$ — произвольная точка многогранника $M(n-1, n)$. Так как $\dim M(n-1, n)=n^2-n-1$, то из описания многогранника $M(n-1, n)$ выразим $n$ зависимых переменных:

$$x_{ii}^0=1-\sum_{k\neq i}x_{ik}^0\quad \forall i\in N_n.$$

Сумма всех диагональных элементов матрицы $x^0$ равна $n-1$. Поэтому $\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}x_{sk}^0=1$. Следовательно, диагональные элементы матрицы $x^0$ можно представить в форме

$$x_{ii}^0=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}x_{sk}^0-\sum_{k\neq i}x_{ik}^0=\sum_{s\neq i}\sum_{k\neq s}x_{sk}^0.$$

Очевидно, что если положим $\lambda_{sk}=x_{sk}^0$ для $k\neq s$, то $\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}\lambda_{sk}=$ $=\sum_{s=1}^{n}\sum_{k\neq s}x_{ik}^0=1$. Ясно также, что $\lambda_{sk}\geqslant 0$. Поэтому любая точка $x^0\in M(n-1,\ n)$ представима в форме (7.11), и поэтому $x^0\in$ $\in \operatorname{conv} M_Z(n-1,\ n)$. Следовательно, $M(n-1,\ n)=M_Z(n-1,\ n)$, что и требовалось доказать.

Теорема 7.10. *Многогранник $M(k,\ n)$ медиан графа является связноцелочисленным при любом $k\in N_n$.*

Доказательство этой теоремы можно провести, преобразуя систему ограничений (7.7)—(7.10) в систему, задающую многогранник $M(A,\ e')$, и убеждаясь, что при таком преобразовании свойство быть связноцелочисленным многогранником сохраняется. Однако проще получить аналоги лемм 7.7, 7.8 для самого многогранника $M(k,\ n)$, из которых и будет вытекать его связноцелочисленность.

Лемма 7.11. *Все целочисленные точки многогранника $M(k,\ n)$ являются вершинами целочисленных граней $F(w)=\{x\in M(k,\ n)$: $x_{ii}=0\ \forall i\in N_n\setminus w\}$ для каждого $k$-подмножества $w$ множества $N_n$.*

Для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что абсолютно унимодулярной является матрица ограничений

$$\sum_{j\in w}x_{ij}=1,\qquad i\notin w,$$

$$x_{ij}\geqslant 0,\qquad i\notin w,\ \ j\in w,$$

определяющих область изменения нефиксированных переменных грани $F(w)$.

Лемма 7.12. *Пусть $w',\ w''\subset N_n$, $|w'\cap w''|=k-1$, $x'$ и $x''$ — две целочисленные точки, принадлежащие соответственно граням $F(w')$ и $F(w'')$ многогранника $M(k,\ n)$. Тогда существует целочисленная грань $F(w',\ w'')$, содержащая как $x'$, так и $x''$.*

Доказательство. В качестве $F(w',\ w'')$ возьмем грань многогранника $M(k,\ n)$, определенную дополнительными условиями. Область изменения нефиксированных переменных грани $F(w',\ w'')$ является многогранником $M(k,\ k+1)$. В силу предложения 7.9 грань $F(w',\ w'')$ — целочисленный многогранник. Кроме того, очевидно, что $x'$ и $x''$ принадлежат $F(w',\ w'')$. Лемма доказана.

**Задачи и дополнения**

1 [58]. Пусть $W\subset E_n$ — выпуклое множество, симметричное относительно начала координат, объем которого больше $2^n$. Тогда множество $W$ содержит целочисленную точку, отличную от нуля.

2 [2]. Множество $W$ является равномерным, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что в $\varepsilon$-окрестности любой точки $x \in W$ содержится некоторая точка $x^0 \in W_Z$. Прямая $L = \{x \in E_2\colon\ x_2 = \sqrt{2}\, x_1\}$, имеющая лишь одну целую точку (0, 0), не является равномерным множеством.

*Целочисленным базисом подпространства* называется базис этого подпространства, состоящий из целочисленных векторов. Каждое из следующих двух условий является необходимым и достаточным для равномерности линейного подпространства $L$: 1) $L$ имеет целочисленный базис; 2) $L$ может быть задано системой линейных уравнений с целыми коэффициентами.

Показать, что аффинное множество, содержащее целочисленную точку, является равномерным тогда и только тогда, когда оно может быть задано системой линейных уравнений с целыми коэффициентами. Пусть полиэдр $M$ представляется в виде $M = \{x \in E_n\colon\ Ax \leqslant b\}$, $b \in E_m$, $A \in Z_{m,\,n}$. Тогда, если множество $M$ содержит целую точку, то оно равномерно.

3. Задача целочисленного линейного программирования $\max\{cx\colon\ x \in M_Z\}$ разрешима, если существует такой вектор $x^0 \in M_Z$, что выполняется равенство $\sup\{cx\colon\ x \in M_Z\} = cx_0$. Если полиэдр $M$ задается целочисленной матрицей ограничений, то из условия $\sup\{cx\colon\ x \in M_Z\} < +\infty$ следует разрешимость рассматриваемой задачи [2], [57].

Оценки числа вершин выпуклой оболочки целочисленных точек многогранника нужны при анализе эффективности алгоритмов решения соответствующих задач оптимизации. Интересные результаты в этом направлении получены в [23]:

1) если для всякой целочисленной точки многогранника $M \subset E_n$ справедливо

$$x_j \leqslant \Delta_j - 1 \quad \forall j \in N_{n-1},$$

то $|\operatorname{vert}\operatorname{conv} M_Z| \leqslant \prod\limits_{j=1}^{n-1} (1 + \log_2 \Delta_j)$;

2) если $a_0 \geqslant \max\{a_1, \ldots, a_n\} = a$, $a_j \in Z^+$, то для числа $\nu$ вершин многогранника

$$\operatorname{conv}\left\{x \in Z_n^+\colon\ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant a_0\right\}$$

справедливо

$$\nu \leqslant \sum_{i=1}^{n}\left(1 + \left[\log_2\left(\frac{a_0}{a_i} + 1\right)\right]\right);$$

3) если, кроме того, $a_0 \geqslant a(a-1)$, то

$$\nu \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n}\binom{1 + \log_2 a_i + n - 2}{n-1}.$$

4. Уравнение $cx = \alpha$ имеет целочисленное решение тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель компонент $c_1, \ldots, c_n$ является делителем числа $\alpha$.

Несколько критериев разрешимости систем линейных однородных диофантовых уравнений в неотрицательных числах, восходящих к теореме Штимке, доказанной еще в 1915 г., дано в работе [69].

Для числа $\sigma$ целочисленных неотрицательных точек симплекса $T_n = \{x \in E_n\colon\ cx \leqslant \alpha,\ x \geqslant 0\}$ справедливы оценки [26]:

$$\frac{\alpha^n}{n! \prod\limits_{i=1}^{n} c_i} \leqslant \sigma \leqslant \frac{\left(\alpha + \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\right)^n}{n! \prod\limits_{i=1}^{n} c_i}.$$

Необходимым и достаточным условием разрешимости системы линейных уравнений $Ax=b$ при любом векторе $b \in Z_m$ является следующее: rang $A=m$, $\Delta_m(A)=1$.

Пусть $Ax=0$, $A \in Z_{m,n}$, $m<n$, — система линейных уравнений, и пусть $\theta$ — такое число, что $|a_{ij}| \leqslant \theta$ для всех $i$, $j$. Тогда существует целочисленное нетривиальное решение, для которого $|x_j| \leqslant 2(n\theta)^{m/(n-m)}$ (лемма Зигеля).

5. Не каждая конечнопорожденная полугруппа целочисленных векторов является полиэдральной. Например, полугруппа $\mathfrak{B}$, порожденная множеством $q^1=(2, 0)$, $q^2=(0, 2)$, $q^3=(1, 1)$, не является такой. Условия конечной порожденности произвольной (не обязательно полиэдральной) полугруппы $\mathfrak{B}$ целочисленных векторов дает следующая теорема: полугруппа $\mathfrak{B} \subset Z_n$ конечнопорождена тогда и только тогда, когда существует матрица $A$ с рациональными элементами такая, что kon $\mathfrak{B}=\{x \in E_n: Ax \geqslant 0\}$, и для каждого рационального вектора $v \in$ kon $\mathfrak{B}$ существует такое целое число $d$, что $dv \in \mathfrak{B}$ [15], [19]. Порождающее множество полугруппы называется *неприводимым*, если никакое его собственное подмножество не является порождающим. Если kon $\mathfrak{B}$ — острый конус, то для $\mathfrak{B}$ существует единственное неприводимое порождающее множество. Неприводимое порождающее множество полиэдральной полугруппы $K_Z$ (конус $K$ острый) состоит из целочисленных точек полуоткрытого параллелепипеда $Q$, являющихся минимальными элементами относительно следующего частичного порядка: $x \succ x'$, если $\lambda_i \geqslant \lambda'_i$ $\forall i \in N_t$, причем хотя бы для одного $i \in N_t$ выполняется строгое неравенство. Здесь $\lambda_i$ и $\lambda'_i$ — коэффициенты разложения $x=\sum_{i=1}^{t} \lambda_i q^i$, $x'=\sum_{i=1}^{t} \lambda'_i q^i$ по образующим $q^1, \ldots$ $\ldots, q^t$ конуса $K$. Верна и более общая теорема [22]. Если выпуклый конус $C$ (не обязательно полиэдральный) в $E_n$ острый, то множество всех минимальных элементов из $C_Z$ является единственным неприводимым порождающим множеством полугруппы $C_Z$.

6. Целочисленная $(n \times n)$-матрица $T$ называется *эрмитовой матрицей*, если $t_{ij}=0$, $1 \leqslant i<j \leqslant n$, и $t_{ii}>t_{ij} \geqslant 0$ для остальных элементов. Доказать, что каждую невырожденную целочисленную матрицу $A$ можно представить в виде $T=AV$ $(A=TV^{-1})$, где $V$ — унимодулярная матрица, а $T$ — эрмитова матрица, причем такое представление единственно.

7 [3]. Пусть $x_i \in \{0, 1\}$, и уравнение $\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i x_i=\alpha_0$ имеет то же множество решений, что и система $x_{2i-1}+x_{2i}=1$, $\forall i \in N_n$. Тогда $\alpha_0 \geqslant 2^{n-1}$.

8. Пусть $M$ — целочисленный $d$-многогранник, а $n$ — натуральное число. Обозначим через $nM$ сумму (§ 3 гл. I) $n$ многогранников $M$ (гомотетия с коэффициентом $n$). Пусть, кроме того, $\nu(M)$ и $\nu(\text{int}\, M)$ — число целочисленных точек в многограннике $M$ и его внутренности соответственно. Тогда имеют место утверждения [34]:

1) $\nu(nM)$ — полином $P_M(n)$ степени $d$ от $n$;

2) $\nu(\text{int}\, nM)=(-1)^d P_M(-n)$ (закон взаимности).

9. Доказать, что

1) коэффициенты разложения каждого столбца матрицы $A$ по любому ее базису равны 0, $\pm 1$ тогда и только тогда, когда $A$ — $\alpha$-модулярная матрица;

2) матрица $A$ — унимодулярна тогда и только тогда, когда существует унимодулярный базис $B$ матрицы $A$, а матрица $B^{-1}A$ — абсолютно унимодулярна.

10 [44]. Подмножество $U$ линейного пространства называется *унимодулярным множеством*, если два любых его базиса связаны унимодулярным преобразованием. Иными словами, координаты вектора $a \in U$ в любом базисе множества $U$ целочисленны. На семействе унимодулярных множеств зададим частичный порядок с помощью бинарного отношения включения $\subset$. Доказать, что число различных элементов в максимальном унимодулярном множестве $U \subset E_n$ не превосходит числа $n(n+1)$, причем равенство достигается только

на максимальных семействах, образованных из ребер $n$-симплекса, взятых со всевозможными ориентациями.

11 [43]. Пусть строки булевой $(m\times n)$-матрицы $A$ можно разбить на два непересекающихся класса $I_1$ и $I_2$, обладающих свойством: если две строки $i$ и $q$ принадлежат одному классу, и существует такой столбец с номером $k$, что $a_{ik}=a_{qk}=1$, то либо $a_{ij}\geqslant a_{qj}$ $\forall j\in N_n$, либо $a_{ij}\leqslant a_{qj}$ $\forall j\in N_n$. Тогда матрица $A$ абсолютно унимодулярна.

12 [29]. Пусть $A$ — абсолютно унимодулярная $(n\times n)$-матрица. *$k$-минорной степенью матрицы* $A$ называют матрицу $A^{(k)}$ порядка $k$, составленную из всех миноров $k$-го порядка матрицы $A$. Тогда $A^{(n-1)}$ — абсолютно унимодулярная матрица.

13. Пусть $A\in C_{m,n}$. Если многогранник $M(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)$ не пуст, то для любой такой пары векторов $w,\ v\in C_{1,n}$, удовлетворяющей условию $wA=v$, выполняется неравенство $\sum\limits_{i:\ w_i=-1} b_i^1+\sum\limits_{j:\ v_j=1} d_j^1\leqslant\sum\limits_{i:\ w_i=1} b_i^2+$ $+\sum\limits_{j:\ v_j=-1} d_j^2.$

Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $A$ — абсолютно унимодулярная матрица;

(2) для всех $b^1\leqslant b^2$ и $d^1\leqslant d^2$ приведенное неравенство есть достаточное условие для того, чтобы $M(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)\neq\varnothing$;

(3) если для целочисленных векторов $b^1\leqslant b^2$, $d^1\leqslant d^2$, $M(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)\neq$ $\neq\varnothing$, то $M_Z(A,\ b^1,\ b^2,\ d^1,\ d^2)\neq\varnothing$.

14 [64]. Неравенство $\sum\limits_{i:\ e_i\in G(S)} x_i\leqslant(|S|-1)/2$ при $S\subset V$, $|S|\equiv 1\pmod 2$ определяет $(n-1)$-грань $n$-многогранника паросочетаний $M(G)$ тогда и только тогда, когда порожденный множеством $S$ подграф $G(S)$ графа $G=(V,\ E)$ является 2-связным, а граф $G(S)$ имеет совершенное паросочетание для каждого $v\in S$.

15 [60, 55]. *Критически несовершенным графом* называется несовершенный граф, все порожденные подграфы которого совершенны. Показать, что сильная гипотеза Бержа эквивалентна следующей: каждый критически несовершенный граф является либо нечетным циклом без хорд длины, не меньшей 5, либо его дополнением. Доказать, что

1) критически несовершенный граф имеет $1+\alpha(G)\,\omega(G)$ вершин;

2) если $A_G$ — матрица клик критически несовершенного графа $G$, то многогранник $M^{\leqslant}(A_G,\ e)$ имеет только одну нецелочисленную вершину, все координаты которой равны $1/\omega(G)$.

16 [32]. Ребро $e$ графа $G$ называется *$\alpha$-критическим*, если $\alpha(G\setminus e)>$ $>\alpha(G)$. Пусть $G$ — граф, у которого $\alpha$-критические ребра образуют остовный связной подграф. Тогда неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\leqslant\alpha(G)$ определяет грань многогранника $\operatorname{conv} M_Z^{\leqslant}(A_G,\ e)$.

17. Пусть $A_G$ — матрица инциденций (вершины-ребра) графа $G=(V,\ E)$ с $m$ вершинами и $n$ ребрами. Доказать, что следующие четыре утверждения эквивалентны:

(1) $G$ — двудольный граф;

(2) $M^{\leqslant}(A_G,\ e)$ — целочисленный многогранник;

(3) $M^{\geqslant}(A_G^T,\ e)$ — целочисленный многогранник;

(4) $M^{\leqslant}(A_G^T,\ e)$ — целочисленный многогранник.

Утверждение —

(5) $M^{\geqslant}(A_G,\ e)$ — целочисленный многогранник

не эквивалентно (1), но эквивалентно следующему:

(1′) $G$ — либо двудольный граф, либо для каждого нечетного цикла $C$ графа $G$ справедливо $M^{\geqslant}(A_{G\setminus C}, e) = \varnothing$.

18 [39]. Пусть $A$ — булева матрица. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) $A$ — уравновешенная матрица;

(2) для любой собственной подматрицы $A'$ матрицы $A$ многогранники $M^{\leqslant}(A', e)$, $M^{=}(A', e)$, $M^{\geqslant}(A', e)$ целочисленны;

(3) $A$ — матрица инциденций уравновешенного гиперграфа (гиперграф называется *уравновешенным*, если каждый нечетный цикл имеет ребро, содержащее по крайней мере три вершины этого цикла);

(4) граф пересечений $G_A$ матрицы $A$ не содержит нечетных циклов без хорд.

Доказать, что каждая абсолютно унимодулярная матрица является уравновешенной, а каждая уравновешенная матрица — совершенной.

19. Пусть для булевой матрицы $A$ задача линейного программирования $\min\{ex\colon x \in M^{\geqslant}(A, b)\}$ имеет целочисленное решение для любого булевого вектора $b$. Тогда эта задача имеет целочисленное решение для любого неотрицательного целочисленного вектора $b$. Используя этот факт, доказать импликацию (1) $\Longrightarrow$ (2) теоремы 5.3.

20 [6]. Множество целочисленных точек произвольного многогранника $M(A, b)$, $A \in Z_{m,n}$, $b \in Z_m$ совпадает с целочисленными точками релаксационного многогранника разбиений $M^{=}(B, e)$, где $B$ — подматрица, полученная из матрицы $\bar{A}Q$ после вычеркивания ее первой строки. Здесь

$$\bar{A} = \left\| \begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} -b_1 \\ -b_2+1 \\ \vdots \\ -b_m+1 \end{matrix} \\ \hline 0\ldots0 & 1 \end{array} \right\|,$$

$Q$ — матрица, вектор-столбцы которой образуют порождающее множество для полиэдральной полугруппы $\mathfrak{B} = \{x \in Z^{+}_{n+1}\colon \bar{A}x \geqslant 0\}$, причем первое из неравенств $\bar{A}x \geqslant 0$ следует обратить в равенство. Взаимно однозначное соответствие между точками $x \in M_Z(A, b)$ и $u \in M_Z(B, b)$ устанавливается отображением $x = Qu$.

21. Пусть $x^0$ — вершина многогранника $M^{\leqslant}(A^T, e)$, максимизирующая функцию $ex$. Тогда существует вершина $x'$ многогранника $\operatorname{conv} M_Z^{\leqslant}(A_G^T, e)$, которая максимизирует ту же целевую функцию, и у которой компоненты, соответствующие целочисленным компонентам вектора $x^0$, имеют такие же значения.

22 [27]. Пусть $H = (I, E)$ — гиперграф. Будем говорить, что функция $h(v)$, определенная на $I$, является стохастической, если

$$0 \leqslant h(v) \leqslant 1 \quad \forall v \in I,$$
$$\sum_{v \in E_i} h(v) = 1 \quad \forall i \in N_m, \qquad m = |E|.$$

Показать, что

1) не для каждого гиперграфа $H$ существует стохастическая функция;

2) любая стохастическая на унимодулярном гиперграфе $H$ функция $h(v)$ может быть представлена в форме $h(v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(v)$, где $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$, $h_i(v)$ — стохастическая функция, принимающая значения 0 или 1.

23. Пусть $G = (V, E)$ — $m$-вершинный граф, каждой вершине $v_i$ которого приписан вес $b_i$ — целое неотрицательное число. *$b$-сочетанием* графа $G$ называется подмножество ребер, среди которых не более $b_i$ инцидентно вершине $i$.

Аналогично многограннику паросочетаний вводится многогранник $b$-сочетаний. Доказать, что он задается следующей системой линейных неравенств:

$$x_j \geqslant 0 \quad \forall j \in N_n, \qquad n = |E|,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i \quad \forall i \in N_m,$$

$$\sum_{j:\ e_j \in G(S)} x_j \leqslant \frac{1}{2} \left( \sum_{i:\ v_i \in S} b_i - 1 \right) \quad \forall S \in \mathcal{F},$$

где $\mathcal{F} = \left\{ S \subseteq V, \sum\limits_{i:\ v_i \in S} b_i \equiv 1 \pmod 2 \right\}$.

24 [55]. Собственное непустое подмножество $S$ вершин орграфа $G=(V, E)$ называется *орразрезом*, если $(i, j) \notin E$, $\forall (i, j) \in \bar{S} \times S$. Пусть $G$ — орграф, обладающий свойством: если $(i, j) \in E$, то $(j, i) \notin E$. Тогда максимальное число реберно различных орразрезов в $G$ равно минимальному числу ребер, покрывающему все орразрезы.

25 [66]. Многогранник кратчайших цепей орграфа $G=(V, E)$ задается следующей системой неравенств:

$$\sum_{j=1}^{m} x_{1j} - \sum_{j=1}^{m} x_{j1} = 1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} x_{ji} = 0, \quad i = 2, \ldots, m-1,$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{mj} - \sum_{j=1}^{m} x_{jm} = -1,$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_m,$$

где $m$ — число вершин в графе $G$, и кратчайшие цепи отыскиваются между вершинами с номерами 1 и $m$. Показать, что для многогранника кратчайших цепей гипотеза о максимальном диаметре справедлива.

26. Пусть $a$ — целочисленный положительный $n$-вектор и $\alpha$ — положительное целое число, удовлетворяющее условиям $a_j \leqslant \alpha$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j > \alpha$ $\forall j \in N_n$. Следующие два утверждения эквивалентны:

(1) $M(a, \alpha) = \{x \in E_n\colon ax \leqslant \alpha,\ 0 \leqslant x \leqslant e\}$ — целочисленный многогранник;

(2) $(a, \alpha) = \lambda(e, k)$, где $\lambda$ и $k$ — целые положительные числа.

27 [48]. Пусть $A$ — матрица инциденций графа $G$, который обладает свойством: каждая пара нечетных циклов, содержит соответственно вершины $v_1$ и $v_2$ такие, что либо $v_1 = v_2$, либо $v_1$ смежна $v_2$. Доказать, что если система $\bar{A}x = b$, где $\bar{A} = \left\| \dfrac{A \mid 0}{e} \right\|$, $b$ — целочисленный вектор, имеет как неотрицательное решение, так и целочисленное решение, то она имеет и неотрицательное целочисленное решение.

28 [48]. Пусть $G=(V, E)$ — орграф, и $\mathcal{F}$ — семейство подмножеств $V$ таких, что если $S, T \in \mathcal{F}$, $S \cap T \neq \varnothing$ и $S \cup T \neq V$, то $S \cap T \in \mathcal{F}$ и $S \cup T \in \mathcal{F}$. Пусть $\rho$ — целочисленная супермодулярная функция, определенная на $\mathcal{F}$. Тогда при целых $a_{ij}$, $d_{ij}$ $\forall (i, j) \in E$ многогранник, заданный условиями

$$a_{ij} \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad \forall (i, j) \in E,$$

$$\sum_{(i, j) \in S \times \bar{S}} x_{ij} - \sum_{(i, j) \in \bar{S} \times S} x_{ij} \geqslant \rho(S) \quad \forall S \in \mathcal{F}$$

целочисленный.

29 [73]. Пусть $\mathcal{M}$ — матроид на $J=\{e, e_1, \ldots, e_n\}$. Пусть $\|a_{ij}\|_{n\times m}$ — матрица инциденций элементов множества $J\setminus e$ и циклов матроида, содержащих элемент $e$. Тогда *e-потоком в матроиде* $\mathcal{M}$ назовем вектор $u=(u_1, \ldots, u_m)$, удовлетворяющий условиям

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}u_j \leqslant d_i \quad \forall i \in N_n,$$
$$u_j \geqslant 0 \quad \forall j \in N_m,$$

где $d_i$ — пропускная способность элемента $e_i \in J$. *Мощностью потока* назовем величину $\sum_{i=1}^{m} u_i$. Множество $C \subset J$ образует *коцикл* матроида $\mathcal{M}$, если это множество является циклом в двойственном матроиде $\mathcal{M}^*$, т. е. в матроиде, базисами которого являются в точности дополнения базисов матроида $\mathcal{M}$. Пусть $C^*$ — коцикл матроида $\mathcal{M}$, содержащий элемент $e$. *Пропускной способностью коцикла* $C^*$ назовем число $\sum_{i:\, e_i \in C^*} d_i$. Доказать, что если $\mathcal{M}$ — регулярный матроид, то максимальная мощность $e$-потока равна минимальной пропускной способности коциклов, содержащих элемент $e$.

30 [48]. Пусть $L$ — частично упорядоченное множество с коммутативными бинарными операциями $\wedge$ и $\vee$, обладающими свойствами:

$$a \prec b \Longrightarrow a\wedge b=a, \quad a\vee b=b; \quad a\wedge b \prec a, \quad a\wedge b \prec b, \; a \prec a\vee b, \quad b \prec a\vee b.$$

Пусть отображение $\varphi$: $L \to 2^J$, $J=N_n$, обладает свойствами:

1) $a \prec b \prec c \Longrightarrow \varphi(a) \cap \varphi(c) \subset \varphi(b)$;

2) $\varphi(a \vee b) \cup \varphi(a \wedge b) \subset \varphi(a) \cup \varphi(b)$;

либо

2′) $\varphi(a \vee b) \cup \varphi(a \wedge b) \supset \varphi(a) \cup \varphi(b)$;

3) $\varphi(a \vee b) \cap \varphi(a \wedge b) \supset \varphi(a) \cap \varphi(b)$.

Доказать, что если $\rho$ — неотрицательная супермодуляция (субмодулярная) целочисленная функция, то многогранник, определенный неравенствами

$$0 \leqslant x_j \leqslant d_j \;\; \forall j \in J \;\; (d_j \in Z^+),$$
$$\sum_{j \in \varphi(a)} x_j \underset{(\leqslant)}{\geqslant} \rho(a) \;\; \forall a \in L,$$

будет целочисленным.

31. Пусть $G=(U, V, E)$ — двудольный граф и пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ матроиды на $E$, независимыми множествами в которых являются подмножества $\omega$, не содержащие ребер, инцидентных одной вершине в $U$ и $V$ соответственно. Тогда пересечение многогранников матроидов $M_1$, $M_2$ является допустимой областью в задаче о назначении.

32. Если $M$ — целочисленный полиматроид, все вершины которого имеют в качестве координат 0 или 1, то существует матроид $\mathcal{M}$, многогранником которого является $M$.

33. Найти условия, которым должны удовлетворять функции $\rho_1(\omega)$ и $\rho_2(\omega)$, чтобы полиматроиды $M(\rho_1)$ и $M(\rho_2)$ были комбинаторно эквивалентными. Описать полиматроиды с максимальным числом вершин.

34 [33]. Пусть заданы два матроида $\mathcal{M}=(J, \mathcal{F}_1)$ и $\mathcal{M}=(J, \mathcal{F}_2)$, $J=N_n$, и пусть $r_1(\omega)$ и $r_2(\omega)$ — ранговые функции матроидов, $r(\omega)=\min\{r_1(\omega_1)+r_2(\omega_2) : \omega_1 \cup \omega_2=\omega\}$. Доказать, что вершины полиэдра $M=\left\{x \in E_n\colon \sum_{i\in\omega} x_i \geqslant r(N_n)-r(N_n\setminus\omega)\, \forall \omega \subseteq N_n\right\}$ и только они являются характеристическими

векторами общих независимых множеств максимальной мощности матроидов $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

35. Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство подмножеств множества $E_n$. Тогда, если $\mathcal{F}$ содержит множества $\emptyset$, и $J$, и вместе с любыми двумя множествами $U$ и $V$ содержит $U \cap V$, то многогранник в $E_n^+$, заданный условиями $\sum_{i \in \omega} x_i \leqslant \rho(\omega)\ \forall \omega \in \mathcal{F}$, является полиматроидом при любой субмодулярной неотрицательной неубывающей функции $\rho(\omega)$. Его ранговая функция $r(a)$ задается следующим выражением:

$$r(a) = \min\left\{\sum_{i \in J} a_i z_i + \sum_{\omega \in \mathcal{F}} \rho(\omega)\, y(\omega):\ z_j + \sum_{\omega \ni j} \rho(\omega)\, y(\omega) \geqslant 1 \forall j \in J\right\}.$$

36. В работах [10]—[12] построена теория дискретно-выпуклого программирования, в рамках которой установлено, что полиматроиды в выпуклом целочисленном программировании играют ту же роль, что выпуклые множества в выпуклом программировании.

Пусть $M$ — полиматроид в $E_n^+$. Сепарабельную функцию $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, заданную на $M_Z$, называем *дискретно-выпуклой*, если $\Delta_i(x) \geqslant \Delta_i(y)$ при $x \leqslant y$, где $\Delta_i(x) = f_i(x+1) - f_i(x)$. Величина $\Delta_i(x)$ называется *$i$-градиентом функции* $f(x)$.

Градиентный алгоритм, начиная с точки $x^0 = 0$, вырабатывает итерационную последовательность $x^k$ по правилу $x^k = x^{k-1} + e_{i_k}$, где индекс $i_k$ отвечает наибольшему положительному $i$-градиенту, среди тех $i$, что $x^{k+1} + e_i \in M_Z$. Если такого индекса не существует, то алгоритм заканчивает работу, и полученное решение является оптимальным в задаче максимизации сепарабельной дискретно-выпуклой функции на полиматроиде $M$.

Если множество $M$ не является полиматроидом, но для $M$ выполнено первое условие из определения полиматроида, то для решения $x^g$, полученного с помощью градиентного алгоритма, справедлива оценка

$$\frac{f(x^g)}{f(x^*)} \geqslant \min_{a \in Z_n^+} \frac{l(M_a)}{h(M_a)},$$

где $M_a = \{x \in M_Z:\ x \leqslant a\}$, $h(M) = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i:\ x \in M_Z\right\}$, $l(M) = \min\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i:\ x \in M_Z,\ x + e_i \notin M_Z\ \forall i \in N_n\right\}$ — максимальная и минимальная высота множества $M_Z$. Ясно, что максимальная и минимальная высоты каждого из подмножеств $M_a$ полиматроида $M$ совпадают.

Если, кроме того, и дискретно-выпуклая функция $f(x)$ не является сепарабельной, то справедлива оценка

$$\frac{f(x^*) - f(x^g)}{f(x^*) - f(0)} \leqslant \left(1 - \frac{1}{h(M)}\right)^{l(M)}.$$

Подробнее о максимизации нелинейных функций на пересечении полиматроидов можно прочитать в [41], [51].

## ГЛАВА V

# ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

В предыдущей главе решалась задача построения выпуклой оболочки целых точек полиэдров. Была доказана теорема 1.4, восходящая к Гильберту, о возможности представления выпуклой оболочки целых точек полиэдра с помощью решений системы линейных неравенств с рациональными коэффициентами в виде пересечения конечного семейства замкнутых полупространств. В данной главе указываются методы построения таких полупространств для классов многогранников, связанных с перестановочными матрицами. Наряду с классическим перестановочным многогранником, введенным Радо [36], и многогранником бистохастических матриц, изученным Биркгофом [19], исследуются новые классы перестановочных многогранников: многогранник задачи о коммивояжере, многогранник задачи стандартизации, многогранник размещений. Перестановочные многогранники играют важную роль в комбинаторном анализе [13], теорий расписаний [16], теории экстремальных задач на подстановках [15].

## §1. Многогранник бистохастических матриц

В параграфе изучается многогранник условий хорошо известной и многосторонне изученной задачи о назначении и ее обобщений.

**1. Теорема Биркгофа.**

Определение 1.1. Квадратная матрица с действительными неотрицательными элементами называется *бистохастической*, если сумма элементов в каждой ее линии равна 1. Бистохастические булевы матрицы называются *перестановочными матрицами*.

Между перестановочными $(n \times n)$-матрицами и перестановками $\pi \in S_n$ существует следующая связь: каждой перестановке $(\pi_1, \ldots$ $\ldots, \pi_n)$ отвечает перестановочная матрица $\| x_{ij} \|$, компоненты которой определяются правилом $x_{ij} = 1$, если $i = \pi_j$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае.

Теорема 1.1 (теорема Биркгофа). *Множество $M_n$ всех бистохастических $(n \times n)$-матриц является многогранником в $E_{n^2}$ с перестановочными матрицами в качестве его вершин.*

Доказательство. Пусть $x \in M_n$. Утверждение теоремы справедливо, если матрица $x$ является перестановочной матрицей. Предположим теперь, что $x$ не является перестановочной матрицей. Покажем с помощью индукции по числу положительных элементов в $x$, что $x$ есть выпуклая оболочка перестановочных матриц. Сначала убедимся в том, что матрица $x$ имеет по крайней мере одну диагональ со всеми положительными элементами. В самом деле, если матрица $x$ содержит нулевую подматрицу $x_I^J$, то все ненулевые элементы в строках с номерами из множества $I$ матрицы $x$ располагаются в ее подматрице $x_I^{N_n \setminus J}$, и поэтому сумма элементов каждой строки матрицы $x_I^{N_n \setminus J}$ равна 1, а сумма всех элементов этой матрицы равна $|I|$. Аналогично, сумма всех элементов подматрицы $x^J_{N_n \setminus I}$ равна $|J|$. Учитывая, что подматрицы $x_I^{N_n \setminus J}$ и $x^J_{N_n \setminus I}$ не имеют общих элементов, а сумма всех элементов матрицы $x$ равна $n$, получаем $|I|+|J| \leqslant n$. Поэтому согласно теореме Фробениуса (следствие 4.7 гл. IV) матрица $x$ содержит диагональ, все элементы которой положительны.

Пусть $\lambda$ — наименьший элемент такой диагонали матрицы $x$, и пусть $P$ — перестановочная матрица с единичными элементами в позициях, соответствующих этой диагонали. Ясно, что $0 < \lambda < 1$, а $y = (x - \lambda P)/(1 - \lambda)$ — бистохастическая матрица, причем число ее положительных элементов по крайней мере на один меньше, чем в $x$. Следовательно, по предположению индукции, точка $y$ представима в виде выпуклой комбинации перестановочных матриц. Поэтому точка $x = \lambda P + (1 - \lambda) y$ также является выпуклой комбинацией перестановочных матриц. Таким образом, множество $M_n$ является многогранником, порожденным перестановочными матрицами.

Очевидно, что никакая перестановочная матрица не представима в виде выпуклой комбинации других перестановочных матриц, и поэтому перестановочные матрицы есть вершины многогранника $M_n$. Теорема 1.1 доказана.

Матрица $R$ ограничений

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall i, j \in N_n, \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N_n, \tag{1.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N_n, \tag{1.3}$$

записанных в стандартной форме $Rx = e$, где $x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, \ldots$

$\ldots, x_{n1}, \ldots, x_{nn}) \in E_{n^2}$, имеет вид

$$R = \begin{Vmatrix} 1\ldots1 & & & \\ & 1\ldots1 & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 1\ldots1 \\ 1 & \ldots 1 & \ldots 1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 1 & \ldots 1 & \ldots 1 \end{Vmatrix},$$

т. е. $R$ — $(2n \times n^2)$-матрица, в каждом столбце $R^{ij}$ которой содержится ровно две единицы, а остальные элементы — нули.

Матрица $R$ является матрицей инциденций полного двудольного графа $K_{n,n}$. Таким образом, перестановочный многогранник $M_n$ есть не что иное, как многогранник разбиений $\operatorname{conv} M_Z^{=}(R, e)$ ребер полного двудольного графа $K_{n,n}$. Так как матрица $R$—абсолютно унимодулярная (следствие 4.5 гл. IV), то $M_n = \operatorname{conv} M_Z^{=}(R, e) = M^{=}(R, e)$. Получили новое доказательство теоремы Биркгофа.

Разбиение ребер графа и совершенное паросочетание — понятия идентичные. Поэтому многогранник $M_n$ есть выпуклая оболочка совершенных паросочетаний полного двудольного графа, причем характеристические векторы $x$ таких паросочетаний записаны в форме матрицы, у которой строки отвечают вершинам одной доли графа $K_{n,n}$, а столбцы — второй.

Многогранник $M_n$ служит допустимой областью в важной для приложений задачи о назначении и поэтому изучался многими авторами. Большинство из полученных результатов носит элементарный характер и вытекает из теории перестановочных матриц. Здесь мы, следуя работе [18], даем графовое доказательство основной теоремы о многогранниках $M_n$—теоремы о диаметре, основанное на простом критерии проверки смежности вершин.

Легко проверить, что $\operatorname{rang} R = 2n - 1$. Так как многогранник $M_n$ относительно аффинного множества решений системы (1.2), (1.3) имеет внутреннюю точку $x^0$, все координаты которой равны $1/n$, то $\dim M_n = (n-1)^2$.

Предложение 1.2. *Базисы (допустимые базисы) многогранника $M_n$ взаимно однозначно соответствуют остовным деревьям полного двудольного графа $K_{n,n}$ (остовным деревьям, содержащим совершенное паросочетание графа $K_{n,n}$).*

Доказательство. Каждому базису $B$ многогранника $M_n$ поставим в соответствие остовный подграф $T(B)$ графа $K_{n,n}$, содержащий такие ребра $(i, j)$, что столбцы $R^{ij}$ входят в базис $B$. Если граф $T(B)$ имеет цикл, то столбцы $R^{ij}$, отвечающие ребрам цикла, образуют подматрицу $\begin{Vmatrix} B' \\ 0 \end{Vmatrix}$, где $B'$ — матрица инциденций цикла. Определитель матрицы $B'$ (см. § 4 гл. IV) равен нулю, что противоречит линейной независимости вектор-столбцов базиса. Понятно, что если остовное дерево $T(B)$ не содержит совершенного паросочетания графа $K_{n,n}$, то базис $B$ не является допустимым.

С другой стороны, пусть $T$ — остовное дерево графа $K_{n,n}$, и $R^T$—множество столбцов $R^{ij}$ матрицы $R$, соответствующих ребрам $(i, j) \in T$. Рассмотрим уравнение $\sum_{(i,j)\in T} R^{ij}\lambda_{ij} = 0$. Поскольку $T$ — дерево, то оно имеет вершину, скажем, $i$, степени 1. Пусть вершине $i$ инцидентно единственное ребро $(i, j)$. Тогда, как легко видеть, $\lambda_{ij} = 0$. Удаляя ребро $(i,j)$ с вершиной $i$ из дерева $T$ и повторяя доказательство для оставшейся части графа $T$, получим, что все $\lambda_{ij} = 0$. Следовательно, столбцы из $R^T$ линейно независимы, т. е. $R^T$ — базис. Если дерево $T$ содержит совершенное паросочетание $\mathscr{P}$, то

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } (i, j) \in \mathscr{P}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Это означает, что $R^T$ — допустимый базис. Предложение 1.2 доказано.

Символом $G(x)$ будем обозначать совершенное паросочетание, соответствующее перестановочной матрице $x$.

Теорема 1.3. *Две вершины $x \neq y$ многогранника $M_n$ смежны тогда и только тогда, когда подграф $G(x) \cup G(y)$ содержит только один цикл.*

Доказательство. Степень каждой вершины в подграфе $G(x) \cup G(y)$ равна 1 или 2. Поэтому каждая компонента связности графа $G(x) \cup G(y)$ есть либо ребро, либо цикл с четным числом ребер. Пусть среди компонент связности графа имеется более чем один цикл. Пусть $T(x)$, $T(y)$ — произвольные остовные деревья, содержащие паросочетания $G(x)$, $G(y)$. Тогда граф $T(x) \cup T(y)$ также содержит более одного цикла. Поэтому допустимые базисы $A^{T(x)}$ и $A^{T(y)}$ отличаются более чем одним вектор-столбцом и, следовательно, не являются смежными.

Пусть теперь граф $G(x) \cup G(y)$ состоит из единственного цикла $C$ и множества $E$ изолированных ребер. Пусть $|E| = p$; тогда $|C| = 2n - 2p$. Пусть $F$ — множество из $p$ ребер $K_{n,n}$, не принадлежащих $G(x) \cup G(y)$, но соединяющих между собой все компоненты связности графа $G(x) \cup G(y)$. Выберем два смежных ребра $(s, r)$ и $(r, t)$ цикла $C$. Пусть $(r, s) \in G(x)$, $(r, t) \in G(y)$. Дополним подграф $G(x) \cup G(y)$ ребрами из $F$, а затем из полученного графа удалим ребро $(r, s)$ в одном варианте и ребро $(r, t)$ — в другом. В результате получим два остовных дерева $T(x)$ и $T(y)$. Подматрицы $A^{T(x)}$ и $A^{T(y)}$ являются допустимыми базисами, соответствующими вершинам $x$ и $y$. Эти базисы отличаются между собой только одним вектор-столбцом и поэтому являются смежными. Теорема доказана.

Так как каждой перестановочной матрице $x$ взаимно однозначно соответствует перестановка $\pi$, то теорему 1.3 можно переформулировать следующим образом.

С л е д с т в и е 1.4. *Вершины $\sigma$ и $\tau$ многогранника назначений смежны тогда и только тогда, когда перестановка $\pi = \sigma^{-1}\tau$ содержит точно один цикл.*

**2. Диаметр многогранника.** Пусть $G(M_n)$ — граф многогранника $M_n$. Две вершины $x$ и $y$ графа называются *подобными*, если для некоторого автоморфизма $\alpha$ этого графа ($\alpha$ — перестановка вершин графа, сохраняющая смежность) $\alpha(x) = y$. Граф называется *вершинно-симметрическим*, если любая пара его вершин подобна.

П р е д л о ж е н и е 1.5. *$G(M_n)$ — вершинно-симметрический граф.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x$, $y$ — вершины графа $G(M_n)$, т. е. перестановочные матрицы. Пусть $\varphi$ — перестановка столбцов матрицы $x$, переводящая $x$ в $y$ или, что то же, $\varphi$ — перестановка вершин одной из долей графа $K_{n,\,n}$, переводящая паросочетание $G(x)$ в $G(y)$. Определим отображение $\alpha$, сопоставив каждой вершине $\|z_{ij}\|$ графа $G(M_n)$ вершину $\alpha(z) = \|z_{i\varphi_j}\|$. Ясно, что $\alpha$ сохраняет смежность вершин графа $G(M_n)$, и $\alpha(x) = y$, следовательно, $\alpha$ — автоморфизм графа $G(M_n)$.

С л е д с т в и е 1.6. *Степень каждой вершины графа $G(M_n)$ (число смежных вершин для каждой вершины многогранника $M_n$) равна*

$$\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (n-k-1)!$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предложению 1.5 степени всех вершин графа $G(M_n)$ равны между собой, поэтому достаточно определить число смежных для вершины $\|x_{ij}\|$ с координатами $x_{ii} = 1$ для всех $i$, и $x_{ij} = 0$ для $i \neq j$. На основании теоремы 1.3 число смежных к $x$ вершин $y$, у которых паросочетание $G(y)$ не имеет общих ребер с $G(x)$, равно $(n-1)!$, а у которых паросочетание $G(y)$ имеет точно одно общее ребро с $G(x)$, равно $\binom{n}{1}(n-2)!$; у которых точно $k$ общих ребер с $G(x)$, равно $\binom{n}{k} \times \times (n-k-1)!$. Суммируя по $k \in N_{n-2}$, получаем требуемую формулу.

Т е о р е м а 1.7. *Диаметр многогранника $M_n$ при $n \geqslant 4$ равен* 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для произвольных несмежных вершин $x$ и $y$ многогранника $M_n$ существует вершина $z$, смежная обоим. Отметим, что несмежные вершины $x$ и $y$ у многогранника $M_n$ существуют только при $n \geqslant 4$.

Пусть $G(x)$, $G(y)$ — соответствующие вершинам $x$ и $y$ паросочетания графа $K_{n,\,n}$. Рассмотрим подграф $G(x) \cup G(y)$. В силу теоремы 1.3 граф $G(x) \cup G(y)$ содержит по крайней мере два цикла. Если паросочетания $G(x)$ и $G(y)$ имеют хотя бы одно общее ребро $(i, j)$, то, положив $x_{ij} = 1$, индукцией по $n$ получим утверждение теоремы. Поэтому считаем, что граф $G(x) \cup G(y)$ есть объединение $p$ ($p \geqslant 2$) циклов $C_1, \ldots, C_p$. Легко убедиться, что эти циклы не имеют общих ребер, и каждый из них состоит из ребер, принадлежащих поочередно $G(x)$ и $G(y)$. Удалив из каждого цикла $C_i$ по одному ребру $e_i \in G(y)$, получим $p$ непересекающихся цепей $\bar{C}_i$, причем $G(x) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} C_i$. Пусть $E$ — множество из $p$ ребер графа $K_{n,\,n}$, которые связывают все $p$ цепей $\bar{C}_1, \ldots, \bar{C}_p$ в один простой цикл. Отметим, что ребра из $E$ и удаленные ребра $e_i$ также образуют простой цикл. Пусть $e \in E$. Тогда $T(x) = C \setminus e$ есть остовное дерево графа $K_{n,\,n}$, определяющее допустимый базис вершины $x \in M_n$.

Покажем, что если из цикла $C$ выбросить произвольное ребро $f \in G(x)$, то полученное остовное дерево определяет допустимый базис некоторой вершины $z$ многогранника $M_n$, смежной вершине $x$, так как их базисы различаются одним столбцом. Действительно, построенное дерево содержит совершенное паросочетание, которое составлено из ребер множества $E$, дополненных $n—p$ ребрами паросочетания $G(y)$, принадлежащими циклу $C$. Итак, построена вершина $z$, смежная вершине $x$, но она смежна также и $y$ потому, что граф $G(y) \cup G(z)$ имеет цикл, образованный ребрами $e_1, \ldots, e_p$ и ребрами множества $E$, а остальные ребра у паросочетаний $G(y)$ и $G(z)$ общие. Теорема доказана.

Учитывая, что $\operatorname{diam} M_n = 1$ при $n \leqslant 3$, можем утверждать, что для многогранника бистохастических матриц гипотеза о диаметре верна.

**3. Симметрические перестановочные матрицы.** Теорема Биркгофа дает описание выпуклой оболочки перестановочных матриц. Следующая теорема, принадлежащая Крузу [22], указывает выпуклую оболочку всех симметрических перестановочных матриц $(x_{ij} = x_{ji})$.

Определение 1.2. Выпуклую оболочку симметрических перестановочных $(n \times n)$-матриц будем называть *многогранником симметрических перестановочных матриц* и обозначать через $M_n^*$.

Теорема 1.8. *Многогранник $M_n^*$ симметрических перестановочных $(n \times n)$-матриц задается системой ограничений*

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S \setminus i} x_{ij} \leqslant |S| - 1 \quad \forall S \in \mathscr{F}, \tag{1.4}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall i, j \in N_n, \tag{1.5}$$

$$x_{ij} = x_{ji} \quad \forall i, j \in N_n, \tag{1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in N_n, \tag{1.7}$$

*где* $\mathscr{F} = \{S \subseteq N_n\colon\ |S| \geqslant 3,\ |S| \equiv 1 \pmod 2\}$.

Доказательство заключается в построении такого графа $G$, что каждая симметрическая перестановочная матрица является матрицей смежности некоторого паросочетания, и наоборот. Затем, остается только воспользоваться теоремой о выпуклой оболочке характеристических векторов паросочетаний графа $G$ и заменить характеристические вектора паросочетаний на их матрицы смежности.

Определим граф $G$ с множеством вершин $V = N_{2n}$ и множеством ребер $E = \{(i, j)\colon i, j \in N_n$ или $i \equiv j \pmod n\}$. Иначе говоря, граф $G$ состоит из полного графа $K_n$, каждой вершине $i$ которого дополнительно инцидентно ребро $(i, i+n)$.

Пусть $\|x_{ij}\|_{n\times n}$ — симметрическая перестановочная матрица. Сопоставим ей совершенное паросочетание $G(x)$ графа $G$, характеристический вектор $y$ которого имеет компоненты

$$y_e = \begin{cases} x_{ij} = x_{ji} & \text{при } i, j \in N_n, \\ x_{ii} & \text{при } i \equiv j \pmod n \end{cases} \tag{1.8}$$

для $e = (i, j) \in E$. Аналогично, если $\mathscr{P}$ — совершенное паросочетание графа $G$, и $y$ — его характеристический вектор, то сопоставляем ему симметрическую перестановочную матрицу по тем же формулам. Характеристические векторы совершенных паросочетаний, согласно теореме 5.8 гл. IV, удовлетворяют системе неравенств

$$\sum_{e \in G(S)} y_e \leqslant (|S|-1)/2 \quad \forall S \subseteq V,\ |S| \equiv 1 \pmod 2, \tag{1.9}$$

где $G(S)$ — подграф графа $G = (V, E)$, порожденный вершинами из $S$. Неравенства (1.9), отвечающие подмножествам $S$, порождающим односвязные подграфы $G(S)$ графа $G$, являются избыточными (см. задачу 14 гл. IV). Поэтому из системы (1.9) заведомо можно исключить неравенства, отвечающие подмножествам $S$, содержащим вершины с номерами, большими $n$. Теперь, если в оставшихся неравенствах перейдем по правилу (1.8) к переменным $x_{ij}$, то получим систему (1.7). Теорема доказана.

## § 2. Многогранник гамильтоновых циклов

Важную роль в дискретной оптимизации играет задача о коммивояжере. В параграфе исследуется возможность линеаризации этой задачи, т. е. построения выпуклой оболочки ее допустимых решений.

**1. Симметричная и несимметричная задачи о коммивояжере.** Пусть $G = (V, E)$ — $n$-вершинный граф. Простой остовный цикл $C$ в $G$ называется *гамильтоновым циклом*, а граф, содержащий такой цикл, — *гамильтоновым графом*. Каждый гамильтонов цикл будем характеризовать с помощью матрицы смежностей $\|x\|_{n\times n}$, имея в виду, что $x_{ij} = 1$, если ребро $(i, j) \in C$, и $x_{ij} = 0$ в противном случае. Очевидно, что матрица смежностей любого гамильтонова цикла является симметрической булевой матрицей.

Определение 2.1. Выпуклую оболочку в $E_{n^2}$ матриц смежностей гамильтоновых циклов данного графа $G$ будем называть *многогранником гамильтоновых циклов графа $G$*.

Многогранник гамильтоновых циклов графа $G$ является гранью многогранника гамильтоновых циклов полного графа $K_n$. Поэтому в дальнейшем рассматриваем только многогранник гамильтоновых циклов полного графа $K_n$. Всякий такой многогранник обозначаем символом $M_n^s$.

Многогранник $M_n^s$ есть выпуклая оболочка некоторого подмножества целочисленных точек многогранника

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 2 \quad \forall j \in N_n,$$
$$0 \leqslant x_{ij} = x_{ji} \leqslant 1 \quad \forall i, j \in N_n,$$
$$x_{ii} = 0 \quad \forall i \in N_n.$$

Учитывая равенства $x_{ij} = x_{ji}$, каждому гамильтонову циклу сопоставляем точку в $E_m$, где $m = n(n-1)/2$. Через $W$ обозначаем матрицу инциденций полного $n$-вершинного графа $K_n$. Множество гамильтоновых циклов графа $K_n$ находится во взаимно однозначном соответствии с целочисленными точками многогранника решений следующей системы неравенств:

$$Wx = 2e, \quad 0 \leqslant x \leqslant e,$$
$$\sum_{\substack{i, j \in S \\ i < j}} x_{ij} \leqslant |S| - 1 \quad \forall S \subset N_n. \tag{2.1}$$

Условия (2.1) служат для устранения циклов, не являющихся остовными

Пусть теперь $K_n^*$ — полный орграф (любая пара вершин $i, j$ соединена орребрами $(i, j)$ и $(j, i)$). *Гамильтоновым контуром* называется остовная орцепь, у которой все вершины различны, за исключением первой и последней. Матрица смежностей гамильтоновых контуров является перестановочной. Очевидно, что не каждая перестановочная матрица дает гамильтонов контур. Однако каждая перестановочная матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sum_{i, j \in S} x_{ij} \leqslant |S| - 1 \quad \forall S \subset N_n, \tag{2.2}$$

как легко видеть, задает гамильтонов контур. Нетрудно также проверить, что каждый гамильтонов контур удовлетворяет условиям (2.2). Отметим, что неравенства (2.2) для подмножеств $S$ и $\bar{S} = N_n \setminus S$ в силу равенств (1.2), (1.3) эквивалентны. Из соотношения

$$\sum_{i, j \in S} x_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} - \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij}$$

следует, что условия (2.2) эквивалентны следующим:

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\in\bar S} x_{ij} \geqslant 1 \quad \forall S\subset N_n,\ S\neq\varnothing.$$

Определение 2.2. Выпуклая оболочка в $E_{n^2}$ матриц смежностей гамильтоновых контуров орграфа $K_n^*$ называется *многогранником гамильтоновых контуров* (обозначается символом $M_n^{as}$).

Гамильтоновы контуры можно характеризовать с помощью списка орребер, матриц смежностей и перестановок, соответствующих этим матрицам. В дальнейшем, не оговаривая особо, будем пользоваться каждым из этих способов, а по отношению к гамильтонову контуру, заданному любым из вышеуказанных способов, употребляем термин *тур*. Перестановку, определяющую тур, называем *циклической*. Для циклических перестановок $\pi$ употребляется следующая запись: $\pi=\langle i_1\ldots i_n\rangle$, которая означает, что $x_{i_k i_{k+1}}=1\ \ \forall k\in N_n$, где $i_{n+1}=i_1$.

Одна из проблем в полиэдральной комбинаторике заключается в построении системы неравенств, задающих многогранники $M_n^s$ и $M_n^{as}$. Для этого необходимо найти уравнения гиперплоскостей, отсекающих от многогранника бистохастических матриц $M_n$ вершины, не являющиеся турами. Впервые проблемой описания граней многогранников $M_n^{as}$, $M_n^s$ начал заниматься И. Хеллер в начале 50-х годов с целью исследования возможности применения методов линейного программирования к задаче отыскания минимального взвешенного цикла или контура. Эти задачи более известны как симметричная и несимметричная задачи о коммивояжере.

Многогранник гамильтоновых циклов есть допустимая область в симметричной задаче о коммивояжере, а многогранник гамильтоновых контуров — в несимметричной. Позднее проблеме линейного описания задачи о коммивояжере стали уделять значительное внимание [12], [24]—[27], [31]—[35], [37].

Каждый гамильтонов цикл определяет ровно два контура, порождаемых двумя различными ориентациями цикла. Поэтому между многогранниками $M_n^s$ и $M_n^{as}$ существует связь. Следующие утверждения устанавливают соотношения между гранями многогранника гамильтоновых циклов $M_n^s$ и многогранника контуров $M_n^{as}$.

Теорема 2.1. 1) *Если неравенство*

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}x_{ij}\leqslant a_0$$

*определяет грань многогранника* $M_n^s$, *то неравенство*

$$\sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} a_{ij}x_{ij}\leqslant a_0$$

*определяет грань многогранника* $M_n^{as}$ *в случае, когда* $a_{ij}=a_{ji}$;

2) (Хеллер [26]). *Если неравенство*

$$\sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} a_{ij} x_{ij} \leqslant a_0$$

*определяет* $(d-1)$*-грань многогранника* $M_n^{as}$, *то неравенство*

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_{ij} + a_{ji}) x_{ij}/2 \leqslant a_0$$

*определяет* $(d'-1)$*-грань многогранника* $M_n^s$ *в том и только том случае, когда матрица с элементами*

$$b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{t=1}^{n} a_{kt}}{(n-1)(n-2)} - \dfrac{(n-1) \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{ik} + a_{kj})}{n(n-2)} - \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{ki} + a_{jk})}{n(n-2)}, & i \neq j, \\ 0, \quad i = j \end{cases}$$

*является симметричной, здесь* $d = \dim M_n^{as}$, $d' = \dim M_n^s$.

**2. Размерность.** Базис аффинной оболочки гамильтоновых контуров указывали многие авторы ([12], [24], [32]). При доказательстве теорем мы следуем работе [32].

Теорема 2.2. *Размерность многогранника гамильтоновых контуров* $M_n^{as}$ *равна* $n^2 - 3n + 1$, $n \geqslant 3$.

Доказательство. Для каждого тура справедливы равенства

$$x_{ii} = 0 \quad \forall i \in N_n. \tag{2.3}$$

Уравнения $Rx = e$ вместе с (2.3) образуют систему, ранг которой равен $3n-1$. Поэтому $\dim M_n^{as} \leqslant n^2 - 3n + 1 = d$.

Докажем, что имеет место равенство $\dim M_n^{as} = d$. Для $n = 3$ это обстоятельство проверяется непосредственно. Будем считать $n \geqslant 4$.

Предположим противное, т. е. что $\dim M_n^{as} < d$. Тогда должна существовать гиперплоскость, содержащая $M_n^{as}$ и задаваемая линейным равенством

$$\sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_{ij} = b, \tag{2.4}$$

линейно не зависящим от равенства $Rx = e$. Вычитая из (2.4) подходящие линейные комбинации уравнений системы $Rx = e$, можно добиться выполнения условий

$$a_{i1} = a_{1i} = a_{23} = 0, \qquad i = 2, 3, \ldots, n. \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь туры $\langle i\ 2\ 1\ 3 \ldots \rangle$ и $\langle i\ 1\ 2\ 3 \ldots \rangle$, $i > 3$. Здесь многоточием обозначена одинаковая для обоих туров орцепь, соединяющая вершины 3 и $i$, дополняющая их до гамильтонова контура. Поскольку оба тура удовлетворяют (2.4), имеем: $a_{i2} + a_{21} + a_{13} = a_{i1} + a_{12} + a_{23}$, откуда получаем, что $a_{i2} = 0$ для всех

$i>3$. Аналогично, используя пары туров $\langle 3\ 1\ j\ 2 \ldots\rangle$ и $\langle 3\ j\ 1\ 2 \ldots\rangle$, получим $a_{3j}=0$ для всех $j>3$. Теперь из пар туров вида $\langle i\ j\ 1\ 2 \ldots\rangle$ и $\langle i\ 1\ j\ 2 \ldots\rangle$ получаем $a_{ij}=0$, $i \neq j$, $i, j>3$ и т. д. В конечном итоге мы получим, что все коэффициенты в (2.4) — нули. Полученное противоречие доказывает теорему.

Совершенно аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 2.3. *Размерность многогранника гамильтоновых циклов* $M_n^s$ *равна* $n(n-3)/2$.

**3. Диаметр.** Диаметр многогранника гамильтоновых контуров был установлен Падбергом и Рао [34], несмотря на то, что до сих пор не найден критерий смежности вершин многогранника $M_n^{as}$, и как показал Пападимитриу [35], задача установления смежности является $NP$-полной.

Теорема 2.4. *Диаметр многогранника* $M_n^{as}$ *равен* 2 *при* $n \geqslant 6$ ($\operatorname{diam} M_n^{as}=1$ *при* $n \leqslant 5$).

Доказательство. Пусть $x'$ и $x''$ — не смежные вершины многогранника $M_n^{as}$. Покажем, что тогда существует отличная от них вершина $y$, смежная обеим. Доказательство будем вести в терминах перестановок. Пусть $\rho$ и $\tau$ — циклические перестановки множества $N_n$. Покажем, что тогда существует такая циклическая перестановка $\sigma$, что перестановки $\varphi=\rho^{-1}\sigma$ и $\psi=\sigma^{-1}\tau$ удовлетворяют условию следствия 1.4, т. е. вершины $\rho$, $\sigma$ и $\sigma$, $\tau$ попарно смежны на многограннике $M_n$, а следовательно, и на многограннике $M_n^{as}$.

Известно, что каждая перестановка может быть единственным образом представлена в виде произведения непересекающихся циклов. Пусть $\rho^{-1}\tau=\langle i_1 j_1 \ldots\rangle \langle i_2 j_2 \ldots\rangle \langle i_t j_t \ldots\rangle$ — разложение перестановки $\rho^{-1}\tau$ в произведение $t$ циклов. Так как $\rho$ и $\tau$ не смежные вершины, то $t \geqslant 2$, и так как $\rho$ и $\tau$ — циклические перестановки, то длина каждого цикла $\langle i_s j_s \ldots\rangle$ больше или равна двум. Без ограничения общности считаем, что $1 \leqslant i_1<i_2<\ldots<i_t \leqslant n$. Положим $\varphi=\langle i_1 j_1 \ldots\rangle$, $\psi=\langle i_2 j_2 \ldots\rangle$ при $t=2$, и $\varphi=\langle i_1 j_2 \ldots i_2 j_3 \ldots \ldots i_{t-1} j_t \ldots i_t j_1 \ldots\rangle$, $\psi=\langle i_t \ldots i_1\rangle$ при $t \geqslant 3$. По определению, $\varphi$ и $\psi$ — циклы, удовлетворяющие условию $\varphi\psi=\rho^{-1}\tau$. Следовательно, положив $\sigma=\rho\varphi=\tau\psi^{-1}$, получим в силу следствия 1.4, что вершины $\rho$, $\sigma$, а также $\sigma$, $\tau$, смежны на многограннике $M_n^{as}$. Осталось доказать, что $\sigma$ — циклическая перестановка. Отдельно рассматриваем случаи, когда $t$ — четное и нечетное число. Без ограничения общности считаем, что $\tau=\langle 1\ 2 \ldots n\rangle$.

Пусть $t$ — нечетное число. Тогда, положив $\psi=\langle i_t \ldots i_1\rangle$, $\varphi= =\langle i_1 j_2 \ldots i_2 j_3 \ldots i_t j_1\rangle$, $\sigma=\rho\varphi$, получаем, что $\sigma=\tau\psi^{-1}=\langle 1 \ldots i_1 \ldots \ldots i_k \ldots i_t \ldots n\rangle \langle i_1 i_2 \ldots i_t\rangle=\langle 1 \ldots i_1 i_2+1 \ldots i_3 i_4+1 \ldots i_t i_1+1 \ldots \ldots i_2 i_3+1 \ldots i_4 i_5+1 \ldots i_{t-1} i_t+1 \ldots n\rangle$ — циклическая перестановка.

Пусть $t$ — четное число. Пусть $i_{t+1}$ — последняя компонента цикла $\langle i_t j_t \ldots i_{t+1}\rangle$ (если длина этого цикла равна двум, то считаем, что $j_t = i_{t+1}$). Ясно, что $i_t < i_{t+1} \leqslant n$. Определим $\psi = \langle i_{t+1} i_t \ldots$ $\ldots i_1 \rangle$, $\varphi = \langle i_1 j_2 \ldots i_2 j_3 \ldots i_{t-1} j_t \ldots i_{t+1} j_1 \ldots \rangle$. Полагая $\sigma = \tau\psi^{-1} = \rho\varphi$, получаем, что $\sigma = \langle 1 \ldots i_1 \ldots i_k \ldots i_{t+1} \ldots n \rangle$, $\langle i_1 i_2 \ldots i_t i_{t+1} \rangle = \langle 1 \ldots$ $\ldots i_1 i_2 + 1 \ldots i_3 i_4 + 1 \ldots i_{t+1} i_1 + 1 \ldots i_2 i_3 + 1 \ldots i_4 i_5 + 1 \ldots i_t i_t + 1 \ldots$ $\ldots n \rangle$ — циклическая перестановка.

Таким образом, $\operatorname{diam} M_n^{as} \leqslant 2$ при $n \geqslant 4$. Докажем, что $\operatorname{diam} M_n^{as} = 2$ при $n \geqslant 6$. Для этого рассмотрим циклические перестановки:

$$\tau = \langle 1\ 2 \ldots n \rangle, \qquad \rho = \langle 1\ 3\ 2\ 4\ 6\ 5\ 7 \ldots n \rangle,$$
$$\sigma' = \langle 1\ 3\ 2\ 4 \ldots n \rangle, \quad \sigma'' = \langle 1\ 2\ 3\ 4\ 6\ 5\ 7 \ldots n \rangle.$$

Непосредственно проверяется, что как $\rho$, так и $\tau$ будут смежны на многограннике $M_n$ как вершине $\sigma'$, так и вершине $\sigma''$. В то же время ни одна из двух вершин $\rho$, $\tau$, а также $\sigma'$, $\sigma''$ не смежны на многограннике $M_n$. Кроме того, из равенства $\rho/2 + \tau/2 = \sigma'/2 +$ $+ \sigma''/2$ следует, что минимальная размерность грани многогранника $M_n$, а также $M_n^{as}$, содержащей все четыре вершины, равна 2. Следовательно, $\operatorname{diam} M_n^{as} = 2$ при $n \geqslant 6$.

Осталось заметить, что равенство $\operatorname{diam} M_n^{as} = 1$ при $n \leqslant 5$ проверяется непосредственно. Теорема 2.4 доказана.

**4. Грани.** Опишем несколько классов линейных неравенств, определяющих $(d-1)$-грани $d$-многогранника $M_n^{as}$. Для доказательства того, что неравенство $ax \leqslant a_0$ определяет грань многогранника $M_n^{as}$, достаточно убедиться, что $M_n^{as}$ принадлежит полупространству, порождаемому этим неравенством, и указать один тур $x^0$, для которого выполняется неравенство $ax^0 < a_0$. Для доказательства того, что неравенство $ax \leqslant a_0$ определяет $(d-1)$-грань $M_n^{as}$, требуется провести некоторую дополнительную работу. При доказательстве следующей теоремы воспользуемся идеями из [32].

Теорема 2.5. *Каждое из неравенств*

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} \leqslant 1 \quad \textit{при } n \geqslant 5, \tag{2.6}$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_3} + x_{i_2 i_3} + x_{i_2 i_4} + x_{i_4 i_2} \leqslant 2 \quad \textit{при } n \geqslant 6, \tag{2.7}$$

$$2x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_4} + 2x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_4 i_2} \leqslant 3 \quad \textit{при } n \geqslant 5, \tag{2.8}$$

$$x_{i_1 i_2} + x_{i_1 i_3} + x_{i_3 i_2} + \sum_{\substack{i \neq i_1,\, i_2 \\ j \neq i_1,\, i_2}} x_{ij} \leqslant n - 2 \quad \textit{при } n \geqslant 4, \tag{2.9}$$

$$x_{i_1 i_3} + x_{i_3 i_1} + x_{i_1 i_2} + x_{i_2 i_1} + x_{i_2 i_3} + x_{i_3 i_2} \leqslant 2 \quad \textit{при } n \geqslant 5 \tag{2.10}$$

*определяет $(d-1)$-грань многогранника $M_n^{as}$. Здесь индексы $i_1, \ldots$ $\ldots, i_4$ принимают произвольные попарно различные значения от* 1 *до $n$.*

Доказательство. Тот факт, что каждый тур $x \in M_n^{as}$ удовлетворяет неравенствам (2.6) — (2.10) проверяется непосредственно. Несколько труднее для каждого из выписанных неравенств доказать, что они определяют $(d-1)$-грани.

Проиллюстрируем, как это можно сделать с помощью процедуры, использованной при доказательстве теоремы 2.2.

Рассмотрим произвольное неравенство типа (2.6). Например, пусть это будет неравенство

$$x_{12}+x_{21}\leqslant 1. \tag{2.11}$$

Предположим, что оно не определяет $(d-1)$-грань многогранника $M_n^{as}$. Тогда существует гиперплоскость, задаваемая равенством типа (2.4), линейно не зависящим от равенств $Rx=e$ и равенства (2.11). В то же время все туры, удовлетворяющие (2.11), должны удовлетворять и (2.4). Как и при доказательстве теоремы 2.2, считаем, что $a_{i1}=a_{1i}=a_{23}=0$, $i\neq 1$. Теперь, рассматривая соответствующие пары туров, получаем

$$\begin{array}{lll} a_{i2}=0, & i\geqslant 4 & (\text{туры } \langle i\ 1\ 2\ 3\ \ldots\rangle,\ \langle i\ 2\ 1\ 3\ \ldots\rangle); \\ a_{2i}=0, & i\geqslant 5 & (\text{туры } \langle 4\ 2\ 1\ i\ \ldots\rangle,\ \langle 4\ 1\ 2\ i\ \ldots\rangle); \\ a_{32}=0 & & (\text{туры } \langle 3\ 2\ 1\ 5\ \ldots\rangle,\ \langle 3\ 1\ 2\ 5\ \ldots\rangle); \\ a_{24}=0 & & (\text{туры } \langle 5\ 2\ 1\ 4\ \ldots\rangle,\ \langle 5\ 1\ 2\ 4\ \ldots\rangle). \end{array}$$

Наконец, рассматривая туры $\langle i\ j\ 1\ 2\ k\ldots\rangle$, $\langle i\ 1\ 2\ j\ k\ldots\rangle$, $i\neq j\neq k$, $i$, $j$, $k\geqslant 3$, получаем, что $a_{ij}=a_{jk}$, т. е. для всех $p\neq q$, $p, q\geqslant 3$, коэффициенты $a_{pq}$ равны между собой. Теперь нетрудно видеть, что уравнение (2.4) эквивалентно следующему $\sum\limits_{\substack{i,\ j\geqslant 3\\ i\neq j}} x_{ij}=n-3$ — линейно зависящему от равенств (2.11) и $Rx=e$. Полученное противоречие доказывает, что равенство (2.11) определяет $(d-1)$-грань.

Следует отметить, что указанные теоремой классы неравенств (2.6)—(2.10) не дают полного линейного описания многогранника $M_n^{as}$. В то же время легко убедиться, что разные классы порождают несовпадающие $(d-1)$-грани и, кроме того, внутри каждого из классов неравенств (2.7), (2.8) все неравенства порождают различные $(d-1)$-грани.

В заключение приведем некоторые из классов линейных неравенств, полученных в последнее время Гретшелем и Падбергом [25] для описания выпуклой оболочки многогранника $M_n^s$.

Теорема 2.6. *$(d-1)$-грань $d$-многогранника $M_n^s$ определяется каждым из следующих неравенств*:

$$x_{ij}\leqslant 1 \quad \forall i,\ j\in N_n,\quad i<j,$$
$$x_{ij}\geqslant 0 \quad \forall i,\ j\in N_n,\quad i<j,$$
$$\sum_{\substack{i,\ j\in S\\ i<j}} x_{ij}\leqslant |S|-1 \quad \forall S\subset N_n,\quad |S|\geqslant 3,$$
$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{\substack{i,\ j\in V_s\\ i<j}} x_{ij}\leqslant |V_0|+\sum_{s=1}^{k}(|V_s|-1)-\frac{k+1}{2},$$

*где* $(V_0, \ldots, V_k)$ — *зубчатая система множеств, т. е. семейство подмножеств множества* $N_n$, *обладающее свойствами*: 1) $k$ — *нечетно*; 2) $V_0 \cap V_i \neq \varnothing \ \forall i \in N_k$; 3) $V_i \not\subset V_0 \ \forall i \in N_k$; 4) $V_i \cap V_j = \varnothing \ \forall i, j \in N_k, i \neq j$.

## § 3. Перестановочный многогранник

Пусть дан вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Считаем, что

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Пусть, как обычно, $S_n$ — множество всех перестановок из чисел множества $N_n$. Каждой перестановке $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n) \in S_n$ сопоставим точку $a_\pi = (x_1, \ldots, x_n) \in E_n^+$ по правилу $x_i = a_{\pi_i}$.

Определение 3.1. Выпуклую оболочку точек $\{a_\pi = (a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_n}) : \ \forall \pi \in S_n\}$ в $E_n$ называем *перестановочным многогранником* и обозначаем символом $M_n(a)$. Многогранник $M_4(a)$ при $a = (1, 2, 3, 4)$ изображен на рис. 34.

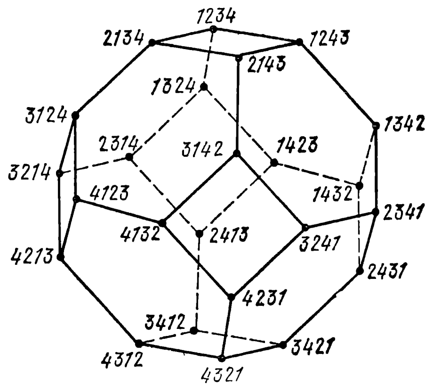


Рис. 34.

Ясно, что перестановочный многогранник $M_n(a)$ есть образ многогранника назначений $M_n$ при вырожденном аффинном преобразовании $\Lambda = E_{n^2} \to E_n$, где

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} a_1 \ldots a_n & 0 \ldots 0 & \ldots 0 & \ldots 0 \\ 0 \ \ldots 0 & a_1 \ldots a_n & \ldots 0 & \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ \ldots 0 & 0 \ldots 0 & \ldots a_1 & \ldots a_n \end{matrix} \right\|.$$

### 1. Теорема Радо.

Теорема 3.1. *Перестановочный многогранник* $M_n(a)$ *задается следующей системой ограничений*:

$$\sum_{i \in \omega} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \qquad \forall \omega \subset N_n, \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{3.3}$$

Эта теорема есть следствие результата, установленного Радо [36] в 1952 г. Прежде чем формулировать теорему Радо, введем понятие мажорирования векторов.

Определение 3.2. *Вектор* $x=(x_1, \ldots, x_n)$ *мажорируется вектором* $y=(y_1, \ldots, y_n)$ (обозначается $x \prec y$), если

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{3.4}$$

и найдутся такие перестановки $\tau \in S_n$ и $\pi \in S_n$, что

$$x_{\tau_1} \geqslant \ldots \geqslant x_{\tau_n}, \quad y_{\pi_1} \geqslant \ldots \geqslant y_{\pi_n},$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_{\tau_i} \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} y_{\pi_i} \quad \forall \nu \in N_{n-1}.$$

Следующая лемма, принадлежащая Шуру ([17]), дает необходимые и достаточные условия мажорирования векторов.

Лемма 3.2. *Вектор x мажорируется вектором y тогда и только тогда, когда существует бистохастическая матрица* $\Delta = \| \delta_{ij} \|_{n \times n}$ *такая, что* $x = \Delta y$.

Доказательство. Достаточность. Без ограничения общности считаем, что $x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n$, $y_1 \geqslant \ldots \geqslant y_n$.

Положим $w_j^t = \sum_{i=1}^{t} \delta_{ij}$. Так как $\Delta$ — бистохастическая матрица, то $0 \leqslant w_j^t \leqslant 1$, $t = \sum_{j=1}^{t} w_j^t$. Справедливость достаточности условий леммы вытекает из следующей цепочки соотношений:

$$\sum_{i=1}^{\nu} y_i - \sum_{i=1}^{\nu} x_i = \sum_{i=1}^{\nu} y_i - \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} y_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{\nu} y_i - \sum_{j=1}^{n} w_j^{\nu} y_j = \sum_{i=1}^{\nu} y_i (1 - w_i^{\nu}) - \sum_{i=\nu+1}^{n} w_i^{\nu} y_i \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\nu} y_{\nu} (1 - w_i^{\nu}) - \sum_{i=\nu+1}^{n} w_i^{\nu} y_{\nu} = y_{\nu} \left( \nu - \sum_{i=1}^{n} w_i^{\nu} \right) = 0.$$

Необходимость. Доказательство проведем по индукции. В случае $n=1$ векторы $x$ и $y$ имеют по одной компоненте $x_1 = y_1$, и требуемая матрица $\Delta$, очевидно, существует. Предположим, что утверждение справедливо для $(n-1)$-векторов и рассмотрим два $n$-вектора $x$ и $y$, которые связаны соотношением $x \prec y$. Из условия $x_1 \leqslant y_1$ и равенства (3.4) следует, что $y_n \leqslant x_1 \leqslant y_1$. Поэтому найдется такое $k$, при котором

$$y_{k+1} \leqslant x_1 \leqslant y_k. \tag{3.5}$$

Следовательно, при некотором $\lambda$ $(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$

$$x_1 = \lambda y_k + (1 - \lambda) y_{k+1}. \tag{3.6}$$

Наряду с $x$ и $y$ рассмотрим два $(n-1)$-вектора $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k + y_{k+1} - x_1, y_{k+2}, \ldots, y_n)$.

Учитывая (3.5), легко заметить, что компоненты вектора $y'$ расположены в порядке убывания. Без труда проверяется также соотношение $x' \prec y'$. Поэтому в силу предположения индукции существует такая бистохастическая матрица $\Delta' = \| \delta_{ij} \|_{(n-1)\times(n-1)}$, что $x' = \Delta' y'$, или, в развернутой записи,

$$x_{s+1} = \delta_{s1} y_1 + \ldots + \delta_{s\, k-1} y_{k-1} + \delta_{sk} (y_k + y_{k+1} - x_1) + \\ + \delta_{s\, k+1} y_{k+1} + \ldots + \delta_{s\, n-1} y_n \qquad \forall s \in N_{n-1}.$$

Подставив сюда $x_1$ из равенства (3.6), получим

$$x_{s+1} = \delta_{s1} y_1 + \ldots + \delta_{sk} (1-\lambda) y_k + \delta_{sk} \lambda y_{k+1} + \\ + \delta_{s\, k+1} y_{k+2} + \ldots + \delta_{s\, n-1} y_n \qquad \forall s \in N_{n-1}.$$

Учитывая равенство (3.6), легко убеждаемся в том, что векторы $x$ и $y$ связаны бистохастической матрицей

$$\Delta = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1-\lambda & \ldots & 0 \\ \delta_{11} & \delta_{12} & \ldots & \delta_{1k}(1-\lambda) & \delta_{1k}\lambda & \ldots & \delta_{1\, n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \delta_{n-1\, 1} & \delta_{n-1\, 2} & \ldots & \delta_{n-1\, k}(1-\lambda) & \delta_{n-1\, k}\lambda & \ldots & \delta_{n-1\, n-1} \end{Vmatrix}.$$

Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.3 (теорема Радо). *Точка $x \in M_n(a)$ тогда и только тогда, когда вектор $x$ мажорируется вектором $a$.*

Доказательство. Пусть $x \prec a$. Тогда в силу леммы 2.2 существует бистохастическая матрица $\Delta$ такая, что $x = \Delta a$. Согласно теореме Биркгофа

$$\Delta = \sum_{\pi \in S_n} \lambda_\pi \Delta_\pi, \qquad \sum_{\pi \in S_n} \lambda_\pi = 1, \quad 0 \leqslant \lambda_\pi \quad \forall \pi \in S_n,$$

где $\Delta_\pi$ — перестановочная матрица, отвечающая перестановке $\pi$. Следовательно,

$$x = \sum_{\pi \in S_n} \lambda_\pi \Delta_\pi a = \sum_{\pi \in S_n} \lambda_\pi a_\pi,$$

т. е. $x \in M_n(a)$. Необходимость доказывается в обратном порядке.

2. **$f$-вектор.** Исследуем комбинаторные свойства перестановочного многогранника. Наиболее важным из них является то, что комбинаторный тип перестановочного многогранника не зависит от вектора $a$, если среди его компонент нет совпадающих.

Теорема 3.4. *Множество решений системы* (3.2), (3.3) *является $i$-гранью* ($0 \leqslant i \leqslant n-2$) *перестановочного многогранника $M_n(a)$ в том и только том случае, когда каждое из этих решений обращает в равенства неравенства* (3.2) *лишь для подмножеств $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-i-1}$, обладающих свойством*

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_{n-i-1} \subset N_n. \qquad (3.7)$$

Доказательство. Система из неравенств (3.2) и равенств

$$\sum_{j\in\omega_k} x_j=\sum_{j=1}^{|\omega_k|} a_j \qquad \forall k\in N_{n-i}, \tag{3.8}$$

где $\omega_{n-i}=N_n$, совместна и поэтому определяет грань многогранника $N_n(a)$. Ранг системы (3.8) равен $n-i$ и при этом ни одно из неравенств (3.2) для $\omega\neq\omega_k$ $\forall k\in N_{n-i}$ не является жестким (здесь следует вспомнить, что среди чисел $a_j$ $\forall j\in N_n$ нет равных). Следовательно, размерность рассматриваемой грани равна $i$.

Покажем справедливость обратного утверждения. Пусть грань $F$ перестановочного многогранника задается равенствами (3.8). Допустим противное, что для множеств $\omega_k$ не имеют место включения (3.7), т. е. существуют такие подмножества индексов $\omega_p$, $\omega_q$, для которых не выполняется ни одно из включений $\omega_p\subset\omega_q$, $\omega_q\subset\omega_p$. Тогда для произвольной точки $x^0\in F$ справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^{|\omega_p|} a_i+\sum_{i=1}^{|\omega_q|} a_i=\sum_{i\in\omega_p} x_i^0+\sum_{i\in\omega} x_i^0=$$

$$=\sum_{i\in\omega_p\cup\omega_q} x_i^0+\sum_{i\in\omega_p\cap\omega_q} x_i^0\leqslant\sum_{i=1}^{|\omega_p\cup\omega_q|} a_i+\sum_{i=1}^{|\omega_p\cap\omega_q|} a_i.$$

С другой стороны, ввиду условия (3.1), для рассматриваемых $\omega_p$ и $\omega_q$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{|\omega_p\cup\omega_q|} a_i+\sum_{i=1}^{|\omega_p\cap\omega_q|} a_i<\sum_{i=1}^{|\omega_p|} a_i+\sum_{i=1}^{|\omega_q|} a_i.$$

Полученное противоречие доказывает необходимость условий (3.7) теоремы.

Следствие 3.5. *Для каждой перестановки $\pi\in S_n$ точка $a_\pi$ является вершиной многогранника $M_n(a)$.*

Легко проверяется, что $\dim M_n(a)=n-1$.

Следствие 3.6. *Все перестановочные многогранники одной размерности комбинаторно эквивалентны между собой.*

Теорема 3.7. *Компоненты $f$-вектора перестановочного многогранника $M_n(a)$ определяются по формулам*

$$f_i(M_n(a))=\sum\frac{n!}{t_1!\,t_2!\,\ldots\,t_{n-i}!} \qquad \forall i\in N_{n-1}, \tag{3.9}$$

*где суммирование проводится по всем решениям уравнения $t_1+t_2+\ldots+t_{n-i}=n$ в целых положительных числах.*

Доказательство. Согласно теореме 3.4 каждое разбиение $Q_1,\ldots,Q_{n-i}$ множества $N_n$ на $n-i$ непустых подмножеств определяет равенствами (3.8) $i$-грань многогранника $M_n(a)$ при $\omega_k=$

$= \bigcup\limits_{s=1}^{k} Q_s$. В дальнейшем такую грань обозначаем символом $F(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$. Из комбинаторного анализа известно, что число различных разбиений множества из $n$ элементов на $n-i$ подмножеств, каждое из которых состоит из $t_s$, $\forall s \in N_{n-i}$, элементов, равно

$$\frac{n!}{t_1!\, t_2! \ldots t_{n-i}!}. \tag{3.10}$$

Теорема 3.7 доказана.

Пусть $Q_1, \ldots, Q_{n-i}$ — разбиение множества $N_n$ на $n-i$ непустых подмножеств. Обозначим через $S(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ множество всех перестановок, получаемых в результате всевозможных перестановок элементов внутри каждого из подмножеств $Q_s$. Пусть $S^{-1}(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ — множество перестановок, обратных к перестановкам из $S(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$.

Следствие 3.8. *Грань $F(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ порождена вершинами $a_\pi$ для всех $\pi \in S^{-1}(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$.*

Доказательство. Покажем, что вершина $a_\pi$ при $\pi \in S^{-1}(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ принадлежит грани $F(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$. Действительно, для $x = a_\pi$ в силу определения множества $S^{-1}(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ множества чисел $\left\{\pi_i : i \in \bigcup\limits_{s=1}^{k} Q_s\right\}$ и $\{1, 2, \ldots, t_1 + \ldots + t_k\}$ совпадают, значит, выполняются равенства

$$\sum_{i \in \omega_k} x_i = \sum_{i \in \omega_k} a_{\pi_i} = \sum_{i=1}^{|\omega_k|} a_i \qquad \forall k \in N_{n-i},$$

где $\omega_k = \bigcup\limits_{s=1}^{k} Q_s$. В то же время вершина $a_\pi$, если $\pi \notin S^{-1}(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$, не обращает неравенства (2.2) для $\omega = \omega_k$ $\forall k \in N_{n-i}$ в равенства и поэтому не принадлежит грани $F(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$.

Следствие 3.9. *Вершиной, смежной с вершиной $a_\pi = (a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_n})$, является всякая вершина, отвечающая перестановке $\pi k$, полученной из $\pi$ транспозицией компонент, равных $k$ и $k+1$ $\forall k \in N_{n-1}$.*

Доказательство. Всякая одномерная грань (ребро) $F = F(Q_1, \ldots, Q_{n-1})$, где $Q_s = \{\pi_1, \ldots, \pi_s\}$ $\forall s \in N_{k-1}$, $Q_s = \{\pi_1, \ldots, \pi_{s+1}\}$ $\forall s \in N_{n-1} \setminus N_{k-1}$ перестановочного многогранника, согласно теореме 3.4 задается ограничениями (3.2), (3.3) и следующими равенствами:

$$\sum_{i=1}^{s} x_{\pi_i} = \sum_{i=1}^{s} a_i, \qquad s = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n.$$

В силу следствия 2.8 грани $F$ принадлежат вершине $a_{\pi^{-1}}$ и $a_{\pi_0^{-1}}$, где $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_n)$, $\pi_0=(\pi_1, \ldots, \pi_{k-1}, \pi_{k+1}, \pi_k, \pi_{k+2}, \ldots, \pi_n)$. Очевидно, что перестановки $\pi^{-1}$ и $\pi_0^{-1}$ отличаются транспозицией компонент, равных $k$ и $k+1$.

Следствие 3.10. *Диаметр перестановочного многогранника* $M_n(a)$ *равен* $n(n-1)/2$.

Доказательство проводится по индукции.

**3. Перестановочный полиматроид.** Условия, задающие перестановочный многогранник, схожи с ограничениями, фигурирующими в определении полиматроида. Покажем, что это не случайно, а на самом деле перестановочный многогранник является гранью некоторого полиматроида. Отметим сначала, что при выполнении равенства (3.3) неравенства (3.2) эквивалентны следующим:

$$\sum_{i\in\omega} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} a_{n-i+1} \quad \forall\omega\subset N_n. \tag{3.11}$$

Теорема 3.11. *Многогранник, заданный условиями* (3.2) *и*

$$x_i \geqslant 0 \quad \forall i\in N_n, \tag{3.12}$$

*является ограниченным полиматроидом. Полиэдр, заданный условиями* (3.11), *является неограниченным полиматроидом.*

Доказательство. Необходимо показать, что функции $\rho(\omega)=\sum_{i=1}^{|\omega|} a_i$ и $\rho'(\omega)=\sum_{i=1}^{|\omega|} a_{n-i+1}$ являются неотрицательными, неубывающими и соответственно субмодулярной и супермодулярной. Два первых свойства имеют место в силу неотрицательности чисел $a_i$ $\forall i\in N_n$. Субмодулярность функции $\rho(\omega)$ вытекает из следующего неравенства:

$$\sum_{i=1}^{|I|} a_i+\sum_{i=1}^{|J|} a_i \geqslant \sum_{i=1}^{|I\cup J|} a_i+\sum_{i=1}^{|I\cap J|} a_i,$$

справедливого в силу условия (3.1). Функция $\rho'(\omega)$ представима в виде $\rho'(\omega)=\rho(N_n)-\rho(N_n\setminus\omega)$ и поэтому является супермодулярной. Теорема 3.11 доказана.

Определение 3.3. Многогранник, заданный условиями (3.2) и (3.12), назовем *ограниченным перестановочным полиматроидом*. Соответственно, многогранник, заданный условиями (3.11), назовем *неограниченным перестановочным полиматроидом.*

Как следствие теорем 3.1 и 3.11, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.12. *Перестановочный многогранник есть пересечение ограниченного и неограниченного перестановочных полиматроидов.*

Перестановочный полиматроид изображен на рис. 35, заштрихован $M_8(3, 2, 1)$.

**4. Многогранник четных перестановок.** Если в перестановке число $i$ расположено левее числа $j$, и $i > j$, то говорят, что эти числа находятся в инверсии. Если перестановка содержит четное число инверсий, то ее называют *четной*, в противном случае — *нечетной*. Понятно, что однократное применение транспозиции меняет характер четности перестановки на противоположный. Обозначим через $S_n^+$ и $S_n^-$ множества соответственно четных и нечетных перестановок из $S_n$.

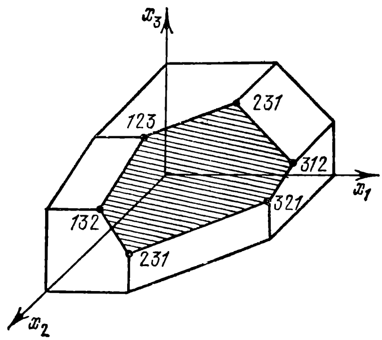


Рис. 35.

Определение 3.4. Выпуклую оболочку точек $a_\pi = (a_{\pi_1}, \ldots \ldots a_{\pi_n})$ для всех $\pi \in S_n^+$ назовем *многогранником четных перестановок* (обозначается $M_n^+(a)$). На рис. 36 изображен многогранник $M_4^+(4, 3, 2, 1)$.

Многогранник $M_n^+(a)$ можно получить из перестановочного многогранника $M_n(a)$ с помощью отсечения вершин $a_\pi$ для всех $\pi \in S_n^-$, причем новых вершин не должно возникнуть. Оказывается, это просто сделать. Действительно, если $\pi \in S_n^-$, то согласно следствию 3.9 смежные вершины $a_\sigma$ (их число равно $n-1$) определяются перестановками $\sigma \in S_n^+$. Поэтому гиперплоскость $H_\pi$, проходящая через

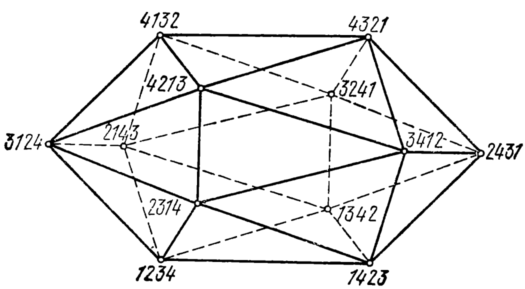


Рис. 36.

вершины $a_\sigma$, строго отделяет точку $a_\pi$ от многогранника $\operatorname{conv}\{a_\tau : \tau \in S_n \setminus \pi\}$, к которому она является опорной. Таким образом, общая часть многогранника $M_n(a)$ и полупространств $H_\pi^+$ для каждого $\pi \in S_n^-$ совпадает с многогранником $M_n^+(a)$. Гиперплоскость $H_\pi$ однозначно определяется точками $a_\sigma$, смежными вершине $a_\pi$, так как точки $a_\sigma$ являются аффинно независимыми. Положив

$$c_1 = a_1, \qquad c_2 = a_2, \qquad c_i = c_{i-1} - \frac{(a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_2)}{a_{n-i+1} - a_{n-i+2}},$$

получим, что равенство

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i a_{n-i+1} + (a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_2)$$

задает искомую гиперплоскость. Итак, доказана еще одна теорема.

Теорема 3.13. *Многогранник четных перестановок* $M_n^+(a)$ *задается неравенствами* (3.2), (3.3) *и*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{\pi_i} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} c_i a_{n-i+1} + (a_{n-1} - a_n)(a_1 - a_2) \quad \forall \pi \in S_n^-, \tag{3.13}$$

*причем при* $n > 4$ *каждое неравенство из* (3.13) *определяет его грань.*

## § 4. Многогранник размещений

В этом параграфе изучается проекция перестановочного многогранника в пространство меньшей размерности, точнее, проекция на пересечение координатных плоскостей.

**1. Алгебраическое описание.** Пусть дан вектор $a = (a_1, \ldots, a_n)$, для компонент которого имеет место

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0. \tag{4.1}$$

Упорядоченную без повторений $m$-выборку ($m \leqslant n$) из элементов множества $N_n$ называем *$m$-размещением.* Каждому $m$-размещению $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ сопоставим точку $x = (x_1, \ldots, x_m)$ по правилу $x_i = a_{\pi_i}$. Такую точку обозначаем $a_\pi$.

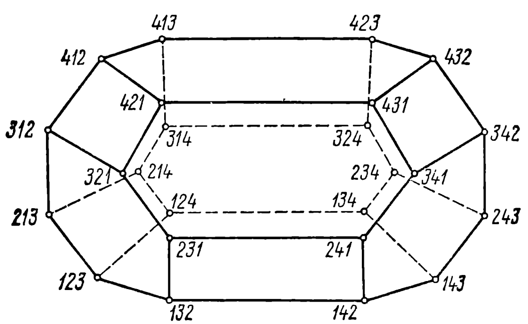



Рис. 37.

Определение 4.1. Выпуклую оболочку в $E_m$ точек $a_\pi$ для всех $m$-размещений $\pi$ из элементов множества $N_n$ назовем *многогранником размещений* и обозначим через $M_n^m(a)$ (на рис. 37 см. $M_4(4, 3, 2, 1)$).

Теорема 4.1. *Многогранник размещений $M_n^m(a)$ есть совокупность всех решений следующей системы неравенств*:

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} a_{n-i+1} \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} a_i \quad \forall\omega\subset N_m. \tag{4.2}$$

Для доказательства переформулируем теорему 4.1 в терминах мажорирования векторов. С этой целью обобщим введенное в предыдущем параграфе понятие мажорирования на случай векторов разной размерности. Будем говорить, что $m$-вектор $x=(x_1, \ldots, x_m)$ мажорируется $n$-вектором $y=(y_1, \ldots, y_m, \ldots, y_n)$, если найдутся перестановки $\tau\in S_m$ и $\pi\in S_n$ такие, что

$$x_{\tau_1} \geqslant \ldots \geqslant x_{\tau_m}, \quad y_{\pi_1} \geqslant \ldots \geqslant y_{\pi_m} \geqslant \ldots y_{\pi_n},$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_{\tau_i} \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} y_{\pi_i} \quad \forall\nu\in N_m, \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_{\tau_{m-i+1}} \geqslant \sum_{i=1}^{\nu} y_{\pi_{n-i+1}} \quad \forall\nu\in N_m. \tag{4.4}$$

Определение 4.2. Матрицу $\Delta=\|\delta_{ij}\|_{m\times n}$ называем *субстохастической*, если она удовлетворяет ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}=1, \ \sum_{i=1}^{m} \delta_{ij}\leqslant 1, \ \delta_{ij}\geqslant 0 \ \ \forall (i,\ j)\in N_m\times N_n.$$

Лемма 4.2. *$m$-вектор $x$ мажорируется $n$-вектором $y$ тогда и только тогда, когда существует такая субстохастическая матрица $\Delta=\|\delta_{ij}\|_{m\times n}$, что $x=\Delta y$.*

Доказательство. Достаточность аналогично доказательству достаточности леммы 3.2.

Необходимость. Дополним $m$-вектор $x$ компонентами $x_{m+j}=c$, $\forall j\in N_{n-m}$, где $c=\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i-\sum\limits_{i=1}^{m} x_i\right)/(n-m)$. Полученный $n$-вектор обозначим через $x^0$. Покажем, что если $m$-вектор $x$ мажорируется $n$-вектором $y$, то $n$-вектор $x^0$ мажорируется $n$-вектором $y$. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^0=\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{4.5}$$

Осталось убедиться в справедливости неравенств

$$\sum_{i=1}^{\nu} x_{\varphi_i}^0 \leqslant \sum_{i=1}^{\nu} y_{\pi_i} \quad \forall\nu\in N_{n-1}, \tag{4.6}$$

где перестановка $\varphi\in S_n$ обладает свойством $x_{\varphi_1}^0\geqslant\ldots\geqslant x_{\varphi_n}^0$. Пусть справедливы соотношения $x_{\varphi_\nu}>c$, $\nu=1,\ldots, s$, $x_{\varphi_s}=c$, $\nu=s+1,\ldots$ $\ldots, p$ и $x_{\varphi_\nu}<c$ для остальных $\nu$. Тогда в силу условий (4.3)

вытекает справедливость неравенств (4.6) для $\nu=1,\ldots,s$. Для $\nu>p$ неравенства (4.6) вытекают из неравенств (4.4) и равенства (4.5). Для $\nu=s+1,\ldots,p$ доказательство справедливости неравенств (4.6) проведем от противного. Предположим, что существует число $\nu\,(s<\nu\leqslant p)$ такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\nu} x^0_{\varphi_i}>\sum\limits_{i=1}^{\nu} y_{\pi_i}$. Тогда из равенств (4.5) вытекает неравенство

$$\sum_{i=\nu+1}^{n} x^0_{\varphi_i}<\sum_{i=\nu+1}^{n} y_{\pi_i}.$$

Учитывая, что неравенства (4.6) для $\nu\leqslant s$ и $\nu>p$ доказаны, получаем неравенства

$$\sum_{i=s+1}^{\nu} x^0_{\varphi_i}>\sum_{i=s+1}^{\nu} y_{\pi_i},\quad \sum_{i=\nu+1}^{p} x^0_{\varphi_i}<\sum_{i=\nu+1}^{p} y_{\pi_i}.$$

Отсюда, принимая во внимание равенства $\sum\limits_{i=s+1}^{\nu} x^0_{\varphi_i}=c\,(\nu-s)$, $\sum\limits_{i=\nu+1}^{p} x^0_{\varphi_i}=c\,(p-\nu)$, имеем

$$\frac{1}{\nu-s}\sum_{i=s+1}^{\nu} y_{\pi_i}<c<\frac{1}{p-\nu}\sum_{i=\nu+1}^{p} y_{\pi_i},$$

несмотря на то, что

$$\frac{1}{\nu-s}\sum_{i=s+1}^{\nu} y_{\pi_i}\geqslant\frac{1}{p-\nu}\sum_{i=\nu+1}^{p} y_{\pi_i}.$$

Полученное противоречие доказывает справедливость неравенств (4.6) для всех $\nu\in N_{n-1}$. На основании леммы 3.2 можно записать, что $x^0=\Delta^0 y$, где $\Delta^0$ — бистохастическая $(n\times n)$-матрица. Следовательно, $x=\Delta y$, где $\Delta$ — субстохастическая матрица, образованная первыми $m$ строками матрицы $\Delta^0$.

Переформулируем теорему 4.1 в терминах мажорирования векторов.

Теорема 4.3. *Точка $x\in M_n^m(a)$ тогда и только тогда, когда вектор $x$ мажорируется вектором $a$.*

Доказательство. Заметим сначала, что всякому $m$-размещению $\pi=(\pi_1,\ldots,\pi_m)$ отвечает субстохастическая булева $(m\times\times n)$-матрица $\Delta=\|\delta_{ij}\|$, компоненты которой определяются правилом: $\delta_{ij}=1$, если $i=\pi_j$, и $\delta_{ij}=0$ в противном случае. Обратно, каждой субстохастической булевой $(m\times n)$-матрице по тому же правилу отвечает $m$-размещение. В дальнейшем субстохастические булевы $(m\times n)$-матрицы называем матрицами *$m$-размещений.* Из теоремы Биркгофа следует, что множество всех субстохастических матриц совпадает с выпуклой оболочкой матриц размещений. Кроме того, каждый вектор $a_\pi$, где $\pi$ — $m$-размещение, можно представить так $a_\pi = \Delta_\pi a$. Здесь $\Delta_\pi$ — соответствующая матрица размещений. Теперь, как и при доказательстве теоремы 3.3, для любой точки $x \in M_n^m(a)$ справедливы равенства

$$x = \sum_\pi \lambda_\pi a_\pi = \sum_\pi \lambda_\pi \Delta_\pi a = \Delta a,$$

где суммирование ведется по всем $m$-размещениям $\pi$ множества $N_n$. Следовательно, по лемме 4.2, вектор $x$ мажорируется вектором $a$. Теорема 4.3 доказана.

Из теорем 4.1 и 3.11 вытекает следующее следствие.

Следствие 4.4. *Многогранник размещений $M_n^m(a)$ есть пересечение ограниченного $M_m(a^1)$ и неограниченного $M_m(a^2)$ перестановочных полиматроидов, где векторы $a^1$ и $a^2$ составлены соответственно из $m$ первых и $m$ последних компонент вектора $a$.*

Приведенное следствие дает возможность описания граней многогранника размещений с помощью техники полиматроидов. Однако здесь останавливаться на этом не будем, так как позднее будет доказана комбинаторная эквивалентность многогранника размещений и перестановочного многогранника. Отметим только, что при $m \neq n$ размерность многогранника $M_n^m(a)$ равна $m$.

**2. Смежность вершин.**

Теорема 4.5. *Вектор $x \in M_n^m(a)$ является вершиной многогранника размещений тогда и только тогда, когда он представляет собой перестановку чисел $a_1, \ldots, a_s, a_{n-r+1}, \ldots, a_n$, где*

$$0 \leqslant s \leqslant m, \quad 0 \leqslant r \leqslant m, \quad s + r = m. \tag{4.7}$$

Доказательство. Необходимость. Докажем от противного Пусть у вершины $a_\pi = (a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_m})$ найдется такой индекс $\pi_i$, что $s+1 \leqslant \pi_i \leqslant n-r$, где $s+1$ и $n-r$ соответственно наименьшее и наибольшее число из множества $N_n$, отсутствующее у размещения $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$. Возьмем два размещения $\pi'$ и $\pi''$, которые отличаются от $\pi$ только компонентой с номером $\pi_i$; последняя у них соответственно равна $s+1$ и $n-r$. Тогда для $\lambda = (a_{n-r} - a_{\pi_i})/(a_{n-r} - a_{s+1})$ будем иметь $a_\pi = \lambda a_{\pi'} + (1-\lambda) a_{\pi''}$, $0 < \lambda < 1$. Так как $0 < \lambda < 1$, то последнее равенство означает, что точка $a_\pi$ не является вершиной многогранника $M_n^m(a)$.

Достаточность. Пусть для вектора $a_\pi = (a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_m})$ условия теоремы выполняются. Тогда размещение $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ составлено из чисел $1, 2, \ldots, s, n-r+1, \ldots, n$, где числа $s$ и $r$ обладают свойством (4.7). Возьмем гиперплоскость

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j = c_0, \qquad c_0 = \sum_{j=1}^m c_j a_{\pi_j}. \tag{4.8}$$

Здесь коэффициенты $c_j$ — произвольные действительные числа, подчиненные условиям

$$c_{\tau_1} > c_{\tau_2} > \ldots > c_{\tau_s} > 0 > c_{\tau_{n-r+1}} > \ldots > c_{\tau_m}, \tag{4.9}$$

где $\tau = \pi^{-1}$. Учитывая соотношения (4.9) для коэффициентов $c_j$ и (4.1) для чисел $a_i$ и воспользовавшись неравенством из задачи 3 для любого вектора $a_\sigma = (a_{\sigma_1}, \ldots, a_{\sigma_m})$, $\sigma \neq \pi$, имеем

$$\sum_{j=1}^{m} c_j a_{\sigma_j} > \sum_{j=1}^{m} c_j a_{\pi_j}.$$

Это означает, что уравнение (4.8) задает опорную гиперплоскость к многограннику размещений $M_n^m(a)$ в точке $a_\pi$. Следовательно, $a_\pi$—вершина многогранника $M_n^m(a)$.

Следующая теорема решает проблему установления смежности вершин многогранника размещений.

Теорема 4.6. *Пусть числа $s$ и $r$ обладают свойством* (4.7), *и пусть $a_\pi$ — вершина многогранника $M_n^m(a)$, где размещение $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$ есть перестановка чисел $1, 2, \ldots, s, n-r+1, \ldots \ldots, n$. Тогда каждая смежная к $a_\pi$ вершина $a_{\pi^i}$ определяется размещением $\pi^i$, $1 \leqslant i \leqslant s-1$, $n-r+1 \leqslant i \leqslant n$, полученным из размещения $\pi$ транспозицией компонент, равных $i$ и $i+1$ ($i$ и $i-1$), а для $i=s$ ($i=n-r+1$) заменой компоненты, равной $s$ ($n-r+1$), на $n-r$ ($s+1$).*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $i$ отрезок, соединяющий вершины $a_\pi$ и $a_{\pi^i}$, есть ребро многогранника $M_n^m(a)$. Пусть в уравнении (4.8) все коэффициенты $c_j$, за исключением $j = \tau_i$, удовлетворяют условию (4.9), а коэффициент $c_{\tau_i}$ определяется следующим правилом, в зависимости от значения $i$:

$$c_{\tau_i} = \begin{cases} c_{\tau_{i+1}} & \text{при } i = 1, \ldots, s-1, \\ 0 & \text{при } i = s \text{ или } n-r+1, \\ c_{\tau_{i-1}} & \text{при } i = n-r+2, \ldots, n. \end{cases}$$

Тогда определяемая уравнением (4.8) гиперплоскость является опорной к многограннику $M_n^m(a)$, и пересечение ее с многогранником есть отрезок, соединяющий вершины $a_\pi$ и $a_{\pi^i}$.

Теперь покажем, что любой отрезок $[a_\pi, a_\sigma]$, где $\sigma$ — размещение, отличное от $\pi$ и $\pi^i$, не является ребром многогранника $M_n^m(a)$. Рассмотрим векторное уравнение

$$\sum_{i=1}^{s} \alpha_i (a_{\pi^i} - a_\pi) + \sum_{i=n-r+1}^{n} \alpha_i (a_{\pi^i} - a_\pi) = a_\sigma - a_\pi,$$

из которого найдем

$$\alpha_i = \frac{1}{a_{i+1} - a_i} \sum_{j=1}^{i} (a_{\sigma_{\tau_j}} - a_j) \quad \forall i \in N_s,$$

$$\alpha_{n-i} = \frac{1}{a_{n-i+1} - a_{n-i}} \sum_{j=n-i}^{n} (a_{\sigma_{\tau_j}} - a_j) \quad \forall i \in N_{n-r+1} \cup \{0\}.$$

Из условия (4.1) следует, что все $\alpha_i \geqslant 0$. Так как $\sigma \neq \pi$ и $\sigma \neq \pi^i$, то $\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum\limits_{i=n-r+1}^{n} \alpha_i > 1$. Положив

$$\lambda = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{s} \alpha_i + \sum\limits_{i=n-r+1}^{n} \alpha_i}, \quad \beta_i = \lambda \alpha_i,$$

получим

$$\lambda a_\sigma + (1 - \lambda) a_\pi = \sum_{i=1}^{s} \beta_i a_{\pi^i} + \sum_{i=n-r+1}^{n} \beta_i a_{\pi^i}.$$

Следовательно, отрезок $[a_\sigma, a_\pi]$ не является ребром многогранника $M_n^m(a)$, так как существует точка этого отрезка, являющаяся выпуклой комбинацией точек $a_{\pi^i}$. Теорема 4.6 доказана.

Из теорем 4.5 и 4.6 вытекает следствие.

Следствие 4.7. *Многогранник $M_n^m(a)$ простой.*

**3. Комбинаторное описание.**

Теорема 4.8. *Многогранник размещений $M_n^m(a)$ при $m < n$ и любом векторе $a$ комбинаторно эквивалентен перестановочному многограннику размерности $m$.*

Доказательство. Оно состоит из двух этапов. На первом — докажем комбинаторную эквивалентность многогранников $M_n^m(a)$ и $M_{m+1}^m(b)$, где $b = (b_1, \ldots, b_{m+1})$, $b_1 > \ldots > b_{m+1}$, а на втором — комбинаторную эквивалентность многогранников $M_{m+1}^m(b)$ и $M_{m+1}(c)$. Грани многогранника $M_n^m(a)$ определяются следующим образом:

$$F_I'(a) = \left\{ x \in M_n^m(a)\colon \ \sum_{i \in I} x_i = \sum_{i=1}^{|I|} a_i \right\} \quad \forall I \subseteq N_m,$$

$$F_J'(a) = \left\{ x \in M_n^m(a)\colon \ \sum_{i \in J} x_i = \sum_{i=1}^{|J|} a_{n-i+1} \right\} \quad \forall J \subseteq N_m.$$

Аналогично задаются грани $F_I'(b)$ и $F_J''(b)$ многогранника $M_{m+1}^m(b)$. Каждая вершина $a_\pi$, где $\pi$ — перестановка чисел $1, \ldots$ $\ldots s, n-r+1, \ldots, n$ ($s$ и $r$ удовлетворяют условию (4.7)), многогранника $M_n^m(a)$ есть точка пересечения граней $F_{I_1}'(a), \ldots$

$\ldots, F'_{I_s}(a), F''_{J_{s+1}}(a), \ldots, F''_{J_m}(a)$, где $I_k = \{\tau_1, \ldots, \tau_k\}$ $\forall k \in N_s$, $J_k = \{\tau_{k+1}, \ldots, \tau_m\}$ $\forall k \in N_m \setminus N_s$. Здесь $\tau = \pi^{-1}$. Пусть $b_\sigma$ — вершина многогранника $M^m_{m+1}(b)$, где $\sigma$ — перестановка из чисел $1, \ldots, s, m-r+2, \ldots, m+1$, которая обладает свойством $\sigma^{-1} = \pi^{-1} = \tau$. Тогда грани многогранника $M^m_{m+1}(b)$, инцидентные вершине $b_\sigma$, определяются теми же подмножествами $I_k$ и $J_k$, что и грани многогранника $M^m_n(a)$. Итак, отображение $\varphi$: $a_\pi \to b_\sigma$, $F'_{I_k}(a) \to F'_{I_k}(b)$ $\forall k \in N_s$, $F''_{J_k}(a) \to F''_{J_k}(b)$ $\forall k \in N_m \setminus N_s$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между вершинами и гранями многогранников $M^m_n(a)$ и $M^m_{m+1}(b)$ и сохраняет инцидентность граней вершинам. Поэтому согласно теореме 1.7 гл. III, многогранники $M^m_n(a)$ и $M^m_{m+1}(b)$ — комбинаторно эквивалентны.

Рассмотрим перестановочный многогранник $M_{m+1}(c)$ для произвольного вектора $c$, компоненты которого подчинены условию (4.1). Многогранник $M_{m+1}(c)$ задается ограничениями

$$\sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} c_i \quad \forall \omega \subset N_{m+1}, \tag{4.9$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} x_i = \sum_{i=1}^{m+1} c_i. \tag{4.10}$$

Так как $\dim M_{m+1}(c) = m$, то, выразив из равенства (4.10) переменную $x_{m+1} = \sum_{i=1}^{m+1} c_i - \sum_{i=1}^{m} x_i$ и подставив в те неравенства системы (4.9$'$), которые содержат эту переменную, получим неравенства

$$\sum_{i=1}^{|\omega|} c_{n-i+1} \leqslant \sum_{i\in\omega} x_i \quad \forall \omega \subseteq N_m,$$

которые вместе с неравенствами

$$\sum_{i\in\omega} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} c_i \quad \forall \omega \subseteq N_m,$$

не содержащими переменную $x_{m+1}$, дадут алгебраическое описание многогранника $M^m_{m+1}(c)$. Ясно, что исключение избыточного ограничения не повлекло изменения комбинаторного типа многогранника. Итак, многогранник размещений комбинаторно эквивалентен перестановочному многограннику той же размерности.

Следствие 4.9. Для числа $i$-граней $(0 \leqslant i \leqslant m)$ многогранника размещений справедлива формула

$$f_i(M^m_n(a)) = \sum \frac{(m+1)!}{t_1! t_2! \ldots t_{m-i+1}!} \qquad \forall i \in N_m,$$

где суммирование проводится по всем решениям уравнения $t_1 + \ldots + t_{m-i+1} = m$ в целых положительных числах.

Следствие 4.10. $\operatorname{diam} M_n^m(a) = m(m+1)/2$.

## § 5. Многогранник задачи стандартизации

Первые работы, в которых предлагались математические методы оптимизации стандартов, относятся к 1968—1970 гг. К настоящему времени актуальной стала проблема повышения эффективности разработанных методов [1]. Существенное снижение размерности задачи было достигнуто благодаря указанному в [2] преобразованию допустимой области задачи стандартизации в пространство меньшей размерности. Возник новый класс задач полиэдральной комбинаторики по изучению аффинного образа некоторого многогранника.

**1. Аффинный образ стохастических матриц.** Пусть

$$G_{m,n} = \left\{ \| x_{ij} \|_{m \times n} \colon \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1, \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n \right\}$$

— множество стохастических матриц, и $F(\omega)$ — непустая грань многогранника $G_{m,n}$, определяемая соотношениями $x_{ij} = 0 \ \forall (i, j) \in \omega$, где $\omega$ — некоторое заданное подмножество пар индексов $(i, j)$. Рассмотрим многогранник $H_m(\omega)$ — образ многогранника $F(\omega)$ при вырожденном аффинном преобразовании $\Lambda$, заданном соотношением

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_j x_{ij} \quad \forall i \in N_m,$$

где $a_j > 0 \ \forall j \in N_n$.

Как показано в [2], [3], [30], многогранник $H_m(\omega)$ при подходящем выборе множества $\omega$ и преобразования $\Lambda$ является допустимой областью задачи стандартизации. Займемся изучением способов описания многогранника $H_m(\omega)$ с помощью линейных неравенств. Множество $\omega$ удобно задавать с помощью булевой $(m \times n)$-матрицы $Q = \| q_{ij} \|$, у которой $q_{ij} = 0$, если $(i, j) \in \omega$, и $q_{ij} = 1$ в противном случае. Поэтому наряду с символами $F(\omega)$ и $H_m(\omega)$ иногда употребляем также символы $F(Q)$ и $H_m(Q)$. Отметим, что в силу предположения о непустоте множества $F(Q)$ справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} \geqslant 1 \quad \forall j \in N_m. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Многогранник $H_m(Q)$ в $E_m$ принадлежит гиперплоскости*

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} a_j \tag{5.2}$$

*и задается одной из следующих систем линейных неравенств*

$$\sum_{i \in w(J)} y_i \geqslant \sum_{j \in J} a_j \quad \forall J \subseteq N_n,$$
$$y_i \geqslant 0 \quad \forall i \in N_m; \tag{5.3}$$

$$\sum_{i \in I} y_i \geqslant \sum_{j \in v(I)} a_j \quad \forall I \subseteq N_m; \tag{5.4}$$

$$\sum_{i \in I} y_i \leqslant \sum_{j \in u(I)} a_j \quad \forall I \subseteq N_m, \tag{5.5}$$

где $w(J) = \left\{i \in N_m: \sum_{j \in J} q_{ij} \geqslant 1\right\}$, $v(I) = \left\{j \in N_n: \sum_{i \notin I} q_{ij} = 0\right\}$, $u(I) = \left\{j \in N_n: \sum_{i \in I} q_{ij} \geqslant 1\right\}$.

Доказательство. Введем вспомогательные переменные $z_{ij} = a_j x_{ij}$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_n$. Рассмотрим систему линейных неравенств и равенств

$$\sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{j=1}^{n} a_j, \tag{5.6}$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} \quad \forall i \in N_m, \tag{5.7}$$

$$a_j = \sum_{i=1}^{m} z_{ij} \quad \forall j \in N_n, \tag{5.8}$$

$$0 \leqslant z_{ij} \leqslant \xi q_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n, \tag{5.9}$$

где $\xi$ — некоторое достаточно большое положительное число. Очевидно, что вектор $y = (y_1, \ldots, y_m) \in H_m(Q)$ тогда и только тогда, когда система (5.6)—(5.9) совместна. Различные критерии совместности (следствие 4.12 гл. IV) с учетом того, что $q_{ij} = 0, 1$, дают эквивалентные системы (5.3)—(5.5). Теорема доказана.

Многогранник $H_m(Q)$ лежит в гиперплоскости (5.2), поэтому его размерность не превышает числа $m-1$. Отметим, что если в матрице $Q$ имеется столбец с единственным ненулевым элементом $q_{ij} = 1$, то для всех $y \in H_m(Q)$ имеет место $y_i \geqslant a_j$, а если при этом элемент $q_{ij}$ является единственным ненулевым элементом в строке $i$, то имеет место равенство $y_i = a_i$. В последнем случае $\dim H_m(Q) \leqslant m-2$. В дальнейшем будем считать, что справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{m} q_{ij} \geqslant 2 \quad \forall j \in N_m. \tag{5.1'}$$

Предположение (5.1′) согласуется с содержательным смыслом задачи стандартизации.

Теорема 5.2. 1) *Многогранник, заданный неравенствами* (5.5) *и* $y_i \geq 0 \; \forall i \in N_m$, *является ограниченным полиматроидом.*

2) *Многогранник, заданный неравенствами* (5.4), *является неограниченным полиматроидом.*

Доказательство. Для доказательства первой части теоремы достаточно убедиться в том, что функция $\rho(I) = \sum\limits_{j \in u(I)} a_j$ является неотрицательной, неубывающей и субмодулярной (теорема 6.1 гл. IV). Первыми двумя свойствами функция $\rho(I)$ обладает в силу положительности чисел $a_j \; \forall j \in N_n$ и справедливости включения $u(I) \subset u(I')$ при $I \subset I'$. Далее, из определения множеств $u(I) \; \forall I \subset N_m$ вытекают соотношения

$$u(I' \cup I'') = u(I') \cup u(I''),$$
$$u(I' \cap I'') \supseteq u(I') \cap u(I'').$$

Поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\rho(I' \cup I'') + \rho(I' \cap I'') \leq \sum_{j \in u(I') \cup u(I'')} a_j + \sum_{j \in u(I') \cap u(I'')} a_j = \\ = \sum_{j \in u(I')} a_j + \sum_{j \in u(I'')} a_j = \rho(I') + \rho(I''),$$

из которых следует субмодулярность функции $\rho(I)$. Аналогично доказывается, что функция $\rho'(I) = \sum\limits_{j \in v(I)} a_j$ является неотрицательной, неубывающей и супермодулярной. Теорема доказана.

Следствие 5.3 ([5]). 1) *Многогранник задачи стандартизации* $H_m(Q)$ *совпадает с пересечением полиматроидов ограниченного* $P(\rho)$ *и неограниченного* $P(\rho')$.

2) *Многогранник* $H_m(Q)$ *есть грань каждого из полиматроидов* $P(\rho)$ *и* $P(\rho')$, *порожденная опорной гиперплоскостью* (5.2).

Полиматроидная структура многогранника задачи стандартизации позволяет сравнительно просто идентифицировать его комбинаторный тип и изучить строение его вершин.

**2. Вершины.** Теорема 6.3 гл. IV и следствие 5.3 позволяют дать конструктивное описание всех вершин многогранника $H_m(Q)$. Действительно, из систем (5.2), (5.5), задающих многогранник $H_m(Q)$, выводим, что каждая вершина $x$ задается следующими равенствами

$$\sum_{i \in \omega_s} x_i = \rho(\omega_s) \quad \forall s \in N_m,$$

где $\omega_0 = \varnothing$, $\omega_s = \omega_{s-1} \cup \{\pi_s\} \; \forall s \in N_m$, а перестановка $(\pi_1, \ldots, \pi_m) \in S_m$.

Теорема 5.4. *Вектор* $x$ *есть вершина многогр нника* $H_m(Q)$ *тогда и только тогда, когда существует такая перестановка* $(\pi_1, \ldots, \pi_m) \in S_m$, *что* $x_{\pi_s} = \sum\limits_{j \in u(\omega_s)} a_j - \sum\limits_{j \in u(\omega_{s-1})} a_j \quad \forall s \in N_m.$

Рассмотрим другой способ построения всех вершин многогранника $H_m(Q)$, не требующий вычисления функции $\rho(\omega)$, а оперирующий только с матрицей $Q$ и вектором $(a_1, \ldots, a_n)$.

Пусть операция $\oplus$ определена соотношениями: $1 \oplus 0 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 1 = 0$, $0 \oplus 0 = 0$. Пусть $(\pi_1, \ldots, \pi_m) \in S_m$. Рассмотрим процедуру $\varphi(\pi)$, $k$-й шаг $(1 \leqslant k \leqslant m)$ которой состоит в следующем: вычисляем $\pi_k$-ю компоненту вектора $y$ по правилу $y_{\pi_k} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j q_{\pi_k j}^{(k-1)}$ и преобразуем матрицу $\|q_{ij}^{(k-1)}\|$ в матрицу $\|q_{ij}^{(k)}\|$ по правилу $q_{ij}^{(k)} = q_{ij}^{(k-1)} \oplus q_{\pi_k j}^{(k-1)}$, $q_{ij}^{(0)} = q_{ij}$. В результате работы процедуры $\varphi(\pi)$ будет получен вектор $y$, который будем обозначать $y(\pi)$.

Теорема 5.5. *Вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$ является вершиной многогранника $H_m(Q)$ тогда и только тогда, когда существует такая перестановка $\pi \in S_m$, что $y = y(\pi)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $y$ — вершина многогранника $H_m(Q)$. Достаточно показать, что среди положительных компонент вектора $y$ существует компонента $y_k = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j q_{kj}$. Тогда, положив $\pi_1 = k$, по индукции построим перестановку $\pi \in S_m$, обладающую свойством $y(\pi) = y$. Предположим противное. Пусть для любой положительной компоненты $y_k$ вектора $y$ у некоторого прообраза $x = \Lambda^{-1}(y)$ найдется компонента $x_{kj} = 0$, несмотря на то, что $q_{kj} = 1$. Это позволяет построить цикл $(k_1, j_1)$, $(k_2, j_1)$, $(k_2, j_2)$, $\ldots$, $(k_1, j_t)$, в котором компоненты $x_{ij}$, стоящие на нечетных местах, равны нулю и при этом $q_{ij} = 1$, а компоненты $x_{ij}$, стоящие на четных местах, положительны (точнее, равны 1, так как прообраз вершины $y \in H_m(Q)$ при аффинном преобразовании $\Lambda$ должен быть вершиной многогранника $F(Q)$). Вычитая из чисел, стоящих на четных местах, и прибавляя к числам, стоящим на нечетных местах, некоторое достаточно малое число, получаем новый прообраз вершины $y$, не являющийся вершиной многогранника $F(Q)$, что невозможно.

Достаточность. Пусть $y = y(\pi)$ — вектор, порожденный процедурой $\varphi(\pi)$. Очевидно, что $y \in H_m(Q)$. Докажем, что $y \in \operatorname{vert} H_m(Q)$. Предположим противное, т. е. что $y \in \lambda y' + (1 - \lambda) y''$, где $y', y'' \in H_m(Q)$, $y' \neq y''$, $0 < \lambda < 1$. Пусть $x', x'' \in F(Q)$ — соответственно прообразы векторов $y'$, $y''$. Тогда $x^0 = \lambda x' + (1 - \lambda) x''$ — прообраз вектора $y$. Из описания процедуры $\varphi(\pi)$ вытекает, что в матрице $Q$ компоненты $q_{\pi_k j} = 0$ $\forall (k, j) \in N_{m-1} \times N(\pi_m)$, $N(\pi_m) = \{j \in N_m: q_{\pi_m j} = 1\}$. Следовательно, у всех прообразов $x$ вектора $y$ компоненты $x_{\pi_m j} = 1$, $\forall j \in N(\pi_m)$. Проводя аналогичные рассуждения для строк $\pi_{m-1}, \ldots, \pi_1$, докажем единственность прообраза вектора $y$. Следовательно, $x = x^0 = \lambda x' + (1 - \lambda) x''$. Но по построению $x$ — вершина многогранника $F(Q)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Следствие 5.6. *Каждая вершина многогранника $H_m(Q)$ имеет единственный прообраз в $F(Q)$.*

**3. Максимальное число вершин.** Из теоремы 5.5 следует, что число $m!$ является верхней границей для количества вершин многогранника стандартизации. Покажем, что эта граница достижима и что все многогранники $H_m(Q)$, имеющие $m!$ вершин, комбинаторно эквивалентны перестановочному многограннику.

Определение 5.1. Булеву матрицу $Q=\|q_{ij}\|_{m\times n}$ будем называть *полной*, если она содержит в качестве подматрицы матрицу инциденций полного $m$-вершинного графа $K_m$.

Полная матрица содержит не менее $(m-1)m/2$ столбцов.

Теорема 5.7. *Многогранник $H_m(Q)$ имеет максимальное число $m!$ вершин тогда и только тогда, когда матрица $Q$ является полной.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_0(H_m(Q)) = m!$. Допустим противное. Пусть матрица $Q$ имеет только $k$ ($k<m(m-1)/2$) несовпадающих столбцов, каждый из которых содержит ровно две единицы. Возможны два случая, $k=0$ и $k\neq 0$.

Пусть в матрице $Q$ не существует ни одного столбца с двумя ненулевыми элементами. Считаем, что $Q$ не содержит столбцов с единственным ненулевым элементом. Но если каждый столбец матрицы $Q$ содержит не менее трех единиц, то каждые $m-2$ строк матрицы $Q$ образуют подматрицу, содержащую в каждом столбце по крайней мере одну единицу. Поэтому векторы $y(\pi)$ и $y(\pi')$, порожденные процедурами $\varphi(\pi)$ и $\varphi(\pi')$, где $\pi=(\pi_1 \ldots, \pi_{m-1}, \pi_m)$, $\pi'=(\pi_1, \ldots, \pi_m, \pi_{m-1})$, совпадают. Следовательно, в этом случае $f_0(H_m(Q))<m!$.

Пусть в матрице $Q$ несовпадающие столбцы с двумя единицами образуют $(m\times k)$-подматрицу $Q'$. Так как $k<m(m-1)/2$, то в матрице $Q$ существуют по крайней мере две строки $Q_p$ и $Q_s$, обладающие свойством $Q_pQ_s=0$. Поэтому векторы $y(\pi)$ и $y(\pi')$, где $\pi=(\pi_1, \ldots, \pi_{m-2}, p, s)$, $\pi'=(\pi_1, \ldots, \pi_{m-2}, s, p)$, совпадают и, следовательно, $f_0(H_m(Q))<m!$.

Полученное в обоих случаях противоречие утверждению, что $f_0(H_m(Q))=m!$, доказывает необходимость условий теоремы.

Достаточность. Докажем индукцией по $m$. Если $m=2$, то существует столбец $j$ полной матрицы $Q$, для которого $q_{1j} = q_{2j}=1$. Тогда для компонент векторов $y'=y(1, 2)$ и $y''=y(2, 1)$ справедливы следующие соотношения

$$y'_1=b+a_j, \quad y'_2=c; \qquad y''_1\leqslant b, \quad y''_2\geqslant c+a_j, \tag{5.10}$$

которые показывают, что из-за неотрицательности чисел $a_1, \ldots, a_n$ имеет место $y'\neq y''$, т. е. $f_0(H_m(Q))=2$. Если $(m\times n)$-матрица $Q$ является полной, то матрица, полученная из $Q$ вычеркиванием произвольной $i$-й строки и всех столбцов $j$, для которых $\delta_{ij}=1$, также является полной. Поэтому если зафиксируем $i$ и положим $y_i=\sum_{j=1}^{n} a_jq_{ij}$, то в силу предположения индукции с помощью процедур $\varphi(\pi)$, где $\pi=(i, \alpha)$, $\alpha$ — произвольная перестановка чисел $1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$, получим множество $V(i)$, состоящее из $(m-1)!$ различных вершин многогранника $H_m(Q)$ с одинаковой $i$-й компонентой. Покажем, что если $y' \in V(s)$, $y \in V(r)$, $r \neq s$, то $y' \neq y''$. Так как у полного графа любые две вершины соединены ребром, то в матрице $Q$ существует столбец $j$ такой, что $q_{sj}=q_{rj}=1$, $q_{ij}=0$, $i \neq s, r$. Следовательно, справедливы соотношения типа (5.10) для компонент $y_s$, $y_r$ векторов $y(s, \alpha)$ и $y(r, \alpha)$, из которых вытекает, что $y' \neq y''$. Поэтому все $m!$ вершин, построенных с помощью процедур $\varphi(1, \alpha), \ldots, \varphi(m, \alpha)$, будут различны. Теорема 5.7 доказана.

Теорема 5.8. *Если $Q$ — полная матрица, то многогранник $H_m(Q)$ комбинаторно эквивалентен перестановочному.*

Доказательство. В силу теоремы 5.1 многогранник $H_m(Q)$ задается равенством (5.2) и неравенствами

$$\sum_{i \in I} y_i \leqslant \sum_{j \in u(I)} a_j \quad \forall I \subset N_m. \tag{$\alpha_I$}$$

Покажем, что если $Q$ — полная матрица, то каждое из ограничений $(\alpha_I)$ определяет $(d-1)$-грань $d$-многогранника $H_m(Q)$. Согласно теореме 5.2 гл. IV и следствию 5.3 достаточно доказать, что каждое множество $I \subset N_m$ является $\rho$-замкнутым и $\rho$-несепарабельным.

Пусть $I' \subset I'' \subset N_m$. Так как матрица $Q$ содержит подматрицу, являющуюся матрицей инциденций полного графа, то для строки $i_0 \in I'' \setminus I'$ существует такой столбец $j_0$, что $q_{i_0 j_0}=1$ и $q_{ij_0}=0$ для всех $i \in N_m \setminus I'$. Поэтому $u(I') \cup j_0 \subseteq u(I'')$ и, следовательно,

$$\sum_{j \in u(I'')} a_j \geqslant a_{j_0} + \sum_{j \in u(I')} a_j > \sum_{j \in u(I')} a_j,$$

что означает $\rho$-замкнутость множества $I'$. Покажем, что каждое из подмножеств $I \subset N_m$ является $\rho$-несепарабельным. Пусть для некоторого $I \subset N_m$ существуют множества $S$ и $T$, обладающие свойствами

$$S \cup T = I, \quad S \cap T = \varnothing,$$
$$\sum_{j \in u(S)} a_j + \sum_{j \in u(T)} a_j = \sum_{j \in u(S \cup T)} a_j. \tag{5.11}$$

Так как $u(I)=u(S) \cup u(T)$, и кроме того, для любых $i' \in S$, $i'' \in T$ существует столбец $j_0$ такой, что $q_{i'j_0}=q_{i''j_0}=1$, то имеем $u(S) \cap u(T) \neq \varnothing$. Отсюда, учитывая, что $a_j>0$, убеждаемся в невозможности равенства (5.11). Итак, каждое из неравенств $(\alpha_I)$ определяет $(d-1)$-грань $d$-многогранника $H_m(Q)$. Согласно теореме 3.1, каждая $(d-1)$-грань перестановочного многогранника $M_m(a)$ определяется неравенствами

$$\sum_{i \in I} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{|I|} a_i \quad \forall I \subset N_m, \tag{$\beta_I$}$$

и обратно, для каждого $I\subset N_m$ неравенство $(\beta_I)$ определяет $(d-1)$-грань многогранника $M_m(a)$. Пусть $\varphi$: $(\alpha_{I'})\to(\beta_{I'})$ взаимно однозначное отображение между множествами $(d-1)$-граней многогранников $M_m(a)$ и $H_m(Q)$ Если покажем, что отображение сохраняет инцидентные отношения между вершинами и гранями, то, используя теорему 4.7 гл. I, докажем эквивалентность многогранников $H_m(Q)$ и $M_m(a)$. Действительно, так как $H_m(Q)$ и $M_m(a)$ — грани соответствующих полиматроидов (теорема 3.12, следствие 5.3), то согласно теореме 6.3 гл. IV о характеризации вершин полиматроида множества $I^1=\{i_1\}$, $I^k=I^{k-1}\cup\{i_k\}$, $k=2, \ldots, m-1$, определяют грани, инцидентные некоторой вершине как многогранника $H_m(Q)$, так и многогранника $M_m(a)$. Таким образом, пересечение $(d-1)$-граней с номерами $\beta_{I^1}, \ldots, \beta_{I^{m-1}}$ дает вершину многогранника $M_m(a)$ тогда и только тогда, когда $(d-1)$-грани с номерами $\alpha_{I^1}, \ldots, \alpha_{I^{m-1}}$ образуют в пересечении вершину многогранника $H_m(Q)$. Теорема доказана.

Учитывая, что $f$-вектор и диаметр перестановочного многогранника известны (теорема 3.7, следствие 3.10), получаем значения этих характеристик и для многогранника $H_m(Q)$.

Следствие 5.9. *Если матрица $Q$ полная, то* 1) $f_i(H_m(Q))=$ $=\sum\frac{m!}{t_1!\ldots t_{m-i}!}$, *где суммирование ведется по всем решениям уравнения $t_1+\ldots+t_{m-i}=m$ в целых положительных числах*;

2) $\operatorname{diam} H_m(Q)=m(m-1)/2$.

**4. Однопараметрическая задача.** В однопараметрической задаче стандартизации допустимая область есть многогранник $H_m(Q)$ при условии, что $Q=Q_1$, где $Q_1$ — треугольная матрица. Иначе, многогранник $H_m(Q_1)$ является образом многогранника

$$F(Q_1)=$$
$$=\left\{\|x_{ij}\|_{m\times n}:\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1,\ x_{ij}\geqslant 0\ \ \forall(i,\ j)\in N_m\times N_n,\ x_{ij}=0,\ \ i<j\right\}$$

при аффинном отображении $\Lambda$. Из теоремы 6.4 гл. IV, 5.1 и следствия 5.3 вытекает, что многогранник $H(Q_1)$ принадлежит гиперплоскости (5.1) и задается следующей неприводимой системой неравенств

$$y_i\geqslant 0\quad \forall i\in N_{m-1}, \tag{$\alpha_i$}$$
$$\sum_{j=1}^{i}y_j\leqslant\sum_{j=1}^{i}a_j\quad \forall i\in N_{m-1}. \tag{$\beta_i$}$$

Теорема 5.10. *Многогранник $H_m(Q_1)$ комбинаторно эквивалентен $(m-1)$-кубу.*

Доказательство. Пусть куб $\mathcal{K}$ задан в $E_{m-1}$ ограничениями

$$x_i\geqslant 0\quad \forall i\in N_{m-1}, \tag{$\alpha_i'$}$$
$$x_i\leqslant 1\quad \forall i\in N_{m-1}. \tag{$\beta_i'$}$$

Каждую вершину $x$ куба задаем номерами $\alpha'_{i_1}, \ldots, \alpha'_{i_k}, \beta'_{i_{k+1}}, \ldots$ $\ldots, \beta'_{i_{m-1}}$ граней, пересечение которых дает $x$. Здесь $(i_1, \ldots, i_{m-1}) \in$ $\in S_{m-1}$. Аналогично, каждая вершина $y$ многогранника $H(Q_1)$ определяется номерами $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}, \beta_{i_{k+1}}, \ldots, \beta_{i_{m-1}}$ граней, пересечение которых дает $x$. Таким образом, отображение $\varphi$: $\alpha_i \to \alpha'_i$, $\beta_i \to \beta'_i$ устанавливает изоморфизм полуматроидов многогранников $\mathscr{K}$ и $H_m(Q_1)$. В силу теоремы 1.7 гл. III многогранник $H_m(Q_1)$ комбинаторно эквивалентен кубу. Теорема доказана.

Следствие 5.11. 1) $f_i(H_m(Q_1)) = 2^{m-i-1}\binom{m-1}{i}$, $i = 0, \ldots, m-2$; 2) $\operatorname{diam} H_m(Q_1) = m-1$.

### Задачи и дополнения

1 [18]. Показать, что

1) каждой вершине многогранника бистохастических матриц $M_n$ отвечает $2^{n-1}n^{n-2}$ допустимых базисов;

2) от любого допустимого базиса многогранника $M_n$ можно перейти в любой другой допустимый базис не более, чем за $2n-1$ шагов, причем в построенной последовательности каждые два рядом стоящих базиса будут отличаться только одним вектор-столбцом и все базисы будут допустимыми;

3) граф многогранника $M_n$ гамильтонов.

2. Каждая $i$-грань ($i \in N_{d-1}$, $d = \dim M_n$) многогранника $M_n$ задается в форме $F = \{x \in M_n\colon\ x_{ij} = 0\ \ \forall (i, j) \in \omega \subset N_n \times N_n\}$. Условия непустоты множества $F$ дает теорема Холла (см. следствие 4.14 гл. IV). В [20] предпринято детальное изучение свойств граней $F$ многогранника $M_n$. В частности, получены следующие результаты:

1) каждая $i$-грань $F$ имеет не более трех $(i-1)$-граней;

2) если грань $F$ — 2-смежностный многогранник, то $F$ аффинно эквивалентна $M_3$;

3) $i$-грань $F$ имеет $i+2$ вершины тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих утверждений: (1) $i=2$ и $F$ — прямоугольник; (2) $i \geqslant 3$ и либо $F$ аффинно эквивалентна многограннику $M_3$, либо $F$ $(k-2)$-гранная пирамида, имеющая в основании прямоугольник;

4) $i$-грань $F$ является $i$-параллелепипедом тогда и только тогда, когда грань $F$ не содержит 2-грани, являющейся треугольником.

3 [15]. Пусть $C = \| c_{ij} \|_{n\times n}$ — матрица с действительными элементами. Задача о назначениях состоит в отыскании

$$F_n = \min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\colon\ \| x_{ij} \| \in M_n\right\}.$$

Если ранг матрицы $C$ равен $r$, то существует $r$ таких пар векторов $(a^1, b^1), \ldots$ $\ldots, (a^r, b^r)$, что задача о назначениях принимает вид

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (a_i^1 b_j^1 + \ldots + a_i^r b_j^r)\, x_{ij}\colon\ \| x_{ij} \| \in M_n\right\}.$$

В частности, когда ранг матрицы $C$ равен 1, задача о назначениях решается просто: оптимизирующая перестановочная матрица $x^*$ находится из условия $x^*_{i_k j_k} = 1$ $\forall k \in N_n$ и $x_{ij} = 0$ для остальных $(i, j)$, где перестановки $(i_1, \ldots, i_n)$, $(j_1, \ldots, j_n)$ определяются из условий $a^1_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant a^1_{i_n}$, $b^1_{j_1} \geqslant \ldots \geqslant b^1_{j_n}$. Причем, если среди компонент каждого из векторов $a^1$ и $b^1$ нет равных, то $x^*$ — единственное оптимальное решение.

4 [10, 15]. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}=\text{const}$ для каждого $x\in M_n$;

(2) $c_{ij}=\alpha_i+\beta_j \quad \forall i,\ j\in N_n$;

(3) $c_{ij}+\left(\sum_{i=1}^{n} u_i\right)/n^2-(u_i+v_j)/n=0,\ u_i=\sum_{j=1}^{n} c_{ij},\ v_j=\sum_{i=1}^{n} c_{ij}$.

В [11] аналогичный результат получен для многомерных матриц.

5 [9, 10]. Пусть $c_{ii}=0\ \forall i\in N_n$. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}=\text{const}$ для каждого $x\in M_n^s$;

(2) $c_{ij}=\alpha_i+\beta_j \quad \forall i,\ j\in N_n,\ i\neq j$;

(3) $c_{ij}+\frac{1}{(n-1)(n-2)}\sum_{i=1}^{n} u_i-\frac{n-1}{n(n-2)}(u_i+v_j)-$

$$-\frac{1}{n(n-2)}(u_j+v_i)=0 \quad \forall i,j\in N_n,\ i\neq j.$$

6. Если в задаче о назначении матрица $\|c_{ij}\|_{n\times n}$ такова, что

$$|j-i|\in\{0,\ 1\}\Rightarrow c_{ij}\geqslant 0,$$
$$|j-i|\notin\{0,\ 1\}\Rightarrow c_{ij}=0,$$

то оптимальное значение ее целевой функции $F_n$ можно найти с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_t=F_{t-1}+\min\{c_{tt},\ c_{t-1,\ t}-c_{t-1,\ t-1}x_{t-1,\ t-1}^{(t-1)}\},$$

где $t=2,\ \ldots,\ n$, $\|x_{ij}^t\|$ — перестановочная матрица, минимизирующая функцию $\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t} c_{ij}x_{ij}$ на многограннике $M_t$.

7 [14]. Пусть $M_n^{**}=\{\|x_{ij}\|\in E_{n^2}:\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ x_{ij}=x_{ji}\geqslant 0\ \forall i,\ j\in N_n\}$ — многогранник симметрических бистохастических матриц. Ясно, что $M_n^{**}\subset M_n^*$. Доказать, что многогранник $M_n^{**}$ совпадает с выпуклой оболочкой множества всех матриц $(x+x^T)/2$, где $x$ — перестановочная $(n\times n)$-матрица. Число вершин многогранника $M_n^{**}$ дается следующей формулой:

$$f_0(M_n^{**})=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{[(n-k)/2]}\frac{n!}{j!\ (n-k-2j)!\ 2^{n-k-j}}\sum_{l=0}^{k}\binom{1/4}{k-l}\binom{1/4+l-1}{l}$$

или следующей асимптотической формулой:

$$f_0(M_n^{**})\Rightarrow\frac{2^{1/4}en!}{\Gamma(1/4)\,n^{3/4}},\quad n\to\infty.$$

8 [13]. Для перманента линейной оболочки двух перестановочных матриц $\Delta_1$ и $\Delta_2$ справедливо соотношение

$$\text{per}(\alpha\Delta_1+\beta\Delta_2)=\prod_{i=1}^{k}(\alpha^{e_i}+\beta^{e_i}),$$

где $\alpha$, $\beta$ — действительные числа, $e_1,\ \ldots,e_k$ — длины циклов перестановки $\pi_1^{-1}\pi_2$. Здесь $\pi_1$, $\pi_2$ — перестановки, соответствующие матрицам $\Delta_1$, $\Delta_2$.

9 [28]. Пусть неотрицательные действительные числа $m$, $n$, $t$ удовлетворяют соотношениям $1/m \leqslant 1-t$, $1/t \geqslant 1/n$. Показать, что многогранник

$$Q_n = \{x \in M_n\colon\ 1/m \leqslant x_{ij} \leqslant 1/t \quad \forall i,\ j \in N_n\},$$

образованный пересечением многогранника бистохастических матриц и параллелипипеда, есть выпуклая оболочка всех матриц, элементы которых равны $1/m$ или $1/t$ за исключением, быть может, элементов только одной строки (или столбца), в которой все элементы равны одному и тому же числу.

10. Вершины $x$ и $x^T$ многогранника $M_n^{as}$ являются смежными. Если вершины $(x_1+x_1^T)/2$ и $(x_2+x_2^T)/2$ многогранника смежные, то следующие пары вершин $(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2^T)$, $(x_1^T, x_2)$, $(x_1^T, x_2^T)$, $(x_1, x_1^T)$, $(x_2, x_2^T)$ многогранника $M_n^s$ также являются смежными. У каждой вершины многогранника $M_n^s$ число смежных вершин не меньше $[(n-2)/2]!$ [37].

11 [27]. Смежностная размерность $k(M)$ многогранника $M$ определяется как минимальное из чисел $r$, обладающих свойством: любые две вершины многогранника $M$, принадлежат $k$-грани при $k \leqslant r$. Показать, что смежностная размерность многогранника бистохастических матриц $M_n$ равна $[n/2]$, а многогранника гамильтоновых контуров определяется формулой

$$k\left(M_n^{as}\right) = \begin{cases} 2m & \text{при } n = 4m+2 \text{ и } n \geqslant 8, \\ [n/2] & \text{при } n \neq 4m+2 \text{ и } n \geqslant 8, \\ 2 & \text{при } n = 6,\ 7, \\ 1 & \text{при } n = 3,\ 4,\ 5. \end{cases}$$

12 [25]. Неравенства, определяемые зубчатыми системами множества $(V_0, V_1 \ldots, V_k)$ и $(N_n \setminus V_0, V_1, \ldots, V_k)$, задают одну и ту же грань многогранника гамильтоновых циклов $M_n^s$. Показать, что число различных граней многогранника $M_n^s$, порождаемых зубчатыми системами множеств, вычисляется по формуле

$$\sum_{q=3}^{n-3} \frac{1}{2}\binom{n}{q} \sum_{j=3}^{n-q} \binom{n-q}{j} \sum_{k=3}^{\min(j,\,k)} \left(\sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (k-s)^j\right) \times$$
$$\times \sum_{p=k}^{q} \frac{1}{k!}\binom{q}{p} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s} (k-s)^p.$$

Убедиться, что неравенство, определяемое зубчатой системой множеств $V_0 = \ldots \ldots = V_k$, при $k=1$ совпадает с неравенством Данцига.

13 [10]. Следующая система из 510 неравенств и 14 равенств следующих 9 типов задает многогранник $M_5^{as}$:

1) $x_{ii} = 0$ (5 равенств);

2) $\sum\limits_{i=1}^{5} x_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{5} x_{ji} = 1$ (9 независимых равенств);

3) $x_{ij} \geqslant 0$, $i \neq j$ (20 неравенств);

4) $x_{ij} + x_{ji} \leqslant 1$, $i < j$ (10 неравенств);

5) $-x_{ij} - x_{ji} + x_{st} + x_{tr} - x_{rs} \geqslant -1$ (60 неравенств);

6) $x_{ir} + x_{si} + x_{rs} - x_{jr} - x_{sj} - 2x_{ij} - 2x_{ji} \geqslant -2$ (120 неравенств);

7) $x_{ij} + x_{ir} + x_{ji} + x_{js} + x_{ri} + x_{rt} + x_{tj} + x_{sr} \geqslant 1$ (60 неравенств);

8) $x_{ij} + 2x_{ir} + x_{is} + x_{tj} + x_{ts} + x_{ji} + x_{jt} + x_{rt} + x_{rs} + x_{ri} + 2x_{si} \geqslant 2$ (120 неравенств);

9) $x_{ij} + x_{js} + x_{sr} + x_{ri} + 2x_{ji} + 2x_{si} + x_{sj} \leqslant 3$ (120 неравенств),

где $i$, $j$, $s$, $r$, $t \in N_5$.

14 [10]. Многогранник $M_6^s$ задается следующей системой неравенств и равенств:

1) $x_{ij}=x_{ji}$, $i\neq j$ (15 равенств);
2) $x_{ii}=0$ (6 равенств);
3) $\sum_{i=1}^{6} x_{ij}=2$ (6 равенств);
4) $x_{ij}\geqslant 0$ (15 неравенств);
5) $x_{ij}\leqslant 1$ (15 неравенств);
6) $x_{ij}+x_{ik}+x_{ki}+x_{ip}+x_{jq}+x_{kl}\leqslant 4$ (120 неравенств);
7) $x_{ij}+x_{jk}+x_{kl}\leqslant 2$ (10 независимых неравенств).

Система из 9 серий ограничений, первые 7 из которых аналогичны приведенным для $M_6^s$, а остальные две имеют следующий вид:

8) $x_{ij}+x_{jk}+x_{kl}+x_{ip}+x_{iq}+x_{pq}+x_{pr}+x_{qr}\leqslant 5$ (1260 ограничений);
9) $2x_{ij}+2x_{jk}+2x_{ki}+2x_{ip}+x_{pq}+x_{qi}+x_{pk}+x_{pj}+2x_{kr}+2x_{jr}\leqslant 9$ (2520 ограничений)

дает полное описание многогранника $M_7^s$.

15 [32]. Неравенство $\sum_{i,j} x_{ij}\leqslant 9$ определяет 34-грань 35-многогранника $M_{10}^s$ при условии, что суммирование ведется по всем ребрам $(i, j)$ графа Петерсена, построенного на 10 вершинах.

16 [21]. Орграф называется *турниром*, если для каждой пары его вершин $i$, $j$ существует и единственно орребро $(i, j)$ или $(j, i)$. Турнир называется *ациклическим*, если он не содержит контуров. Выпуклую оболочку в $E_{n^2}$ матриц смежностей всех ациклических турниров назовем *многогранником ациклических турниров*. Такой многогранник задается следующей системой ограничений:

$$x_{ij}\geqslant 0 \ \forall i,\ j\in N_n,$$
$$x_{ii}=0 \ \forall i\in N_n,$$
$$x_{ij}+x_{ji}=1 \ \forall i,\ j\in N_n,\ i\neq j,$$
$$x_{ij}+x_{jk}+x_{ki}\leqslant 2 \ \forall i,\ j,\ k\in N_n,\ i\neq j\neq k.$$

17 [12]. Пусть $A$ — $(n\times n)$-матрица и $\Delta_\pi$ — перестановочная матрица. Выпуклую оболочку точек $\Delta_\pi A\,\Delta_\pi^{-1}$ для всех $\pi\in S_n$ назовем *многогранником квадратичной задачи выбора* и обозначим через $W(A)$.

Пусть $C$ — перестановочная матрица, отвечающая циклу $\langle 12\ldots n\rangle$, $L=\|i-j\|_{n\times n}$, $R=\begin{Vmatrix} 0 & E_k \\ E_l & 0 \end{Vmatrix}$, где $E_i$ — $(i\times i)$-матрица, все элементы которой равны единице. Тогда $W(C)=M_n^{as}$, а многогранники $W(L)$, $W(R)$ есть допустимая область соответственно в задаче о линейном размещении графа и в задаче о разрезании графа. Граф многогранника $W(A)$ при каждой матрице $A$ является регулярным, т. е. все вершины имеют одинаковые степени, причем у многогранника $W(C)=M_n^{as}$ степень каждой вершины превосходит число $2[(n-2)/2]!$, а у многогранника $W(L)$ — число $3\cdot 2^{n-3}-1$ $(n\geqslant 3)$. Граф многогранника $W(R)$ является полным.

18. Множество гамильтоновых орцепей орграфа $G(V, E)$ совпадает с пересечением трех матроидов: $\mathcal{M}_1=(E, \mathcal{F}_1)$ — графический матроид; $\mathcal{M}_2=(E, \mathcal{F}_2)$, $\mathcal{M}_3=(E, \mathcal{F}_3)$ — матроиды разбиений, в которых независимыми являются подмножества орребер, не содержащие двух орребер, соответственно входящих и выходящих из одной вершины. Используя этот факт, в [8] показано, что градиентный алгоритм в задаче о коммивояжере на максимум гарантирует получение решения, составляющего не менее трети длины оптимального.

19. Пусть $F=F(Q_1, \ldots, Q_{n-i})$ — $i$-грань перестановочного многогранника. Тогда $f_0(F)=\prod_{j=1}^{n-i} t_j$, где $t_j=|Q_j|$.

20. $f$-вектор многогранника $M_n^+(a)$ четных перестановок описывается соотношениями

$$f_1=\frac{n!}{8}(n-2)(n+1),$$

$$f_2=f_2(M_n(a))+\frac{n!}{24}(n-2)(n-3)(2n-5),$$

$$f_i=f_i(M_n(a))+\frac{n!}{2}\binom{n-i}{i+1}, \quad i=3, \ldots, n-3,$$

$$f_{n-2}=2(2^{n-1}-1)+\frac{n!}{2}.$$

21. Пусть $S_n(j)$ — множество перестановок $\pi \in S_n$, для которых $\pi_j \neq j$, $j \in N_n$. Выпуклую оболочку точек $a_\pi=(a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_n})$ $\forall \pi \in S_n(j)$ назовем *перестановочным многогранником с j-м запретом* и обозначим через $M_n(j)$. Каждая из $(n-1)(n-1)!$ точек $a_\pi$, $\pi \in S_n(j)$ является вершиной многогранника $M_n(j)$. Аналитическая форма задания многогранника $M_n(j)$ при $2 \leqslant j \leqslant n-1$ имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} x_i=\sum_{i=1}^{n} a_i,$$

$$\sum_{i \in \omega} x_i \geqslant \sum_{i=1}^{|\omega|} a_{n-i+1} \ \forall \omega \subset N_n,$$

$$(a_{j-1}-a_{j+1})\sum_{i \in \omega} x_i+(a_j-a_{j+1})x_j \leqslant (a_{j-1}-a_{j+1})\sum_{i=1}^{j-1} a_i+(a_j-a_{j+1})a_{j-1}$$
$$\forall \omega \subset N_n, \ \omega \not\ni j, \ |\omega|=j-1.$$

При $j=1$ или $j=n$ последнюю серию неравенств следует заменить на следующие:

$$x_1 \leqslant a_2 \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n-1} x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n-2} a_i+a_n.$$

Этот результат принадлежит А. Н. Исаченко.

22. [4]. В двухпараметрической задаче стандартизации $(n\times n)$-матрица $Q$ имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} Q_1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ Q_1 & Q_1 & 0 \ldots 0 \\ Q_1 & 0 & Q_1 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ Q_1 & 0 & 0 \ldots Q_1 \end{matrix}\right\|,$$

где $Q_1$ — треугольная $(q\times q)$-матрица, $n=pq$. Справедливо следующее рекуррентное соотношение

$$f_0(H_{pq}(Q))=2^{(p-1)(q-1)}+(p-1)2^{(p-2)(q-1)}+$$
$$+\sum_{t=1}^{q-1}[(p-1)2^{(p-2)t}+2^{(p-1)t}]f_0(H_{p,q-t}(Q)),$$

из которого с помощью производящих функций можно получить явную формулу:

$$f_0(H_{pq}(Q)) = 2^{(p-3)(q-1)-1}\left[\left(p-\frac{p^2+2}{\sqrt{p^2+8}}\right)(p+4-\sqrt{p^2+8})^{q-1}+\right.$$
$$\left.+\left(p+\frac{p^2+2}{\sqrt{p^2+8}}\right)(p+4+\sqrt{p^2+8})^{q-1}\right],$$

в частности,

$$f_0(H_{2q}(Q)) = \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3-\sqrt{3})^{q-1}+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(3+\sqrt{3})^{q-1}.$$

23 [2]. Пусть $A_{K_m}$ — матрица инциденций графа $K_m$ и пусть $a=(a, \ldots, a)$. Тогда все вершины многогранника $H_m(A_{K_m})$ имеют вид $y_i = a(m-\pi_i)$ $\forall i \in N_m$, $\pi \in S_m$. Используя этот результат, показать, что задача стандартизации $\min\limits_{y \in H_m(A_{K_m})} \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(y_i)$, $f_i(y)$ — вогнутые функции, эквивалентна задаче о назначении с матрицей $\| f_i(a(m-j)) \|_{m\times m}$.

24. Доказать, что комбинаторный тип многогранника $H(Q)$ не зависит от вектора $a=(a_1, \ldots, a_n)$, а зависит только от матрицы $Q$.

25. Максимальное число вершин, равное $(m-r)!\binom{m}{r}$, в классе многогранников $H_m(Q)$ с матрицами $Q$, обладающими свойством $\sum\limits_{i=1}^{m} q_{ij} \geq r+1$, имеют многогранники $H_m(Q_0)$, где $Q_0$ — $r$-полная булева матрица, т. е. матрица, содержащая в качестве подматрицы матрицу инциденций $r$-полного гиперграфа с $m$ вершинами, т. е. такого гиперграфа, у которого каждое подмножество из $r+1$ вершин является ребром, и других ребер нет. Показать, что многогранник $H_m(Q_0)$ имеет $m-1+\sum\limits_{i=1}^{m-r-1}\binom{m}{i}$ граней максимальной размерности.

26. *Перманентом* матрицы $A = \| a_{ij} \|_{n\times n}$ называется сумма

$$\operatorname{per} A = \sum_{\pi \in S_n} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \ldots a_{n\pi_n}.$$

В 1926 г. Б. Л. Ван-дер Варден выдвинул гипотезу:

$$\min_{A \in M_n} \operatorname{per} A = \frac{n!}{n^n},$$

причем минимум достигается в том и только том случае, когда $a_{ij} = 1/n \, \forall i, j \in N_n$.

Положительное решение этой гипотезы содержится в работе Г. П. Егорычева «Решение гипотезы Ван-дер-Вардена для перманентов». — Красноярск, 1980. (Препринт/ИФСОАН СССР), а также в работе Фликмана Д. И. «Доказательство гипотезы Ван-дер-Вардена о перманенте дважды стохастической матрицы». — Мат. заметки, 1981, **29**, № 6.

ГЛАВА VI

# КЛАССИЧЕСКИЕ ТРАНСПОРТНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Среди многогранников задач линейного программирования достаточно полно изучены транспортные многогранники, и в первую очередь многогранники классической транспортной задачи.

Список литературы, посвященный характеризации и оценке числа вершины и граней классического транспортного многогранника, содержит несколько десятков наименований. Среди них следует прежде всего упомянуть обзор В. Кли и Х. Витцчалла [45], со времени появления которого прошло уже более десяти лет. В этом обзоре приводится формула Симмонарда—Хедли [52] для числа базисов транспортной задачи, формулы Демута [42] для минимального числа вершин транспортного многогранника как в вырожденном, так и в невырожденном случаях, а также собственные результаты авторов: пределы изменения числа граней и качественная (асимптотическая) оценка для максимального числа вершин.

Уже в первых работах, в которых предпринимались попытки вывести формулу для максимального числа $\varphi(m, n)$ вершин в классе транспортных многогранников порядка $m \times n$ или оценить это число, авторам пришлось столкнуться с рядом серьезных трудностей. Так, в [45] выведена лишь формула для $\varphi(2, n)$, а в работах [32] и [33] получены оценки сверху для числа $\varphi(m, n)$.

В 1968 г. В. Кли и Х. Витцчалл [45] высказали гипотезу о том, что при взаимно простых числах $m$ и $n$ так называемый *центральный многогранник* $M(a^*, b^*)$ порядка $m \times n$, определенный векторами $a^* = (n, n, \ldots, n) \in E_m$ и $b^* = (m, m, \ldots, m) \in E_n$, имеет максимальное число вершин. В случаях, когда $n = mq \pm 1$, они вывели формулы для подсчета числа вершин центрального многогранника. Вышеупомянутая гипотеза была доказана в 1972 г. Е. Болкером [40], который в свою очередь сформулировал две интересные гипотезы, касающиеся формулы для величины $\varphi(m, n)$ и асимптотического поведения класса транспортных многогранников с максимальным числом вершин. Первая из них была доказана в [11], а вторая опровергнута в [29].

В последнее время получены критерии принадлежности транспортного многогранника к классу многогранников с минимальным [13] и максимальным [8], [9] числом вершин, проведена классификация многогранников по числу граней [19], [26], найдены критерии принадлежности невырожденного классического транспортного многогранника с фиксированным числом граней к классу многогранников с минимальным и максимальным числом вершин [15], [16], выяснено асимптотическое поведение некоторых классов классических транспортных многогранников при возрастании порядка многогранников [15], [29], [17], получен ряд результатов, связанных с оценкой диаметра классического транспортного многогранника [15].

Описанию этих результатов в основном и посвящена гл. VI. Центральными результатами данной главы являются критерий максимальности числа вершин транспортного многогранника и аппарат для подсчета этого числа. Для их обоснования вводятся вспомогательные понятия эквивалентности, регулярности, спектра.

## § 1. Основные определения и свойства

Задачи транспортного типа являются наиболее распространенными среди задач линейного программирования. Они возникают в различных областях экономики, техники, производства. Широкую известность получили транспортные задачи, связанные с планированием перевозок грузов.

Классическая транспортная задача состоит в следующем. Имеется $m$ поставщиков, располагающих некоторым однородным продуктом, который нужно доставить $n$ потребителям. Пусть каждый $i$-й поставщик отправляет потребителям $a_i$ единиц продукта ($a_i > 0$), а каждый $j$-й потребитель должен получить в точности $b_j$ единиц продукта ($b_j > 0$). Допустим, что с транспортировкой единицы продукта от $i$-го поставщика к $j$-му потребителю связаны затраты $c_{ij}$. Задача заключается в определении количества продукта $x_{ij}$, подлежащего транспортировке от каждого $i$-го поставщика к каждому $j$-му потребителю. При этом требуется, чтобы суммарные транспортные затраты, линейно зависящие от объемов перевозок, достигали минимума. Таким образом, классическая транспортная задача порядка $m \times n$ сводится к минимизации линейной функции $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ при условиях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in N_n, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in N_m, \tag{1.1}$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n. \tag{1.2}$$

Пусть $a=(a_1, \ldots, a_m)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$. Через $M(a, b)$ обозначим множество матриц $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}$, элементы которых удовлетворяют условиям (1.1), (1.2). Легко видеть, что это множество непусто тогда и только тогда, когда выполняется условие баланса $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Очевидно, что множество $M(a, b)$ ограничено. Его будем называть классическим *транспортным многогранником порядка* $m\times n$, определенным векторами $a=(a_1, \ldots, a_m)$, $b=(b_1, \ldots, b_n)$ или просто *транспортным многогранником.*

Предложение 1.1. *Размерность транспортного многогранника порядка* $m\times n$ *равна* $(m-1)(n-1)$.

Доказательство. Ясно, что неравенства (1.2) не являются жесткими ограничениями.

Нетрудно показать, что ранг матрицы $R$ ограничений (1.1) равен $m+n-1$.

Поэтому предложение 1.1 непосредственно следует из предложения 4.1 гл. I.

Пусть $R^{ij}$ — вектор-столбец матрицы $R$ ограничений (1.1), у которого единицы стоят в $i$-й и $(m+j)$-й строках. Тогда система (1.1) принимает вид: $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} R^{ij}x_{ij}=(a, \quad b)^T$. Следовательно, точка $\|x_{ij}\|_{m\times n}\in M(a, b)$ является вершиной многогранника $M(a, b)$ тогда и только тогда, когда векторы $R^{ij}$, для которых $x_{ij}>0$, линейно независимы (см. § 4. гл. I). Значит, число положительных компонент любой вершины транспортного многогранника порядка $m\times n$ не превышает числа $m+n-1$.

Определение 1.1. Вершина транспортного многогранника порядка $m\times n$ называется *невырожденной вершиной,* если число ее положительных компонент равно числу $m+n-1$, и *вырожденной* в противном случае. Транспортный многогранник называется *невырожденным многогранником*, если все его вершины являются невырожденными, и *вырожденным*, если хотя бы одна из его вершин является вырожденной.

Очевидно, что всякий невырожденный транспортный многогранник является простым. Следующий пример показывает, что обратное утверждение неверно. Пусть $a^0=(m(n-1), \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m-1})$, $b^0=(\underbrace{m, m, \ldots, m}_{n-1}, m-1)$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что каждой вершине транспортного многогранника $M(a^0, b^0)$ порядка $m\times n$ инцидентно ровно $(m-1)(n-1)$ граней максимальной размерности, т. е. многогранник $M(a^0, b^0)$ является простым. В то же время этот многогранник имеет вырожденную вершину $x$, компоненты которой определяются следующим образом: $x_{1j}=m \quad \forall j=N_{n-1}$, $x_{in}=1$, $i=2, 3, \ldots, m$, $x_{ij}=0$ в остальных случаях.

Сформулируем широко известный критерий принадлежности транспортного многогранника к классу невырожденных многогранников. Прежде всего для многогранника $M(a, b)$ введем следующие обозначения:

$$\mu_{I,J}(a, b) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} b_j,$$
$$I \subseteq N_m, \quad J \subseteq N_n;$$
$$\mathfrak{A}(a, b) = \{(I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}\colon \mu_{I,J}(a, b) = 0\},$$

где

$$\mathfrak{A}_{m\times n} = \{(I, J)\colon 1 \in I \subset N_m, \ \varnothing \neq J \subset N_n\}.$$

Теорема 1.2. *Транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$ является невырожденным тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}(a, b) = \varnothing$.*

Для доказательства нужны следующие определения и лемма.

Пусть $R^{i_1 j_1}, R^{i_2, j_2}, \ldots, R^{i_{m+n-1}, j_{m+n-1}}$ — система линейно независимых столбцов матрицы $R$, содержащая те столбцы, которым соответствуют положительные компоненты вершины $x$ многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$. Множество $T(a, b, x) = \{(i_k, j_k)\colon k \in N_{m+n-1}\}$ будем называть *базисным множеством вершины* $x \in M(a, b)$.

Очевидно, что в случае невырожденной вершины $T(a, b, x)$ — множество тех пар $(i, j)$, для которых $x_{ij} > 0$. Заметим, что базисное множество вырожденной вершины определяется неоднозначно.

Лемма 1.3. *Пусть $T(a, b, x)$ — некоторое базисное множество вершины $x$ транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$. Тогда для каждой пары индексов $(k, r) \in T(a, b, x)$ существует такая пара подмножеств $(I, J)$, $\varnothing \neq I \subseteq N_m$, $J \subset N_n$, что $x_{kr} = \mu_{I,J}(a, b)$.*

Доказательство. Для пары $(k, r) \in T(a, b, x)$ введем следующие обозначения:

$$I^1 = \{k\}, \ J^1 = \varnothing,$$
$$J^s = J^{s-1} \cup \{j\colon j \neq r, \ (i, j) \in T(a, b, x), \ i \in I^{s-1}\},$$
$$I^s = I^{s-1} \cup \{i\colon (i, j) \in T(a, b, x), \ j \in J^s\}, \quad s \geqslant 2.$$

Пусть $t$ — такой индекс, что $I^t = I^{t+1}$ и $J^t = J^{t+1}$. Ясно, что пара $(I^t, J^t)$ является искомой.

Доказательство теоремы 1.2. Необходимость. Предположим, что существует невырожденный транспортный многогранник $M(a, b)$, для которого $\mathfrak{A}(a, b) \neq \varnothing$. Пусть $(L, P) \in \mathfrak{A}(a, b)$. Без ограничения общности можно полагать, что $L = N_k$, $P = N_r$.

Введем следующие обозначения:

$$a^1=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k),\qquad b^1=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_r),$$
$$a^2=(a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots,\ a_m),\quad b^2=(b_{r+1},\ b_{r+2},\ \ldots,\ b_n).$$

Из условия (1.4) и того факта, что $(L,\ P)\in\mathfrak{A}(a,\ b)$, вытекает непустота многогранников $M(a^1,\ b^1)$ и $M(a^2,\ b^2)$.

Пусть $T(a^1,\ b^1,\ x^1)$ — базисное множество вершины $x^1=\|x^1_{ij}\|\in\in M(a^1,\ b^1)$, а $T(a^2,\ b^2,\ x^2)$ — базисное множество вершины $x^2==\|x^2_{ij}\|\in M(a^2,\ b^2)$. Легко видеть, что матрица $x$ с компонентами

$$x_{ij}=\begin{cases} x^1_{ij}, & \text{если } (i,\ j)\in L\times P,\\ x^2_{ij}, & \text{если } (i,\ j)\in \bar{L}\times \bar{P},\\ 0 & \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

является вершиной многогранника $M(a,\ b)$. Здесь $\bar{L}=N_m\setminus L$, $\bar{P}=N_n\setminus P$. В то же время в силу очевидных равенств $|T(a^1,\ b^1,\ x^1)|=k+r-1$, $|T(a^2,\ b^2,\ x^2)|=m-k+n-r-1$, число ее положительных компонент меньше числа $m+n-1$. Следовательно, получено противоречие с предположением о невырожденности многогранника $M(a,\ b)$.

Достаточность. Для любой вершины $x$ многогранника $M(a,\ b)$, удовлетворяющего условию $\mathfrak{A}(a,\ b)=\varnothing$, на основании леммы 1.3 имеют место неравенства $x_{ij}>0\ \ \forall(i,\ j)\in T(a,\ b,\ x)$. Отсюда, учитывая, что для всякой вершины $x\in M(a,\ b)$ справедливо равенство $|T(a,\ b,\ x)|=m+n-1$, получаем невырожденность многогранника $M(a,\ b)$. Теорема 1.2 доказана.

Имеет место следующее важное свойство транспортного многогранника.

Предложение 1.4. *Многогранник $M(a,\ b)$ является целочисленным тогда и только тогда, когда векторы $a$ и $b$ целочисленны.*

Доказательство. Достаточность следует из леммы 1.3. Необходимость легко доказать методом от противного.

## § 2. Базисы и остовные деревья

**1. Число базисов.** В 1959 г. Симмонард и Хедли [52] доказали следующую теорему.

Теорема 2.1. *Число базисов $\beta(m,\ n)$ транспортного многогранника порядка $m\times n$ выражается формулой*

$$\beta(m,\ n)=n^{m-1}m^{n-1}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Рассмотрим $((m+n-1)\times mn)$ — матрицу $\bar{R}$, которая получается из матрицы $R$ (см. § 1), вычеркиванием строки с номером $m+n$. Как было установлено ранее, ранг матрицы $R$ равен $m+n-1$. Поэтому в силу абсолютной унимодулярности матрицы $R$ (см. § 4 гл. IV), на основании предложения 4.5 гл. I, получаем равенство $\beta(m,\ n)=\det(\bar{R}\bar{R}^T)$.

Производя элементарные преобразования определителей, имеем следующую цепочку равенств:

$$\beta(m,n)=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} n & & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & n & & & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & & \ddots & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & 1 & \dots & 1 & m & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & m & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & & & & m \end{array}\right\| \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}=\left\|\begin{array}{cccc|ccccc} n & -n & \dots & -n & & & & & 1 \\ & n & & & & & & & 1 \\ & & \ddots & & & & & & \vdots \\ & & & n & & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & m & & & & \\ 1 & & & & & m & & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & & \\ 1 & & & & -m & & -m & \dots\ -m & m \end{array}\right\|=$$

$$(\text{под столбцами первого определителя: } \underbrace{\qquad}_{m}\ \underbrace{\qquad}_{n-1})$$

$$=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} n & & & & & & & m \\ & n & & & & & & 1 \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & n & & & & 1 \\ \hline 1 & & & & m & & & \\ 1 & & & & & m & & \\ \vdots & & & & & & \ddots & \\ 1 & & & & & & & \\ n-1 & & & & & & & m \end{array}\right\|=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} n & & & & & & & m \\ & n & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & n & & & & \\ \hline & & & & m & & & \\ & & & & & m & & \\ & & & & & & \ddots & \\ n-1 & & & & & & & m \end{array}\right\|=$$

$$=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & n & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & n & & & & \\ \hline & & & & m & & & \\ & & & & & m & & \\ & & & & & & \ddots & \\ n-1 & & & & & & & m \end{array}\right\|=m^{n-1}n^{m-1}.$$

Здесь все неуказанные элементы равны нулю. Теорема 2.1 доказана.

**2. Остовные деревья.** Следующая теорема устанавливает связь между базисами транспортного многогранника и остовными деревьями соответствующего полного двудольного графа.

Теорема 2.2. *Между множеством остовных деревьев полного помеченного двудольного графа $K_{m,n}$ и множеством базисов транспортного многогранника порядка $m\times n$ существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству предложения 1.2, гл. V, но с тем лишь отличием, что вместо полного двудольного графа $K_{n,n}$ необходимо рассмотреть граф $K_{m,n}$.

Из теорем 2.1 и 2.2 вытекает следующее следствие.

Следствие 2.3. *Число остовных деревьев полного помеченного двудольного графа $K_{m,n}$ выражается формулой*

$$\Delta(m,\ n)=m^{n-1}n^{m-1}. \qquad (2.2)$$

В литературе имеются многочисленные варианты доказательств формул (2.1) и (2.2) (см., например, [4], [38], [48], [49], [51], [53]). В качестве аппарата при выводе этих формул, а также их обобщений, используются числа Стирлинга и Прюфера, производящие функции, формулы Кирхгофа и Бине — Коши.

Помеченный двудольный граф, у которого одна доля $U$ состоит из вершин $1, 2, \ldots, m$, а другая $V$ — из вершин $1, 2, \ldots, n$, будем обозначать через $G(U, V)$.

Теорема 2.4 ([45]). *Число остовных деревьев $G(U, V)$ полного помеченного двудольного графа $K_{m,\, mq+1}$, $m \geqslant 2$, $q \geqslant 1$, для которых выполняются условия $\deg i = q+1$ $\forall i \in U$, равно числу* $\frac{(mq+1)!}{(q!)^m}(mq+1)^{m-2}$.

Доказательству этой теоремы, которая нам понадобится в § 8, предпошлем следующую лемму.

Лемма 2.5. *Пусть вершины графа помечены числами $1, 2, \ldots, m$, $m \geqslant 2$. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_m$ — целые неотрицательные числа, причем $\sum_{i=1}^{m} l_i = m-2$. Тогда число остовных деревьев полного помеченного графа $K_m$, для которых $\deg i = l_i + 1$ $\forall i \in N_m$, выражается формулой*

$$\nu(l_1, l_2, \ldots, l_m) = \frac{(m-2)!}{l_1!\, l_2! \ldots l_m!}.$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу $m$. При $m=2$ лемма тривиальна.

Пусть $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_m$. Определим число $k$ из условий $l_k > 0$, $l_{k+1} = 0$. Зафиксируем некоторое число $r \in N_k$. Поскольку вершина с номером $m$ концевая, то, по предположению индукции, число остовных деревьев, содержащих ребро $(m, r)$, равно числу $\frac{(m-3)!}{l_1!\, l_2! \ldots l_{r-1}!\,(l_r-1)!\, l_{r+1}! \ldots l_k!}$. Теперь, суммируя по всем $r \in N_k$, получаем утверждение леммы 2.5.

Доказательство теоремы 2.4. Зафиксируем некоторое $v \in V$. Так как $G(U, V)$ — дерево, то для каждой вершины $i \in U$ существует единственный путь, соединяющий вершины $i$ и $v$. Пусть $(i, j(i))$ есть ребро, в этом пути инцидентное вершине $i$. Лес, полученный из дерева $G(U, V)$ одновременным удалением ребер $(1, j(1))$, $(2, j(2))$, $\ldots$, $(m, j(m))$, будем обозначать через $R^v(G)$. Положим

$$Q^v = \{R^v(G)\colon\ G(U, V) \in D_{m,\, mq+1}\},$$

где $D_{m,\, mq+1}$ — множество остовных деревьев графа $K_{m,\, mq+1}$, удовлетворяющих условию нашей теоремы. Поскольку всякая связная компонента $R_i^v(G)$ леса $R^v(G)$ имеет одну вершину $i \in U$ и $q$ вершин множества $V \setminus \{v\}$, инцидентных вершине $i$, то справедливо равенство

$$|Q^v| = \frac{(mq)!}{(q!)^m}. \tag{2.3}$$

Далее, для любого дерева $G(U, V) \in D_{m, mq+1}$, содержащего граф $R^v(G)$, построим дерево $\bar{G}$ с вершинами $U \cup \{v\}$ по следующему правилу: $(i, v) \in \bar{G}$, если $(i, v) \in G(U, V)$; $(i, j) \in \bar{G}$, если либо $(i, k) \in G(U, V)$, $(j, k) \in R_j^v(G)$, либо $(j, k) \in G(U, V)$, $(i, k) \in R_i^v(G)$. Из нашего построения следует, что существуют целые неотрицательные числа $l_v$, $l_i$ $\forall i \in N_m$, для которых

$$l_v + 1 = \deg_{\bar{G}} v = \deg_{G(U, V)} v,$$

$$l_i + 1 = \deg_{\bar{G}} i = \sum_{j \in E_i} \deg j - q + 1 \quad \forall i \in N_m,$$

где $\deg_G i$ — степень вершины $i$ в графе $G$, а $E_i = \{j \in V: (i, j) \in \in R_i^v(G)\}$.

С другой стороны, нетрудно проверить, что дерево $\bar{G}$ обладает следующими свойствами:

1) если ребро $(i, j) \in \bar{G}$, $j \neq v$, инцидентно вершине $i$ в пути, соединяющем вершину $i$ с вершиной $v$, то $(i, k) \in G(U, V)$ для любого $k \in R_j^v(G)$;

2) если $(i, j) \in \bar{G}$, $j = v$, то $(i, j) \in G(U, V)$.

Так как число вершин $k \in R_j^v(G)$, $k \in V$, равно $q$, то в силу свойств 1) и 2) количество таких деревьев равно $q^{\sum_{i=1}^{m} l_i}$. Отсюда на основании леммы 2.5 и равенства (2.3) имеем

$$|D_{m, mq+1}| = \frac{(mq)!}{(q!)^m} \sum_{l_1 + \ldots + l_m + l_v = m-1} \frac{(m-1)!}{l_1! \ldots l_m! \, l_v!} q^{\sum_{i=1}^{m} l_i} =$$

$$= \frac{(mq+1)!}{(q!)^m} (mq+1)^{m-2}.$$

## § 3. Грани

В данном параграфе проводится классификация транспортных многогранников по числу граней. Под гранью транспортного многогранника порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, на протяжении гл. VI будем понимать грань максимальной размерности, т. е. $(d-1)$-грань, где $d = (m-1)(n-1)$. Поскольку транспортный многогранник порядка $2 \times 2$ имеет лишь две вершины, то этот случай в дальнейшем будем исключать.

Ясно, что гранями транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$ могут быть лишь множества точек, принадлежащих координатным гиперплоскостям, т. е. непустые множества вида

$$F_{sq}(a, b) = \{x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b): x_{sq} = 0\},$$
$$(s, q) \in N_m \times N_n.$$

Спрашивается, каким дополнительным условиям должны удовлетворять компоненты векторов $a$ и $b$, чтобы множество $F_{sq}(a, b)$ было гранью транспортного многогранника? Такую характеристику дает следующая теорема, полученная В. Кли и Х. Витцгалом [45].

Теорема 3.1. *Множество $F_{sq}(a, b)$ является гранью транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $mn>4$, тогда и только тогда, когда $a_s+b_q<\sum_{i=1}^{m} a_i$.*

Доказательство. Достаточность. Так как существует матрица $x'\in M(a, b)$ с компонентами $x'_{ij}>0$ для всех $(i, j)\neq(s, q)$, то жесткими ограничениями, задающими множество $F_{sq}(a, b)$, являются лишь условия (1.1), (1.2) и $x_{sq}=0$. Легко видеть, что определитель матрицы, составленной из коэффициентов при неизвестных $x_{1p}$, $x_{2p}$, $\ldots$, $x_{mp}$, $x_{lq}$, $x_{sq}$, $x_{1j}$ для всех $j\neq p, q$, где $p\neq q$, $l\neq s$, равен единице. Отсюда, принимая во внимание тот очевидный факт, что любое уравнение системы (1 1) является следствием остальных ее $m+n-1$ уравнений, мы получаем, что ранг системы жестких ограничений, определяющих множество $F_{sq}(a, b)$, равен $m+n$. Поэтому на основании предложения 4.1 гл. I, множество $F_{sq}(a, b)$ — грань многогранника $M(a, b)$.

Необходимость. Пусть $x\in F_{sq}(a, b)$. Тогда справедливы соотношения

$$b_q=\sum_{i=1}^{m} x_{iq}=\sum_{i\neq s} x_{iq}\leqslant\sum_{i\neq s} a_i.$$

Значит, $b_q+a_s\leqslant\sum_{i=1}^{m} a_i$. Это неравенство не может обращаться в равенство, поскольку тогда множество $F_{sq}(a, b)$ содержит единственный элемент. Но при $mn>4$ это противоречит тому, что множество $F_{sq}(a, b)$ есть грань многогранника $M(a, b)$. Теорема 3.1 доказана.

Следующая теорема дает критерий принадлежности транспортного многогранника к классу многогранников с фиксированным числом граней [19].

Теорема 3.2. *Пусть $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 3$, $0\leqslant k\leqslant n$. Транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$ имеет $(m-1)n+k$ граней тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) *при $k=n-1$*

$$b_2<\sum_{i=2}^{m} a_i\leqslant b_1,\quad a_2<\sum_{j=2}^{n} b_j\leqslant a_1; \tag{3.1}$$

2) *при $0\leqslant k<n-m$*

$$b_{n-k+1}<\sum_{i=2}^{m} a_i\leqslant b_{n-k}; \tag{3.2}$$

3) *при* $n-m\leqslant k\leqslant n$, $k\neq n-1$ *либо* (3.2), *либо*

$$a_{n-k+1}<\sum_{j=2}^{n} b_j\leqslant a_{n-k}, \tag{3.3}$$

*где* $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_m$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$, $a_0=b_0=+\infty$, $a_{m+1}=b_{n+1}=0$.

Доказательство. Достаточность. Пусть $k=n-1$. Тогда из условий (3.1), положив $c=\sum_{i=1}^{m} a_i$, выводим:

$$a_i+b_j\begin{cases}\geqslant c, & \text{если}\quad (i,\ j)=(1,\ 1),\\ <c, & \text{если}\quad (i,\ j)\neq(1,\ 1).\end{cases}$$

Поэтому согласно теореме 3.1 всякое множество $F_{ij}(a,\ b)$, $(i,\ j)\neq(1,\ 1)$, и только оно есть грань многогранника $M(a,\ b)$. Следовательно, $f_{d-1}(M(a,\ b))=mn-1$.

Пусть далее, $k\neq n-1$. Возможны следующие два случая.

а) Для многогранника $M(a,\ b)$ выполняются условия (3.2). Тогда

$$\begin{aligned} &a_1+b_j\geqslant c, && j=1,\ 2,\ \ldots,\ n-k,\\ &a_1+b_j<c, && j=n-k+1,\ n-k+2,\ \ldots,\ n,\\ &a_i+b_j<c, && i=2,\ 3,\ \ldots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \end{aligned}$$

Согласно теореме 3.1 это означает, что всякое множество $F_{ij}(a,\ b)$, $(i,\ j)\notin\{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \ldots,\ (1,\ n-k)\}$, и только оно, есть грань многогранника $M(a,\ b)$. Таким образом, $f_{d-1}(M(a,\ b))=(m-1)n+k$.

б) Для многогранника $M(a,\ b)$ выполняются условия (3.3). Здесь, проведя рассуждения аналогично случаю а), приходим к тому же утверждению.

Доказательство достаточности закончено.

Прежде чем приступить к доказательству необходимости теоремы, введем понятие критической пары многогранника и установим ее свойства.

Пару $(s,\ q)\in N_m\times N_n$ назовем *критической парой многогранника* $M(a,\ b)$ *порядка* $m\times n$, если выполняется неравенство $a_s+b_q\geqslant\sum_{i=1}^{m} a_i$. Очевидно, что пара $(s,\ q)$ является критической парой невырожденного многогранника $M(a,\ b)$ тогда и только тогда, когда для всякой матрицы $x\in M(a,\ b)$ компонента $x_{sq}>0$.

Лемма 3.3. *Если* $(s,\ q)$, $(r,\ t)$ — *критические пары некоторого транспортного многогранника порядка* $m\times n$, $mn>4$, *то или* $s=r$, *или* $q=t$.

Доказательство. Пусть $q\neq t$. Тогда из неравенства $a_s+b_q\geqslant\sum_{j=1}^{n} b_j$ следует, что $a_s\geqslant b_t$. Если предположить, что и

$s \neq r$, то аналогичным образом получаем неравенство $b_t \geqslant a_s$. Очевидно (ввиду $mn > 4$), что одно из неравенств $a_s \geqslant b_t$, $b_t \geqslant a_s$ строгое. Полученное противоречие и доказывает лемму 3.3.

Доказательство необходимости теоремы 3.2. Пусть $f_{d-1}(M(a, b)) = (m-1)n + k$. Тогда по теореме 3.1 число критических пар многогранника $M(a, b)$ равно $n-k$. Согласно лемме 3.3 этими парами в случае $m < n-k$ являются пары $(1, j)$ $\forall j \in N_{n-k}$, а в случае $m \geqslant n-k$ — либо пары $(1, j)$ $\forall j \in N_{n-k}$, либо пары $(i, 1)$ $\forall i \in N_{n-k}$ (см. рис. 38 и 39). Нетрудно видеть, что все условия теоремы выполняются. Теорема 3.2 доказана.

В силу леммы 3.3 самым большим возможным числом критических пар транспортного многогранника порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, может быть число $n$. Следовательно, по теореме 3.1 минимальное число граней в классе транспортных многогранников

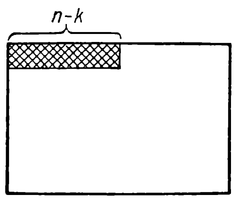



Рис. 38.

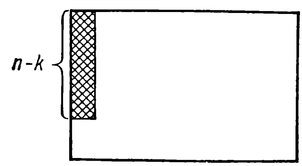



Рис. 39.

порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, равно числу $(m-1)n$. Поэтому, поскольку для числа граней всякого транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$ справедливо неравенство $f_{d-1}(M(a, b)) \leqslant mn$, то из теоремы 3.2 получается следующий факт.

Следствие 3.4. *При* $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, *всякое целое число вида* $(m-1)n + k$, *где* $0 \leqslant k \leqslant n$, *и только оно, может быть числом граней некоторого транспортного многогранника порядка* $m \times n$.

Имеет место следующая теорема, аналогичная теореме 3.2.

Теорема 3.2′. *Пусть* $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, $0 \leqslant k \leqslant n$. *Невырожденный транспортный многогранник* $M(a, b)$ *порядка* $m \times n$ *имеет* $(m-1)n + k$ *граней тогда и только тогда, когда выполняются условия теоремы* 3.2, *и кроме того неравенства* (3.1) — (3.3) — *строгие.*

## § 4. Диаметр

Важной характеристикой многогранника является его диаметр, поскольку эта величина представляет собой оценку снизу для максимально возможного числа итераций в методах решения задач линейного программирования, основанных на движении по ребрам многогранника. Проведенная в предыдущем параграфе классификация невырожденных транспортных многогранников по числу граней позволяет теперь в каждом таком классе оценить минимальный и максимальный диаметр.

**1. Вспомогательные сведения.** Сначала рассмотрим процесс перехода от вершины $= x\|x_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M(a, b)$ к смежной вершине. Пусть $(i_1, j_1)$ — произвольная пара индексов из множества $(N_m\times N_n)\setminus T(a, b, x)$. Положим $H=T(a, b, x)\cup\{(i_1, j_1)\}$. Сначала среди столбцов матрицы $x$ вычеркиваем те столбцы, в которых содержится один элемент множества $H$. Затем в оставшейся матрице вычеркиваем строки, содержащие один элемент множества $H$. После этого снова возвращаемся к столбцам, затем к строкам и т д. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока не будет получена подматрица $\bar{x}$ матрицы $x$, в каждой линии (строке или столбце) которой имеется два элемента из множества $H$. Легко видеть, что пара $(i_1, j_1)$ вместе с некоторыми парами, которым соответствуют базисные элементы подматрицы $\bar{x}$, образует цикл $L=\{(i_1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s), (i_1, j_s)\}$. Единственность цикла очевидна в силу теоремы 2.2.

Получим новую вершину $x'$, компоненты которой определяются по формулам

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\varepsilon, & \text{если } (i, j)\in\{(i_2, j_1), (i_3, j_2), \ldots, (i_s, j_{s-1}), (i_1, j_s)\},\\ x_{ij}+\varepsilon, & \text{если } (i, j)\in\{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_s, j_s)\},\\ x_{ij} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где $\varepsilon=\min\left(x_{i_2 j_1}, x_{i_3, j_2}, \ldots, x_{i_s, j_{s-1}}, x_{i_1, j_s}\right)$. Операцию перехода от вершины $x$ к вершине $x'$, обычно называют *переброской по циклу* $L$. Смежность вершин $x$ и $x'$ следует из определения 1.1 гл. II.

С каждой вершиной $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}\in M(a, b)$ свяжем двудольный граф $G_x(U, V)\subset K_{m,n}$, содержащий ребро $(i, j)$, если $x_{ij}>0$. Аналогично определим двудольный граф $G_{T(a, b, x)}(U, V)$, ребрами которого являются пары $(i, j)\in T(a, b, x)$.

Для дальнейшего будут необходимы следующие очевидные леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $x$ и $y$ — различные вершины транспортного многогранника $M(a, b)$. Следующие утверждения эквивалентны*:

(1) *вершины $x$ и $y$ смежные*;

(2) *граф $G_x(U, V)\cup G_y(U, V)$ содержит единственный цикл*;

(3) *существуют базисные множества $T(a, b, x)$ и $T(a, b, y)$ вершин $x$ и $y$ такие, что граф $G_{T(a, b, x)}(U, V)\cup G_{T(a, b, y)}(U, V)$ содержит единственный цикл.*

Лемма 4.2. *Если существуют вершины $x$ и $y$ невырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, у которых $t$ общих базисных переменных, то* $\operatorname{diam} M(a, b)\geqslant m+n-t-1$

**2. Минимальный диаметр.** Пусть $\mathfrak{M}(m, n, k)$ — множество всех невырожденных транспортных многогранников порядка $m\times n$,

$2 \leqslant m \leqslant n$, с $(m-1)n+k$ гранями. Положим

$$d(m, n, k) = \min_{M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k)} \operatorname{diam} M(a, b).$$

Теорема 4.3. *Минимальный диаметр в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, с $(m-1)n+k$ гранями определяется по формулам*

$$d(m, n, k) = \begin{cases} m+k-1 & \text{при } k=0, 1, \\ m+1 & \text{при } k=2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Доказательство. Всякая вершина многогранника $M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, 0)$ при $m \leqslant n$ устроена так, как это изображено на рис. 40 и 41, причем случай, изображенный на рис. 41, может представиться лишь при $m=n$. Штриховкой отмечены клетки, в которых расположены положительные компоненты вершины, причем двойной штриховкой — клетки, соответствующие критическим парам многогранника (см. § 3). Заметим, что на каждой линии, не содержащей критических пар, лежит только одна положительная компонента и она может находиться в любом месте. На рисунках 42—46 изображены возможные случаи строения вершин многогранника из класса $\mathfrak{M}(m, n, 1)$. На рис. 45 и 44 изображены ситуации, которые могут представиться только при $m=n$, а на рис. 46 — при $n=m+1$. На рис. 42 (44) в каждой строке (столбце) с номером $k \geqslant 2$ имеется единственная положительная компонента, за исключением одной строки (столбца), где имеются две такие компоненты.

Таким образом, для всякого многогранника $M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$ при $k=0, 1$ в силу описанного строения его вершин справедливы соотношения

$$p(a, b) = \min_{x, y \in \operatorname{vert} M(a, b)} |T(a, b, x) \cap T(a, b, y)| = n-k.$$

Структура вершин, построенных методами северо-западного и северо-восточного углов (см. задачу 17), убеждает нас в том, что для всякого многогранника порядка $m \times n$ имеет место неравенство $p(a, b) \leqslant n$ $(m \leqslant n)$. Нетрудно видеть, что $p(a, b) = n$ лишь для многогранников из класса $\mathfrak{M}(m, n, 0)$, а $p(a, b) = n-1$ лишь для многогранников из класса $\mathfrak{M}(m, n, 1)$. Следовательно,

$$p(a, b) \leqslant n-2 \quad \forall M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k), \qquad k=2, 3, \ldots, n.$$

Поэтому на основании леммы 4.2 имеем

$$d(m, n, k) \geqslant \begin{cases} m+k-1 & \text{при } k=0, 1, \\ m+1 & \text{при } k=2, 3, \ldots, n. \end{cases}$$

Теперь покажем, что в каждом классе $\mathfrak{M}(m, n, k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$, существует многогранник, диаметр которого не превышает числа $m-1$ при $k=0$, числа $m$ при $k=1$ и числа $m+1$ при $2 \leqslant k \leqslant n$.

Случай 1. $k=0$. Пусть для многогранника $M(a,\ b)\in \mathfrak{M}(m,\ n,\ 0)$ выполняется условие (см. рис. 40) $\sum\limits_{i=2}^{m} a_i < b_n$. В другом возможном случае (см. рис. 41), когда для многогранника $M(a,\ b)\in \mathfrak{M}(m,\ n,\ 0)$ имеет место неравенство $\sum\limits_{j=2}^{n} b_j < a_m$,

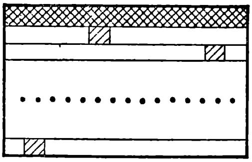


Рис. 40.

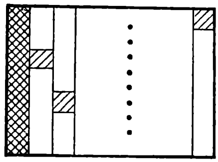


Рис. 41.

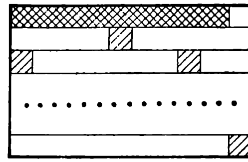


Рис. 42.

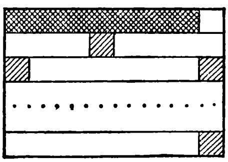


Рис. 43.

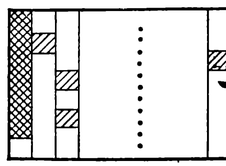


Рис. 44.

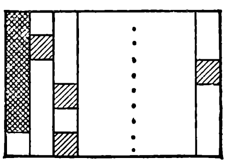


Рис. 45.

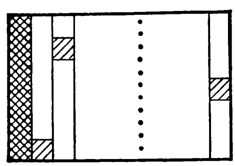


Рис. 46.

доказательство в силу симметрии проводится аналогично. Очевидно, что для любых двух различных вершин $x$ и $y$ многогранника $M(a,\ b)$ справедливо равенство $|T(a,\ b,\ x)\cap T(a,\ b,\ y)| = n+l$, где $0\leqslant l\leqslant m-2$. Поскольку $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}\neq y$, то существует пара индексов $(s,\ p)\in T(a,\ b,\ y)\setminus T(a,\ b,\ x)$, $s>1$. Тогда найдется пара $(s,\ q)\in T(a,\ b,\ x)$, $p\neq q$, а значит, и вершина $x'\in M(a,\ b)$ с компонентами

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\min(x_{1p},\ x_{sq}), & \text{если } (i,\ j)\in\{(1,\ p),\ (s,\ q)\},\\ x_{ij}+\min(x_{1p},\ x_{sq}), & \text{если } (i,\ j)\in\{(1,\ q),\ (s,\ p)\},\\ x_{ij} & \text{для остальных индексов.}\end{cases}$$

Ясно, что расстояние $r(x, x')=1$ и $|T(a, b, x')\cap T(a, b, y)|=$ $=n+l+1$. Значит, за $m-l-1$ подобных преобразований мы переходим от вершины $x$ к вершине $y$, т. е. $r(x, y)\leqslant m-l-1$. Поэтому $\operatorname{diam} M(a, b)\leqslant m-1$.

Случай 2. $1\leqslant k\leqslant n$. Рассмотрим многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$ с условиями

$$b_{n-k-1}-b_n<\sum_{j=1}^{n-1} b_j-a_1<\min(a_m, b_{n-k}-b_n), \tag{4.1}$$

где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_m$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$. Из этих неравенств следует, что $M(a, b)\in\mathfrak{M}(m, n, k)$ (см. теорему 3.2′), а множество всех вершин многогранника $M(a, b)$ представимо в виде

$$\operatorname{vert} M(a, b)=\bigcup_{h=1}^{k+1} V_h(a, b),$$

где $V_h(a, b)$, $1\leqslant h\leqslant k$, — множество тех вершин многогранника $M(a, b)$, у которых

$$x_{1j}>0,\quad j=1, 2, \ldots, n-h, n-h+2, \ldots, n,$$
$$x_{1, n-h+1}=0,\quad x_{i, n-h+1}>0,\quad i=2, 3, \ldots, m,$$

а среди оставшихся компонент существует только одна положительная компонента и она может находиться на любом месте

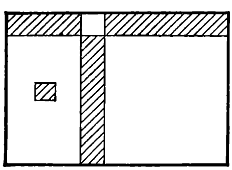


Рис. 47.

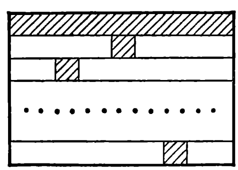


Рис. 48.

$(i, j)$, $i=2, 3, \ldots, m$, $j=1, 2, \ldots, n-h, n-h+2, \ldots, n$ (см, рис. 47); $V_{k+1}(a, b)$ — множество вершин многогранника $M(a, b)$, у которых $x_{1j}>0$ $\forall j\in N_n$, а в каждой строке с номером $i$, $i=2, 3, \ldots, m$ имеется только одна положительная компонента и она может находиться на любом месте в этой строке (см. рис. 48), за исключением случаев, когда все компоненты столбца с номером $t$, $t=n-k+1, n-k+2, \ldots, n$, положительны.

Рассмотрим всевозможные случаи принадлежности вершин $x$ и $y$ к классам $V_h(a, b)$, $h\in N_{k+1}$.

Пусть $x, y\in V_h(a, b)$, $1\leqslant h\leqslant k$, $x\neq y$. Тогда вершины $x$ и $y$ согласно лемме 4.1 являются смежными.

Пусть, далее, $x, y\in V_{k+1}(a, b)$, $x\neq y$. Тогда доказательство неравенства $r(x, y)\leqslant m-1$ проводится точно так же, как и в случае $k=0$, с той лишь разницей, что пара индексов $(s, p) \in T(a, b, y) \setminus T(a, b, x)$ выбирается так, чтобы для некоторой пары $(s, q) \in T(a, b, x)$ выполнялось неравенство $x_{sq} < x_{1p}$. Такая пара $(s, p)$ на основании условий (4.1) всегда существует.

Пусть теперь $x \in V_h(a, b)$, $1 \leqslant h \leqslant k$, а $y \in V_{k+1}(a, b)$. Выберем $x^0 \in V_{k+1}(a, b)$ так, чтобы выполнялось соотношение $r(x, x^0) = 1$. Следовательно, $r(x^0, y) \leqslant m-1$ и, значит, $r(x, y) \leqslant m$.

Тем самым показано, что при $k=1$ справедливо неравенство $\operatorname{diam} M(a, b) \leqslant m$.

И, наконец, пусть $x \in V_h(a, b)$, $y \in V_g(a, b)$, $1 \leqslant h < g \leqslant k$. Через $x^0$ и $y^0$ обозначим те вершины из $V_{k+1}(a, b)$, для которых $r(x, x^0) = 1$, $r(y, y^0) = 1$. Тогда, так как $r(x^0, y^0) \leqslant m-1$, то $r(x, y) \leqslant m+1$.

Таким образом приходим к выводу, что при $2 \leqslant k \leqslant n$ имеет место неравенство $\operatorname{diam} M(a, b) \leqslant m+1$. Теорема 4.3 доказана.

Внимательно присмотревшись к доказательству первой части теоремы 4.3, замечаем, что мы доказали более сильное утверждение: невырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, имеет минимальный диаметр $m-1$ тогда и только тогда, когда у него минимальное число граней.

**3. Оценка максимального диаметра снизу.**

Теорема 4.4. *Пусть $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Максимальный диаметр в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$ с $(m-1)n+k$ гранями не меньше числа $m+k-1$.*

Доказательство. Пусть сначала $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Рассмотрим многогранник $M(A, B) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$ с условиями

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n-k}}^{n} b_j < a_1 < \sum_{j=1}^{n-k} b_j. \tag{4.2}$$

Пусть $x$ и $y$ — вершины этого многогранника, построенные соответственно методами северо-западного и северо-восточного углов (см. задачу 17). Тогда согласно условий (4.2) имеем соотношение $|T(a, b, x) \cap T(a, b, y)| = n-k$. Поэтому на основании леммы 4.2 получаем неравенство $\operatorname{diam} M(a, b) \geqslant m+k-1$.

Пусть теперь $k=n$. Сначала рассмотрим частный случай, когда $(m, n) = 1$. Пусть $a^* = (\underbrace{n, n, \ldots, n}_{m})$, $b^* = (\underbrace{m, m, \ldots, m}_{n})$. Согласно теореме 3.2′ $M(a^*, b^*) \in \mathfrak{M}(m, n, n)$.

Для случая, когда $m=3$ и $n=4$, существует вершина $x$ с положительными компонентами $x_{11} = x_{34} = 3$, $x_{12} = x_{33} = 1$, $x_{22} = x_{23} = 2$ и вершина $y$ с положительными компонентами $y_{13} = y_{32} = 3$, $y_{14} = y_{31} = 1$, $y_{24} = y_{21} = 2$, а поэтому согласно лемме 4.2 теорема верна. В дальнейшем будем предполагать, что $m \geqslant 3$, $n \geqslant 5$.

*Элементарным преобразованием матрицы* будем называть всякое преобразование вида: а) перестановку любых двух столбцов; б) перестановку любых двух строк, Очевидно, что всякое элементарное преобразование переводит вершину многогранника $M(a^*, b^*)$ в некоторую другую вершину того же многогранника.

Пусть $x$ — вершина многогранника $M(a^*, b^*)$, построенная методом северо-западного угла. Заметим, что каждый столбец матрицы $x$ содержит не более двух положительных компонент.

Покажем, как можно с помощью последовательности элементарных преобразований перейти от вершины $x$ к непересекающейся с ней вершине $y$, т. е. такой вершине $y$, что $T(a^*, b^*, x) \cap \cap T(a^*, b^*, y) = \varnothing$. Для этого поменяем в матрице $x$ местами столбцы с номерами $j$ и $(n-j+1)$, $j=1, 2, \ldots, [n/2]$. В результате этих преобразований переходим от вершины $x$ к вершине $x'$, построенной методом северо-восточного угла. Легко видеть, что множества $T(a^*, b^*, x)$ и $T(a^*, b^*, x')$ пересекаются либо по строке, номер которой $p \neq 1, m$, либо по столбцу с номером $(n+1)/2$ ($n$ — нечетное).

В первом случае поменяем местами строки матрицы $x'$ с номерами $p$ и $m$. Если полученная таким образом вершина $x''$ все еще пересекается с $x$, то для нахождения искомой вершины $y$ достаточно последовательно менять местами столбцы матрицы $x$ с номерами $j-1$ и $j$, $j=2, 3, \ldots, n$.

Во втором случае (он может представиться, когда $m \geqslant 4$) путем перестановки столбцов матрицы $x'$ с номерами $(n+1)/2$ и $n$ также получаем вершину, непересекающуюся с вершиной $x$. Поэтому согласно лемме 4.2 $\operatorname{diam} M(a^*, b^*) \geqslant m+n-1$.

В случае, когда $(m, n) \neq 1$, необходимо рассмотреть многогранник $M(a', b')$ порядка $m \times n$, определенный векторами $a' = (n+(m-1)/n, n-1/m, \ldots, n-1/m)$ и $b' = (m, m, \ldots, m)$. Согласно теореме 3.2′ $M(a', b') \in \mathfrak{M}(m, n, n)$. Нетрудно убедиться, что все рассуждения, проведенные ранее в случае $(m, n)=1$, остаются в силе и здесь, так как первая строка матрицы не затрагивается описанными выше элементарными преобразованиями. Поэтому $\operatorname{diam} M(a', b') \geqslant m+n-1$.

**4. Оценка диаметра сверху.** Цель этого пункта состоит в доказательстве следующего предложения.

Теорема 4.5. *Диаметр транспортного многогранника порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, не превосходит числа $mn$.*

Напомним, что оценка сверху максимального диаметра $\Delta(s, \gamma)$ в классе $s$-многогранников с $\gamma$ гранями максимальной размерности была получена в § 2 гл. II и имеет следующий вид:

$$\Delta(s, \gamma) \leqslant 2^{s-3} \gamma.$$

Как легко видеть, для транспортного многогранника эта оценка слишком завышена.

Сначала докажем следующий аналог теоремы 2.2 гл. II.

Лемма 4.6. *Для любого вырожденного транспортного многогранника существует невырожденный транспортный многогранник того же порядка с не меньшим диаметром.*

Доказательство. Пусть $M(a, b)$ — вырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$. Ясно, что всегда найдется такое малое положительное число $\varepsilon$, что многогранник $M(a(\varepsilon), b(\varepsilon))$, определенный векторами $a(\varepsilon) = (a_1 + \varepsilon, a_2 + \varepsilon, \ldots \ldots, a_m + \varepsilon)$ и $b(\varepsilon) = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n + m\varepsilon)$, будет невырожденным (см. задачу 1).

Покажем, что всякой вершине $x^0 = \| x_{ij}^0 \|_{m \times n}$ вырожденного многогранника $M(a, b)$ можно поставить в соответствие вершину $x^0(\varepsilon)$ многогранника $M(a(\varepsilon), b(\varepsilon))$ такую, что $x^0(0) = x^0$. Действительно, пусть

$$c_{ij}(x^0) \begin{cases} = 0, & \text{если } x_{ij}^0 > 0, \\ > 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что единственной вершиной, на которой достигается минимум функции $F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x^0) x_{ij}$, является вершина $x^0$.

Пусть $F(x^0(\varepsilon)) = \min\limits_{x \in M(a(\varepsilon), b(\varepsilon))} F(x)$. Тогда из критерия оптимальности транспортной задачи (см. задачу 13) следует, что $F(x^0(0)) = \min\limits_{x \in M(a, b)} F(x)$. Следовательно, $x^0(0) = x^0$.

Пусть $\operatorname{diam} M(a, b) = r(x^0, y^0)$. Для доказательства леммы 4.6 достаточно установить справедливость неравенства $r(x^0, y^0) \leqslant \leqslant r(x^0(\varepsilon), y^0(\varepsilon))$.

В силу нашего соответствия из $x^0 \neq y^0$ следует, что $x^0(\varepsilon) \neq \neq y^0(\varepsilon)$. Пусть кратчайшая цепь между вершинами $x^0(\varepsilon)$ и $y^0(\varepsilon)$ содержит $s$ ребер. Если $x(\varepsilon)$ и $y(\varepsilon)$ — смежные вершины многогранника $M(a(\varepsilon), b(\varepsilon))$, то либо $x(0) = y(0)$, либо $x(0)$ и $y(0)$ — смежные вершины многогранника $M(a, b)$. Поэтому существует цепь между вершинами $x^0$ и $y^0$ многогранника $M(a, b)$, длина которой не превосходит числа $s$.

Доказательство теоремы 4.5. На основании леммы 4.6 достаточно ограничиться рассмотрением лишь невырожденных многогранников.

Будем доказывать теорему индукцией по числу $k = m + n$. При $k = 4$ в справедливости утверждения можно убедиться непосредственно.

Для вершины $x = \| x_{ij} \|_{m \times n}$ многогранника $M(a, b)$ введем обозначение

$$R(x) = \{(i, j) \in N_m \times N_n \colon x_{ij} = \min(a_i, b_j)\}.$$

Очевидно, что это множество не пусто для любой вершины многогранника $M(a, b)$.

Пусть $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}$ и $y=\|y_{ij}\|_{m\times n}$ — произвольные вершины многогранника $M(a, b)$. Положим $\alpha=\min\left(\min\limits_{(i,\, j)\in R(x)} x_{ij}, \min\limits_{(i,\, j)\in R(y)} y_{ij}\right)$. Для определенности будем считать, что $\alpha=y_{pq}=b_q$. Если $\alpha=$ $=y_{pq}=a_p$, то доказательство проводится аналогично, причем здесь возможен лишь случай 1.

Пусть сначала $x_{pq}=b_q$. Через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ обозначим матрицы, получающиеся соответственно из матриц $x$ и $y$ вычеркиванием $q$-го столбца. Ясно, что матрицы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ являются вершинами невырожденного многогранника $M(\bar{a}, \bar{b})$ порядка $m\times(n-1)$, определенного векторами

$$\bar{a}=(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p-b_q, a_{p+1}, \ldots, a_m),$$
$$\bar{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_{q-1}, b_{q+1}, \ldots, b_n).$$

Легко видеть, что $r(x, y)\leqslant r(\bar{x}, \bar{y})$. Поэтому в силу предположения индукции имеем неравенство $r(x, y)\leqslant m(n-1)$.

Пусть теперь $x_{pq}<b_q$. Через $s_p(x)$ и $t_q(x)$ обозначим количество положительных компонент соответственно в $p$-й строке и $q$-м столбце матрицы $x$, за исключением компоненты $x_{pq}$, которая может быть положительной. Для определенности примем, что $m\leqslant n$.

Случай 1. $s_p(x)+t_q(x)\leqslant m$. Рассмотрим две возможности.

а) $x_{pq}>0$. Построим вершину $x'=\|x'_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M(a, b)$, компоненты которой определяются следующим образом:

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\min(x_{hq}, x_{pl}), & \text{если} \quad (i, j)\in\{(h, q), (p, l)\},\\ x_{ij}+\min(x_{hq}, x_{pl}), & \text{если} \quad (i, j)\in\{(p, q), (h, l)\},\\ x_{ij} \text{ для остальных индексов}, \end{cases}$$

где $x_{hq}=\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ i\neq p}} x_{iq}>0$, $x_{pl}=\max\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq q}} x_{pj}>0$. Очевидно, что вершины $x$ и $x'$ — смежные и $x'_{pq}>x_{pq}$, причем одна из компонент $x'_{hq}$ или $x'_{pl}$ равна нулю. Продолжая описанный процесс и учитывая, что $s_p(x)+t_q(x)\leqslant m$, построим вершину $z=\|z_{ij}\|_{m\times n}\in M(a, b)$, для которой $z_{pq}=b_q$ и $r(x, z)\leqslant m-1$.

б) $x_{pq}=0$. Тогда пара $(p, q)$ образует с некоторыми парами из множества $T(a, b, x)$ единственный цикл. Производя переброску по этому циклу, перейдем к смежной вершине $x'$ (см. процедуру в п. 1), причем $s_p(x')+t_q(x')\leqslant m$. Повторяя рассуждения, приведенные в а), получаем вершину $z=\|z_{ij}\|_{m\times n}\in M(a, b)$, для которой $z_{pq}=b_q$ и $r(x, z)\leqslant m$.

Таким образом, в случае 1 всегда можно построить вершину $z$ многогранника $M(a, b)$, находящуюся от $x$ на расстоянии не более, чем $m$, а от $y$, в силу предположения индукции, на расстоянии не более, чем $m(n-1)$. Следовательно $r(x, y)\leqslant mn$.

Случай 2. $s_p(x)+t_q(x)\geqslant m+1$. Поскольку существует индекс $u\in\{1, 2, \ldots, q-1, q+1, \ldots, n\}$, такой, что $x_{pu}=b_u$ и

$b_u \geqslant b_q$, то $\sum\limits_{\substack{i \neq p \\ x_{iq} > 0}} x_{iq} \leqslant b_u$. Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные в случае 1, получаем неравенство $r(x, y) \leqslant mn$. Теорема 4.5 доказана.

## § 5. Многогранники с минимальным числом вершин

Хотя классификация транспортных многогранников по числу граней была проведена без особых усилий, подобную классификацию по числу вершин сделать до сих пор не удалось. В настоящем параграфе описаны транспортные многогранники с минимальным числом вершин как в невырожденном, так и в вырожденном случаях.

Всюду на протяжении § 5 будем предполагать, что компоненты векторов $a$ и $b$ упорядочены следующим образом:

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m, \quad b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n.$$

Поскольку $f_0(M(a, b)) = f_0(M(b, a))$, то условимся далее считать, что $m \leqslant n$.

**1. Невырожденные многогранники.** Следующая теорема [5] дает критерий принадлежности невырожденного транспортного многогранника порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, к классу многогранников с минимальным числом $n^{m-1}$ вершин, впервые полученным О. Демутом в 1961 г. [42].

Теорема 5.1. *Невырожденный транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, имеет минимальное число $n^{m-1}$ вершин тогда и только тогда, когда он имеет минимальное число граней, т. е. выполняются неравенства:*

1) *при $m < n$*

$$\sum_{i=2}^{m} a_i < b_n; \tag{5.1}$$

2) *при $m = n$ либо* (5.1), *либо*

$$\sum_{j=2}^{n} b_j < a_m. \tag{5.2}$$

Доказательство. Сначала покажем, что для числа вершин всякого многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, удовлетворяющего условию (5.1) или (5.2), справедливо равенство

$$f_0(M(a, b)) = n^{m-1}. \tag{5.3}$$

Будем предполагать, что выполняется условие (5.1), так как случай, когда выполняется условие (5.2), сводится к первому, если перейти от многогранника $M(a, b)$ к многограннику $M(b, a)$.

Для любой вершины $x = \| x_{ij} \|_{m \times n}$ многогранника $M(a, b)$ из условия (5.1) вытекают неравенства $x_{1j} > 0$ $\forall j \in N_n$. Следовательно, так как число положительных компонент вершины $x$ равно $m+n-1$, то в строке с любым номером $i$, $i = 2, 3, \ldots, m$, имеется только одна положительная компонента, и она может находиться в любом столбце (см. рис. 40). Номер этого столбца будем обозначать через $j_i$. Поэтому число вершин многогранника $M(a, b)$ равно числу $(m-1)$-выборок $(j_2, j_3, \ldots, j_m)$ из множества $N_n$, т. е. числу $n^{m-1}$.

Теперь покажем, что для всякого невырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, не удовлетворяющего условиям (5.1) и (5.2), выполняется неравенство

$$f_0(M(a, b)) > n^{m-1}. \tag{5.4}$$

Доказательство этого неравенства проведем индукцией по числу $p = m+n$. При $p = 5$ в справедливости неравенства (5.4) можно убедиться непосредственно. Предположим, что оно верно для $p = m+n-1$. Рассмотрим три возможных случая.

а) $a_m > b_n$, $m < n$. Тогда в силу только что доказанного равенства (5.3) по индукции получаем

$$f_0(M(a, b)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} f_0(M(a^i, b^n)) \geqslant m(n-1)^{m-1} > n^{m-1},$$

где $a^i = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i - b_n, a_{i+1}, \ldots, a_m)$, $b^n = (b_1, b_2, \ldots, b_{n-1})$. Справедливость последнего неравенства проверяется при помощи известного неравенства $(1+1/k)^k < 3$, $k = 1, 2, \ldots$

б) $a_m < b_n$, $m \leqslant n$. Тогда

$$f_0(M(a, b)) \geqslant \sum_{j=1}^{n} f_0(M(a^m, b^j)) \geqslant (n-1)\,n^{m-2} + f_0(M(a^m, b^n)),$$

где $a^m = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$, $b^j = (b_1, b_2, \ldots, b_{j-1}, b_j - a_m, b_{j+1}, \ldots, b_n)$. Так как $a_m < b_n$, то $\sum_{i=2}^{m-1} a_i > b_n - a_m$. Поэтому, по предположению индукции, имеем неравенство $f_0(M(a^m, b^n)) > n^{m-2}$. Следовательно, $f_0(M(a, b)) > n^{m-1}$.

в) $a_m > b_n$, $m = n$. Этот случай сводится к случаю б), если перейти от многогранника $M(a, b)$ к многограннику $M(b, a)$. При этом, как уже отмечалось, $f_0(M(a, b)) = f_0(M(b, a))$.

Теорема 5.1 доказана.

Из теорем 3.2′ и 5.1 вытекает следствие.

Следствие 5.2. *Все многогранники из класса $\mathfrak{M}(m, n, 0)$ — комбинаторно эквивалентные.*

**2. Вырожденные многогранники.** Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.3. *Вырожденный транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, имеет минимальное число вершин $\frac{n!}{(n-m+1)!}$ тогда и только тогда, когда выполняются условия*:

1) *при* $m=2$ $a_m=b_n$; (5.5)

2) *при* $3\leqslant m\leqslant n$ $a_m=b_1=b_2=\ldots=b_n$, $a_1=(n-m+1)b_1$. (5.6)

Доказательство. Очевидно, что $f_0(M(a, b))=n$, если $m=2$. Пусть $3\leqslant m\leqslant n$. Тогда число вершин многогранника $M(a, b)$ равно числу способов, посредством которых $n$ элементов могут быть распределены на $m$ групп, из которых одна содержит $n-m+1$ элементов, а остальные группы содержат по одному элементу. Следовательно $f_0(M(a, b))=n!/(n-m+1)!$.

Для завершения доказательства теоремы 5.3 достаточно заметить, что для всякого вырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, не удовлетворяющего условиям (5.5) и (5.6), выполняется неравенство $f_0(M(a, b))>$ $>n!/(n-m+1)!$. Это неравенство доказывается так же, как и неравенство (5.4), и поэтому доказательство его предоставляется читателю. Теорема 5.3 доказана.

Из теорем 3.2 и 5.3 непосредственно получается следующее следствие.

Следствие 5.4. *Всякий вырожденный транспортный многогранник порядка $m\times n$, $3\leqslant m\leqslant n$, с минимальным числом вершин обладает максимальным числом граней.*

Замечание. Так как при $3\leqslant m\leqslant n$ справедливо неравенство $\frac{n!}{(n-m+1)!}<n^{m-1}$, то всякий транспортный многогранник порядка $m\times n$, $3\leqslant m\leqslant n$, с минимальным числом вершин является вырожденным.

## § 6. Основные понятия

Центральными результатами гл. VI являются критерий максимальности числа вершин транспортного многогранника и аппарат для подсчета этого числа. Для вывода этих результатов нам понадобятся такие понятия, как эквивалентность, регулярность и спектр, изложению которых и будет посвящен данный параграф.

**1. Эквивалентность.** Для вершины $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$ введем множество

$$\mathscr{K}(a, b, x)=\{(i, j)\in N_m\times N_n:\ x_{ij}>0\}.$$

В случае, когда вершина $x$ невырождена, ясно, что $\mathscr{K}(a, b, x)=$ $=T(a, b, x)$. Пусть $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ — многогранники одного и того же порядка.

Определение 6.1. Вершины $x^0\in M(a^0, b^0)$ и $x^1\in M(a^1, b^1)$ назовем *эквивалентными вершинами*, если $\mathscr{K}(a^0, b^0, x^0)=\mathscr{K}(a^1, b^1, x^1)$. Если каждой вершине многогранника $M(a^0, b^0)$ соответствует эквивалентная вершина многогранника $M(a^1, b^1)$ и наоборот, то такие многогранники будем называть *эквивалентными многогранниками* и писать $M(a^0, b^0) \sim M(a^1, b^1)$.

Легко видеть, что для невырожденного многогранника приведенное определение равносильно определению 1.6 гл. III.

Пусть, как и раньше,

$$\mu_{I,J}(a, b) = \sum_{i \in I} a_i - \sum_{j \in J} b_j, \qquad I \subseteq N_m, \quad J \subseteq N_n,$$

$$\mathfrak{A}_{m \times n} = \{(I, J)\colon\ 1 \in I \subset N_m, \quad \varnothing \neq J \subset N_n\}.$$

Описание эквивалентных многогранников дает следующая теорема.

Теорема 6.1. *$M(a^0, b^0) \sim M(a^1, b^1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{sign} \mu_{I,J}(a^0, b^0) = \operatorname{sign} \mu_{I,J}(a^1, b^1) \quad \forall (I, J) \in \mathfrak{A}_{m \times n}. \tag{6.1}$$

Доказательство. Достаточность. Введем вспомогательные понятия. *Линией матрицы*, как и прежде, назовем строку или столбец этой матрицы. *Простой линией* будем называть линию, содержащую единственную ненулевую компоненту.

Пусть $x^0 = \|x_{ij}^0\|_{m \times n}$ — некоторая вершина многогранника $M(a^0, b^0)$, определенного векторами $a^0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots, a_m^0)$ и $b^0 = (b_1^0, b_2^0, \ldots, b_n^0)$. Так как число положительных компонент любой вершины транспортного многогранника порядка $m \times n$ не превышает числа $m + n - 1$, то матрица $x^0$ содержит хотя бы одну простую линию. Это значит, что существует пара индексов $(s, k)$ с условием $x_{sk}^0 = \min(a_s^0, b_k^0)$.

Будем для определенности предполагать, что $a_s^0 \leqslant b_k^0$, т. е. простой линией матрицы $x^0$ является $s$-я строка.

Ясно, что существуют вершины многогранника $M(a^1, b^1)$, определенного векторами $a^1 = (a_1^1, a_2^1, \ldots, a_m^1)$ и $b^1 = (b_1^1, b_2^1, \ldots, b_n^1)$, с компонентой $x_{sk}^1 = \min(a_s^1, b_k^1)$. А так как в силу ранее сделанного предположения и условий (6.1) имеем $a_s^1 \leqslant b_k^1$, то найдутся матрицы, представляющие собой вершины многогранника $M(a^1, b^1)$ с $s$-й простой строкой.

Если теперь $s$-ю строку матрицы $x^0 \in M(a^0, b^0)$ вычеркнуть, то среди оставшихся ее линий найдется хотя бы одна простая линия. Продолжая описанный процесс, построим вершину $x^1 \in M(a^1, b^1)$ эквивалентную вершине $x^0$.

Кроме того, проведенные рассуждения показывают, что всякой вершине многогранника $M(a^0, b^0)$ соответствует эквивалентная вершина многогранника $M(a^1, b^1)$, и наоборот.

Необходимость. Предположим, что существует пара $(L, P) \in \mathfrak{A}_{m \times n}$, для которой равенство (6.1) не выполняется, однако $M(a^0, b^0) \sim M(a^1, b^1)$. Не нарушая общности, ограничимся лишь случаем, когда

$$\mu_{L,P}(a^0, b^0) > 0, \tag{6.2}$$

$$\mu_{L,P}(a^1, b^1) \leqslant 0. \tag{6.3}$$

Условие (6.2) означает, что найдется по крайней мере одна вершина $x' \in M(a^0, b^0)$ с компонентами $x'_{ij}=0 \quad \forall (i, j) \in \bar{L}\times P$, а среди компонент $x'_{ij}$, $(i, j) \in L\times\bar{P}$, найдется хотя бы одна положительная компонента.

С другой стороны, условие (6.3) указывает, что среди вершин многогранника $M(a^1, b^1)$ нет вершины, эквивалентной вершине $x'$. Но это противоречит эквивалентности многогранников $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$. Следовательно, ситуация (6.2), (6.3) не может возникнуть.

Следствие 6.2. *Если* $M(a^0, b^0) \sim M(a^1, b^1)$, *то*

$$M(a^0, b^0) \sim M(\lambda a^1 + (1-\lambda) a^0, \ \lambda b^1 + (1-\lambda) b^0) \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Для транспортного многогранника $M(a^0, b^0)$ порядка $m\times n$, задав малое положительное число $\rho$, введем в рассмотрение множество многогранников, в некотором смысле близких к $M(a^0, b^0)$:

$$Q^\rho(a^0, b^0) = \left\{M(a, b)\colon \max_{1\leqslant i\leqslant m} |a_i - a_i^0| \leqslant \rho, \ \max_{1\leqslant j\leqslant n} |b_j - b_j^0| \leqslant \rho\right\}.$$

Докажем следующее свойство этого множества.

Следствие 6.3. *Пусть* $M(a^0, b^0)$ — *невырожденный транспортный многогранник порядка* $m\times n$, *и пусть*

$$0 < \rho \leqslant \min_{(I, J)\in\mathfrak{A}_{m\times n}} \frac{|\mu_{I,J}(a^0, b^0)|}{m+n}.$$

*Тогда всякий многогранник* $M(a, b) \in Q^\rho(a^0, b^0)$ *эквивалентен многограннику* $M(a^0, b^0)$.

Доказательство. По условию имеем

$$\mu_{I,J}(a^0, b^0) - \rho(|I|+|J|) \leqslant \mu_{I,J}(a, b) \leqslant$$
$$\leqslant \mu_{I,J}(a^0, b^0) + \rho(|I|+|J|) \quad \forall (I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n},$$

откуда и из очевидных неравенств

$$|\mu_{I,J}(a^0, b^0)| > \rho(|I|+|J|) \quad \forall (I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}$$

выводим

$$\operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^0, b^0) = \operatorname{sign}\mu_{I,J}(a, b) \quad \forall (I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}.$$

Поэтому согласно теореме 6.1 следствие 6.3 доказано.

**2. Регулярность.**

Определение 6.2. Транспортный многогранник $M(a, b)$ будем называть *k-вырожденным многогранником*, если $|\mathfrak{A}(a, b)| = k$. 1-вырожденный многогранник $M(a, b)$, для которого $\mu_{L,P}(a, b)=0$, назовем *$(L, P)$-вырожденным*.

Пусть $M(a^0, b^0)$, $M(a^1, b^1)$ — транспортные многогранники одного и того же порядка. Положим $a^\lambda = \lambda a^1 + (1-\lambda)a^0$, $b^\lambda = \lambda b^1 + (1-\lambda) b^0$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Определение 6.3. Пару невырожденных транспортных многогранников $M(a^0, b^0)$, $M(a^1, b^1)$ одного и того же порядка назовем *$(L, P)$-регулярной парой*, если существует число $\lambda^* \in (0, 1)$

с условием, что многогранник $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$ является $(L, P)$-вырожденным, а многогранник $M(a^\lambda, b^\lambda)$ при любом $\lambda \in (0, 1)$, $\lambda \neq \lambda^*$, невырожден. Многогранник $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$ будем называть *центром $(L, P)$-регулярной пары* многогранников $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$.

Для всякого вектора $c = (c_1, c_2, \ldots, c_t)$ и непустого подмножества $T \subset N_t$ определим вектор $c[T]$, составленный из тех компонент вектора $c$, индексы которых принадлежат множеству $T$.

Пусть существует пара $(L, P) \in \mathfrak{A}_{m\times n}$, для которой $\mu_{L,P}(a, b) = 0$. Определим число

$$\delta_{L,P}(a, b) = f_0(M(a[L], b[P]))\, f_0(M(a[\bar{L}], b[\bar{P}])).$$

Следующая теорема составляет основу излагаемого ниже подхода к задачам перечисления вершин транспортного многогранника.

Теорема 6.4. *Если $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ есть $(L, P)$-регулярная пара транспортных многогранников с центром $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$, то, полагая*

$$\gamma_{L,P}(a^1, b^1) = (n|L| - m|P|)\operatorname{sign}\mu_{L,P}(a^1, b^1),$$

*будем иметь*

$$f_0(M(a^1, b^1)) = f_0(M(a^0, b^0)) + \delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})\,\gamma_{L,P}(a^1, b^1). \quad (6.4)$$

Перед тем, как доказывать эту теорему, рассмотрим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 6.5. *Пара транспортных многогранников $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ является $(L, P)$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$ тогда и только тогда, когда*

$$\mu_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}) = 0, \quad \mu_{L,P}(a^0, b^0)\,\mu_{L,P}(a^1, b^1) < 0,$$
$$\mu_{I,J}(a^0, b^0)\,\mu_{I,J}(a^1, b^1) > 0 \quad \text{для всех} \quad (I, J) \neq (L, P).$$

Доказательство следует из определения 6.5 и линейности функции $\mu_{L,P}(a^\lambda, b^\lambda)$ по $\lambda$.

Лемма 6.6. *Пусть $M(a, b)$ — транспортный многогранник порядка $m\times n$. Тогда существует вершина многогранника $M(a, b)$, среди положительных компонент которой минимальной является компонента $t = \min\limits_{(I,J)} |\mu_{I,J}(a, b)|$, где минимум берется по всем парам $(I, J)$, $I \subseteq N_m$, $J \subset N_n$, для которых $\mu_{I,J}(a, b) \neq 0$.*

Доказательство. На основании леммы 1.3 имеем

$$t \leqslant \min_{x \in \operatorname{vert} M(a, b)} \ \min_{(i,j)\in \mathscr{K}(a, b, x)} x_{ij}. \quad (6.5)$$

Пусть $t = |\mu_{L,P}(a, b)|$. Выберем пару $(k, r)$ так, чтобы

$$(k, r) \in \begin{cases} L\times \bar{P}, & \text{если} \quad \mu_{L,P}(a, b) = t, \\ \bar{L}\times P, & \text{если} \quad \mu_{L,P}(a, b) = -t. \end{cases}$$

Рассмотрим многогранник $M(a', b')$, определенный векторами

$$a' = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k - t, a_{k+1}, \ldots, a_m),$$
$$b' = (b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, b_r - t, b_{r+1}, \ldots, b_n).$$

Так как $\mu_{L,P}(a', b')=0$, то существует по меньшей мере одна вершина $x' \in M(a', b')$ с компонентами $x'_{ij}=0\ \forall (i, j) \in (L\times\bar{P}) \cup \cup (\bar{L}\times P)$. Следовательно, найдется вершина $x \in M(a, b)$ с компонентой $x_{kr}=t$, т. е.

$$t \geqslant \min_{x \in \operatorname{vert} M(a,\ b)} \ \min_{(i,\ j) \in \mathscr{K}(a,\ b,\ x)} x_{ij}. \tag{6.6}$$

Сопоставляя неравенства (6.5) и (6.6), получаем требуемое равенство. Лемма 6.6 доказана.

Доказательство теоремы 6.4. Пусть $V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$ обозначает множество тех вершин многогранника $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$, для которых $x_{ij}=0\ \forall (i, j) \in (L\times\bar{P}) \cup (\bar{L}\times P)$. В силу $(L, P)$-вырожденности многогранника $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$ имеем

$$|V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})| = \delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}), \tag{6.7}$$

$$|\mathscr{K}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}, x)| = m+n-2\ \ \forall x \in V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}). \tag{6.8}$$

На основании линейности функции $\mu_{L,P}(a^{\lambda}, b^{\lambda})$ по $\lambda$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|\mu_{L,P}(a^{\lambda}, b^{\lambda})| < \varepsilon \quad \forall \lambda \in \Lambda = \{\lambda\colon\ |\lambda-\lambda^*| < \delta\}. \tag{6.9}$$

Положим

$$0 < \varepsilon < \min_{(I,\ J)} |\mu_{I,J}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})|, \tag{6.10}$$

где минимум берется по всем парам $(I, J)$, $I \subseteq N_m$, $J \subset N_n$, для которых $\mu_{I,J}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}) \neq 0$. Выберем $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ так, чтобы $0 < \lambda_0 < \lambda^* < \lambda_1 < 1$.

Ясно, что пара многогранников $M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})$ и $M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})$ является $(L, P)$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$. Поэтому, применяя лемму 6.5, получаем равенство

$$\operatorname{sign}\mu_{L,P}(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}) = -\operatorname{sign}\mu_{L,P}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}).$$

Пусть вначале $\operatorname{sign}\mu_{L,P}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})=1$. Рассмотрим какую-нибудь вершину $y \in V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$. Согласно условий (6.8)—(6.10) и леммы 6.6, для любых пар $(i, j) \in L\times\bar{P}$ и $(i, j) \in \bar{L}\times P$ существуют соответственно единственные вершины $x_y^{(i,\ j)} \in M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})$ и $\hat{x}_y^{(i,\ j)} \in M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})$ такие, что

$$\mathscr{K}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}, y) \cup \{(i, j)\} = \begin{cases} \mathscr{K}\left(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}, x_y^{(i,\ j)}\right), & \text{если} \quad (i, j) \in L\times\bar{P}, \\ \mathscr{K}\left(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}, \hat{x}_y^{(i,\ j)}\right), & \text{если} \quad (i, j) \in \bar{L}\times P. \end{cases}$$

Так как пара многогранников $M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})$ и $M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})$ является $(L, P)$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$, то на основании леммы 6.5 для всякой пары $(I, J) \neq (L, P)$ справедливо равенство

$$\operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}) = \operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}).$$

Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве достаточности теоремы 6.1, нетрудно получить $f_0(M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})) =$

$= f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})) + W_1 - W_0$, где $W_1$ — число вершин $x_y^{(i,j)}$ $\forall (i, j) \in L \times \bar{P}$, $y \in V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$, а $W_0$ — число вершин $\hat{x}_y^{(i,j)}$ $\forall (i, j) \in \bar{L} \times P$, $y \in V_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$. Отсюда и из (6.7) следует

$$f_0(M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})) = f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})) + (n|L| - m|P|)\,\delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}). \tag{6.11}$$

Случай, когда $\operatorname{sign}\mu_{L,P}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}) = -1$, рассматривается аналогичным образом. В результате получаем равенство

$$f_0(M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})) = f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})) - (n|L| - m|P|)\,\delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}). \tag{6.12}$$

Объединяя (6.11) и (6.12), выводим

$$f_0(M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})) = f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})) + \delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})\,\gamma_{L,P}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}).$$

Для доказательства равенства (6.4) осталось показать, что

$$f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})) = f_0(M(a^0, b^0)),$$
$$f_0(M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})) = f_0(M(a^1, b^1)).$$

В силу леммы 6.5 для всякой пары $(I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}$ справедливы равенства

$$\operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}) = \operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^0, b^0),$$
$$\operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}) = \operatorname{sign}\mu_{I,J}(a^1, b^1).$$

Отсюда согласно теореме 6.1 имеем

$$M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}) \sim M(a^0, b^0),$$
$$M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1}) \sim M(a^1, b^1),$$

и, следовательно, теорема 6.4 доказана.

Следствие 6.7. *Если $M(a^0, b^0)$, $M(a^1, b^1)$ есть $(L, P)$-регулярная пара транспортных многогранников, то $f_0(M(a^0, b^0)) = f_0(M(a^1, b^1))$ в том и только в том случае, когда $n|L| = m|P|$.*

**3. Спектр.** Весьма плодотворным оказывается понятие спектра двух транспортных многогранников. С помощью этого понятия удается получить в последующих параграфах ряд тонких результатов, касающихся как количественных характеристик, так и строения транспортных многогранников.

Определение 6.4. *Спектром* двух транспортных многогранников $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ одного и того же порядка назовем множество $S(a^0, b^0, a^1, b^1)$ всех чисел $\lambda \in (0, 1)$, для каждого из которых $M(a^\lambda, b^\lambda)$ — вырожденный многогранник.

В терминах спектра можно сформулировать критерий эквивалентности невырожденных транспортных многогранников (теорема 1.9 гл. III).

Теорема 6.8. *Два невырожденных транспортных многогранника эквивалентны тогда и только тогда, когда их спектр пуст.*

Определение 6.5. Спектр будем называть *конечным*, если число его элементов конечно, и *бесконечным* в противном случае.

Как и ранее, будем использовать обозначение

$$\mathfrak{A}(a,\ b)=\{(I,\ J)\in\mathfrak{A}_{m\times n}:\ \mu_{IJ}(a,\ b)=0\}.$$

Справедливо следующее предложение.

Предложение 6.9. *Спектр* $S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$ *бесконечен тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{A}(a^0,\ b^0)\cap\mathfrak{A}(a^1,\ b^1)\neq\varnothing$.

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из линейности функции $\mu_{I,J}(a^\lambda,\ b^\lambda)$ по $\lambda$. Необходимость легко доказать от противного, приняв во внимание, что множество $\mathfrak{A}_{m\times n}$ конечно.

Как следствия этого предложения, получаем следующие свойства спектра:

(а) спектр двух транспортных многогранников, один из которых невырожден, конечен;

(б) если спектр $S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$ конечен, то

$$|S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)|\leqslant 2(2^{m-1}-1)(2^{n-1}-1);$$

(в) если спектр $S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$ бесконечен, то он совпадает с множеством всех точек интервала $(0,\ 1)$.

Определение 6.6. Конечный непустой спектр $S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$ будем называть *простым спектром*, если всякий многогранник $M(a^\lambda,\ b^\lambda)$, $\lambda\in S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$, является $(I_\lambda,\ J_\lambda)$-вырожденным. Пустой спектр также будем называть простым.

Заметим, что в случае, когда спектр $S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$ непростой, существует хотя бы одно число $\lambda\in S(a^0,\ b^0,\ a^1,\ b^1)$, для которого $|\mathfrak{A}(a^\lambda,\ b^\lambda)|\geqslant 2$.

Докажем теорему существования простого спектра.

Теорема 6.10. *Пусть* $M(a^0,\ b^0)$, $M(a^1,\ b^1)$ — *транспортные многогранники порядка* $m\times n$. *Пусть* $M(a^0,\ b^0)$ — *невырожденный многогранник и* $0<\rho\leqslant\min\limits_{(I,\ J)\in\mathfrak{A}_{m\times n}}\dfrac{|\mu_{I,\ J}(a^0,\ b^0)|}{m+n}$. *Тогда существует многогранник* $M(a,\ b)\in Q^\rho(a^0,\ b^0)$ *с условием, что спектр* $S(a,\ b,\ a^1,\ b^1)$ *простой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B}_{m\times n}$ — множество всех подмножеств из $\mathfrak{A}_{m\times n}$, состоящих не менее, чем из двух элементов. Для всякого $D\in\mathfrak{B}_{m\times n}$ определим множество $\Omega(D)$ всех $(m+n)$-векторов $(a,\ b)=(a_1,\ a_2,\dots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\dots,\ b_n)$ с действительными положительными компонентами, подчиненными условиям

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j,$$

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{j\in J}b_j\quad\forall(I,\ J)\in D,$$

$$\sum_{i\in I}a_i\neq\sum_{j\in J}b_j\quad\forall(I,\ J)\in\mathfrak{A}_{m\times n}\setminus D.$$

Согласно предложения 4.1 гл. I заключаем, что $\dim \Omega(D) \leqslant m+n-3 \ \forall D \in \mathfrak{B}_{m\times n}$. Следовательно, размерность всякого аффинного множества $\Delta(D)$, порожденного вектором $(a^1, b^1)$ и множеством $\Omega(D)$, не превосходит числа $m+n-2$. Поэтому, положив $N = \left\{M(a, b)\colon (a, b) \in \bigcup_{D\in\mathfrak{B}_{m\times n}} \Delta(D)\right\}$, и приняв во внимание, что множество $\mathfrak{B}_{m\times n}$ конечно, а $\dim\{(a, b)\colon M(a, b) \in Q^\rho(a^0, b^0)\} = m+n-1$, получим

$$N^* = Q^\rho(a^0, b^0)\backslash N \neq \varnothing.$$

Из построения следует, что для всякого многогранника $M(a, b) \in N^*$ спектр $S(a, b, a^1, b^1)$ является простым. Действительно, пусть для некоторого многогранника $M(a', b') \in N^*$ это не так. Тогда существует хотя бы одно число $\lambda \in S(a', b', a^1, b^1)$ с условием $|\mathfrak{A}(\lambda a^1 + (1-\lambda)a', \lambda b^1 + (1-\lambda)b')| \geqslant 2$, т.е. $M(a', b') \notin N^*$. Полученное противоречие и заканчивает доказательство теоремы 6.10.

## § 7. Многогранники с максимальным числом вершин

### 1. Первый критерий.

Определение 7.1. Транспортный многогранник порядка $m\times n$, определенный векторами $a^* = (\underbrace{n, \ldots, n}_{m})$ и $b^* = (\underbrace{m, \ldots, m}_{n})$, будем называть *центральным*.

В 1968 г. В. Кли и X. Витцчалл [45] высказали гипотезу о том, что центральный транспортный многогранник порядка $m\times n$ при взаимно простых числах $m$ и $n$ имеет максимальное число вершин. В 1972 году Е. Болкер [40] доказал эту гипотезу. Обобщением этого результата является следующий критерий принадлежности транспортного многогранника порядка $m\times n$ к классу многогранников с максимальным числом $\varphi(m, n)$ вершин [8].

Теорема 7.1. *Транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$ имеет максимальное число вершин $\varphi(m, n)$ тогда и только тогда, когда он невырожден и спектр $S(a, b, a^*, b^*) = \varnothing$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 7.2. *Для всякого $k$-вырожденного ($k \geqslant 1$) многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $mn > 4$, существует такой $l$-вырожденный ($0 \leqslant l \leqslant k-1$) многогранник $M(a', b')$ того же порядка, что $f_0(M(a', b')) > f_0(M(a, b))$.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь пару $(L, P) \in \mathfrak{A}(a, b)$. Для определенности будем считать, что

$$\max(|L||\bar P|, |\bar L||P|) = |L||\bar P|. \tag{7.1}$$

Теперь выберем пару индексов $(s, t) \in L\times \bar P$. Определим векторы $a'=(a'_1, a'_2, \ldots, a'_m)$ и $b'=(b'_1, b'_2, \ldots, b'_n)$, полагая

$$a'_i=\begin{cases} a_i, & \text{если } i\neq s,\\ a_i+\varepsilon, & \text{если } i=s,\end{cases}$$

$$b'_j=\begin{cases} b_j, & \text{если } j\neq t,\\ b_j+\varepsilon, & \text{если } j=t,\end{cases}$$

где $0<\varepsilon<\min\limits_{x\in \operatorname{vert} M(a,\,b)}\ \min\limits_{(i,\,j)\in\mathscr{K}(a,\,b,\,x)} x_{ij}$.

Рассмотрим какую-нибудь вершину $x\in M(a, b)$ с компонентами $x_{ij}=0$ $\forall (i, j)\in(L\times\bar{P})\cup(\bar{L}\times P)$. В силу выбора числа $\varepsilon$ ясно, что всякой паре $(i, j)\in L\times\bar{P}$ соответствует вершина $x^{(i,\,j)}\in M(a', b')$ такая, что $\mathscr{K}(a', b', x^{(i,\,j)})\supseteq\mathscr{K}(a, b, x)\cup\{(i, j)\}$. Следовательно, вершине $x$ соответствуют вершины множества $\bigcup\limits_{(i,\,j)\in L\times\bar{P}} x^{(i,\,j)}$, мощность которого (ввиду $mn>4$ и предположения (7.1)) не меньше двух.

Далее, для всякой вершины $x\in M(a, b)$ с компонентой $x_{st}>0$ существует вершина $x'\in M(a', b')$ с компонентами

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}+\varepsilon, & \text{если } (i, j)=(s, t),\\ x_{ij} & \text{для остальных индексов.}\end{cases}$$

И, наконец, пусть $x$ — такая вершина многогранника $M(a, b)$, у которой $x_{st}=0$, а среди компонент $x_{ij}$, $(i, j)\in L\times\bar{P}$, найдется хотя бы одна положительная компонента. Всякой такой вершине соответствует вершина $x'\in M(a', b')$ с компонентами

$$x'_{ij}=\begin{cases} x_{ij}-\varepsilon, & \text{если } i=s_r,\ j=t_{r+1},\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\\ x_{ij}+\varepsilon, & \text{если } i=s_r,\ j=t_r,\ r=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\\ x_{ij} & \text{для остальных индексов,}\end{cases}$$

в случае, когда пара $(s, t)$ образует с некоторыми парами из множества $\mathscr{K}(a, b, x)$ цикл: $(s, t)$, $(s, t_1)$, $(s_1, t_1)$, $(s_1, t_2)$, $\ldots$, $(s_{k-1}, t_r)$, $(s_k, t)$, где $s_0=s$, $t_k=t$, и с компонентами

$$x'_{ij}=\begin{cases} \varepsilon, & \text{если } (i, j)=(s, t),\\ x_{ij} & \text{для остальных индексов}\end{cases}$$

в противном случае.

Собирая все доказанное, получаем неравенство $f_0(M(a', b'))>f_0(M(a, b))$. Лемма 7.2 доказана.

Введем обозначение

$$\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)=\bigcup_{\lambda\in S(a^0,\,b^0,\,a^1,\,b^1)}\mathfrak{A}(a^\lambda, b^\lambda).$$

В силу линейности функции $\mu_{I,\,J}(a^\lambda, b^\lambda)$ по $\lambda$ очевидна следующая лемма.

Лемма 7.3. *Пусть $M(a^0, b^0)$, $M(a^1, b^1)$ — транспортные многогранники порядка $m\times n$, и пусть хотя бы один из этих многогранников невырожден. Тогда пара $(L, P)\in\mathfrak{A}_{m\times n}$ содержится в $\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)$ в том и только в том случае, когда*

$$\mu_{L,P}(a^0, b^0)\,\mu_{L,P}(a^1, b^1)<0.$$

Лемма 7.4. *Пусть $M(a^0, b^0)$ — невырожденный транспортный многогранник порядка $m\times n$, и пусть*

$$0<\rho\leqslant\min_{(I,J)\in\mathfrak{A}_{m\times n}}\frac{|\mu_{I,J}(a^0, b^0)|}{m+n}.$$

*Тогда для всякого многогранника $M(a^1, b^1)$ того же порядка справедливы равенства*

$$\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)=\mathfrak{A}(a, b, a^1, b^1)\quad\forall M(a, b)\in Q^\rho(a^0, b^0).$$

Доказательство. Предположим, что существуют многогранники $M(a^1, b^1)$ и $M(a, b)\in Q^\rho(a^0, b^0)$, для которых имеет место неравенство $\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)\neq\mathfrak{A}(a, b, a^1, b^1)$. Это означает, что найдется пара $(L, P)\in\mathfrak{A}_{m\times n}$, для которой должен выполняться один из следующих случаев:

а) $(L, P)\notin\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)$, $(L, P)\in\mathfrak{A}(a, b, a^1, b^1)$;

б) $(L, P)\in\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)$, $(L, P)\notin\mathfrak{A}(a, b, a^1, b^1)$.

Случай а). Согласно лемме 7.3 справедливо неравенство

$$\mu_{L,P}(a, b)\,\mu_{L,P}(a^1, b^1)<0. \tag{7.2}$$

Из следствия 6.3 следует, что $M(a, b)\sim M(a^0, b^0)$. Поэтому на основании теоремы 6.1 имеем $\mu_{L,P}(a, b)\,\mu_{L,P}(a^0, b^0)>0$. Учитывая это, из неравенства (7.2) находим $\mu_{L,P}(a^0, b^0)\,\mu_{L,P}(a^1, b^1)<0$, а, следовательно, по лемме 7.3 пара $(L, P)\in\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)$. Полученное противоречие доказывает невозможность случая а).

Аналогично доказывается и невозможность случая б).

Лемма 7.4 доказана.

Доказательство теоремы 7.1. Необходимость. Прежде всего заметим, что невырожденность многогранника $M(a, b)$ непосредственно вытекает из леммы 7.2.

Предположим, что $S(a, b, a^*, b^*)\neq\varnothing$. Рассмотрим случай, когда спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ — простой. Расположим все элементы этого спектра в порядке возрастания $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_T$, $T\geqslant 1$. Выберем число $\lambda_0$ так, чтобы $\lambda_1<\lambda_0<1$ при $T=1$, $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ при $T>1$. Тогда, если $a^\lambda=\lambda a^*+(1-\lambda)a$, $b^\lambda=\lambda b^*+(1-\lambda)b$, то пара многогранников $M(a, b)$ и $M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})$ является $(I_{\lambda_1}, J_{\lambda_1})$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda_1}, b^{\lambda_1})$. Применяя к этой паре многогранников теорему 6.4 и учитывая очевидное неравенство

$$\mu_{I_{\lambda_1}, J_{\lambda_1}}(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0})\,\mu_{I_{\lambda_1}, J_{\lambda_1}}(a^*, b^*)>0,$$

получаем $f_0(M(a^{\lambda_0}, b^{\lambda_0}))>f_0(M(a, b))=\varphi(m, n)$, что невозможно.

Пусть теперь спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ не является простым. Так как многогранник $M(a, b)$ невырожден, то согласно следствия 6.3 и теоремы 6.10 найдется невырожденный многогранник $M(a', b')$ с условием, что спектр $S(a', b', a^*, b^*)$ простой и $f_0(M(a', b')) = f_0(M(a, b))$.

Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве предыдущего случая, вновь приходим к выводу о существовании многогранника с числом вершин, превосходящим $\varphi(m, n)$. Таким образом, необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $M(a', b')$ — некоторый многогранник с максимальным числом вершин. Тогда на основании только что доказанной необходимости условий нашей теоремы спектр $S(a', b', a^*, b^*) = \varnothing$. Отсюда и в силу пустоты спектра $S(a, b, a^*, b^*)$ имеем

$$\mathfrak{A}(a, b, a', b') = \mathfrak{A}(a^*, b^*). \tag{7.3}$$

Если $\mathfrak{A}(a^*, b^*) = \varnothing$, то очевидно, что спектр $S(a, b, a', b') = \varnothing$ и по теореме 6.8 получаем равенства $f_0(M(a, b)) = f_0(M(a', b')) = \varphi(m, n)$.

Пусть теперь $\mathfrak{A}(a^*, b^*) \neq \varnothing$. Рассмотрим вначале случай, когда спектр $S(a, b, a', b')$ — простой. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_T$ — числа этого спектра. Возьмем любые $\pi_t$, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_t < \pi_t < \lambda_{t+1}$, $t = 0, 1, \ldots, T$, где $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{T+1} = 1$. Обозначим $a^\lambda = \lambda a' + (1-\lambda) a$, $b^\lambda = \lambda b' + (1-\lambda) b$. Ясно, что для каждого $t \in N_T$ пара многогранников $M(a^{\pi_{t-1}}, b^{\pi_{t-1}})$ и $M(a^{\pi_t}, b^{\pi_t})$ является $(I_{\lambda_t}, J_{\lambda_t})$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda_t}, b^{\lambda_t})$. Учитывая равенство (7.3), будем иметь

$$n \mid I_{\lambda_t} \mid = m \mid J_{\lambda_t} \mid \quad \forall t \in N_T,$$

и поэтому, применяя теорему 6.4 к любой такой паре многогранников, выводим $f_0(M(a, b)) = f_0(M(a', b')) = \varphi(m, n)$.

Если же спектр $S(a, b, a', b')$ не является простым, то в силу следствия 6.3 и теоремы 6.10 существует такой невырожденный многогранник $M(a'', b'') \in Q^\rho(a', b')$, что спектр $S(a, b, a'', b'')$ — простой и $f_0(M(a'', b'')) = f_0(M(a', b'))$. Так как многогранник $M(a'', b'') \in Q^\rho(a', b')$, то на основании леммы 7.4 имеем $\mathfrak{A}(a, b, a'', b'') = \mathfrak{A}(a, b, a', b')$. Отсюда, принимая во внимание условие (7.3), получим равенство $\mathfrak{A}(a, b, a'', b'') = \mathfrak{A}(a^*, b^*)$. Теперь дальнейшие рассуждения повторяют доказательство, приведенное выше в предыдущем случае.

Теорема 7.1 доказана.

Так как центральный транспортный многогранник порядка $m \times n$ невырожден тогда и только тогда, когда $(m, n) = 1$, то из теорем 6.8 и 7.1 немедленно вытекает следующее следствие.

Следствие 7.5. *Все транспортные многогранники порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин эквивалентны между собой тогда и только тогда, когда* $(m, n) = 1$.

**2. Второй критерий.** Используя первый критерий, А. М. Кононенко и Н. Н. Трухановским [20, 21] получены условия максимальности числа вершин транспортного многогранника, проверка которых менее трудоемка, чем проверка условий теоремы 7.1.

Теорема 7.6. *Пусть* $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, $m = tp$, $n = tq$, $t$ — *наибольший общий делитель чисел* $m$ *и* $n$,

$$ph - qg = 1, \quad 0 \leqslant g \leqslant p-1, \quad 1 \leqslant h \leqslant q, \tag{7.4}$$

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m, \quad b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n. \tag{7.5}$$

*Невырожденный транспортный многогранник* $M(a, b)$ *имеет максимальное число вершин тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$\sum_{i=1}^{g+\beta p} a_i < \sum_{j=1}^{h+\beta q} b_j\text{*)}, \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, t-2, (t-1)\operatorname{sign}(q-1). \tag{7.6}$$

Отметим, что числа $g$ и $h$ вычисляются по формулам [36]:

$$\frac{h}{g} = \begin{cases} \dfrac{q_l}{p_l}, & \text{если } l \text{ — нечетное}, \quad l > 1, \\ \dfrac{q - q_l}{p - p_l}, & \text{если } l \text{ — четное}, \end{cases}$$

$$h = 1, \quad g = 0, \text{ если } l = 1,$$

где

$$\frac{q}{p} = [q_1;\ q_2, \ldots, q_l], \quad \frac{q_l}{p_l} = [q_1;\ q_2, \ldots, q_{l-1}].$$

Здесь $[q_1;\ q_2, \ldots, q_l]$ — разложение в цепную дробь.

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 7.7. *Пусть числа* $m, n, p, q, t, h, g$ *удовлетворяют условиям теоремы* 7.6. *Тогда выполняются соотношения*

$$\left[\frac{\alpha g + \beta p}{m}\right] = \left[\frac{\alpha h + \beta q}{n}\right], \tag{7.7}$$

$$\forall \alpha \in N_p, \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, t-2, (t-1)\operatorname{sign}(q-1).$$

Доказательство. Если $p = 1$, то в справедливости леммы легко убедиться непосредственной проверкой. Поэтому будем считать, что $p \geqslant 2$. В этом случае покажем, что равенства (7.7) справедливы при любом $\beta = 0, 1, 2, \ldots$

Пусть сначала $\alpha < p$. Положим

$$\alpha g + \beta p = m s_1 + r_1, \quad 0 \leqslant r_1 \leqslant m-1,$$

$$\alpha h + \beta q = n s_2 + r_2, \quad 0 \leqslant r_2 \leqslant n-1,$$

---

*) Если $g = 0$, $\beta = 0$, то полагаем $\sum_{i=1}^{g+\beta p} a_i = 0$.

где $s_1$, $s_2$ — целые числа. Допустим, что $s_1 < s_2$. Тогда $m(\alpha h+\beta q)-$ $-n(\alpha g+\beta p)\geqslant n$. Отсюда в силу условий (7.4) получаем, что $\alpha t\geqslant n$. Однако, поскольку $p\leqslant q$, то $\alpha t<n$ $\forall\alpha\in N_{p-1}$. На основании полученного противоречия заключаем, что $s_1\geqslant s_2$. Если предположить, что $s_1>s_2$, то аналогичным образом получаем противоречие: $-\alpha t\geqslant m$. Итак, $s_1=s_2$.

Пусть теперь $\alpha=p$. Положим $p(g+\beta)=ms+r$, $0\leqslant r\leqslant m-1$. Тогда $g+\beta=sd+r^*$, где $r^*=r/p$ — целое число, $0\leqslant r^*\leqslant d-1$. Отсюда в силу условий (7.4) имеют место равенства $ph+pq=$ $=q(g+\beta)+1=sn+qr^*+1$. Это означает, что $s=[(ph+\beta q)/n]$, поскольку $qr^*+1\leqslant q(d-1)+1<n$. Лемма 7.7 доказана.

Доказательство теоремы 7.6 Необходимость. В силу теоремы 7.1 выполняются неравенства

$$(n|I|-m|J|)\mu_{I\ J}(a,\ b)>0,\qquad n|I|\neq m|J|,\tag{7.8}$$

которые равносильны неравенствам

$$\mu_{I,J}(a,\ b)<0,\qquad |I|\leqslant m-1,\qquad |J|=[n|I|/m]+1.\tag{7.9}$$

Из этих неравенств, поскольку $g+\beta p\leqslant m-1$ при $\beta\leqslant t-1$, а в силу условий (7.4) $[n|I|/m]+1=h+\beta q$ при $|I|=g+\beta p$, вытекают неравенства

$$\mu_{I,J}(a,\ b)<0;\quad |I|=g+\beta p,\quad |J|=h+\beta q,$$
$$\beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ t-2,\ (t-1)\operatorname{sign}(q-1),$$

т. е. (7.6).

Достаточность. Из неравенств (7.6), принимая во внимание условия (7.5), вытекают неравенства

$$\mu_{I,J}(a,\ b)<0,\quad |I|=g+\beta p,\quad |J|=h+\beta q,\tag{7.10}$$
$$\beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ t-2,\ (t-1)\operatorname{sign}(q-1).$$

Отсюда при $\beta=0$ получаем

$$\mu_{I,J}(a,\ b)<0,\quad |I|=g,\quad |J|=h.$$

Поэтому в силу леммы 7.7 выполняются неравенства

$$\mu_{I,J}(a,\ b)<0,\quad |I|=r(\alpha g/m),\quad |J|=r(\alpha h/n)\quad \forall\alpha\in N_{p-1},\tag{7.11}$$

где $r(v/w)$ — остаток от деления числа $v$ на число $w$.

Теперь докажем следующие равенства

$$\left[\frac{g+\beta p+r(\alpha g/m)}{m}\right]=\left[\frac{h+\beta q+r(\alpha h/n)}{n}\right],\tag{7.12}$$
$$\alpha=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ p-1,$$
$$\beta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ t-2,\ (t-1)\operatorname{sign}(q-1).$$

Прежде всего заметим, что равенства (7.12) при $\alpha=0$ следуют из (7.7).

При каждом $\alpha \in N_p$ и $\beta = 0, 1, 2, \ldots, t-2, (t-1)\,\mathrm{sign}\,(q-1)$ в силу (7.7) имеем

$$\alpha g + \beta p = ms(\alpha, \beta) + r(\alpha g + \beta p/m),$$
$$\alpha h + \beta q = ns(\alpha, \beta) + r(\alpha h + \beta q/n).$$

Поэтому при любом $\alpha \in N_{p-1}$ получим

$$\left[\frac{g+\beta p + r(\alpha g/m)}{m}\right] = \left[\frac{(\alpha+1)g+\beta p - ms(\alpha, 0)}{m}\right] =$$
$$= \left[\frac{(s(\alpha+1, \beta) - s(\alpha, 0))\,m + r((\alpha+1)g+\beta p/m)}{m}\right] =$$
$$= s(\alpha+1, \beta) - s(\alpha, 0);$$

аналогично получим

$$\left[\frac{h+\beta q + r(\alpha h/n)}{n}\right] = s(\alpha+1, \beta) - s(\alpha, 0).$$

Следовательно, равенства (7.12) доказаны. В силу этих равенств из неравенств (7.10) и (7.11) имеем

$$\mu_{I,J}(a, b) < 0, \quad |I| = r(\alpha g + \beta p/m), \quad |J| = r(\alpha h + \beta q/n),$$
$$\forall \alpha \in N_p, \quad \beta = 0, 1, 2, \ldots, t-2, (t-1)\,\mathrm{sign}\,(q-1).$$

При этом следует отметить, что для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in N_p$ и $\beta_1, \beta_2 \in \{0, 1, 2, \ldots, t-2, (t-1)\,\mathrm{sign}\,(q-1)\}$ выполняется соотношение $r(\alpha_1 g + \beta_1 p/m) \neq r(\alpha_2 g + \beta_2 p/m)$, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$ или $\beta_1 \neq \beta_2$. Поэтому согласно равенству

$$\left[\frac{nr(\alpha g + \beta p/m)}{m}\right] + 1 = r(\alpha h + \beta q/n),$$

получаем (7.9), т. е. (7.8). Отсюда, учитывая невырожденность многогранника $M(a, b)$, на основании теоремы 7.1 заключаем, что он содержит максимальное число вершин.

Следствие 7.8. *При взаимно простых числах $m$ и $n$ транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$ имеет максимальное число вершин тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\sum_{i=1}^{g} a_i < \sum_{j=1}^{h} b_j. \tag{7.13}$$

Для доказательства достаточно убедиться в том, что при взаимно простых $m$ и $n$ из условия (7.13) вытекает невырожденность многогранника $M(a, b)$, поскольку этот многогранник эквивалентен центральному многограннику $M(a^*, b^*)$.

**3. Необходимые условия.** Далее, в § 10, нам понадобится следующий простой признак максимальности числа вершин транспортного многогранника.

Теорема 7.9. *Пусть $2 \leqslant m \leqslant n$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_m$, $b_1 \leqslant \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Тогда для всякого транспортного многогранника*

*$M(a, b)$ порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин выполняются неравенства*

1) *при* $m=n$

$$a_m < b_1 + b_2, \quad b_n < a_1 + a_2;$$

2) *при* $n = mq$, $q > 1$

$$a_m < \sum_{j=1}^{q+1} b_j, \qquad \sum_{j=(m-1)q+2}^{n} b_j < a_1;$$

3) *при* $n = mq + r$, $q \geqslant 1$, $1 \leqslant r \leqslant m-1$

$$a_m < \sum_{j=1}^{q+1} b_j, \qquad \sum_{j=n-q+2}^{n} b_j < a_1.$$

На примерах можно убедиться, что эти условия, вообще говоря, не являются достаточными.

Доказательство. Оно во всех случаях проводится по одной схеме. Поэтому рассмотрим лишь случай 1). Допустим, что существует многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин, для которого выполняется хотя бы одно из условий $a_m > b_1 + b_2$ или $b_m > a_1 + a_2$.

Очевидно, что при выполнении неравенства $a_m > b_1 + b_2$ спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ содержит число $(a_m - b_1 - b_2)/(a_m - b_1 - b_2 + m)$, а при $b_m > a_1 + a_2$ — число $(b_m - a_1 - a_2)/(b_m - a_1 - a_2 + m)$. Следовательно, спектр $S(a, b, a^*, b^*) \neq \varnothing$. Поэтому согласно теореме 7.1 $f_0(M(a, b)) < \varphi(m, n)$. Но это противоречит предположению, что $f_0(M(a, b)) = \varphi(m, n)$. Теорема 7.9 доказана.

Связь между многогранниками с максимальным числом вершин и максимальным числом граней устанавливает следующая теорема.

Теорема 7.10 [44]. *Всякий транспортный многогранник порядка $m \times n$, $mn > 4$, с максимальным числом вершин имеет максимальное число граней.*

Доказательство. Допустим, что существует многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин, для которого имеет место неравенство $f_{d-1}(M(a, b)) < mn$. Тогда, по теореме 3.2′, должно выполняться неравенство

$$\alpha = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} a_i + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} b_j - \sum_{j=1}^{n} b_j > 0.$$

Отсюда и из очевидного неравенства $mn > m + n$, справедливого при $mn > 4$, получаем

$$\frac{\alpha}{\alpha + mn - m - n} \in S(a, b, a^*, b^*).$$

Поэтому согласно теореме 7.1 $f_0(M(a, b)) < \varphi(m, n)$, что невозможно. Теорема 7.10 доказана.

## § 8. Подсчет числа $\varphi(m, n)$

**1. Теоремы перечисления.** Здесь предлагаются два подхода к подсчету максимального числа $\varphi(m, n)$ вершин в классе транспортных многогранников порядка $m\times n$. Эти подходы позволяют свести подсчет числа $\varphi(m, n)$ к подсчету числа вершин некоторых многогранников меньшего порядка.

Первый подход. В основе этого подхода лежит теорема 6.4 о величине скачка функции $f_0(M(a^\lambda, b^\lambda))$ при переходе параметра $\lambda$ через элемент спектра.

Пусть спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ простой. Тогда для всякого $\lambda\in S(a, b, a^*, b^*)$ многогранник $M(a^\lambda, b^\lambda)$, определенный векторами $a^\lambda=\lambda a+(1-\lambda)a^*$ и $b^\lambda=\lambda b+(1-\lambda)b^*$, является $(I_\lambda, J_\lambda)$-вырожденным. Следуя символике § 6, для $\lambda\in S(a, b, a^*, b^*)$ введем обозначение величины скачка $\delta_\lambda=\delta_{I_\lambda, J_\lambda}(a^\lambda, b^\lambda)\,|\,n\,|\,I_\lambda\,|-m\,|\,J_\lambda\,||$, которая согласно предложения 6.9 всегда положительна.

Теорема 8.1 [9]. *Пусть $M(a, b)$ — такой невырожденный транспортный многогранник порядка $m\times n$, что спектр $S(a, b, a^*, b^*)$-простой. Тогда максимальное число вершин в классе транспортных многогранников порядка $m\times n$ выражается формулой*

$$\varphi(m, n)=f_0(M(a, b))+\sum_{\lambda\in S(a, b, a^*, b^*)}\delta_\lambda.$$

Доказательство. Если спектр $S(a, b, a^*, b^*)=\varnothing$, то справедливость равенства $\varphi(m, n)=f_0(M(a, b))$ вытекает из теоремы 7.1.

Пусть спектр $S(a, b, a^*, b^*)\neq\varnothing$. Расположим все элементы этого спектра в порядке возрастания: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_T$, $T\geqslant 1$. Выберем числа $\pi_t$ так, чтобы $\lambda_t<\pi_t<\lambda_{t+1}$, $t=0, 1, 2, \ldots, T$, где $\lambda_0=0$, $\lambda_{T+1}=1$. Из простоты спектра следует, что для всякого $t\in N_T$ пара многогранников $M\left(a^{\pi_{t-1}}, b^{\pi_{t-1}}\right)$ и $M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)$ является $\left(I_{\lambda_t}, J_{\lambda_t}\right)$-регулярной с центром $M\left(a^{\lambda_t}, b^{\lambda_t}\right)$. Применяя теорему 6.4 к каждой такой паре многогранников и учитывая, что

$$\operatorname{sign}\mu_{I_{\lambda_t}, J_{\lambda_t}}\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)=\operatorname{sign}\mu_{I_{\lambda_t}, J_{\lambda_t}}\left(a^*, b^*\right)\quad \forall t\in N_T,$$

получаем

$$f_0\left(M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)\right)=f_0\left(M\left(a^{\pi_{t-1}}, b^{\pi_{t-1}}\right)\right)+\delta_{\lambda_t}\quad \forall t\in N_T.$$

Отсюда

$$f_0\left(M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)\right)=f_0(M(a, b))+\sum_{t=1}^{T}\delta_{\lambda_t}.$$

Так как многогранник $M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)$ удовлетворяет условию теоремы 7.1, то он имеет максимальное число $\varphi(m, n)$ вершин. Теорема 8.1 доказана.

Второй подход. Он основан на перечислении специальных вершин многогранников меньшего порядка, а именно таких вершин

$x=\|x_{ij}\|$, у которых любой столбец содержит по крайней мере две положительные компоненты.

Будем полагать, что $2 \leqslant m \leqslant n$. Пусть $n=mq+r$, где $r$ — остаток от деления $n$ на $m$. Введем обозначения $K(t)=\left\{k \in Z_m^+ : \sum_{i=1}^m k_i = t\right\}$, $t=0, 1, 2, \ldots, m-r-1$ для $r>0$; $K(m-1)=\left\{(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{m-1}, 0)\right\}$, $K(t)=\varnothing$, $t=0, 1, 2, \ldots, m-2$ для $r=0$.

Всякому вектору $k=(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in \bigcup_{t=0}^{m-r-1} K(t)$ будем ставить в соответствие многогранник $M(a^k, b^k)$ порядка $m \times \left(r+\sum_{i=1}^m k_i\right)$, определенный векторами $a^k=(m^2k_1+rm-1, \ldots$ $\ldots, m^2k_{m-1}+rm-1, m^2k_m+rm+m-1)$, $b^k=(m^2, m^2, \ldots, m^2)$.

Вершину $\|x_{ij}^0\|_{m\times n}$ транспортного многогранника $M(a, b)$ назовем *особой*, если $x_{ij}^0 < b_j$ для всех $i \in N_m$ и $j \in N_n$. Через $\gamma(a, b)$ будем обозначать число особых вершин многогранника $M(a, b)$.

Следующая теорема дает аппарат для подсчета числа $\varphi(m, n)$.

Теорема 8.2 [10]. *Максимальное число вершин в классе транспортных многогранников порядка $m\times n$ дается формулой*

$$\varphi(m, n)=\frac{n!}{(q!)^m}\sum_{t=0}^{m-r-1}\sum_{k\in K(t)}\frac{\gamma(a^k, b^k)}{(r+t)!}\prod_{i=1}^{m}\prod_{p=0}^{k_i-1}(q-p)\,^{*}). \quad (8.1)$$

Доказательство. Из теоремы 7.1 легко выводится, что при любых натуральных числах $m$ и $n$ многогранник $M(\bar{a}, \bar{b})$ порядка $m\times n$, определенный векторами $\bar{a}=(mn-1, \ldots, mn-1, mn+m-1)$, $\bar{b}=(m^2, m^2, \ldots, m^2)$, имеет $\varphi(m, n)$ вершин.

Пусть $0 \leqslant t \leqslant m-r-1$, $k=(k_1, k_2, \ldots, k_m) \in K(t)$. Число вершин многогранника $M(\bar{a}, \bar{b})$, для которых выполняются условия $|\{j \in N_n : x_{ij}=m^2\}|=q-k_i \quad \forall i \in N_m$, равно произведению числа $\gamma(a^k, b^k)$ на число способов, посредством которых $n$ элементов могут быть распределены на $(m+1)$ групп, из которых каждая $i$-я ($i \in N_m$) группа содержит $q-k_i$ элементов, а $(m+1)$-я группа содержит $r+t$ элементов, т. е. равна числу

$$\gamma(a^k, b^k)\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m}(q-k_i)!\,(r+t)!}. \quad (8.2)$$

---

*) Если $k_i=0$, то, по определению, считаем, что $\prod_{p=0}^{k_i-1}(q-p)=1$.

Суммируя выражение (8.2) по всевозможным $k \in K(t)$ и $t=0, 1, 2, \ldots, m-r-1$, получаем следующую формулу:

$$\varphi(m, n) = n! \sum_{t=0}^{m-r-1} \sum_{k \in K(t)} \gamma(a^k, b^k) \frac{1}{(r+t)! \prod\limits_{i=1}^{m} (q-k_i)!}. \qquad (8.3)$$

Теперь заметим, что $\prod\limits_{i=1}^{m} (q-k_i)! \prod\limits_{p=0}^{k_i-1} (q-p) = (q!)^m$. Отсюда и из (8.3) следует требуемое равенство. Теорема 8.2 доказана.

**2. Гипотеза Болкера.** В этом пункте проводится доказательство следующей теоремы, высказанной в 1972 г. Е. Д. Болкером [40] в виде предположения.

Теорема 8.3 *Максимальное число $\varphi(m, n)$ вершин в классе транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, выражается формулой*

$$\varphi(m, n) = \frac{n!}{(q!)^m} P(q, m, r),$$

*где $n = mq + r$, $r$ — остаток от деления $n$ на $m$, $P(q, m, r)$ — многочлен от $q$ со старшим членом $m^{m-2} q^{m-r-1}$.*

Доказательство. Формулу (8.1) легко привести к виду

$$\varphi(m, n) = \frac{n!}{(q!)^m} \left( q^{m-r-1} \sum_{k \in K(m-r-1)} \frac{\gamma(a^k, b^k)}{(m-1)!} + R(q, m, r) \right), \qquad (8.4)$$

где $R(q, m, r)$ — многочлен от $q$ степени не выше $m-r-2$.

Пусть $H_{m, m-1}$ — множество остовных деревьев графа $\mathcal{K}_{m, m-1}$, для которых выполняются условия $\deg j = 2$ $\forall j \in V$. Обозначим через $\Gamma(a^k, b^k)$ множество особых вершин многогранника $M(a^k, b^k)$. Так как $|H_{m, m-1}| = |D_{m-1, m}|$, то в силу условий (8.4) и теоремы 2.4 гипотеза Болкера будет доказана, если будет установлено взаимно однозначное соответствие между множествами $H_{m, m-1}$ и $\Gamma = \bigcup\limits_{k \in K(m-r-1)} \Gamma(a^k, b^k)$, а также справедливость соотношения $\Gamma(a^{k^1}, b^{k^1}) \cap \Gamma(a^{k^2}, b^{k^2}) = \varnothing$ для любых двух разных векторов $k^1$ и $k^2$ из $K(m-r-1)$.

Очевидно, что всякая особая вершина $x = \| x_{ij} \|_{m \times (m-1)}$ любого невырожденного транспортного многогранника порядка $m \times (m-1)$ устроена так, что $|\{i \in N_m \colon x_{ij} > 0\}| = 2$ $\forall j \in N_{m-1}$. Поэтому каждой такой вершине можно поставить в соответствие граф $G_x(U, V) \in H_{m, m-1}$.

Покажем, что всякому графу $G(U, V) \in H_{m, m-1}$ можно поставить в соответствие вершину $x$ из $\Gamma$. Через $G(U^j, V^j)$ и $G(\overline{U}^j, \overline{V}^j)$ обозначим деревья, полученные из $G(U, V)$ удалением вершины $j \in V$ вместе с инцидентными ей ребрами. При этом условимся, что вершина с номером 1 принадлежит множеству $U^j$. Для построения необходимой нам вершины рассмотрим следующую систему линейных уравнений, порожденную деревом $G(U, V)$,

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{m} k_s = m - r - 1, \\ \sum_{s \in U^j} k_s = \left[\frac{(m-r+1/m)\,|U^j| - 1}{m}\right] \quad \forall j \in N_{m-1}.\end{gathered} \tag{8.5}$$

Индукцией по $m$ можно показать, что определитель этой системы равен $\pm 1$. Следовательно, система (8.5) имеет единственное и притом целочисленное решение $k^0 = (k_1^0, k_2^0, \ldots, k_m^0)$. Учитывая тот факт, что каждому дереву из $H_{m,\,m-1}$ соответствует единственный базис транспортного многогранника порядка $m \times (m-1)$ (теорема 2.2), методом от противного нетрудно доказать неотрицательность вектора $k^0$. Поэтому $k^0 \in K(m-r-1)$. Отсюда согласно лемме 1.3 матрица $x = \|x_{ij}\|_{m \times (m-1)}$ со следующими компонентами

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ если } (i, j) \notin G(U, V), \\ \sum\limits_{s \in \bar{U}^j} k_s m + (r - 1/m)\,|\bar{U}^j| - m\,|\bar{V}^j|, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } (i, j) \in G(U, V),\ i \in \bar{U}^j, \\ \sum\limits_{s \in U^j} k_s m + 1 + (r - 1/m)\,|U^j| - m\,|V^j|, \\ \qquad\qquad\qquad \text{если } (i, j) \in G(U, V),\ i \in U^j, \end{cases}$$

является вершиной многогранника $M(a^{k^0}, b^{k^0})$. Ясно, что построенная таким образом вершина $x \in \Gamma$ и $G(U, V) = G_x(U, V)$.

Теперь покажем, что если $x_1 \neq x_2$, то $G_{x_1}(U, V) \neq G_{x_2}(U, V)$. Пусть $x_1 \in \Gamma(a^{k^1}, b^{k^1})$, $x_2 \in \Gamma(a^{k^2}, b^{k^2})$, $k^1$, $k^2 \in K(m-r-1)$. Предположим, что $G_{x_1}(U, V) = G_{x_2}(U, V)$. Тогда, на основании леммы 1.3, легко убедиться в том, что векторы $k^1$, $k^2$ удовлетворяют системе (8.5), имеющей единственное решение. Поэтому $k^1 = k^2$. Отсюда вытекает равенство $x_1 = x_2$, что противоречит условию $x_1 \neq x_2$. Теорема 8.3 доказана.

**3. Явные формулы.** Найти явную формулу для подсчета числа $\varphi(m, n)$ до сих пор не удалось. Такие формулы известны лишь для частных случаев, когда $n = mq$, $mq \pm 1$, $mq - 2$. К выводу этих формул мы и переходим.

Предложение 8.4. $\varphi(m, mq+1) = \dfrac{(mq+1)!}{(q!)^m}(mq+1)^{m-2}$.

Доказательство. В силу теорем 2.4 и 7.1 для доказательства нашего предложения достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множеством вершин центрального многогранника $M(a^*, b^*)$ порядка $m \times (mq+1)$ и множеством остовных деревьев $D_{m,\,mq+1}$ (см. 2, п. 2).

Пусть $x$ — некоторая вершина многогранника $M(a^*, b^*)$. Так как всякая компонента $x_{ij}$ этой вершины не превосходит $m$, то число положительных компонент в любой строке матрицы $x$ не меньше числа $q+1$. Отсюда в силу того, что число всех положительных компонент матрицы $x$ равно $m(q+1)$, получаем, что дерево $G_x(U, V) \in D_{m, mq+1}$.

Очевидно, если $x'$, $x''$ — две различные вершины многогранника $M(a^*, b^*)$, то $G_{x'}(U, V) \neq G_{x''}(U, V)$.

Пусть $G(U, V) \in D_{m, mq+1}$. Покажем, что существует вершина многогранника $M(a^*, b^*)$ такая, что

$$G_x(U, V) = G(U, V). \tag{8.6}$$

Удаление любого ребра $(i, j)$ разбивает граф $G(U, V)$ на два дерева. Тот граф, который содержит вершину с номером $i$, будем обозначать через $G(U_{ij}, V_{ij})$. Согласно лемме 1.3 матрица $x = \| x_{ij} \|_{m \times (mq+1)}$ с компонентами

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j) \notin G(U, V), \\ (mq+1)|U_{ij}| - m|V_{ij}|, & \text{если } (i, j) \in G(U, V), \end{cases}$$

является вершиной многогранника $M(a^*, b^*)$. Ясно, что для этой вершины условие (8.6) выполняется. Предложение 8.4 доказано.

Из теоремы 8.3 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 8.5. $\varphi(m, mq-1) = \frac{(mq-1)!}{(q!)^m} m^{m-2}$.

Впервые формулы для числа вершин центрального многогранника порядка $m \times n$ в случаях, когда $n = mq+1$ и $n = mq-1$, были выведены В. Кли и X. Витцчалом [45] в 1968 г. В 1972 г. Е. Д. Болкер [40] показал, что этот многогранник в указанных случаях имеет максимальное число вершин.

Предложение 8.6. $\varphi(m, mq) = \frac{(mq)!}{(q!)^m} m^{m-2} q^{m-1}$.

Доказательство. Из формулы (8.1) следует, что

$$\varphi(m, mq) = \frac{(mq)!}{(q!)^m (m-1)!} \gamma(a', b') q^{m-1},$$

где $a' = (m - 1/m, m - 1/m, \ldots, m - 1/m, 1 - 1/m) \in E_m$, $b' = (m, \ldots, m) \in E_{m-1}$. Отсюда по теореме 8.3 будем иметь $\gamma(a', b') = (m-1)!\, m^{m-2}$, что и доказывает предложение 8.6.

Предложение 8.7 [12]. $\varphi(m, mq-2) = \frac{(mq-2)!}{(q!)^m} \left( m^{m-2} q + \frac{\varphi(m, m-2)}{(m-2)!} \right)$.

Доказательство. Из формулы (8.1) на основании теоремы 8.3 следует, что

$$\varphi(m, mq-2) = \frac{(mq-2)!}{(q!)^m} \left( m^{m-2} q + \frac{\gamma(a', b')}{(m-2)!} \right),$$

где $a' = (m - 1 - 1/m, m - 2 - 1/m, \ldots, m - 2 - 1/m) \in E_m$, $b' = (m, m, \ldots, m) \in E_{m-2}$. Так как всякая вершина многогранника

$M(a', b')$ является особой, то по теореме 7.1 будем иметь равенство $\gamma(a', b')=\varphi(m, m-2)$. Предложение 8.7 доказано.

Согласно предыдущему предложению подсчет числа $\varphi(m, mq-2)$ сводится к подсчету числа $\varphi(m, m-2)$. Формула для числа $\varphi(m, m-2)$ имеет вид [28]

$$\varphi(m, m-2)=\frac{(m-1)!\,(m-2)!}{2}\sum_{(s,\,t)}\frac{s^{s-1}t^{t-1}(m-s-t)^{m-s-t-1}}{s!\,t!\,(m-s-t-1)!},$$

где суммирование ведется по всем числам $s$ и $t$, для которых справедливы неравенства $1\leqslant s\leqslant[m^2/(2m+1)]$, $1\leqslant t\leqslant[m^2/(2m+1)]$, $s+t>[m^2/(2m+1)]$. Вывод этой формулы предоставляется читателю.

## § 9. Минимальное число вершин в классе невырожденных транспортных многогранников с заданным числом граней

Всюду на протяжении этого параграфа будем считать, что компоненты векторов $a$ и $b$ упорядочены следующим образом: $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_m$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$.

Теорема 9.1 [13], [14]. *Пусть $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 3$, $1\leqslant k\leqslant n$. Минимальное число вершин в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m\times n$ с $(m-1)n+k$ гранями равно $n^{m-1}+k(mn-m-n)$.*

Доказательство. Пусть $M(a^0, b^0)$ — невырожденный многогранник порядка $m\times n$ с условиями

$$b^0_{n-k+1}-b^0_n<\sum_{j=1}^{n-1}b^0_j-a^0_1<\min(a^0_m,\ b^0_{n-k}-b^0_n). \tag{9.1}$$

Согласно теореме 3.2′ этот многогранник имеет $(m-1)n+k$ граней. Покажем, что он имеет $n^{m-1}+k(mn-m-n)$ вершин.

Из условий (9.1) следует, что элементы первой строки любой матрицы $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}\in M(a^0, b^0)$ устроены следующим образом:

а) $x_{1j}>0$, $\forall j\in N_{n-k}$;

б) среди элементов $x_{1j}$, $j=n-k+1, \ldots, n$, только один может оказаться равным нулю.

Поэтому $\operatorname{vert} M(a^0, b^0)=\bigcup\limits_{s=1}^{k+1}V_s(a^0, b^0)$, где $V_s(a^0, b^0)$, $1\leqslant s\leqslant k$, — множество тех вершин многогранника $M(a^0, b^0)$, для которых $x_{1,\,n-s+1}=0$, а $V_{k+1}(a^0, b^0)$ — множество вершин многогранника $M(a^0, b^0)$, для которых $x_{1j}>0$, $\forall j\in N_n$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что всякое множество $V_s(a^0, b^0)$, $s\in N_k$, состоит из $(m-1)(n-1)$ элементов, а $V_{k+1}(a^0, b^0)$ — из $(n^{m-1}-k)$ элементов. Следовательно, $f_0(M(a^0, b^0))=n^{m-1}+k(mn-m-n)$.

Теперь покажем, что для числа вершин любого невырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant$

$\leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, с $(m-1)n+k$ гранями справедливо неравенство

$$f_0(M(a,\ b)) \geqslant n^{m-1}+k(mn-m-n). \tag{9.2}$$

Доказательство этого неравенства проведем индукцией по числу $p=m+n+k$. При $p \leqslant 8$ в справедливости неравенства (9.2) можно убедиться непосредственно.

Случай I. Пусть при $m+k<n$ выполняется условие

$$0<\sum_{i=2}^{m} a_i - b_{n-k+1} < \min(a_m,\ b_n), \tag{9.3}$$

а при $m+k \geqslant n$ выполняется либо (9.3), либо

$$0<\sum_{j=2}^{n} b_j - a_{n-k+1} < \min(a_m,\ b_n). \tag{9.4}$$

Пусть $\bar{a}=(\bar{a}_1,\ \ldots,\ \bar{a}_m)$, $\bar{b}=(\bar{b}_1,\ \ldots,\ \bar{b}_n)$, где $\bar{a}_i = a_i/\left(\sum_{s=1}^{m} a_s\right)$, $\bar{b}_j = b_j/\left(\sum_{s=1}^{m} a_s\right)$. Введем следующие обозначения: $a^\lambda = \lambda\bar{a}+(1-\lambda)a^*$, $b^\lambda=\lambda\bar{b}+(1-\lambda)b^*$, где $0 \leqslant \lambda < \infty$. Тогда в силу выполнения одного из условий (9.3) или (9.4) существуют такие числа $\lambda'>1$ и $1 \leqslant l \leqslant k$, что $M(a^{\lambda'},\ b^{\lambda'}) \in \mathfrak{M}(m,\ n,\ k-l)$.

Имеются две возможности.

1) $S(a^{\lambda'},\ b^{\lambda'},\ \bar{a},\ \bar{b})$ — простой спектр. Тогда существует такое число $1<\pi \leqslant \lambda'$, что многогранник $M(a^\pi,\ b^\pi) \in \mathfrak{M}(m,\ n,\ k-1)$. Расположим все элементы спектра $S(a^\pi,\ b^\pi,\ \bar{a},\ \bar{b})$ в порядке возрастания: $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_T$, $T \geqslant 1$. Возьмем любые числа $\pi_t$, удовлетворяющие неравенствам $\lambda_t<\pi_t<\lambda_{t+1}$, $t=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ T$, где $\lambda_0=\pi$, $a^{\lambda_{T+1}}=\bar{a}$, $b^{\lambda_{T+1}}=\bar{b}$. Ясно, что для каждого $t \in N_T$ пара многогранников $M(a^{\pi_{t-1}},\ b^{\pi_{t-1}})$ и $M(a^{\pi_t},\ b^{\pi_t})$ является $(I_{\lambda_t},\ J_{\lambda_t})$-регулярной парой с центром $M(a^{\lambda_t},\ b^{\lambda_t})$. Применяя теорему 6.4 к любой такой паре многогранников и учитывая очевидные неравенства

$$\mu_{I_{\lambda_t},\ J_{\lambda_t}}(a^{\pi_t},\ b^{\pi_t})\,\mu_{I_{\lambda_t},\ J_{\lambda_t}}(a^*,\ b^*)>0 \quad \forall t \in N_T,$$

получаем

$$f_0(M(a^{\pi_t},\ b^{\pi_t}))=f_0(M(a^{\pi_{t-1}},\ b^{\pi_{t-1}}))+ \\ +\delta_{I_{\lambda_t},\ J_{\lambda_t}}(a^{\lambda_t},\ b^{\lambda_t})\,\big|\,n\,|I_{\lambda_t}|-m\,|J_{\lambda_t}|\,\big| \quad \forall t \in N_T.$$

Принимая во внимание неравенство

$$\sum_{t=1}^{T} \delta_{I_{\lambda_t},\ J_{\lambda_t}}(a^{\lambda_t},\ b^{\lambda_t})\,\big|\,n\,|I_{\lambda_t}|-m\,|J_{\lambda_t}|\,\big| \geqslant mn-m-n,$$

будем иметь

$$f_0(M(\bar{a},\ \bar{b})) \geqslant f_0(M(a^\pi,\ b^\pi))+mn-m-n.$$

Отсюда, поскольку $f_0(M(a, b)) = f_0(M(\bar{a}, \bar{b}))$, а по предположению индукции,

$$f_0(M(a^\pi, b^\pi)) \geqslant n^{m-1} + (k-1)(mn - m - n),$$

то неравенство (9.2) доказано.

2) Спектр $S(a^{\lambda'}, b^{\lambda'}, \bar{a}, \bar{b})$ не является простым. Тогда, на основании теоремы 6.10 и следствия 6.3, для всякого числа $\rho^*$, удовлетворяющего неравенству

$$0 < \rho^* \leqslant \min\left( \min_{(I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}} \frac{|\mu_{I,J}(\bar{a}, \bar{b})|}{m+n}, \min_{(I, J) \in \mathfrak{A}_{m\times n}} \frac{|\mu_{I,J}(a^{\lambda'}, b^{\lambda'})|}{m+n} \right),$$

существует многогранник $M(a', b') \in Q^{\rho^*}(a^{\lambda'}, b^{\lambda'})$ такой, что а) $S(a', b', a^*, b^*)$ — простой спектр; б) $f_0(M(a', b')) = f_0(M(a^{\lambda'}, b^{\lambda'}))$; в) $M(a', b') \in \mathfrak{M}(m, n, k-l)$, где $1 \leqslant l \leqslant k$.

В силу выбора числа $\rho^*$ найдется число $0 < \pi < 1$ такое, что многогранник $M(a^\pi, b^\pi)$, определенный векторами $a^\pi = \pi a' + (1-\pi) a^*$ и $b^\pi = \pi b' + (1-\pi) b^*$, принадлежит к $Q^{\rho^*}(\bar{a}, \bar{b})$. Согласно следствия 6.3 многогранник $M(a^\pi, b^\pi) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$ и $f_0(M(a^\pi, b^\pi)) = f_0(M(\bar{a}, \bar{b}))$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве первого подслучая, приходим к выводу, что

$$f_0(M(a, b)) > n^{m-1} + k(mn - m - n).$$

Случай II. Пусть теперь для многогранника $M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$ условия (9.3) и (9.4) не выполняются. Рассмотрим две возможности.

1) $a_m < b_n$. Прежде всего отметим, что в этом случае $m \geqslant 3$. Нетрудно проверить, что всякий многогранник $M(a^m, b^j)$, $j \in N_n$, определенный векторами $a^m = (a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ и $b^j = (b_1, b_2, \ldots \ldots, b_{j-1}, b_j - a_m, b_{j+1}, \ldots, b_n)$, принадлежит к классу $\mathfrak{M}(m-1, n, k)$. Поэтому, по предположению индукции, получаем неравенства

$$f_0(M(a, b)) \geqslant \sum_{j=1}^{n} f_0(M(a^m, b^j)) \geqslant$$
$$\geqslant n(n^{m-2} + k(mn - 2n - m + 1)) > n^{m-1} + k(mn - m - n).$$

Последнее неравенство справедливо при $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

2) $a_m > b_n$. Всякий многогранник $M(a^i, b^n)$, $i \in N_m$, заданный векторами $a^i = (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - b_n, a_{i+1}, \ldots, a_m)$ и $b^n = (b_1, b_2, \ldots \ldots, b_{n-1})$, принадлежит либо классу $\mathfrak{M}(m, n-1, k-1)$, либо классу $\mathfrak{M}(m, n-1, k)$. Следовательно, по предположению индукции, при $n \geqslant 5$ получаем

$$f_0(M(a, b)) \geqslant \sum_{i=1}^{m} f_0(M(a^i, b^n)) \geqslant$$
$$\geqslant m((n-1)^{m-1} + (k-1)(mn - 2m - n + 1)) > n^{m-1} + k(mn - m - n).$$

Справедливость последнего неравенства для $m=2, 3, 4, 5$ проверяется непосредственно, а для $m \geqslant 6$ — при помощи известных неравенств

$$\left(1-\frac{1}{m}\right)^{m-1} > \frac{1}{3}, \quad m=6, 7, 8, \ldots$$

Из теорем 5.1 и 9.1 вытекает следствие.

Следствие 9.2 [6]. *Не существует невырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, для числа вершин которого выполняются неравенства*

$$n^{m-1} < f_0(M(a, b)) < n^{m-1} + mn - m - n.$$

Иными словами, число $n^{m-1}+mn-m-n$ является следующим за минимальным («почти» минимальным) числом вершин в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$.

## § 10. Асимптотика

В этом параграфе рассматривается асимптотическое поведение некоторых классов транспортных многогранников. Показано, что с ростом порядка отношение числа многогранников с максимальным количеством граней к общему числу многогранников стремится к единице, а отношение числа многогранников с минимальным, либо максимальным количеством вершин — к нулю.

Рассмотрим в $E_k$ открытый регулярный симплекс

$$U_k = \left\{c \in E_k \colon \sum_{i=1}^{k} c_i = 1, \quad c_i > 0 \quad \forall i \in N_k\right\}.$$

Положим

$$W_{m\times n} = U_m \times U_n = \{(a, b)\colon \ a \in U_m, \quad b \in U_n\}.$$

Очевидно, что всякой паре векторов $(a, b) \in W_{m\times n}$ соответствует транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$. Пусть $W^{\xi}_{m\times n}$ — подмножество тех пар $(a, b)$ из $W_{m\times n}$, для которых соответствующие многогранники обладают свойством $\xi$. Будем говорить, что *почти все* транспортные многогранники обладают *свойством* $\xi$, если

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \frac{\mu\left(W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu\left(W_{m\times n}\right)} = 1,$$

и *почти нет* таких многогранников, если этот предел равен нулю. Здесь и в дальнейшем $\mu(W)$ — мера Лебега множества $W$ в пространстве

$$E_{m+n-1} = \left\{(a, b)\colon \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 1\right\}.$$

Теорема 10.1. *Почти все транспортные многогранники имеют максимальное число граней.*

Доказательство. Пусть $\xi$ — свойство многогранника иметь максимальное число граней. Тогда согласно теореме 3.2 получаем

$$W^{\xi}_{m\times n}=\left\{(a,\ b)\in W_{m\times n}\colon \max_{1\leqslant i\leqslant m} a_i+\max_{1\leqslant j\leqslant n} b_j\leqslant 1\right\}.$$

Положим

$$U_k(x)=\left\{c\in U_k\colon \max_{1\leqslant i\leqslant k} c_i>x\right\},\quad \bar{U}_k(x)=\left\{c\in U_k\colon \max_{1\leqslant i\leqslant k} c_i=x\right\}.$$

В этих обозначениях, на основании очевидного неравенства $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} c_i\geqslant 1/k$, имеем

$$W_{m\times n}\setminus W^{\xi}_{m\times n}=\left(U_m\left(\frac{n-1}{n}\right)\times U_n\right)\bigcup \bigcup_{1/m\leqslant x\leqslant (n-1)/n}(\bar{U}_m(x)\times U_n(1-x)).$$

Отсюда, используя известные свойства меры $\mu(W\times V)=\mu(W)\times\times\mu(V)$; $\mu(W\cup V)=\mu(W)+\mu(V)$, если $W\cap V=\varnothing$; $\mu(W\setminus V)=\mu(W)-\mu(V)$, если $V\subseteq W$; и принимая во внимание равенство

$$F_k(x)=\frac{\mu(U_k(x))}{\mu(U_k)}=\sum_{i=1}^{[1/x]}(-1)^{i-1}\binom{k}{i}(1-ix)^{k-1},$$

доказанное в [35], находим

$$\frac{\mu\left(W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu(W_{m\times n})}=1-\frac{m}{n^{m-1}}+\int_{1/m}^{(n-1)/n}F'_m(x)F_n(1-x)\,dx,$$

где $F'_m(x)$ — производная функции $F_m(x)$.

Разбивая интервал интегрирования на два интервала $[1/m,\ 1/2]$ и $[1/2,\ (n-1)/n]$, и применяя к первому интегралу метод интегрирования по частям, получим

$$\int_{1/m}^{(n-1)/n}F'_m(x)F_n(1-x)\,dx=\frac{mn}{2^{m+n-2}}-\frac{n}{m^{n-1}}-\int_{1/m}^{1/2}F_m(x)F'_n(1-x)\,dx+\int_{1/2}^{(n-1)/n}F'_m(x)F_n(1-x)\,dx.$$

Поэтому, учитывая равенства $F_k(x)=k(1-x)^{k-1}$ при $1/2\leqslant x\leqslant 1$, $F_k(1-x)=kx^{k-1}$ при $1/k\leqslant x\leqslant 1/2$, находим

$$\frac{\mu\left(W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu(W_{m\times n})}\geqslant 1-\frac{m}{n^{m-1}}+\frac{mn}{2^{m+n-2}}-\frac{n}{m^{n-1}}-\int_{1/m}^{1/2}n(n-1)x^{n-2}\,dx-\int_{1/2}^{(n-1)/n}m(m-1)(1-x)^{m-2}\,dx=\left(1-\frac{m}{2^{m-1}}\right)\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}\right).$$

Переходя к пределу при $m$, $n \to \infty$, имея в виду, что $\mu(W^{\xi}_{m\times n}) \leqslant \mu(W_{m\times n})$, получаем утверждение теоремы 10.1.

Из теоремы 10.1 и теоремы 5.1 непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 10.2. *Почти нет невырожденных транспортных многогранников с минимальным числом вершин.*

В [40] Е. Д. Болкером был поставлен следующий вопрос: верно ли, что почти все транспортные многогранники имеют максимальное число вершин? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказанная А. П. Крачковским [29].

Теорема 10.3. *Почти нет транспортных многогранников с максимальным числом вершин.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $m \leqslant n$. Определим множество $W^{\xi}_{m\times n} \subseteq W_{m\times n}$, считая, что $(a, b) \in W^{\xi}_{m\times n}$, если компоненты векторов $a$ и $b$ удовлетворяют условиям:

$$a_{i_1} + \sum_{r=1}^{n-2} b_{j_r} < 1, \quad b_{j_1} + \sum_{r=1}^{m-2} a_{i_r} < 1 \quad \text{при} \quad m = n;$$

$$\sum_{r=1}^{q-1} b_{j_r} + \sum_{r=1}^{m-1} a_{i_r} < 1, \quad a_{i_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} b_{j_r} < 1 \quad \text{при} \quad n = mq,\ q > 1;$$

$$\sum_{r=1}^{q} b_{j_r} + \sum_{r=1}^{m-1} a_{i_r} < 1, \quad a_{i_1} + \sum_{r=1}^{n-q-1} b_{j_r} < 1$$

$$\text{при } n = mq + r,\ q \geqslant 1,\ 1 \leqslant r \leqslant m-1,$$

где $a_{i_1} \geqslant a_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant a_{i_m}$, $b_{j_1} \geqslant b_{j_2} \geqslant \ldots \geqslant b_{j_n}$.

Согласно теореме 7.9 всякая пара $(a, b) \in W_{m\times n}$, для которой соответствующий многогранник $M(a, b)$ имеет максимальное число вершин, принадлежит к $W^{\xi}_{m\times n}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что $\lim\limits_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} \mu(W_{m\times n} \setminus W^{\xi}_{m\times n})/\mu(W_{m\times n}) = 1$.

Рассмотрим множество векторов $U^t_k(x) = \left\{c \in U_k\colon \sum\limits_{r=1}^{t} c_{i_r} > x,\right.$ $\left. c_{i_1} \geqslant c_{i_2} \geqslant \ldots \geqslant c_{i_k}\right\}$, $t \leqslant k$. На основании очевидных неравенств $\sum\limits_{r=1}^{t} c_{i_r} \geqslant t/k$ $\forall c \in U_k$, справедливы включения:

$$U^{m-2}_m\left(\frac{n-1}{n}\right) \times U_n \subseteq W_{m\times n} \setminus W^{\xi}_{m\times n} \quad \text{при} \quad m = n,$$

$$U^{m-1}_m\left(\frac{n-q+1}{n}\right) \times U_n \subseteq W_{m\times n} \setminus W^{\xi}_{m\times n} \quad \text{при} \quad n = mq, \quad q > 1,$$

$$U^{m-1}_m\left(\frac{n-q}{n}\right) \times U_n \subseteq W_{m\times n} \setminus W^{\xi}_{m\times n} \quad \text{при} \quad n = mq + r,\ r,\ q \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\frac{\mu\left(W_{m\times n}\setminus W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu\left(W_{m\times n}\right)}\geqslant\begin{cases}\dfrac{\mu\left(U_m^{m-2}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)}{\mu\left(U_m\right)} & \text{при}\quad m=n,\\[2ex] \dfrac{\mu\left(U_m^{m-1}\left(\frac{n-q+1}{n}\right)\right)}{\mu\left(U_m\right)} & \text{при}\quad n=mq,\quad q>1,\\[2ex] \dfrac{\mu\left(U_m^{m-1}\left(\frac{n-q}{n}\right)\right)}{\mu\left(U_m\right)} & \text{при}\quad n=mq+r,\ r,\ q\geqslant 1.\end{cases}$$

Теперь, воспользовавшись равенством

$$\frac{\mu\left(U_k^t(x)\right)}{\mu\left(U_k\right)}=1-\sum_{t/x\leqslant i\leqslant k}(-1)^{k-i}\frac{k!\,(ix-t)^{k-1}}{(k-i)!\,i!\,(i-t)!\,(i-t)^{t-1}\,t^{k-t-1}}$$

при $t/k\leqslant x\leqslant 1$, полученным в [47], находим

$$\frac{\mu\left(W_{m\times n}\setminus W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu\left(W_{m\times n}\right)}\geqslant$$

$$\geqslant\begin{cases}1-\dfrac{1}{2^{m-2}}\dfrac{m-3}{m-2}+\dfrac{1}{(m-2)\,m^{m-2}} & \text{при}\quad m=n,\\[2ex] 1-\dfrac{1}{q^{m-1}} & \text{при}\quad n=mq,\quad q>1,\\[2ex] 1-\left(\dfrac{r}{mq+r}\right)^{m-1} & \text{при}\quad n=mq+r,\quad r,\ q\geqslant 1.\end{cases}$$

Тем самым при $m\leqslant n$ справедливо равенство

$$\lim_{\substack{m\to\infty\\ n\to\infty}}\frac{\mu\left(W^{\xi}_{m\times n}\right)}{\mu\left(W_{m\times n}\right)}=0.$$

Совершенно аналогично доказывается это предельное равенство и при $m\geqslant n$. А теперь, проводя очевидные рассуждения, основанные на определении предела, убеждаемся в справедливости теоремы 10.3.

### Задачи и дополнения

1. Пусть $M(a,\ b)$ — вырожденный транспортный многогранник порядка $m\times n$. Показать, что существует такое число $\delta>0$, что при любом $\varepsilon$, удовлетворяющим условию $0<\varepsilon\leqslant\delta$, многогранник $M(a(\varepsilon),\ b(\varepsilon))$, определенный векторами $a(\varepsilon)=(a_1+\varepsilon,\ a_2+\varepsilon,\ \ldots,\ a_m+\varepsilon)$ и $b(\varepsilon)=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_{n-1},\ b_n+m\varepsilon)$, будет невырожденным.

2 [50]. Если $M(a,\ b)$ — транспортный многогранник порядка $m\times n$ с целочисленными компонентами векторов $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$ и $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$, то многогранник $M(a',\ b')$, определенный векторами $a'=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{m-1},\ a_m+1)$, $b'=(b_1+1/n,\ b_2+1/n,\ \ldots,\ b_n+1/n)$, никогда не может быть вырожденным.

3. Если транспортный многогранник $M(a,\ b)$ порядка $m\times n$ имеет единственную вырожденную вершину, то существует только одна пара индексов $(s,\ t)\in N_m\times N_n$ такая, что $a_s+b_t=\sum\limits_{i=1}^{m}a_i$.

4. Если матрица $x = \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a, b)$ является вершиной, то она содержит по крайней мере $\max(m, n) - \min(m, n) + 1$ простых линий (см. § 6, п. 1).

5. Пусть $B = \left(R^{i_1,\, j_1}, R^{i_2,\, j_2}, \ldots, R^{i_{m+n-1},\, j_{m+n-1}}\right)$ — некоторый базис транспортного многогранника порядка $m\times n$, а $\bar{B}$ — $((m+n-1)\times(m+n-1))$-матрица, которая получена из матрицы $B$ вычеркиванием любой строки. Показать, что путем перестановки строк и столбцов матрицы $\bar{B}$ она может быть приведена к треугольной матрице с компонентами $r_{ii} = 1$ $\forall i \in N_{m+n-1}$, а $r_{ij} = 0$, если $i > j$.

6. Следующие свойства двудольного графа $G(U, V)$, $|U| = m$, $|V| = n$, эквивалентны:

(1) связный граф без циклов;

(2) граф с $m+n-1$ ребрами без циклов;

(3) связный граф с $m+n-1$ ребрами;

(4) граф без циклов, но добавление любого ребра приводит к единственному циклу;

(5) граф связный, но удаление любого ребра нарушает его связность;

(6) любая пара вершин графа соединена единственной цепью.

7. Показать, что:

1) точка $x$ многогранника $M(a, b)$ является вершиной этого многогранника тогда и только тогда, когда двудольный граф $G_x(U, V)$ не имеет циклов,

2) если граф $G_x(U, V)$ является лесом, состоящим из $t$ деревьев, то вершина $x$ многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$ имеет $m+n-t$ ненулевых элементов.

8 [49]. Граф называется *n-дольным графом порядка* $t_1\times t_2\times\ldots\times t_n$, если множество его вершин разбивается на $n$ попарно непересекающихся подмножеств $U_1, U_2, \ldots, U_n$ таких, что $|U_i| = t_i$ $\forall i \in N_n$, а всякое ребро соединяет только вершины из различных подмножеств. Число остовных деревьев полного помеченного $n$-дольного графа порядка $t_1\times t_2\times\ldots\times t_n$ выражается формулой

$$\Delta(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{n-2} \prod_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i - t_j\right)^{t_j - 1},$$

которая является обобщением формулы (2.2).

9 [4]. Убедиться, что для числа базисов $\beta(m, n)$ транспортного многогранника порядка $m\times n$ справедливо рекуррентное равенство ($m \leqslant n$)

$$\beta(m, n) = \sum_{j=1}^{m-1} \binom{n}{j} m^{n-j} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \binom{j}{r} m^r \beta(m, j-r).$$

Отсюда получить формулу

$$\beta(m, n) = m^{n-1} \sum_{j=1}^{m-1} \binom{n}{j} \sum_{r=0}^{j-1} (-1)^r \binom{j}{r} (j-r)^{m-1}.$$

10 [7]. Рассмотрим транспортную задачу:

$$\min\left\{F(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\colon\ x = \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a, b)\right\},$$

где $c_{ij}$ — заданные действительные числа. Точку многогранника $M(a, b)$, в которой достигается минимум функции $F(x)$, будем называть *оптимальным решением транспортной задачи*. Справедливы следующие утверждения.

1) Если существует пара $(l, t) \in N_m \times N_n$ такая, что $c_{it} - c_{lt} > \max\limits_{j\neq t}(c_{ij} - c_{lj})$, $i = 1, 2, \ldots, l-1, l+1, \ldots, m$, то в любом оптимальном решении транспортной задачи компонента $x_{lt} = \min(a_l, b_t)$.

2) Пусть $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}$ — такая точка многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, что $x_{ij}=0\ \forall (i, j)\in D\times E$, где $\varnothing\neq D\subset N_m$, $\varnothing\neq E\subset N_n$. Если существует пара $(s, t)\in D\times E$ с условием

$$c_{st}+\min_{(i,j)\in\bar D\times\bar E} c_{ij}>\max_{(i,j)\in D\times\bar E} c_{ij}+\max_{(i,j)\in\bar D\times E} c_{ij},$$

то в любом оптимальном решении транспортной задачи компонента $x_{st}=0$.

11. Полагая $\delta^q_{pj}=c_{pj}-c_{qj}$, $p\neq q$, $j\in N_n$, будем считать, что $\delta^q_{p1}\geqslant\delta^q_{p2}\geqslant\ldots$ $\ldots\geqslant\delta^q_{pn}$. Введем обозначение: $S^q_p=\{j\in N_n\colon\ j\leqslant k\}$, где число $k$ удовлетворяет неравенствам $\sum\limits_{j=1}^{k} b_j\leqslant a_q<\sum\limits_{j=1}^{k+1} b_j$. Справедливы следующие утверждения:

1) [31] Если для некоторой пары $p,\ q\in N_m$ множество $S^q_p\neq\varnothing$, то существует оптимальное решение транспортной задачи с компонентами $x_{pj}=0$ $\forall j\in S^q_p$.

2) [7] Если для некоторой пары $p,\ q\in N_m$ множество $\underline{S}^q_p=$ $=\left\{j\in S^q_p\colon\ \delta^q_{pj}>\delta^q_{p,\,|S^q_p|+1}\right\}\neq\varnothing$, то в любом оптимальном решении транспортной задачи $x_{pj}=0\ \forall j\in\underline{S}^q_p$.

3) [22] Если для некоторого $q\in N_m$ множество $S^q=\bigcap\limits_{\substack{p\in N_m\\ p\neq q}} S^q_p\neq\varnothing$, то существует оптимальное решение транспортной задачи, в котором $x_{qj}=b_j$ $\forall j\in S^q$.

4) Пусть существуют такие непустые множества $L_1\subset N_m$, $P_1=$ $=\bigcup\limits_{q\in L_1}\bigcap\limits_{p\in L_2} S^q_p\subset N_n$, что $\sum\limits_{q\in L_1} a_q=\sum\limits_{j\in P_1} b_j$. Тогда решение транспортной задачи сводится к решению следующих подзадач $T_s\,(s=1,\ 2)$:

$$\min\left\{\sum_{i\in L_s}\sum_{j\in P_s} c_{ij}x_{ij}\colon\ \sum_{i\in L_s} x_{ij}=b_j\ \forall j\in P_s,\ \sum_{j\in P_s} x_{ij}=a_i\ \forall i\in L_s,\right.$$
$$\left. x_{ij}\geqslant 0\ \forall (i, j)\in L_s\times P_s\right\},$$

где $L_2=N_m\setminus L_1$, $P_2=N_n\setminus P_1$.

12. Зафиксируем некоторое $p\in N_m$. Найдем значения $x^0_{ij}$ для всякого $i\in\{1, 2, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m\}$ из решения подзадач

$$\min\left\{\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}-c_{pj})\,x_{ij}\colon\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i,\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant b_j\ \forall j\in N_n\right\},$$

а для $i=p$ — согласно формуле $x^0_{pj}=b_j-\sum\limits_{i\neq p} x^0_{ij}$.

Показать, что матрица $x^0=\|x^0_{ij}\|_{m\times n}\in M(a,\ b)$ является оптимальным решением транспортной задачи тогда и только тогда, когда $x^0_{pj}\geqslant 0\ \forall j\in N_n$.

13. Матрица $\|x_{ij}\|_{m\times n}\in M(a,\ b)$ является оптимальным решением транспортной задачи (см. задачу 10) тогда и только тогда, когда найдутся такие числа $u_i$, $i\in N_m$, $v_j$, $j\in N_n$, что

$$u_i+v_j=c_{ij},\quad \text{если}\quad x_{ij}>0,$$
$$u_i+v_j\leqslant c_{ij},\quad \text{если}\quad x_{ij}=0.$$

Это утверждение является широко известным критерием оптимальности в транспортной задаче.

14. Пусть $R \subset N_m$. Множество $\left\{x = \|x_{ij}\|_{m\times n}: \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \forall j \in N_n,\right.$ $\left.\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ \forall i \in R, \ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \ \forall i \in \bar{R}, \ x_{ij} \geqslant 0 \ \forall (i, j) \in N_m \times N_n\right\} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\sum_{i \in R} a_i \leqslant \sum_{j \in N_n} b_j \leqslant \sum_{i \in N_m} a_i$.

15 [37]. Пусть $\varepsilon > 0$, $(p, q) \in N_m \times N_n$. Две матрицы $\|c^1_{ij}\|_{m\times n}$, $\|c^2_{ij}\|_{m\times n}$ называются *ε-смежными относительно пары* $(p, q)$, если выполняются условия $c^1_{ij} = c^2_{ij}$ для всех $(i, j) \neq (p, q)$ и $0 \leqslant |c^1_{pq} - c^2_{pq}| < \varepsilon$. Две транспортные задачи называются ε-смежными относительно пары $(p, q)$, если области определения этих задач представляют собой один и тот же многогранник $M(a, b)$, а матрицы стоимости перевозок являются ε-смежными относительно пары $(p, q)$. Доказать, что

1) каковы бы ни были числа $\varepsilon > 0$, $N > 0$ и пара $(p, q) \in N_m \times N_n$, всегда можно построить две ε-смежные относительно пары $(p, q)$ транспортные задачи такие, что если $\|x_{ij}\|_{m\times n}$ — какое-либо оптимальное решение одной из этих задач и $\|x'_{ij}\|_{m\times n}$ — какое-либо оптимальное решение другой, то $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |x_{ij} - x'_{ij}| \geqslant N$;

2) для любой пары $(p, q) \in N_m \times N_n$ и любого числа $\varepsilon > 0$ всегда можно построить две ε-смежные относительно пары $(p, q)$ транспортные задачи, имеющие общее оптимальное решение.

16. Рассмотрим две транспортные задачи $T_s$ $(s = 1, 2)$: $\min\left\{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \times\right.$ $\left.\times\, x^s_{ij}: \|x^s_{ij}\|_{m\times n} \in M(a^s b^s)\right\}$, где $\sum_{i=1}^{m} a^1_i = \sum_{i=1}^{m} a^2_i$. Пусть $\|x^{*s}_{ij}\|_{m\times n}$ — оптимальное решение задачи $T_s$, $s = 1, 2$. Справедливы следующие утверждения.

1) [34] Если $\sum_{i=1}^{m} |a^2_i - a^1_i| \leqslant \Delta$, $\sum_{j=1}^{n} |b^2_j - b^1_j| \leqslant \Delta$, то $|x^{*2}_{ij} - x^{*1}_{ij}| \leqslant \Delta$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_n$.

2) [43] Если $a^1_i \leqslant a^2_i$ $\forall i \in N_{m-1}$, $a^1_m \geqslant a^2_m$, $b^1_j = b^2_j$ $\forall j \in N_n$, то $x^{*1}_{mj} \geqslant x^{*2}_{mj}$ $\forall j \in N_n$.

17. Пусть $U = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_{mn}, j_{mn})\}$ — некоторая последовательность всех пар из множества $N_m \times N_n$. Показать, что следующая процедура строит вершину транспортного многогранника $M(a, b)$: в порядке следования пар из $U$ определяем $x_{i_1, j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$, $x_{i_t, j_t} = \min\left(a_{i_t} - \sum_{(i_t, k)} x_{i_t, k}, \ b_{j_t} - \sum_{(k, j_t)} x_{k, j_t}\right)$, где суммирование ведется по всем тем парам $(i_t, k)$ и $(k, j_t)$, которые в последовательности $U$ лежат левее $(i_t, j_t)$.

В случае, когда $U = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (1, n), (2, 1), (2, 2), \ldots, (2, n), \ldots$ $\ldots, (m, 1), (m, 2), \ldots, (m, n)\}$, описанную процедуру принято называть методом северо-западного угла, а в случае, когда $U = \{(m, n), (m, n-1), \ldots$ $\ldots, (m, 1), (m-1, n), (m-1, n-1), \ldots, (m-1, 1), \ldots, (1, n), (1, n-1) \ldots$ $\ldots, (1, 1)\}$, — методом северо-восточного угла.

18. Для всякого многогранника $M(a, b)$ из класса $\mathfrak{M}(m, n, 0)$, $2 \leqslant m \leqslant n$, справедливы равенства

$$f_i(M(a, b)) = \binom{(m-1)\,n}{mn - m - n + 1 - i}, \quad i = mn - 2m - n + 2, \ \ldots, \ mn - m - n.$$

19 [46]. Решение задачи минимизации функции $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \geqslant a_i, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=m_1+1,\ m_1+2,\ \ldots,\ m_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i=m_2+1,\ m_2+2,\ \ldots,\ m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant b_j, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_1,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=n_1+1,\ n_1+2,\ \ldots,\ n_2,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \leqslant b_j, \quad j=n_2+1,\ n_2+2,\ \ldots,\ n,$$

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall\,(i,\ j) \in N_m \times N_n$$

может быть сведено к решению следующей транспортной задачи:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1} c_{ij}x_{ij}:\ \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij}=a_i \quad \forall i \in N_{m+1},\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m+1} x_{ij}=b_j \quad \forall j \in N_{n+1}, \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall\,(i,\ j) \in N_{m+1} \times N_{n+1}\right\},$$

где

$$a_{m+1}=\alpha-\sum_{i=1}^{m} a_i, \quad b_{n+1}=\alpha-\sum_{j=1}^{n} b_j, \quad \alpha \geqslant 2\sum_{j=1}^{n} b_j,$$
$$c_{i,\,n+1}=\min_{1\leqslant j\leqslant n_1} c_{ij}, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m_2,$$
$$c_{i,\,n+1}=0, \quad i=m_2+1,\ m_2+2,\ \ldots,\ m,$$
$$c_{m+1,\,j}=\min_{1\leqslant i\leqslant m_1} c_{ij}, \quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n_2,$$
$$c_{m+1,\,j}=0, \quad j=n_2+1,\ n_2+2,\ \ldots,\ n,$$
$$c_{m+1,\,n+1}=0.$$

Соответствие между оптимальными решениями этих задач устанавливается формулами

$$x_{ij}^{*}=\begin{cases} x_{ij}^{**}+x_{i,\,n+1}^{**}, & \text{если } i \in N_{m_2},\ \ j \in \left\{t:\ c_{it}=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n_1} c_{ij}\right\},\\ x_{ij}^{**}+x_{m+1,\,j}^{**}, & \text{если } i \in \left\{r:\ c_{rj}=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant m_1} c_{ij}\right\},\ \ j \in N_{n_2},\\ x_{ij}^{**} & \text{для всех остальных индексов,}\end{cases}$$

где $\|x_{ij}^{*}\|_{m\times n}$ — оптимальное решение исходной задачи, а $\|x_{ij}^{**}\|_{(m+1)\times(n+1)}$ — оптимальное решение новой задачи.

20 [2,3]. Функция $F(x)$ называется *вогнутой по Шуру* на выпуклом множестве $M$, если выполняются условия: а) $F(x)$ — строго вогнутая функция на выпуклом множестве $M$, т. е. функция, обладающая свойством $F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) > \lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\ \forall x_1,\ x_2 \in M,\ \lambda \in (0,\ 1)$; б) $F(x)$ — симметрическая функция, т. е. такая функция, которая не меняет своего значения при перестановке компонент вектора $x$.

Вершина $x^0$ многогранника $M(a, b)$ называется *точкой локального минимума* функции $F(x)$, если $F(x^0) \leqslant F(x)$ для всех вершин $x$, смежных с вершиной $x^0$.

Вершину $x^0 \in M(a, b)$ будем называть *идеальной*, если для всякой тройки отличных от нуля компонент $x^0_{kp}$, $x^0_{kq}$, $x^0_{tq}$ выполняется одно из неравенств

$$x^0_{kp} \geqslant x^0_{kq} + x^0_{tq}, \quad x^0_{tq} \geqslant x^0_{kp} + x^0_{kq}.$$

Показать, что вершина транспортного многогранника является точкой локального минимума функции, вогнутой по Шуру, тогда и только тогда, когда она идеальная. Отсюда вытекает, что расположение точек локального минимума функции, вогнутой по Шуру, на транспортном многограннике не зависит от поведения функции, а зависит лишь от геометрии этого многогранника.

21 [1]. Алгоритм построения вершины транспортного многогранника $M(a, b)$ назовем *методом наибольшего элемента*, если последовательность $U$ (см. задачу 17) определяется следующим правилом: $i_1$ есть номер наибольшей компоненты вектора $a$, а $j_1$ — номер наибольшей компоненты вектора $b$ и далее рекуррентно.

Показать, что вершина транспортного многогранника, построенная методом наибольшего элемента, является точкой локального минимума функции, вогнутой по Шуру (см. предыдущую задачу).

22 [5, 19]. Доказать, что вершина транспортного многогранника, построенная методом наибольшего элемента, является точкой глобального минимума функции, вогнутой по Шуру, на любом многограннике с минимальным числом граней.

23 [25]. Пусть $(s, q), (r, t) \in N_m \times N_n$, $(s, q) \neq (r, t)$. Множество $\{x = \| x_{ij} \|_{m \times n} \in M(a, b)\colon x_{sq} = x_{rt} = 0\}$ является $(d-2)$-гранью многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geqslant 2$, $mn > 4$, тогда и только тогда, когда выполняются условия: $a_s < \sum\limits_{j \neq q} b_j$, $a_r < \sum\limits_{j \neq t} b_j$ при $s \neq r$, $q \neq t$; $a_s < \sum\limits_{j \neq q, t} b_j$ при $s = r$, $q \neq t$; $b_q < \sum\limits_{i \neq s, r} a_i$ при $s \neq r$, $q = t$.

Показать, что

1) невырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, имеет минимальное число $\binom{(m-1)n}{2}$ $(d-2)$-граней тогда и только тогда, когда он обладает минимальным числом вершин;

2) транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 4$, имеет максимальное число $\binom{mn}{2}$ $(d-2)$-граней тогда и только тогда, когда $a_1 < \sum\limits_{j=3}^{n} b_j$, $b_1 < \sum\limits_{i=3}^{m} a_i$, где $a_1 \geqslant a_2 \ldots \geqslant a_m$, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$;

3) всякий транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 4$, с минимальным или максимальным числом вершин имеет максимальное число $(d-2)$-граней (обратное, вообще говоря, не верно);

4) число $(d-2)$-граней всякого невырожденного транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, $mn > 9$, с $(m-1)n + k$ гранями $0 \leqslant k \leqslant n)$ удовлетворяет неравенствам

$$\binom{(m-1)n}{2} + k(m-1)(n-1) \leqslant f_{d-2}(M(a, b)) \leqslant \binom{(m-1)n+k}{2},$$

причем нижняя и верхняя оценки достижимы.

24. Пусть $(s_1, q_1), (s_2, q_2), (s_3, q_3) \in N_m \times N_n$, $(s_1, q_1) \neq (s_2, q_2)$, $(s_1, q_1) \neq (s_3, q_3)$, $(s_2, q_2) \neq (s_3, q_3)$. По аналогии с задачей 23 найти условия, при выполнении которых множество $\{x = \| x_{ij} \|_{m \times n} \in M(a, b)\colon x_{s_1 q_1} = x_{s_2 q_2} = x_{s_3 q_3} = 0\}$

будет $(d-3)$-гранью транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$ и показать, что:

1) транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n, m, n\geqslant 5$, имеет максимальное число $\binom{mn}{3}$ $(d-3)$-граней тогда и только тогда, когда $a_1 < \sum_{j=4}^{n} b_j$, $b_1 < \sum_{i=4}^{m} a_i$, где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_m$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$;

2) максимальное число $(d-3)$-граней в классе $\mathfrak{M}(m, n, k)$, $4\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 5$, равно числу $\binom{(m-1)n+k}{3}$.

25. Доказать следующие свойства эквивалентности транспортных многогранников:

1) $M(a, b)\sim M(\alpha a, \alpha b)$ для любого $\alpha>0$;

2) если $M(a^0, b^0)\sim M(a^1, b^1)$, то $M(a^0, b^0)\sim M(a^0+a^1, b^0+b^1)$ (обратное утверждение не верно).

26. Справедливы следующие утверждения.

1) Число классов эквивалентности, на которые разбивается множество $\mathfrak{M}(m, n, 1)$, $2\leqslant m<n$, равно $mn(2^{m-1}-1)$ при $m<n-1$ и $-n(n-1)\times\times(2^{n-2}-1)$ при $m=n-1$.

2) Число $\sigma(m, n)$ классов, на которые разбивается множество всех транспортных многогранников порядка $m\times n$ с максимальным числом вершин при $(m, n)\neq 1$, удовлетворяет неравенствам

$$2\,|\,\mathfrak{a}(a^*, b^*)\,|\leqslant\sigma(m, n)\leqslant 2^{|\mathfrak{a}(a^*, b^*)|},$$

причем $|\,\mathfrak{a}(a^*, b^*)\,|=\frac{1}{2}\sum_{(x, y)}\binom{m}{x}\binom{n}{y}$. Здесь суммирование ведется по всевозможным целочисленным решениям системы $my=nx$, $1\leqslant x\leqslant m-1$, $1\leqslant y\leqslant n-1$.

3) Число классов, на которые разбивается множество всех вырожденных транспортных многогранников порядка $m\times n$ с минимальным числом граней, равно $m(2^n-1)$ при $m<n$, $2m(2^m-1)$ при $m=n$. Очевидно, что в случае невырожденных транспортных многогранников с минимальным числом граней число таких классов будет $m$, если $m<n$, и $2m$, если $m=n$.

27. 1-вырожденный транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m\times n$ имеет минимальное число вершин $(\max(m, n))^{\min(m, n)-1}$ тогда и только тогда, когда

1) выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_i-\max_{1\leqslant i\leqslant m} a_i=\min_{1\leqslant j\leqslant n} b_j \text{ при } m\leqslant n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j-\max_{1\leqslant j\leqslant n} b_j=\min_{1\leqslant i\leqslant m} a_i \text{ при } m\geqslant n;$$

2) $M(a, b)$ имеет минимальное число граней.

28. Диаметр невырожденного транспортного многогранника порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, с $(m-1)n+1$ гранями не превосходит числа $m+1$. Для невырожденных транспортных многогранников порядка $2\times n$, $n\geqslant 3$, с $n+k$ гранями, $0\leqslant k\leqslant n$, диаметр не превосходит числа $k+1$, если $k=0, 1, \ldots, n-1$, и числа $n$, если $k=n$. Отсюда, в частности, вытекает положительное решение гипотезы о максимальном диаметре для невырожденных транспортных многогранников порядка $2\times n$.

29 [39]. $\operatorname{diam} M(a, b)=m+n-1$, если $3\leqslant m\leqslant n$, $a=(q_1m+r, q_2m+ + r, \ldots, q_mm+r)$, $b=(m, m, \ldots, m)\in E_n$, где $q_i\geqslant 1$ — целое, $n=\sum_{i=1}^{m} q_i+r$, $r=1$ или $r=m-1$.

30 [16]. Всякое целое число от $m-1$ до $m+n-1$ реализуется как диаметр некоторого транспортного многогранника порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$.

31 [15]. При взаимно простых числах $m$ и $n$ диаметр всякого транспортного многогранника порядка $m \times n$, $m$, $n \geqslant 3$, с максимальным числом вершин не меньше числа $m+n-1$.

32. Если все вершины транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $2 \times n$, $n \geqslant 3$, являются вырожденными, то

1) $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$,

2) многогранник имеет минимальное или максимальное число граней.

33. *Особым* называем такой многогранник, все грани которого имеют одинаковое количество вершин и каждой вершине которого инцидентно одинаковое число граней. Следующие транспортные многогранники являются особыми:

1) центральный;

2) невырожденный многогранник с минимальным числом вершин;

3) многогранник порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин при взаимно простых $m$ и $n$.

34. Пусть $M(a, b)$ — вырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, с минимальным числом вершин. Число вершин, принадлежащих всякой грани $F_{ij}(a, b)$, выражается формулой

$$f_0(F_{ij}(a, b)) = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!\,(n-1)}{(n-m+1)!}, & \text{если} \quad a_i \neq \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant m} a_s, \\ \dfrac{(n-1)!\,(m+1)}{(n-m+1)!}, & \text{если} \quad a_i = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant m} a_s. \end{cases}$$

35. Всякий невырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $2 \leqslant m < n$, имеет по меньшей мере $(m-1)\,n$ граней, каждая из которых содержит не менее, чем $n^{m-2}$ вершин.

36 [9]. Пусть $M(a^0, b^0)$, $M(a^1, b^1)$ — невырожденные транспортные многогранники порядка $m \times n$ соответственно с минимальным и максимальным числом вершин. Если $2 \leqslant m < n$, то эти многогранники не имеют эквивалентных вершин. Если $m = n$, то многогранники $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ могут иметь по $m!$ эквивалентных вершин.

37. Показать, что условие теоремы 7.10 является достаточным лишь для $m+n \leqslant 6$.

38. Для максимального числа $\varphi_v(m, n)$ вершин в классе вырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$ справедливы соотношения [23, 24]:

$$\varphi_v(m, n) \geqslant (mn - m - n + 2)\,\varphi(m-1, n-1), \qquad m, n > 1;$$

$$\varphi_v(m, n) \leqslant \varphi(m, n) - mn + m + n, \quad 3 \leqslant m \leqslant n, \ mn > 9;$$

$$\varphi_v(2, n) = \left(n - \left[\frac{n}{2}\right]\right)\left(\binom{n}{[n/2]} - 1\right) + 1.$$

При взаимно простых числах $m$ и $n$ справедлива оценка [20]:

$$\varphi_v(m, n) \geqslant \varphi(m, n) - (mq - qp - 1)\,\varphi(p, q)\,\varphi(m-p, n-q),$$

где $mq - np = 1$, $0 < p < m$, $0 < q < n$.

39. Анализ доказательства теоремы 6.4 непосредственно приводит к следующему результату. Если $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ — $(L, P)$-регулярная пара многогранников с центром $M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})$, то, полагая $\alpha = \max(|P|(m - |L|),\ |L|(n - |P|)) - 1$, $\beta = \min(|P|(m - |L|),\ |L|(n - |P|)) - 1$, будем иметь

$$f_0(M(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*})) = \max(f_0(M(a^0, b^0)),\ f_0(M(a^1, b^1))) - \\ - \alpha\delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}) = \min(f_0(M(a^0, b^0)),\ f_0(M(a^1, b^1))) - \\ - \beta\delta_{L,P}(a^{\lambda^*}, b^{\lambda^*}).$$

40. Пусть $M(a^0, b^0)$ и $M(a^1, b^1)$ — транспортные многогранники одного и того же порядка, и пусть хотя бы один из них невырожден. Тогда

$|S(a^0, b^0, a^1, b^1)| = |\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1)|$ в том и только в том случае, когда спектр $S(a^0, b^0, a^1, b^1)$ простой. Здесь $\mathfrak{A}(a^0, b^0, a^1, b^1) = \bigcup\limits_{\lambda \in S(a^0, b^0, a^1, b^1)} \mathfrak{A}(a^\lambda, b^\lambda)$.

41. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_T$ — числа простого спектра $S(a^0, b^0, a^1, b^1)$, где $a^1 = a^*$, $b^1 = b^*$, $M(a^0, b^0)$ — невырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m \leqslant n$ с минимальным числом вершин. Пусть, далее, $\lambda_t < \pi_t < \lambda_{t+1}$, $t = 0, 1, \ldots, T$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{T+1} = 1$. Справедливы следующие утверждения

1) $f_{d-1}\left(M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)\right) = f_{d-1}\left(M\left(a^{\pi_{t-1}}, b^{\pi_{t-1}}\right)\right) + 1$ тогда и только тогда, когда существует такое $k \in N_n$, что
$$\lambda_t = \frac{a_1^0 - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^0 + b_{n-k+1}^0}{a_1^0 - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j^0 + b_{n-k+1}^0 + mn - m - n},$$
где $a_1^0 \geqslant a_2^0 \geqslant \ldots \geqslant a_m^0$, $b_1^0 \geqslant b_2^0 \geqslant \ldots \geqslant b_n^0$;

2) если существует указанное в 1) число $k$, то справедливо соотношение
$$f_0\left(M\left(a^{\pi_t}, b^{\pi_t}\right)\right) = f_0\left(M\left(a^{\pi_{t-1}}, b^{\pi_{t-1}}\right)\right) + mn - m - n.$$

42 [18]. Пусть $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, и натуральное число $k > mn$, $a = (m(n-1) + 1 + (10^k - 1)^{-1}(1 - 10^{-kn}) - 10^{-kn}(10^k - 1)^{-1}(1 - 10^{-k(m-1)}), 1 + 10^{-k(n+1)}, 1 + 10^{-k(n+2)}, \ldots, 1 + 10^{-k(n+m-1)})$, $b = (m + 10^{-k}, m + 10^{-2k}, \ldots, m + 10^{-nk})$.

Тогда спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ является простым, причем, как легко видеть, многогранник $M(a, b)$ невырожден и имеет минимальное число вершин.

43 [18]. Пусть $M(a, b)$ — такой невырожденный многогранник порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$, с минимальным числом вершин, что спектр $S(a, b, a^*, b^*)$ — простой. Тогда справедливо равенство
$$|S(a, b, a^*, b^*)| = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} \sum_{t=[kn/m]+1}^{n-1} \binom{n}{t}.$$

Тем самым, на основании теоремы 6.4 число $\tau(m, n)$ различных значений функции $f_0(M(a, b))$ на классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, удовлетворяет неравенству
$$\tau(m, n) \geqslant \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} \sum_{t=[kn/m]+1}^{n-1} \binom{n}{t} + 1.$$

44 [16]. Пусть $2 \leqslant m < n$ и $1 \leqslant k < n - m$ или $k = n - 1$. Многогранник $M(a, b) \in \mathfrak{M}(m, n, k)$ тогда и только тогда имеет максимальное число вершин, когда спектр $S(a, b, a^k, b^k) = \varnothing$, где
$$a^k = (mk + ((m-1)n + 1)(n - k - 1), n, n, \ldots, n) \in E_m,$$
$$b^k = ((m-1)n + 1, \ldots, (m-1)n + 1, (m-1)n, \underbrace{m, m, \ldots, m}_{k}) \in E_n.$$

Отметим, что в остальных случаях, когда $m = n$ или $m < n$, $k \geqslant n - m$, $k \neq n - 1$, $n$, множество $\mathfrak{M}(m, n, k)$ приходится разбивать на два подмножества, в каждом из которых удается подобным образом выделить класс многогранников с максимальным числом вершин.

45. Пусть $2 \leqslant m \leqslant n$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Число вершин всякого многогранника из класса $\mathfrak{M}(m, n, k)$ не превосходит числа $n^{m-2}m^{k-1}(mn - km + k)$.

46 [16]. Пусть $2 \leqslant m \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant n - 2$, $k \leqslant n/m$ $(k > n/m)$. Тогда максимальное число вершин в классе $\mathfrak{M}(m, n, k)$ равно (больше) $m^k(n - k)^{m-1}$.

47 [23]. Пусть последовательность неотрицательных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ удовлетворяет условиям.

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j < 1,$$

$$(m, n) \neq 1 \Longrightarrow \sum_{i \in I} \alpha_i \neq \sum_{j \in J} \beta_j \quad \forall I \subset N_m, \quad J \subset N_n.$$

Тогда многогранник $M(a, b)$, определенный векторами $a = (n+\alpha_1, n+\alpha_2, \ldots$ $\ldots, n+\alpha_m)$ и $b = (m+\beta_1, m+\beta_2, \ldots, m+\beta_n)$, имеет максимальное число вершин.

48 [15]. Показать, что условия теоремы 7.9 являются достаточными в случае, когда $n = mq+1$.

49 [45]. Доказать, то

$$\varphi(m, n) \geqslant n\varphi(m-1, n), \quad m, n > 1,$$

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \frac{\log \varphi(m, n)}{\log \beta(m, n)} = 1,$$

где $\beta(m, n)$ — число базисов транспортного многогранника порядка $m \times n$.

50. Используя предложение 8.4 и следствие 8.5, доказать, что

$$\frac{(mq+1)!}{(q!)^m}(mq+1)^{m-2} m^{r-1} \leqslant \varphi(m, mq+r) \leqslant \frac{(mq+m-1)!}{(q!)^m} m^{r-1} \quad \forall r \in N_{m-1}.$$

Верхняя оценка улучшает оценки, полученные в работах [32], [33].

51. Для всякого числа $t \in \{0, 1, \ldots, m-r-1\}$ введем обозначение $K(t) = \left\{k \in Z_m^+ : \sum_{i=1}^{m} k_i = t\right\}$. Всякому вектору $k \in \bigcup_{t=0}^{m-r-1} K(t)$ поставим в соответствие многогранник $M(a^k, b^k)$ порядка $m \times \left(r + \sum_{i=1}^{m} k_i\right)$, определенный векторами $a^k = (k_1 m + r, k_2 m + r, \ldots, k_m m + r)$ и $b^k = (m, m, \ldots, m)$. Доказать следующее утверждение, являющееся обобщением теоремы 8.2: число вершин транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, определенного векторами $a = (q_1 m + r, q_2 m + r, \ldots, q_m m + r)$ и $b = (m, m, \ldots, m)$, где $q_i \geqslant 0$ — целое, $n = \sum_{i=1}^{m} q_i + r$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, равно числу

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} q_i!} \sum_{t=0}^{m-r-1} \sum_{k \in K(t)} \frac{\gamma(a^k, b^k)}{(r+t)!} \prod_{i=1}^{m} \prod_{\rho=0}^{k_i-1} (q_i - \rho).$$

При $n = \sum_{i=1}^{m} q_i + m - 1$ отсюда получить формулу Балинского [39]:

$$f_0(M(a, b)) = \frac{n!\, m^{m-2}}{\prod_{i=1}^{m} q_i!}.$$

52 [39]. Число вершин транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, определенного векторами $a = (mq_1 + 1, mq_2 + 1, \ldots, mq_m + 1)$

и $b=(m,\ m,\ \ldots,\ m)$, где $q_i \geqslant 0$ — целое, $n=\sum_{i=1}^{m} q_i+1$, равно **числу** $\frac{n!}{\prod_{i=1}^{m} q_i!} n^{m-2}$.

53 [19]. Существует транспортный многогранник порядка $m\times n$, $m,\ n\geqslant 2$, среди граней которого найдется грань, содержащая по меньшей мере $(m-1)!\times(n-1)!$ вершин.

54 [23]. Будем говорить, что вершина $x$ транспортного многогранника $M(a,\ b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, имеет степень вырожденности $k$, $0\leqslant k\leqslant m-1$, если $|K(a,\ b,\ x)|=m+n-k-1$. Существует транспортный многогранник порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, среди вершин которого найдется вершина любой степени вырожденности от нуля до $m-1$. Для любого $k$, $1\leqslant k\leqslant m-2$, не существует транспортного многогранника порядка $m\times n$, $3\leqslant m\leqslant n$, у которого всякая его вершина имеет степень вырожденности $k$.

55 [15]. Пусть $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 5$, $1\leqslant k\leqslant n$. Многогранник $M(a,\ b)\in\mathfrak{M}(m,\ n,\ k)$ имеет минимальное число $n^{m-1}+k(mn-m-n)$ вершин тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

1) при $m=2$

$$b_{n-k+1}<a_2<\min(b_{n-k},\ b_{n-1}-b_n);$$

2) при $3\leqslant m<n$

$$b_{n-k+1}-b_n<\sum_{j=1}^{n-1} b_j-a_1<\min(a_m,\ b_{n-k}-b_n); \tag{*}$$

3) при $m=n\geqslant 5$ либо (*), либо

$$a_{m-k+1}-a_m<\sum_{i=1}^{m-1} a_i-b_1<\min(b_n,\ a_{m-k}-a_m),$$

где $a_1\geqslant a_2\geqslant\ldots\geqslant a_m$, $b_1\geqslant b_2\geqslant\ldots\geqslant b_n$, $b_0=a_0=+\infty$.

56 [27]. При любом $1\leqslant k\leqslant[2n/3]$ не существует невырожденного транспортного многогранника $M(a,\ b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 5$, для числа вершин которого выполняются неравенства

$$n^{m-1}+(k-1)(mn-m-n)<f_0(M(a,\ b))<n^{m-1}+k(mn-m-n).$$

57. Пусть $M(a,\ b)\in\mathfrak{M}(m,\ n,\ k)$, $2<m\leqslant n$, $0\leqslant k\leqslant n$. Показать, что среди его граней имеется не более $k\,(d-1)$-симплексов, а в случае, если этот многогранник имеет минимальное число вершин, число $(d-1)$-симплексов в точности равно $k$.

58 [27]. Для задачи минимизации функции, вогнутой по Шуру (см. задачу 20), на любом транспортном многограннике порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, с минимальным числом вершин и $(m-1)n+k$ гранями, $0\leqslant k\leqslant n$, можно указать $k+1$ вершин, одна из которых всегда является точкой глобального минимума.

59. Граф многогранника $M(a,\ b)\in\mathfrak{M}(m,\ n,\ k)$, $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 5$, с минимальным числом вершин является гамильтоновым.

60. Минимальный радиус невырожденного транспортного многогранника порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, $n\geqslant 3$, равен числу $m-1$.

61. При любом $s>1$ число $(s-1)$-граней $s$-грани транспортного многогранника не превосходит числа $6(s-1)$ [41]. Используя этот результат, в [30] показано, что диаметр транспортного многогранника порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, не превосходит числа $2^{2m-4}(n-m+1)(20m-17)$.

62 [11]. Свободный член многочлена $P(q,\ m,\ r)$ (см. теорему 8.3) равен $\varphi(m,\ r)/r!$. Остальные члены этого многочлена, кроме старшего, пока не известны.

63 [20]. При взаимно простых $m$ и $n$ не существует невырожденного транспортного многогранника $M(a,\ b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, для числа вершин

которого выполняются неравенства $\sigma(m, n) < f_0(M(a, b)) < \varphi(m, n)$, где $\sigma(m, n) = \varphi(m, n) - \varphi(p, q)\varphi(m-p, n-q)$, а числа $p$ и $q$ удовлетворяют соотношениям

$$mq - np = 1, \quad 0 < p < m, \quad 0 < q < n. \tag{**}$$

Таким образом, число $\sigma(m, n)$ является ближайшим возможным числом к $\varphi(m, n)$, т. е. «почти» максимальным числом вершин в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $(m, n) = 1$.

Доказать, что невырожденный многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$, $(m, n) = 1$, $2 \leqslant m < n$, имеет «почти» максимальное число вершин тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^{p} a_i < \sum_{j=1}^{q} b_j, \quad \sum_{i=1}^{p} a_i < b_{q+1} + \sum_{j=1}^{q-1} b_j,$$

где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_m$, $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$, а числа $p$ и $q$ удовлетворяют условиям (**).

64. Показать, что мера Лебега в пространстве $E_{m+n-1}$ множества пар векторов $(a, b) = (a_1, a_2, \ldots, a_m, b_1, b_2, \ldots, b_n)$, определяющих вырожденные транспортные многогранники, равна нулю. Отсюда, в частности, следует, что почти нет транспортных многогранников с минимальным числом вершин, поскольку всякий транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 3$, с минимальным числом вершин является вырожденным.

65*. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы два классических транспортных многогранника одного и того же порядка имели одинаковое число вершин.

66*. Верно ли, что максимальное число вершин в классе классических транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, не меньше числа $\frac{n!}{(q!)^m} m^{m-2} q^{m-r-1}$, где $n = mq + r$, $r$ — остаток от деления $n$ на $m$? В частных случаях, когда $r = 0, 1, m-1, m-2$, это утверждение справедливо (см. § 8).

67*. Пусть $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 5$, $1 \leqslant k \leqslant n$, $d = (m-1)(n-1)$. Верно ли, что невырожденный транспортный многогранник порядка $m \times n$ с $(m-1)n + k$ гранями имеет минимальное число вершин тогда и только тогда, когда среди его граней имеется ровно $k$ $(d-1)$-симплексов (см. задачу 57)?

68. Теорема 7.1 может быть сформулирована следующим образом: невырожденный транспортный многогранник $M(a,b)$ порядка $m \times n$ имеет максимальное число вершин тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i \in I} a_i < \sum_{j \in J} b_j, \quad \text{если } n|I| < m|J|,$$

$$\sum_{i \in I} a_i > \sum_{j \in J} b_j, \quad \text{если } n|I| > m|J|,$$

где $I \subset N_m$, $J \subset N_n$.

## ГЛАВА VII

# ТРАНСПОРТНЫЕ МНОГОГРАННИКИ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В этой главе исследуются области определения транспортных задач с запретами и ограниченными пропускными способностями коммуникаций, а также обобщенных и симметрических транспортных задач. Для таких многогранников рассмотрены вопросы представления их в виде произведения многогранников меньшего порядка, формулируются условия непустоты, указаны пределы изменения числа граней, выделены многогранники максимальной размерности и многогранники, являющиеся симплексами.

## § 1. Усеченные транспортные многогранники

Широко известны транспортные задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций. Исследованию области определения таких задач и посвящен настоящий параграф.

Определение 1.1. *Усеченным транспортным многогранником порядка* $m \times n$, $m$, $n \geqslant 1$, называется область определения транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями, т. е. множество

$$M(a, b, D) = \Big\{ x = \|x_{ij}\|_{m \times n}\colon \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in N_m,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad \forall j \in N_n, \quad 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n \Big\},$$

где компоненты векторов $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ и элементы матрицы $D = \|d_{ij}\|_{m \times n}$ — положительные действительные числа, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Заметим, что при $d_{ij} \geqslant \min(a_i, b_j)$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_n$ этот многогранник превращается в классический транспортный многогранник.

Из теоремы Гейла (следствие 4.12 гл. IV) получаем следующий критерий.

Предложение 1.1. *Усеченный транспортный многогранник $M(a, b, D)$ порядка $m \times n$ не пуст тогда и только тогда, когда выполняются неравенства*

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j \in J} d_{ij}\right) \geqslant \sum_{j \in J} b_j \quad \forall J \subseteq N_n. \tag{1.1}$$

**1. Многогранники максимальной размерности.** В отличие от классического транспортного многогранника порядка $m \times n$, у которого размерность всегда равна $(m-1)(n-1)$, усеченный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, может иметь размерность и меньше числа $(m-1)(n-1)$.

Теорема 1.2 [5]. *Усеченный транспортный многогранник $M(a, b, D)$ порядка $m \times n$, $m,n \geqslant 2$, имеет максимальную размерность $(m-1)(n-1)$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:*

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij} > a_i \quad \forall i \in N_m, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j \in J} d_{ij}\right) > \sum_{j \in J} b_j \quad \forall J \subset N_n. \tag{1.3}$$

Доказательство. Необходимость. Необходимость условий (1.2) ясна.

Установим теперь необходимость условий (1.3). Поскольку многогранник $M(a, b, D)$ непуст, то на основании предложения 1.1 справедливы неравенства (1.1). Предположим, что существует подмножество $J \subset N_n$, для которого справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j \in J} d_{ij}\right) = \sum_{j \in J} b_j. \tag{1.4}$$

Это означает, что найдется индекс $i_0 \in N_m$ с условием $a_{i_0} > \sum_{j \in J} d_{i_0 j}$, и, следовательно, для любой матрицы $\|\varepsilon_{ij}\|_{m \times n}$ с положительными элементами имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j \in J} (d_{ij} - \varepsilon_{ij})\right) < \sum_{j \in J} b_j.$$

С другой стороны, так как существует матрица $x \in M(a, b, D)$ с условиями

$$0 < x_{ij} < d_{ij} \qquad \forall (i, j) \in N_m \times N_n, \tag{1.5}$$

то найдется и такая матрица $\|\varepsilon_{ij}\|_{m\times n}$ с положительными элементами, что

$$\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j\in J}(d_{ij}-\varepsilon_{ij})\right) \geqslant \sum_{j\in J} b_j. \tag{1.6}$$

Полученное противоречие и доказывает необходимость условий (1.3).

Достаточность. Из условий (1.3) имеем

$$\varepsilon = \min_J \left(\sum_{i=1}^{m} \min\left(a_i, \sum_{j\in J} d_{ij}\right) - \sum_{j\in J} b_j\right) > 0,$$

где минимум берется по всем подмножествам $J \subset N_n$. Пусть $0 < \varepsilon_{ij} \leqslant \varepsilon / (mn)$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_n$. Тогда элементы матрицы $D' = \|d_{ij} - \varepsilon_{ij}\|_{m\times n}$ удовлетворяют неравенству (1.6) при любом $J \subset N_n$, а в силу условия (1.2) и при $J = N_n$. Следовательно, согласно предложению 1.1, $M(a, b, D') \neq \varnothing$. Значит, существует матрица $x \in M(a, b, D)$ с условиями (1.5). Поэтому на основании предложения 4.1 гл. I размерность многогранника $M(a, b, D)$ равна числу $(m-1)(n-1)$. Теорема 1.2 доказана.

**2. Теорема о представлении.** Усеченный транспортный многогранник $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$, $m, n \geqslant 2$, назовем *правильно усеченным*, если размерность его максимальна, т. е. $\dim M(a, b, D) = (m-1)(n-1)$. В случае, когда хотя бы одно из чисел $m$ или $n$ равно единице, многогранник $M(a, b, D)$ будем называть правильно усеченным, если $d_{ij} > \min(a_i, b_j)$ $\forall (i, j) \in N_m \times N_n$.

Для не правильно усеченного транспортного многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ введем в рассмотрение следующие множества:

$$P = \{(i, j) \in N_m \times N_n\colon\ x_{ij} = d_{ij}\ \ \forall x = \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a, b, D)\},$$
$$Q = \{(i, j) \in N_m \times N_n\colon\ x_{ij} = 0\ \ \forall x = \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a, b, D)\}.$$

Из теоремы 1.2 следует, что $P \neq \varnothing$.

Теорема 1.3. *Всякий не правильно усеченный, непустой и невырождающийся в точку транспортный многогранник порядка $m\times n$, $m$, $n \geqslant 2$, представим в виде произведения правильно усеченных транспортных многогранников и точки, причем единственным образом, т. е. $M(a, b, D) = M(a^1, b^1, D^1) \otimes M(a^2, b^2, D^2) \otimes \ldots \otimes M(a^k, b^k, D^k) \otimes R(P, Q)$, где $R(P, Q)$ — точка с координатами*

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если}\ \ (i, j) \in Q, \\ d_{ij}, & \text{если}\ \ (i, j) \in P. \end{cases}$$

Это значит, что после надлежащей перестановки строк и столбцов всякая матрица такого многогранника $M(a, b, D)$ представима в виде, изображенном на рис. 49. Здесь заштрихованная область есть множество $P \cup Q$ постоянных компонент, а $x^p =$

$= \| x_{ij}^p \|_{\substack{i \in I_p \\ j \in J_p}}$ — некоторая матрица многогранника $M(a^p, b^p, D^p)$, $p \in N_k$.

Важность этой теоремы, в частности, состоит в том, что задача нахождения экстремума функции $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ на не правильно усеченном и не вырождающемся в точку транспортном многогран-

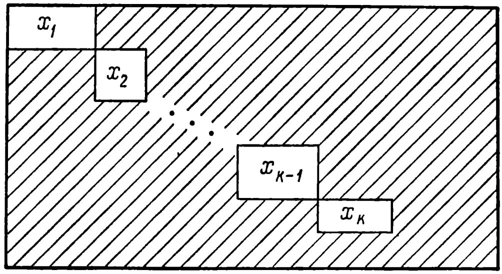



Рис. 49.

нике $M(a, b, D)$ порядка $m \times n$ сводится к решению $k$ задач меньшего порядка:

$$\operatorname{extr} \left\{ \sum_{i \in I_p} \sum_{j \in J_p} c_{ij} x_{ij}^p : \ \| x_{ij}^p \| \in M(a^p, b^p, D^p) \right\}, \qquad p \in N_k.$$

Доказательство теоремы 1.3. Пусть $M(a, b, D)$ — усеченный транспортный многогранник порядка $m \times n$ такой, что $0 < \dim M(a, b, D) < (m-1)(n-1)$. Тогда по теореме 1.2 либо существует индекс $i \in N_m$ с условием $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} = a_i$, либо найдется такое подмножество $J \subset N_n$, для которого выполняется равенство (1.4).

Для многогранника $M(a, b, D)$ определим множества $I_1$, $J_1$, $\tilde{I}_1$, $\tilde{J}_1$, $J_1'$ следующим образом.

Если $I_1 = \left\{ i \in N_m : \ \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = a_i \right\} \neq \varnothing$, то $\tilde{I}_1 = N_m \setminus I_1$, $J_1 = \varnothing$, $J_1' = N_n$, $\tilde{J}_1 = \left\{ j \in J_1' : \ \sum_{i \in I_1} d_{ij} < b_j \right\}$.

Если же $\sum_{j=1}^{n} d_{ij} > a_i \ \ \forall i \in N_m$, то среди подмножеств $J \subset N_n$, удовлетворяющих условию (1.4), выберем то $J_1'$, мощность которого максимальна. Легко проверить, что такое множество единственное. Действительно, если предположить, что существует $J_1'' \neq J_1'$, $|J_1''| = |J_1'|$, удовлетворяющее условию (1.4), то получаем, что множество $J_1' \cup J_1''$ также будет удовлетворять условию (1.4). Но это противоречит выбору множества $J_1'$.

Далее, полагаем $J_1 = N_n \setminus J_1'$, $I_1 = \left\{ i \in N_m \colon \sum_{j \in J_1'} d_{ij} < a_i \right\}$, $\tilde{I}_1 = N_m \setminus I_1$, $\tilde{J}_1 = \left\{ j \in J_1' \colon \sum_{i \in I_1} d_{ij} < b_j \right\}$.

Для множеств $I_1$, $J_1$, $\tilde{I}_1$, $\tilde{J}_1$, $J_1'$ определим усеченные транспортные многогранники

$$M(a^1, b^1, D^1) = \Bigl\{ \| x_{ij} \|_{\substack{i \in I_1 \\ j \in J_1}} \colon \sum_{j \in J_1} x_{ij} = a_i - \sum_{j \in J_1'} d_{ij},$$

$$\forall i \in I_1, \sum_{i \in I_1} x_{ij} = b_j \ \ \forall j \in J_1, \ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \ \ \forall (i, j) \in I_1 \times J_1 \Bigr\},$$

$$M(\tilde{a}^1, \tilde{b}^1, \tilde{D}^1) = \Bigl\{ \| x_{ij} \|_{\substack{i \in \tilde{I}_1 \\ j \in \tilde{J}_1}} \colon \sum_{j \in \tilde{J}_1} x_{ij} = a_i \ \ \forall i \in \tilde{I}_1,$$

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1} x_{ij} = b_j - \sum_{i \in I_1} d_{ij} \ \ \forall j \in \tilde{J}_1, \ 0 \leqslant x_{ij} \leqslant d_{ij} \ \ \forall (i, j) \in \tilde{I}_1 \times \tilde{J}_1 \Bigr\}.$$

По определению считаем, что $M(a^1, b^1, D^1) = \varnothing$, если одно из множеств, $I_1$ или $J_1$, пусто. Аналогично, $M(\tilde{a}^1, \tilde{b}^1, \tilde{D}^1) = \varnothing$, если $\tilde{I}_1 = \varnothing$ или $\tilde{J}_1 = \varnothing$.

Понятно, что $M(a^1, b^1, D^1)$ — правильно усеченный транспортный многогранник, если $J_1 \neq \varnothing$.

Рассмотрим теперь многогранник $M(\tilde{a}^1, \tilde{b}^1, \tilde{D}^1)$. Если он пуст, то теорема доказана ($k = 1$). Если он — правильно усеченный транспортный многогранник, то полагаем $M(a^2, b^2, D^2) = M(\tilde{a}^1, \tilde{b}^1, \tilde{D}^1)$, $P = I_1 \times J_1'$, $Q = \tilde{I}_1 \times ((J_1 \cup J_1') \setminus \tilde{J}_1)$ и теорема доказана. В случае, когда многогранник $M(\tilde{a}^1, \tilde{b}^1, \tilde{D}^1)$ не является правильно усеченным, для него аналогично определяем множества $I_2$, $J_2$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{J}_2$, $J_2'$ и соответствующие многогранники $M(a^2, b^2, D^2)$, $M(\tilde{a}^2, \tilde{b}^2, \tilde{D}^2)$. Ясно, что за конечное число шагов придем к многограннику $M(\tilde{a}^s, \tilde{b}^s, \tilde{D}^s)$, который является либо правильно усеченным, либо пустым. Так как $\dim M(a, b, D) > 0$, то среди многогранников $M(a^p, b^p, D^p)$, $p \in N_s$, существует $k$, $k \geqslant 1$, непустых многогранников. В качестве $P$ и $Q$ возьмем соответственно множества

$$\bigcup_{p=1}^{s} (I_p \times J_p') \quad \text{и} \quad \bigcup_{p=1}^{s} (\tilde{I}_p \times ((J_p \cup J_p') \setminus \tilde{J}_p)).$$

Единственность представления многогранника $M(a, b, D)$ в виде правильно усеченных транспортных многогранников очевидна. Теорема 1.3 доказана.

Следствие 1.4.

$$f_0(M(a, b, D))=\prod_{p=1}^{k} f_0(M(a^p, b^p, D^p)),$$

$$f_{d-1}(M(a, b, D))=\sum_{p=1}^{k} f_{d_p-1}(M(a^p, b^p, D^p)),$$

$$\operatorname{diam} M(a, b, D)=\sum_{p=1}^{k} \operatorname{diam} M(a^p, b^p, D^p),$$

$$\dim M(a, b, D)=\sum_{p=1}^{k} \dim M(a^p, b^p, D^p),$$

где $d=\dim M(a,b,D)$, $d_p=\dim M(a^p, b^p, D^p)$.

Следствие 1.5. Многогранник $M(a, b, D)$ является простым тогда и только тогда, когда многогранники $M(a^p, b^p, D^p)$ $\forall p \in N_k$ простые.

**3. Грани правильно усеченного многогранника.** Под гранью правильно усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ будем понимать грань максимальной размерности, т. е. $(d-1)$-мерную грань $(d=(m-1)(n-1))$. Ясно, что гранями многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ могут быть лишь непустые множества вида:

$$F_{ij}^-(a, b, D)=\{x\in M(a, b, D)\colon x_{ij}=0\}, \qquad (i, j)\in N_m\times N_n,$$

$$F_{ij}^+(a, b, D)=\{x\in M(a, b, D)\colon x_{ij}=d_{ij}<\min(a_i, b_j)\}, \qquad (i, j)\in N_m\times N_n.$$

Очевидна следующая лемма.

Лемма 1.6. *Множество $F_{st}^-(a, b, D)$ $(F_{st}^+(a, b, D))$, $(s, t)\in N_m\times N_n$, есть грань правильно усеченного транспортного многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ тогда и только тогда, когда найдется матрица $x\in F_{st}^-(a, b, D)$ $(x\in F_{st}^+(a, b, D))$* с условиями

$$0<x_{ij}<\min(a_i, b_j, d_{ij}) \text{ для всех } (i, j)\neq(s, t).$$

Теорема 1.7. *При $m, n\geqslant 3$ всякое целое число вида $(m-1)(n-1)+k$, где $1\leqslant k\leqslant mn+m+n-1$, и только оно может быть числом граней некоторого правильно усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$.*

Доказательство. Очевидно, что для числа граней всякого правильно усеченного транспортного многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ справедливы неравенства

$$(m-1)(n-1)+1<f_{d-1}(M(a, b, D))<2mn.$$

Доказательство того факта, что всякое целое число в этом интервале реализуется как число граней некоторого правильно усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ будем проводить отдельно для случаев: $k=1$, $2 \leqslant k \leqslant (m-1)(n-1)+2$, $(m-1)(n-1)+3 \leqslant k \leqslant mn+m+n-1$.

Случай 1. $k=1$. Рассмотрим правильно усеченный транспортный многогранник $M(a^1, b^1, D^1)$ порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, определенный векторами $a^1=((n-1)(3m-2)+1, 3, 3, \ldots, 3)$, $b^1=(3m-2, \ldots, 3m-2)$ и матрицей $D^1$ с элементами

$$d_{ij}^1 = \begin{cases} 3m-2, & \text{если} \quad i=1 \ \ \forall j \in N_{n-1}, \\ 2, & \text{если} \quad i=1, \ j=n, \\ 3, & \text{если} \quad i=2, 3, \ldots, m \ \ \forall j \in N_n. \end{cases}$$

Применяя лемму 1.6, получаем, что гранями многогранника $M(a^1, b^1, D^1)$ являются множества $F_{ij}^-(a^1, b^1, D^1)$, $(i, j) \in \{2, 3, \ldots, m\} \times N_{n-1}$, $F_{1n}^+(a^1, b^1, D^1)$, и только они. Следовательно,

$$f_{d-1}(M(a^1, b^1, D^1)) = (m-1)(n-1)+1.$$

Случай 2. $2 \leqslant k \leqslant (m-1)(n-1)+2$. Рассмотрим правильно усеченный транспортный многогранник $M(a^2, b^2, D^2)$ порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 2$, $mn > 4$, определенный векторами $a^2=(4m(n-1)-1, 4, 4, \ldots, 4)$, $b^2=(4m, \ldots, 4m, 4m-5)$ и матрицей $D^2$ с элементами

$$d_{ij}^2 = \begin{cases} 4m, & \text{если} \quad i=1, \ j \in N_{n-1}, \\ 2, & \text{если} \quad (i, j) \in H_1 \cup \{(1, n)\}, \\ 4 & \text{для остальных случаев}, \end{cases}$$

где $H_1$ — некоторое подмножество пар $(i, j)$ из множества $\{2, 3, \ldots, m\} \times N_{n-1}$, мощность которого равна $k-2$. Как и в первом случае, на основании леммы 1.6, получаем, что гранями многогранника $M(a^2, b^2, D^2)$ являются множества $F_{1n}^-(a^2, b^2, D^2)$, $F_{ij}^-(a^2, b^2, D^2)$, $(i, j) \in \{2, 3, \ldots, m\} \times N_{n-1}$, $F_{ij}^+(a^2, b^2, D^2)$, $(i, j) \in H_1 \cup \{(1, n)\}$, и только они. Следовательно, $f_{d-1}(M(a^2, b^2, D^2)) = (m-1)(n-1)+k$.

Случай 3. $(m-1)(n-1)+3 \leqslant k \leqslant mn+m+n-1$. В этом случае достаточно рассмотреть правильно усеченный транспортный многогранник $M(a^3, b^3, D^3)$ порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 3$, заданный векторами $a^3=(n, n, \ldots, n)$, $b^3=(m, m, \ldots, m)$ и матрицей $D^3$ с элементами

$$d_{ij}^3 = \begin{cases} \max\left(\dfrac{m+1}{m-1}, \dfrac{n+1}{n-1}\right) & \text{при} \quad (i, j) \in H_2, \\ \min(m, n) & \text{при} \quad (i, j) \notin H_2, \end{cases}$$

где $H_2$ — некоторое подмножество пар $(i, j)$ из множества $N_m \times N_n$, мощность которого равна $k-m-n+1$, и убедиться в том, что $f_{d-1}(M(a^3, b^3, D^3)) = (m-1)(n-1)+k$.

Следствие 1.8. *Среди правильно усеченных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 3$, имеются $(m-1)(n-1)$-симплексы.*

## § 2. $(k, t)$-усеченные транспортные многогранники

В этом параграфе исследуется область определения транспортной задачи с запретами, организованными специальным образом, а именно, изучается многогранник $M_{k,t}(a, b) = \{\| x_{ij} \|_{m\times n} \in M(a, b)$: $x_{ij} = 0$, если $n - t - 1 < j - i < k - m + 1\}$, где $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — векторы с действительными положительными компонентами, $0 \leqslant k$, $t \leqslant \min(m, n) - 1$, $k$, $t$ — целые числа.

Многогранник $M_{k,t}(a, b)$ будем называть *$(k, t)$-усеченным транспортным многогранником порядка $m \times n$.*

На рис. 50 схематично изображена произвольная матрица, принадлежащая рассматриваемому многограннику (заштрихованы те клетки, в которых могут находиться ненулевые компоненты).

Многогранник $M_{k,t}(a, b)$ становится классическим транспортным многогранником, если $k = t = 0$.

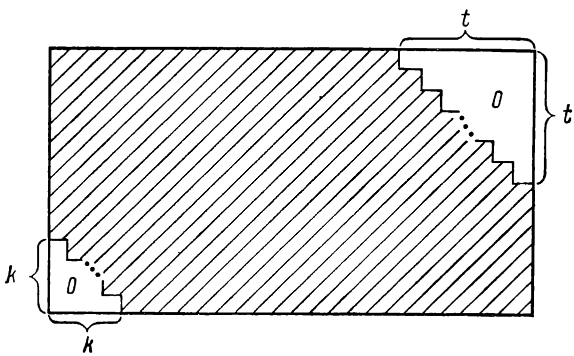


Рис. 50.

**1. Критерий непустоты.** Как известно, наличие баланса $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ является необходимым и достаточным условием разрешимости классической транспортной задачи. Для непустоты $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника баланса уже недостаточно.

Теорема 2.1. *Пусть $m, n \geqslant 2$, $k + t \geqslant 1$. $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m \times n$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) *при $kt > 0$*

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{s} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{s+n-t-1} b_j \quad \forall s \in N_t, \tag{2.2}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{s+m-k-1} a_i \quad \forall s \in N_k; \tag{2.3}$$

2) *при* $k=0,\ t>0$ (2.1) *и* (2.2);

3) *при* $t=0,\ k>0$ (2.1) *и* (2.3).

Доказательство. Необходимость. Необходимость условия (2.1) ясна. Пусть $t>0,\ x^0=\|x^0_{ij}\|_{m\times n}\in M_{k,t}(a,\ b)$. Тогда в силу строения матрицы $x^0$ имеем

$$\sum_{i=1}^{s} a_i=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n} x^0_{ij}\leqslant \sum_{j=1}^{s+n-t-1}\ \sum_{i=1}^{m} x^0_{ij}=\sum_{j=1}^{s+n-t-1} b_j \quad \forall s\in N_t,$$

т. е. условия (2.2) выполняются.

Условия (2.3) проверяются аналогично.

Достаточность. Пусть $kt>0$. Предположим, что для многогранника $M_{k,t}(a,\ b)$ выполняются условия (2.1) — (2.3). Построим матрицу $\|x^0_{ij}\|_{m\times n}$, являющуюся точкой многогранника $M_{k,t}(a,\ b)$. Пусть для определенности $a_m\leqslant b_n$. Если $b_n<a_m$, то вместо многогранника $M_{k,t}(a,\ b)$ достаточно рассмотреть многогранник $M_{t,k}(b,\ a)$.

В силу условий теоремы существует число $r$, удовлетворяющее неравенствам $0\leqslant r\leqslant m-t-1,\ \sum_{i=m-r}^{m} a_i\leqslant b_n<\sum_{i=m-r-1}^{m} a_i$. Положим $x^0_{mj}=0,\ j=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n-1$. Кроме того, $x^0_{in}=a_i$, $i=m-r,\ m-r+1,\ \ldots,\ m$, если $r=m-t-1$, и

$$x^0_{in}=\begin{cases} a_i & \text{при}\quad i=m-r,\ m-r+1,\ \ldots,\ m,\\ b_n-\sum\limits_{i=m-r}^{m} a_i & \text{при}\quad i=m-r-1,\\ 0 & \text{при}\quad i<m-r-1,\end{cases}$$

если $r<m-t-1$.

Рассмотрим $(k_1,\ t_1)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k_1,\,t_1}(a',\ b')$ порядка $(m-r-1)\times(n-1)$, определенный числами $t_1=t-1$,

$$k_1=\begin{cases} k-r-1, & \text{если}\quad k-r-1>0,\\ 0, & \text{если}\quad k-r-1\leqslant 0,\end{cases}$$

и векторами $a'=(a'_1,\ a'_2,\ \ldots,\ a'_{m-r-1}),\ b'=(b'_1,\ b'_2,\ \ldots,\ b'_{n-1})$, где $a'_i=a_i\ \forall i\in N_{m-r-1}$, если $\sum_{i=m-r}^{m} a_i=b_n$, и

$$a'_i=\begin{cases} a_i & \text{при}\quad i\in N_{m-r-2},\ r<m-2,\\ \sum\limits_{i=m-r-1}^{m} a_i-b_n & \text{при}\quad i=m-r-1,\end{cases}$$

если $\sum_{i=m-r}^{m} a_i<b_n$; $b'_j=b_j\ \ \forall j\in N_{n-1}$.

Этот многогранник при $k_1=t_1=0$ является классическим транспортным многогранником, а в случае, когда $k_1+t_1\geqslant 1$, для него, как нетрудно проверить, выполняются все условия теоремы. Поэтому, продолжая описанный процесс, получим матрицу $\| x_{ij}^0 \|_{m\times n} \in M_{k,t}(a, b)$.

В случае, когда $t=0$ или $k=0$, доказательство достаточности проводится аналогично, но с тем лишь отличием, что число $r$ находится соответственно из неравенств $\sum_{i=m-r}^{m} a_i \leqslant b_n < \sum_{i=1}^{m} a_i$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, или $\sum_{j=n-r}^{n} b_j \leqslant a_m < \sum_{j=1}^{n} b_j$, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Теорема 2.1 доказана.

Отметим, что в случае, когда $m=n$, $k=t=n-2$, эта теорема превращается в теорему 1 из [7].

**2. Многогранники максимальной размерности.** Всякая вершина $x=\| x_{ij} \|_{m\times n}$ многогранника $M_{k,t}(a, b)$ устроена так, что $x_{ij}=0$, если $j-i>n-t-1$, или $i-j>m-k-1$. Поскольку справедливы равенства

$$|\{(i, j) \in N_m \times N_n:\ i-j>m-k-1\}| = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$|\{(i, j) \in N_m \times N_n:\ j-i>n-t-1\}| = \frac{t(t+1)}{2},$$

то заключаем, что максимальная размерность $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ не превосходит числа $d=(m-1)(n-1)-[k(k+1)+t(t+1)]/2$. С другой стороны, при $m, n>2$, $m+n-k-t>3$, $(k, t)$-усеченным транспортным многогранником, размерность которого равна этому числу, является, например, многогранник $M_{k,t}(a, b)$, где $a_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}^0$ $\forall i \in N_m$, $b_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij}^0$ $\forall j \in N_n$. Здесь

$$x_{ij}^0 = \begin{cases} 0, & \text{если } k-m+1>j-i>n-t-1, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что в случае, когда $m+n-k-t \leqslant 3$, непустой $(k, t)$-усеченный многогранник порядка $m\times n$ всегда вырождается в точку.

Таким образом, максимальная размерность $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника равна числу $d$.

Теорема 2.2. *Пусть $m, n \geqslant 2$, $k+t \geqslant 1$, $m+n-k-t>3$. Для того чтобы непустой $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m\times n$ имел максимальную размерность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1) при $kt > 0$,

$$\sum_{i=1}^{s} a_i < \sum_{j=1}^{s+n-t-1} b_j \qquad \forall s \in N_t, \tag{2.4}$$

$$\sum_{j=1}^{s} b_j < \sum_{i=1}^{s+m-k-1} a_i \qquad \forall s \in N_k; \tag{2.5}$$

2) при $t=0,\ k>0$ (2.5);

3) при $k=0,\ t>0$ (2.4).

Доказательство. Необходимость. Случай 1). Допустим, что одно из условий (2.4) или (2.5) не выполняется. Тогда, на основании теоремы 2.1, найдется такое число $r \in N_{\max(k,\ t)}$, для которого выполняется хотя бы одно из равенств $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i = \sum\limits_{j=1}^{r+n-t-1} b_j$ или $\sum\limits_{j=1}^{r} b_j = \sum\limits_{i=1}^{r+m-k-1} a_i$. Для определенности пусть выполняется первое равенство. Это означает, что для любой точки многогранника $M_{k,t}(a, b)$ справедливы равенства $x_{ij}=0,\ i=r+1, r+2, \ldots, m,$ $j=1, 2, \ldots, r+n-t-1$. Следовательно, $\dim M_{k,t}(a, b) < d$. Полученное противоречие доказывает необходимость условий (2.4), (2.5).

В случаях 2) и 3) доказательство необходимости проводится по той же схеме.

Достаточность. Рассмотрим случай, когда $kt > 0$. В остальных случаях доказательство проводится аналогично. Так как многогранник $M_{k,t}(a, b)$ удовлетворяет условиям (2.4) и (2.5), то для каждой пары $(p, q) \in Q = \{(i, j) \in N_m \times N_n\colon\ i-j \leqslant m-k-1,$ $j-i \leqslant n-t-1\}$ существует точка $x^{(p,q)} = \|x_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M_{k,t}(a, b)$, для которой $x_{pq} > 0$. Поэтому точка $x^0 = \|x^0_{ij}\| = \sum\limits_{(p,\ q)\in Q} \alpha_{pq} x^{(pq)}$ многогранника $M_{kt}(a, b)$, для которой $\sum\limits_{(p,\ q)\in Q} \alpha_{pq} = 1$, $0 < \alpha_{pq} < 1$, удовлетворяет условиям $x^0_{ij} > 0$ $\forall (i, j) \in Q$. Следовательно, многогранник $M_{k,t}(a, b)$ имеет максимальную размерность.

Теорема 2.2 доказана.

**3. Теорема о представлении.** При $m+n-k-t \geqslant 3$ $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m \times n$ будем называть *правильным*, если его размерность максимальна, т. е.

$$\dim M_{k,t}(a, b) = d = (m-1)(n-1) - \frac{k(k+1)+t(t+1)}{2}.$$

В частности, всякий классический транспортный многогранник является правильным.

Ясно, что всякий $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник порядка $m \times n$ при $\min(m, n) = 2$ является либо правильным, либо вырождается в точку.

Для $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m \times n$ определим множество $Q = \{(i, j) \in N_m \times N_n \colon x_{ij} = 0 \ \forall x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \in M_{k,t}(a, b)\}$.

Аналогом теоремы 1.3 является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Всякий $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник порядка $m \times n$, $m, n > 2$, не являющийся правильным и не вырождающийся в точку, представим в виде произведения правильных многогранников, причем единственным образом, т. е.*

$M_{k,t}(a, b) = M_{k_1, t_1}(a^1, b^1) \otimes M_{k_2, t_2}(a^2, b^2) \otimes \ldots \otimes M_{k_p, t_p}(a^p, b^p) \otimes$

$\otimes R(Q)$, *где $R(Q)$ — точка с координатами $x_{ij} = 0$, $\forall (i, j) \in Q$.*

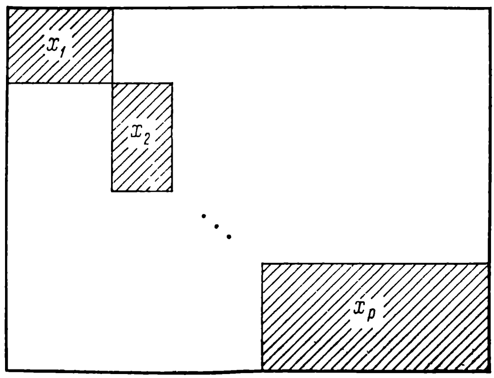



Рис. 51.

Легко видеть, что всякая матрица $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника $M_{k,t}(a, b)$, не являющегося правильным и не вырождающегося в точку, имеет вид, приведенный на рис. 51. Здесь незаштрихованная область есть множество нулевых компонент, а $x^l = \|x^l_{ij}\|_{\substack{i \in I_l \\ j \in J_l}}$ — некоторая матрица многогранника $M_{k_l, t_l}(a^l, b^l)$, $l \in N_p$.

Следствие 2.4.

$$f_0(M_{k,t}(a,b)) = \prod_{l=1}^{p} f_0(M_{k_l, t_l}(a^l, b^l)),$$

$$\operatorname{diam} M_{k,t}(a, b) = \sum_{l=1}^{p} \operatorname{diam} M_{k_l, t_l}(a^l, b^l),$$

$$\dim M_{k,t}(a, b) = \sum_{l=1}^{p} \dim M_{k_l, t_l}(a^l, b^l),$$

$$f_{d-1}(M_{k,t}(a, b)) = \sum_{l=1}^{p} f_{d_l-1}(M_{k_l, t_l}(a^l, b^l)).$$

*Здесь $d_l$ — размерность многогранника $M_{k_l, t_l}(a^l, b^l)$.*

**4. Симплексы.** Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть* $k+t\geqslant 1$, $d=(m-1)(n-1)-[k(k+1)+t(t+1)]/2$. *Среди правильных* $(k, t)$-*усеченных транспортных многогранников порядка* $m\times n$, $m, n\geqslant 2$, *существуют* $d$-*симплексы лишь в случаях:*

1) $m+n-k-t=3$;
2) $(k-1)(t-1)=0$;
3) $\min(m, n)=3$, $\max(m, n)\geqslant 3$, $\max(k, t)=2$;
4) $m=n=4$, $\min(k, t)=0$, $\max(k, t)=3$.

Заметим, что среди классических транспортных многогранников порядка $m\times n$ имеются $\max(m, n)$-симплексы лишь в случае, когда $\min(m, n)=2$ (см. § 5 гл. VI).

Доказательство. Очевидно, что правильный $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m\times n$ является $d$-симплексом тогда и только тогда, когда он содержит $d+1$ вершин. В случае 1) всякий правильный $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник является 0-симплексом.

Случай 2). Пусть, например, $t=1$. Рассмотрим правильный $(k, 1)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,1}(a^0, b^0)$ порядка $m\times n$, где $a^0=(3n-4, 3, 3, \ldots, 3)$, $b^0=(3, 3, \ldots, 3, 3m-4)$. Для любой вершины $x=\|x_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M_{k,1}(a^0, b^0)$ выполняются неравенства $x_{1j}>0$ $\forall j\in N_{n-1}$, $x_{in}>0$, $i=2, 3, \ldots, m$. Среди оставшихся компонент вершины $x$ имеется только одна положительная компонента, и она может находиться на любом месте: $(i, j)\in\{2, 3, \ldots, m\}\times N_{n-1}$, $i-j\leqslant m-k-1$. Следовательно, $f_0(M_{k,1}(a^0, b^0))=d+1$.

Случай 3). Пусть для определенности $m=3$, $t=2$. Рассмотрим правильный $(k, 2)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,2}(a^1, b^1)$ порядка $3\times n$, $n\geqslant 3$, определенный векторами $a^1=(4n-9, 3, 6)$, $b^1=(4, 4, \ldots, 4)$. Легко видеть, что элементы любой матрицы $x=\|x_{ij}\|_{3\times n}\in M_{k,2}(a^1, b^1)$ устроены следующим образом: $x_{1j}>0$ $\forall j\in N_{n-2}$, $x_{2,n-1}>0$, $x_{3,n-1}>0$, $x_{3n}>0$. Значит, $f_0(M_{k,2}(a^1, b^1))=d+1$.

Случай 4). Пусть для определенности $t=0$. Ясно, что $f_0(M_{0,3}(a^2, b^2))=d+1$, если $a^2=(3, 6, 4, 6)$, $b^2=(6, 4, 6, 3)$.

Так как любые две вершины всякого $d$-симплекса являются смежными, то для завершения доказательства теоремы осталось показать, что в остальных случаях правильный $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник $M_{k,t}(a, b)$ порядка $m\times n$ имеет вершины, не являющиеся смежными.

Будем предполагать, что $a_1\geqslant b_1$. Если $a_1<b_1$, то вместо многогранника $M_{k,t}(a, b)$ достаточно рассмотреть многогранник $M_{t,k}(b, a)$.

Находим число $p$ из неравенств $2\leqslant p\leqslant n-t$, $\sum_{j=1}^{p-1} b_j\leqslant a_1<\sum_{j=1}^{p} b_j$.

Положим

$$(i_1,\ j_1)=\begin{cases}(1,\ p+1), & \text{если } p=2,\ k=m-1,\ m\leqslant n,\\ (2,\ p-1) & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$(i_1',\ j_1')=\begin{cases}(m-1,\ l), & \text{если } x_{ms}>0,\ s=q,\ q+1,\ \ldots,\ n,\\ (m,\ h) & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где

$$q=\max(p+1,\ k+1),\quad l=\begin{cases}n-1, & \text{если } t=m-1,\ m\leqslant n,\\ n & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

$$h=\max\{s\colon\ q\leqslant s\leqslant n-1,\ x_{ms}=0\}.$$

Поскольку параметры $m$, $n$, $k$, $t$ не удовлетворяют условиям 1)—4), то существует вершина $y=\|y_{ij}\|_{m\times n}$ многогранника $M_{k,t}(a, b)$ с компонентами $y_{i_1,j_1}>0$, $y_{i_1',j_1'}>0$. Отсюда, с учетом очевидных равенств $x_{i_1,j_1}=0$, $x_{i_1',j_1'}=0$, получаем, что вершины $x$ и $y$ не являются смежными.

## § 3. Распределительный многогранник

Пусть $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ — вектор с действительными неотрицательными компонентами.

Определение 3.1. Множество

$$M(a)=\Big\{x=\|x_{ij}\|_{n\times n}\colon\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ \ \forall i\in N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_ix_{ij}=a_j\ \ \forall j\in N_n,\ x_{ij}\geqslant 0\ \ \forall (i,\ j)\in N_n\times N_n\Big\},$$

будем называть *распределительным многогранником* порядка $n\times n$.

Очевидно, что этот многогранник всегда непуст.

Если $a_1=a_2=\ldots=a_n>0$, то распределительный многогранник $M(a)$ превращается в многогранник задачи о назначениях. Следовательно, число вершин многогранника $M(a)$ в этом случае равно $n!$

В 1961 г. П. Ревецом [9] была высказана гипотеза о том, что число вершин распределительного многогранника $M(a)$ порядка $n\times n$, определенного положительным вектором $a$, не может превосходить числа $n!$ Однако в 1964 г. Х. Перфектом и Л. Мирским [8] была доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если все компоненты вектора $a$ положительны и не равны одному и тому же числу, то количество вершин распределительного многогранника $M(a)$ порядка $n\times n$, $n\geqslant 3$, больше числа $n!$*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $0<a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n=1$. Тогда невырожденное аффинное отображение $y_{ij}=a_ix_{ij}$, $i\neq j$, $y_{jj}=a_j(x_{jj}-1)+1$ переводит

многогранник $M(a)$ в $R(a)=\{x\in M_n\colon\ x_{ii}\geqslant 1-a_i\ \ \forall i\in N_n\}$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что число вершин многогранника $R(a)$ больше числа вершин многогранника $M_n$ задачи о назначениях. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех вершин многогранника $M_n$ и некоторым собственным подмножеством вершин многогранника $R(a)$.

Пусть $y=\|y_{ij}\|_{n\times n}\in \operatorname{vert} M_n$ и пусть подстановка

$$\pi=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_n\end{pmatrix},$$

такова, что

$$y_{ij}=\begin{cases}1, & \text{если } j=\pi_i,\\ 0, & \text{если } j\neq\pi_i.\end{cases}$$

Опишем процедуру построения вершины $y^*=\|y^*_{ij}\|_{n\times n}\in R(a)$, которая соответствует вершине $y$. Для этого подстановку $\pi$ разложим в произведение независимых циклов: $\pi=\delta_1\delta_2\dots\delta_r$. Для всякого цикла $\delta=\langle b,\ c,\ d,\ \dots,\ j,\ k\rangle$ длины больше единицы, определим величину $\mu_\delta=\max(1-a_b,\ 1-a_c,\ \dots,\ 1-a_j,\ 1-a_k)$. Ясно, что $0\leqslant\mu_\delta<1$. Положим

$$y^*_{bb}=y^*_{cc}=\dots=y^*_{kk}=\mu_\delta,$$
$$y^*_{bc}=y^*_{cd}=\dots=y^*_{jk}=y^*_{kb}=1-\mu_\delta,$$

а для всякого цикла $\delta(m)$ длины единицы полагаем $y^*_{mm}=1$. Остальные компоненты полагаем равными нулю.

Покажем, что построенная таким образом матрица $y^*$ является вершиной многогранника $R(a)$. Предположим противное. Тогда существуют две различные матрицы $z^1=\|z^1_{ij}\|_{n\times n}$, $z^2=\|z^2_{ij}\|_{n\times n}\in R(a)$, не равные $y^*$, такие, что выполняется равенство $y^*=(z^1+z^2)/2$. Отсюда легко видеть, что если $y^*_{ij}=0$ или 1, то $z^1_{ij}=z^2_{ij}=y^*_{ij}$. Осталось определить положительные элементы в строках и столбцах с номерами $b,\ c,\ d,\ \dots,\ j,\ k$.

Пусть для определенности $\mu_\delta=1-a_b$. Тогда на основании того, что для любой точки многогранника $R(a)$ справедливо неравенство $z_{bb}\geqslant 1-a_b$, будем иметь равенства $y^*_{bb}=z^1_{bb}=z^2_{bb}=1-a_b$. Рассматривая по порядку компоненты, стоящие на местах $(b,\ c)$, $(c,\ c)$, $(c,\ d)$, $\dots$, $(j,\ j)$, $(j,\ k)$, $(k,\ k)$, и повторяя эту процедуру для каждого цикла $\delta$ длины больше единицы, убедимся в равенстве $y^*=z^1=z^2$. Полученное противоречие доказывает, что $y^*\in\operatorname{vert} R(a)$.

Нетрудно видеть, что положительные не диагональные элементы матрицы $y^*$ стоят на тех же местах, что и в матрице $y$. Поэтому $y_1\neq y_2\Rightarrow y^*_1\neq y^*_2$. Отсюда следует, что мы указали $n!$ различных вершин многогранника $R(a)$.

Теперь покажем, что существует по крайней мере одна вершина $z$ многогранника $R(a)$, отличная от указанных. Так как числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не все равны между собой, то существует $a_s < 1$, где $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $s=1$. Тогда

$$z = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1-a_1 & 0 & a_1 & & & & \\ a_1 & 0 & 1-a_1 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & & & \\ \hline & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right\|.$$

Случай 2. $s > 1$. Тогда при $a_{s-1} + a_s \geqslant 1$

$$z = \left\| \begin{array}{c|ccc|c} \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & & & & \\ \hline & 1-a_{s-1} & 0 & a_{s-1} & \\ & a_{s-1}+a_s-1 & 1-a_s & 1-a_{s-1} & \\ & 1-a_s & a_s & 0 & \\ \hline \underbrace{\qquad\qquad}_{s-2} & & & & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}_{n-s-1} \end{array} \right\|,$$

а при $a_{s-1} + a_s < 1$

$$z = \left\| \begin{array}{c|ccc|c} \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & & & & \\ \hline & 1-a_{s-1} & 0 & a_{s-1} & \\ & 0 & 1-a_s & a_s & \\ & a_{s-1} & a_s & 1-a_s-a_{s-1} & \\ \hline \underbrace{\qquad\qquad}_{s-2} & & & & \underbrace{\begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix}}_{n-s-1} \end{array} \right\|.$$

Здесь все неуказанные элементы равны нулю. Легко убедиться, что во всех рассмотренных случаях $z$ есть вершина многогранника $R(a)$. Кроме того, $z$ отличается от всякой вершины $y^*$, построенной с помощью описанной выше процедуры, так как $u(z)+v(z) \geqslant n+1$, а $u(y^*)+v(y^*)=n$, где $u(x)$ — число диагональных элементов матрицы $x$, равных единице, $v(x)$ — число положительных недиагональных элементов матрицы $x$. Теорема 3.1 доказана.

Некоторые другие результаты, касающиеся числа вершин распределительного многогранника, получены Перфектом и Мирским [8], Дюбуа [6]. Эти результаты приведены в дополнениях к данной главе.

## Задачи и дополнения

1. Правильно усеченный транспортный многогранник $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ вырожден тогда и только тогда, когда существуют разбиения $N_m=I_1\cup I_2$, $N_n=J_1\cup J_2$, а также подмножества (возможно, пустые) $I'_t\subseteq\{j\colon (i, j)\in I_t\times\bar{J}_t,\ d_{ij}<\min(a_i, b_j)\}$, $J'_t\subseteq\{i\colon (i, j)\in\bar{I}_t\times J_t,\ d_{ij}<\min(a_i, b_j)\}$, $t=1, 2$, такие, что

$$\Big\{x=\|x_{ij}\|_{i\in I_t,\, j\in J_t}\colon \sum_{j\in J_t} x_{ij}=a_i-\sum_{j\in J'_t} d_{ij}\ \ \forall i\in I_t,$$

$$\sum_{i\in I_t} x_{ij}=b_j-\sum_{i\in I'_t} d_{ij}\ \forall j\in J_t,\ 0\leqslant x_{ij}\leqslant d_{ij},\ \forall (i, j)\in I_t\times J_t\Big\}\neq\varnothing,\ \ t=1, 2.$$

2. Верно ли, что для всякого вырожденного усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ существует невырожденный усеченный транспортный многогранник того же порядка с неменьшим числом вершин?

3 [5]. Для всякого невырожденного классического транспортного многогранника $M(a, b)$ порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$, существуют пара индексов $(s, k)\in N_m\times N_n$ и матрица $D=\|d_{ij}\|_{m\times n}$ такие, что

$$f_0(M(a, b, D))\geqslant f_0(M(a, b))+(m-2)f_0(M(a^s, b^k)),$$

где $a^s=(a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}, a_s-b_k, a_{s+1}, \ldots, a_m)$, $b^k=(b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}, b_{k+1}, \ldots \ldots, b_n)$.

Используя этот факт, доказать, что при $2\leqslant m\leqslant n-1$ справедливо неравенство

$$\psi(m, n)\geqslant\varphi(m, n)+(m-2)((n-1)^{m-1}+(n-1)(mn-2m-n+1)),$$

где $\psi(m, n)$ — максимальное число вершин в классе правильно усеченных транспортных многогранников порядка $m\times n$.

4. Пусть $M(a, b, D)=M(a^1, b^1, D^1)\otimes M(a^2, b^2, D^2)\otimes\ldots\otimes M(a^p, b^p, D^p)\otimes\otimes R(P, Q)$, $m, n\geqslant 2$. Обобщением первых двух утверждений следствия 1.4 являются следующие формулы:

$$f_k(M(a, b, D))=\sum_{\substack{i_1+i_2+\ldots+i_p=k\\ i_1,\ldots,i_p\geqslant 0}}\prod_{s=1}^{p} f_{i_s}(M(a^s, b^s, D^s)),$$
$$k=0, 1, 2, \ldots, mn-m-n.$$

Здесь, по определению, считаем

$$f_i(M(a', b', D'))=\begin{cases}0, & \text{если } i>(m'-1)(n'-1),\\ 1, & \text{если } i=(m'-1)(n'-1),\end{cases}$$

где $m'\times n'$ — порядок многогранника $M(a', b', D')$.

5 [5]. Пусть $m, n\geqslant 2$, $q_i$, $h_i$, $i\in N_m$, — натуральные числа, причем $\sum_{i=1}^{k} q_i\leqslant m$, $\sum_{i=1}^{k} h_i\leqslant n$. Всякое число вида $\rho=\sum_{i=1}^{k}(q_i-1)(h_i-1)$, и только оно, реализуется как размерность некоторого усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$.

6 [5]. Пусть $n\geqslant 3$. Всякое число вида $n+k$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, и только оно, реализуется как число граней максимальной размерности некоторого правильно усеченного транспортного многогранника порядка $2\times n$.

7 [5]. Пусть $m, n\geqslant 2$, $mn>4$, $1\leqslant k\leqslant(m-1)(n-1)+2$. Тогда минимальное число вершин в классе невырожденных правильно усеченных транспортных многогранников порядка $m\times n$ с $(m-1)(n-1)+k$ гранями максимальной размерности равно числу $k(m-1)(n-1)-k+2$.

8. Не существует невырожденного правильно усеченного транспортного многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$, $m$, $n\geqslant 3$, для числа вершин которого выполняются неравенства

$$(m-1)(n-1)+1<f_0(M(a, b, D))<2(m-1)(n-1).$$

9. Всякое ли число $t\in N_n$ реализуется как число вершин некоторого усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$, $2\leqslant m\leqslant n$?

10. Сформулировать условия на компоненты векторов $a$ и $b$ и элементы матрицы $D$, при выполнении которых усеченный транспортный многогранник вырождается в точку.

11. Число базисов $(k, t)$-усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ равно числу

$$c\frac{(m-1)!\,(n-1)!}{(m-k-1)!\,(n-k-1)!}m^{n-k-1}n^{m-k-1},$$

где $0<c<1$.

12. Для непустоты усеченного транспортного многогранника $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ необходимы условия

$$\sum_{j=1}^{n} d_{ij}\geqslant a_i \quad \forall i\in N_m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} d_{ij}\geqslant b_j \quad \forall j\in N_n.$$

Показать, что при $m$, $n>2$ они не являются достаточными.

13. Областью определения транспортной задачи с запретами является усеченный транспортный многогранник $M(a, b, D)$ порядка $m\times n$ с матрицей $D$, элементы которой удовлетворяют условиям

$$d_{ij}\begin{cases} =0, & \text{если } (i, j)\in\alpha,\\ \geqslant\min(a_i, b_j), & \text{если } (i, j)\notin\alpha,\end{cases}$$

где $\alpha$ — множество запрещенных коммуникаций, т. е. некоторое непустое подмножество множества $N_m\times N_n$. Такой многогранник будем называть *$\alpha$-усеченным*. Проводя рассуждения, подобные тем, которые были использованы при доказательстве теоремы 2.1 гл. VI, получить следующую формулу для числа базисов $\beta'(m, n)$ непустого $\alpha$-усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$, $n$, $m\geqslant 2$ (предполагается, что никакой столбец матрицы ограничений (1.1) гл. VI, отвечающий множеству $\alpha$, не входит в базис) [3]:

$$\beta'(m, n)=\prod_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}\begin{vmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{1j}+c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m}\\ c_{21} & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{2j}+c_{22} & \cdots & c_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_{mj}+c_{mm}\end{vmatrix},$$

где

$$c_{ij}=-\sum_{j=2}^{n}\frac{\lambda_{ik}\lambda_{jk}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_{ik}}, \qquad \lambda_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } (i, j)\in\alpha,\\ 1, & \text{если } (i, j)\notin\alpha.\end{cases}$$

Очевидно, что эта же формула дает число остовных деревьев помеченного двудольного графа, у которого числа $n_i=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}$ $\forall i\in N_m$, $m_j=\sum_{i=1}^{m}\lambda_{ij}$ $\forall j\in N_n$ представляют собой степени вершин ($\|\lambda_{ij}\|$ — матрица инциденций графа).

В случае, когда $n=n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_m\geqslant 1$, $m=m_1\geqslant m_2\geqslant\ldots\geqslant m_n\geqslant 1$, $\lambda_{ij}=0\Longrightarrow\lambda_{ik}=0$ для всех $k>j$ $\forall i\in N_m$, справедлива формула для числа остовных деревьев [4]:

$$\beta'(m,\ n)=\prod_{j=2}^{n}m_j\prod_{i=2}^{m}n_i.$$

14 [1]. Для непустоты $\alpha$-усеченного многогранника (см. задачу 13) в случае, когда $\alpha=\bigcup_{r=h}^{t}(\{m_{r-1}+1,\ m_{r-1}+2,\ \ldots,\ m_r\}\times\{n_{s-r+h-1}+1,\ n_{s-r+h-1}+2,\ldots$ $\ldots,\ n_s\})$, $a_i>0$, $b_j>0$, $2\leqslant h\leqslant t\leqslant s$, $0=m_0<m_1<\ldots<m_t=m$, $0=n_0<$ $<n_1<\ldots<n_s=n$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{i=1}^{m_r}a_i\geqslant\sum_{j=n_{s-r+h-2}+1}^{n_s}b_j,\quad r=h-1,\ h,\ \ldots,\ t-1.$$

15. Для разрешимости транспортной задачи $T$ с ограничениями на частичные суммы переменных:

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\colon\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i\quad\forall i\in N_m,\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad\forall j\in N_n,$$
$$\sum_{i\in P_s}x_{ij}\geqslant d_{sj}\quad\forall(s,\ j)\in N_k\times N_n,\quad x_{ij}\geqslant 0\quad\forall(i,\ j)\in N_m\times N_n\Big\},$$

где $c_{ij}\geqslant 0$, $a_i>0$, $b_j>0$, $d_{sj}\geqslant 0$, $\bigcup_{s=1}^{k}P_s=N_m$, $P_s\cap P_t=\varnothing$ для всех $s\neq t$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\geqslant\sum_{j=1}^{n}b_j,$$
$$\sum_{i\in P_s}a_i\geqslant\sum_{j=1}^{n}d_{sj}\qquad\forall s\in N_k,$$
$$b_j\geqslant\sum_{s=1}^{k}d_{sj}\qquad\forall j\in N_n.$$

Показать, что решение задачи $T$ сводится к решению классической транспортной задачи порядка $m\times((k+1)(n+1))$.

16. Пусть $R\subseteq N_m$, $\bigcup_{k=1}^{s}P_k=N_m$, $\bigcup_{r=1}^{t}Q_r=N_n$, $P_k\cap P_r=Q_k\cap Q_r=\varnothing$ при $k\neq r$. Для разрешимости задачи

$$\min\Big\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\colon\ \sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\quad\forall j\in N_n,\quad\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\quad\forall i\in R,$$
$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\leqslant a_i\quad\forall i\in R,\quad d_{kr}^-\leqslant\sum_{i\in P_k}\sum_{j\in Q_r}x_{ij}\leqslant d_{kr}^+\quad\forall(k,\ r)\in N_s\times N_t,$$
$$x_{ij}\geqslant 0\quad\forall(i,\ j)\in N_m\times N_n\Big\},$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i\in R} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i, \qquad \sum_{k=1}^{s} \min(\alpha_k, \gamma_k) \geqslant \sum_{r\in L} \beta_r$$

$$\alpha_k \geqslant 0 \quad \forall k \in N_s, \qquad \forall L \subseteq N_t,$$

$$\beta_r \geqslant 0 \quad \forall r \in N_t,$$

где $\alpha_k = \sum_{i\in P_k} a_i - \sum_{r=1}^{t} d_{kr}^-$, $\beta_r = \sum_{j\in Q_r} b_j - \sum_{k=1}^{s} d_{kr}^-$, $\gamma_k = \sum_{r\in L} (d_{kr}^+ - d_{kr}^-)$.

17. Пусть $N_m = \bigcup_{k=1}^{s} P_k$, $P_k \cap P_t = \varnothing$ при $k \neq t$. Существование индекса $r$, $1 \leqslant r \leqslant s$, для которого выполняется равенство $\sum_{i\in P_r} a_i = \sum_{j=1}^{n} d_{rj}^-$, необходимо и достаточно для того, чтобы решение задачи

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}: \ \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a, b),\right.$$

$$\left. d_{kj}^- \leqslant \sum_{i\in P_k} x_{ij} \leqslant d_{kj}^+ \quad \forall (k, j) \in N_s \times N_n\right\},$$

сводилось к решению следующих подзадач:

1) $$\min\left\{\sum_{i\in P_r}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}: \ \sum_{i\in P_r} x_{ij} = d_{rj}^- \quad \forall j \in N_n,\right.$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in P_r, \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in P_r \times N_n\right\},$$

2) $$\min\left\{\sum_{i\in \bar P_r}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}: \ \sum_{i\in \bar P_r} x_{ij} = b_j - d_{rj}^- \quad \forall j \in N_n,\right.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad \forall i \in \bar P_r, \quad d_{kj}^- \leqslant \sum_{i\in P_k} x_{ij} \leqslant d_{kj}^+,$$

$$\left.\forall (k, j) \in (N_s \setminus \{r\}) \times N_n, \quad x_{ij} \geqslant 0 \quad \forall (i, j) \in \bar P_r \times N_n\right\},$$

где $\bar P_r = N_m \setminus P_r$.

18. Сформулировать необходимые и достаточные условия на компоненты векторов $a$ и $b$, при выполнении которых $(k, t)$-усеченный транспортный многогранник вырождается в точку.

19. Число базисов $(k, k)$-усеченного транспортного многогранника порядка $n\times n$ равно числу $\dfrac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, если $k = n-2$ [2], и числу $n^{2n-5}(n-2)(n^2-2n+2)$, если $k = 1$.

20 [2]. Существование индекса $t$, $1 \leqslant t \leqslant n-1$, для которого выполняется хотя бы одно из условий:

1) $\sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{j=1}^{t-1} b_j$, $b_0 = 0$, 2) $\sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{j=1}^{t} b_j$, 3) $\sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{j=1}^{t+1} b_j$,

4) $\sum_{i=1}^{t} a_i = \sum_{j=1}^{t-1} b_j + b_{t+1}$, 5) $\sum_{j=1}^{t} b_j = \sum_{i=1}^{t-1} a_i + a_{t+1}$, $a_0 = 0$,

необходимо и достаточно для вырожденности $(n-2,\ n-2)$-усеченного транспортного многогранника порядка $n\times n$.

21 [2]. Минимальное число вершин в классе невырожденных $(n-2,\ n-2)$-усеченных транспортных многогранников порядка $n\times n$ равно числу $(n-2[n/2]+2)\,3^{[n/2]-1}$.

22. Любое целое число от 0 до $n-1$, за исключением числа $n-2$, и только оно реализуется как размерность некоторого $(n-2,\ n-2)$-усеченного транспортного многогранника порядка $n\times n$, $n>2$.

23 [2]. Любое целое число $\gamma$, $n+[n/2]-1\leqslant\gamma\leqslant 2n-1$, и только оно может быть числом $(n-2)$-граней невырожденного $(n-2,\ n-2)$-усеченного транспортного многогранника порядка $n\times n$.

24 [2]. Пусть компоненты векторов $a=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$ и $b=(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)$ удовлетворяют условиям $a_i=b_i$ $\forall i\in N_n$. Доказать, что справедливы следующие формулы:

$$f_0(M_{n-2,\,n-2}(a,\ b))=\begin{cases}2^{n-1}, & \text{если } a_1<a_2<\ldots<a_n;\\ u_{n+1}, & \text{если } a_1=a_2=\ldots=a_n \text{ или } a_1>a_2=\\ & \qquad =a_3=\ldots=a_n=a,\quad a_1\geqslant 2a;\\ u_r\sum\limits_{i=1}^{n-r+1}u_i+u_{n-r+1}\sum\limits_{i=1}^{r}u_i-u_ru_{n-r+1}, & \text{если}\\ & a_r<a_1=a_2=\ldots=a_{r-1}=a_{r+1}=\ldots=a_n,\quad 1\leqslant r\leqslant n.\end{cases}$$

Здесь $u_i$ — $i$-е число последовательности Фибоначчи. Отсюда, в частности, вытекает, что число вершин $(n-2,\ n-2)$-усеченного многогранника задачи о назначениях порядка $n\times n$ $(a_i=b_i=1)$ равно $(n+1)$-му числу последовательности Фибоначчи.

25. Пусть $m,\ n\geqslant 3$, $0\leqslant k$, $t\leqslant\min(m,\ n)-3$. Максимальное число $(d-1)$-граней в классе правильных $(k,\ t)$-усеченных транспортных многогранников порядка $m\times n$ равно числу

$$mn-\frac{k(k+1)+t(t+1)}{2}.$$

26. Рассмотрим задачу

$$\min\left\{F_n(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}:\ x=\|x_{ij}\|_{n\times n}\in M_{n-2,\,n-2}(a,\ b)\right\},$$

где $a_i=b_i=1$ $\forall i\in N_n$. Пусть для фиксированного $t$, $1\leqslant t\leqslant n$, $x^t$ есть оптимальное решение задачи минимизации функции $F_t(x)$ на многограннике $M_{t-2,\,t-2}(a,\ b)$ порядка $t\times t$. Тогда справедливо следующее рекуррентное соотношение:

$$F_t(x^t)=\min\left(F_{t-1}(x^{t-1})+c_{tt},\quad F_{t-2}(x^{t-2})+c_{t-1,\,t}+c_{t,\,t-1}\right),\qquad 3\leqslant t\leqslant n.$$

27 [6]. Классический транспортный многогранник $M(a,\ b)$ в случае, когда $a=b$, будем называть *симметрическим*. Легко видеть, что такой многогранник является частным случаем распределительного многогранника (когда $a_i>0$ $\forall i\in N_n$).

Справедливы следующие утверждения:

1) если $0<a_1<a_2=a_3=\ldots=a_n$, то

$$f_0(M(a,\ a))=((n-1)!)^2\sum_{k=0}^{n-1}1/k!;$$

2) если $0<a_1=a_2=\ldots=a_{n-1}<a_n<2a_1$, то

$$f_0(M(a,\ a))=(n-1)!\sum_{k=0}^{n-1}1/k!;$$

3) если симметрический транспортный многогранник $M(a, a)$ имеет максимальное число вершин, то среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нет равных;

4) максимальное число вершин в классе симметрических транспортных многогранников порядка $n \times n$ не меньше числа $\prod\limits_{k=0}^{n-1}(k^2+1)$.

28 [8]. Доказать следующие соотношения для числа вершин распределительного многогранника $M(a)$ порядка $n \times n$:

$$f_0(M(a)) \geqslant \begin{cases} n!, & \text{если} \quad a_1=0,\ a_i>0,\ i=2,\ 3,\ \ldots,\ n; \\ n^k(n-k)!, & \text{если} \quad a_1=a_2=\ldots=a_k=0,\ a_i>0, \\ & \qquad i=k+1,\ k+2,\ \ldots,\ n, \quad 2 \leqslant k \leqslant n-1; \\ 2(n-1)(n-1)!, & \text{если} \quad a_1=1/2, \quad a_i=1, \quad i>1; \end{cases}$$

$$f_0(M(a))=n!, \quad \text{если} \quad a_1=0, \quad a_2=a_3=\ldots=a_n.$$

29. Минимальное число вершин в классе распределительных многогранников порядка $n \times n$ равно $n!$ Сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы распределительный многогранник имел минимальное число вершин.

30. *Обобщенным транспортным многогранником* порядка $m \times n$ называется множество матриц $\left\{x=\|x_{ij}\|_{m\times n}:\ x_{ij} \geqslant 0 \ \ \forall (i,\ j) \in N_m \times N_n,\ \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_{ij}x_{ij}=1\ \ \forall j \in N_n,\ \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{ij}x_{ij}=1\ \ \forall i \in N_m\right\}$, где $\|\alpha_{ij}\|_{m\times n}$, $\|\beta_{ij}\|_{m\times n}$ — матрицы с действительными положительными элементами. Доказать следующие утверждения:

1) любое целое число от $(m-1)(n-1)$ до $mn$ и только оно может быть числом граней максимальной размерности некоторого невырожденного обобщенного транспортного многогранника порядка $m \times n$, $m,\ n \geqslant 3$;

2) всякое целое число от 1 до $m+n-4$ реализуется как диаметр некоторого невырожденного обобщенного транспортного многогранника порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 3$.

31. Решение транспортной задачи с ограниченными пропускными способностями коммуникаций:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}:\ \|x_{ij}\|_{m\times n} \in M(a,\ b,\ D)\right\}$$

сводится к решению следующей транспортной задачи с запретами:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m(n+1)}\sum_{j=1}^{n(m+1)} c'_{ij}x_{ij}:\ \sum_{i=1}^{m(n+1)} x_{ij}=b'_j\ \ \forall j \in N_{n(m+1)},\ \sum_{j=1}^{n(m+1)} x_{ij}=a'_i \right.$$
$$\left.\forall i \in N_{m(n+1)},\ \ x_{ij} \geqslant 0\ \ \forall (i,\ j) \in \alpha,\ \ x_{ij}=0\ \ \forall (i,\ j) \notin \alpha\right\},$$

где

$$a'_i=\begin{cases} a_i, & \text{если} \quad i \in N_m, \\ d_{kt}, & \text{если} \quad i=m+(k-1)n+t, \quad k \in N_m, \quad t \in N_n, \end{cases}$$

$$b'_j=\begin{cases} b_j, & \text{если} \quad j \in N_n, \\ d_{kt}, & \text{если} \quad j=kn+t, \quad k \in N_m, \quad t \in N_n, \end{cases}$$

$$c'_{ij}=\begin{cases} c_{kj}, & \text{если} \quad i=m+(k-1)n+j, \quad k \in N_m, \quad j \in N_n, \\ 0 & \text{для остальных индексов,} \end{cases}$$

$$\alpha=\{(m+(k-1)n+t,\ t):\ k \in N_m,\ \ t \in N_n\} \cup \{(k,\ kn+t):\ k \in N_m,$$
$$t \in N_n\} \cup \{(m+k,\ n+k):\ k \in N_{mn}\}.$$

Оптимальное решение исходной задачи определяется по формулам $x^*_{kj}=x^{**}_{ij}$, если $i=m+(k-1)n+j$, $k\in N_m$, $j\in N_n$, где $\|x^{**}_{ij}\|_{(mn+m)\times(mn+n)}$ — оптимальное решение новой задачи.

32*. Доказать или опровергнуть следующую гипотезу:

$$\lim_{m,\ n\to\infty} \psi(m,\ n)/\beta(m,\ n)=1,$$

где $\psi(m,\ n)$ — максимальное число вершин в классе правильно усеченных транспортных многогранников порядка $m\times n$, а $\beta(m,\ n)$ — число базисов правильно усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ (ср. с задачей 49 гл. VI).

33*. Верно ли, что почти все усеченные транспортные многогранники имеют максимальное число граней максимальной размерности?

34*. Пусть $k+t\geqslant 1$. Верно ли, что число вершин всякого правильно $(k,\ t)$-усеченного транспортного многогранника порядка $m\times n$ не превосходит числа $\dfrac{2\varphi(m,\ n)}{k(k+1)+t(t+1)}$?

35. Распространить результаты § 2 на случай транспортного многогранника с запретами следующего вида:

$$x_{ij}=0,\quad \text{если}\quad t_q-n+1>i-j>m-k_r-1,\quad 1\leqslant r\leqslant s,\quad 1\leqslant q\leqslant p,$$

где $1\leqslant s$, $p\leqslant \min(m,\ n)-1$, $0\leqslant t_1$, $k_1\leqslant \min(m,\ n)-1$, $k_1>k_2>\ldots>k_s$ $t_1>t_2>\ldots>t_p$, $k_r$, $t_q$ — целые числа.

36. Рассмотрим область определения транспортной задачи с запретами, организованными специальным образом:

$$M^s_{m\times n}(a,\ b)=\{x=\|x_{ij}\|_{m\times n};\quad x\in M(a,\ b),\quad x_{ij}=0\quad \forall\,(i,\ j)\in G\},$$

$$\text{где } G=(N_m\times N_{n_s})\setminus \bigcup_{p=1}^{s}(R_p\times Q_p).$$

Здесь $s\geqslant 2$ — натуральное число, $R_p=\overline{\{m_{p-1}+1,\ m_p\}}$, $Q_p=\overline{\{n_{p-1}+1,\ n_p\}}$, $m_p$, $n_p$ — такие числа, что $0=n_0<n_1<n_2<\ldots<n_s<n_{s+1}=n$, $0=m_0<$ $<m_1<m_2<\ldots<m_s=m$. Всякий такой многогранник будем называть *транспортным многогранником порядка* $m\times n$ *с* $s$ *блоками*. Доказать следующие утверждения:

1) многогранник $M^s_{m\times n}(a,\ b)$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\sum_{i\in R_p} a_i\geqslant \sum_{j\in Q_p} b_j\qquad \forall p\in N_s, \tag{*}$$

причем по меньшей мере одно из них является строгим;

2) многогранник $M^s_{m\times n}(a,\ b)$ имеет максимальную размерность $d=$ $=m(n_{s+1}-n_s)-m-n+1+\sum\limits_{p=1}^{s}(m_p-m_{p-1})(n_p-n_{p-1})$ тогда и только тогда когда все неравенства (*) являются строгими.

ГЛАВА VIII

# МНОГОИНДЕКСНЫЕ ТРАНСПОРТНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Естественным обобщением классической транспортной задачи является следующая $p$-индексная $m$-арная транспортная задача: найти минимум

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{i_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} c_{i_1 i_2 \ldots i_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p}$$

при условиях:

$$\sum_{i_{k_1}=1}^{n_{k_1}} \sum_{i_{k_2}=1}^{n_{k_2}} \cdots \sum_{i_{k_m}=1}^{n_{k_m}} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} =$$

$$= b_{i_1 \ldots i_{k_1-1} * i_{k_1+1} \ldots i_{k_2-1} * i_{k_2+1} \ldots i_{k_m-1} * i_{k_m+1} \ldots i_p},$$

$$\forall i_s \in N_{n_s}, \quad s \in N_p,\ s \neq k_1, k_2, \ldots, k_m, \quad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant p,$$

$x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \geqslant 0$ для всех наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, где $c_{i_1 i_2 \ldots i_p}$, $b_{i_1 \ldots i_{k_1-1} * i_{k_1+1} \ldots i_{k_2-1} * i_{k_2+1} \ldots i_{k_m-1} * i_{k_m+1} \ldots i_p}$ — заданные действительные числа, $m$ — фиксированное число, $1 \leqslant m \leqslant p-1$, $p \geqslant 2$, $n_s > 1$ $\forall s \in N_p$. При $m=1$ эта задача известна в литературе как планарная, а при $m=p-1$ она носит название *$p$-индексная транспортная задача с аксиальными суммами*.

Многочисленные практически важные задачи, возникающие в различных областях науки, техники, производства сводятся к планарным транспортным задачам. Среди них широкую известность получили задачи, появляющиеся при планировании перевозок различного рода грузов.

Если классическая транспортная задача появляется при нахождении оптимальной транспортировки однородного продукта из пунктов производства в пункты потребления, то при транспортировке неоднородного продукта возникает трехиндексная планарная транспортная задача. К четырехиндексной планарной транспортной задаче приводит рассмотрение модели планирования перевозок неоднородного продукта различными видами транспорта. Таким образом, если при решении транспортной задачи необходимо учитывать $p$ факторов, то возникает $p$-индексная планарная транспортная задача.

К $p$-индексной транспортной задаче с аксиальными суммами сводится задача транспортировки, в которой пункты производства выпускают некоторый полуфабрикат, требующий определенной обработки перед поступлением в пункты потребления. Обработка полуфабриката производится в промежуточных пунктах, которые могут быть отнесены к $p-2$ группам.

В настоящей главе исследуются области определения планарной и аксиальной транспортных задач, а также многоиндексной проблемы выбора. В § 1 для аксиальных транспортных многогранников приводятся условия вырожденности, критерий принадлежности многогранника к классу невырожденных многогранников с минимальным числом вершин, формула для минимального числа целочисленных вершин. В § 2 для планарных транспортных многогранников формулируются известные условия непустоты, указаны пределы изменения размерности, установлено существование симплексов. Подсчету числа планов многоиндексных проблем выбора посвящен § 3.

## § 1. Аксиальные транспортные многогранники

### 1. Определение и основные свойства.

Определение 1.1. *Аксиальным транспортным многогранником порядка* $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $p \geqslant 2$, называется множество $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ матриц $x = \left\| x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\|$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \cdots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a^s_{i_s} \quad \forall i_s \in N_{n_s}, \quad s \in N_p, \tag{1.1}$$

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \geqslant 0 \text{ для всех наборов } (i_1, i_2, \ldots, i_p), \tag{1.2}$$

где $a^s = \left(a^s_1, a^s_2, \ldots, a^s_{n_s}\right)$ — вектор с действительными положительными компонентами.

Очевидно, что при $p=2$ этот многогранник является классическим транспортным многогранником.

Пусть

$$\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = K, \quad \forall s \in N_p. \tag{1.3}$$

Так как матрица $x$ с элементами $x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = \prod_{s=1}^{p} a^s_{i_s} \Big/ K^{p-1}$ $\forall s \in N_{n_s}$, $s \in N_p$ удовлетворяет ограничениям (1.1) и (1.2), то, очевидно, что аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются равенства (1.3).

Предложение 1.1. *Размерность аксиального транспортного многогранника порядка* $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ *равна числу* $\prod_{s=1}^{p} n_s - \sum_{s=1}^{p} n_s + p - 1$.

Доказательство предложения опускаем. Оно может быть в точности воспроизведено по схеме доказательства предложения 1.1 гл. VI.

**2. Условие вырожденности.** Как было установлено в § 1 гл. VI, необходимым и достаточным условием вырожденности классического транспортного многогранника является существование по крайней мере одной пары непустых подмножеств $I \subset N_m$ и $J \subset N_n$ таких, что $\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} b_j$. В настоящем пункте эти условия обобщаются на случай многоиндексного аксиального транспортного многогранника и доказывается их достаточность для вырожденности такого многогранника.

В дальнейшем нам понадобится несколько новых понятий.

Пусть дана система векторов $b^s = \left(b_1^s, b_2^s, \ldots, b_{n_s}^s\right)$ $\forall s \in N_p$ с условиями $b_{i_s}^s \geqslant 0$ $\forall i_s \in N_{n_s}$, $s \in N_p$, $\sum_{i_s=1}^{n_s} b_{i_s}^s = K$ $\forall s \in N_p$ и набор $r = (r_1, r_2, \ldots, r_p)$, $r_s \in N_{n_s}$ $\forall s \in N_p$ такой, что $b_{r_s}^s > 0$ $\forall s \in N_p$. Преобразуем систему векторов $b^1, b^2, \ldots, b^p$ в систему $c^s = \left(c_1^s, c_2^s, \ldots, c_{n_s}^s\right)$ $\forall s \in N_p$ по следующему правилу:

$$c_{i_s}^s = \begin{cases} b_{i_s}^s, & \text{если } i_s \neq r_s, \\ b_{i_s}^s - \alpha, & \text{если } i_s = r_s, \end{cases}$$

где $0 < \alpha \leqslant \min\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} b_{r_s}^s$.

Будем говорить, что система векторов $b^1, b^2, \ldots, b^p$ с помощью элементарного преобразования переводится в систему $c^1, c^2, \ldots, c^p$.

Определение 1.2. Систему векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$, определяющую непустой многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$, т. е. удовлетворяющую условиям (1.3), будем называть *нормальной*.

Обозначим через $t(a)$ число ненулевых компонент вектора $a$.

Определение 1.3. Нормальная система векторов $a^1, a^2, \ldots$ $\ldots, a^p$ называется *k-приводимой* ($k \geqslant 1$), если существует последовательность $k$ элементарных преобразований, переводящая систему $a^1, a^2, \ldots, a^p$ в систему $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^p$, для которой $\sum_{i=1}^{p} t(\bar{a}^i) > k$.

В случае, когда $\alpha = \min\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} b^s_{r_s}$, элементарное преобразование будем называть *особым преобразованием*. Очевидно, что последовательность особых преобразований, переводящих систему векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ в систему нулевых векторов, есть в то же время процесс построения некоторой вершины многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$. Поэтому нормальная система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ всегда является $L$-приводимой, где $L = \sum\limits_{s=1}^{p} n_s - p + 1$.

Если нормальная система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ $k$-приводима и при этом $k < L$, то ее будем называть *приводимой системой*.

Так как ранг системы (1.1) равен числу $L$, то всякая вершина аксиального транспортного многогранника порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ содержит не более $L$ ненулевых компонент. Поэтому вырожденная точка аксиального транспортного многогранника порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ имеет меньше, чем $L$, положительных компонент.

Лемма 1.2. *Приводимость нормальной системы векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ является необходимым и достаточным условием для вырожденности аксиального транспортного многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$.*

Доказательство леммы следует из того факта, что существование вырожденной точки многогранника влечет за собой существование вырожденной вершины.

Определение 1.4. Нормальная система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ называется *распадающейся*, если существуют такие подмножества $S_1, S_2 \subset N_p$, $S_1 \cap S_2 = \varnothing$, $S_1 \cup S_2 \neq \varnothing$ и непустые подмножества $J_s \subset N_{n_s}$ $\forall s \in S_1 \cup S_2$, что

$$\sum_{s \in S_1} \sum_{j \in J_s} a^s_j = \sum_{s \in S_2} \sum_{j \in J_s} a^s_j.$$

Теорема 1.3 [2]. *Если система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ распадающаяся, то аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ вырожден.*

Доказательство. Согласно лемме 1.2 для доказательства теоремы достаточно показать, что всякая распадающаяся система векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ является приводимой. Доказательство этого утверждения проведем индукцией по числу $t = |S_1| + |S_2|$ (см. определение 1.4). Для случая $t = 2$ утверждение тривиально.

Положим

$$\sum_{j \in J_s} a^s_j = a_s \quad \forall s \in S_1 \cup S_2,$$

$$\sum_{j \in \bar{J}_s} a^s_j = b_s \quad \forall s \in S_1 \cup S_2,$$

где $\bar{J}_s = N_{n_s} \setminus J_s$. Находим $\gamma = \min(\min\limits_{s \in S_1 \cup S_2} a_s, \min\limits_{s \in S_1 \cup S_2} b_s)$.

Пусть сначала $\gamma = a_{s_0}$, $s_0 \in S_1$. Тогда существует последовательность особых преобразований, переводящая систему векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ в систему $\bar{a}^1, \bar{a}^2, \ldots, \bar{a}^p$, для которой имеет место равенство

$$\sum_{s \in S_1 \setminus \{s_0\}} \sum_{j \in J_s} \bar{a}_j^s = \sum_{s \in S_2} \sum_{j \in J_s} \bar{a}_j^s.$$

Полученная система, по предположению индукции, является приводимой. В случае, когда $s_0 \in S_2$, доказательство аналогично.

Пусть теперь $\gamma = b_{s_0}$. Для определенности будем считать, что $|S_1| > |S_2|$. Выберем некоторое подмножество $S \subset S_1 \setminus \{s_0\}$, мощность которого равна $|S_1| - |S_2|$. Тогда

$$\sum_{s \in S_1'} \sum_{j \in J_s'} a_j^s = \sum_{s \in S_2'} \sum_{j \in J_s'} a_j^s,$$

где

$$S_1' = S_1 \setminus S, \quad S_2' = S_2 \cup S,$$

$$J_s' = \begin{cases} J_s, & \text{если } s \in S, \\ \bar{J}_s, & \text{если } s \in (S_1 \setminus S) \cup S_2. \end{cases}$$

Следовательно, как и в предыдущем случае, существует последовательность особых преобразований, переводящая нашу систему в приводимую систему. Теорема 1.3 доказана.

**3. Многогранники с минимальным числом вершин.** В данном пункте описаны невырожденные аксиальные транспортные многогранники с минимальным числом вершин, а также выведена формула для определения этого числа. Соответствующие результаты для классических транспортных многогранников были получены в § 5 гл. VI. При доказательстве результатов этого пункта возникают только технические трудности. Поэтому мы наметим лишь канву доказательства, не останавливаясь на деталях.

Всюду на протяжении данного пункта будем считать, что

$$n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p \geqslant 1, \quad a_1^s \geqslant a_2^s \geqslant \ldots \geqslant a_{n_s}^s \quad \forall s \in N_p, \quad a_1^s < a_1^{s+1},$$

если $n_s = n_{s+1}$ *).

Дадим несколько определений, постоянно используемых в этом пункте.

Определение 1.5. Аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ будем называть *регулярным*, если

$$a_{n_s}^s + \sum_{k=s+1}^{p} a_1^k > (p-s) K \quad \forall s \in N_{p-1}.$$

*) Случая, когда $a_1^s = a_1^{s+1}$, быть не может, так как многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ невырожден (см. п. 2).

Напомним, что аксиальный транспортный многогранник порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ является невырожденным, если каждая его вершина содержит ровно $\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1$ положительных компонент.

Лемма 1.4. *Всякий регулярный аксиальный транспортный многогранник порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ невырожден.*

Доказательство этой леммы можно провести индукцией по $p$. Заметим, что для $p=2$ утверждение леммы очевидно.

Обозначим через $\mathfrak{M}_p$ класс всех регулярных аксиальных транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

Лемма 1.5. *Если $M(a^1, a^2, \ldots, a^p) \in \mathfrak{M}_p$, то число вершин такого многогранника равно* $\prod_{s=2}^{p} \left( \prod_{i=1}^{s-1} n_i \right)^{n_s - 1}$.

При доказательстве этой леммы используется то обстоятельство, что всякая вершина $x^0 = \| x^0_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p) \in \mathfrak{M}_p$ имеет следующий вид:

1) $x^0_{i_1 1 \ldots 1} > 0 \quad \forall i_1 \in N_{n_1}$;

2) для любого $s \in \{2, 3, \ldots, p\}$ и всякого $i_s \in \{2, 3, \ldots, n_s\}$ найдется набор $(i_1^0, i_2^0, \ldots, i_{s-1}^0)$, $i_k^0 \in N_{n_k}$, $k \in N_{s-1}$, такой, что $x^0_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{s-1}^0 i_s 1 1 \ldots 1} > 0$, $x^0_{i_1 i_2 \ldots i_{s-1} i_s 1 1 \ldots 1} = 0$ для всех наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}) \neq (i_1^0, i_2^0, \ldots, i_{s-1}^0)$. Поэтому число вершин любого многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p) \in \mathfrak{M}_p$ равно произведению мощностей $(n_s - 1)$-выборок с повторениями из множеств $\left\{1, 2, \ldots, \prod_{i=1}^{s-1} n_i \right\}$, $s = 2, 3, \ldots, p$, т. е. числу $\prod_{s=2}^{p} \left( \prod_{i=1}^{s-1} n_i \right)^{n_s - 1}$.

Лемма 1.6. *Если невырожденный аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p) \notin \mathfrak{M}_p$,* то число его вершин больше числа $\prod_{s=2}^{p} \left( \prod_{i=1}^{s-1} n_i \right)^{n_s - 1}$.

Доказательство этой леммы может быть проведено по схеме доказательства аналогичного утверждения для классического транспортного многогранника (см. § 5 гл. VI).

Из лемм 1.5 и 1.6 непосредственно вытекают теоремы.

Теорема 1.7 [4]. *Минимальное число вершин в классе невырожденных аксиальных транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ равно числу* $\prod_{s=2}^{p} \left( \prod_{i=1}^{s-1} n_i \right)^{n_s - 1}$.

Теорема 1.8 [4]. *Невырожденный аксиальный транспортный многогранник имеет минимальное число вершин тогда и только тогда, когда он регулярный.*

**4. Минимальное число целочисленных вершин.** В этом пункте будем считать, что векторы $a^1, a^2, \ldots, a^p$, определяющие аксиальный транспортный многогранник, целочисленны.

Как уже упоминалось ранее (см. § 1, п. 2), последовательность особых преобразований, переводящая систему векторов $a^1, a^2, \ldots, a^p$ в систему нулевых векторов, есть в то же время процесс построения некоторой вершины многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$. Поэтому в любом многограннике $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$, определенном целочисленными векторами, существуют целочисленные вершины. С другой стороны, так как матрица ограничений (1.1) при $p > 2$ не является унимодулярной, то согласно теореме 2.1 гл. IV существуют многогранники с нецелочисленными вершинами. Примером такого многогранника является многогранник $M(a^1, a^2, a^3)$ порядка $2 \times 2 \times 2$, определенный векторами $a^1 = a^2 = a^3 = (1, 1)$. Действительно, матрица $\| x_{i_1 i_2 i_3} \|_{2\times 2\times 2}$ с элементами

$$x_{i_1 i_2 i_3} = \begin{cases} 1/2, \text{ если } (i_1, i_2, i_3) \in \\ \qquad \in \{(1, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (2, 2, 1)\}, \\ 0 \quad \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

является вершиной этого многогранника.

Здесь решается задача нахождения минимального числа целочисленных вершин в классе аксиальных транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

Пусть $f_0^z(M)$ — число целочисленных вершин многогранника $M$.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.9. *Пусть $p \geqslant 3$, $1 \leqslant r \neq k \leqslant p$. Для числа целочисленных вершин всякого аксиального транспортного многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ справедливо неравенство*

$$f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) \geqslant f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}, a^{r+1}, \ldots, a^p)) \times \\ \times f_0^z(M(a^r, a^k)).$$

Доказательство. Пусть $x = \| x_{i_r i_k} \|$ — вершина многогранника $M(a^r, a^k)$, а $y = \| y_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_p} \|$ — целочисленная вершина многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}, a^{r+1}, \ldots, a^p)$. Рассмотрим алгоритм построения ненулевых компонент некоторой вершины $z = \| z_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|$ многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$.

$t$-й ($1 \leqslant t \leqslant n_k$) шаг алгоритма. Определим $x_{i_r^0 t} = \min x_{i_r t}$, $y_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_{r+1}^0 \ldots i_{k-1}^0 t\, i_{k+1}^0 \ldots i_p^0} = \min y_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_{k-1} t\, i_{k+1} \ldots i_p}$, где первый минимум берется по всем индексам $i_r$, $1 \leqslant i_r \leqslant n_r$, для которых $x_{i_r t} > 0$, а второй минимум берется по всем наборам $(i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_{r+1}, \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_p)$, для которых $y_{i_1 i_2 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_{k-1} t\, i_{k+1} \ldots i_p} > 0$. Положим $z_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_r^0 \ldots i_{k-1}^0 t\, i_{k+1}^0 \ldots i_p^0} = \Delta t$, где $\Delta t = \min(x_{i_r^0 t}, y_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_{r+1}^0 \ldots i_{k-1}^0 t\, i_{k+1}^0 \ldots i_p^0})$. Преобразуем матрицы $x$, $y$ и векторы $a^1, a^2, \ldots, a^p$ по формулам

$$x'_{i_r t} = \begin{cases} x_{i_r t}, & \text{если } i_r \neq i_r^0, \\ x_{i_r t} - \Delta t, & \text{если } i_r = i_r^0, \end{cases}$$

$$y'_{i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_{k-1} t i_{k+1} \ldots i_p} =$$

$$= \begin{cases} y_{i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_{k-1} t i_{k+1} \ldots i_p} - \Delta t, & \text{если } (i_1, \ldots, i_{r-1}, i_{r+1}, \ldots \\ \ldots, i_{k-1}, i_{k+1}, \ldots, i_p) = (i_1^0, \ldots, i_{r-1}^0, i_{r+1}^0, \ldots, i_{k-1}^0, i_{k+1}^0, \ldots, i_p^0), \\ y_{i_1 \ldots i_{r-1} i_{r+1} \ldots i_{k-1} t i_{k+1} \ldots i_p} & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$\bar{a}^s_{i_s} = \begin{cases} a^s_{i_s}, & \text{если } i_s \neq i_s^0, \quad s \in N_p, \\ a^s_{i_s} - \Delta t, & \text{если } i_s = i_s^0, \quad s \in N_p, \end{cases}$$

где $i_k^0 = t$.

Если $\bar{a}_t^k > 0$, то возвращаемся к $t$-му шагу алгоритма. Если же $\bar{a}_t^k = 0$ и $t < n_k$, то переходим к $(t+1)$-му шагу алгоритма. В случае, когда $\bar{a}_t^k = 0$ и $t = n_k$, алгоритм заканчивает работу.

Таким образом, по любым целочисленным вершинам $x \in M(a^r, a^k)$ и $y \in M(a^1, a^2, \ldots, a^{r-1}, a^{r+1}, \ldots, a^p)$ всегда можно построить целочисленную вершину $z \in M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ Очевидно, что разным парам вершин $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, где $x_1, x_2 \in M(a^r, a^k)$, $y_1, y_2 \in M(a^1, \ldots, a^{r-1}, a^{r+1}, \ldots, a^p)$, соответствуют разные вершины многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$. Лемма 1.9 доказана.

Имеет место следующая теорема, полученная В. С. Емеличевой и А. М. Кононенко [5].

Теорема 1 10. *Минимальное число целочисленных вершин в классе аксиальных транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $p \geqslant 3$, равно числу*

$$\frac{\left(\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i\right)!\right)^{p-1}}{\prod\limits_{s=1}^{p}\left(\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} n_i - n_s + 1\right)!}.$$

Доказательство. Пусть $n_1 = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} n_s$. Согласно лемме 1.9 справедливо неравенство

$$f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) \geqslant \prod_{s=2}^{p} f_0^z(M(a^1, a^s)).$$

Отсюда на основании теорем 5.1 и 5.3 из гл. VI получаем

$$f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) \geqslant \frac{(n_1!)^{p-1}}{\prod\limits_{s=1}^{p}(n_1 - n_s + 1)!}.$$

Пусть, для определенности, $n_2 \geqslant n_3 \geqslant \ldots \geqslant n_p \geqslant 1$. Рассмотрим аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка

$n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $p \geqslant 3$, определенный векторами $a^s = (n_1 - n_s + 1, 1, 1, \ldots, 1) \in E_{n_s}$ $\forall s \in N_p$.

В силу теоремы 1.3 этот многогранник вырожден. Легко видеть, что всякая целочисленная вершина $x = \| x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \| \in M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ устроена следующим образом:

$$x_{1 i_2^{(1)} \ldots i_p^{(1)}} = 1,$$

$$x_{2 i_2^{(2)} \ldots i_p^{(2)}} = 1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n_1 i_2^{(n_1)} \ldots i_p^{(n_1)}} = 1,$$

а остальные компоненты равны нулю. Причем для любого $s \in \{2, 3, \ldots, p\}$ $n_1$-выборка $i_s^{(1)}, i_s^{(2)}, \ldots, i_s^{(n_1)}$ из чисел $1, 2, \ldots, n_s$, устроена так, что каждое из чисел $2, 3, \ldots, n_s$, встречается в этой выборке ровно один раз. Справедливо и обратное утверждение. Следовательно,

$$f_0^z(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) = \prod_{s=2}^{p} \prod_{i=0}^{n_s - 2} (n_1 - i) = \frac{(n_1!)^{p-1}}{\prod_{s=1}^{p} (n_1 - n_s + 1)!}.$$

## § 2. Планарные транспортные многогранники

В данном параграфе ради простоты изложения мы будем рассматривать лишь трехиндексные планарные транспортные многогранники. Полученные здесь результаты могут быть перенесены и на многоиндексные многогранники. Некоторые из этих обобщений можно найти в задачах и дополнениях к гл. VIII.

Определение 2.1. *Трехиндексным планарным транспортным многогранником* порядка $m \times n \times k$ называется область определения планарной транспортной задачи, т. е. множество $M(A, B, C)$ матриц $x = \| x_{ijt} \|_{m \times n \times k}$, элементы которых удовлетворяют следующим условиям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt} = a_{it} \quad \forall (i, t) \in N_m \times N_k, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt} = b_{jt} \quad \forall (j, t) \in N_n \times N_k, \tag{2.2}$$

$$\sum_{t=1}^{k} x_{ijt} = c_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n, \tag{2.3}$$

$$x_{ijt} \geqslant 0 \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k, \tag{2.4}$$

где $A = \| a_{it} \|_{m \times k}$, $B = \| b_{jt} \|_{n \times k}$ и $C = \| c_{ij} \|_{m \times n}$ — матрицы с действительными неотрицательными элементами.

**1. Необходимые условия непустоты многогранника.** Условиями совместности системы линейных равенств и неравенств являются, как известно, условия, представляющие собой обобщение теоремы Кронекера — Капелли Однако эти условия трудно проверяемы и поэтому для конкретных систем, какой является, например, система (2.1) — (2.4), определяющая планарный транспортный многогранник $M(A, B, C)$, естественно возникает проблема получения простых, т. е. эффективно проверяемых условий совместности, или, как мы будем говорить, условия непустоты многогранника.

В настоящее время получены лишь необходимые условия непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника. В данном пункте приводятся некоторые из них.

Очевидно, что для непустоты планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ необходимы условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_{it} = \sum_{j=1}^{n} b_{jt} \quad \forall t \in N_k,$$

$$\sum_{t=1}^{k} a_{it} = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \quad \forall i \in N_m,$$

$$\sum_{t=1}^{k} b_{jt} = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} \quad \forall j \in N_n,$$

выполнение которых и будем в дальнейшем предполагать.

*Условия Шелла* [27]. Пусть

$$\Gamma_{ijt} = \min(a_{it}, b_{jt}, c_{ij}), \quad (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k.$$

Выполнение соотношений

$$\sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ijt} \geqslant a_{it} \quad \forall (i, t) \in N_m \times N_k,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \Gamma_{ijt} \geqslant b_{jt} \quad \forall (j, t) \in N_n \times N_k,$$

$$\sum_{t=1}^{k} \Gamma_{ijt} \geqslant c_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n$$

необходимо для непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$.

Действительно, если $\| x^0_{ijt} \|_{m \times n \times k} \in M(A, B, C)$, то справедливы неравенства $x^0_{ijt} \leqslant \Gamma_{ijt}$ $\forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k$, и следовательно, условия Шелла выполняются.

Следующий пример показывает, что условия Шелла **не являются**, вообще говоря, достаточными. Пусть

$$A=\begin{Vmatrix}3&1&1\\3&1&1\\1&1&1\end{Vmatrix},\quad B=\begin{Vmatrix}1&3&3\\3&0&0\\3&0&0\end{Vmatrix},\quad C=\begin{Vmatrix}3&3&1\\1&1&1\\1&1&1\end{Vmatrix}.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия Шелла в нашем случае не выполнены.

Так как $a_{32}=a_{33}=1$, $b_{22}=b_{23}=b_{32}=b_{33}=0$, то для всякой точки $\|x_{ijt}\|_{3\times3\times3}$ многогранника $M(A, B, C)$ должны выполняться равенства $x_{312}=x_{313}=1$. С другой стороны, согласно условиям (2.3) имеем соотношения $x_{311}+x_{312}+x_{313}=c_{31}=1$. Поэтому $x_{311}=-1$, что противоречит условиям (2.4). Следовательно, многогранник $M(A, B, C)$ пуст.

Полагая $\Gamma^1_{ijt}=\min(a_{it}, b_{jt}, c_{ij})$, $(i, j, t)\in N_m\times N_n\times N_k$, для $r=1, 2, 3, \ldots$, определим числа

$$\gamma^r_{ijt}=\max\left(0, \left(a_{it}-\sum_{p\neq j}\Gamma^r_{ipt}\right), \left(b_{jt}-\sum_{l\neq i}\Gamma^r_{ljt}\right), \left(c_{ij}-\sum_{q\neq t}\Gamma^r_{ijq}\right)\right),$$

$$\Gamma^{r+1}_{ijt}=\min\left(\Gamma^r_{ijt}, \left(a_{it}-\sum_{p\neq j}\gamma^r_{ipt}\right), \left(b_{jt}-\sum_{l\neq i}\gamma^r_{ljt}\right), \left(c_{ij}-\sum_{q\neq t}\gamma^r_{ijq}\right)\right).$$

Нетрудно видеть, что если существует число $\Gamma^r_{ijt}<0$, то многогранник $M(A, B, C)$ пуст.

Следующие условия усиливают условия Шелла.

*Условия Хэли* [25]. Существование индекса $h\geqslant 1$, для которого выполняются условия

$$\Gamma^h_{ijt}=\Gamma^{h+1}_{ijt}\quad \forall(i, j, t)\in N_m\times N_n\times N_k,$$

$$\gamma^h_{ijt}=\gamma^{h+1}_{ijt}\quad \forall(i, j, t)\in N_m\times N_n\times N_k,$$

$$\sum_{i=1}^m\gamma^h_{ijt}\leqslant b_{jt}\leqslant\sum_{i=1}^m\Gamma^h_{ijt}\quad \forall(j, t)\in N_n\times N_k,$$

$$\sum_{j=1}^n\gamma^h_{ijt}\leqslant a_{it}\leqslant\sum_{j=1}^n\Gamma^h_{ijt}\quad \forall(i, t)\in N_m\times N_k,$$

$$\sum_{t=1}^k\gamma^h_{ijt}\leqslant c_{ij}\leqslant\sum_{t=1}^k\Gamma^h_{ijt}\quad \forall(i, j)\in N_m\times N_n,$$

необходимо для непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times k$.

Доказательство сразу следует из того очевидного факта, что при $M(A, B, C)\neq\varnothing$ для любого числа $r=1, 2, 3, \ldots$ справедливы неравенства $\gamma^r_{ijt}\leqslant x_{ijt}\leqslant\Gamma^r_{ijt}$ $\forall(i, j, t)\in N_m\times N_n\times N_k$. При этом с ростом числа $r$ нижняя граница $\gamma^r_{ijt}$ не убывает, а верхняя $\Gamma^r_{ijt}$ не возрастает.

Прежде чем приступить к рассмотрению следующих условий непустоты многогранника $M(A, B, C)$, введем обозначения.

Пусть $I \subset N_m$, $J \subset N_n$. Через $z(I, J)$ обозначим сумму тех элементов матрицы $\|z_{ij}\|_{m\times n}$, у которых индекс $i$ пробегает множество $I$, а индекс $j$ — множество $J$.

Аналогично для $I \subset N_m$, $J \subset N_n$, $T \subset N_k$ и матрицы $\|z_{ijt}\|_{m\times n\times k}$ определим число $z(I, J, T) = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\sum_{t\in T} z_{ijt}$.

*Условия Моравека — Влаха* [22]. Для непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times k$ необходимо выполнение следующих неравенств:

$$a(I, T) - b(J, T) + c(\bar{I}, J) \geqslant 0 \quad \forall I \subset N_m, \quad J \subset N_n, \quad T \subset N_k.$$

Для доказательства достаточно заметить, что для любых подмножеств $I \subset N_m$, $J \subset N_n$, $T \subset N_k$, и любой матрицы $x \in M(A, B, C)$ справедливы соотношения

$$a(I, T) = x(I, J, T) + x(I, \bar{J}, T),$$
$$b(J, T) = x(I, J, T) + x(\bar{I}, J, T),$$
$$c(I, J) = x(I, J, T) + x(I, J, \bar{T}).$$

Приведем пример, показывающий, что условия Хэли, вообще говоря, не являются достаточными.

Пример. Пусть планарный транспортный многогранник $M(A, B, C)$ порядка $5\times 8\times 2$, определен матрицами:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \\ 7 & 1 \\ 6 & 2 \\ 6 & 2 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что условия Хэли для рассматриваемого многогранника $M(A, B, C)$ выполнены:

$$\Gamma^1_{ijt} = \Gamma^2_{ijt} = 1 \quad \forall (i, j, t) \in N_5\times N_8\times N_2,$$
$$\gamma^1_{ijt} = \gamma^2_{ijt} = 0 \quad \forall (i, j, t) \in N_5\times N_8\times N_2,$$
$$0 \leqslant b_{jt} \leqslant 5 \quad \forall (j, t) \in N_8\times N_2,$$
$$0 \leqslant a_{it} \leqslant 8 \quad \forall (i, t) \in N_5\times N_2,$$
$$0 \leqslant c_{ij} \leqslant 2 \quad \forall (i, j) \in N_5\times N_8.$$

С другой стороны, так как условия Моравека — Влаха для подмножеств $I = \{3, 4, 5\}$, $J = \{1, 2, 3\}$, $T = \{2\}$ не выполняются, то многогранник $M(A, B, C)$ пуст.

Условия Хэли и Моравека — Влаха допускают следующее обобщение.

*Условия Смита* [24]. Существование индекса $h \geqslant 1$, для которого выполняются условия

$$\Gamma_{ijt}^{h} = \Gamma_{ijt}^{h+1} = \Gamma_{ijt} \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k,$$

$$\gamma_{ijt}^{h} = \gamma_{ijt}^{h+1} = \gamma_{ijt} \quad \forall (i, j, t) \in N_m \times N_n \times N_k,$$

$$\gamma(I, \bar{J}, T) + \gamma(\bar{I}, J, \bar{T}) \leqslant a(I, T) - b(J, T) + c(\bar{I}, J) \leqslant$$
$$\leqslant \Gamma(I, \bar{J}, T) + \Gamma(\bar{I}, J, \bar{T}) \quad \forall I \subset N_m, \quad J \subset N_n, \quad T \subset N_k, \quad (2.5)$$

необходимо для непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$.

В силу условий Хэли достаточно доказать необходимость неравенств (2.5). Пусть $I \subset N_m$, $J \subset N_n$, $T \subset N_k$. Тогда согласно условиям Хэли имеем неравенства

$$\gamma(I, J, T) + \gamma(I, \bar{J}, T) \leqslant a(I, T) \leqslant \Gamma(I, J, T) + \Gamma(I, \bar{J}, T),$$

$$\gamma(I, J, T) + \gamma(\bar{I}, J, T) \leqslant b(J, T) \leqslant \Gamma(I, J, T) + \Gamma(\bar{I}, J, T),$$

$$\gamma(\bar{I}, J, T) + \gamma(\bar{I}, J, \bar{T}) \leqslant c(\bar{I}, J) \leqslant \Gamma(\bar{I}, J, T) + \Gamma(\bar{I}, J, \bar{T}).$$

Отсюда с учетом условий Моравека — Влаха вытекают требуемые неравенства.

**2. Размерность многогранника.** Прежде всего заметим, что трехиндексный планарный транспортный многогранник может вырождаться в точку. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим многогранник $M(A, B, C)$ порядка $m \times n \times k$, определенный матрицами

$$A = \begin{Vmatrix} n & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & n & \dots & n \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} m-1 & m & \dots & m \\ m & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & 1 & \dots & 1 \\ m & 1 & \dots & 1 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ k & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k & 1 & \dots & 1 \\ k-1 & k & \dots & k \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, что единственной точкой этого многогранника является точка $\|x_{ijt}\|_{m \times n \times k}$ с координатами: $x_{m11} = 0$,

$$x_{ijt} = \begin{cases} 0, & \text{если } (i, j, t) \in \{1, 2, \dots, m-1\} \times \{2, 3, \dots, n\} \times \\ & \qquad \times \{2, 3, \dots, k\}, \\ 1 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вопрос о том, какова максимальная размерность трехиндексного планарного транспортного многогранника. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 2.1. *Максимальная размерность трехиндексного планарного транспортного многогранника порядка $m\times n\times k$ равна числу $(m-1)(n-1)(k-1)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что ранг системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}=a_{it} \qquad \forall i\in N_m\setminus\{1\}, \quad t\in N_k,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt}=b_{jt} \qquad \forall (j,\ t)\in N_n\times N_k,$$

$$\sum_{t=1}^{k} x_{ijt}=c_{ij} \qquad \forall (i,\ j)\in N_m\times N_n,$$

равен числу $\beta=mk+nk+mn-m-n-k+1$. С другой стороны, так как любые $m+n+k-1$ уравнений системы (2.1) — (2.3) являются следствием всех остальных ее уравнений, то ранг матрицы ограничений не превосходит числа $\beta$. Следовательно, ранг системы линейных уравнений (2.1) — (2.3) равен числу $\beta$. Поэтому в силу предложения 4.1 гл. I размерность всякого трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A,\ B,\ C)$ порядка $m\times n\times k$ удовлетворяет неравенству $\dim M(A,\ B,\ C)\leqslant\leqslant(m-1)(n-1)(k-1)$.

В то же время трехиндексным планарным транспортным многогранником, размерность которого равна числу $(m-1)\times\times(n-1)(k-1)$, является многогранник $M(A^*,\ B^*,\ C^*)$ порядка $m\times n\times k$, определенный матрицами

$$A^*=\begin{Vmatrix} n & n\dots n\\ n & n\dots n\\ \dots & \dots\\ n & n\dots n\end{Vmatrix},\quad B^*=\begin{Vmatrix} m & m\dots m\\ m & m\dots m\\ \dots & \dots\\ m & m\dots m\end{Vmatrix},\quad C^*=\begin{Vmatrix} k & k\dots k\\ k & k\dots k\\ \dots & \dots\\ k & k\dots k\end{Vmatrix},$$

поскольку у него существует точка $\|x_{ijt}\|_{m\times n\times k}$ с условиями $x_{ijt}>0$ $\forall(i,\ j,\ t)\in N_m\times N_n\times N_k$ Теорема 2.1 доказана.

**3. Симплексы.** Среди классических транспортных многогранников порядка $m\times n$ имеются $\max(m,\ n)$-симплексы лишь в случае, когда $\min(m,\ n)=2$ (см. § 5 гл. VI).

Имеет место следующая теорема, принадлежащая О. А. Феденя [17].

Теорема 2.2. *Среди трехиндексных планарных транспортных многогранников порядка $m\times n\times k$, $m,\ n,\ k\geqslant 2$, существуют $(m-1)(n-1)(k-1)$-симплексы.*

Доказательство. Рассмотрим трехиндексный планарный транспортный многогранник $M(A_0,\ B_0,\ C_0)$ порядка $m\times n\times k$, заданный матрицами

$$A_0=\begin{Vmatrix} n & 3(n-1)+1 & \dots & 3(n-1)+1\\ 3(n-1)+1 & 3 & \dots & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3(n-1)+1 & 3 & \dots & 3\end{Vmatrix},$$

$$B_0=\begin{Vmatrix} m & 3(m-1)+1 & \dots & 3(m-1)+1\\ 3(m-1)+1 & 3 & \dots & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3(m-1)+1 & 3 & \dots & 3\end{Vmatrix},$$

$$C_0=\begin{Vmatrix} k & 3(k-1)+1 & \dots & 3(k-1)+1\\ 3(k-1)+1 & 3 & \dots & 3\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 3(k-1)+1 & 3 & \dots & 3\end{Vmatrix}.$$

Ясно, что матрица $\|x^*_{ijt}\|_{m\times n\times k}$ с элементами

$$\begin{aligned}
&x^*_{11t}=1 && \forall t\in N_k,\\
&x^*_{1j1}=1 && \forall j\in N_n,\\
&x^*_{i11}=1 && \forall i\in N_m,\\
&x^*_{ij1}=3 && \forall i\in N_m\setminus\{1\},\quad j\in N_n\setminus\{1\},\\
&x^*_{i1t}=3 && \forall i\in N_m\setminus\{1\},\quad t\in N_k\setminus\{1\},\\
&x^*_{1jt}=3 && \forall j\in N_n\setminus\{1\},\quad t\in N_k\setminus\{1\},\\
&x^*_{ijt}=0 && \text{для остальных индексов}
\end{aligned}$$

является вершиной многогранника $M(A_0, B_0, C_0)$. Нетрудно видеть, что всякая другая вершина $\|x_{ijt}\|_{m\times n\times k}$ многогранника $M(A_0, B_0, C_0)$ имеет вид

$$x_{ijt}=\begin{cases} x^*_{ijt}-1, & \text{если } (i, j, t)\in K^-,\\ x^*_{ijt}+1, & \text{если } (i, j, t)\in K^+,\\ x^*_{ijt} & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

где

$$K^-=\{(i_0, j_0, 1), (i_0, 1, t_0), (1, j_0, t_0), (1, 1, 1)\},$$
$$K^+=\{(i_0, j_0, t_0), (i_0, 1, 1), (1, j_0, 1), (1, 1, t_0)\}.$$

Здесь $(i_0, j_0, t_0)$ — некоторая фиксированная тройка индексов из множества $\{2, 3, \dots, m\}\times\{2, 3, \dots, n\}\times\{2, 3, \dots, k\}$. Следовательно, многогранник $M(A_0, B_0, C_0)$ является невырожденным и $f_0(M(A_0, B_0, C_0))=(m-1)(n-1)(k-1)+1$. Поэтому, принимая во внимание, что размерность всякого невырожденного трехиндексного планарного транспортного многогранника порядка $m\times n\times k$ равна числу $(m-1)(n-1)(k-1)$, заключаем, что многогранник $M(A_0, B_0, C_0)$ будет $(m-1)(n-1)(k-1)$-симплексом. Теорема 2.2. доказана.

Из теоремы 2.2 сразу получается следующее следствие.

Следствие 2.3. *Минимальное число вершин в классе невырожденных трехиндексных планарных транспортных многогранников порядка $m\times n\times k$ равно числу $(m-1)(n-1)(k-1)+1$.*

## § 3. Планы многоиндексной проблемы выбора

Подобно тому как многоиндексные транспортные задачи являются естественным обобщением классической транспортной задачи, так и многоиндексные проблемы выбора есть обобщение широко известной задачи о назначениях.

В этом параграфе устанавливается связь между планами многоиндексной проблемы выбора и ортогональными системами многомерных кубов, а в частных случаях — и конечными проективными плоскостями [3].

**1. Ортогональные системы кубов.** Множество из $n^p$ элементов, расположенных в ячейках $p$-пространства, определяемых координатами $i_1, i_2, \ldots, i_p$, где $i_s \in N_n$, $s \in N_p$, называется *$p$-кубом* порядка $n$; 2-куб естественно называть квадратом. Будем его обозначать через $A=\|a_{i_1i_2\ldots i_p}\|_n$ и в дальнейшем предполагать, что $a_{i_1i_2\ldots i_p}\in N_n$, $n\geqslant 2$, $p\geqslant 1$.

Заметим, что всякому $n^p$-вектору с элементами из множества $N_n$ можно поставить в соответствие $p$-куб порядка $n$, если ячейки куба упорядочить лексикографическим способом и заполнить их соответствующими компонентами данного вектора. Очевидно, что это соответствие взаимно однозначное. Поэтому дальнейшие определения и утверждения мы будем формулировать как в терминах кубов, так и в терминах $n^p$-вектор-столбцов.

Зафиксируем значения индексов $i_1=i_1^0$, $i_2=i_2^0, \ldots, i_{s-1}=i_{s-1}^0$, $i_{s+1}=i_{s+1}^0, \ldots, i_p=i_p^0$. Последовательность $n$ ячеек с координатами $i_1^0, i_2^0, \ldots, i_{s-1}^0, i_s, i_{s+1}^0, \ldots, i_p^0$, $i_s\in N_n$, называется *линией $p$-куба* $A$ порядка $n$. Если на всякой линии куба $A$ лежат числа, совпадающие с множеством $N_n$, то такой куб называется *латинским $p$-кубом* порядка $n$. Определенные таким образом латинские кубы порядка $n$ являются естественным обобщением понятия латинского квадрата порядка $n$. В качестве примера латинских кубов можно указать кубы с элементами

$$a_{i_1i_2\ldots i_p}=1+r\left(\sum_{s=1}^{p} v_si_s/n\right)\qquad \forall i_s\in N_n,\quad s\in N_p,$$

где числа $v_s$ взаимно простые с $n$, а $r(u/v)$ — остаток от деления $u$ на $v$.

Так, например, 3-кубы порядка 3, изображенные на рис. 52, являются латинскими.

Определение 3.1. Система $p$-кубов порядка $n$

$$A^1,\ A^2,\ \ldots,\ A^p,\ \text{где}\ A^s=\left\|a^s_{i_1i_2\ldots i_p}\right\|_n, \tag{3.1}$$

называется *ортогональной*, если все $n^p$ возможные $p$-выборки $\left(a^1_{i_1 i_2 \ldots i_p},\ a^2_{i_1 i_2 \ldots i_p},\ \ldots,\ a^p_{i_1 i_2 \ldots i_p}\right)$ различны.

Отношение ортогональности не изменяется при любой одинаковой перестановке $n^p$ ячеек во всех кубах системы (3.1) одновременно.

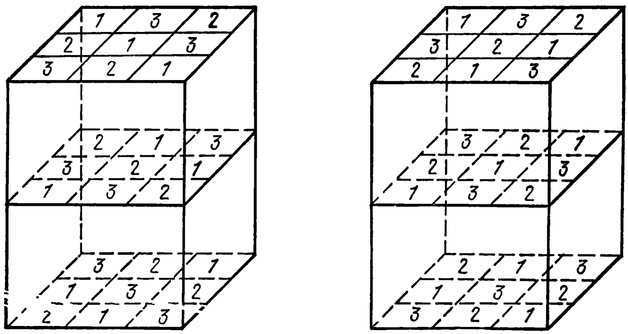


Рис. 52.

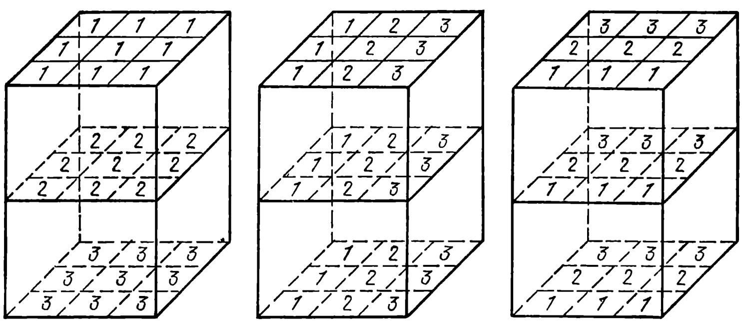


Рис. 53.

Пусть $E^1 = \left\| e^1_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\|_n$, $E^2 = \left\| e^2_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\|_n$, $\ldots$, $E^p = \left\| e^p_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\|_n$ — $p$-кубы порядка $n$ такие, что $e^s_{i_1 i_2 \ldots i_p} = i_s$, $i_s \in N_n$ для всех наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_p)$. Такую систему кубов будем называть *нормальной*.

Для примера приведем два квадрата 3-го порядка

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix},$$

образующих нормальную систему, и три куба 3-го порядка, также образующих нормальную систему (рис. 53).

Легко видеть, что нормальная система кубов является ортогональной.

Определение 3.2. Система $p$-кубов порядка $n$

$$A^1,\ A^2,\ \ldots,\ A^t \quad (p \leqslant t) \tag{3.2}$$

называется $(t,\ n,\ p)$*-ортогональной*, если любые $p$ кубов из (3.2) образуют ортогональную систему.

Если $p=2$, то понятие $(t,\ n,\ p)$-ортогональной системы совпадает с обычным понятием $t$ попарно ортогональных квадратных матриц порядка $n$, существование которой эквивалентно существованию $t-2$ попарно ортогональных латинских квадратов [12], [13], [18].

Естественно, что понятия ортогональности и $(t,\ n,\ p)$-ортогональности кубов могут быть перенесены на $n^p$-вектор-столбцы. В частности, таблица, составленная из $p$ столбцов так, что ее строками являются все возможные $p$-выборки из множества $N_n$, представляет собой ортогональную систему вектор-столбцов.

Перейдем к установлению связи между свойством ортогональности и свойством быть латинским кубом.

Рассмотрим $(t,\ n,\ p)$-ортогональную систему (3.2). Для всякой фиксированной ячейки, определенной координатами $i_1^0,\ i_2^0,\ \ldots,\ i_p^0$, в силу ортогональности системы $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p$ существует такая ячейка с координатами $i_1',\ i_2',\ \ldots,\ i_p'$, что $a^s_{i_1' i_2' \ldots i_p'} = i_s^0$, $s \in N_p$. Элементы, расположенные в этих двух ячейках, поменяем местами в каждом кубе системы (3.2). При этом, как уже отмечалось, ортогональность системы не нарушится.

Очевидно, что в результате подобных замен $(t,\ n,\ p)$-ортогональная система (3.2) всегда может быть приведена к следующей канонической форме:

$$E^1,\ E^2,\ \ldots,\ E^p,\ D^{p+1},\ \ldots,\ D^t, \tag{3.3}$$

где $E^1,\ E^2,\ \ldots,\ E^p$ — нормальная система кубов.

Далее покажем, что каждый куб $D^i$, $i=p+1,\ p+2,\ \ldots,\ t$, системы (3.3) латинский. Для этого достаточно установить, что элементы, расположенные на всякой линии куба $D^i$, совпадают с множеством $N_n$.

Рассмотрим линию $\mathscr{L}$ с ячейками $i_1^0,\ i_2^0,\ \ldots,\ i_{r-1}^0,\ i_r,\ i_{r+1}^0,\ \ldots$ $\ldots,\ i_p^0$, $i_r \in N_n$, где $1 \leqslant r \leqslant p$.

По определению нормальной системы имеем

$$e^s_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_r i_{r+1}^0 \ldots i_p^0} = i_s^0, \quad s=1,\ 2,\ \ldots,\ r-1,\ r+1,\ \ldots,\ p,\ i_r \in N_n.$$

Поэтому все $(p-1)$-выборки

$$\Big(e^1_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_r i_{r+1}^0 \ldots i_p^0},\ \ldots,\ e^{r-1}_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_r i_{r+1}^0 \ldots i_p^0},$$
$$e^{r+1}_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_r i_{r+1}^0 \ldots i_p^0},\ \ldots,\ e^{p}_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{r-1}^0 i_r i_{r+1}^0 \ldots i_p^0}\Big) \ \forall i_r \in N_n,$$

одинаковы. С другой стороны, ясно, что система кубов $E^1, E^2, \ldots, E^{r-1}, D^i, E^{r+1}, \ldots, E^p$ при любом $p+1 \leqslant i \leqslant t$ является ортогональной.

Следовательно, на линии $\mathscr{L}$ должны находиться все числа множества $N_n$.

Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 3.1 [3]. *Для $(t, n, p)$-ортогональности системы* (3.2) *необходимо, чтобы каждый куб $D^i$, $i=p+1, p+2, \ldots, t$, ее канонической формы* (3.3) *был латинским.*

Теорема 3.2. *Условия теоремы* 3.1 *являются достаточными только в следующих двух случаях*: 1) $t=p+1$, 2) $p=1$.

Доказательство. То, что в указанных случаях система (3.3) является $(t, n, p)$-ортогональной, следует из определений латинского куба и нормальной системы.

Пусть $t \geqslant p+2$, $p \geqslant 2$ и пусть $D$ — латинский $p$-куб порядка $n$. Тогда легко видеть, что система $E^1, E^2 \ldots, E^{p-2}, D, D$ не ортогональна, а поэтому и система $E^1, E^2, \ldots, E^p, \underbrace{D, \ldots, D}_{t-k}$ не является $(t, n, p)$-ортогональной. Теорема 3.2 доказана.

Две $(t, n, p)$-ортогональные системы назовем *различными*, если различны их канонические формы. Число различных $(t, n, p)$-ортогональных систем обозначим через $G(t, n, p)$, а число латинских $p$-кубов порядка $n$ — через $L(n, p)$.

Из теорем 3.1 и 3.2 непосредственно вытекает полезное следствие.

Следствие 3.3 $G(t, n, p) \leqslant (L(n, p))^{t-p}$. *Причем* $G(t, n, p) = (L(n, p))^{t-p}$ *только в двух случаях*: 1) $t=p+1$, 2) $p=1$.

**2. Проблема выбора и ортогональные системы.** Пусть $1 \leqslant m < p$, $n \geqslant 2$. Проблема выбора $\mathfrak{A}(p, n, m)$ (ср. с $p$-индексной $m$-арной транспортной задачей) заключается в определении экстремума некоторой линейной формы при ограничениях

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \forall i_s \in N_n, \quad s \in N_p, \tag{3.4}$$

$$\sum_{k_1=1}^{n} \sum_{i_{k_2}=1}^{n} \cdots \sum_{i_{k_m}=1}^{n} x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{k_1-1} * i_{k_1+1} \ldots i_{k_m-1} * i_{k_m+1} \ldots i_p} = 1 \tag{3.5}$$

для всех $i_s \in N_n$, $s \neq k_1, k_2, \ldots, k_m$ и для всех наборов $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$, удовлетворяющих неравенствам

$$1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant p. \tag{3.6}$$

Множество планов задачи выбора $\mathfrak{A}(p, n, m)$, т. е. множество кубов $x = \| x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|_n$, удовлетворяющих условиям (3.4), (3.5), обозначим через $T(p, n, m)$.

Непосредственно из условий (3.4) и (3.5) следует, что любой $p$-куб порядка $n$ из непустого множества $T(p, n, m)$ содержит $n^{p-m}$ ненулевых элементов.

Пусть $x^0 = \| x^0_{i_1 i_2 \ldots i_p} \|_n \in T(p, n, m)$ и

$$\begin{array}{l} i_1^{(1)},\ i_2^{(1)},\ \ldots,\ i_p^{(1)}, \\ i_1^{(2)},\ i_2^{(2)},\ \ldots,\ i_p^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ i_1^{(n^p-m)},\ i_2^{(n^p-m)},\ \ldots,\ i_p^{(n^p-m)} \end{array} \tag{3.7}$$

— такие $p$-выборки, для которых $x^0_{i_1^{(j)} i_2^{(j)} \ldots i_p^{(j)}} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, n^{p-m}$.

Теорема 3.4. $x^0 \in T(p, n, m)$ *тогда и только тогда, когда система вектор-столбцов таблицы* (3.7) *является* $(p, n, p-m)$*-ортогональной*

Для доказательства заметим, что при любых фиксированных $k_1, k_2, \ldots, k_m$, удовлетворяющих условиям (3.6), имеем $n^{p-m}$ различных уравнений вида (3.5). Поэтому для существования решения такой системы, удовлетворяющего условиям (3.4), необходимо и достаточно, чтобы для любой $(p-m)$-выборки $i_1^0, i_2^0, \ldots, i_{k_1-1}^0, i_{k_1+1}^0, \ldots, i_{k_m-1}^0, i_{k_m+1}^0, \ldots, i_p^0$ существовала такая $m$-выборка $i_{k_1}^0, i_{k_2}^0, \ldots, i_{k_m}^0$, что $x_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_p^0} = 1$,

$$x_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k_1-1}^0 i_{k_1} i_{k_1+1}^0 \ldots i_{k_m-1}^0 i_{k_m} i_{k_m+1}^0 \ldots i_p^0} = 0$$

для всех наборов $(i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_m}) \neq (i_{k_1}^0, i_{k_2}^0, \ldots, i_{k_m}^0)$.

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы 3.4.

Следствие 3.5. *Число планов проблемы выбора* $\mathfrak{A}(p, n, m)$ *равно числу* $(p, n, p-m)$*-ортогональных систем кубов.*

Проблему выбора $\mathfrak{A}(p, n, p-1)$ называют *аксиальной*, а проблему выбора $\mathfrak{A}(p, n, 1)$ — *планарной p-индексной проблемой выбора порядка n*. Для этих проблем выбора следствие 3.5 можно конкретизировать с учетом следствия 3.3 следующим образом.

Следствие 3.6. *Число планов p-индексной аксиальной проблемы выбора порядка n равно* $(n!)^{p-1}$.

Следствие 3.7. *Число планов p-индексной планарной проблемы выбора порядка n равно числу* $(p-1)$*-мерных латинских кубов порядка n.*

Для $p = 3$ эти результаты были впервые получены в [21].

**3. Проблема выбора и конечные проективные плоскости.** *Конечной проективной плоскостью* называют систему, состоящую из конечного множества «точек» и «прямых», которые, будучи связанными отношениями инцидентности («точка лежит на прямой» и «прямая проходит через точку»), удовлетворяют аксиомам:

1) две различные точки лежат на одной и только одной прямой;

2) две различные прямые проходят через одну и только одну точку;

3) существуют четыре различные точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Понятие порядка конечной проективной плоскости вводится следующим образом. Сначала доказывается, что если некоторая прямая конечной проективной плоскости содержит $n+1$ точек, то каждая прямая содержит $n+1$ точек. Это число $n$ и называется *порядком конечной проективной плоскости*.

Конечные проективные плоскости играют ведущую роль в комбинаторике. Они тесным образом связаны с ортогональными латинскими квадратами [12], [13], [18].

Теорема 3.8. *Конечная проективная плоскость порядка $n \geqslant 3$ существует тогда и только тогда, когда существует $(n+1,\ n,\ 2)$-ортогональная система квадратов порядка $n$.*

Отсюда и из следствия 3.5 получается следующая теорема.

Теорема 3.9. *Для существования конечной проективной плоскости порядка $n \geqslant 3$ необходимо и достаточно, чтобы множество планов проблемы выбора $\mathfrak{A}(n+1,\ n,\ n-1)$ было непусто.*

Так как проективной плоскости порядка 6 не существует, то отсюда, в частности, следует, что проблема выбора $\mathfrak{A}(7,\ 6,\ 5)$ не разрешима, т. е. $T(7,\ 6,\ 5)=\varnothing$.

Известно, что конечная проективная плоскость существует, если ее порядок $n$ — степень простого числа ($n \geqslant 3$). Поэтому из теоремы 3.9 вытекает следующий факт.

Следствие 3.10. *Пусть натуральное число $n$ — степень простого числа. Тогда для $n \geqslant 3$ существуют планы проблемы выбора $\mathfrak{A}(n+1,\ n,\ n-1)$.*

**Задачи и дополнения**

1 [2]. Неравенство $K \geqslant \sum_{s=1}^{p} n_s$ (см. соотношение (1.3)) является необходимым условием невырожденности аксиального транспортного многогранника порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$. Показать, что утверждение, обратное теореме 1.3, верно лишь в случаях: 1) $p=2$, 2) $p=3$, $\sum_{s=1}^{3} n_s = 6$.

2. Убедиться в ошибочности утверждения: для невырожденности аксиального транспортного многогранника $M(a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $p > 2$, достаточно, чтобы для любых $1 \leqslant k < l \leqslant p$ классические транспортные многогранники $M(a^k,\ a^l)$ были невырожденными.

3 [2]. Пусть $n_1 = \max_{1 \leqslant s \leqslant p} n_s$, $\max_{2 \leqslant s \leqslant p} n_s \geqslant 2$. Любое целое число $\gamma$, $\prod_{s=1}^{p} n_s - n_1 \leqslant \gamma \leqslant \prod_{s=1}^{p} n_s$, и только оно, может быть числом граней максимальной размерности аксиального транспортного многогранника порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$.

4 [2]. Набор индексов $R=(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_p)$, $r_s \in N_{n_s}$, $s \in N_p$, многогранника $M(a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p)$ будем называть *полным*, если $\sum_{s=1}^{p} a^s_{r_s} \geqslant (p-1)K$. В противном случае набор $R$ не является полным. $s$-ю координату полного набора $R$ будем называть *$r$-полной*, если 1) $r=r_s \leqslant n_s$; 2) наборы $(r_1,\ r_2,\ \ldots$ $\ldots,\ r_{s-1},\ j,\ r_{s+1},\ \ldots,\ r_p)$ $\forall j \in N_r$ полные, а при $j=r+1,\ r+2,\ \ldots,\ n_s$ не являются полными.

Доказать, что аксиальный транспортный многогранник порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p$, $n_2 \geqslant 2$, имеет $\gamma$, $\prod_{s=1}^{p} n_s - n_1 \leqslant \gamma \leqslant \prod_{s=1}^{p} n_s$, граней максимальной размерности тогда и только тогда, когда существует набор индексов с $\left(\prod_{s=1}^{p} n_s - \gamma\right)$-полной координатой. В случае, когда $\gamma = \sum_{s=1}^{p} n_s$, таким условием является отсутствие полных наборов.

5 [2]. Обосновать следующие свойства:

1) Всякий невырожденный аксиальный транспортный многогранник с минимальным числом вершин имеет минимальное число граней максимальной размерности.

2) Для того чтобы невырожденный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ имел минимальное число вершин, необходимо и достаточно, чтобы любой многогранник $M(a^{p-k+1}, a^{p-k+2}, \ldots, a^p)$, $k = 2, 3, \ldots, p$, имел минимальное число граней максимальной размерности.

6. Минимальный диаметр в классе невырожденных аксиальных транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p \geqslant 2$, $n_1 \geqslant 3$, $p \geqslant 2$, равен числу $\sum_{s=2}^{p} (n_s - 1)$. Невырожденный аксиальный транспортный многогранник имеет минимальный диаметр, если он регулярный (см. определение 1.5). Эти результаты получены В. М. Лихачевым

7. Рассмотрим задачу:

$$\min \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_p=1}^{n_p} c_{i_1 \ldots i_p} x_{i_1 \ldots i_p},$$

$$\sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \ldots \sum_{i_p=1}^{n_p} x_{i_1 \ldots i_p} = a^s_{i_s} \quad \forall i_s \in N_{n_s}, \quad s \in N_p,$$

$$d^s_{i_s i_p} \leqslant \sum_{i_1=1}^{n_1} \ldots \sum_{i_{s-1}=1}^{n_{s-1}} \sum_{i_{s+1}=1}^{n_{s+1}} \ldots \sum_{i_{p-1}=1}^{n_{p-1}} x_{i_1 \ldots i_p} \leqslant b^s_{i_s i_p}$$

$$\forall i_s \in N_{n_s}, \quad s \in N_{p-1}, \quad i_p \in N_{n_p}$$

$x_{i_1 \ldots i_p} \geqslant 0$ для всех наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$, где $a^s_{i_s}$, $d^s_{i_s i_p}$, $b^s_{i_s i_p}$, $c_{i_1 \ldots i_p}$ — заданные действительные числа, причем $a^s_{i_s} > 0$, $d^s_{i_s i_p} \geqslant 0$, $b^s_{i_s i_p} \geqslant 0$, $c_{i_1 \ldots i_p} \geqslant 0$, $\sum_{i_s=1}^{n_s} a^s_{i_s} = K$ $\forall s \in N_p$. Эта задача разрешима в том и только в том случае, когда для всякого $s \in N_{p-1}$ выполняются неравенства [10]:

$$a^s_{i_s} \geqslant \sum_{i_p=1}^{n_p} d^s_{i_s i_p} \quad \forall i_s \in N_{n_s},$$

$$a^p_{i_p} \geqslant \sum_{i_s=1}^{n_s} d^s_{i_s i_p} \quad \forall i_p \in N_{n_p},$$

$$\sum_{i_s=1}^{n_s} \min\left(a^s_{i_s} - \sum_{i_p=1}^{n_p} d^s_{i_s i_p}, \sum_{i_p \in I} \left(b^s_{i_s i_p} - d^s_{i_s i_p}\right)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i_p \in I} \left(a^p_{i_p} - \sum_{i_s=1}^{n_s} d^s_{i_s i_p}\right) \quad \forall I \subseteq N_{n_p}.$$

В работах [10], [14] можно найти условия разрешимости и для других частных случаев многоиндексных транспортных задач.

8. Решение трехиндексной транспортной задачи с аксиальными суммами

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (d_{it}+h_{tj})\, x_{itj},$$

$$\sum_{t=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_{itj}=a_i \qquad \forall i \in N_m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{k} x_{itj}=b_j \qquad \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{itj}=c_t \qquad \forall t \in N_k,$$

$$x_{itj} \geqslant 0 \quad \forall (i,\ t,\ j) \in N_m \times N_k \times N_n$$

может быть сведено к решению двух следующих классических транспортных задач:

$$1)\ \min \left\{ \sum_{i=1}^{m} \sum_{t=1}^{k} d_{it} y_{it}\colon\ \| y_{it} \|_{m\times k} \in M(a,\ c) \right\};$$

$$2)\ \min \left\{ \sum_{t=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} h_{tj} z_{tj}\colon\ \| z_{tj} \|_{k\times n} \in M(c,\ b) \right\},$$

т. е. соответствие между оптимальными планами исходной задачи и оптимальными планами задач 1) и 2) устанавливается формулами

$$y_{it}=\sum_{j=1}^{n} x_{itj} \qquad \forall (i,\ t) \in N_m \times N_k,$$

$$z_{tj}=\sum_{i=1}^{m} x_{itj} \qquad \forall (t,\ j) \in N_k \times N_n.$$

9 [19]. Число вершин всякого планарного транспортного многогранника порядка $m\times n \underbrace{\times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{p-2}$, $m,\ n \geqslant 2$, не превосходит числа $m^{n-1} n^{m-1} \times \times 2^{(p-2)(m-1)(n-1)}$.

10. Сформулировать условия на компоненты векторов $a^s\ \forall s \in N_p$, при выполнении которых аксиальный транспортный многогранник $M(a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, заданный целочисленными векторами $a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p$, имеет минимальное число целочисленных вершин.

11 [9]. Максимальное число целочисленных вершин в классе аксиальных транспортных многогранников $M(a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_1=\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} n_s$, определенных целочисленными векторами $a^1,\ a^2,\ \ldots,\ a^p$, не меньше числа $\prod\limits_{s=2}^{p} \varphi(n_1,\ n_s)$, где $\varphi(n_1,\ n_s)$ — максимальное число вершин в классе классических транспортных многогранников порядка $n_1 \times n_s$.

12 [8]. Пусть $n \geqslant m \geqslant k$. Доказать, что условия Шелла являются достаточными лишь в случаях, когда $k=2$, $m=2,\ 3$.

13. Условия Моравека—Влаха необходимы и достаточны в случае, когда $\min(m,\ n,\ k)=2$.

14. Указать трехиндексный планарный транспортный многогранник, удовлетворяющий условию Хэли, но не удовлетворяющий условию Смита.

15. **Область** определения $p$-индексной 1-арной транспортной задачи порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$ будем называть *$p$-индексным планарным транспортным многогранником* порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$. Сформулировать и доказать аналоги условий Шелла, Хэли, Моравека—Влаха и Смига для $p$-индексного планарного транспортного многогранника порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$.

16. Трехиндексный планарный транспортный многогранник $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times 2$ непуст тогда и только тогда, когда выполняются условия [26]:

$$\sum_{i=1}^{m}\min\left(a_{i1}, \sum_{j\in J} c_{ij}\right)\geqslant\sum_{j\in J} b_{j1}\qquad \forall J\subseteq N_n.$$

В [16] эти условия обобщаются на случай $p$-индексного планарного транспортного многогранника порядка $m\times n\times 2\times 2\times\ldots\times 2$.

17. Для непустоты трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times k$ достаточно выполнения хотя бы одного из следующих условий:

$$1)\ a_{it}=\sum_{j=1}^{n}\frac{b_{jt}c_{ij}}{\sum\limits_{r=1}^{m} c_{rj}}\qquad \forall (i, t)\in N_m\times N_k;$$

$$2)\ b_{jt}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_{it}c_{ij}}{\sum\limits_{s=1}^{n} c_{is}}\qquad \forall (j, t)\in N_n\times N_k;$$

$$3)\ c_{ij}=\sum_{t=1}^{k}\frac{a_{it}b_{jt}}{\sum\limits_{r=1}^{m} a_{rt}}\qquad \forall (i, j)\in N_m\times N_n.$$

18 [25]. Рассмотрим трехиндексную планарную транспортную задачу:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} d_{ijt}x_{ijt} : x=\| x_{ijt}\|_{m\times n\times k}\in M(A, B, C)\right\},$$

где $d_{ijt}$ — заданные действительные числа. Доказать, что точка $\| x_{ijt}\|_{m\times n\times k}\in M(A, B, C)$ является оптимальным решением этой задачи тогда и только тогда, когда найдутся такие числа
$u_{it}$, $(i, t)\in N_m\times N_k$, $v_{jt}$, $(j, t)\in N_n\times N_k$, $w_{ij}$, $(i, j)\in N_m\times N_n$, что

$$u_{it}+v_{jt}+w_{ij}=d_{ijt},\quad \text{если}\quad x_{ijt}>0,$$
$$u_{it}+v_{jt}+w_{ij}\leqslant d_{ijt},\quad \text{если}\quad x_{ijt}=0.$$

19 [25]. Решение транспортной задачи с аксиальными суммами:

$$\min\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} d_{ijt}\,x_{ijt},$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{t=1}^{k} x_{ijt}=b_j\qquad \forall j\in N_n,$$
$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}=c_t\qquad \forall t\in N_k,$$
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{k} x_{ijt}=a_i\qquad \forall i\in N_m,$$
$$x_{ijt}\geqslant 0\qquad \forall (i, j, t)\in N_m\times N_n\times N_k$$

может быть сведено к решению некоторой трехиндексной планарной транспортной задачи:

$$\min\left\{\sum_{i=1}^{m+1}\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{t=1}^{k+1} d_{ijt}x_{ijt}\colon \sum_{i=1}^{m+1} x_{ijt}=b_{jt} \quad \forall (j,\ t)\in N_{n+1}\times N_{k+1},\right.$$
$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ijt}=a_{it} \quad \forall (i,\ t)\in N_{m+1}\times N_{k+1},\quad \sum_{t=1}^{k+1} x_{ijt}=c_{ij},$$
$$\left.\forall (i,\ j)\in N_{m+1}\times N_{n+1},\quad x_{ijt}\geqslant 0 \quad \forall (i,\ j,\ t)\in N_{m+1}\times N_{n+1}\times N_{k+1}\right\}.$$

20 [6]. Всякое целое число $\gamma$, $\prod_{s=1}^{p} n_s-\prod_{s=2}^{p}(n_s-1)\leqslant\gamma\leqslant\prod_{s=1}^{p} n_s$, может быть числом граней максимальной размерности некоторого $p$-индексного невырожденного планарного транспортного многогранника порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$, $n_1=\max\limits_{1\leqslant s\leqslant p} n_s$

21 [7]. Число базисов $p$-индексного планарного транспортного многогранника порядка $m\times n\times 2\times 2\times\ldots\times 2$ равно числу $m^{n-1}n^{m-1}2^{(p-2)(m-1)(n-1)}$ $(m,\ n\geqslant 2)$.

22 [23]. Всякий $p$-индексный планарный транспортный многогранник порядка $m\times n\times 2\times 2\times\ldots\times 2$, определенный целочисленными матрицами, является целочисленным.

23 [17]. Теорема 2.2 следующим образом обобщается на многоиндексный случай: среди $p$-индексных планарных транспортных многогранников порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$ имеются $\left(\prod_{s=1}^{p}(n_s-1)\right)$-симплексы в двух случаях: 1) $n_s\geqslant 2$ $\forall s\in N_p$, $p$ — нечетно; 2) $\min\limits_{1\leqslant s\leqslant p} n_s=2$, $p$ — четно.

24. Минимальное число $\sigma$ вершин в классе невырожденных $p$-индексных планарных транспортных многогранников порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$ в случае, когда $p$ четно, удовлетворяет неравенствам:

$$\prod_{s=1}^{p}(n_s-1)+1\leqslant\sigma\leqslant\left(\frac{\prod\limits_{s=1}^{p}(n_s-1)}{\min\limits_{1\leqslant s\leqslant p} n_s-1}+1\right)^{\min\limits_{1\leqslant s\leqslant p} n_s-1}.$$

25 [20]. Для того чтобы при заданных целых неотрицательных числах $a_{ij}$, $\alpha_i$ и $\beta_j$ система

$$\sum_{t=1}^{k} x_{ijt}=a_{ij} \quad \forall (i,\ j)\in N_m\times N_n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}=\alpha_i \quad \forall i\in N_m,\ t\in N_k,$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt}=\beta_j \quad \forall j\in N_n,\ t\in N_k$$

была разрешима в целых числах, необходимы и достаточны условия:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\leqslant k\beta_j \quad \forall j\in N_n,$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\leqslant k\alpha_i \quad \forall i\in N_m.$$

26 Пусть $R \subseteq N_m$, $\bigcup\limits_{p=1}^{s} P_p = N_m$, $\bigcup\limits_{q=1}^{l} Q_q = N_n$, $P_p \cap P_q = Q_p \cap Q_q = \varnothing$ при $p \neq q$. Для того чтобы при заданных неотрицательных числах $a_i$, $b_j$, $a_{ik}$, $b_{jk}$, $d^-_{pq}$, $d^+_{pq}$ система

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \leqslant \sum_{k=1}^{t} b_{jk} \quad \forall t \in N_{r-1}, \quad j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{t} x_{ijk} \leqslant \sum_{k=1}^{t} a_{ik} \quad \forall t \in N_{r-1}, \quad i \in N_m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} = b_j \quad \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} = a_i \quad \forall i \in R,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} \leqslant a_i \quad \forall i \in \overline{R},$$

$$d^-_{pq} \leqslant \sum_{i \in P_p} \sum_{j \in Q_q} \sum_{k=1}^{r} x_{ijk} \leqslant d^+_{pq} \quad \forall (p, q) \in N_s \times N_l,$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \quad \forall (i, j, k) \in N_m \times N_n \times N_r$$

была совместна, необходимы и достаточны условия:

$$\sum_{i \in R} a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

$$\sum_{k=1} a_{ik} = a_i \quad \forall i \in R,$$

$$\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \leqslant a_i \quad \forall i \in \overline{R},$$

$$\sum_{k=1}^{r} b_{jk} = b_j \quad \forall j \in N_n,$$

$$\alpha_p \geqslant 0, \quad \forall p \in N_s,$$

$$\beta_q \geqslant 0, \quad \forall q \in N_l,$$

$$\sum_{p=1}^{s} \min(\alpha_p, \gamma_p) \geqslant \sum_{q \in L} \beta_q \quad \forall L \subseteq N_l,$$

где $\alpha_p = \sum\limits_{i \in P_p} a_i - \sum\limits_{q=1}^{l} d^-_{pq}$, $\beta_q = \sum\limits_{j \in Q_q} b_j - \sum\limits_{p=1}^{s} d^-_{pq}$, $\gamma_p = \sum\limits_{q \in L} (d^+_{pq} - d^-_{pq})$.

27 [15]. Для того чтобы при заданных целых неотрицательных числах $a_{ij}$, $b_i$, $d_j$, $g$ система

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ijk}=a_{ij} \quad \forall l \in N_m, \quad j \in N_n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant b_i \quad \forall i \in N_m, \quad k \in N_l,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant d_j \quad \forall j \in N_n, \quad k \in N_l,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant g \quad \forall k \in N_l,$$

$$x_{ijk} \geqslant 0 \quad \forall (i, j, k) \in N_m \times N_n \times N_l$$

была разрешима в целых числах, необходимы и достаточны условия:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant l b_i \quad \forall i \in N_m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \leqslant l d_j \quad \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant l g.$$

28 [15]. Для того чтобы при заданных целых неотрицательных числах $h$, $p$, $t_{ij}$, $a_i$, $b_j$ система

$$\sum_{k=1}^{l} x_{ijk}=t_{ij} \quad \forall (i, j) \in N_m \times N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijk} \leqslant 1 \quad \forall j \in N_n, \quad k=1, 2, \ldots, lh,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant 1 \quad \forall i \in N_m, \quad k=1, 2, \ldots, lh,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \leqslant p, \quad k=1, 2, \ldots, lh,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=(s-1)h+1}^{sh} x_{ijk} \leqslant a_i \quad \forall i \in N_m, \quad s \in N_l,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=(s-1)h+1}^{sh} x_{ijk} \leqslant b_j \quad \forall j \in N_n, \quad s \in N_l,$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N_m, \quad j \in N_n, \quad k=1, 2, \ldots, lh$$

была совместна, необходимы и достаточны условия:

$$\sum_{j=1}^{n} t_{ij} \leqslant la_i \quad \forall i \in N_m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} t_{ij} \leqslant lb_j \quad \forall j \in N_n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \leqslant lph.$$

29 [3]. В теории латинских квадратов широко известны следующие результаты 1) число попарно ортогональных латинских квадратов порядка $n$ не превосходит числа $n-1$; 2) не существует пары ортогональных латинских квадратов порядка 6 и порядка 2.

Основываясь на этих результатах доказать:

1) для $(t, n, p)$-ортогональности системы кубов необходимо, чтобы $t-p < n-1$;

2) $G(t, n, p)=0$, если $1 < p < t-1$, $n=2$, 6;

3) $G(t, n, p)=0$, если $t \geqslant n+p$, $p > 1$.

30. Показать на примерах, что при $p > 2$ $p$-индексный транспортный многогранник, определенный условиями (3.5) и $x_{i_1 i_2 \ldots i_p} \geqslant 0$, $\forall i_s \in N_{n_s}$, $s \in N_p$ может иметь не целочисленные вершины.

31 [3]. Пусть вершинами гиперграфа $G$ являются помеченные точки множества $B = \bigcup\limits_{1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant p} B_{k_1 k_2 \ldots k_m}$, где $B_{k_1 k_2 \ldots k_m} = \{b_{i_1 i_2 \ldots i_{k_1-1} * i_{k_1+1} \ldots i_{k_m-1} * i_{k_m+1} \ldots i_p}\}$, $i_s \in N_{n_s}$, $s \in N_p$, и каждое ребро состоит из $\binom{p}{m}$ точек вида $b_{i_1^0 i_2^0 \ldots i_{k_1-1}^0 * i_{k_1+1}^0 \ldots i_{k_m-1}^0 * i_{k_m+1}^0 \ldots i_p^0}$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant p$.

Если никакие два ребра $G$ не смежны и каждая вершина инцидентна некоторому ребру, то гиперграф $G$ называется *совершенным* $\binom{p}{m}$-*сочетанием*. Число таких гиперграфов будем обозначать через $\Gamma(p, n, m)$. В случае, когда $p=2$, $m=1$, получаем граф, который называется *совершенным паросочетанием*. Справедливы следующие формулы:

$$\Gamma(p, n, m) = |T(p, n, m)| = G(p, n, p-m),$$

$$\Gamma(p, n, p-1) = (n!)^{p-1}, \quad \Gamma(p, n, 1) = L(n, p-1).$$

32 [3]. Существование $(t, n, 2)$-ортогональной системы латинских квадратов влечет за собой существование $(t+2, n, 2)$-ортогональной системы квадратных матриц. Оказывается, что аналогичное утверждение уже неверно для 3-кубов. Показать на примере, что из (4, 3, 3)-ортогональности системы латинских кубов $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$ не следует (7, 3, 3)-ортогональность системы $E_1$, $E_2$, $E_3$, $D_1$, $D_2$, $D_3$, $D_4$.

33. Известны алгоритмы [1], [11], решающие задачу о назначениях порядка $n \times n$ за $O(n^3)$ действий (арифметических и эквивалентных им операций). Однако уже для трехиндексной аксиальной проблемы выбора эффективные алгоритмы неизвестны.

34*. Верно ли, что всякое целое число от 0 до $(m-1)(n-1)(k-1)$, и только оно, реализуется как размерность некоторого трехиндексного планарного транспортного многогранника порядка $m \times n \times k$?

35*. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: не существует невырожденного аксиального транспортного многогранника $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_p \geqslant 2$, $n_1 \geqslant 3$, для числа вершин которого выполняются неравенства

$$\prod_{s=2}^{p}\left(\prod_{i=1}^{s-1} n_i\right)^{n_s-1} < f_0(M(a^1, a^2, \ldots, a^p)) < \prod_{s=2}^{p}\left(\prod_{i=1}^{s-1} n_i\right)^{n_s-1} + \prod_{s=1}^{p} n_s - \sum_{s=1}^{p} n_s + p - 2.$$

36*. Верно ли, что всякое целое число вида $(m-1)(n-1)(k-1)+t$, где $1 \leqslant t \leqslant mk+nk+mn-k-m-n$, и только оно, может быть числом граней максимальной размерности некоторого невырожденного планарного трехиндексного транспортного многогранника порядка $m\times n\times k$, $m, n, k \geqslant 2$?

37*. Выяснить, имеет ли место утверждение: не существует невырожденного планарного трехиндексного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times k$, $m, n, k\geqslant 2$, для числа вершин которого выполняются неравенства

$$(m-1)(n-1)(k-1)+1 < f_0(M(A, B, C)) < 2(m-1)(n-1)(k-1).$$

38*. Верно ли, что всякое целое число от $\sum_{s=2}^{p}(n_s-1)$ до $\sum_{s=1}^{p} n_s - p + 1$, и только оно, реализуется как диаметр некоторого невырожденного аксиального транспортного многогранника порядка $n_1\times n_2\times\ldots\times n_p$, $n_1\geqslant n_2\geqslant\ldots\geqslant n_p\geqslant 2$, $n_1\geqslant 3$, $p\geqslant 2$?

39 [24]. Для непустоты планарного транспортного многогранника $M(A, B, C)$ порядка $m\times n\times k$ необходимо выполнение следующих неравенств:

$$b(J, K_1)+c(K_2, \bar{J})-a(K)\geqslant 0 \quad \forall J\subseteq N_n, \quad K\subseteq N_m\times N_k;$$
$$a(I, S_1)+c(\bar{I}, S_2)-b(S)\geqslant 0 \quad \forall I\subseteq N_m, \quad S\subseteq N_n\times N_k;$$
$$a(P_2, T)+b(P_1, \bar{T})-c(P)\geqslant 0 \quad \forall T\subseteq N_k, \quad P\subseteq N_m\times N_n,$$

где $K_1=\{t\colon (i, t)\in K\}$, $K_2=\{i\colon (i, t)\in K\}$, $P_1=\{j\colon (i, j)\in P\}$, $P_2=\{i\colon (i, j)\in P\}$, $S_1=\{t\colon (j, t)\in S\}$, $S_2=\{j\colon (j, t)\in S\}$, символ $z(R)$ обозначает сумму тех элементов матрицы $\|z_{ij}\|_{m\times n}$, у которых пара индексов $(i, j)$ пробегает множество $R$, $R\subseteq N_m\times N_n$.

40. Если $M(A_0, B_0, C_0)$ и $M(A_1, B_1, C_1)$ — непустые планарные транспортные многогранники одного и того же порядка, то всякий многогранник $M(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda)$, $0<\lambda<1$ определенный матрицами $A_\lambda=\lambda A_1+(1-\lambda)A_0$, $B_\lambda=\lambda B_1+(1-\lambda)B_0$, $C_\lambda=\lambda C_1+(1-\lambda)C_0$, также будет непустым.

## ПРОБЛЕМЫ, ГИПОТЕЗЫ

1. Получить необходимые и достаточные условия существования 3-многогранника, каждая из вершин которого имеет заданное число смежных. Другими словами, проблема состоит в описании последовательностей, назовем их *полиэдральными*, являющихся степенями вершин 3-полиэдрального графа (Sainte Marie C. Question 505. — Intermed Math., 1895, 2).

2. Выделить среди полиэдральных последовательностей те, которые однозначно определяют комбинаторный тип многогранника.

3 (*гипотеза Уолша*) *). Последовательность $a_1, \ldots, a_m$ называется *унимодулярной*, если не существует $i < j < k < l$ таких, что $a_i < a_j > a_k < a_l$. Верно ли, что последовательность $\{a_k\}$ унимодальная, если $a_k$ — число $k$-граней многогранника; $a_k$ — число неизоморфных матроидов ранга $k$ над $n$ элементами (Combinatorics. Proceedings Confer. Combin. Math., Oxford, 1972).

4. Существуют ли для каждого $d \geqslant 4$ $d$-полиэдральные графы, однозначно определяющие многогранник с точностью до комбинаторной эквивалентности.

5. Если граф $G$ является $d'$-полиэдральным, а также и $d''$-полиэдральным, то является ли это необходимым условием того, что он $d$-полиэдральный для всех $d' \leqslant d \leqslant d''$.

6. Пусть $M$ — 3-многогранник, $C$ — простой цикл в графе многогранника $M$, содержащий $n$ вершин, $F$ — выпуклый $n$-угольник на плоскости $H$. Тогда существует многогранник $M'$ комбинаторно эквивалентный $M$ и такая ортогональная проекция $\pi$: $E_3 \to H$, что $\pi(M') = F$ и $\pi^{-1}(\mathrm{bd}F)$ совпадает с вершинами и ребрами многогранника $M'$, соответствующими $C$.

7. Для каждого $d$ существует конечное расширение $\overline{Q}$ поля рациональных чисел такое, что каждый комбинаторный тип $d$-многогранника реализуем в $\overline{Q}_d$.

8. Граничный комплекс многогранника относительно частичного порядка $\subseteq$ является структурой (структурой граней). Найти условия, которым должна удовлетворять структура, чтобы быть изоморфной структуре граней некоторого многогранника.

9 (*гипотеза о максимальном диаметер.*) $\Delta(d, n) \leqslant n - d$ (см. § 2 гл. II).

10. Построить симплексные алгоритмы, которые просматривали бы вершины вдоль некоторой невозвращающейся цепи. Будут ли такие алгоритмы полиномиальными.

11 (*гипотеза Падберга* см. [60] гл. IV). Пусть $A$ — булева матрица. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(1) релаксационный многогранник $M \leqslant (A, e)$ целочисленный;

(2) $A$ — не содержит $(m \times k)$-подматриц $A'$, обладающих свойством $\pi_{\beta, k}$ при $3 < k < n$ и $\beta = 2$, $[k/2]$, $k - 1$ (сравни с теоремой 5.5 гл. IV).

*) Гипотеза опровергнута в статье B j o r n e r A. The unimodality conjecture for convex polytopes. — Bull. Amer. Math. Soc., 1981, 4, № 2.

12. Получить необходимые и достаточные условия квазицелочисленности многогранника $M(A, b)$ при любом целочисленном векторе $b$.

13. Найти необходимые и достаточные условия комбинаторной эквивалентности полиматроидов $M(\rho_1)$, $M(\rho_2)$, где $\rho_1$, $\rho_2$ — субмодулярные функции.

14. Получить аналитическое описание многогранника задачи стандартизации $H_m(Q)$ при произвольной (не булевой) матрице $Q$.

15 *). Какие из следующих задач принадлежат классу $NP$-полных: проверить, является ли данное неравенство $ax \leqslant b$ гранью максимальной размерности многогранника, являющегося выпуклой оболочкой характеристических векторов: 1) гамильтоновых циклов данного графа; 2) вершинных упаковок данного графа; 3) вершинных покрытий данного графа.

16. Получить аналитическое представление для многогранника conv $\{a_\pi: \pi \in H\}$ в случае, когда 1) $H$ — множество циклических перестановок; 2) $H$ — множество беспорядков; 3) $H$ — диэдральная подгруппа. Дать критерий смежности вершин в каждом из случаев.

17. Описать класс многогранников, у которых диаметр совпадает с радиусом.

18 (*гипотеза Сэйгала*). Если гипотеза о максимальном диаметре верна для некоторого многогранника, то она верна и для его пересечения с кубом.

19 (*гипотеза Грюнбаума о минимальном числе граней*).

$$\mu_k(d, n) = \binom{d+1}{k+1} + \binom{d}{k+1} - \binom{2d+1-n}{k+1}$$

для всех $k \in N_{d-1}$, $d+1 \leqslant n \leqslant 2d$.

20 (*две гипотезы Барнетта*). 1) Граф каждого простого 4-многогранника гамильтонов. 2) Если все 2-грани простого 3-многогранника имеют четное число ребер, то граф такого многогранника гамильтонов.

21. Диаметр всякого невырожденного классического транспортного многогранника порядка $m \times n$, $3 \leqslant m \leqslant n$, $n \geqslant 4$, с $(m-1)n+k$ гранями максимальной размерности, $0 \leqslant k \leqslant n$, и максимальным числом вершин равен числу $m+k-1$ (см. [16] гл. VI).

22. Верно ли, что всякое целое число вида $m+t$, где $0 \leqslant t \leqslant k-1$, и только оно, реализуется как диаметр некоторого невырожденного классического транспортного многогранника порядка $m \times n$, $2 \leqslant m \leqslant n$, с $(m-1)n+k$ гранями максимальной размерности для всякого $k \in N_n$?

23. Верно ли, что граф всякого невырожденного классического транспортного многогранника является гамильтоновым, но не является панциклическим?

24. Вырожденный классический транспортный многогранник $M(a, b)$ порядка $m \times n$ при взаимно простых $m$ и $n$ имеет максимальное число вершин тогда и только тогда, когда он является 1-вырожденным и спектр $S(a, b, a^*, b^*) = \varnothing$.

25. Почти все классические транспортные многогранники имеют максимальное число ребер.

26. Пусть $\varphi_1(m, n)$, $\varphi_2(m, n)$, ..., $\varphi_t(m, n)$ — последовательность всевозможных значений числа вершин классического транспортного многогранника порядка $m \times n$.

1) Найти число $t$.

2) Верно ли, что $\lim\limits_{m, n \to \infty} \dfrac{\max\limits_{1 \leqslant s \leqslant t} \mu\left(W^s_{m \times n}\right)}{\mu\left(W_{m \times n}\right)} = 0$? Здесь $\mu(W)$ — мера Лебега множества $W$ в пространстве $E_{m+n-1}$, $W^s_{m \times n} = \{(a, b) \in W_{m \times n}: f_0(M(a, b)) = \varphi_s(m, n)\}$, $W_{m \times n}$ имеет тот же смысл, что и в § 10 гл. VI.

27. Пусть множество всех классических транспортных многогранников порядка $m \times n$ с максимальным числом вершин разбито на классы эквивалент-

*) См. также Karp R. M., Papadimitriod C. H. On linear characterizations of combinatorial optimisation problems.— MIT Lab. comput. Sci. Techn. Mem., 1980, № 154.

ных многогранников. При взаимно простых $m$ и $n$ существует один такой класс (см. следствие 7.5 гл. VI). Найти число классов при $(m, n) \neq 1$ (см. [9] гл. VII).

28. Максимальное число вершин в классе симметрических транспортных многогранников порядка $n \times n$ (см. задачу 27 гл. VI) не меньше числа $\sum_{j=0}^{n-1} \prod_{k=0}^{j} (k^2+1)$ (см. [6] гл. VII).

29. Пусть $m, n \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant mn+m+n-1$. Минимальное число вершин в классе невырожденных правильно усеченных транспортных многогранников порядка $m \times n$ с $(m-1)(n-1)+k$ гранями максимальной размерности равно числу $k(m-1)(n-1)-k+2$.

Для $1 \leqslant k \leqslant (m-1)(n-1)+2$ эта гипотеза справедлива (см. задачу 7 гл. VII).

30. Всякое целое число от 1 до $m+n-1$, и только оно, реализуется как диаметр некоторого усеченного транспортного многогранника порядка $m \times n$.

31. Аксиальный транспортный многогранник $M(a^1, a^2, \ldots, a^p)$ порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$, $n_1 = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant p} n_s$, $p > 2$, определенный целочисленными векторами $a^1, a^2, \ldots, a^p$, имеет максимальное число целочисленных вершин тогда и только тогда, когда всякий классический транспортный многогранник $M(a^1, a^i)$, $i = \overline{2, p}$, обладает максимальным числом вершин.

32. Граф всякого невырожденного аксиального транспортного многогранника порядка $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_p$ с минимальным числом вершин гамильтонов.

Для $p=2$ эта гипотеза верна (см. задачу 59 гл. VI).

33. Планарный трехиндексный невырожденный транспортный многогранник $M(A^*, B^*, C^*)$ порядка $m \times n \times k$, определенный матрицами

$$A^* = \begin{Vmatrix} n & n & \ldots & n \\ n & n & \ldots & n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & n & \ldots & n \end{Vmatrix}, \quad B^* = \begin{Vmatrix} m & m & \ldots & m \\ m & m & \ldots & m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m & m & \ldots & m \end{Vmatrix}, \quad C^* = \begin{Vmatrix} k & k & \ldots & k \\ k & k & \ldots & k \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k & k & \ldots & k \end{Vmatrix},$$

имеет максимальное число вершин.

34. Верно ли, что всякое целое число от 1 до $mk+nk+mn-m-n-k+1$, и только оно, реализуется как диаметр некоторого планарного трехиндексного транспортного многогранника порядка $m \times n \times k$?

35. Максимальный радиус в классе классических транспортных многогранников порядка $m \times n$, $m, n \geqslant 3$, совпадает с максимальным диаметром в том же классе и равен числу $m+n-1$.

36. Существует ли алгоритм симплексного типа, число итераций которого не превосходит диаметра многогранника?

# ЛИТЕРАТУРА

## К введению

1. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. — М. — Л.: Гостехиздат, 1950.
2. Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. — Кишинев: Штиинца, 1978.
3. Вейль Г. Элементарная теория выпуклых многогранников. — В кн.: Матричные игры, М.: Физматгиз, 1961.
4. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщения и применения. — М.: Прогресс, 1966.
5. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Под ред. С. В. Яблонского и О. Б. Лупанова. — М.: Наука, 1974.
6. Еремин И. И., Астафьев Н. Н. Введение в теорию линейного и выпуклого программирования. — М.: Наука, 1976.
7. Еремин И. И., Мазуров В. Д. Нестационарные процессы математического программирования. — М.: Наука, 1979.
8. Канторович Л. В. Математические методы организации и планирования производства. — Л., 1939.
9. Погорелов Л. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. — М.: Наука, 1969.
10. Солтан П. С. Экстремальные задачи на выпуклых множествах. — Кишинев: Штиинца, 1976.
11. Хадвигер Г., Дебруннер Г. Комбинаторная геометрия плоскости. — М.: Наука, 1965.
12. Хачиян Л. Г. Полиномиальные алгоритмы в линейном программировании. — ЖВМ и МФ, 1980, № 1.
13. Чарин В. С. Линейные преобразования и выпуклые множества. — Киев: Віща школа, 1978.
14. Черников С. Н. Линейные неравенства. — М.: Наука, 1968.
15. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1979.
16. Bartels H. A priori Informationen zur linearen Programmierung. — Über Ecken und Hyperflachen auf Polyedern. — Meisenheim, 1973.
17. Brücner M. Vielecte und Vielflache. — Leipzig: Teubner, 1900.
18. Grünbaum B. Convex polytopes. — N Y., 1967.
19. Grünbaum B. Polytopes, graphs and complexes. — Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76.
20. Klee V. A class of linear programming problems requiring a large number of iterations. — Numer. Math., 1965, 7.
21. Klee V. Convex polyhedra and Mathem. Program. — Proc. Inter. Congr. Math. Vancouver, 1974.
22. Kirkman T. On the representation and enumeration of polyhedra. — Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester, 1855, 2, № 12.

23. Minkowski H. Theorie der konvexen Korper, Gesamm. Abhandlungen, Leipzig, 1911, 2.
24. Minkowski H Geometrie der Zahlen. — Leipzig, 1910.
25. McMullen P. Metrical and Combinatorial Properties of Convex Polytopes. — Proc. Inter. Congr Math., Vancouver, 1974.
26. McMullen P., Shephard G. Convex polytopes and the upper bound conjecture. — Cambridge, 1971.
27. Todd M. A combinatorial generalization of polytopes. — J. Combinat. Theory, 1976, **20**, № 3.
28. Tutte W. The enumerative theory of planar maps. — A Survey of Combinatorial Theory, North-Holland, 1973.
29. Steiner J. Probleme de situation. — Gesammelte Werke, Berlin, 1881, **1**.
30. Voronoj G. (Вороной). Sur quelgues propriétes des formes quadratiques positives parfaitess — J reine und angew. Math., 1908, **133**.
31. Voronoj G. (Вороной). Recherches sur le paralleloedres primitifs. — J. reine und angew. Math., 1908, **134**; 1909, **136**.

**К главе I**

1. Ашкинузе В. Г. Многоугольники и многогранники. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, 1963, **IV**.
2. Байнеке Л. Максимальное число сильно связных подтурниров. — В кн.: Теория графов, М.: Мир, 1974.
3. Гильберт Д., Конфоссен С. Наглядная геометрия. — М. — Л., 1951.
4. Карманов В. Г. Математическое программирование. — М.: Наука, 1975, 1980.
5. Ковалев М. М., Миланов П., Исаченко А. Н. О задачах линейного программирования с максимальным числом базисов. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 3.
6. Ковалев М. М., Исаченко А. Н. О многогранниках условий задачи линейного программирования. — Докл. АН БССР, 1978, **XXII**, № 3.
7. Кутателадзе С. С., Рубинов А. М. Двойственность Минковского и ее приложения. — Новосибирск: Наука, 1976.
8. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1970.
9. Пшеничный В. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
11. Шашкин И. А. Заметка о смежных вершинах выпуклых многогранников. — Успехи матем. наук, 1963, **18**, № 5.
12. Carathéodory C. Ueber den Variabilitatsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. — Math. Ann., 1907, **64**.
13. Carathéodory C. Ueber den Variabilitatsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven harmonischen Funktionen. — Rend. Circ. Mat. Palermo, 1911, **32**.
14. Bartels H. A priori Informationen zur linearen Programmierung. — Über Ecken und Hyperflachen auf Polyedern. — Meisenheim, 1973.
15. Dehn M. Die Eulersche Formel in Zusammenhang mit dem Inhalt in der nicht-Euklidischen Geometrie. — Math. Ann., 1905, **61**.
16. Euler L. Demonstatio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclussa sunt praedita. — Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropol., 1752, **4**, 53.
17. Farkas J. Über die Theorie der einfachen Ungleichunngen. — J. Reine Angew. Math., 1902, **124**.
18. Fenchel W. Convex cones, sets and functions. — Princeton, 1953.
19. Fulkerson D. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra. — Math. Program. 1971, **1**.
20. Gale D. Neighboring vertices on a convex polyhed om. — In: Linear inequalities and related systems. — Princeton, 1956. (Русский перевод: В кн. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: ИЛ, 1959.)

21. Gale D. Neighborly and cyclic polytopes. — Proc. Symp. Pure Math. 1963, 7 (Convexity).
22. Grünbaum B. Convex polytopes. N. Y.: Wiley, 1967.
23. Grünbaum B. On combinatorial spheres. — Combinat. Structures and their Appl., 1970.
24. Klee V. The number of vertices of a convex polytore. — Can. J. Math., 1964, **16**.
25. Kowalajw M., Milanow P. Kombinatorische Eigenschaften der Losungspolyeder der linearen Optimierung. — Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenan, 1976, **21**.
26. Kowalajw M., Milanow P. Matroides of rang 2 and 3. — Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau, 1979, **24**.
27. McMullen P. Valuations and Euler type relations on certain classes of convex polytopes. — Proc. London. Math. Soc., 1977, **35**, № 1.
28. McMullen P., Shephard G. Convex polytopes and the Upper Bound Conjecture. — Cambridge, 1971.
29. Poincare H. Sur la generalisation d'un theoreme d'Euler relatif aux polyedres. — Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, 1893, **117**.
30. Minkowski H. Allgemeine Lehrsätze über die konvexe Polyeder — Nachr. Ges. Wiss. Gottingen, 1897. (Русский перевод: Минковский Г. Общие теоремы о выпуклых многогранниках. — Успехи матем. наук, 1936. Вып. 1, 2.)
31. Motzkin T. S. Beitrage zum Theorie der linearen Ungleichungen. — Ph. D. Thesis. Basel, 1933.
32. Sommerville D. The relations connecting the angle-sums and volume of a polytope in space of $n$ dimensions. — Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, 1927, **115**.
33. Stanley R. The number of faces of simplicial convex polytopes. — 1980, **35**, № 3.
34. Steinitz E. Polyeder und Raumeintailungen. — In: Enzykl. Mathematischen Wiss., 1922, **3**.
35. Weyl H. Elementare Theorie der konvexen Polyeder. — Comment. Math. Helvetici, 1935, **7**. (Русский перевод: Вейль Г. Элементарная теория выпуклых многогранников. — В кн.: Матричные игры, М., 1961.)
36. Whitney H. A set of topological invariants for graphs. — Amer. J. Math., 1933, **55**.

**К главе II**

1. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. — М., 1956.
2. Медяник А. И. Некоторые комбинаторные свойства выпуклых многогранников. — Украинск. геом. сб. 12, 1972.
3. Ремеш Е. Я., Штейнберг А. С. Об одной теореме о выпуклых многогранниках в связи с вопросами нахождения совокупности решений системы линейных неравенств. — Украинск. матем. журн., 1967, **19**, № 2.
4. Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.
5. Adler J. Lower bounds for maximum diameters of polytopes. — Math. Program. Study 1. 1974.
6. Balinski M. On the graph structure of convex polyhedra in $n$-space. — Pacific J. Math., 1961, **11**.
7. Barnette D. An upper bound for the diameter of a polytope. — Discr. Math., 1974, **10**.
8. Barnette D., Grünbaum B. On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and on some properties of 3-connected graphs. — Lecture Notes in Math., Berlin, 1969, **110**.
9. Eberhard V. Zum Morphologie der Polyeder. — Leipzig: Teubner, 1891.
10. Eggleston H., Grünbaum B., Klee V. Some semicontunuity theorems for convex polytopes and cell-complexes. — Comm. Math. Helv., 1964, **39**.

11. Grünbaum B. Polytopal graphs. — Studies in graph theory., Part II, Studies in Math., 1975, **12**.
12. Klee V. Polytope pairs and their relationship to linear programming. — Acta Math., 1974, **133**.
13. Klee V., Minty G. How good is the simplex algorithm? — Inequalities III., Acad. Press, 1972.
14. Klee V., Walkup D. The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$. — Acta Math., 1967, **117**.
15. Steinitz E. Polyeder und Raumeinteilungen. — Enzykl. Math. Wiss., 1922, **3**.

**К главе III**

1. Александров П. С. Комбинаторная топология. — М.: ОГИЗ, 1947.
2. Ковалев М. М. Полиэдральные полуматроиды. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 3.
3. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. — М.: Наука, 1976.
4. Adler J., Dantzig G. Maximum diameter of abstract polytopes. — Math. Program. Study 1, 1974.
5. Adler J., Dantzig G., Murty K. Existence of A-avoiding paths in abstract polytopes. — Math. Program. Study 1, 1974.
6. Altschuler A., McMullen P. The number of simplicial neighbourly d-polytopes with $d+3$ vertices. — Mathematika, 1973, **20**.
7. Barnette D. A. Proof of the lower bound conjecture for convex polytopes. — Pacific J. Math., 1973, **46**, № 2.
8. Bruggesser H., Mani P. Shellable decompositions of cells and spheres. — Mathem. Scand., 1971, **29**.
9. Cayley A. On the Δ-faced polyacrons in reference to the problem of the enumeration of polyhedra. — Mem. His. Philos. Soc. Manchester, 1862, **1**.
10. Gale D. On the number of faces a convex polytope. — Can. J. Math., 1964, **16**.
11. Grünbaum B. Convex polytopes. — N. Y.: Wiley, 1967.
12. Klee V. Polytope pairs and their relationship to linear programming. — Acta Math., 1974, **133**.
13. Kowalajw M., Isatchenko A. Semimatroide — Vortragsthesen 24, Intern. Wiss. Koll. TH Ilmenau, 1979.
14. Lawrence J. Abstract polytopes and the Hirsch conjecture. — Mathem. Progr., 1978, **15**, № 1.
15. Lloyd K. The number of d-polytopes with $d+3$ vertices. — Mathematika, 1970, **17**.
16. Mcmullen P. The number of neighborly d-polytopes with $d+3$-vertices. — Mathematika, 1974, **21**.
17. Mcmullen P, Shephard G. Convex polytopes and the Upper Bound Conjecture. — Cambridge, 1971.
18. Motzkin T. Comonotone curves and polyhedra. — Bull. Am. Math. Soc., 1957, **63**.
19. Schlegel V. Ueber die verschiedenen Formen von Gruppen, welcher beliebige Punkte im n-dimensionalen Raum bilden konnen. — Arch. Math. Phys., 1891, **10**.
20. Stanley R The upper bound conjecture and Cohen — Macaylay rings. — Studies in Appl. Mathem., 1975, **54**, № 2.
21. Steiner J. Von dem Krummungsschwerpunkte ebener Curven. — Ges. Werke., Berlin, 1882, **2**.
22. Walkup D. The Hirsch conjecture fails for triangulated 27-spheres. — Mathem. Oper. Res., 1978, **3**, № 2

**К главе IV**

1. Анастасян Ю. Г. Об одном классе задач целочисленного линейного программирования. — Кибернетика, 1975, № 3.

2. Белоусов Е. Г. Введение в выпуклый анализ и целочисленное программирование. — М.: МГУ, 1977.

3. Веселов С. И., Шевченко В. Н. Об экспоненциальном росте коэффициентов агрегирующего уравнения. — Кибернетика, 1978, № 4.

4. Вотяков А. А., Фрумкин М. А. Алгоритм нахождения общего целочисленного решения системы линейных уравнений. — В кн.: Исследования по дискретной оптимизации, М.: Наука, 1976.

5. Зыков А. А. Гиперграфы. — Успехи матем. наук, 1974, **29**, № 6.

6. Иванов Н. Н. Приведение класса задач целочисленного линейного программирования к задаче о покрытии. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1974, № 4.

7. Иванов Н. Н. Об одном способе агрегации задачи целочисленного линейного программирования. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1975, № 2.

8. Иванов Н. Н., Шевченко В. Н. Строение конечно-порожденной полурешетки. — Докл. АН БССР, 1975, **19**, № 9.

9. Касселс Д. Введение в геометрию чисел. — М.: Мир, 1965.

10. Ковалев М. М. Дискретная оптимизация. — Минск: БГУ, 1977.

11. Ковалев М. М. Метод частичных порядков. — Докл. АН БССР, 1980, **24**, № 2.

12. Ковалев М. М., Емеличева В. С. Экстремальные свойства частично упорядоченного множества плоских разбиений. — В кн.: Вопросы кибернетики., М.: Советское радио, 1975.

13. Ковалев М М., Исаченко А. Н., Нгуен Нгиа. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации. — Докл. АН БССР, 1978, **22**, № 10.

14. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978.

15. Петрова Г. Л. Условие конечной порожденности одного класса полугрупп. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 2.

16. Петрова Г. Л. Условия неприводимости порождающего множества полугруппы целых точек многогранного конуса. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 2.

17. Сапоженко А. А., Асратян А. С., Кузюрин Н. Н. Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии. — В кн.: Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач., Новосибирск, 1977, вып. 30.

18. Сачков В. Н Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.

19. Трубин В. А. О методе решения задач целочисленного линейного программирования специального вида. — Докл. АН СССР, 1969, **189**, № 5.

20. Шевченко В. Н. О пересечении выпуклого многогранного конуса с целочисленной решеткой. — Изв. высш. учебн. завед., сер. радиофизика, 1970, **83**, № 8.

21. Шевченко В. Н. Дискретный аналог теоремы Фаркаша и проблема агрегации системы линейных целочисленных уравнений. — Кибернетика, 1976, № 2.

22. Шевченко В. Н., Иванов Н. Н. О представлении полугруппы полугруппой, порожденной конечным множеством векторов. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 2.

23. Шевченко В. Н. Выпуклые многогранные конусы, системы сравнений и правильные отсечения в целочисленном программировании. — В кн.: Комбинаторно алгебраические методы в прикладной математике., Горький: ГГУ, 1979.

24. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. — М.: Мир, 1966.

25. Balas E., Padberg M. On the set covering problem — Oper. Res , 1972, **20**, № 6; 1975, **23**, № 1.

26. Beged-Dov A. Lower and upper bounds for the number of lattice points in a simplex. — J. Appl. Math , 1972, **22**

27. Berge C. Graphes of hypergraphes — Paris; Dunod, 1970

28. Berge C. Balanced matrices. — Math. Program., 1972, **2**, № 1.

29 Brown D. Compound and unimodular matrices. — Discr. Math., 1977, **19**, № 1.

30. Camion P. Characterization of totally unimodular matrices.—Proc. Amer. Math Soc., 1965, **16**
31. Chandrasekaran R Total unimodularity of matrices.—SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, № 6
32. Chvatal V. On certain polytopes associated with graphs.—J. Combin. Theory, 1975, **18**, № 2.
33. Cunningham W. An unbounded matroid intersection polyhedron.—Linear Algebra and Appl., 1977, **16**, № 3.
34. Ehrhart E. Polynomes arithmetiques et méthode des polyhederes en combinatoire.—Basel-Stuttgart, 1977.
35. Edmonds J. Maximum matching and a polyhedron with 0,1-vertices.—J. Res Nat. Bureau Standards, 1965, **69**.
36 Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra.—In: Combin. Structures and their Applications, Gordon and Breach, 1970.
37 Fiorot J. Generation of all integer points for given sets of linear inequalities.—Math. Program, 1972, **3**.
38. Fulkerson D. Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra.—Math. Program., 1971, **1**.
39. Fulkerson D., Hoffman A., Oppenheim R. On balanced matrices —Math. Program Study 1, 1974
40 Ghouilla-Houri A. Caractérisation des matrices totalement unimodulaires.—C. r. Acad. Sci., 1962, **254**, № 7.
41. Girlich E, Kowalajw M., Nichtlineare diskrete Optimierung.—Berlin: Akademie, 1981.
42 Gomory R. Some polyhedra related to combinatorial problems.—Linear Algebra and Appl, 1969, **2**.
43. Heller J. On linear systems with integral valued solutions.—Pacif. J Math., 1957, 7, № 3.
44. Heller J. On unimodular sets of vectors.—Recent Advances in Math. Program., 1963.
45. Heller J, Tompkins C. An extension of a theorem of Dantzig's —In: Linear inequalities and related Systems, 1958 (Русский перевод: В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы, М.: ИЛ, 1959.)
46 Hilbert D Über die Theorie der algebraischen Formen.—Math Ann., 1890, **36**
47. Hoffman A., Kruskal J. Integral boundary points of convex polyhedra.—In: Linear inequalities and related systems, 1958 (Русский перевод: В кн.: Линейные неравенства и смежные вопросы, М.: ИЛ, 1959.)
48. Hoffman A. The role of unimodularity in applying linear inequalities to combinatorial theorems.—Annals of Discr. Math., 1979, **4**.
49. Jeroslow R. Some basis theorems for integral monoids.—Math. Oper. Res., 1978, **2**, № 2.
50. Jeroslow R. An introduction to the theory of cutting planes.—Discr. Math., 1979, **5**.
51. Kowalajw M., Girlich E. Minimisierung konvexer Funktionen über unbeschrankten Polymatroiden.—International Tagung «Mathematische Optimierungstheorie», 1978
52. Kovalajw M., Nguen Ngia, Kühn E. Ein Klasse ganzzahligen Polyheder.—Humboldt. Universitat zu Berlin, Tagung Math. Optimierung, 1977.
53. Lawler E. Combinatorial optimization. Networks and matroids.—N. Y., 1976.
54. Lovász L Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture.—Discr. Math., 1972, **2**, № 3.
55. Lovász L. Graph theory and integer programming.—Annals of Discr. Math., 1979, **4**.
56. Mathews G. On the partition of numbers —Proc. London Math. Soc., 1897, **28**.
57. Meyer R. On the existence of optimal solutions to integer and mixed-integer programming problems.—Math. Program., 1974, **7**, № 2.
58. Minkovski H. Geometrie der Zahlen.—Leipzig, 1910.

59. P a d b e r g M. A note on the total unimodularity of matrices. — Discr. Math., 1976, **14**, № 3.
60. P a d b e r g M. Perfect zero-one matrices. — Math. Program., 1974, **6**.
61. P a d b e r g M. On the facial structure of set packing polyhedra. — Math., Program., 1973, **5**.
62. P a d b e r g M. Covering, packing and knapsack problems. — Annals of Discr. Math., 1979, **4**.
63. P o i n c a r é H. — Proc. Lond. Math. Soc., 1901, **32**.
64. P u l l e y b l a n k W., E d m o n d s J. Facets of 1-matching polyhedra. — In: Hypergraph Seminare, Springer, 1974, **411**.
65. P r e s b u r g e r M. Über die Vollständigkeit eines gewissen System der Arithmetic ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einizige Operation hervortritt. — Sprawozdanie z I Kongresy Matematykow Krajow Slowianskich, Warszawa, 1930.
66. S a i g a l R. A proof of the Hirsch conjecture on the polyhederon of the shortest route problem. — SIAM J. Appl. Math., 1969, **17**, № 6.
67. S a k a r o v i t c h M., M a c A l l i s t e r J. Classification de certaines matrices 0-1. — Discr. Math., 1977, **20**, № 2.
68. S m i t h H. On systems of linear indeterminate equations and congruences. — Philosophical Transac., 1861, **151**.
69. S t a n l e y R. Combinatorial reciprocity theorems. — Advances in mathematics, 1974, **14**, № 2.
70. T u c k e r A. The strong perfect graph conjecture for planar graphs. — Can. J. Math., 1973, **25**, № 1.
71. T u t t e W. Introduction to the theory of matroids. — Elsevier, 1971.
72. V e i n o t t A., D a n t z i g G. Integral extreme points. — SIAM Rev., 1968, **10**, № 3.
73. Welsh D. Matroid theory. — N. Y. — L.: Acad. Press, 1976.

**К главе V**

1. Б е р е с н е в В. Л., Г и м а д и Э. Х., Д е м е н т ь е в В. П. Экстремальные задачи стандартизации. — Новосибирск: Наука, 1978.
2. Г и р л и х Э., К о в а л е в М. М. Класс многогранников задачи стандартизации с максимальным числом вершин. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1974, № 6.
3. Е м е л и ч е в В. А., К о в а л е в М. М. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов. I, II. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1970, № 6; 1972, № 1.
4. К о в а л е в М. М., Г и р л и х Э. О точном числе вершин многогранников условий задачи стандартизации. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 2.
5. К о в а л е в М. М., Г и р л и х Э. Структура допустимой области задачи стандартизации. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1980, № 4.
6. К о в а л е в М. М., Г о р у н о в и ч С. А. Перестановочные полиматроиды. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1980, № 5.
7. К о в а л е в М. М., И с а ч е н к о А. Н., Н г у е н Н г и а. Линеаризация комбинаторных задач оптимизации. — Докл. АН БССР, 1978, № 10.
8. К о в а л е в М. М., К о т о в В. В. Анализ градиентного алгоритма решения задачи коммивояжера. — ЖВМ и МФ, 1981, № 1.
9. Л е о н т ь е в В. К. Устойчивость задачи коммивояжера. — ЖВМ и МФ, 1975, **15**, № 5.
10. Л е о н т ь е в В. К. Дискретные экстремальные задачи. — В кн.: Итоги науки и техники, сер. Теор. Вероятн., Матем. Статистика, Теорет. Кибернетика, М.: ВИНИТИ, 1979.
11. М и к у л ь с к и й В. Е. Об экстремуме суммы линейных форм на множестве подстановок. — Докл. АН БССР, 1974, **18**, № 10.
12. С а р в а н о в В. И. О многогранниках, связанных с оптимизацией на подстановках. — Препринт ИМ АН БССР, 1977.

13. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1977.
14. Сачков В. Н. Об экстремальных точках пространства симметричных стохастических матриц. — Матем. сб., 1975, **96**, № 3.
15. Супруненко Д. А., Метельский Н. Н. Задача о назначениях и минимизация суммы линейных форм на симметрической группе. — Кибернетика, 1973, № 3.
16. Танаев В. А., Шкурба В. В. Введение в теорию расписаний. — М.: Наука, 1975.
17. Харди Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. — М.: ИЛ, 1948.
18. Balinski M., Russakoff A. Some properties of the assignment polytope. — Math. Progr., 1972, **3**.
19. Birkhoff G. Trés observaciones sobre et algebra linear. — Rev. Univ. Nac. Tucuman Revista, 1946, A5.
20. Brualdi R., Gibson P. Convex polyhedra of doubly stochastic matrices. I, II, III — J. Combinat. Theory, 1977, A22, № 2; 1977, B22; 1977, A22, № 3; IV — Linear Algebra and Appl., 1976, **15**, № 2.
21. Bowman V. Permutation polyhedra. — SIAM J. Appl. Math., 1972, **22**, № 4.
22. Cruse A. A note on symmetric doubly-stochastic matrices. — Discr. Math., 1975, № 2.
23. Gaihar P., Gupta S. Adjacent vertices on a permutohedron. — SIAM J. Appl. Math., 1977, **32**, № 2.
24. Grötschel M., Padberg M. Lineare Characterisierungen von Travelling Salesman Problemen. — Z. Oper. Res. A, 1977, **21**, № 1.
25. Grötschel M., Padberg M. On the symmetric travelling salesman problem I: Inequalities. — Math. Program., 1979, **16**, № 2; II: Lifting theorems and facets. — Math. Progr. 1979, **16**, № 2.
26. Heller J. On the travelling salesman problem. — Proc. 2 Sympos. Linear Program, Washington. 1955, **2**.
27. Heller J. Neighbour relations on the convex hull of cyclic permutations. — Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 3.
28. Koontz W. Convex sets of some double stochastic matrices. — J. Combinat. Theory, 1978, A 24, № 1.
29. Kowalajw M. M., Isatschenko A. Linearisierung Kombinatorischer Optimierungsprobleme. — Vortragsthesen zum "Math. Optimierung", Universitat Berlin, 1978.
30. Kowalajw M. M., Girlich E. Zum Problem der optimalen Standartisierung. — Mathem. Operationsforschung, ser. optimization, 1977, **8**, № 1.
31. Kuhn H. On certain convex polyhedra. — Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 6.
32. Maurras J. Some results on the convex hull of the Hamiltonian cycles of symmetric complete graphs. — Combinat. Program: Meth. and Appl. Dordrecht, Boston, 1975.
33. Norman R. On the convex polyhedra of the symmetric travelling salesman problem. — Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **59**, № 6.
34. Padberg M., Rao M. The travelling salesman problem and a class of polyhedra of diameter two. — Math. Program., 1974, **7**, № 1.
35. Papadimitriou C. The adjacency relation on the travelling salesman polytope is NP-complete. — Math. Progr. 1978, **14**, № 3.
36. Rado R. An inequality. — J. London Math. Soc., 1952, **27**.
37. Savage S., Weiner P., Bagchi A. Neighbourhood search algorithms for guaranteering optimal travelling salesman tours must be inefficient. — J. Comput. and Syst. Sci., 1976, **12**, № 1.

**К главе VI**

1. Емеличев В. А. Об одной задаче вогнутого программирования. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1965, № 3.

2. Емеличев В. А. О локальных минимумах в одной многоэкстремальной задаче. I, II — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1969, № 1, № 4.

3. Емеличев В. А., Ковалев М. М. О локальных минимумах в транспортной задаче с функцией цели, вогнутой по Шуру. — ЖВМ и МФ, 1972, **12**, № 5.

4. Емеличев В. А., Кононенко А. М. Об одной комбинаторной перечислительной задаче. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1970, № 2.

5. Емеличев В. А., Кононенко А. М. Об одном классе транспортных многогранников. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1971, № 3.

6. Емеличев В. А., Кравцов М. К. К перечислительным задачам на транспортных многогранниках. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 1.

7. Емеличев В. А., Кравцов М. К. Некоторые вопросы понижения размерности транспортной задачи. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 2.

8. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О некоторых свойствах транспортных многогранников с максимальным числом вершин. — ДАН СССР, 1976, **228**, № 5.

9. Емеличев В. А., Кравцов М. К. О транспортных многогранниках с максимальным числом вершин. — В кн.: Вопросы кибернетики, М.: Изд-во АН СССР, 1978, вып. 26.

10. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Авербух Н. Д. О максимальном числе вершин транспортного многогранника. — ДАН БССР, 1976, **20**, № 6.

11. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. Доказательство гипотезы Болкера. — ДАН БССР, 1977, **21**, № 9.

12. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. К гипотезе о максимальном числе вершин транспортного многогранника. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1977, № 6.

13. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. Оценки числа вершин транспортных многогранников. — Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, 1977.

14. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. Минимальное число вершин невырожденного транспортного многогранника с фиксированным числом граней. — ДАН БССР. 1978, **22**, № 1.

15. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. О некоторых классах транспортных многогранников. — ДАН СССР, 1978, **241**, № 3.

16. Емеличев В. А., Кравцов М. К., Крачковский А. П. Транспортные многогранники с заданным числом граней и максимальным числом вершин. — В кн.: Вопросы математического обеспечения в автоматизированных системах, Минск: НИИЭМП при Госплане БССР, 1979.

17. Емеличев В. А., Крачковский А. П. Асимптотика транспортных многогранников. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 4.

18. Емеличев В. А., Трухановский Н. Н. О спектре транспортных многогранников. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1977, № 5.

19. Емеличева В. С., Кравцов М. К. О гранях вырожденного транспортного многогранника. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1977, № 5.

20. Кононенко А. М., Трухановский Н. Н. О транспортных многогранниках с максимальным числом вершин. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 5.

21. Кононенко А. М., Трухановский Н. Н. Класс транспортных многогранников с максимальным числом вершин. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 5.

22. Кравцов М. К. К вопросу понижения размерности транспортной задачи. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1973, № 2.

23. Кравцов М. К. Перечислительные задачи на вырожденных транспортных многогранниках. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 6,

24. Кравцов М. К. К оценке сверху числа вершин вырожденного транспортного многогранника.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 6.
25. Кравцов М. К. О $(d-2)$-мерных гранях транспортного многогранника размерности $d$.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 3.
26. Кравцов М. К., Емеличев В. А. О транспортных многогранниках с заданным числом граней.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 5.
27. Кравцов М. К., Крачковский А. П. О транспортных многогранниках с заданным числом граней и минимальным числом вершин.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 5.
28. Крачковский А. П. Об одной формуле для максимального числа вершин транспортного многогранника.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 1.
29. Крачковский А. П. Об одной асимптотической задаче Болкера.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 2.
30. Крачковский А. П., Емеличев В. А. К оценке сверху диаметра транспортного многогранника.—ДАН БССР, 1979, **23**, № 4.
31. Курцевич К. А., Кравцов М. К. Метод понижения размерности транспортной задачи линейного программирования.—В кн.: Математические методы решения экономических задач, М.: Наука, 1974.
32. Лихачев В. М. Об одной оценке числа вершин транспортного многогранника.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1975, № 2.
33. Лихачев В. М., Емеличев В. А. К оценке сверху числа вершин транспортного многогранника.—Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1974, № 3.
34. Огурцова Л. Н., Скалецкая Е. И., Скалецкий В. Н. Устойчивость решений транспортной задачи.—В кн.: Управление и информация, Владивосток, 1973, вып. 8.
35. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения.—М., 1967, **2**.
36. Хинчин А. Я. Цепные дроби.—М.: Наука, 1978.
37. Швартин С. М. Исследование устойчивости транспортных задач.—ЖВМ и МФ, 1978, **18**, № 1.
38. Austin T. L. The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees.—Canad. J. of Math. 1960, **12**, № 4.
39. Balinski M. On two special classes of transportation polytopes.—Math. Program. Study 11, 1974.
40. Bolker E. Transportation polytopes.—J. of Comb. Th., 1972, **13**.
41. Gibson P. Facets of faces of transportation polytopes.—Proc. of the Seventh Conf. on Comb. Graph Th. Comput., Louisiana, 1976.
42. Demuth O. A Remark on the transportation problem.—Casopis propestovati matematiky, Praha, 1961, **86**.
43. Intrator J., Lev B. Methods for indentification of vanishing variables in transportation problems and its possible applications.—Comput. and Oper. Res., 1976, **3**, № 4.
44. Jemelitschev V., Krawzow M. Transportpolyede.—21.IWK der TH Ilmenau, 1976.
45. Klee V., Witzgal C. Facets and vertices of transportation polytopes.—Math. of Decision Sciences, Part I, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
46. Klingman D., Russel R. The transportation problem with mixed constraints.—Operations Research Quarterly, 1974, **25**, № 3.
47. Mauldon J. Random division of an interval.—Proc. of the Camb. Philosophical Society, 1951, **47**, part 2.
48. Moon J. The number of labelled k-trees.—J. of Comb. Th., 1969, **6**.
49. Olah G. Задача о подсчете числа некоторых деревьев. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica. 1968, **3**.
50. Orden A. The transshipment problem.—Management Science, 1956, **2**, № 3.
51. Scoins H. The number of trees with modes of alternate parity.—Proc. of the Camb. Philosophical Society. 1962, **58**.

52. Simmonard M., Hadley G. The maximum number of iterations in the transportation problem. — Naval Research Quarterly, 1959, **6**, № 2.
53. Szwarz W., Wintgen G. The number of transportation bases. — Math. (Cluj), 1965, 7, № 1.

### К главе VII

1. Емеличев В. А., Кравцов М. К. Решение транспортной задачи большого объема с запретами. — Тезисы докладов второго Всесоюзного семинара по математическому обеспечению АСУП, Москва—Горький, 1975.
2. Емеличева В. С. Перечислительные задачи на одном классе транспортных многогранников. — ДАН БССР, 1974, **18**, № 6.
3. Кононенко А. М., Емеличева Е. В. О числе остовов двудольного графа. — В кн.: Вопросы математического обеспечения в автоматизированных системах, Минск: НИИЭМП при Госплане БССР, 1979.
4. Кононенко А. М., Трухановский Н. Н. Перечисление максимальных деревьев одного класса двудольных графов. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1978, № 6.
5. Кравцов М. К., Корзников А. Д. Перечислительные задачи на усеченных транспортных многогранниках. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 4.
6. Dubois J. Polytopes de transport symetriques. — Discr. Math., 1973, **4**, № 1.
7. Lev B. A noniterative algorithm for tridiagonal transportation problem and its generalisation. — Operations Research, 1972, **20**, № 1.
8. Perfect H., Mirsky L. Extremal points of certain convex polytopes. — Monatsh. Math., 1964, **68**.
9. Reverz P. Seminar on Random Ergodic Theory 6. — University of Aarhus, 1961.

### К главе VIII

1. Диниц Е. А., Кронрод М. А. Один алгоритм решения задачи о назначениях. — ДАН СССР, 1969, **189**, № 1.
2. Емеличев В. А., Кононенко А. М. Условие вырожденности многоиндексного транспортного многогранника. — ДАН БССР, 1972, **16**, № 6.
3. Емеличев В. А., Кононенко А. М. О числе планов многоиндексной проблемы выбора. — ДАН БССР, 1974, **18**, № 8.
4. Емеличев В. А., Кононенко А. М., Лихачев В. М. О многогранниках многоиндексной транспортной задачи. — ДАН БССР, 1972, **16**, № 5.
5. Емеличева В. С., Кононенко А. М. О минимальном числе целочисленных вершин многогранника многоиндексной транспортной задачи. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1974, № 3.
6. Емеличева В. С., Кононенко А. М. О минимальном числе вершин и граней многогранника планарной транспортной задачи. — ДАН БССР, 1974, **18**, № 9.
7. Кононенко А. М. Об одном классе гиперграфов. — ДАН БССР, 1973, **17**, № 9.
8. Кононенко А. М., Микульский В. Е., Трухановский Н. Н. Об условиях разрешимости трехиндексных планарных транспортных задач. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1976, № 6.
9. Кравцов М. К. О максимальном числе целочисленных вершин аксиального транспортного многогранника. — В кн.: Вопросы математического обеспечения в автоматизированных системах, Минск: НИИЭМП при Госплане БССР, 1979.
10. Кравцов М. К., Кашинский Ю. И. Об условиях разрешимости многоиндексных транспортных задач со специальными ограничениями. — В кн.: Автоматизированные системы плановых расчетов в республиканских плановых органах, Минск: НИИЭМП при Госплане БССР, 1977, вып. 9.

11. Кравцов М. К., Шерман А. Х., Авербух Н. Д. Об одном алгоритме решения задачи о назначениях. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1975, № 6.
12. Райзер Г. Дж. Комбинаторная математика. — М.: Мир, 1966.
13. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. — М.: МГУ, 1972.
14. Таланов В. А., Шевченко В. Н. Об одной задаче на динамической транспортной сети. — Изв. высших учебных заведений, Радиофизика, 1972, **15**, № 7.
15. Таланов В. А., Ильичев А. П. Трехиндексные транспортные задачи и составление учебных расписаний. — Экономика и математические методы, 1979, **15**, № 4.
16. Трухановский Н. Н. Условия разрешимости одного класса многоиндексных планарных транспортных задач. — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1979, № 3.
17. Феденя О. А. О многогранниках многоиндексной планарной транспортной задачи с минимальным числом вершин. I, II — Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, 1977, № 5, № 6.
18. Холл М. Комбинаторика. — М.: Мир, 1970.
19. Bolker E. Simplicial geometry and transportation polytopes. — Transactions of the Am. Math. Soc., 1976, **217**.
20. De Werra D. Some comments on a note about timetabling. — Infor., 1978, **16**, № 1.
21. Leue O. Methoden zur Lösung dreidimensionaler Zuordnungsproblem. — Angewandte Informatik, 1972, № 4.
22. Moravek J., Vlach M. On the necessary conditions for the existence of the solution of the multi-index transportation problem. — Operations Research, 1967, **15**, № 3.
23. Motzkin T. Multi-index transport problem. — Bull. Am. Math. Soc., 1952, **58**, **4**.
24. Smith G. Further necessary conditions for the existence of a solution to the multi-index problems. — Operat. Res., 1973, **21**, № 1.
25. Haley K. The multi-index problem. — Operat. Res., 1963, **11**, № 3.
26. Haley K. Note on the letter by Moravek and Vlach. — Operat. Res. 1967, **15**, № 3.
27. Schell E. Distribution of product by several properties. — Proc. 2-nd Sympos. Linear Programming, Washington, 1955, **2**.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Теорема 2.1. *Максимальная размерность трехиндексного планарного транспортного многогранника порядка $m\times n\times k$ равна числу $(m-1)(n-1)(k-1)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что ранг системы линейных уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ijt}=a_{it} \qquad \forall i\in N_m\setminus\{1\}, \quad t\in N_k,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ijt}=b_{jt} \qquad \forall (j,\ t)\in N_n\times N_k,$$

$$\sum_{t=1}^{k} x_{ijt}=c_{ij} \qquad \forall (i,\ j)\in N_m\times N_n,$$

равен числу $\beta=mk+nk+mn-m-n-k+1$. С другой стороны, так как любые $m+n+k-1$ уравнений системы (2.1) — (2.3) являются следствием всех остальных ее уравнений, то ранг матрицы ограничений не превосходит числа $\beta$. Следовательно, ранг системы линейных уравнений (2.1) — (2.3) равен числу $\beta$. Поэтому в силу предложения 4.1 гл. I размерность всякого трехиндексного планарного транспортного многогранника $M(A,\ B,\ C)$ порядка $m\times n\times k$ удовлетворяет неравенству $\dim M(A,\ B,\ C)\leqslant\leqslant(m-1)(n-1)(k-1)$.

В то же время трехиндексным планарным транспортным многогранником, размерность которого равна числу $(m-1)\times\times(n-1)(k-1)$, является многогранник $M(A^*,\ B^*,\ C^*)$ порядка $m\times n\times k$, определенный матрицами

$$A^*=\begin{Vmatrix} n & n\ldots n\\ n & n\ldots n\\ \ldots & \ldots\\ n & n\ldots n\end{Vmatrix},\quad B^*=\begin{Vmatrix} m & m\ldots m\\ m & m\ldots m\\ \ldots & \ldots\\ m & m\ldots m\end{Vmatrix},\quad C^*=\begin{Vmatrix} k & k\ldots k\\ k & k\ldots k\\ \ldots & \ldots\\ k & k\ldots k\end{Vmatrix},$$

поскольку у него существует точка $\|x_{ijt}\|_{m\times n\times k}$ с условиями $x_{ijt}>0$ $\forall (i,\ j,\ t)\in N_m\times N_n\times N_k$ Теорема 2.1 доказана.

**3. Симплексы.** Среди классических транспортных многогранников порядка $m\times n$ имеются $\max(m,\ n)$-симплексы лишь в случае, когда $\min(m,\ n)=2$ (см. § 5 гл. VI).

Имеет место следующая теорема, принадлежащая О. А. Феденя [17].

Теорема 2.2. *Среди трехиндексных планарных транспортных многогранников порядка $m\times n\times k$, $m,\ n,\ k\geqslant 2$, существуют $(m-1)(n-1)(k-1)$-симплексы.*

Доказательство. Рассмотрим трехиндексный планарный транспортный многогранник $M(A_0,\ B_0,\ C_0)$ порядка $m\times n\times k$,

$T(p, n, m)$ — множество планов многоиндексной задачи выбора 308

$r(u/v)$ — остаток от деления числа $u$ на $v$ 241

$$\operatorname{sign} a = \begin{cases} 0, & \text{если } a = 0, \\ 1, & \text{если } a > 0, \\ -1, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

$|S|$ — число элементов конечного множества $S$

$\varnothing$ — пустое множество

$\binom{n}{m}$ — число сочетаний из $n$ по $m$

$\mathfrak{M}_p$ — класс регулярных аксиальных транспортных многогранников 295

$d$ — размерность многогранника $Z^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\mu_{I,J}(a, b)$ 211

$G(x)$ 171

$\mathfrak{A}_{m \times n}$ 211

$\mathfrak{A}(a, b)$ 211

$G_x(U, V)$ 219

$M(A, b^1, b^2, d^1, d^2)$ 117

$\mathcal{K}(a, b, x)$ 229

$G_T(_{a, b, x})(U, V)$ 219

$Q^\rho(a, b)$ 231

$M(a^\lambda, b^\lambda)$ 231

$\delta_{L,P}(a, b)$ 232

$\gamma_{L,P}(a, b)$ 232

$D_{m, mq-1}$ 214

*Владимир Алексеевич Емеличев,*
*Михаил Михайлович Ковалев,*
*Михаил Константинович Кравцов*

МНОГОГРАННИКИ, ГРАФЫ, ОПТИМИЗАЦИЯ

Редакторы: *И. В. Викторенкова, С. П. Тарасов*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры: *О. М. Кривенко, Н. Д. Дорохова*

ИБ № 11500

Сдано в набор 20.01.81. Подписано к печати 25.09.81. Т-25093. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага тип. № 1. Литературная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 21,5. Уч.-изд. л. 24,84. Тираж 8600 экз. Заказ № 1878. Цена 2 р. 30 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Октябрьской Революции, ордена Трудового Красного Знамени Ленинградское производственно-техническое объединение «Печатный Двор» имени А. М. Горького Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 197136, Ленинград, П-136, Чкаловский пр., 15.

Отпечатано в тип. № 2 изд-ва «Наука»,
Москва, Шубинский, 10. Зак. 1059

2 р. 80 к.